▷ Allgemeine und partikuläre Lösung:

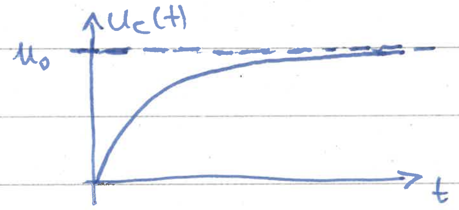
1.) $y(x) = C\,\frac{x}{1+x}$ ist die allg. Lsg. der DGL $x(1+x)\,y'(x) - y(x) = 0$, weil:
$y'(x) = C\,\frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = C\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$. Einsetzen von $y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL liefert:

$$x\,\cancel{(1+x)}\,\frac{C}{(1+x)^{\cancel{2}}} - C\,\frac{x}{1+x} = x\,\frac{C}{(1+x)} - C\,\frac{x}{(1+x)} = 0 \;\checkmark$$

— · —

2.) $u_C(t) = u_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ Skizze: $u_C(0) = u_0(1 - \underbrace{e^0}_{=1}) = 0$.
Mit der Zeit t geht $e^{-t/RC}$ von 1 nach 0, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = u_0(1-0) = u_0$$



Wir zeigen, daß $u_C(t)$ eine partikuläre Lsg. der DGL
$RC\,\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u_0$ ist.

$$\dot{u}_C(t) = u_0\left(0 - e^{-t/RC}\cdot\left(-\frac{1}{RC}\right)\right) = \frac{u_0}{RC}\,e^{-t/RC}.$$

Einsetzen von $u_C(t)$ und $\dot{u}_C(t)$ in die DGL liefert:

$$\cancel{RC}\,\frac{u_0}{\cancel{RC}}\,e^{-t/RC} + u_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) =$$

$$= u_0\,e^{-t/RC} + u_0 - u_0\,e^{-t/RC} = u_0. \checkmark$$

— · —

Nachtrag zur Frage: Wie lautet die part. Lsg. zur Anfangsbedingung $y(1) = 8$?

$$y(1) = C\,\frac{1}{1+1} \overset{!}{=} 8$$

$$\frac{C}{2} = 8 \quad |\cdot 2$$

$$C = 16$$

part. Lsg.: $y(x) = 16\,\frac{x}{1+x}$.

▷ Treunung der Variablen

1.) $y\dot{y} = te^t$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ einsetzen liefert

$$y\frac{dy}{dt} = t\cdot e^t \quad | \cdot dt$$

$$y\,dy = t\cdot e^t dt \quad | \int \quad \text{d.h. unbestimmte Integration}$$

$$\int y\,dy = \int t\cdot e^t dt$$

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

$$\frac{y^2}{2} = t\cdot e^t - \int 1\cdot e^t dt$$

$$\frac{y^2}{2} = t\cdot e^t - e^t + C \quad \text{mit } C\in\mathbb{R}$$

$y^2 = 2e^t(t-1) + 2C$, statt $2C$ schreiben wir wieder C.

$\underline{y(t) = \pm\sqrt{2e^t(t-1)+C} \text{ mit } C\in\mathbb{R}.}$

2.) $\dot{y}(1+t^2) = ty$, Einsetzen von $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ liefert

$$\frac{dy}{dt}(1+t^2) = ty \quad | :y,\ :(1+t^2),\ \cdot dt$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{t}{1+t^2}dt \quad | \int$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{t}{1+t^2}dt \quad \text{Subst. } u = 1+t^2$$

$$du = 2t\,dt$$

$$\tfrac{1}{2}du = t\,dt$$

$$\ln(|y|) = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$\ln(|y|) = \frac{1}{2}\ln(|u|) + C = \frac{1}{2}\ln(|\underbrace{1+t^2}_{>0}|) + C \quad , C\in\mathbb{R}$$

$$\ln(|y|) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C \quad | e^{\cdots}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C} = (\underbrace{e^{\ln(1+t^2)}}_{=(1+t^2)})^{\frac{1}{2}}\cdot e^C$$

$$|y| = e^C\cdot\sqrt{1+t^2}$$

$y = \pm e^C\cdot\sqrt{1+t^2}$, Wir schreiben statt $\pm e^C = K \neq 0$

$y(t) = K\cdot\sqrt{1+t^2}$ mit $K\in\mathbb{R}$ aber $K\neq 0$

Wäre $K=0$, dann wäre $y(t)=0$ und $\dot{y}(t)=0$. Dies erfüllt die DGL aber auch. Somit ist $K\in\mathbb{R}$ wählbar und die allg. Lsg. der DGL lautet $\underline{y(t) = K\sqrt{1+t^2} \text{ mit } K\in\mathbb{R}.}$

3.) $y' = 5x^4(y+1)$. $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4(y+1) \quad | \cdot dx, : (y+1)$

$\frac{1}{y+1}\, dy = 5x^4 dx \quad | \int$

$\int \frac{1}{y+1}\, dy = \int 5x^4 dx$

$\ln(|y+1|) = 5\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C \quad | e^{\cdots} \quad , C \in \mathbb{R}$

$|y+1| = e^{x^5+C} = e^C \cdot e^{x^5}$

$y+1 = \pm e^C \cdot e^{x^5}$

$y = -1 \underbrace{\pm e^C}_{=K \neq 0} \cdot e^{x^5} = K e^{x^5} - 1$ mit $K \in \mathbb{R}$ aber $K \neq 0$

Wir überprüfen, ob $K=0$ auch eine Lsg. ergibt: Für $K=0$ ist $y(x) = -1$ und $y'(x) = 0$. Einsetzen in die DGL liefert:

$0 = 5x^4 \underbrace{(-1+1)}_{=0} = 0$ ✓

Somit lautet die allg. Lsg. der DGL:

$\underline{y(x) = K e^{x^5} - 1 \text{ mit } K \in \mathbb{R}.}$

▷ <u>Anfangswertprobleme</u>:

1.) $y y' = \cos(2x)\,,\ y(0) = -1.$

$$y \frac{dy}{dx} = \cos(2x)$$

$$y\,dy = \cos(2x)\,dx$$

$$\int y\,dy = \int \cos(2x)\,dx$$

$$y^2/2 = \sin(2x)\cdot\tfrac{1}{2} + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = \sin(2x) + 2C$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\sin(2x) + 2C}$$

$$-1 = \pm\sqrt{\sin(2\cdot 0) + 2C}$$

$$-1 = -\sqrt{2C}$$

$$1 = \sqrt{2C} \Rightarrow 2C = 1.$$

partikuläre Lsg. $\underline{y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 1}}$.

2.) $y' = -\frac{x}{y}\,,\ y(0) = 1.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$y^2/2 = -x^2/2 + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -x^2 + 2C$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$$

$$1 = \pm_{(-)}\sqrt{2C - 0^2} = \sqrt{2C} \Rightarrow 2C = 1$$

part. Lsg.: $\underline{y(x) = \sqrt{1 - x^2}}$.

3.) $y' + \cos(x)\cdot y \overset{!}{=} 0\,,\ y(\pi/2) = 2\pi$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos(x)\,y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\cos(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\cos(x)\,dx$$

$$\ln(|y|) = -\sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-\sin(x) + C} = e^{C}\cdot e^{-\sin(x)}$$

$$y(x) = \pm e^{C}\cdot e^{-\sin(x)}$$

$$2\pi = \pm e^{C}\cdot e^{-\underbrace{\sin(\pi/2)}_{1}} = \pm e^{C}\cdot e^{-1} \quad |\cdot e$$

$$2\pi\cdot e = \pm e^{C} = e^{C}$$

$$y(x) = 2\pi e\, e^{-\sin(x)}$$

$$\underline{y(x) = 2\pi\, e^{1 - \sin(x)}}.$$

▷ Substitution 1

$$y y' = x + \frac{y^2}{x}, \quad y(1) = \sqrt{2}$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \text{Subst.}$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot u = y \quad |\,'$$

$$1 \cdot u + x \cdot u' = y'$$

$$y' = u + x \cdot u'$$

Einsetzen liefert:

$$u + x \cdot u' = \frac{1}{u} + u \quad | -u$$

$$x \cdot u' = \frac{1}{u} \quad | \cdot u, : x, \quad u' = \frac{du}{dx}$$

$$u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad | \cdot dx$$

$$u\, du = \frac{1}{x} dx \quad | \int$$

$$\int u\, du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$u^2/2 = \ln(|x|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$u^2 = 2\ln(|x|) + 2C$$

$$u(x) = \pm\sqrt{2\ln(|x|) + 2C}, \quad \text{Rücksubst. } u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$\frac{y(x)}{x} = \quad -\text{"}-$$

$$y(x) = \pm x \cdot \sqrt{2\ln(|x|) + 2C}$$

$$\sqrt{2} = \pm 1 \cdot \sqrt{2\underbrace{\ln(1)}_{=0} + 2C} = (\pm)\sqrt{2C} \Rightarrow C = 1.$$

$$y(x) = x\sqrt{2\ln(|x|) + 2}.$$

▷ Quadratischer Luftwiderstand

$m a = F$, $a = \dot{v}$, $F = -c \cdot v^2$ mit einer Konstanten $c > 0$.

$$m \dot{v} = -c v^2$$

$$\dot{v} = -\frac{c}{m} v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} v^2$$

$$\frac{1}{v^2} dv = -\frac{c}{m} dt$$

$$\int \frac{1}{v^2} dv = \int -\frac{c}{m} dt$$

$$\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{c}{m} t + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{c}{m} t + K$$

Anfangsbedingung $v(0) = v_0$:

$$-\frac{1}{v_0} = 0 + K \Rightarrow K = -\frac{1}{v_0}$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{c}{m} t - \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{c}{m} t + \frac{1}{v_0} \quad | \text{ Kehrwert}$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{c}{m} t} \quad \text{mit } v_0 \text{ erweitern}$$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{c}{m} v_0 t}.$$