

浙江大学



应用运筹学基础

分枝定界法求解整数规划

第三组

分枝定界法求解整数规划

小组成员:

陈翰逸
林锦铿
黄文璨
赵竞霖

Contents

1	背景介绍	1
2	算法描述	2
2.1	单纯形法	2
2.1.1	标准形式	3
2.1.2	松弛形式	3
2.1.3	转轴变换	4
2.1.4	最优化过程	4
2.1.5	Bland 法则	5
2.2	分枝定界法	6
3	实现过程	8
3.1	Parse	8
3.1.1	预处理	9
3.1.2	优化	9
3.1.3	工具函数	10
3.2	单纯形法	11
3.2.1	源代码分析	11
3.2.2	其他函数分析	12
3.3	分枝定界法	13
4	测试结果	15

5	分析与评价	16
5.1	时间复杂度	16
5.1.1	单纯形法	16
5.1.2	分枝定界法	16
5.2	空间复杂度	17
5.3	评价	18
6	总结	19
	Appendices	20
A	源代码	21
B	声明与分工	39

Chapter 1

背景介绍

有很多规划问题，他们的决策变量都是连续的，并且约束和目标函数都是线性的，这种规划我们称为线性规划。线性规划是相对比较容易求解的，但是有许多实际问题，譬如人员、机器或者车辆的分配，它们是不可分割的整体，决策变量只有在它们具有整数值时才有意义。在线性规划中，增加决策变量的整数限制，这种我们称为线性整数规划，一般情况下，我们会简称为整数规划。

整数规划有很多求解方法，例如割平面法和分枝定界法。它们都是先将问题转化为线性规划求解，然后增加整数约束进行约化，直到最后找到整数解。而这两种方法都可以求纯或混合整数线性规划问题。我们组采用的是分枝定界的方法来求解整数规划。

在分支定界法中，我们将整数规划转换为线性规划后，是利用单纯形法进行求解。一言概之，我们组的大作业是利用单纯形法 + 分支定界法求解整数规划问题。

整数规划问题是 NP 困难问题，特别的，0-1 规划是整数规划的特殊情况，它的决策变量要么取 0 要么取 1，这是 Karp 的 21 个 NP 完全问题之一。[\[3\]](#)

Chapter 2

算法描述

2.1 单纯形法

单纯形是 N 维中的 $N + 1$ 个顶点的凸包，是一个多胞体，譬如是在直线上的一个线段，平面上的一个三角形，三维空间中的一个四面体等等，这些都是单纯形。

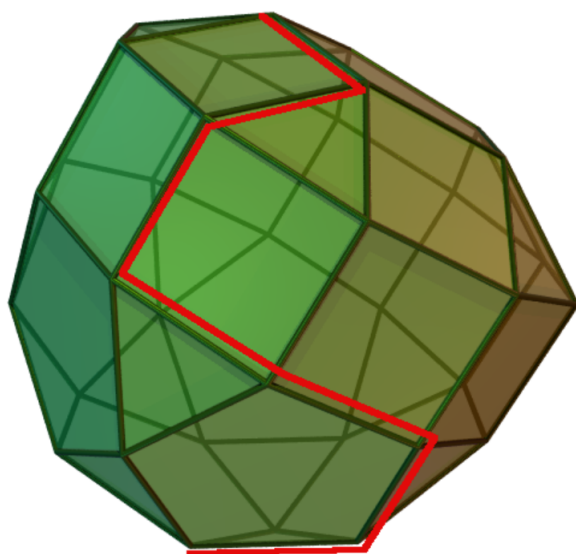


Figure 2.1: 单纯形

2.1.1 标准形式

在使用单纯形法之前，我们需要将线性规划转换为以下标准形式：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{1 \leq k \leq n} c_k x_k \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

所有其他形式的线性规划方程组都可以转化称这个标准形式：

- 1 目标函数不是极大化：只需要将 c_k 取为原来的相反数，就可以从极小化问题转化为极大化问题。
- 2 约束条件中存在大于或等于约束：只需要将约束两边同乘 -1 。
- 3 约束条件中存在等式：只需要将其转化为两个不等式，一个为大于等于，另一个为小于等于。
- 4 有的变量约束为大于等于 R ：只需要做简单的仿射变换，用 $x' = x - R$ 代替原来的变量即可。
- 5 有的变量约束小于等于 0 ：只需要将与该变量有关的所有系数取相反数即可。
- 6 有的变量没有非负约束：加入新变量 x' ，并用 $x - x'$ 替换原来的变量 x 。

通过以上总结，我们就可以将一个一般的线性规划转换为标准形式。

2.1.2 松弛形式

在使用单纯形法进行变换之前，我们需要先计算出一个可行解。我们可以通过将标准形式的线性规划转化为松弛形式，这样能够快速得到线性规划的初始可行解。只需要在原来 n 个变量， m 个约束的线性规划中，加入 m 个新变量，就可以将原来的不等式化为等式：

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \sum_{1 \leq k \leq n} a_{j,k} x_k + x_{n+j} = b_j, x_{n+j} \geq 0$$

我们可以首先通过新加入的变量快速得到一组初始可行解：

$$x_{n+j} = b_j - \sum_{1 \leq k \leq n} a_{j,k} x_k$$

我们现在称 x_1, x_2, \dots, x_n 这些变量为**非基变量**，而称 $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ 这些变量为**基变量**。非基变量能够由基变量唯一确定，也就是课上老师所说的**典则形式**。

我们通过两阶段法求得原标准形式的初始可行解：

- 1 第一阶段的目标函数为 $\min : \sum_{n+1 \leq k \leq n+m} x_{n+k}$, 如果得到该目标函数值为 0, 则通过转轴变换将基变量全部转换为原来的变量。如果目标函数值非 0, 则表明原规划问题无解。

- 2 第一阶段结束以后, 以第一阶段得到的可行解进行求解原始问题。

单纯形表则是将松弛形式（或者标准形式）的规划问题中的系数放入一个增广矩阵中, 通过矩阵变换求得最终的最优解和最优值。

2.1.3 转轴变换

转轴变换是单纯形法中的核心操作, 作用就是将一个基变量与一个非基变量进行互换。从几何的理解上就是从单纯形的一个极点走向另一个极点。设变量 x_{n+d} 是基变量, 变量 x_e 是非基变量, 那么转轴操作 **pivot(d, e)** 以后, x_{n+d} 将变为非基变量, 相应的 x_e 变为基变量。将这些转化为用数学符号描述则如下:

$$\begin{aligned} \text{起初} & : x_{n+d} = b_d - \sum_{k \in N} a_{d,k} x_k \\ \text{移项} & : a_{d,e} x_e = b_d - \sum_{k \in N, k \neq e} a_{d,k} x_k - x_{n+d} \\ \text{若 } a_{d,e} \neq 0 & : x_e = \frac{b_d}{a_{d,e}} - \sum_{k \in N, k \neq e} \frac{a_{d,k}}{a_{d,e}} x_k - \frac{1}{a_{d,e}} x_{n+d} \end{aligned}$$

将这个式子代入其他的约束等式以及目标函数中, 就实现了 x_{n+d} 和 x_e 的基变量与非基变量的转换。

这在增广矩阵中的操作则对应为第 i 行的基变量变为第 j 个变量, 然后利用消元法将其他行中第 j 列的系数消去。我们称这个操作为转轴变换。

2.1.4 最优化过程

而我们挑选哪一个非基变量与基变量进行转轴变换则是最优化过程了, 这个过程如下:

- 得到原规划问题的初始可行解（两阶段法）
- 任取一个非基变量 x_e , 使得 $c_e > 0$
- 考虑基变量 x_d , $\min_{a_{d,e} > 0} \frac{b_d}{a_{d,e}}$
- 交换 x_e x_d , 即转轴变换 **pivot(d, e)**
- 如果所有的非基变量的系数都是小于等于 0 时, 我们已经得到最优解了。将基变量及其增广列对应值作为输出即可。如果只剩 $c_e > 0$ 且 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_{i,e} \leq 0$ 则原规划问题没有有限最有解, 目标函数值为正无穷。

2.1.5 Bland 法则

而我们选取非基变量入基的时候，不能够每次都选择检验数最大的入基，这样会导致单纯形法退化，进入搜索循环的 bug。根据 **Bland 法则**，我们可以每次选择下标最小的非基变量入基，就可以避免单纯形法退化。

2.2 分枝定界法

分枝定界法不只是解决整数规划的一种方法，它其实可以认为是一种组合优化问题以及数学优化算法设计的范式。分枝定界法由通过状态空间搜索的候选解决方案的系统枚举组成：候选解决方案集被认为是在根处形成具有全集的根树。该算法探索此树的分支，它代表解决方案集的子集。在枚举分支的候选解之前，针对最优解的上下估计**边界检查分支**，并且如果它不能产生比迄今为止由算法找到的最佳解决方案更好的解，则丢弃该分支（称为**剪枝**）。

在整数规划问题中，我们先将原问题放松成线性规划问题，解这个线性规划，就得到了整数规划最优解的上界。这是因为减少了约束，得到的目标函数值自然更大，所以上界。然后我们检查最优解，如果最优解中有非整数变量，记为 x_i ， $N < x_i < N + 1$ ，这时候就会有两种可能： $x_i \leq N$ 或者 $x_i \geq N + 1$ 。这时候我们分枝，一枝增加约束 $x_i \leq N$ ，另一枝增加约束 $x_i \geq N + 1$ 。然后递归进行搜索。如果中间过程得到的线性规划最优解也是整数规划最优解，就记其为下界。如果某一枝的上界比下界还小，则将这一枝剪去，称为剪枝，这一枝称为死枝。直到最后找到最优解。中间过程中需要反复降为线性规划以单纯形法进行求解。

这里我们分枝定界法是需要维护两个界的，一个是上界，一个是下界：

- 上界初始化为没有增加约束的原问题的线性规划最优解
 - 更新则在于从一个节点分成两个节点后，取两个节点中线性规划的最优解的最大值。
- 下界初始化为负无穷
 - 更新则在于每次求解出一个线性规划也正好为整数规划且比已知的下界大时，更新下界。
- 如果计算得到的线性规划最优解比已知的下界小，则进行剪枝。
- 如此计算，上界会不断减小，下界会不断提高，直到上界等于下界。

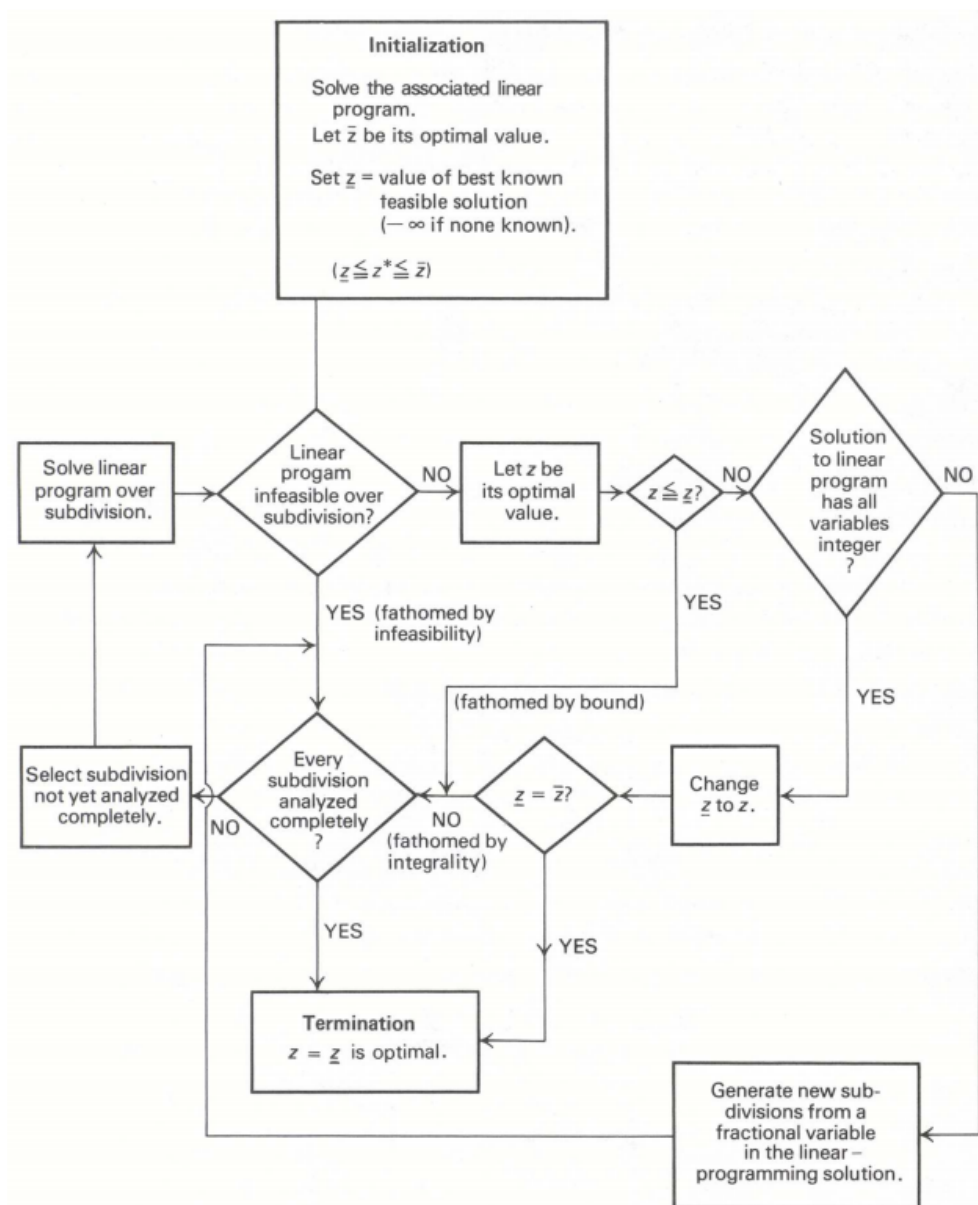


Figure 2.2: 分枝定界算法流程图

Chapter 3

实现过程

3.1 Parse

程序接受的输入格式是`.lp` 文件，这种格式并没有办法很容易地给单纯形法作为输入，因此需要一个转换工具。

首先需要定义一些类表示输入信息

异常，如果发先未知的语句会抛出异常，以及原因。

```
1 class ParseException
```

变量的上下界

```
1 class Bounds {
2     public:
3         // lower <= x && x <= upper
4         int upper, lower;
5 };
```

在约束式中的变量，有变量的索引、 \mathbb{R} 数

```
1 class Variable {
2     public:
3         int coefficient;
4         size_t index;
5 };
```

约束，可以分 $\leq, \geq, =$ 三种情况，然后包含一个容器装约束中的变量，还有一个常数。左右顺序是: $C_1, C_2, \dots, C_N \leq \text{Constant}$

```
1 class Condition {
2     public:
3         enum Type { eq, leq, geq };
4         Type type;
5         std::vector<Variable> variables;
6         int constant;
7 };
```

Data 包含所有的数据:

- 约束: **conditions**
- 变量的上下界: **bounds**
- 变量的索引: **indices**
- 目标函数: **function**

```

1  class Data {
2      private:
3          std::vector<Condition> conditions;
4          std::vector< std::pair<size_t, Bounds> > bounds;
5          std::vector<size_t> indices;
6          std::vector<Variable> function;
7  };

```

虽然输入类似 **C** 的风格, 是个上下文无关文法, 但是为了方便就简化为正则语言 (应该不会出现非正则的情况)。

3.1.1 预处理

- 移除注释 `/\ * (.\n)*? \ * /`
- 移除多余空白 `\s * $`
- 移除换行, 用空白取代 `[\n\r]`

预处理之后, 整个输入就可以当作一行, 然后用; 符号当作真正的换行重新分行, 一行一行处理

对于每一行, 可以分成几种类型

- **int** 定义变量
- **max, min**
- 约束

3.1.2 优化

对于约束如果变量只有 1 个的情况, 可以当作该变量的上下界, 因为我们实现的是分支定界法, 所以这些信息可以对算法效率有帮助。

值得注意的事情是如果变量的系数是负数, 大于、小于要交换。

3.1.3 工具函数

```
1     std::vector<std::string> Data::Split(const std::string & input, char delim);  
2     std::string Data::Join(const std::vector<std::string> & input);
```

a;b; c 或 **a, b,\nc,d** 这类代表多个元素合在一个字符串上的形式，因为比较复杂，需要合并、分割这两种功能来实现分开。

3.2 单纯形法

c++ 的版本使用了 **Eigen/Dense** 库, 编译运行之前请安装运行求解模块之前要求对输入进行部分预处理, 使得能够求解线性规划. 要给出满足条件的矩阵: C^T 和 $AB = [A|B]$, 使得约束条件可以表示为

$$\begin{aligned} \max & : C^T X \\ \text{s.t.} & : AX \leq B \end{aligned}$$

在得到这样的输入后, 构造新矩阵 T 如下所示:

$$\begin{bmatrix} -C^T & 0 & 0 \\ A & I & B \end{bmatrix}$$

其中 I 是单位矩阵。

3.2.1 源代码分析

```

1  bool SimplexSolver::simplexAlgorithm(int64_t variableNum) {
2      MatrixXd::Index pivotColumn;
3      int64_t pivotRow;
4
5      while (true) {
6          /*
7              Find pivot column, check for halt condition
8          */
9          this->tableau.row(0).leftCols(variableNum).minCoeff(&pivotColumn);
10         if (this->tableau(0, pivotColumn) >= 0) {
11             //Found no negative coefficient
12             break;
13         }
14
15         /*
16             Find pivot row
17         */
18         pivotRow = this->findPivot_min(pivotColumn);
19         if (pivotRow == -1) {
20             //no solution
21             return false;
22         }
23
24         /*
25             Do pivot operation
26         */
27         this->tableau.row(pivotRow) /= this->tableau(pivotRow, pivotColumn);
28         this->tableau(pivotRow, pivotColumn) = 1;    // For possible precision
29             issues
30         for (int i = 0; i < this->tableau.rows(); i++) {
31             if (i == pivotRow) continue;
32
33             this->tableau.row(i) -= this->tableau.row(pivotRow) * this->tableau(i,
34                 pivotColumn);
35             this->tableau(i, pivotColumn) = 0;    // For possible precision issues
36         }
37     }
38     return true;
39 }
```

然后对 T 不断进行如下操作:

- 1 找出 $-C^T$ 系数最小的一列, 设为 j .
- 2 当此列的元素大小 ≥ 0 , 说明所有检验数的相反数都非负, 已找到最优解, 结束单纯形法.
- 3 找矩阵的最小枢轴量, 找不到的话说明线性规划无解, 结束单纯形法.
- 4 选择该列, 作为加入的新的基变量, 根据此基变量所在列选出基中不再作为基变量的变量对应的那一行, 设为 i (一个选择原则是 $\frac{B_{i1}}{A_{ij}} = \max_{A_{kj} > 0} (\frac{B_{k1}}{A_{kj}})$)
- 5 以第 i 行原有的基换出, 将第 j 个变量作为新的基. (消去使得其他行第 j 列元素为 0)
- 6 重复流程 1

原理说明: 在 A 所在行, 恰好每行都有一个元素值为 1, 且其他行在这一列的值为 0, (就是单位矩阵中的非 0 元素,) 说明新加入的松弛变量正好构成了一组基.

在理解了单位矩阵的意义之后, 之后的算法流程就是按着单纯形法来的了。

3.2.2 其他函数分析

```

1  /**
2  * If the given column has only one coefficient with value 1 (except in topmost row
3  *   ), and all other
4  * coefficients are zero, then returns the row of the non-zero value.
5  * Otherwise return -1.
6  * This method is used in the final step of maximization, when we read
7  * the solution from the tableau.
8  *
9  * @param int64_t column
10 * @returns int64_t
11 */
int64_t SimplexSolver::getPivotRow(int64_t column){}

```

该函数用于找最大检验数所在列, 由于矩阵中存储的是每个检验数的相反数, 因此找最小值就是找最大检验数。

```

1  /**
2  * If the given column has only one coefficient with value 1 (except in topmost row
3  *   ), and all other
4  * coefficients are zero, then returns the row of the non-zero value.
5  * Otherwise return -1.
6  * This method is used in the final step of maximization, when we read
7  * the solution from the tableau.
8  *
9  * @param int64_t column
10 * @returns int64_t
11 */
int64_t SimplexSolver::findPivot_min(int64_t column);

```

该函数用于找最小枢轴量, 由于已经确定了哪个元素会入基, 找到一行使得以入基元素消去其他行元素后, 整个矩阵最后边的常数列向量依然保证非负. 显然, 只用找到 $\frac{B_{i,1}}{A_{i,column}} = \min_{x>0} \{x | x = \frac{B_{j,1}}{A_{j,column}}\}$ 这样的一行, 再消去其他行就成功让 $column$ 对应的元素入基, 而原本在该行的基就出基了。

3.3 分枝定界法

```

1  class IPSolver:
2  def __init__(self, c, Aub, bub, Aeq, beq, bounds, tol=1.0E-8):
3      self.c = np.array(c)
4      self.Aub = np.array(Aub) if Aub else None
5      self.bub = np.array(bub) if bub else None
6      self.Aeq = np.array(Aeq) if Aeq else None
7      self.beq = np.array(beq) if beq else None
8      self.bounds = np.array(bounds) if bounds else None
9      self.tol = tol
10
11     self.solution = np.zeros(self.c.shape)
12     self.optimum = -np.inf
13     self.isFoundSolution = False
14
15     self.cur_sol = np.zeros(self.c.shape)
16     self.cur_opt = -np.inf
17
18     self.max_branch_num = 5
19     self.cur_branch_num = 0

```

定义如上所示整数规划求解器类，以 c , Aub , bub , Aeq , beq , $bounds$ 和 tol 为输入。默认求解最大化问题，其中 c 表示目标函数中各变量的系数； Aub 为小于等于约束 $Aub * x \leq bub$ 中的 Aub 矩阵， bub 为其中右边的系数； Aeq 为等于约束 $Aeq * x = beq$ 中的 Aeq 矩阵， beq 为其中右边的系数； $bounds$ 为各变量的上下界约束； tol 为整数容忍度。初始化中设置最大分支数为 max_branch_num ，并初始化当前的解 cur_sol 和目标函数值 cur_opt 。

```

1  def core_solve(self, c, Aub, bub, Aeq, beq, bounds):
2      sol, opt = None, None
3      res = linprog(-c, A_ub=Aub, b_ub=bub, A_eq=Aeq, b_eq=beq, bounds=bounds)

```

核心求解函数，输入与类构造函数相同，首先将问题松弛为一般的线性规划问题，调用线性规划求解器求解。注意，这里的线性规划求解器是求解最小化问题的，故将 c 反号。

```

1  if res.success:
2      opt = -res.fun
3      sol = res.x
4      self.update_opt(sol, opt)

```

若该线性规划求解成功，则拿解和值更新当前的解和目标函数值；否则不用分支，直接退出。

```

1  if self.needBranch(sol, opt) and self.cur_branch_num < self.max_branch_num:
2      index = self.getFirstNotInt(sol)
3      to_round = sol[index]
4      len_c = len(self.c)

```

进一步判断是否需要分支（该函数将在之后详细讲解），并判断 $branch$ 次数是否超过阈值，若需要分支则获得第一个非整数的变量的索引，和解中的对应变量的值，并继续进行下述操作；否则，直接退出。

```

1  Con1 = np.zeros((len_c, ))
2  Con2 = np.zeros((len_c, ))
3  Con1[index] = -1.0
4  Con2[index] = 1.0
5  if Aub is None and bub is None:
6      A1 = Con1.reshape(1, len_c)
7      A2 = Con2.reshape(1, len_c)
8      B1 = np.array([-math.ceil(to_round)])

```

```

9         B2 = np.array([math.floor(to_round)])
10     else:
11         A1 = np.vstack([Aub, Con1])
12         A2 = np.vstack([Aub, Con2])
13         B1 = np.hstack([bub, -math.ceil(to_round)])
14         B2 = np.hstack([bub, math.floor(to_round)])

```

上述代码段将当前非整数索引进行划分,即分别添加 $x_index \leq -\text{math.ceil}(\text{to_round})$ 和 $x_index \geq \text{math.floor}(\text{to_round})$ 的约束到原来的小于等于约束中,变成两个不同的分支。

```

1     self.cur_branch_num += 1
2     self.core_solve(c, A1, B1, Aeq, beq, bounds) # right branch
3     self.core_solve(c, A2, B2, Aeq, beq, bounds) # left branch

```

将分好支的变量继续调用核心求解器函数,并将分支次数加 1。因为每次求解时,我们都保存了整数解,故不需要多余的代码来处理之后的结果。当各个分支运行完毕之后求解结束。

```

1     def allInteger(self, sol):
2         tmp = np.array([abs(x-np.round(x)) for x in list(sol)])
3         return all(tmp <= self.tol)

```

该函数判断解是否都是整数。

```

1     def getFirstNotInt(self, sol):
2         tmp = np.array([abs(x-np.round(x)) for x in list(sol)])
3         l = tmp > self.tol
4         for i in range(len(l)):
5             if l[i]: return i
6         return -1

```

该函数取得解中第一个非整数的索引号。

```

1     def needBranch(self, sol, opt):
2         if self.allInteger(sol): return False
3         elif opt <= self.cur_opt: return False
4         return True

```

该函数判断当前解和值的情况下,是否需要分支。并非都是整数或者,该解的目标函数值比当前函数值要大,则需要分支。

```

1     def update_opt(self, sol, opt):
2         if self.allInteger(sol) and self.cur_opt < opt:
3             self.cur_opt = opt
4             self.cur_sol = sol.copy()
5             self.isFoundSolution = True

```

该函数用于更新当前解和目标函数值,只有在解都是整数,并且当前函数值比该解的函数值小时,才更新。

```

1     def solve(self):
2         self.core_solve(self.c, self.Aub, self.bub, self.Aeq, self.beq, self.bounds)
3         if self.isFoundSolution:
4             self.solution = np.array([int(np.round(x)) for x in list(self.cur_sol)])
5             self.optimum = self.cur_opt
6             return True
7         else:
8             return False

```

该函数是对核心求解器函数的一个封装,用于将构造求解器类的各个参数,作为输入传入 core_solve 函数中求解,最后并将结果保存到最后结果 self.solution 和 self.optimum 中。

Chapter 4

测试结果

我们的测试数据除了使用助教在http://www.cs.zju.edu.cn/algo/teaching/2018/zgc_2018.html提供的中等规模及大规模测试外，另外根据需求构造了几组测试样例，我们称之为小型测试样例。以此来检验我们程序的运行情况。下表中详细描述了我们的测试样例和测试情况：

Table 4.1: 小型测试样例

测试样例	测试目的	测试结果
sample1	测试极小化优化问题	pass
sample2	所有约束都是小于等于的极大化问题	pass
sample3	常规例子	pass
sample4	约束包含大于等于，小于等于及等于	pass
sample5	测试无解的样例	pass
sample6	有无穷解的样例	pass
sample7	测试 bland 法则	pass

经过了小型的测试以后，我们对助教提供的例子进行测试。下面是测试结果：

Table 4.2: 大中规模测试

测试样例	测试目的	测试结果
case1	大规模测试 1	pending
case2	大规模测试 2	pending
case3	中等规模测试 1	pass
case4	中等规模测试 2	pass
case5	中等规模测试 3	pass

非常不幸的是，我们的程序无法接受大规模的测试，这可能归咎于我们的优化上没有做好，无法承受三千个变量的压力。这在后面分析的章节中，会稍微详细一点描述这个情况。

Chapter 5

分析与评价

5.1 时间复杂度

5.1.1 单纯形法

如果采用了 **Bland** 法则选择非基变量进行转轴变换，我们时能够证明单纯形法在有限步内时一定能够终止的。单纯形法在实践中非常有效，并且比 Fourier–Motzkin 消去法 [2] 等早期方法有了很大的改进。然而，在 1972 年，Klee 和 Minty [1] 给出了一个例子，即 Klee-Minty 立方体，表明由 Dantzig 制定的单形方法的最坏情况复杂度是指数时间。

5.1.2 分枝定界法

求解整数规划的精确解是 NP 困难的，我们没有多项式时间复杂度的算法求解。分枝定界法中，我们可能需要遍历所有的枝，所以需要 $O(2^n)$ 次计算线性规划。而我们是使用单纯形法进行计算，所以这里我们的时间复杂度将是 $O(2^n) \times O(2^n) \approx O(2^n)$

5.2 空间复杂度

我们对于约束的存储是比较大开销的，使用的是密集的矩阵存储方式，即并没有使用稀疏矩阵，这在空间中是有极大的浪费，仅存储这个约束矩阵就需要 $O(n^2)$ 的空间了。

单纯形法额外使用的空间除了约束矩阵之外，没有更多的空间开销了。

而对于分枝定界法，则需要生枝。在测试过程中，随着变量数目的增多，分枝定界法会有明显的空间开销，每一枝都有自己的一个矩阵，如果不考虑优化问题，我们需要 $O(2^n) \times O(n^2) \approx O(2^n)$ 的空间。这个空间的开销是非常大的。

5.3 评价

我们实现的实现过程分为了三个模块，一个模块处理 IO，一个模块负责单纯形，一个模块负责分枝定界的演化。而这里，IO 的过程利用了正则匹配，对于将 **lp** 文件转换为我们需要的 **txt** 格式是需要一定的时间的。如果文件比较大，譬如助教提供的 case1 和 case2，这里的 IO 需要的时间就是几秒钟。

不过我们可以只去衡量我们的分枝定界的话，可以只从 **txt** 中进行文件读入。去考量我们的分枝定界法的性能。

不过由于我们的单纯形法和分枝定界法的实现都是基本实现，没有考虑更多的优化，导致运算比较慢。实际上，我们可以将一些已经定下结果的变量筛去，从一定程度上减少 n 这个维度的开销。另外，在分枝定界中，挑去与 *bound* 比较接近的值进行分枝，这样可能会有一定的优化效果。

Chapter 6

总结

总的来说，我们的分枝定界法求解整数规划能对于中小型的数据进行求解是没有问题的，能够应对各种的约束的变化，具备一定的鲁棒性。但是对于两千个变量以上的大规模例子我们的程序跑起来就比较吃力了。这确实是我们优化的工作没有做足的问题导致的。这次的大作业凝聚了我们组的很多心血，也让我们组对于分枝定界和单纯形有了更加深刻的认识。相信这对于我们今后的学习是会有很大的帮助的。

Appendices

Appendix A

源代码

Listing A.1: Header File for lpreader

```
1  #include "sparse.h"
2  #include <fstream>
3  #include <iostream>
4  #include <string>
5  #include <vector>
6  #include <assert.h>
7  #include <Eigen/Dense>
8
9  #define pb push_back
10 using namespace std;
11 using namespace Eigen;
12
13 class LPReader{
14 public:
15     VectorXd c;
16     MatrixXd Ab;
17     Data d;
18
19     //void transgte(vector<int>,int,int &,vector<vector<int> >&,vector<int>&);
20     //void transequ(vector<int>,int,int &,vector<vector<int> >&,vector<int>&);
21     //void translte(vector<int>,int,int &,vector<vector<int> >&,vector<int>&);
22 void transgte(vector<int>equ,int b,int &freex,vector<vector<int> >&A,vector<int>&B
23 ){
24     if(b>0){
25         equ.pb(-1);
26         freex++;
27         transequ(equ,b,freex,A,B);
28         return ;
29     }
30     for(int i=0;i<equ.size();i++)
31         equ[i]=-equ[i];
32     translte(equ,-b,freex,A,B);
33     return ;
34 }
35 void transequ(vector<int>equ,int b,int &freex,vector<vector<int> >&A,vector<int>&B
36 ){
37     if(b>=0){
38         equ.pb(1);
39         freex++;
40         translte(equ,b,freex,A,B);
41         equ[equ.size()-1]=-1;
42         translte(equ,b,freex,A,B);
43         return ;
44     }
45     for(int i=0;i<equ.size();i++)
46         equ[i]=-equ[i];
47     transequ(equ,-b,freex,A,B);
48     return ;
49 }
```

```

48 void translte(vector<int>equ,int b,int &freex,vector<vector<int>> >&A,vector<int>&B
49 ){
50     int i,j;
51     if(b>=0){
52         for(i=0;i<A.size();i++){
53             for(j=A[i].size();j<equ.size();j++){
54                 A[i].pb(0);
55                 A.pb(equ);
56                 B.pb(b);
57                 return ;
58             }
59             for(i=0;i<equ.size();i++){
60                 equ[i]=-equ[i];
61                 transgte(equ,-b,freex,A,B);
62             }
63         }
64     void print(vector<vector<int>> >&A,vector<int>&B){
65         int i,j;
66         for(i=0;i<A.size();i++){
67             for(j=0;j<A[i].size();j++){
68                 printf("%3d",A[i][j]);
69             }
70             printf("%3d\n",B[i]);
71         }
72         return ;
73     }
74     LPReader(const string& file){
75         puts("succeed in reading");
76         d.Parse(file);
77         unsigned int i,j;
78         int freex=d.indices.size();
79
80         vector<int>tempv;
81         vector<int>B;
82         vector<vector<int>> >A; /*
83         for(i=0;i<var_num;i++){
84             c(d.function[i].index)=d.function[i].coefficient;
85         } */
86         for(i=0;i<d.bounds.size();i++){
87             if(d.bounds[i].second.lower>0){
88                 tempv.resize(freex);
89                 for(j=0;j<freex;j++){
90                     tempv[j]=0;
91                     tempv[d.bounds[i].first-1]=1; //l<=x x<=l
92                     transgte(tempv,d.bounds[i].second.lower,freex,A,B);
93                 }
94             }
95             if(d.bounds[i].second.upper<INT_MAX){
96                 tempv.resize(freex);
97                 for(j=0;j<freex;j++){
98                     tempv[j]=0;
99                     tempv[d.bounds[i].first-1]=1; //x<=r
100                     translte(tempv,d.bounds[i].second.upper,freex,A,B);
101                 }
102             }
103             //print(A,B);
104         }
105         for(i=0;i<d.conditions.size();i++){
106             tempv.resize(freex);
107             for(j=0;j<freex;j++){
108                 tempv[j]=0;
109             }
110             for(j=0;j<d.conditions[i].variables.size();j++){
111                 tempv[d.conditions[i].variables[j].index-1]=d.conditions[i].variables[
112                     j].coefficient;
113             }
114             switch(d.conditions[i].type){
115                 case Condition::Type::eq: transequ(tempv,d.conditions[i].constant,freex
116                     ,A,B); break;
117                 case Condition::Type::leq: translte(tempv,d.conditions[i].constant,
118                     freex,A,B); break;
119                 case Condition::Type::geq: transgte(tempv,d.conditions[i].constant,
120                     freex,A,B); break;
121             }
122         }
123     }
124     c = VectorXd::Zero(freex);
125     for(i=0;i<d.function.size();i++){
126         c(d.function[i].index-1)=d.function[i].coefficient;

```

```

116     //for(i=0;i<freex;i++)
117     //    printf("%02d ",c(i));
118     //putchar('\n');
119     assert(A.size());
120     for(i=1;i<A.size();i++)
121         assert(A[i-1].size()==A[i].size());
122     Ab.resize(A.size(),A[0].size()+1);
123     for(i=0;i<A.size();i++){
124         for(j=0;j<A[i].size();j++){
125             Ab(i,j)=A[i][j];
126             //printf("%02d ",A[i][j]);
127         }
128         Ab(i,j)=B[i];
129         //printf("%02d\n",B[i]);
130     }
131     puts("succeed in constructing");
132     return ;
133 }
134
135 };

```

Listing A.2: Header File for sparse

```

1  #include <fstream>
2  #include <sstream>
3  #include <vector>
4  #include <regex>
5  #include <cctype>
6  #include <string>
7  #include <algorithm>
8  #include <exception>
9  #include <map>
10 #include <cmath>
11
12
13 class ParseException : public std::exception {
14 protected:
15     std::string msg_;
16 public:
17     ParseException(std::string message) {
18         this->msg_ = message;
19     }
20
21     virtual const char* what() const throw () {
22         return msg_.c_str();
23     }
24 };
25
26 class Bounds {
27 public:
28     // lower <= x && x <= upper
29     int upper, lower;
30     Bounds()
31     {
32         this->upper = std::numeric_limits<int>::max();
33         this->lower = std::numeric_limits<int>::min();
34     }
35
36     bool operator < (const Bounds & b) const {
37         return false;
38     }
39 };
40
41 class Variable {
42 public:
43     int coefficient;
44     size_t index;
45     Variable(int coefficient, size_t index) :
46         coefficient(coefficient), index(index)
47     {
48     }

```

```

49
50     bool operator < (const Variable &b) const {
51         return index < b.index;
52     }
53 };
54
55 class Condition {
56 public:
57     enum Type { eq, leq, geq };
58     Type type;
59     std::vector<Variable> variables;
60     int constant;
61     Condition(Type type, const std::vector<Variable> & variables, int constant):
62         type(type), variables(variables), constant(constant)
63     {
64     }
65 };
66
67 class Data {
68 public:
69     std::vector<Condition> conditions;
70     std::vector< std::pair<size_t, Bounds> > bounds;
71     std::vector<size_t> indices;
72     std::vector<Variable> function;
73
74     //static std::string Trim(const std::string &s);
75     static std::vector<std::string> Split(const std::string & input, char delim);
76     static std::string Join(const std::vector<std::string> & input);
77     static std::vector<Variable> ParseVariables(const std::vector<std::string> &
78         tokens, bool opposite = false);
79     static size_t ParseVariable(std::string variable);
80     static Condition ParseExpression(const std::vector<std::string> & tokens);
81 public:
82     void Parse(const std::string & input);
83     std::string Print();
84 };
85
86 //std::string Data::Trim(const std::string &s)
87 //{
88 //    auto wsfront = std::find_if_not(s.begin(), s.end(), [](int c) {return std::isspace
89 //        (c); });
90 //    auto wsback = std::find_if_not(s.rbegin(), s.rend(), [](int c) {return std::
91 //        isspace(c); }).base();
92 //    return (wsback <= wsfront ? std::string() : std::string(wsfront, wsback));
93 //}
94
95 std::vector<std::string> Data::Split(const std::string & input, char delim)
96 {
97     std::vector<std::string> result;
98     std::stringstream buffer(input);
99     for (std::string line; std::getline(buffer, line, delim); ) {
100         if (!line.empty()) {
101             result.push_back(line);
102         }
103     }
104     return result;
105 }
106
107 std::string Data::Join(const std::vector<std::string> & input)
108 {
109     std::stringstream buffer;
110     for (const std::string &s : input) {
111         buffer << s;
112     }
113     return buffer.str();
114 }
115
116 std::vector<Variable> Data::ParseVariables(const std::vector<std::string> & tokens,
117     bool opposite)
118 {
119     using std::vector;

```

```

118     using std::string;
119     using std::regex;
120
121     vector<Variable> variables;
122
123     for (const string & token : tokens) {
124
125         bool parseFail = false;
126         int sign, coefficient, index;
127
128         std::smatch sm;
129         bool result = std::regex_search(token, sm, regex("([\\+\\-]?)([0-9]*)C([0-9]+)"));
130         if (result && sm.size() == 4) {
131             // sign
132             if (sm[1] == "+" || sm[1] == "") {
133                 sign = 1;
134             } else if (sm[1] == "-") {
135                 sign = -1;
136             } else {
137                 parseFail = true;
138             }
139
140             // check whether opposite
141             if (opposite){
142                 sign *= -1;
143             }
144
145             // coefficient
146             try {
147                 if (sm[2] == "") {
148                     coefficient = 1;
149                 } else {
150                     coefficient = std::stoi(sm[2]);
151                 }
152             } catch (std::exception e) {
153                 parseFail = true;
154             }
155
156             // index
157             try {
158                 index = std::stoi(sm[3]);
159             } catch (std::exception e) {
160                 parseFail = true;
161             }
162         } else {
163             parseFail = true;
164         }
165
166         if (parseFail) {
167             throw new ParseException("'" + token + "' is not a valid variable");
168         }
169
170         variables.push_back(Variable(sign * coefficient, index));
171     }
172
173     return variables;
174 }
175
176
177 Condition Data::ParseExpression(const std::vector<std::string> & tokens_)
178 {
179     using std::vector;
180     using std::string;
181
182     string tokensString = Data::Join(tokens_);
183     tokensString = std::regex_replace(tokensString, std::regex("([\\+\\-])"), "_$1");
184     tokensString = std::regex_replace(tokensString, std::regex("(\\<|=|\\>|=|\\=)"),
185         "_$1_");
186     vector<string> tokens = Data::Split(tokensString, '_');
187
188     if (tokens.size() < 3) {
189         throw new ParseException("'" + Data::Join(tokens) + "' is not a valid

```

```

        expression");
189     }
190
191     Condition::Type conditionType;
192     vector<Variable> variables;
193     int constant;
194
195     const string & operatorString = tokens[tokens.size() - 2];
196     const string & constantString = tokens[tokens.size() - 1];
197
198     // variables
199     variables = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin(), tokens.begin() +
        tokens.size() - 2));
200
201     // =, <=, >=
202     if (operatorString == "=") {
203         conditionType = Condition::Type::eq;
204     } else if (operatorString == "<=") {
205         conditionType = Condition::Type::leq;
206     } else if (operatorString == ">=") {
207         conditionType = Condition::Type::geq;
208     } else {
209         throw new ParseException("'" + operatorString + "'is not a valid operator");
210     }
211
212     // constant
213     try {
214         constant = std::stoi(constantString);
215     } catch (std::exception e) {
216         throw new ParseException("'" + constantString + "'is not a valid integer");
217     }
218
219     std::sort(variables.begin(), variables.end());
220     return Condition(conditionType, variables, constant);
221 }
222
223 size_t Data::ParseVariable(std::string variable)
224 {
225     using std::string;
226     using std::regex;
227
228     std::smatch sm;
229     bool result = std::regex_search(variable, sm, regex("C([0-9]+)"));
230     bool parseFail = false;
231
232     int index;
233
234     if (result && sm.size() == 2) {
235         try {
236             index = std::stoi(sm[1]);
237         }
238         catch (std::exception e) {
239             parseFail = true;
240         }
241     }
242     else {
243         parseFail = true;
244     }
245
246     if (parseFail) {
247         throw new ParseException("'" + variable + "'is not a valid variable");
248     }
249
250     return index;
251 }
252
253 void Data::Parse(const std::string & input_)
254 {
255     using std::vector;
256     using std::string;
257     using std::regex;
258     using std::stringstream;
259

```

```

260 string input = input_;
261 //std::cout<<input<<std::endl;
262 input = std::regex_replace(input, regex("/\\*(.|\\n)*?\\/"), ""); // remove
    comment
263 input = std::regex_replace(input, regex("^\\s*$"), ""); // remove blank
264 input = std::regex_replace(input, regex("[\\n\\r]"), ""); // remove line
265 //std::cout<<input<<std::endl;
266 stringstream buffer(input);
267 for (string line; std::getline(buffer, line, ';'); ) {
268     vector<string> tokens = Data::Split(line, '\\');
269     if (!tokens.empty()) {
270         if (tokens[0].size() >= 3 && tokens[0].substr(0, 3) == "int") {
271             tokens.erase(tokens.begin());
272             vector<string> vars = Data::Split(Data::Join(tokens), ',');
273             for (const string & var : vars) {
274                 int index = ParseVariable(var);
275                 this->indices.push_back(index);
276             }
277         } else if (tokens[0].size() >= 4 && tokens[0].substr(0, 4) == "max:") {
278             function = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin() + 1,
                tokens.end()));
279         } else if (tokens[0].size() >= 4 && tokens[0].substr(0, 4) == "min:") {
280             function = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin() + 1,
                tokens.end()), true);
281         } else {
282             if (tokens[0].back() == ':') {
283                 tokens.erase(tokens.begin());
284             }
285             Condition condition = ParseExpression(tokens);
286             if (condition.variables.size() == 1) {
287                 Variable variable = condition.variables.front();
288                 Bounds bounds;
289
290                 /** coefficient * variable [= // <= // >=] constant
291                  * if operator is =
292                  *     upper = lower = constant / coefficient
293                  * if operator is >=
294                  *     if sign is +
295                  *         upper = +infinity
296                  *         lower = ceil(constant / coefficient)
297                  *     if sign is -
298                  *         upper = floor(constant / coefficient)
299                  *         lower = -infinity
300                  * if operator is <=
301                  *     if sign is +
302                  *         upper = floor(constant / coefficient)
303                  *         lower = -infinity
304                  *     if sign is -
305                  *         lower = ceil(constant / coefficient)
306                  *         upper = +infinity
307                  */
308                 int ceil_ = ceil(condition.constant*1.0 / variable.coefficient);
309                 int floor_ = floor(condition.constant*1.0 / variable.coefficient);
310
311                 switch (condition.type){
312                     case Condition::Type::eq:
313                         if (ceil_ == floor_) {
314                             bounds.upper = bounds.lower = ceil_;
315                         } else {
316                             // if ceil_ is not equal to floor_
317                             // the variable should be unsolvable.
318                             // simply let upper < lower
319                             bounds.upper = floor_;
320                             bounds.lower = ceil_;
321                         }
322                     break;
323
324                     case Condition::Type::leq:
325                         if (variable.coefficient < 0) {
326                             bounds.lower = ceil_;
327                         } else {
328                             bounds.upper = floor_;
329                         }

```

```

330         break;
331
332     case Condition::Type::geq:
333         if (variable.coefficient < 0) {
334             bounds.upper = floor_;
335         } else {
336             bounds.lower = ceil_;
337         }
338         break;
339
340     default:
341         break;
342 }
343
344     this->bounds.push_back(std::pair<size_t, Bounds>(variable.index,
345         bounds));
346 } else {
347     this->conditions.push_back(condition);
348 }
349 }
350 }
351
352     std::sort(this->indices.begin(), this->indices.end());
353     std::sort(this->bounds.begin(), this->bounds.end());
354 }
355
356
357 std::string Data::Print()
358 {
359     using std::stringstream;
360     using std::vector;
361
362     stringstream output;
363
364     vector<vector<int>> > eq;
365     vector<vector<int>> > leq;
366
367     // give a new index
368     const size_t indexSize = this->indices.size();
369     std::map<size_t, size_t> mapIndex;
370     {
371         int count = 0;
372         for (size_t index : this->indices) {
373             mapIndex[index] = count++;
374         }
375     }
376
377     for (const Condition & condition : this->conditions) {
378         vector<int> vec;
379         vec.resize(indexSize, 0);
380
381         for (const Variable & variable : condition.variables) {
382             size_t index = mapIndex[variable.index];
383             int coe = variable.coefficient;
384             vec[index] = coe;
385         }
386         vec.push_back(condition.constant);
387
388         switch (condition.type) {
389             case Condition::Type::eq:
390                 eq.push_back(vec);
391                 break;
392
393             case Condition::Type::leq:
394                 leq.push_back(vec);
395                 break;
396
397             case Condition::Type::geq:
398                 for (int &e : vec) {
399                     e *= -1;
400                 }
401                 leq.push_back(vec);

```



```

402         break;
403
404         default:
405             break;
406     }
407 }
408
409 output << indexSize << std::endl;
410
411 for (const auto & var : function){
412     output << var.coefficient << " " << var.index << " ";
413 }
414 output << std::endl;
415
416 output << this->bounds.size() << std::endl;
417 for (const auto p : this->bounds) {
418     size_t index = p.first;
419     const Bounds & bounds = p.second;
420     output << index << " " << bounds.lower << " " << bounds.upper << std::endl;
421 }
422
423 output << eq.size() << std::endl;
424 for (const auto & vec : eq) {
425     for (const int e : vec) {
426         output << e << " ";
427     }
428     output << std::endl;
429 }
430
431 output << leq.size() << std::endl;
432 for (const auto & vec : leq) {
433     for (const int e : vec) {
434         output << e << " ";
435     }
436     output << std::endl;
437 }
438
439 return output.str();
440 }

```

Listing A.3: Implementation File for parsing

```

1  #include <fstream>
2  #include <sstream>
3  #include <vector>
4  #include <regex>
5  #include <cctype>
6  #include <string>
7  #include <algorithm>
8  #include <exception>
9  #include <map>
10 #include <cmath>
11
12
13 class ParseException : public std::exception {
14 protected:
15     std::string msg_;
16 public:
17     ParseException(std::string message) {
18         this->msg_ = message;
19     }
20
21     virtual const char* what() const throw () {
22         return msg_.c_str();
23     }
24 };
25
26 class Bounds {
27 public:
28     // lower <= x && x <= upper
29     int upper, lower;

```

```

30     Bounds()
31     {
32         this->upper = std::numeric_limits<int>::max();
33         this->lower = 0;
34     }
35
36     bool operator < (const Bounds & b) const {
37         return false;
38     }
39 };
40
41 class Variable {
42 public:
43     int coefficient;
44     size_t index;
45     Variable(int coefficient, size_t index) :
46         coefficient(coefficient), index(index)
47     {
48     }
49
50     bool operator < (const Variable & b) const {
51         return index < b.index;
52     }
53 };
54
55 class Condition {
56 public:
57     enum Type { eq, leq, geq };
58     Type type;
59     std::vector<Variable> variables;
60     int constant;
61     Condition(Type type, const std::vector<Variable> & variables, int constant):
62         type(type), variables(variables), constant(constant)
63     {
64     }
65 };
66
67 class Data {
68 private:
69     std::vector<Condition> conditions;
70     std::vector< std::pair<size_t, Bounds> > bounds;
71     std::vector<size_t> indices;
72     std::vector<Variable> function;
73
74     //static std::string Trim(const std::string &s);
75     static std::vector<std::string> Split(const std::string & input, char delim);
76     static std::string Join(const std::vector<std::string> & input);
77     static std::vector<Variable> ParseVariables(const std::vector<std::string> &
78         tokens, bool opposite = false);
79     static size_t ParseVariable(std::string variable);
80     static Condition ParseExpression(const std::vector<std::string> & tokens);
81 public:
82     void Parse(const std::string & input);
83     std::string Print();
84 };
85
86 //std::string Data::Trim(const std::string &s)
87 //{
88 //    auto wsfront = std::find_if_not(s.begin(), s.end(), [](int c) {return std::isspace
89 //        (c); });
90 //    auto wsback = std::find_if_not(s.rbegin(), s.rend(), [](int c) {return std::
91 //        isspace(c); }).base();
92 //    return (wsback <= wsfront ? std::string() : std::string(wsfront, wsback));
93 //}
94
95 std::vector<std::string> Data::Split(const std::string & input, char delim)
96 {
97     std::vector<std::string> result;
98     std::stringstream buffer(input);
99     for (std::string line; std::getline(buffer, line, delim); ) {
100         if (!line.empty()) {
101             result.push_back(line);
102         }
103     }

```

```

100     }
101     return result;
102 }
103
104
105 std::string Data::Join(const std::vector<std::string> & input)
106 {
107     std::stringstream buffer;
108     for (const std::string &s : input) {
109         buffer << s;
110     }
111     return buffer.str();
112 }
113
114
115 std::vector<Variable> Data::ParseVariables(const std::vector<std::string> & tokens,
116     bool opposite)
117 {
118     using std::vector;
119     using std::string;
120     using std::regex;
121
122     vector<Variable> variables;
123
124     for (const string & token : tokens) {
125         bool parseFail = false;
126         int sign, coefficient, index;
127
128         std::smatch sm;
129         bool result = std::regex_search(token, sm, regex("([\\+\\-]?)([0-9]*)C([0-9]+)"));
130         if (result && sm.size() == 4) {
131             // sign
132             if (sm[1] == "+" || sm[1] == "") {
133                 sign = 1;
134             } else if (sm[1] == "-") {
135                 sign = -1;
136             } else {
137                 parseFail = true;
138             }
139
140             // check whether opposite
141             if (opposite){
142                 sign *= -1;
143             }
144
145             // coefficient
146             try {
147                 if (sm[2] == "") {
148                     coefficient = 1;
149                 } else {
150                     coefficient = std::stoi(sm[2]);
151                 }
152             } catch (std::exception e) {
153                 parseFail = true;
154             }
155
156             // index
157             try {
158                 index = std::stoi(sm[3]);
159             } catch (std::exception e) {
160                 parseFail = true;
161             }
162         } else {
163             parseFail = true;
164         }
165
166         if (parseFail) {
167             throw new ParseException("'" + token + "' is not a valid variable");
168         }
169
170         variables.push_back(Variable(sign * coefficient, index));

```

```

171     }
172
173     return variables;
174 }
175
176
177 Condition Data::ParseExpression(const std::vector<std::string> & tokens_)
178 {
179     using std::vector;
180     using std::string;
181
182     string tokensString = Data::Join(tokens_);
183     tokensString = std::regex_replace(tokensString, std::regex("(\\|+\\|-)"), "_$1");
184     tokensString = std::regex_replace(tokensString, std::regex("(\\|<|=|\\|>|=|\\|=)"),
185         "_$1_");
186     vector<string> tokens = Data::Split(tokensString, '_');
187
188     if (tokens.size() < 3) {
189         throw new ParseException("'" + Data::Join(tokens) + "' is not a valid
190             expression");
191     }
192
193     Condition::Type conditionType;
194     vector<Variable> variables;
195     int constant;
196
197     const string & operatorString = tokens[tokens.size() - 2];
198     const string & constantString = tokens[tokens.size() - 1];
199
200     // variables
201     variables = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin(), tokens.begin() +
202         tokens.size() - 2));
203
204     // =, <=, >=
205     if (operatorString == "=") {
206         conditionType = Condition::Type::eq;
207     } else if (operatorString == "<=") {
208         conditionType = Condition::Type::leq;
209     } else if (operatorString == ">=") {
210         conditionType = Condition::Type::geq;
211     } else {
212         throw new ParseException("'" + operatorString + "' is not a valid operator");
213     }
214
215     // constant
216     try {
217         constant = std::stoi(constantString);
218     } catch (std::exception e) {
219         throw new ParseException("'" + constantString + "' is not a valid integer");
220     }
221
222     std::sort(variables.begin(), variables.end());
223     return Condition(conditionType, variables, constant);
224 }
225
226 size_t Data::ParseVariable(std::string variable)
227 {
228     using std::string;
229     using std::regex;
230
231     std::smatch sm;
232     bool result = std::regex_search(variable, sm, regex("C([0-9]+)"));
233     bool parseFail = false;
234
235     int index;
236
237     if (result && sm.size() == 2) {
238         try {
239             index = std::stoi(sm[1]);
240         }
241         catch (std::exception e) {
242             parseFail = true;
243         }
244     }

```

```

241     }
242     else {
243         parseFail = true;
244     }
245
246     if (parseFail) {
247         throw new ParseException("'" + variable + "' is not a valid variable");
248     }
249
250     return index;
251 }
252
253 void Data::Parse(const std::string & input_)
254 {
255     using std::vector;
256     using std::string;
257     using std::regex;
258     using std::stringstream;
259
260     string input = input_;
261     input = std::regex_replace(input, regex("\\*(.|\\n)*?\\/"), ""); // remove
        comment
262     input = std::regex_replace(input, regex("^\\s*$"), ""); // remove blank
263     input = std::regex_replace(input, regex("[\\n\\r]"), ""); // remove line
264
265     stringstream buffer(input);
266     for (string line; std::getline(buffer, line, ';'); ) {
267         vector<string> tokens = Data::Split(line, '\\');
268         if (!tokens.empty()) {
269             if (tokens[0].size() >= 3 && tokens[0].substr(0, 3) == "int") {
270                 tokens.erase(tokens.begin());
271                 vector<string> vars = Data::Split(Data::Join(tokens), ',');
272                 for (const string & var : vars) {
273                     int index = ParseVariable(var);
274                     this->indices.push_back(index);
275                 }
276             } else if (tokens[0].size() >= 4 && tokens[0].substr(0, 4) == "max:") {
277                 function = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin() + 1,
                tokens.end()));
278             } else if (tokens[0].size() >= 4 && tokens[0].substr(0, 4) == "min:") {
279                 function = Data::ParseVariables(vector<string>(tokens.begin() + 1,
                tokens.end()), true);
280             } else {
281                 if (tokens[0].back() == ':') {
282                     tokens.erase(tokens.begin());
283                 }
284                 Condition condition = ParseExpression(tokens);
285                 if (condition.variables.size() == 1) {
286                     Variable variable = condition.variables.front();
287                     Bounds bounds;
288
289                     /** coefficient * variable [= // <= // >=] constant
290                     * if operator is =
291                     *     upper = lower = constant / coefficient
292                     * if operator is >=
293                     *     if sign is +
294                     *         upper = +infinity
295                     *         lower = ceil(constant / coefficient)
296                     *     if sign is -
297                     *         upper = floor(constant / coefficient)
298                     *         lower = -infinity
299                     * if operator is <=
300                     *     if sign is +
301                     *         upper = floor(constant / coefficient)
302                     *         lower = -infinity
303                     *     if sign is -
304                     *         lower = ceil(constant / coefficient)
305                     *         upper = +infinity
306                     */
307                     int ceil_ = ceil(condition.constant*1.0 / variable.coefficient);
308                     int floor_ = floor(condition.constant*1.0 / variable.coefficient);
309
310                     switch (condition.type){

```

```

311         case Condition::Type::eq:
312             if (ceil_ == floor_) {
313                 bounds.upper = bounds.lower = ceil_;
314             } else {
315                 // if ceil_ is not equal to floor_
316                 // the variable should be unsolvable.
317                 // simply let upper < lower
318                 bounds.upper = floor_;
319                 bounds.lower = ceil_;
320             }
321             break;
322
323         case Condition::Type::leq:
324             if (variable.coefficient < 0) {
325                 bounds.lower = ceil_;
326             } else {
327                 bounds.upper = floor_;
328             }
329             break;
330
331         case Condition::Type::geq:
332             if (variable.coefficient < 0) {
333                 bounds.upper = floor_;
334             } else {
335                 bounds.lower = ceil_;
336             }
337             break;
338
339         default:
340             break;
341     }
342
343     this->bounds.push_back(std::pair<size_t, Bounds>(variable.index,
344                                                     bounds));
345     } else {
346         this->conditions.push_back(condition);
347     }
348 }
349 }
350
351 std::sort(this->indices.begin(), this->indices.end());
352 std::sort(this->bounds.begin(), this->bounds.end());
353 }
354
355
356 std::string Data::Print()
357 {
358     using std::stringstream;
359     using std::vector;
360
361     stringstream output;
362
363     vector<vector<int>> > eq;
364     vector<vector<int>> > leq;
365
366     // give a new index
367     const size_t indexSize = this->indices.size();
368     std::map<size_t, size_t> mapIndex;
369     {
370         int count = 0;
371         for (size_t index : this->indices) {
372             mapIndex[index] = count++;
373         }
374     }
375
376     for (const Condition & condition : this->conditions) {
377         vector<int> vec;
378         vec.resize(indexSize, 0);
379
380         for (const Variable & variable : condition.variables) {
381             size_t index = mapIndex[variable.index];
382             int coe = variable.coefficient;

```

```

383         vec[index] = coe;
384     }
385     vec.push_back(condition.constant);
386
387     switch (condition.type) {
388     case Condition::Type::eq:
389         eq.push_back(vec);
390         break;
391
392     case Condition::Type::leq:
393         leq.push_back(vec);
394         break;
395
396     case Condition::Type::geq:
397         for (int &e : vec) {
398             e *= -1;
399         }
400         leq.push_back(vec);
401         break;
402
403     default:
404         break;
405     }
406 }
407
408 output << indexSize << std::endl;
409
410 for (const auto & var : function){
411     output << var.coefficient << " " << mapIndex[var.index] << " ";
412 }
413 output << std::endl;
414
415 output << this->bounds.size() << std::endl;
416 for (const auto p : this->bounds) {
417     size_t index = p.first;
418     const Bounds & bounds = p.second;
419     output << mapIndex[index] << " " << bounds.lower << " " << bounds.upper << std
        ::endl;
420 }
421
422 output << eq.size() << std::endl;
423 for (const auto & vec : eq) {
424     for (const int e : vec) {
425         output << e << " ";
426     }
427     output << std::endl;
428 }
429
430 output << leq.size() << std::endl;
431 for (const auto & vec : leq) {
432     for (const int e : vec) {
433         output << e << " ";
434     }
435     output << std::endl;
436 }
437
438 return output.str();
439 }
440
441
442 int main(int argc, char *argv[]) {
443     Data *data = new Data;
444     std::fstream fin;
445     //fin.open("case3.lp", std::fstream::in);
446
447     std::string file_name;
448     if (argc == 2){
449         file_name = argv[1];
450     }
451     else{
452         return -1;
453     }
454 }

```

```

455     std::ifstream t(file_name);
456     t.seekg(0, std::ios::end);
457     size_t size = t.tellg();
458     std::string buffer(size, '\0');
459     t.seekg(0);
460     t.read(&buffer[0], size);
461     fin.close();
462
463     try {
464         data->Parse(buffer);
465     }
466     catch (ParseException e) {
467         printf("%s\n", e.what());
468     }
469
470     std::fstream fout;
471     fout.open(file_name.substr(0, file_name.find_last_of(".") + 1) + "txt", std::
        fstream::out);
472     std::string result = data->Print();
473     fout << result;
474     fout.close();
475
476     // check if there is a variable not been declared
477     return 0;
478 }

```

Listing A.4: Header File for Branch Bound

```

1  #include <Eigen/Dense>
2
3  #define INF 1E100
4
5  using namespace Eigen;
6  using namespace std;
7
8  class BranchBound{
9  public:
10     VectorXd solution;
11     bool foundSolution;
12     double optimum;
13     int64_t numberOfVariables;
14
15     BranchBound(int mode, const VectorXd &objectiveFunction,
16                  const MatrixXd &constraints, double tol=1E-8)
17     : mode(mode), c(objectiveFunction), Ab(constraints), tol(tol) {
18         numberOfVariables = objectiveFunction.rows();
19         current_opt = optimum = -INF;
20         solution.resize(numberOfVariables);
21         current_solution.resize(numberOfVariables);
22         foundSolution = false;
23     }
24
25     bool solve();
26
27 private:
28     int mode;
29     VectorXd c;
30     MatrixXd Ab;
31     double current_opt;
32     VectorXd current_solution;
33     double tol;
34
35     bool allInteger(const VectorXd &solution){
36         for(int64_t i=0;i<numberOfVariables;i++){
37             if(abs(solution(i) - int(solution(i))) > tol)return false;
38         }
39         return true;
40     }
41
42     int64_t getFirstNotInt(const VectorXd &solution){
43         for(int64_t i=0;i<numberOfVariables;i++){

```



```

44         if(abs(solution(i) - int(solution(i))) > tol)return i;
45     }
46     return -1;
47 }
48
49 bool needBranch(const VectorXd &solution, double value){
50     bool ai = allInteger(solution);
51     if(ai)return false;
52     if(value <= current_opt)return false;
53     return true;
54 }
55
56 void update_opt(const VectorXd &solution, double value){
57     bool ai = allInteger(solution);
58     if(ai && current_opt < value){
59         current_opt = value;
60         current_solution = solution;
61     }
62     foundSolution = true;
63 }
64
65 void branch(int64_t index,
66             double to_round,
67             const MatrixXd& Ab,
68             MatrixXd& new_Ab,
69             bool is_left)
70 {
71     new_Ab.resizeLike(Ab);
72     new_Ab.conservativeResize(Ab.rows()+1, Ab.cols());
73
74     VectorXd to_append;
75     to_append.resize(Ab.cols());
76     for(int64_t i=0;i<Ab.cols();i++){to_append(i) = 0;}
77     to_append(index) = is_left ? 1 : -1;
78     to_append(Ab.cols()-1) = is_left ? int(to_round) : (int(to_round) + 1);
79
80     new_Ab.row(Ab.rows()) = to_append;
81 }
82
83 void core_solve(const VectorXd& c, const MatrixXd& Ab, VectorXd& sol, double& opt)
84     ;
85 };

```

Listing A.5: Implementation File for Branch Bound

```

1  #include <iostream>
2  #include "branch_bound.h"
3  #include "../SimplexSolver/SimplexSolver.h"
4  using namespace Eigen;
5  using namespace std;
6
7  bool BranchBound::solve()
8  {
9      VectorXd tmp_c(c);
10     VectorXd sol;
11     double opt;
12     if(mode==SIMPLEX_MINIMIZE){
13         tmp_c = c * -1.0;
14     }
15
16     core_solve(tmp_c, Ab, sol, opt);
17
18     if(foundSolution){
19         optimum = (mode==SIMPLEX_MINIMIZE) ? -current_opt : current_opt;
20         solution = current_solution;
21         return true;
22     }
23     else return false;
24 }
25
26 void BranchBound::core_solve(const VectorXd& c,

```

```
27         const MatrixXd& Ab,
28         VectorXd& sol,
29         double& opt)
30 {
31     SimplexSolver ssolver(SIMPLEX_MAXIMIZE, c, Ab);
32     if(ssolver.hasSolution()){
33         opt = ssolver.getOptimum();
34         cout<<"DEBUG: current opt = "<<opt<<endl;
35         sol = ssolver.getSolution();
36         update_opt(sol, opt);
37         if(needBranch(sol, opt)){
38             int64_t index = getFirstNotInt(sol);
39             double to_round = sol(index);
40             MatrixXd left_Ab, right_Ab;
41             VectorXd left_sol, right_sol;
42             double left_opt, right_opt;
43             branch(index, to_round, Ab, left_Ab, true);
44             branch(index, to_round, Ab, right_Ab, false);
45
46             core_solve(c, left_Ab, left_sol, left_opt);
47             core_solve(c, right_Ab, right_sol, right_opt);
48         }
49     }
50 }
```

Appendix B

声明与分工

声明

我们在这里声明，这份工程《分枝定界法求解整数规划》是我们组独立完成的工作。

分工

陈翰逸	:	负责处理 I/O
林锦铿	:	负责文档及测试
黄文璨	:	负责分枝定界法实现
赵竞霖	:	负责单纯形法实现

Bibliography

- [1] Victor Klee and George J. Minty. Worst case for simplex method. <http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0332165>, 1972. Retrieved Jan 13rd, 2018.
- [2] Wikipedia. Fourier–motzkin elimination. https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier%E2%80%93Motzkin_elimination, 2018. Retrieved Jan 13rd, 2018.
- [3] Wikipedia. Integer programming. https://en.wikipedia.org/wiki/Integer_programming, 2018. Retrieved Jan 13rd, 2018.