D) Kondensatorspannung

$$u(t) = 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Messwert $u(2) = 80$, d.h. $80 = 100\left(1 - e^{-2/\tau}\right) \quad |:100$

$$0{,}8 = 1 - e^{-2/\tau}$$

$$e^{-2/\tau} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \quad |\ln(\,)$$

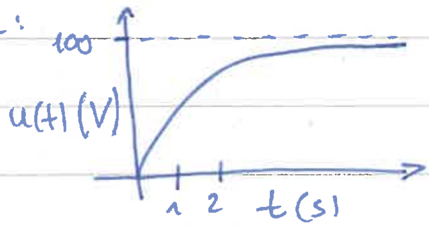
$$\ln\left(e^{-2/\tau}\right) = \ln(0{,}2)$$

$$-2/\tau = \ln(0{,}2)$$

$$-\frac{2}{\ln(0{,}2)} = \tau$$

Zeitkonstante $\underline{\tau = 1{,}243\,s}$.

Plot: siehe Code, Skizze:



Endwert u_E: $\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \underline{100 = u_E}$.

$$t \to \infty$$

$$-\frac{t}{\tau} \to -\infty$$

$$e^{-t/\tau} \to 0$$

Zeit bis zum halben Endwert:

$$\frac{u_E}{2} = 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\frac{100}{2} = 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad |:100$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad |\ln(\,)$$

$$-t/\tau = \ln(1/2) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2)$$

$$-t/\tau = -\ln(2) \quad |\cdot(-\tau)$$

$$\underline{t} = \tau \cdot \ln(2) = \underline{0{,}861\,s}.$$

Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = 5\,s$:

$$\underline{u(5)} = 100\left(1 - e^{-5/\tau}\right) = \underline{98{,}2\ V}.$$

D Definitionsmenge, Bildmenge, Graph

geg.: Funktionsgleichung $y = \sqrt{2x+6} = f(x)$.

- größtmögliche Definitionsmenge: Wurzel nur von positiven Zahlen oder Null, d.h. $2x+6 \geq 0 \quad | -6$

$$2x \geq -6 \quad | :2$$

$$x \geq -3$$ Also Def.-menge $D = [-3, \infty)$.

- Bildmenge dazu: $f(-3) = \sqrt{2(-3)+6} = \sqrt{0} = 0$

$f(-2) = \sqrt{2(-2)+6} = \sqrt{2} > 0$

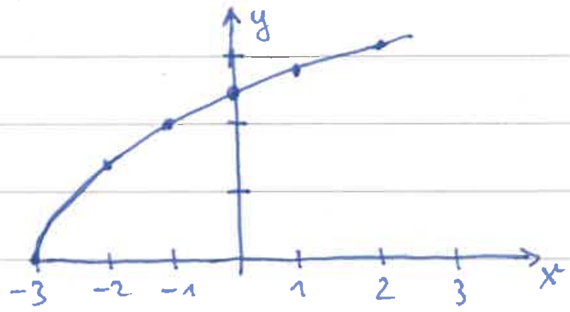
f ist streng monoton steigend, siehe Graph

Daher ist die Bildmenge $B = [0, \infty)$.

- Wertetabelle:

x	$f(x)$
-3	0
-2	$\sqrt{2} = 1{,}414$
-1	2
0	$2{,}449$
1	$2{,}828$
2	$3{,}162$

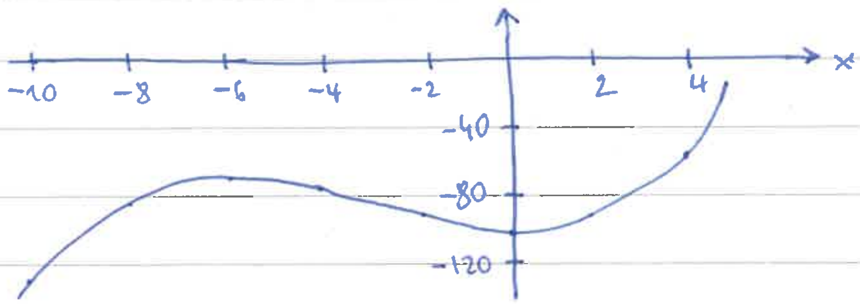
- Graph: siehe Code, Skizze:



▷ Monotonieeigenschaften

geg.: Polynom $f(x) = 0{,}25x^3 + 2x^2 - 2x - 100$ dritten Grades

Plot: siehe Code, Skizze:



streng monoton steigend von $-\infty$ bis ca. -6

— " — fallend von ca. -6 bis ca. $0{,}5$

— " — steigend von ca. $0{,}5$ bis ∞

▷ Operationen Wie ändert sich die Fkt.-glg. $f(x) = e^{2x+1}$, wenn deren Graph um 2 Einheiten in die negative x-Richtung und um 1 Einheit in die pos. y-Richtung verschoben wird?

1.) 2 Einheiten in die neg. x-Richtg.: $e^{2(x+2)+1} = e^{2x+5}$

2.) 1 Einheit in die pos. y-Richtg.: $e^{2x+5} + 1$.

▷ (Un-)Gerade Fktn.

1.) $f(x) = 4\sin(2x)$, $f(-x) = 4\sin(-2x) = 4(-\sin(2x)) = -4\sin(2x) =$
$= -f(x) \Rightarrow$ ungerade.

2.) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{1+(-x)^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = f(x) \Rightarrow$ gerade.

3.) $f(x) = e^{-x}$, $f(-x) = e^{-(-x)} = e^{x} \neq f(x)$ oder $-f(x) \Rightarrow$ weder gerade noch ungerade.

4.) $f(x) = -3x^2 + x^6$, $f(-x) = -3(-x)^2 + (-x)^6 = -3x^2 + x^6 = f(x)$
$\Rightarrow$ gerade.

5.) $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x)+1}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\cos(-x)+1} = \frac{x^2}{\cos(x)+1} = f(x) \Rightarrow$ gerade

6.) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} =$
$= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

7.) $f(x) = e^x$, $f(-x) = e^{-x} \neq f(x)$ oder $-f(x) \Rightarrow$ weder gerade noch ungerade.

8.) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+x}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^3+(-x)} = \frac{x^2}{-x^3-x} = \frac{x^2}{-(x^3+x)}$
$$= -\frac{x^2}{x^3+x} = -f(x) \Rightarrow \text{ungerade}$$

9.) $f(x) = \cos(2x) - \cos(x)$, $f(-x) = \cos(2(-x)) - \cos(-x) =$
$$= \cos(-2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x) = f(x) \Rightarrow \text{gerade.}$$

10.) $f(x) = \ln(|x|)$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x) \Rightarrow$ gerade.

D) (Un-)Gerader Anteil geg.: $f(x)$

gerader Anteil: $f_g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$

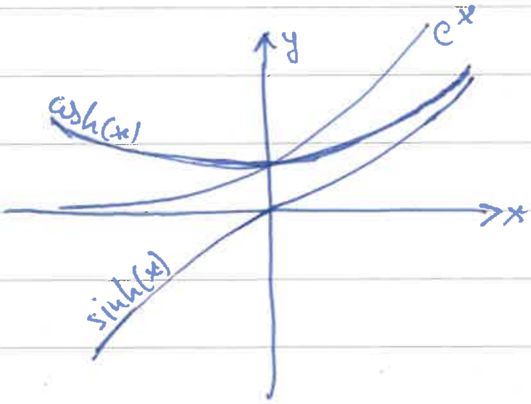
ungerader Anteil: $f_u(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

Beachte: $f_g(x) + f_u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)] =$
$$= \frac{1}{2}[2f(x)] = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot f(x) = f(x)$$

Check, ob f_g gerade und f_u ungerade sind:
$$f_g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f_g(x).$$
$$f_u(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] =$$
$$= \frac{1}{2}[-(f(x) - f(-x))] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -f_u(x).$$

Gerader und ungerader Anteil von $e^x = f(x)$:
$$f_g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$
$$f_u(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

Plot: siehe Code, Skizze:



▷ Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \sinh(x)$ inkl. Probe.

$$y = \sinh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad | \cdot 2$$
$$2y = e^x - e^{-x}$$
$$e^x - e^{-x} = 2y \quad | \cdot e^x$$
$$e^x \cdot e^x - e^{-x} \cdot e^x = 2y e^x$$
$$e^{2x} - e^{-x+x} = 2y e^x$$
$$e^{2x} - e^0 = 2y e^x \quad | -2y e^{-x}$$
$$e^{2x} - 1 - 2y e^x = 0$$
$$e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$
$$(e^x)^2 - 2y \cdot (e^x) - 1 = 0 \qquad \text{Setze } u = e^x$$
$$u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 \qquad \text{quadr. Glg.}$$
$$u_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \qquad \text{Da } u = e^x > 0 \text{, wird}$$
$$u = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{nur } +\sqrt{} \text{ genommen!}$$
$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad | \ln(\,) \qquad (\text{Denn } \sqrt{y^2+1} > y.)$$
$$\ln(e^x) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

- Umkehrfunktion von sinh heißt arsinh (Areasinus hyperbolicus): $\operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
- Probe: $\sinh(\operatorname{arsinh}(y))$ muss wieder y ergeben:

$$\sinh(\operatorname{arsinh}(y)) = \tfrac{1}{2}\left[e^{\ln(y+\sqrt{y^2+1})} - e^{-\ln(y+\sqrt{y^2+1})}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[y + \sqrt{y^2+1} - \frac{1}{e^{\ln(y+\sqrt{y^2+1})}}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[y + \sqrt{y^2+1} - \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(y+\sqrt{y^2+1})^2 - 1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{y^2 + 2\sqrt{y^2+1}\cdot y + y^2 + 1 - 1}{y+\sqrt{y^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2y^2 + 2\sqrt{y^2+1}\cdot y}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}y\,\cancel{(y+\sqrt{y^2+1})}}{\cancel{y+\sqrt{y^2+1}}} = y. \;\checkmark$$