

Ingenieurmathematik - Übungen 12

Klaus Rheinberger, FH Vorarlberg

13. Dezember 2024

1 Allgemeine und partikuläre Lösung

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = C \frac{x}{1+x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x(1+x)y'(x) - y(x) = 0$ ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zum Anfangswert $y(1) = 8$?
2. Die Aufladung eines Kondensators der Kapazität C ab dem Zeitpunkt $t = 0$ über einen ohmschen Widerstand R auf die Endspannung u_0 erfolgt nach dem Exponentialgesetz $u_C(t) = u_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Skizzieren Sie die Funktion $u_C(t)$. Zeigen Sie, dass diese Funktion eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $RCu_C'(t) + u_C(t) = u_0$ ist, die diesen Einschaltvorgang beschreibt. Erstellen Sie in Python Plots der Funktion $u_C(t)$ für verschiedene Werte von C und R .

Quellen:

1. (Papula 2015), Kapitel IV Gewöhnliche Differentialgleichungen, Übungsaufgaben zu Abschnitt 1, Aufgabe 1
2. (Papula 2015), Kapitel IV Gewöhnliche Differentialgleichungen, Übungsaufgaben zu Abschnitt 1, Aufgabe 3

2 Trennung der Variablen

Lösen Sie folgenden DGL mit der Methode der Trennung der Variablen.

1. $y\dot{y} = te^t$
2. $\dot{y}(1+t^2) = ty$
3. $y' = 5x^4(y+1)$

Quellen:

1. (Goldstein u. a. 2018) S. 516
2. (Papula 2015) S. 520
3. (Papula 2015) Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 20e

3 Anfangswertprobleme

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

1. $yy' = \cos(2x)$, $y(0) = -1$.
2. $y' = \frac{-x}{y}$, $y(0) = 1$.
3. $y' + \cos(x)y = 0$, $y(\pi/2) = 2\pi$

4 Substitution 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem $yy' = x + \frac{y^2}{x}$, $y(1) = \sqrt{2}$ mittels einer geeigneten Substitution.

Quelle: (Papula 2015) Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 3

5 Quadratischer Luftwiderstand

Ein Auto mit Masse m und Anfangsgeschwindigkeit v_0 bewegt sich nur unter dem Einfluss des als quadratisch von der Geschwindigkeit abhängig angenommenen [Luftwiderstands](#).

1. Erklären Sie, warum die Geschwindigkeit $v(t)$ des Autos die DGL $\dot{v}(t) = -\frac{c}{m}v(t)^2$ erfüllt.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem und erstellen Sie einen Plot der Lösung in Python für vernünftige Werte der Parameter.

Goldstein, Larry J., David I. Schneider, David C. Lay, und Nakhle H. Asmar. 2018. *Calculus & Its Applications*. 14., Global Edition. Pearson Education Limited.

Papula, Lothar. 2015. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 14., überarb. u. erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg.