

# Ingenieurmathematik - Übungen 13

Klaus Rheinberger, FH Vorarlberg

20. Dezember 2024

## 1 Menge an $CO_2$ in einem Raum

Die Luft in einem Raum voller Menschen enthält im Volumenanteil 0,25 % Kohlendioxid ( $CO_2$ ). Eine Klimaanlage wird eingeschaltet und bläst mit einer Geschwindigkeit von 500 Kubikmeter pro Minute Frischluft in den Raum. Die frische Luft vermischt sich mit der verbrauchten Luft, und das Gemisch verlässt den Raum mit einer Geschwindigkeit von 500 Kubikmeter pro Minute. Die frische Luft enthält 0,01 %  $CO_2$ , und der Raum hat ein Volumen von 2500 Kubikmetern.

1. Bestimmen Sie die DGL, die das Volumen  $y(t)$  an  $CO_2$  im Raum zu jedem Zeitpunkt  $t$  erfüllt. Lösen Sie das Anfangswertproblem, und machen Sie einen Plot der Lösung in Python.
2. Das in 1. entwickelte Modell ignoriert das durch die Atmung der Personen im Raum erzeugte  $CO_2$ . Nehmen wir an, dass die Menschen im Raum 0,08 Kubikmeter  $CO_2$  pro Minute produzieren. Berücksichtigen Sie in einer neuen DGL diese zusätzliche  $CO_2$ -Quelle. Lösen Sie das Anfangswertproblem, und machen Sie einen Plot der Lösung in Python zum Vergleich mit der Lösung in 1..

*Quelle:* (Goldstein u. a. 2018) p.546, Exercise 21

## 2 RL Schaltung

Die DGL, die die elektrische Stromstärke  $I(t)$  (A) zu einem Zeitpunkt  $t$  (s) in einer RL-Schaltung beschreibt, ist gegeben durch

$$L\dot{I} + RI = U,$$

wobei  $R$  ( $\Omega$ ) den Widerstand,  $L$  (H) die Induktivität und  $U$  (V) die Spannung ist. Eine gegebene Schaltung habe eine Spannung von 5 V, einen Widerstand von  $50 \Omega$ , eine Induktivität von 1 H sowie anfangs eine Stromstärke  $I(0) = 0$ . Berechnen Sie die Stromstärke  $I(t)$  für  $t \geq 0$ , und erzeugen Sie einen Plot der Lösung in Python.

*Quelle:* (Bronson und Costa 2014) p.52, p.65, Exercise 7.19

## 3 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 1

Lösen Sie die DGL  $\dot{y}(t) + ty(t) = 4t$ .

## 4 Newtonsches Abkühlungsgesetz 1

Eine hungrige Studentin schaltet den Ofen ein und legt eine kalte Pizza aufs Blech, ohne den Ofen vorzuheizen. Sei  $T_P(t)$  die Temperatur der Pizza und  $T_O(t)$  die Ofentemperatur ( $^{\circ}\text{C}$ ) jeweils  $t$  Minuten, nachdem der Ofen eingeschaltet wurde. Nach dem *Newtonschen Abkühlungsgesetz* ist die Temperaturänderungsrate proportional zur Temperaturdifferenz von Pizza zu Ofen:

$$\dot{T}_P(t) = -k[T_P(t) - T_O(t)],$$

wobei  $k$  eine positive Konstante ist. Angenommen die Ofentemperatur ist für  $0 \text{ min} \leq t \leq 8 \text{ min}$  gegeben durch  $T_O(t) = 20 + 30t$ , mit  $k = 0.1 \text{ min}^{-1}$  und einer anfänglichen Pizzatemperatur von  $4^{\circ}\text{C}$ .

1. Bestimmen Sie die Temperatur der Pizza in den ersten 8 Minuten.
2. Plotten Sie die Temperatur der Pizza über die ersten 8 Minuten.

*Quelle:* (Goldstein u. a. 2018) p. 526f

## 5 Mischung

Ein Tank enthält ursprünglich 200 Liter reines Wasser. Eine Salzlösung mit 1 kg Salz pro 4 Liter Wasser wird bei einer Rate von 12 Liter pro Minute in den Tank eingebracht. Salz und Wasser durchmischen sich perfekt, und 12 Liter der Mischung fließen pro Minute wiederum aus dem Tank heraus.

1. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die die Menge (in kg) an Salz im Tank über die Zeit hinweg beschreibt.
2. Lösen Sie diese Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie, falls vorhanden, den steady state.
4. Skizzieren Sie die Lösung.

*Quelle:* (Farlow 2006) Example 1, p. 61f.

## 6 Aufladen eines Kondensators

Das Aufladen eines Kondensators mit der Kapazität  $C$  über einen ohmschen Widerstand  $R$  wird durch die lineare Differentialgleichung

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u(t)$$

beschrieben. Dabei ist  $u(t)$  die von außen angelegte Spannung und  $u_C(t)$  die Spannung am Kondensator.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bei einer konstanten äußeren Spannung  $u(t) = u_0$ .
2. Wie lautet die Lösung für den Anfangswert  $u_C(0) = 0$ ? Skizzieren und beschreiben Sie die Lösung.

*Quelle:* (Papula 2015) Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 26

## Literatur

- Bronson, Richard, und Gabriel Costa. 2014. *Schaum's Outline of Differential Equations (Schaum's Outlines)*. 4. Auflage. McGraw-Hill Education Ltd.
- Farlow, Stanley J. 2006. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*. Illustrated Edition. Mineola, N.Y: Dover.
- Goldstein, Larry J., David I. Schneider, David C. Lay, und Nakhle H. Asmar. 2018. *Calculus & Its Applications*. 14, Global Edition. Pearson Education Limited.
- Papula, Lothar. 2015. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 14., überarb. u. erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg.