

Bài tập 3:

Một hàm được gọi là đệ quy nguyên thủy nếu nó có thể được xây dựng bằng cách sử dụng các phép toán sau:

+1) Hàm cơ bản:

- Hàm hằng số $C_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = n$
- Hàm kế tiếp $S(x) = x + 1$
- Hàm chiếu $P_i^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_i$

+1) Phép hợp thành:

Nếu g là 1 hàm k biến và h_1, \dots, h_k là các hàm n biến, thì ta có thể tạo hàm mới:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$$

+1) Phép đệ quy nguyên thủy

Nếu $g(x_1, \dots, x_k)$ và $h(x_1, \dots, x_k, y, z)$ là các hàm đệ quy nguyên thủy, thì hàm: $f(x_1, \dots, x_k, y)$ xác định bởi:

$$f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(x_1, \dots, x_k, (S(y))) = h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_k, y))$$

cũng là đệ quy nguyên thủy.

1, Phép nhân: $a \times b$

Xây dựng phép cộng

Hàm cộng $\text{add}(a, b) = a + b$ có thể được định nghĩa đệ quy như sau:

• Cơ sở: $\text{add}(a, 0) = a$

• Bước đệ quy: $\text{add}(a, S(b)) = S(\text{add}(a, b))$

Xây dựng phép nhân

Hàm nhân $\text{mul}(a, b) = a \times b$ được định nghĩa

đệ quy như sau:

- Cơ sở': $\text{mul}(a, 0) = 0$
- Bước đệ quy: $\text{mul}(a, S(b)) = \text{add}(a, \text{mul}(a, b))$

C/m:

- Hàm $\text{add}(a, b)$ là đệ quy nguyên thủy
 - Hàm $\text{mul}(a, b)$ sử dụng phép đệ quy nguyên thủy với $g(a) = 0$ và $h(a, b, z) = \text{add}(a, z)$
- \Rightarrow Đệ quy nguyên thủy

2, Phép lũy thừa: a^b

- Cơ sở': $\text{exp}(a, 0) = 1$
- Bước đệ quy: $\text{exp}(a, S(b)) = \text{mul}(a, \text{exp}(a, b))$

C/m:

- Hàm $\text{mul}(a, b)$ đã được c/m là đqnt.
- Hàm $\text{exp}(a, b)$ sử dụng đqnt với $g(a) = 1$ và $h(a, b, z) = \text{mul}(a, z)$ nên là đqnt.

3, Giai thừa: $a!$

- Cơ sở': $\text{fact}(0) = 1$
- Bước đệ quy: $\text{fact}(S(a)) = \text{mul}(S(a), \text{fact}(a))$

C/m:

- Hàm $\text{mul}(a, b)$ đã được c/m là đqnt.
- Hàm $\text{fact}(a)$ sử dụng đqnt với $g(a) = 1$ và $h(a, z) = \text{mul}(S(a), z)$ nên là đqnt.

4, Hàm $\text{pred}(a) = \begin{cases} a-1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$

Cách biểu diễn đqnt:

$$\text{pred}(0) = 0$$

$$\text{pred}(S(a)) = a$$

Hàm này chỉ sử dụng phép chiếu và không có vòng lặp vô hạn nên nó là đqnt.

5, Phép trừ đúng

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

+ Sử dụng phép đệ quy: Xây dựng hàm $\text{sub}(a, b)$

• Cơ sở: $\text{sub}(a, 0) = a$

• Bước đệ quy: $\text{sub}(a, S(b)) = \text{pred}(\text{sub}(a, b))$

+ Đảm bảo không có giá trị âm:

Dùng hàm chỉ báo $H(x)$ với:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$a \dot{-} b = \text{sub}(a, b) \times H(a - b)$$

Vì tất cả hàm trên đều là đqnt nên phép trừ đúng cũng là đqnt.

6, Hàm $\min(a_1, \dots, a_n)$

Hàm min của 2 số có thể định nghĩa

$$\min(a, b) = a - [(a - b) \dot{-} 0]$$

Hàm min của nhiều số 'có thể' được định nghĩa để quy:

$$\min(a_1, \dots, a_n) = \min(a_1, \min(a_2, \dots, a_n))$$

Vì hàm min của 2 số là đqnt, và quy tắc trên chỉ sử dụng phép hợp thành nên hàm min của nhiều số cũng là đqnt.

7, Hàm max (a_1, a_2, \dots, a_n)

Hàm max của 2 số:

$$\max(a, b) = a + (|b - a| \div 2)$$

Hàm max của nhiều số:

$$\max(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \max(a_2, \dots, a_n))$$

Vì hàm max 2 số là đqnt và quy tắc trên chỉ sử dụng phép hợp thành nên hàm max của nhiều số cũng là đqnt.

8, Hiệu tuyệt đối:

$$|a - b| = (a \div b) + (b \div a)$$

Vì phép trừ đúng đã được c/m là đqnt và phép cộng cũng là một phép hợp thành nên $|a - b|$ cũng là đqnt.

9, Hàm not của signum:

$$\sim \text{sg}(a) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 0 & a > 0 \end{cases}$$

$$= 1 - \text{sg}(a)$$

Vì hàm $\text{signum}(10)$ là đqnt, và phép trừ $1-x$ là một phép hợp thành nên $\sim \text{sg}(a)$ là đqnt.

10, Hàm signum

$$\text{sg}(a) = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a > 0 \end{cases}$$

$$= \min(1, a)$$

Mà $\min(1, a)$ đã được c/m là đqnt nên $\text{sg}(a)$ cũng là đqnt.

11, Hàm chia nguyên

$$a \mid b = [b/a]$$

Hàm $[b/a]$ có thể được tính bằng cách đếm số lần trừ liên tiếp:

$$\text{div}(b, a) = \begin{cases} 0 & b < a \\ 1 + \text{div}(b-a, a) & b \geq a \end{cases}$$

- Cơ sở: $\text{div}(b, a) = 0$ nếu $b < a$
 - Bước đệ quy: $\text{div}(b-a, a)$ chỉ sử dụng phép trừ đúng và cộng 1, vốn là các phép toán đqnt
- $\Rightarrow \text{div}(b, a)$ là đqnt.

12, Hàm Mod

$$\text{mod}(b, a) = b - a \times \text{div}(b, a)$$

- $\text{div}(b, a)$ là đqnt
 - $\text{mod}(b, a) = b - a \times \text{div}(b, a)$ chỉ dùng phép nhân và trừ, vốn là đqnt
- $\Rightarrow \text{mod}(b, a)$ cũng là đqnt.