Lehrgang zur Studienbefähigung 2024

Mathematik 3

Martin Dobler, MSc BSc

Fachhochschule Vorarlberg,
Forschungszentrum Business Informatics,
Raum: V6 07, Hochschulstraße 1, Dornbirn.
E-Mail: martin.dobler@fhv.at

Inhaltsverzeichnis

Inhalt und Literatur

Kursaufteilung

Mathematik 1

- ✓ Symbole, Zahlenmengen und Rechenoperationen
- ✓ Bruchrechnung
- ✓ Dreisatz und Prozentrechnung
- ✓ Potenzen, Wurzeln und Logarithmen
- ✓ Algebraische Grundregeln
- ✓ Gleichungen
- ✓ lineare Gleichungssysteme
- ✓ lineare Funktionen

Mathematik 3

- ✓ Funktionen (Polynome und spezielle Funktionen)
- ✓ Differentialrechnung
- ✓ Integralrechnung
- ✓ Vektorrechnung

Literaturempfehlung

- **Brückenkurs Mathematik - für Studieneinsteiger aller Disziplinen**
  Walz, Zeilfelder, Rießinger, Spektrum Akad. Verlag, Springer, 2007.

- **Mathematik zum Studienbeginn**
  Kemnitz, Vieweg+Teubner, 2007.

- **Aufgabenpool zur Klausurvorbereitung (Schwerpunkt: Mathematik 3)**
  Unterrichtsaufgaben zur Unterstützung der Vorbereitung auf die SRP-Mathematik AHS, BMBWF, 2018.

- YouTube Channels (Beispiel, u.v.m.)

Symbole

Symbole

Überblick und Erklärung häufig verwendeter Symbole

Symbol	Name	Beispiel
$=$	gleich	$3 = 3$
$\neq$	ungleich	$3 \neq 4$
$>$	größer	$5 > 3$
$\geq$	größer oder gleich	$4 \geq 3$ oder auch $3 \geq 3$
$<$	kleiner	$1 < 4$
$\leq$	kleiner oder gleich	$2 \leq 3$ oder auch $2 \leq 2$
$\{\dots\}$	Mengenklammern	$M = \{-1; 3; 5; 13\}$
$\in$	enthalten in	$3 \in M$
$\notin$	nicht enthalten in	$6 \notin M$
$\setminus$	ohne	$M \setminus \{13\} = \{-1; 3; 5\}$
$:$	es gilt	
$\forall$	für alle	
$\wedge$	logische "und"	
$\vee$	logisches "oder"	
$\exists$	es gibt / existiert	

Funktionen - Mathematik 3

Mathematik 3

- Benutzung der Bibliothek (siehe Literaturliste)
- Übungsaufgaben zur Prüfungsvorbereitung sind auf http://www.aufgabenpool.at/ zu finden!
  - $\hookrightarrow$ **Unterpunkt – Mathematik**:
    Es sind sowohl Typ-1 als auch Typ-2 Fragen relevant.
  - $\hookrightarrow$ **Typ-1 Fragen** – Grundwissen und -fertigkeiten
  - $\hookrightarrow$ **Typ-2 Fragen** – eigenständige Rechenkompetenzen
- Multiple Choice Aufgaben zu Mathematik 3 Themen
  https://www.mathe-online.at/tests.html
  Relevante Themengebiete sind besonders
  - $\hookrightarrow$ Funktionen 1 und 2
  - $\hookrightarrow$ Differenzieren 1
  - $\hookrightarrow$ Anwendungen der Differentialrechnung (Kurvendiskussion, etc.)
  - $\hookrightarrow$ Integralrechnung
  - $\hookrightarrow$ Vektoren 1 und 2

Potenz- und Wurzelfunktionen

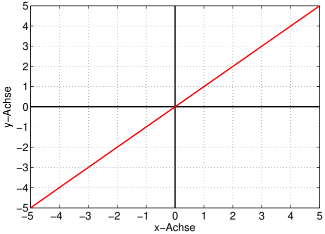
Potenzfunktion

Für jede ganze Zahl n nennt man die Funktion

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten n.

- Die einfachste Potenzfunktion ist $p_1(x) = x$.
  - $\hookrightarrow$ $p_1(x)$ ist **die Winkelhalbierende des Koordinatensystems**, Funktionsgraph:



  - $\hookrightarrow$ $p_1(x)$ ist ihre eingene Umkehrfunktion.

Potenz- und Wurzelfunktionen

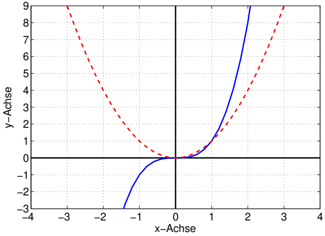
Potenzfunktion

Für jede ganze Zahl n nennt man die Funktion

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten n.

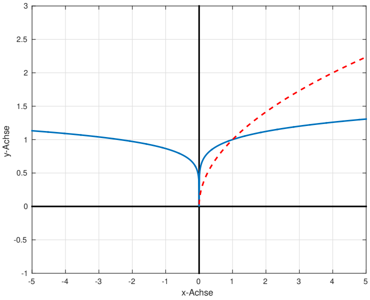
- Die nächst einfachen Potenzfunktionen sind $p_2(x) = x^2$ und $p_3(x) = x^3$.
  - $\hookrightarrow$ $p_2(x)$ heißt **Normalparabel**, Funktionsgraph (rot gestrichelt)
  - $\hookrightarrow$ $p_3(x)$, Funktionsgraph (blau)



- Potenzfunktionen mit negativem Exponenten werden im Kapitel **Rationale Funktionen** betrachtet.

Wurzelfunktion

Für jede natürliche Zahl n nennt man die Funktion $w_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ oder $w_n(x) = \sqrt[n]{x}$ die **n-te Wurzelfunktion**.



- Die Wurzelfunktion $w_n(x)$ ist die Umkehrfunktion der streng monotonen Funktion $p_n(x)$.
- **ACHTUNG:** Bei geradem n ist $p_n(x)$ nur auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar

Exponentialfunktion zu allgemeiner Basis

Es sei a eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Berechnung der Funktionswerte and den Stellen $x = -2, 0, 1, 2, 10$ zu verschiedenen Basen a:

x	-2	0	1	2	10
$\exp_{\frac{1}{2}}(x)$	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1024}$
$\exp_1(x)$	1	1	1	1	1
$\exp_2(x)$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	1024
$\exp_4(x)$	$\frac{1}{16}$	1	4	16	$4^{10} = 2^{20}$

Exponentialfunktion zu allgemeiner Basis

Es sei a eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Die **Exponentialfunktion** zur Basis a

- ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, falls $a > 1$.
- ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend, falls $a < 1$.
- hat stets die Bildmenge $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$.

Exponentialfunktion zu allgemeiner Basis

Es sei a eine positive reelle Zahl. Die Funktion

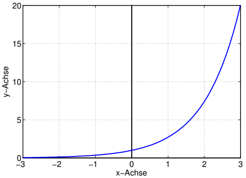
$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Die **Exponentialfunktion** zur Basis $e \approx 2,718281\ldots$ (eulersche Zahl)

- bezeichnet man oft einfach als **die** Exponentialfunktion

$$\exp_e(x) = e^x.$$



Exponentialfunktion zu allgemeiner Basis

Es sei a eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Rechenregeln für die **Exponentialfunktion**:

- Für alle reellen Zahlen x, y und jede positive Basis a gilt:

  $$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$$

  und

  $$\exp_a(-x) = \exp_{\frac{1}{a}}(x)$$

- Vergleiche die Potenzrechenregeln!

Logarithmus zur Basis a

Es seien a und x positive reelle Zahl und $a \neq 0$. Diejenige Zahl y, welche die Gleichung

$$a^y = x$$

löst nennt man **Logarithmus von x zur Basis a**. Die **Logarithmusfunktion von x zur Basis a** bildet jede positive Zahl x auf den passenden Exponenten zur Basis a ab:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \log_a x$$

Die **Logarithmusfunktion** zur Basis a

- hat stets den Definitionsbereich $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$.
- ist auf ganz $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, falls $a > 1$.
- ist auf ganz $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend, falls $a < 1$.

Logarithmus zur Basis a

Es seien a und x positive reelle Zahl und $a \neq 0$. Diejenige Zahl y, welche die Gleichung

$$a^y = x$$

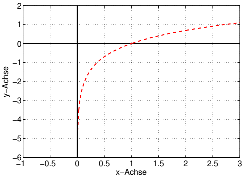
löst nennt man **Logarithmus von x zur Basis a**. Die **Logarithmusfunktion von x zur Basis a** bildet jede positive Zahl x auf den passenden Exponenten zur Basis a ab:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \log_a x$$

Die **Logarithmusfunktion** zur Basis $e \approx 2,718281\ldots$ (eulersche Zahl)

- bezeichnet man als **natürlichen Logarithmus**

$$\log_e(x) = \ln x.$$



Logarithmus zur Basis a

Es seien a und x positive reelle Zahl und $a \neq 0$. Diejenige Zahl y, welche die Gleichung

$$a^y = x$$

löst nennt man **Logarithmus von x zur Basis a**. Die **Logarithmusfunktion von x zur Basis a** bildet jede positive Zahl x auf den passenden Exponenten zur Basis a ab:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \log_a x$$

Rechenregeln für die **Logarithmusfunktion**:

- Für alle reellen Zahlen x, y und jede positive Basis a gilt:

  $$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
  $$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

  und

  $$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$$

- Vergleiche die Potenz- und Logarithmenrechenregeln!

Monotonie

Monotonie

Es sei $f : D \to W$ eine Funktion und I eine Teilmenge des Definitionsbereichs D. Man sagt f ist **monoton steigend** auf I, wenn gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Analog heißt f **monoton fallend** auf I, wenn gilt:

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Eine Funktion heißt **monoton**, wenn sie monoton fallend oder steigend ist.
- Eine Funktion heißt **streng monoton**, wenn in obiger Definition $\geq, \leq$ durch $>, <$ ersetzt werden kann.

Beispiele:

$\hookrightarrow$ $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton fallend und auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend

$\hookrightarrow$ $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend

$\hookrightarrow$ $f(x) = -x^5$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton fallend

$\hookrightarrow$ $f(x) = -x^4$ ist auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton steigend und auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend

Umkehrbarkeit

Strenge Monotonie und Umkehrbarkeit

Es sei $f : D \to W$ eine auf ganz D streng monotone Funktion, d.h.

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

oder

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Die Bildmenge von f sei $f(D)$.

Dann ist f **umkehrbar**, d.h. existiert eine auf $\tilde{D} = f(D)$ definierte Umkehrfunktion f^{-1}, die das Bild $f(D)$ zurück auf D abbildet.

$$f^{-1} : f(D) \to D$$

Beispiele:

$$f(x) = x + 5 \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) = y - 5$$
$$f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

Verkettung von Funktionen

Zwei Funktionen können unter gewissen Bedingungen miteinander verbunden werden und als eine einzige Funktion dargestellt werden.

- Betrachten wir die Funktionen:

  ↪ $g(x) = x + 50$ und $f(y) = 2y$

  ↪ Man kann diese dann entweder nacheinander ausführen (z.B. für $x = 5$):

$$g(5) = 5 + 50 = 55 \qquad \text{und} \qquad f(55) = 2 \cdot 55 = 110$$

  ↪ Oder man verknüpft g und f zu einer Funktion h:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 50) = 2 \cdot (x + 50)$$

  Für $x = 5$ gilt dann ebenfalls

$$h(5) = 2 \cdot (5 + 50) = 110$$

! Hier ist zu beachten, dass die Funktion f etwas mit den Ausgabewerten (y-Werten) von g anfangen kann!

- Diese Verknüpfung nennt man **Verkettung** oder **Komposition** der Funktionen.

Verkettung von Funktionen

Diese Verknüpfung nennt man **Verkettung** oder **Komposition** der Funktionen.

Verkettung

Es seien $f : F \to W$ und $g : D \to E$ zwei Funktionen. Liegt der Definitionsbereich F von f **komplett** in der Bildmenge $g(D)$ von g, so heißt die Funktion

$$f \circ g : D \to W, \quad f \circ g(x) = f\left(g(x)\right),$$

für alle $x \in D$, die **Verkettung** bzw. **Komposition** von f und g.

! Reihenfolge: Es wird zuerst g und dann f angewendet!

Bsp. Wir schreiben

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$$

für die Menge aller **nicht negativen reellen Zahlen**!

Verknüpfe die Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x+9)^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(y) = \sqrt{y} - 9$$

ABER nicht möglich (Bildbereich von g nicht im Definitionsbereich von f):

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(y) = \sqrt{y} - 5$$

Verkettung von Funktionen

Verknüpft man nun die Funktionen

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad g(x) = (x+9)^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(y) = \sqrt{y} - 9$$

so erhält man

$$f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f \circ g(x) = \sqrt{(x+9)^2} - 9 = x$$

- Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird durch die Funktion $f \circ g$ also wieder auf **sich selbst** abgebildet!
- Man bezeichnet eine solche Funktion f, die eine Zuordnung g rückgängig macht, als **Umkehrfunktion von** g.
- Formal korrekter schreiben wir:

Umkehrfunktion

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und Bildmenge $f(D)$. Eine Funktion f^{-1} mit Definitionsberech $f(D)$ und der Eigenschaft

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad \text{für alle } x \in D$$

nennt man **Umkehrfunktion** von f.

Umkehrfunktion

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und Bildmenge $f(D)$. Eine Funktion f^{-1} mit Definitionsberech $f(D)$ und der Eigenschaft

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad \text{für alle } x \in D$$

nennt man **Umkehrfunktion** von f.

- Die Umkehrfunktion einer Funktion $f(x)$ kann man wie folgt berechnen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 7x^3 - 2$$

↪ Für die Funktionswerte der Funktion schreiben wir $y = f(x)$

$$y = 7x^3 - 2$$

↪ Umstellen nach x liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{y+2}{7}}$$

↪ Die rechte Seite beschreibt also eine Funktion $x = g(y)$ mit

$$g(y) = \sqrt[3]{\frac{y+2}{7}}$$

- Dies ist die zu f gehörige Umkehrfunktion g!

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

$\hookrightarrow$ Beispiele für Polynome:

$$\begin{aligned} f(x) =& 2x^3 - 4x^2 + x - 3 \\ g(x) =& 2x^7 - 4x^5 + x^3 \\ p(x) =& (x+3)^2 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Es dürfen also auch Koeffizienten **gleich Null** sein.

$\hookrightarrow$ Keine Polynome hingegen sind z.B.:

$$\begin{aligned} f(x) =& 2x^3 - 4x^{\frac{2}{3}} + x - 3 \\ g(x) =& 2x^7 - 4x^5 + x^{-1} \end{aligned}$$

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

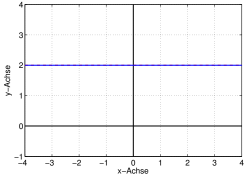
- Die kleinste für n zugelassene Zahl ist $n = 0$.

  $\hookrightarrow$ Ein Polynom vom Grad $n = 0$ ist von der Form

  $$p(x) = a_0.$$

  Es hat also für alle x denselben Funktionswert a_0.
  Eine solche Funktion heißt **konstante Funktion**.

  - zum Beispiel: $f(x) = 2$



Polynome

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Ploynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

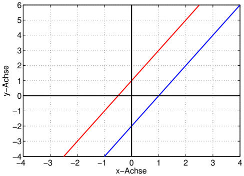
- Für $n = 1$ erhalten wir ein Polynom vom Grad 1.

  $\hookrightarrow$ Ein Ploynom vom Grad $n = 1$ ist von der Form

  $$p(x) = a_1 x + a_0.$$

  Eine solche Funktion heißt **lineare Funktion**.

  - zum Beispiel: $f(x) = 2x + 1$



Polynome

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

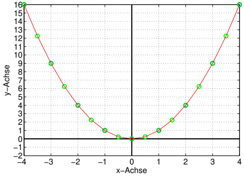
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Ploynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

- Für $n = 2$ erhalten wir ein Polynom vom Grad 2.
  - $\hookrightarrow$ Ein Ploynom vom Grad $n = 2$ ist von der Form

    $$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

    Ein Polynom 2ten Grades heißt **Parabel**.
  - zum Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x + 2$
  - $\hookrightarrow$ Den einfachsten Fall der Parabelfunktionen stellt die Potenzfunktion $p_2(x) = x^2$ dar. (**Normalparabel**)



Nullstellen von Polynomen

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

Nullstelle

Eine reelle Zahl $\bar{x}$ heißt **Nullstelle** einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn gilt

$$f(\bar{x}) = 0.$$

! **MERKE:** Ein Polynom vom Grad n hat **maximal** n Nullstellen!

- $\hookrightarrow$ $x^3 - 2x^2 - 8x$
- $\hookrightarrow$ $x^3 - 8$

Polynom durch vorgegebene Punkt

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Das **Polynom** vom Grad n hat die Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- Ein Polynom vom Grad n kann durch $n + 1$ Punkte eindeutig bestimmt werden.
  - $\hookrightarrow$ Dazu stellt man für jeden Punkt eine Gleichung auf, und
  - $\hookrightarrow$ und löst das entstandene Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen

- Bestimme das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, welches durch die Punkte $P_1(-1, 6)$, $P_2(2, -3)$ und $P_3(4, 1)$ verläuft!

Schnittpunkt von Polynom und Gerade

Polynom

Es seien n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Das **Ploynom** vom Grad n hat die Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Gerade

Eine Gerade ist eine lineare Funktion. Für reelle Zahlen a, b hat diese die Form

$$g(x) = ax + b.$$

- Die Schnittpunkte zweier Funktionen bestimmt man so:
  - ↪ Gleichsetzten der Funktionswerte und lösen der entstandenen Gleichung liefert die **x-Koordinaten** der Schnittpunkte
  - ↪ Einsetzen der x-Koordinaten in eine der Funktionen liefert die zugehörigen **y-Koordianten**
- Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = -2x + 1$ Polynom $f(x) = x^2 - 4x + 1$!

Rationale Funktion

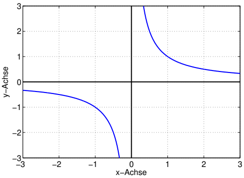
Seien p und q zwei Polynome und D eine Teilmenge der reellen Zahlen, die keine Nullstelle von q enthält.
Eine Funktion $r(x)$ der Form

$$r : D \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt **rationale Funktion**.

- Die Vorgehensweise erinnert an die Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Beispiele sind

  $\hookrightarrow$ $\frac{1}{x}$



Rationale Funktion

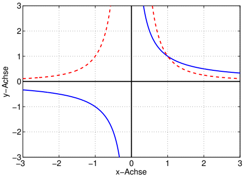
Seien p und q zwei Polynome und D eine Teilmenge der reellen Zahlen, die keine Nullstelle von q enthält.
Eine Funktion $r(x)$ der Form

$$r : D \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt **rationale Funktion**.

- Die Vorgehensweise erinnert an die Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Beispiele sind

  $\hookrightarrow \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$



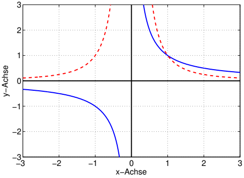
Rationale Funktion

Seien p und q zwei Polynome und D eine Teilmenge der reellen Zahlen, die keine Nullstelle von q enthält.
Eine Funktion $r(x)$ der Form

$$r : D \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt **rationale Funktion**.

- Die Vorgehensweise erinnert an die Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Beispiele sind
  $\hookrightarrow$ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$,$\frac{5}{x^2}$, $\frac{-1}{x^2}$, (etc.), oder auch
  $\hookrightarrow$ $\frac{x^3-8}{x^5}$ und $\frac{x^3-2x^2-8x}{x^2-1}$



Rationale Funktionen

- Anders als bei einfachen Polynomen, muss man sich bei rationalen Funktionen Gedanken um den Definitionsbereich machen!
- Ohne die Angabe des Definitionsbereichs ist eine Funktion niemals vollständig!
- Wir betrachten die rationalen Funktionen

$$r_1(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$r_2(x) = \frac{17x^{2}0 - 2x^{1}6 + 3x}{x - 3}$$

$$r_3(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$\hookrightarrow$ $r_1(x)$ hat Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
$\hookrightarrow$ $r_2(x)$ hat Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$\hookrightarrow$ $r_3(x)$ hat Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$

Polstelle

Eine reelle Zahl $\bar{x}$, die Nullstelle des Nenners $q(x)$, aber nicht des Zählers $p(x)$ einer rationalen Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist, heiß **Polstelle** von r(x).
Eine Polstelle gehört **nicht** zum Definitionsbereich von $r(x)$.

- Polstellen einer rationalen Funktion sind die Nullstellen des Nenners.
- Besteht der Nenner aus einem Polynom mit Grad größer gleich 3, so sind die Polstellen nicht immer einfach zu berechnen!

$\hookrightarrow$ Stichwort: **Polynomdivision**

Polynomdivision

Die Polynomdivision

- ist ein Verfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen.
- ähnelt der schriftlichen Division.
- Bei der Polynomdivision dividiert man nun nicht zwei Zahlen, sondern ganze Polynome.
- Zu Beginn benötigt man eine Nullstelle x_0 des Polynoms
  - $\hookrightarrow$ Diese kann oft durch Probieren (Raten) herausgefunden werden!
  - $\hookrightarrow$ Ggf. kann die Suche nach einer Nullstelle sehr kompliziert sein.
- Dann dividiert man das ursprüngliche Polynom duch

$$(x - x_0)$$

  - $\hookrightarrow$ $(x - x_0)$ ist ebenfalls ein Polynom (Grad 1).
  - $\hookrightarrow$ Beim Dividieren wird der Grad des Ausgangspolynoms um 1 reduziert.
  - $\hookrightarrow$ Dadurch vereinfacht sich die Nullstellensuche sukzessive.

Die Polynomdivision

Beispiel:

- Finde die Nullstellen von
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

  $\hookrightarrow$ Wieviele sind es maximal? (Höchstgrad 3 $\Rightarrow$ maximal 3 Nullstellen)
  $\hookrightarrow$ Raten: $x_0 = 1$ ist Nullstelle. (Probe!)

- Nun dividieren wir $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ durch das Polynom $x - 1$:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad - x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad - 6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Polynomdivision

weitere Beispiele:
Bestimme die Nullstellen durch Polynomdivision und Probe.

- Übung 1:
  Gegeben sei die Funktion
  $$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$
- Übung 2:
  Gegeben sei die Funktion
  $$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12.$$
  Eine Nullstelle sei bei bei $x = 3$.
- Übung 3:
  Gegeben sei die Funktion
  $$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$
  (siehe Nenner der rationalen Funktion $r_3(x)$, oben!)

Trigonometrie

Winkelfunktionen

Satz des Pythagoras

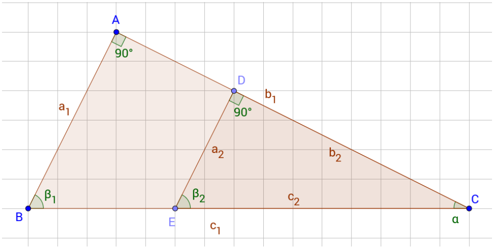
Durch Angabe zweier Seiten eines **rechtwinkligen** Dreiecks ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$(1.\ \text{Kathete})^2 + (2.\ \text{Kathete})^2 = (\text{Hypotenuse})^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

auch die dritte Seite eindeutig bestimmt.

- Sind alle Seiten bekannt, so sind auch alle Winkel bestimmt.
- Zwei rechtwinklige Dreiecke, die auch in ihren spitzen Winkeln übereinstimmen, heißen **ähnliche Dreiecke**.
- Nach dem Strahlensatz ist das Verhältnis entsprechender Seiten in solchen Dreiecken dasselbe.
- Ändert man nun die Winkel, so ändern sich die Seitenlängen und damit die Verhältnisse der Seiten.
- Die Verhältnisse hänge also von den spitzen Innenwinkeln ab. Deshalb bezeichnet man diese Verhältnisse als Winkelfunktionen:

$$\text{Sinus } (\mathsf{sin}), \quad \text{Cosinus } (\mathsf{cos}) \quad \text{Tangens } (\mathsf{tan})$$



Strahlensatz

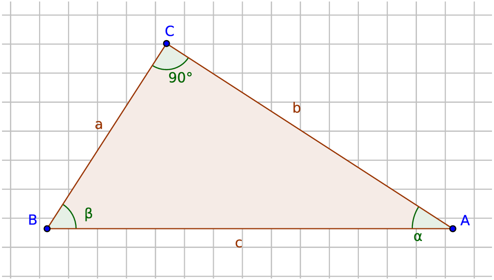
In den obigen **ähnlichen** Dreiecken gelten die folgende Verhältnisse:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Nach Umformungen erhält man daraus die Verhältnisse:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}, \qquad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Winkelfunktionen



- Ändert man nun die Winkel, so ändern sich die Seitenlängen und damit die Verhältnisse der Seiten.
- Die Verhältnisse hänge also von den spitzen Innenwinkeln ab. Deshalb bezeichnet man diese Verhältnisse als Winkelfunktionen:

$$\text{Sinus } (\sin): \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cosinus } (\cos): \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

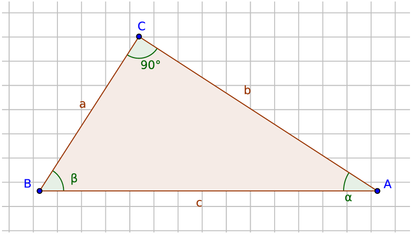
$$\text{Tangens } (\tan): \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Winkelfunktionen

Im rechtwinkligen Dreieck sind die Winkelfunktionen als Verhältnisse der Seiten definiert:

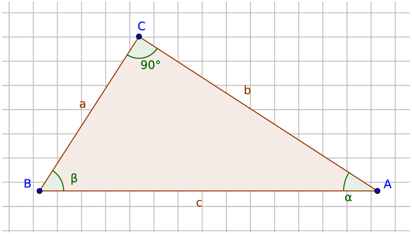
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Aufgrund der Definition sind die Funktionen vorerst auf Werte $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ beschränkt.



Für den zweiten spitzen Winkel β gilt analog:

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$



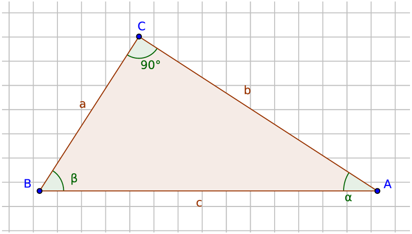
- Der Vergleich zeigt folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \cos(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\beta)} = \cot(\beta)$$

- Den Kehrwert der Tangensfunktion bezeichnet man als Kotangensfunktion (cot).

- Berücksichtigt man, dass im rechtwinkligen Dreieck $\beta = 90^\circ - \alpha$ gilt, so folgt ebenfalls:

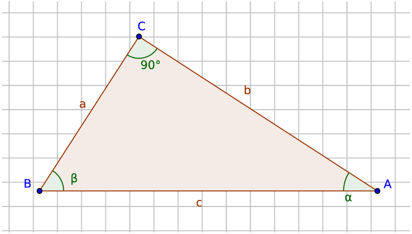
$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) \qquad \tan(\alpha) = \cot(90^\circ - \alpha)$$



- Zusätzlich kann man die Tangensfunktion auch durch die Sinus- und Kosinusfunktion ausdrücken. Es gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- Entsprechendes gilt für die Kotangensfunktion $\quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.



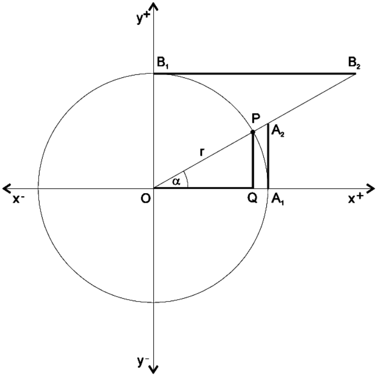
- Aus dem Satz des Pythagoras folgt eine weitere **wichtige Beziehung:**

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\
(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 &= 1 \\
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1
\end{aligned}
$$

- Anstelle von $(\sin(\alpha))^2$ schreibt man üblicherweise $\sin^2(\alpha)$!

Winkelfunktionen

Zeichnet man einen Punkt im Koordinatensystem ein und verbindet man den Punkt mit dem Ursprung, so erhält man eine Strecke, die einen Winkel mit der x-Achse einschließt. Eine Änderung des Winkels entspricht nun einer Drehung der Strecke um den Ursprung. Auf diese Weise beschreibt der Punkt eine Kreisbahn. In dem von der Abszisse x, der Ordinate y und dem Abstand r des Punktes vom Ursprung (dem Radius des Kreises) gebildeten rechtwinkligen Dreieck OQP gelten folgende Beziehungen:



Sinus: $\sin(\alpha) = \dfrac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \dfrac{y}{r}$

Kosinus: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{x}{r}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \dfrac{y}{x}$

Wählt man r = 1, so erhält man den sogenannten Einheitskreis. Die obigen Ausdrücke stellen sich dann vereinfacht dar:

$$\sin(\alpha) = y\,,\ \cos(\alpha) = x$$

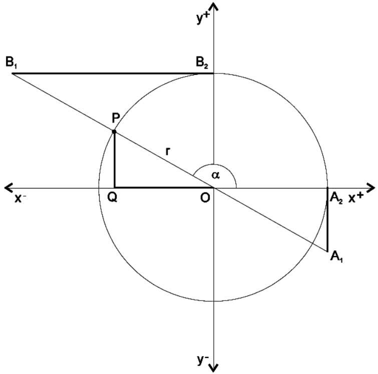
Betrachtet man weiters die beiden ähnlichen Dreiecke OQP und OA_1A_2 und wendet den Strahlensatz an, so ergibt sich:

$$\overline{OQ} : \overline{OA_1} = \overline{QP} : \overline{A_1A_2} \qquad \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{QP} \cdot \overline{OA_1}}{\overline{OQ}} \text{ und für } \overline{OA_1} = r = 1 \qquad \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x} = \tan(\alpha)$$

Ebenso kann man für B_1B_2 verfahren und erhält: $\overline{B_1B_2} = \cot(\alpha)$

Es lassen sich also die Werte für die Winkelfunktionen am Einheitskreis direkt ablesen. Die Ermittelung dieser Werte war früher nur mittels Tabellen für diverse Winkel möglich, die modernere Mathematik stellt Formeln für die Berechnung der Winkelfunktionen zur Verfügung (unendliche Reihen, siehe Kapitel Exponentialfunktion). Auch der Taschenrechner arbeitet nach diesen Formeln, weswegen die Berechnung der Funktionswerte zuweilen etwas länger dauert.

Winkelfunktionen



Die Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis ermöglicht eine Ausweitung des Bereichs für den Winkel α. Berücksichtigt man die Vorzeichen der Abszissenwerte x und Ordinatenwerte y, so kann die Strecke OP einen Vollkreis beschreiben und die bisherigen Definitionen für die Winkelfunktionen behalten Gültigkeit. Der positive Winkel wird dabei immer gegen die Uhrzeigerrichtung gemessen. Negative Winkel werden daher im Uhrzeigersinn gemessen und sind durch die Ergänzung auf 360°, den Vollwinkel, auch posiv als positiver Winkel anschreibbar.

Somit ergeben sich aber aufgrund der Vorzeichen der Werte von x und y auch Vorzeichen für die Winkelfunktionen abhängig von der Winkelgröße.

	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin(\alpha)$	+	+	–	–
$\cos(\alpha)$	+	–	–	+
$\tan(\alpha)$	+	–	+	–

Für die Sonderfälle α = 0° = 360°, α = 90°, α = 180° und α = 270° sind aufgrund des Nenners (=0) nicht alle Winkelfunktionen immer definiert.

	0°= 360°	90°	180°	270°
sin(α)	0	+1	0	–1
cos(α)	+1	0	–1	0
tan(α)	0	nicht definiert	0	nicht definiert

Interpretiert man einen Winkel größer als 360° als komplette Umdrehungen am Einheitskreis und einem Restwinkel, so kann man auch für diese Winkel die Funktionswerte für die Winkelfunktionen bilden. Somit wiederholen sich die Funktionswerte für unterschiedliche Winkel immer wieder; man sagt, die trigonometrischen Funktionen sind periodisch.

Für die Sinus- und die Kosinusfunktion wiederholen sich die Funktionswerte immer nach weiteren 360°.

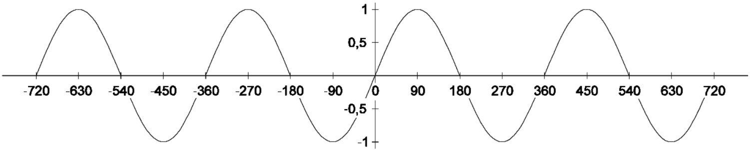
$$\boxed{\sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) = \sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) = \cos(\alpha) \qquad \text{für } n \in Z}$$

Für die Tangens- und die Kotangensfunktion ist die Periode 180°, da sich bei Änderung des Winkels um 180° beide Vorzeichen von x und y ändern und so der Funktionswert nach der Verhältnisberechnung derselbe ist.

$$\boxed{\tan(\alpha + n \cdot 180^\circ) = \tan(\alpha) \qquad \cot(\alpha + n \cdot 180^\circ) = \cot(\alpha) \qquad \text{für } n \in Z}$$

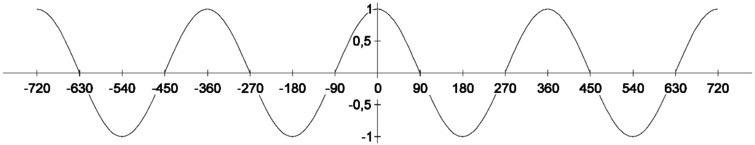
Die Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion sehen daher folgendermaßen aus:

Sinusfunktion $y = \sin(x)$:



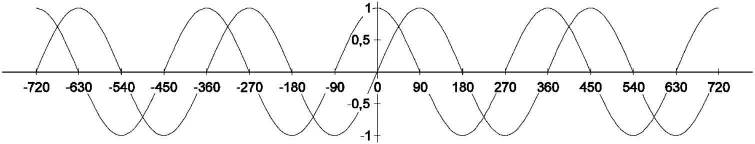
In der Graphik ist auf der waagrechten Achse der Wert des Winkels, auf der senkrechten Achse der Funktionswert der Sinusfunktion des jeweiligen Winkels aufgetragen. Das Kurvenstück zwischen α = 0° und α = 360° wiederholt sich im Graphen der Funktion periodisch.

Kosinusfunktion $y = \cos(x)$:

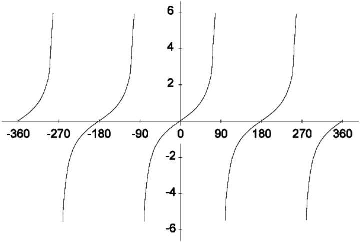


Legt man beide Funktionen in ein Koordinatensystem, so kann man feststellen, daß die Kurvenformen ident sind, jedoch um 90° zueinander verschoben. Man spricht auch von einer Phasenverschiebung um 90°.

Sinusfunktion und Kosinusfunktion:



Tangensfunktion $y = \tan(x)$:



Das Kurvenstück zwischen α = 90° und α = 270° wiederholt sich im Graphen der Funktion periodisch. Bei α = 90° und periodisch alle 180° hat die Funktion eine Sprungstelle. Aufgrund der Division durch Null ist dort der Funktionswert nicht definiert.

Umrechnung in andere Winkelfunktionen

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\sin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\dfrac{\tan(\alpha)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
$\cos(\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
$\tan(\alpha)$	$\dfrac{\sin(\alpha)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$\tan(\alpha)$

Zurückführung auf Funktionswerte spitzer Winkel

	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin(\alpha)$	$\sin(180°-\alpha)$	$-\sin(\alpha-180°)$	$-\sin(360°-\alpha)$
$\cos(\alpha)$	$-\cos(180°-\alpha)$	$-\cos(\alpha-180°)$	$\cos(360°-\alpha)$
$\tan(\alpha)$	$-\tan(180°-\alpha)$	$\tan(\alpha-180°)$	$-\tan(360°-\alpha)$

Unterscheidung um Vielfache von 90°

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$90° \pm \alpha$	$+\cos(\alpha)$	$\mp \sin(\alpha)$	$\mp \cot(\alpha)$
$180° \pm \alpha$	$\mp \sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\pm \tan(\alpha)$
$270° \pm \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$\pm \sin(\alpha)$	$\mp \cot(\alpha)$
$360° \pm \alpha$	$\pm \sin(\alpha)$	$+\cos(\alpha)$	$\pm \tan(\alpha)$

Winkelfunktionen

Periodizität

$k \in Z$	$\sin(\alpha) = \sin(\alpha+k\cdot 360°)$	$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+k\cdot 360°)$	$\tan(\alpha) = \tan(\alpha+k\cdot 180°)$

Funktionswerte negativer Winkel

	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Summensätze

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

Ermittlung des Winkels

Ist der Funktionswert einer Winkelfunktion bekannt und soll der zugehörige Winkel ermittelt werden, so benötigt man die Umkehrfunktion zur jeweiligen Winkelfunktion. Diese Umkehrfunktionen werden Arkusfunktionen genannt und heißen entsprechend Arkussinus (arcsin), Arkuskosinus (arccos), Arkustangens (arctan) und Arkuskotangens (arccot). Aufgrund der Periodizität sowie der anderen oben genannten Zusammenhänge ist das Ergebnis nicht eindeutig. Schließlich gibt es unendlich viele Winkel, die denselben Funktionswert liefern.

Differentialrechnung

Motivation

- Wie können Minimal- oder Maximalstellen von Funktionen identifiziert werden?

Bsp. 1 Berechne den maximalen Umsatz unter der Erlösfunktion $E(x) = -x^2 + 4x - 5$!

$\hookrightarrow$ Für welche Stückzahl x ist $E(x)$ maximal?

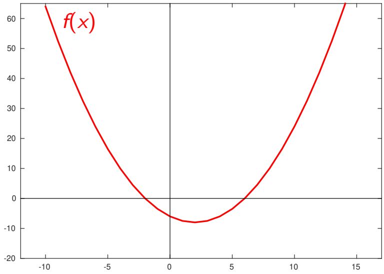
Bsp. 2 Berechne die minimalen Kosten für die Kostenfunktion $K(x) = 3x^2 - 2x + 3$!

$\hookrightarrow$ Für welche Stückzahl x sind die Kosten $K(x)$ minimal?

- Die Differentialrechnung erlaubt die Charakterisierung der **Extremstellen** (Minimal-, Maximalstellen) einer Funktion!

Motivation

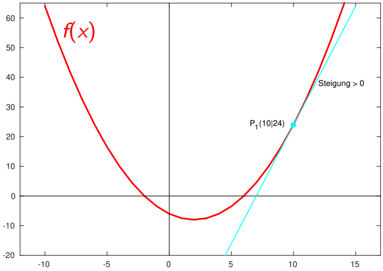
- Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.



- $f(x)$ hat offensichtlich eine Minimalstelle $\hat{x}$.
- Wie ist dieses $\hat{x}$ zu berechnen?
- Betrachte die Tangenten an die Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.

Motivation

- Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.

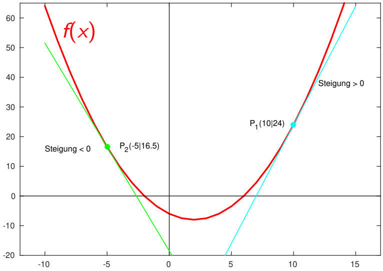


- Betrachte die Tangenten an die Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.
- Die Tangente an der Stelle $x = 10$ hat positive Steigung.

Differentialrechnung

Motivation

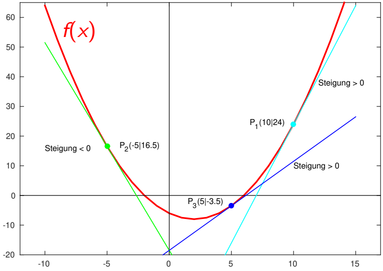
- Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.



- Betrachte die Tangenten an die Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.
- Die Tangente an der Stelle $x = 10$ hat positive Steigung.
- Die Tangente an der Stelle $x = -5$ hat negative Steigung.

Motivation

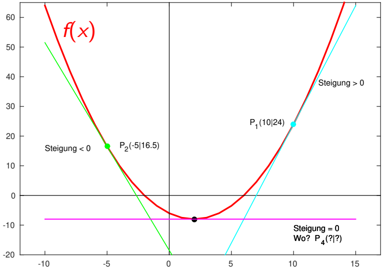
- Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.



- Betrachte die Tangenten an die Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.
- Die Tangente an der Stelle $x = 10$ hat positive Steigung.
- Die Tangente an der Stelle $x = -5$ hat negative Steigung.
- Die Tangente an der Stelle $x = +5$ hat wieder positive Steigung.

Motivation

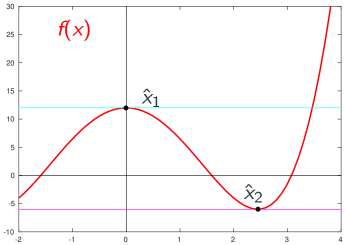
- Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.



- Betrachte die Tangenten an die Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.
- Die Tangente an der Stelle $x = 10$ hat positive Steigung.
- Die Tangente an der Stelle $x = -5$ hat negative Steigung.
- An der Minimalstelle hat die Tangente die Steigung NULL!

Schlußfolgerung

Ist die Steigung der Tangente von $f(x)$ an einer Stelle $\hat{x}$ gleich NULL, dann liegt in $\hat{x}$ eine lokale Minimal- oder Maximalstelle der Funktion $f(x)$ vor.



- Eine Funktion $f(x)$ kann gleichzeitig mehrere Extremstellen besitzen.

  Maximalstelle $\hat{x}_1$ im Punkt $P_{\max}\left(\hat{x}_1 | f(\hat{x}_1)\right)$

  Minimalstelle $\hat{x}_2$ im Punkt $P_{\min}\left(\hat{x}_2 | f(\hat{x}_2)\right)$
- **Wie lassen sich die Extremstellen nun berechnen?**

Der Differentialquotient

Die Ableitung

Die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f ist an der Stelle x durch die **Ableitung von** f bestimmt.

- Die **Ableitung** (oder der Differentialquotient) **von** $f(x)$ nach der Variablen x wird mit $f'(x)$ bezeichnet!
- Formal berechnet sich $f'(x)$ als

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

- In der Praxis existieren aber Ableitungsregeln, die das Rechen erleichtern.
- Man nennt $f'(x)$ auch den Anstieg der Funktion f an der Stelle x.

Die Tangente an den Graphen von f

Die Gerade durch den Punkt $(x|f(x))$ mit Steigung $f'(x)$ ist die **Tangente** an den Funktionsgraphen von f.
Man nennt $f'(x)$ auch den Anstieg der Funktion f an der Stelle x.

Merke: Die **zweite** Ableitung einer Funktion $f(x)$, ist einfach die Ableitung von $f'(x)$ und wird mit $f''(x)$ bezeichnet!

! Zur Berechnung der Ableitung betrachten wir zuerst Potenzfunktionen.

Für $f(x) = x^2$ gilt beispielsweise

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{z^2 - x^2}{z - x} = \frac{(z + x)(z - x)}{z - x} = z + x$$

$$f'(x) = \lim_{z \longrightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \longrightarrow x}(z + x) = x + x = 2x,$$

- Allgemein gilt

Ableitung von Potenzfunktionen

Die Ableitung $f'(x)$ der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$ ist

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Ableitungsregeln

- Zur Berechnung der Ableitung von komplizierteren Funktionen gelten für zusammengesetzte Funktionen u.a. die Regeln:

$$
\begin{aligned}
(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\
(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- Damit können nun Summen und Vielfache von Potenzfunktionen leicht abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 15x - 32 \\
\Rightarrow \quad f'(x) &= 4 \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x^1 + 15 \cdot 1 \cdot x^0 \\
&= 16x^3 - 6x^2 - 6x + 15
\end{aligned}
$$

- **BEACHTE:**
  Für die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ gilt:
  $f'(x) = 0$!

Ableitungsregeln

Zur Berechnung der Ableitung von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen exisieren folgende Regeln:

Produktregel

Sind die Funktionen f und g an einer Stelle x differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Beispiele:

Differenziere die Funktion $h(x) = (x^2 + 2x)(x^3 - 1)$

(Bei Polynomfunktionen ist das Ausmultiplizieren oftmals schneller.)

ABER zum Beispiel hilfreich beim Differenzieren von $h(x) = (3x + \sin x)\sqrt{x}$.

! **Übung**: Bestimme die Ableitung von

$$f(x) = (2x - 2)(5x^3 - 1)(3x^{-1} - x)$$

und von

$$f(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)\left(-x^2 + \frac{5}{x}\right).$$

Zur Berechnung der Ableitung von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen exisieren folgende Regeln:

Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an einer Stelle x differenzierbar, so ist auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Beispiele:

Differenziere die Funktion $\quad h(x) = \dfrac{x-1}{x^2} \quad \text{oder} \quad f(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2+3}$.

! **Übung**: Bestimme die Ableitung von

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x}{x^4 + 3x^2 + x + 15}.$$

Zur Berechnung der Ableitung von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen exisieren folgende Regeln:

Kettenregel

Sind die Funktionen f an einer Stelle $g(x)$ und die Funktion g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch $f(g)$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$$

Beispiele:
Differenziere die Funktion $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ oder $f(x) = (-2)(-x^2 - 1)^3$.

! **Übung**: Bestimme die Ableitung von

$$f(x) = \ln(3x^3)$$

und von

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cos(5x).$$

spezielle Ableitungen

Ableitung der Exponentialfunktion

- Die Funktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:

$$\exp(x)' = \exp(x) \quad \text{bzw.} \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

- Die Funktion $\ln(x) = \log_e(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

Komplexere Funktionen wie

$$e^{x^2-1} \quad \text{oder} \quad \ln(\sqrt{2x})$$

können durch Anwenden der Ableitungsregeln differenziert werden. (Übung!)

Ableitungen der Winkelfunktionen

- Die Funktion $\sin(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:
$$\sin(x)' = \cos(x)$$
- Die Funktion $\cos(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:
$$\cos(x)' = -\sin(x)$$
- Die Funktion $\tan(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:
$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Übung:
Finden Sie eine andere Darstellung der Ableitung das Tangens $\tan(x)$ und bestimmen Sie die Ableitung des Cotangens $\cot(x)$.

Charakterisierung von Extremstellen

Die Extremstellen einer Funktion $f(x)$ liegen an den Stellen x, an denen die erste Ableitung (also der Anstieg der Funktion) gleich **NULL** ist.

$\Rightarrow$ Wir suchen also die Nullstellen der ersten Ableitung von f(x)!

notwendige Bedingung

Kandidaten $\hat{x}$ für Extremstellen einer Funktion $f(x)$ erfüllen die Bedingung:

$$f'(\hat{x}) = 0$$

Ob es sich bei den Kandidaten $\hat{x}$ tatsächlich um Extremstellen handelt, überprüft man mittels der zweite Ableitung!

hinreichende Bedingung

Eine Stelle $\hat{x}$ mit $f'(\hat{x}) = 0$ ist eine **Extremstelle** von $f(x)$, falls für die zweite Ableitung von f gilt:

$$f''(\hat{x}) \neq 0$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f''(\hat{x}) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{x} \text{ ist Minimalstelle von f(x)} \\ f''(\hat{x}) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{x} \text{ ist Maximalstelle von f(x)} \end{aligned}$$

Übungen

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen nach der Variablen x:

Berechnen Sie für (a) bis (f) ebenfalls die zweite Ableitung!

(a) $f(x) = 12x^7$

(b) $f(x) = -4x^{-5}$

(c) $f(x) = (a+5)x^4, \quad a \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = -x^{3c+1}, \quad c \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = (x-1)(2x^2-2)(2x^3-3)$

(f) $f(x) = \left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 15}{x^3 + x^2 + x + 1}$

(h) $f(x) = \tan(3x^3)$

(i) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x^2)$

Anwendung

Eine wichtige Anwendung der Differentialrechnung sind Extremalwertaufgaben:

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 1 Identifikation der Hauptbedingung (HB)

- Die HB wird wurch die Größe festgelegt, welche ein Minimum oder Maximum annehmen soll.
- in unserem Bsp.: der Flächeninhalt $A = a \cdot b$
- Die HB enthält meist mehrere Variablen, zwischen denen ein Zusammenhang (Nebenbedingung) besteht.
- Enthält die HB nur eine Variable, so wird keine Nebenbedingung benötigt.

Schritt 2 Aufstellen der Nebenbedingung (NB)

- Die NB beschreibt einen Zusammenhang der Variablen.
- in unserem Bsp.: der Umfang der Fläche ist 100m $100 = 2a + 2b$
- Durch Einsetzten der NB in die HB wird die Variablenanzahl reduziert.

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 1 Hauptbedingung (HB)

$$A = a \cdot b$$

Schritt 2 Aufstellen der Nebenbedingung (NB)

$$100 = 2a + 2b$$

Schritt 3 explizite Nebenbedingung

$$a = 50 - b$$

Schritt 4 Einsetzen der NB in die HB

$$A = (50 - b) \cdot b = 50b - b^2$$

Die Hauptbedingung wird dadurch zu einer Funktion in nur einer veränderlichen $A(b) = 50b - b^2$, deren Extremwerte mittel Differentialrechnung bestimmt werden können.

Anwendung

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 5 Ableitung, Nullsetzen, Überprüfung mittels 2. Ableitung

$$\begin{aligned} A'(b) &= 50 - 2b \\ 0 &= 50 - 2b \\ b &= 25 \\ A''(25) &= -2 \quad < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximalstelle} \end{aligned}$$

Schritt 6 Um das Ergebnis als Lösung zu akzeptieren, muss der Wert der Variable zulässig sein. (z.B. nicht negativ, im Fall von Längen, etc.)

$$b = 25$$

Schritt 7 Die Belegung der anderen Variable folgt durch Einsetzen von b in die NB.

$$a = 50 - 25 = 25$$

Anwendung

Übung 1 An einer Mauer soll ein rechteckiger Garten abgegrenzt werden, dessen Flächeninhalt möglichst groß sein soll. Zur Abgrenzung sind insgesamt 48m Zaun verfügbar. Berechne die Abmessungen und den maximalen Flächeninhalt.

Übung 2 Bestimmen sie zwei nicht negative Zahlen a und b, deren Summe gleich 50 ist, so dass ab^2 maximal ist!

Übung 3 Ein Zeitungsverlag will seinen Gewinn dadurch erhöhen, dass er seine Abonenntenzahl steigert. Der Kundenstamm besteht aus 2000 Abonennten. Der Verlag verdient mit jedem Kunden 50 € pro Jahr. Marktuntersuchungen besagen, dass bei jeder Preissenkung um 1 € pro Abonnement jeweils 100 Kunden dazu gewonnen werden.
Wie lautet der mathematische Ausdruck für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit von der Preissenkung x?
Für welche Preissenkung wird der Gewinn des Verlags extremal? Wie hoch ist der Gewinn in der Extremstelle? Handelt es sich um ein Minimum oder Maximum?

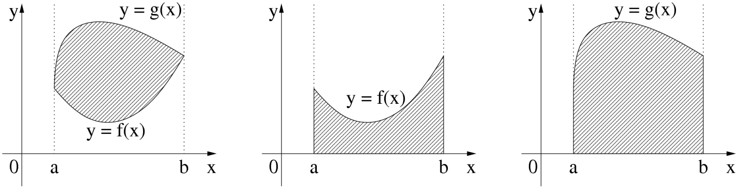
Übung 4 Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit ausgesetzem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters ist $U = 500cm$. Ermitteln Sie Breite und Höhe des Fensters so, dass der Flächeninhalt maximal ist!

Einführung in die Integralrechnung

Integralrechnung

- Ein Ziel der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten krummlinig begrenzter Bereiche der Ebene.

  $\hookrightarrow$ Bestimmtes Integral.



- Andererseits stellt die Integralrechnung die Gegenoperation zur Differentialrechung dar.

  $\hookrightarrow$ Unbestimmtes Integral, Stammfunktionen.

Stammfunktion

Ist f eine reelle Funktion, dann heißt eine reelle Funktion F Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F' = f$$

Dazu müssen die Funktionen F und f die gleich Definitionsmenge besitzen.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

Addition einer Konstanten

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f.

und

Addition von Stammfunktionen und Multiplikation mit einer Zahl

Sind F und G Stammfunktionen von f und g, dann ist sowohl $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ als auch $k \cdot F$ Stammfunktion von $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$).

Ist für die Stammfunktion ein Wertepaar $(x|F(x))$ gegeben, so kann sie eindeutig bestimmt werden.

Beispiel: Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = x^2 - 5$, für die $F(1) = 2$ ist!

Die allgemeine Stammfunktion von f(x) lautet:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + c \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Denn die Ableitung von $F(x)$ ergibt für alle $c \in \mathbb{R}$ wieder die Funktion $f(x)$.
Da $F(1) = 2$ gelten soll, lässt sich c berechnen:

$$F(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 + c$$

$$2 = \frac{1}{3} - 5 + c$$

$$c = \frac{20}{3}$$

Somit lautet die gesuchte Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + \frac{20}{3}$.

Unter- und Obersummen

Die Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren hat die Wissenschaft seit dem Altertum beschäftigt.

$\hookrightarrow$ Für krummlinige Figuren wurden oft nur Näherungsformeln gefunden.
$\hookrightarrow$ Veranschaulichung der Idee zur allgemeinen Flächenberechnungen:

- **Versucht man den Flächeninhalt zu berechnen, den eine Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ mit der x-Achse einschließt,**

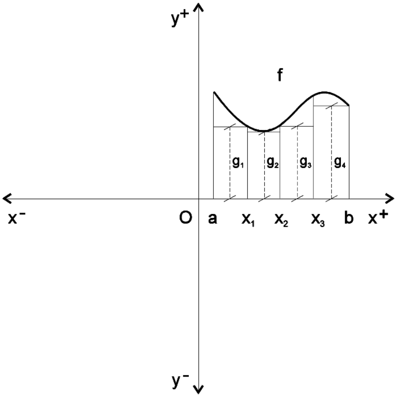
  $\hookrightarrow$ so kann das Intervall in Teilintervalle zerlegt werden.
  $\hookrightarrow$ Über diesen Teilintervallen werden dann Rechtecke errichtet.
  $\hookrightarrow$ Die Flächeninhalte der Rechtecke lassen sich leicht berechnen.
  $\hookrightarrow$ Die Summe der Flächeninhalte ist Annäherung für den gesuchten Flächeninhalt.

- **Es gibt mehrere Möglichkeiten für Rechtecke über den Teilintervallen:**

  i) Errichten von Rechtecken kleinster Höhe, sodass das Rechteck unter der Funktion im Intervall I_k eingeschrieben ist.
  Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei g_k.

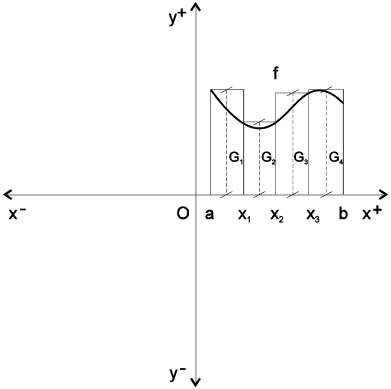
  ii) Errichten von Rechtecken größter Höhe, sodass das Rechteck die Funktion im Intervall I_k umfasst.
  Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei G_k.

Unter- und Obersummen



(i) Errichten von Rechtecken kleinster Höhe, sodass das Rechteck unter der Funktion im Intervall I_k eingeschrieben ist.
Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei g_k.

Unter- und Obersummen



(ii) Errichten von Rechtecken größter Höhe, sodass das Rechteck die Funktion im Intervall I_k umfasst.
Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei G_k.

Das Integral

Durch Summation der einzelnen Rechtecksflächeninhalte erhält man die zur Zerlegung gehörige **Untersumme** und die **Obersumme** des Flächeninhalts der Funktion f im Gesamtinterval.

Integraldefinition

Für eine "unendlich" feine Zerlegung des Gesamtintervalls stimmt die Untersumme des Flächeninhalts genau mit der Obersumme des Flächeninhalts überein. Den zugehöhrigen Zahlenwert nennt man das **Integral** der Funktion f über dem Interval $[a, b]$.
Schreibweise:

$$\int_a^b f \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Man liest

- $\int_a^b f$: "Integral von a bis b über f"
- $\int_a^b f(x)dx$: "Integral von a bis b von $f(x)$ nach dx"

Das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Symbol	Bezeichnung
dx	Schreibweise, kennzeichnet die Integrationsvariable x
a und b	Integrationsgrenzen
$f(x)$	Integrand

Eigenschaften des Integrals

Über dem Interval $[a, b]$ mit $a < b$ gilt:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Es gelten die folgenden

Rechenregeln für Integrale

Sind f und g über $[a, b]$ mit $a < b$ integrierbar, so gelten:

$$\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \text{ und}$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ mit } a < c < b$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f in $[a, b]$ stetig, so ist ihre Integralfunktion $F = \int_a^x f$ an jeder Stelle $x \in [a, b]$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die Ableitungsfunktion von F ist also: $F' = f$.

Folgerung

Ist F Stammfunktion von f in $[a, b]$, so kann man das Integral von a nach b über f aus der Differenz der Stammfunktionswerte berechnen:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Hier gilt: "$F(\text{'oberere Grenze'})$ minus $F(\text{'untere Grenze'})$“

Schreibweise:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Beispiel: Ermitteln Sie das Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ im Intervall $[0, 1]$.

Ermitteln einer Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x \qquad \text{hier: } c = 0 \in \mathbb{R}$$

Denn die Ableitung von $F(x)$ ergibt $F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^0 = f(x)$.
Anwendung des Hauptsatzes ergibt schließlich:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= [\frac{1}{6}x^3 + x]_0^1 \\ &= (\frac{1}{6}1^3 + 1) - (\frac{1}{6}0^3 + 0) = \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral

- Die Stammfunktion einer Funktion f lässt sich nur bis auf eine additive Konstante c bestimmen
- Ist F Stammfunktion von f, so auch jede andere Funktion $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
- Ein Element aus dieser Menge von Stammfunktionen $\{F - c\}$ bezeichnet man als **unbestimmtes Integral**
- Schreibweise **OHNE** Integrationsgrenzen

Das unbestimmte Integral

Ist f eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f, so heißt ein element der Menge $\{F - c\}$ ein **unbestimmtes Integral** von f:

$$\int f = \int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$\rightarrow$ Das Ermitteln der Stammfunktion einer Funktion f bezeichnet man daher als **unbestimmte Integration**

$\rightarrow$ Entsprechend nennt man das Integral $\int_a^b f$ (mit Integrationsgrenzen a und b) auch das **bestimmte** Integral von f

Integration von Funktionen

- Man kann die Berechnung der Stammfunktion als Umkehrung des Differenzierens auffassen.
- Für einfache Potenzfunktionen lässt sich so schnell das unbestimmte Integral finden:

Integration von Potenzfunktionen

Eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$ ist die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

für $n \in \mathbb{Q} \setminus -1$.

- Aufgrund dieser Formel lässt sich jede Polynomfunktion einfach integrieren!

Beispiel:

$$f(x) = x^4 \tag{1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x^5} \tag{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^4} \tag{3}$$

$$p(x) = \frac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 6x + 12 \tag{4}$$

Wichtige Stammfunktionen

spezielle Stammfunktionen

Eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{ist} \qquad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad \text{ist} \qquad F(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \exp(x) \qquad \text{ist} \qquad F(x) = \exp(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{ist} \qquad F(x) = -\ln(x)$$

Ähnlich wie bei der Differentialrechnung existieren auch zur Ermittlung der Stammfunktion von komplizierteren Funktionen entsprechende Methoden. Zwei dieser Verfahren werden wir im Folgenden kennenlernen:

partielle Integration und Substitutionsmethode

partielle Integration

Aus der Produktregel für Ableitungen $(f+g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ lässt sich durch Integration folgende Formel herleiten:

partielle Integration

Sind die Funktionen f, g differenzierbar und sind f', g' stetig, so gilt:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

- Diese Formel ermöglicht es das Integral $f \cdot g'$ zu berechnen, falls $\int f' \cdot g$ bekannt ist.
- **Beachte:** Die Wahl der Faktoren des Integranden, welche mit f bzw. mit g' angesetzt werden, ist essentiell für die Berechnung.

Beispiel: Berechne die unbestimmten Integrale

$$\int x \cdot e^x dx \tag{1}$$

$$\int \ln(x) dx \tag{2}$$

$$\int \sin^2(x) dx \tag{3}$$

Substitutionsmethode

Aus der Kettenregel für Ableitungen $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ lässt sich durch Integration folgendes Gesetz herleiten:

Substitutionsmethode

Sind die Funktionen f über $[a, b]$, g über $[\alpha, \beta]$ stetig und differenzierbar mit $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$, so gilt:

$$\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

- Diese Formel ermöglicht es einen komplizierten Integranden durch Ersetzen (Substitution) eines inneren Teils zu vereinfachen.
- **Beachte:** Die Berechnung eines unbestimmten Integrals mittels Substitution erfordert ggf. als letzten Schritt eine sog. Resubstitution (Rücksubstitution)

Beispiel: Berechne die Integrale

$$\int \sqrt{x+1}dx \tag{1}$$

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)dx \tag{2}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{3x-5}dx \tag{3}$$

Die Motivation dieses Kapitels stellt zugleich einen wesentlichen Anwendungsbereich der Integralrechnung dar.

Flächenberechnung

Es sei f eine über $[a, b]$ $(a \leq b)$ integrierbare Funktion und **F** das Flächenstück, das vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen a und b begrenzt wird.

- Gilt $f(x) \geq 0$ **für alle** $x \in [a, b]$, so ist der Flächeninhalt $A(\mathrm{F})$ der Fläche **F** gegeben durch:
$$A(\mathrm{F}) = \int_a^b f$$
- Gilt $f(x) \leq 0$ **für alle** $x \in [a, b]$, so ist der Flächeninhalt $A(\mathrm{F})$ der Fläche **F** gegeben durch:
$$A(\mathrm{F}) = |\int_a^b f|$$

Anwendung der Integralrechnung

Folgerung:

- Flächen, die komplett oberhalb der x-Achse liegen, wird ein **positiver** Zahlenwert (Flächeninhalt) zugeordnet
- Flächen, die komplett unterhalb der x-Achse liegen, wird ein **negativer** Zahlenwert (Flächeninhalt) zugeordnet

$\Rightarrow$ Flächen, die **sowohl ober- als auch unterhalb** der x-Achse liegen, können nicht direkt durch Integration von linker Intervallseite zur rechten Intervallgrenze berechnet werden!

Abhilfe bietet eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle über denen die Funktion $f(x)$ jeweils komplett unter- bzw. oberhalb der x-Achse liegt.

Flächenberechnung

Die Teilintervallgrenzen ergeben sich durch die Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Damit gilt für den Gesamtflächeninhalt im Intervall $[a, b]$:

$$A(\mathrm{F}) = \left|\int_a^{x_1} f\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| + \cdots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f\right| + \left|\int_{x_n}^{b} f\right|$$

mit $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$.

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt im Interval $[-1, 3]$ zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

Das obige Verfahren lässt sich leicht zur Berechnung des Flächeninhalts eines von zwei Funktionen begrenzten Flächenstücks erweitern.

Flächenberechnung

Es seien f und g zwei über $[a, b]$ $(a \leq b)$ integrierbare Funktion mit $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ und **F** das Flächenstück, das von beiden Funktionsgraphen begrenzt wird. Dann gilt:

$$A(\mathrm{F}) = \int_a^b (f - g)$$

- Die Formel ergibt sich aus der Berechnung der einzelnen Flächeninhalte $A_1 = \int_a^b f$, $A_2 = \int_a^b g$ zwischen den Funktionsgraphen von f bzw. g und der x-Achse im Intervall $[a, b]$.
- Wegen $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ gilt:

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ und $g(x) = x + 1$ im Interval $[-4, 6]$.

Man beachte auch folgende Übungenstellung:

- Bei Flächenberechnungen ist man oft nur an jenem Flächenstück interessiert, welches von einer Funktion und der x-Achse bzw. zwischen zwei Funktionen begrenzt wird.
- Das Flächenstück muss dann nicht zusätzlich durch ein Intervall begrenzt werden!
- Die **Integrationsgrenzen** erhält man als
  - Schnittstellen der Funktion mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion) bzw.
  - Schnittstellen der zwei Funktionen (Nullstellen der Differenzfunktion)

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ und der x-Achse begrenzt wird.

Übungsaufgaben

Berechnen Sie

A1) die Stammfunktionen zu $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$. (Probe durch Ableiten!)

A2) die Stammfunktionen zu $f(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{\sqrt{x}}$.

A3) das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x} \mathrm{d}x$.

A4) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin(x) \mathrm{d}x$.

A5) das unbestimmte Integral $\int \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x$.

A6) das unbestimmte Integral $\int (5x - 3)^7 \, \mathrm{d}x$.

A7) das unbestimmte Integral $\int \sin(3x) \mathrm{d}x$.

Übungsaufgaben

A8) Berechne den Flächeninhalt der von der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall $[-2; 4]$ eingeschlossen wird.

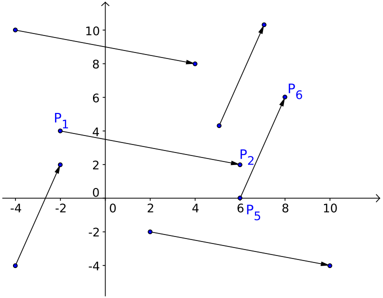
A9) Berechne den Flächeninhalt der von den Funktionen $f(x) = x + 5$ und $g(x) = x^2 - 1$ und dem Intervall $[-2; 3]$ begrenzt wird.

A10) Berechne den Flächeninhalt der von den Funktionen $f(x) = \sqrt{6x}$ und $g(x) = x + 1$ eingeschlossen wird.

Einführung in die Vektorrechnung

Vektoren

- Die Verschiebung eines Punkt P_1 im Koordinatensystem in eine andere Lage P_2 ist durch Anfangs- und Endpunkt eindeutig beschrieben.
- Das zum Punktepaar gehörende (gerichtete) Streckenstück wird durch einen Pfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ bezeichnet.
- Pfeile, die die gleiche Verschiebung beschreiben sind gliechlang, zueinander parallel und gleich orientiert.



Definition

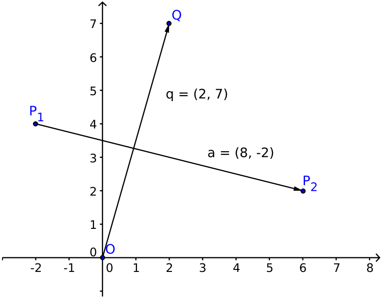
Eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile eines Raumes heißt **ein Vektor** des Raumes.
Ein **Vektor** wird durch alle zu einem gegebenen Pfeil parallelgleichen Pfeile beschrieben.
Vektoren werden üblicherweise mit Kleinbuchstaben mit Pfeilsymbol dargestellt, z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \ldots$

- Wählt man im Raum einen festen Referenzpunkt O (Ursprung), so ist jeder Punkt P des Raumes eindeutig durch den Vektor $\overrightarrow{OQ}$ festgelegt.
- Ein solcher Vektor $\overrightarrow{OQ}$ vom Ursprung zu einem Punkt Q heißt **Ortsvektor** von Q.
- Interpretiert man die Koordinaten der Verschiebung von $P_1 = (x_1|y_1)$ zu $P_2 = (x_2|y_2)$ als die Koordinaten es Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, so lassen sich diese als Differenz der punktkoordinaten darstellen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

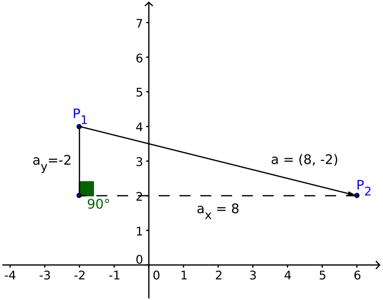
- **Merkregel:** ”Spitze minus Schaft“

  Die Koordinaten eines Ortsektors sind folglich die Koordinaten seiner Spitze!



- Den Abstand der Punkte P_1 und P_2 bezeichnet man auch als den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



- Ergänzt man eine weitere Koordinate a_z, so lassen sich die obigen Aussagen auf den dreidimensionalen Raum übertragen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Rechenregeln

Addition von Vektoren

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die jeweiligen Koordinaten addiert oder subtrahiert.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$$

Grafisch entspricht dies einer hintereinander ausgeführten Verschiebung um $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $-\vec{b}$!

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird mit einer Zahl $t \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man die jeweiligen Koordinaten mit $t \in \mathbb{R}$ multipliziert.

$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Grafisch entspricht dies einer t-mal wiederholten Verschiebung!

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Berechne Summe und Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- Berechne die Vektoren $-5\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{b}$ und $\sqrt{2}\vec{c}$.
- Welcher Verschiebung entspricht $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{v}$?

Nullvektor

Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.
(Er ist das neutrale element bezüglich der Addition von Vektoren.)

Einheitsvektor

Ein Vektor $\vec{e}$ mit Betrag $|\vec{e}| = 1$ heißt Einheitsvektor.
Zu jeden beliebigen Vektor $\vec{a}$ erhält man den zugehörigen Einheitsvektor $\vec{a}_e$, indem man $\vec{a}$ komponentenweise durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Beispiel: Berechne den zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörenden Einheitsvektoren.

Basis und Linearkombination

Basisvektoren

Die Einheitsvektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im 2-dimensionalen Raum bzw. die Einheitsvektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im 3-dimensionalen Raum heißen **Basisvektoren** des karthesischen Koordinatensystems.

Linearkombination

Ein Vektor der Form

$$t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots t_k \vec{a}_k$$

mit $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ heißt **Linearkombination** der k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$.

MERKE: Jeder beliebige Vektor des Raumes lässt sich als Linearkombination der zugehörigen Basisvektoren darstellen.

Beispiel:
Stelle den Vektor der Verschiebung von $P_1(2|1|-1)$ zu $P_2(6|-3|2)$ durch seine Basisvektoren dar.

Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ heit **linear abhängig**, wenn sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$$

Sind Vektoren nicht linear abhängig, so heißen sie **linear unabhängig**.

Beispiel:
Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Das Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist im 2-dimensionalen Raum definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

bzw. im 3-dimensionalen Raum als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten folgende Zusammenhänge:

- Das Skalarprodukt liefert eine reelle Zahl (einen sog. Skalar) als Ergebnis.
- Für das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

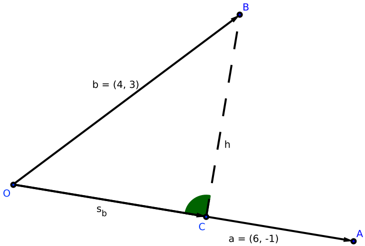
- Mit den vektoriellen Projektionen $\vec{s_a}$ und $\vec{s_b}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{s_b} = \vec{s_a} \cdot \vec{b}.$$

? **Was versteht man unter den vektoriellen Projektionen $\vec{s_a}$ und $\vec{s_b}$?**

Multiplikation von Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

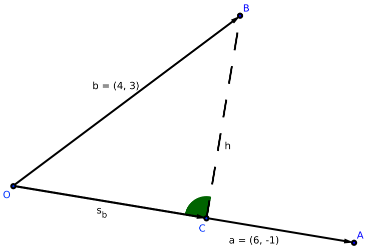


? **Was versteht man unter der vektoriellen Projektion $\vec{s_b}$?**

- Die **vektorielle Projektion** eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ ist der Vektor $\vec{s_b}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist und dessen Länge durch die senkrechte (**orthogonale**) Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gegeben ist.
- Es gilt folgernder Zusammenhang: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{s_b}| = |\vec{s_a}| \cdot |\vec{b}|$

Multiplikation von Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$



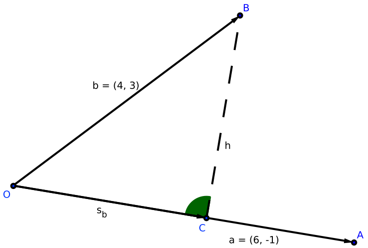
Das Skalarprodukt ist genau dann Null,

- wenn einer der Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor ist, oder
- wenn die Länge der **vektoriellen Projektion** gleich Null ist!

  Letzteres ist aber nur der Fall, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen!

Multiplikation von Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$



Orthogonalitätsbedingung

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann gleich Null, wenn die beiden Vektoren aufeinander senkrecht (normal) stehen!

Multiplikation von Vektoren

Das Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist im 3-dimensionalen Raum definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} .$$

Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten folgende Zusammenhänge:

- Das Kreuzprodukt liefert als Ergebnis wieder einen Vektor (hier. $\vec{c}$).
- Für das Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren ist der Nullvektor.
- **Der Ergebnisvektor $\vec{c}$ steht normal (senkrecht) auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!**

? **Überprüfen?**

- **Der Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des ihres Kreuzproduktes!**

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Normalvektor

Ein Vektor $\vec{n} \neg \vec{o}$, der senkrecht auf einem gegebnen Vektor $\vec{a} \neg \vec{o}$ steht, heißt **Normalvektor zu** $\vec{a}$. Es gilt also:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0.$$

Im **2-dimensionalen Raum** existieren zu jedem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ genau zwei Normalvektoren unterschiedlicher Orientierung, nämlich

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}.$$

Im **3-dimensionalen Raum** existieren zu jedem Vektor $\vec{a}$ unendlich viele Normalvektoren unterschiedlicher Orientierung. Diese faßt man zur sog. **Normalebene** zusammen. Zu jedem Vektorpaar $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lassen sich aber wiederum zwei Normalenvektoren zuordnen, nämlich

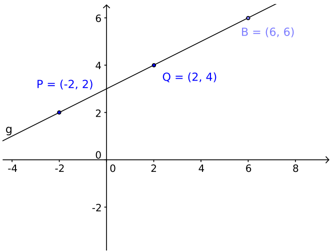
$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{und} \qquad \vec{n}_2 = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Mit analytischer Geometrie bezeichnet man den Teil der Mathematik, der Übungen der Geometrie auf Übungen der Algebra zurückführen möchte. Genauer sollen Punkte, Geraden, Ebenen und andere geometrische Gebilde und deren Beziehungen durch Zahlen und Gleichungen dargestellt werden.

Wir betrachten hier lediglich die erste Anwendungen der Vektorrechnung innerhalb der analytischen Geometrie.

- Geradengleichung in 2D und 3D
- Ebenendarstellung im 3 dim. Raum
- Schnittpunkte und Schnittgeraden
- Abstände von Punkten, Geraden, Ebenen, usw.

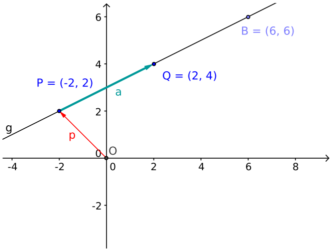
- Eine **Gerade** g ist eindeutig durch zwei Punkte festgelegt.
- Möchte man einen beliebigen Punkt B auf g erreichen, so muss man sich vom Ursprung zu einem ersten bekannten Punkt P und von da aus weiter in Richtung eines zweiten bekannten Punktes Q bewegen, bis man B erreicht hat.
- Dieses Vorgehen entspricht bereits der vektoriellen Vorgehensweise:



- Eine **Gerade** g ist eindeutig durch zwei Punkte festgelegt.

- Möchte man einen beliebigen Punkt B auf g erreichen, so muss man sich vom Ursprung zu einem ersten bekannten Punkt P und von da aus weiter in Richtung eines zweiten bekannten Punktes Q bewegen, bis man B erreicht hat.

- Dieses Vorgehen entspricht bereits der vektoriellen Vorgehensweise:



Parameterdarstellung der Geraden

Alle Punkte einer Gerade g sind eindeutig durch den **Ortsvektor** $\vec{p}$ eines Geradenpunktes P und die passende Streckung eines beliebigen **Richtungsvektor** $\vec{a}$ der Gerade beschreibbar. Für zwei Punkte der Gerade berechnet sich ein Richtungsvektor als $\vec{a} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{q} - \vec{p}$.

Die Gerade ist also darstellbar als

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

In Koordinatenform (3 dim. Raum) bedeutet dies, das die Gerade g koordiantenweise durch folgende **drei** Gleichungen und freien parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben ist:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Beispiel:

- Erstellen Sie die Geradengleichung durch $P(-5|-1)$ und $Q(-1|9)$.

- Machen Sie die Geradengleichung $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ parameterfrei. (**Als Ergebnis erhält man die Gerade in analytischer Schreibweise** $g: \; y = k \cdot x + d$ **mit Steigung** k **und y-Achsenabschnitt** d**.**)

- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Ebene

Im 3-dimensionalen Raum spannen zwei von einem Punkt P ausgehende Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene ϵ auf. Damit ergibt sich die Parameterdarstellung als:

$$\epsilon : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + s\vec{b}, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

In Koordinatenform also:

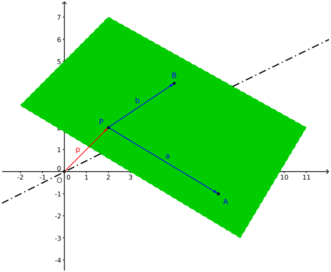
$$\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Bemerkung:Eine Ebene ist also durch Angabe von 3 Punkten eindeutig festgelegt!

Parameterdarstellung der Ebene

Im 3-dimensionalen Raum spannen zwei von einem Punkt P ausgehende Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene ϵ auf. Damit ergibt sich die Parameterdarstellung als:

$$\epsilon : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + s\vec{b}, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

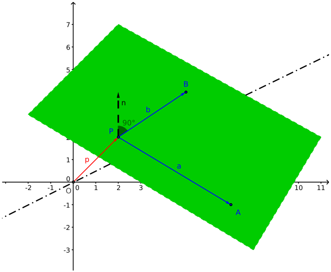


Normalendarstellung der Ebene

Ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene ϵ, so steht er auf allen Vektoren $\vec{x}$ der Ebene senkrecht. Mit der Orthogonalitätsbedingung des Skalarproduktes läßt sich damit die Normalendarstellung der Ebene aufstellen:

$$\epsilon : \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

Dabei bezeichnet $\vec{p}$ den Ortsvektor eines bekannten Ebenenpunktes P.



Beispiel:

- Erstellen Sie die Ebenengleichung durch die Punkte $P(1|-1|0)$, $Q(2|-7|4)$ und $R(6|-3|-1)$.

- Machen Sie die Ebenengleichung

$$\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  parameterfrei!

- Bestimmen Sie die Normaldarstellung der obigen Ebene!

Die Schnittmenge zweier verschiedener Ebenen ist eine Gerade!
Zur Bestimmung dieser Gerade kann man die Ebenen gleichsetzen.

- In Parameterform: **3 Gleichungen** und **4 Unbekannte**.
- In parameterfreier Form: **2 Gleichungen** und **3 Unbekannte**.
- Eine Gerade in Parameterform und eine Gerade in Normalendarstellung:
  1 Gleichungen und **2 Unbekannte**

Dabei existiert immer eine Unbekannte mehr als Gleichungen verfügbar sind!
Setzt man für diese Unbekannte einen freien Parameter $t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich dirket die Parameterdarstellung der Lösung:
die Parameterdarstellung einer Gerade im 3 dimensionalen Raum

Beispiel:
Schneiden Sie die Ebenen $\epsilon_1 : \ 2x + 3y + 4z = -1$ und $\epsilon_2 : \ x - 6y - 13z = 7$.

Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Eine Gerade g kann **drei** unterschiedliche Lagen zu einer gegebene Ebene ϵ einnehmen:

- Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt: $\quad g \cap \epsilon = P$
- Die Gerade liegt in der Ebene: $\quad g \cap \epsilon = g$
- Die Gerade schneidet die Ebene nie: $\quad g \cap \epsilon = \emptyset$

Zur Berechnung setzt man Gerade und Ebene gleich und bestimmt die Lösungsmenge!

Beispiel:
Schneiden Sie die Gerade

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Ebene $\epsilon: \ 2x + 3y + 4z = -1$.

Normalabstand

Den kürzesten Abstand eines Punktes Q von einer Gerade g bzw. von einer Ebene ϵ ist der **Normalabstand** d.

Normalabstand: Punkt–Ebene

Der Normalabstand d_ϵ eines Punktes Q von einer Ebene $\epsilon : \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$ berechnet sich als

$$d_\epsilon = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{n}|}.$$

Dabei ist $\vec{q}$ der Ortsvektor des Punktes Q, $\vec{p}$ der Ortsvektor eines Punktes der Ebene und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Beispiel: Berechne den Abstand des Punktes $Q(10|-5|2)$ von der Ebene $\epsilon :\ 3x - 4y + z = 15$.

Abstand: Punkt – Ebene/Gerade

Normalabstand

Den kürzesten Abstand eines Punktes Q von einer Gerade g bzw. von einer Ebene ϵ ist der **Normalabstand** d.

Normalabstand: Punkt–Gerade

Der Normalabstand d_ϵ eines Punktes Q von einer Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$ berechnet sich mit Hilfe des **Kreuzproduktes** als

$$d_\epsilon = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Dabei ist $\vec{q}$ der Ortsvektor des Punktes Q, $\vec{p}$ der Ortsvektor eines Punktes der Gerade und $\vec{a}$ der Richtungsvektor der Gerade.

Beispiel: Berechne den Abstand des Punktes $Q(-1|3|-2)$ von der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben – Vektoren

A1 Stellen Sie die Vektoren zwischen folgenden Punkten auf:

a) $A(3|2)$, $B(7|4)$
b) $C(-1|3)$, $D(1|3)$
c) $E(-4|-7)$, $F(2|-3)$
d) $G(2|-1|0)$, $H(-3|2|11)$

A2 Berechnen Sie die Länge der Vektoren aus A1.

A3 Bilden Sie die Summen und Differenzen der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
c) $P(1|2|3)$, $Q(2|-3|1)$, $R(2|1|3)$
d) $P(-1|3|6)$, $Q(2|-3|7)$, $R(9|-1|-3)$

A4 Bestimmen Sie grafisch den Summen- und den Differenzvektor:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übungsaufgaben – Vektoren

A5 Berechnen Sie das Skalarprodukt und (wenn möglich [3D]) das Kreuzprodukt der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bemerke: Bestimmen Sie in d) bis f) ebenfalls das Skalarprodukt des Kreuzproduktergebnisses mit den vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

A6 Erstellen Sie die Geradengleichungen durch die folgenden Punkte:

a) $P(1|5)$, $Q(4|-3)$
b) $P(2|6)$, $Q(9|9)$
c) $P(4|-4|4)$, $Q(7|8|0)$
d) $P(2|-1|0)$, $Q(-3|2|11)$

A7 Machen Sie die folgenden Geraden parameterfei:

a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
c) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
d) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

A8 Erstellen Sie die Parameterdarstellung der Ebenen durch die folgenden Punkte:

a) $P(1|2|3)$, $Q(3|-2|1)$, $R(2|1|-3)$
b) $P(7|8|0)$, $Q(11|13|17)$, $R(-19|-23|-29)$
c) $P(3|4|-2)$, $Q(-1|-3|5)$, $R(-5|-10|11)$

A9 Machen Sie die obigen Ebenen [A8] parameterfrei. Bestimmen Sie zusätzlich alle paarweisen Schnittgeraden!

A10 Bestimmen Sie die Abstände der folgenden Punkte von der Gerade durch $A(-4|2|1)$ und $B(0|1|-1)$ **und** von der Ebene durch A, B und $C(-1|2|1)$:

a) $P(1|2|3)$
b) $P(7|8|0)$
c) $P(3|4|-2)$

A11 Bestimmen Sie die Höhen im Dreieck $A(-4|6)$, $B(5|-6)$, $C(7|8)$. Fertigen Sie auch eine Skizze an!