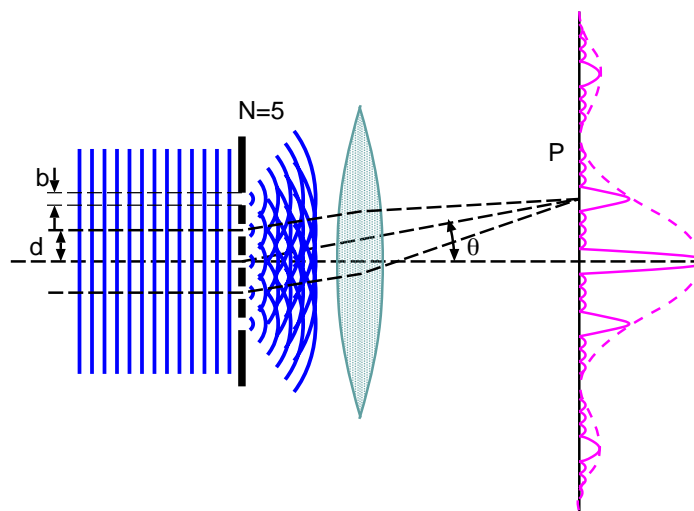


# Wellenlehre

Peter Widerin  
peter.widerin@fhv.at



## Prüfungsbedingung:

- 100 Punkte insgesamt
- 20 Punkte können während des Semesters durch Abgabe von Übungsbeispielen erworben werden (jeweils vor den Seminarterminen am 10.04., 26.05.)
- 80 Punkte für Theorie und Beispiele bei der zweistündigen schriftlichen Prüfung am 23.06.2025
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

## Literatur:

- Douglas C. Giancoli, *Physik, Lehr-und Übungsbuch* (Pearson, München 2019)
- David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Physik, Bachelor Edition* (Wiley-VCH, Weinheim 2013)
- Dieter Meschede, *Gerthsen Physik* (Springer, Berlin 2015)
- Richard P. Feynman, *The Feynman lectures on physics, Vol.1 and Vol 2* (Basic Books, New York 2011)
- Paul A. Tipler, Gene Mosca, *Physik* (Spektrum, Heidelberg 2014)

**0 – Inhaltsverzeichnis****Inhalt**

0 – Inhaltsverzeichnis . . . . .	2
1 – Einleitung . . . . .	3
2 – Schwingungen . . . . .	4
2.1 – Harmonischer Oszillator . . . . .	4
2.2 – Energie eines Oszillators . . . . .	8
2.3 – Phasenraum . . . . .	9
2.4 – Gedämpfter harmonischer Oszillator . . . . .	11
2.5 – Gedämpfter getriebener harmonischer Oszillator . . . . .	14
2.6 – Gekoppelte Schwingkreise . . . . .	16
2.7 – Eigenmodi gekoppelter Schwingkreise . . . . .	17
2.8 – Schwebung . . . . .	18
3 – Wellen . . . . .	19
3.1 – Wellen durch gekoppelte Schwingkreise . . . . .	19
3.2 – Wellengleichung . . . . .	21
3.3 – Elektromagnetische Wellen . . . . .	22
3.4 – Polarisierung . . . . .	23
3.5 – Ebene Wellen . . . . .	24
3.6 – Stehende Wellen . . . . .	27
3.7 – Wellenimpedanz und Reflexion . . . . .	28
4 – Optik . . . . .	29
4.1 – Elektromagnetische Optik . . . . .	31
4.2 – Geometrische Optik . . . . .	32
4.3 – Spiegel . . . . .	35
4.4 – Linsen . . . . .	36
4.5 – Optische Instrumente . . . . .	39
4.6 – Wellenoptik . . . . .	41
4.7 – Überlagerung von Lichtwellen . . . . .	42
4.8 – Fourier Optik und Beugung . . . . .	45

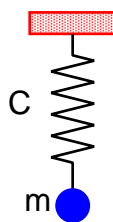
## 1 – Einleitung

Schwingungen sind regelmäßig erfolgende zeitliche Schwankungen einer oder mehrerer Zustandsgrößen in einem physikalischen System. Schwingungen treten immer dann auf, wenn ein **System mit Trägheit** aus einem **stabilen Gleichgewicht** ausgelenkt wird und dabei **rücktreibende Kräfte** wirken, die den Gleichgewichtszustand wiederherzustellen versuchen (z.B. Pendel).

Schwingungen, die sich räumlich entlang eines Systems gekoppelter schwingfähiger Elemente (z.B. Pendelkette) ausbreiten, werden als **Wellen** bezeichnet. Wellen sind also Schwingungen in Raum und Zeit.

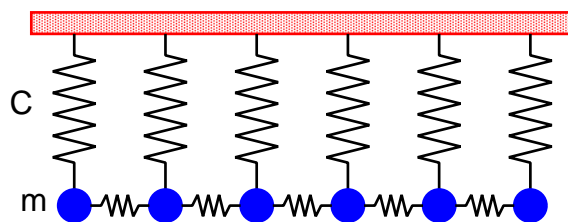
### Periodische Zustandsänderung

Ein schwingfähiges Element (Oszillator)



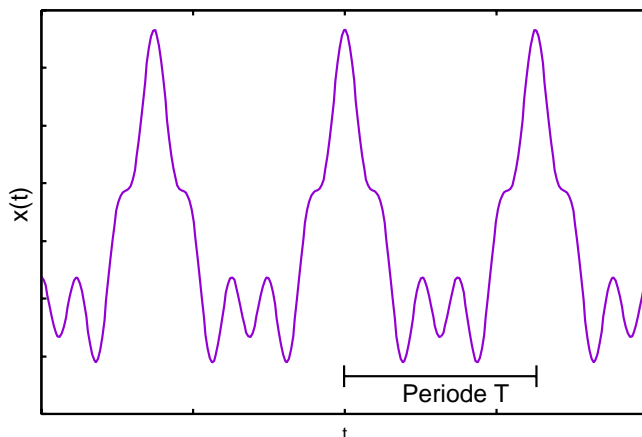
=>Schwingung

Mehrere gekoppelte schwingfähige Elemente



=>Welle

Aus energetischer Sicht ist eine Schwingung bzw. Welle ein wiederholter Wechsel zwischen einem Zustand maximaler **potentieller Energie** und einem Bewegungszustand mit maximaler **kinetischer Energie**.



Die Zustandsgröße wird als Auslenkung  $x(t)$  bezeichnet. Die kürzeste Zeit nach der sich der Bewegungszustand einer ungedämpften periodischen Bewegungen wiederholt, ist die Periodendauer  $T$ , oder einfach **Periode**:

$$x(t) \equiv x(t + T) \equiv x(t + 2T) \equiv \dots \quad (1)$$

Bei gedämpften periodischen Bewegungen wiederholt sich die Auslenkung nach einer Periode nur in ähnlicher Weise. Die **Frequenz**  $f$  ist die Anzahl der Zyklen pro Sekunde, gemessen in Hertz ( $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ ),

$$f := \frac{1}{T}. \quad (2)$$

**Aufgabe 1:** Aus welchen Frequenzanteilen relativ zur Grundfrequenz  $f = 1/T$  setzt sich die oben dargestellte periodische Bewegung zusammen (Fourier-Zerlegung).

## 2 – Schwingungen

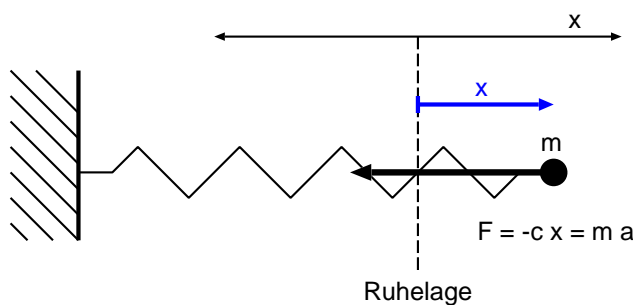
### 2.1– Harmonischer Oszillator

Die wichtigste und einfachste periodische Bewegung ist die **harmonische Schwingung**, welche durch eine reine Sinus- bzw. Cosinusfunktion beschrieben werden kann. (Beide Funktionen unterscheiden sich nur durch einen Phasenwinkel von  $\pi/2$ ,  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ ). Die Auslenkung einer symmetrischen harmonischen Schwingung (Ruhelage bei  $x = 0$ ) lautet

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_o t + \phi). \quad (3)$$

Das zeitabhängige Argument der Cosinusfunktion wird als **Phase** oder **Phasenwinkel** bezeichnet  $\varphi(t) = \omega_o t + \phi$ ,  $\hat{x}$  als **Amplitude**. Die **Phasenverschiebung**  $\phi$  ist der Startwert der Phase,  $\omega_o := 2\pi f$  ist die sogenannte **Kreisfrequenz**, also der Phasenzuwachs pro Sekunde.

Harmonische Schwingungen treten auf, wenn die rücktreibenden Kräfte linear proportional zur Auslenkung aus dem Gleichgewicht sind, i.e. beim **harmonischen Oszillator**. Nachdem die Ruhelage  $x_0$  per Definition ein Punkt minimaler potentieller Energie und daher ein Tiefpunkt der Potentialfunktion ist ( $dE_{\text{pot}}/dx|_{x_0} \equiv 0$ ), können die meisten Potentialverläufe in der Nähe der Ruhelage durch eine quadratische Parabel angenähert werden ( $E_{\text{pot}}(x) \propto (x - x_0)^2$ ). Daher wächst die Rückstellkraft linear zur Auslenkung und zur Ruhelage gerichtet ( $F := -dE_{\text{pot}}/dx \propto -(x - x_0)$ ). Aus diesem Grund können die meisten Schwingungsvorgänge für kleine Auslenkungen durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen beschrieben werden.



Ein mechanisches Beispiel eines **harmonischen Oszillators** ist das Masse-Feder-System: eine reibungsfrei gleitende Masse  $m$ , welche mit einer Feder der Federkraft  $F = -cx$  ( $c$  die sogenannte Federkonstante) in Richtung der Ruhelage mit  $x = 0$  gezogen wird.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Hooke'sches Gesetz: Jede reale Feder erfüllt dieses Kraftgesetz im Bereich kleiner Dehnung.

Wie lautet die Bewegungsgleichung dieses Schwingungssystems? Das zweite Newton'sche Axiom besagt, dass eine Kraft  $\vec{F}$  auf eine träge Masse  $m$  eine Beschleunigung in Richtung der Kraft bewirkt,

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}. \quad (4)$$

Auf unsere Masse wirkt einzig die Federkraft entlang einer Dimension  $x$ , folglich

$$m \ddot{x}(t) + c x(t) = 0. \quad (5)$$

Diese Differentialgleichung ist eine gewöhnliche, homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit der Abkürzung  $\omega_o^2 := \frac{c}{m}$  folgt die Form

$$\ddot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = 0. \quad (6)$$

Das ist die Gleichung eines (freien ungedämpften) **harmonischen Oszillators**.

**Aufgabe 2:** Was sagt die Gleichung über die Amplitude der Schwingung aus?

### Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen

Die Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Masse-Feder-Systems ist die Differentialgleichung eines **harmonischen Oszillators**, Gleichung (6). Anstelle einer systematischen Lösung der Differentialgleichung beweisen wir, dass die Gleichung durch den Ansatz einer harmonischen Schwingung, Gleichung (3) erfüllt wird. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse sind gegeben durch

$$x(t) := \hat{x} \cos(\omega_o t + \phi) \quad (7)$$

$$v(t) := \frac{dx}{dt}(t) = -\hat{x}\omega_o \sin(\omega_o t + \phi) \quad (8)$$

$$a(t) := \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\hat{x}\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \phi) = -\omega_o^2 x(t). \quad (9)$$

Wir sehen, dass die Beschleunigung bis auf einen Faktor  $-\omega_o^2$  gleich der Auslenkung ist, und daher die Gleichung des harmonischen Oszillators erfüllt wird.

Die Lösung enthält noch zwei Unbekannte, die Amplitude  $\hat{x}$  und die Anfangsphase  $\phi$ . Für eine eindeutige Lösung werden also noch zwei zusätzliche Bedingungen, sogenannte **Anfangsbedingungen** benötigt, z.B. Auslenkung  $x(0)$  und die Geschwindigkeit  $\dot{x}(0)$  zur Zeit  $t = 0$ ,

$$x(0) = \hat{x} \cos \phi, \quad (10)$$

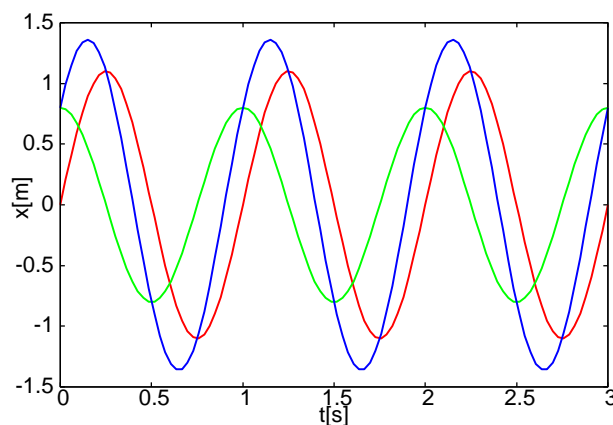
$$\dot{x}(0) = -\hat{x} \omega_o \sin \phi. \quad (11)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun  $\hat{x}$  und  $\phi$ . Division der Gleichungen ergibt

$$\phi = -\arctan \frac{\dot{x}(0)}{\omega_o x(0)}. \quad (12)$$

Die Amplitude  $\hat{x}$  erhält man durch quadrieren und addieren der Gleichungen (11) und (10)

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\dot{x}^2(0)}{\omega_o^2} + x^2(0)}. \quad (13)$$



Spezialfälle der Anfangsbedingungen:  
Maximaler Auslenkung  $x_o$ , (grün):

$$x(t) = x_o \cos(\omega_o t) \quad (14)$$

Maximaler Geschwindigkeit  $v_o$ , (rot):

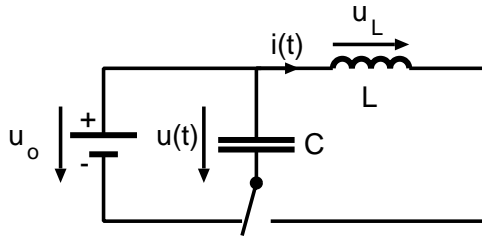
$$x(t) = \frac{v_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \quad (15)$$

Die allgemeine Lösung ist eine **Superposition** (Überlagerung) der beiden Spezialfälle, (blaue Kurve) und wieder eine harmonische Schwingung mit Frequenz  $\omega_o$ .

**Aufgabe 3:** Warum ergibt die Überlagerung harmonischer Schwingungen wieder eine harmonische Schwingung?

### Elektrischer Schwingkreis

Die Serienschaltung einer Spule der Induktivität  $L$  mit einem Kondensator der Kapazität  $C$  ergibt einen elektrischen Schwingkreis, siehe Abbildung.



Die Energie liegt hier entweder im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten, oder im magnetischen Feld der Spule:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C u^2 \quad \text{und} \quad E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2 \quad (16)$$

$i(t)$  ist der Wechselstrom durch die Spule,  $u(t)$  die Wechselspannung an der Kapazität.

Die Kapazität wird mit der Anfangsspannung  $u_o$  aufgeladen, d.h. mit der Ladung  $q_0 = C u_o$ , auf die Energie  $E_{\text{el}} = q_0^2 / 2C$ . Durch Umlegen des Schalters wird der Kondensator über die Spule entladen. Der ansteigende Strom  $i(t) = -\dot{q}(t)$  baut ein magnetisches Feld der Energie  $E_{\text{mag}} = L \dot{q}^2 / 2$  auf, bis die Kapazität entladen ist und die gesamte Energie in magnetischer Form vorliegt. Das Magnetfeld baut sich nun ab, indem die Kapazität in umgekehrter Richtung geladen wird und dadurch der Stromfluss durch die anwachsende negative Spannung an der Kapazität zum Stillstand kommt - die Energie liegt wieder rein elektrisch vor. Die Energie "pendelt" also zwischen Kondensator (elektrisch  $E_{\text{el}}$ ) und Spule (magnetisch  $E_{\text{mag}}$ ).

Die Oszillatorgleichung des Schwingkreises folgt aus der Maschenregel<sup>a</sup>,  $u(t) = u_L(t)$ . Die Zustandsgröße ist die Ladung  $q(t)$  der Kapazität, die Spannung an der Spule lautet  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,

$$u(t) \equiv \frac{q(t)}{C} = u_L = -L \ddot{q}(t). \quad (17)$$

Durch Umformung folgt die Gleichung des freien ungedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0. \quad (18)$$

Diese Gleichung ist vom Standpunkt der mathematischen Struktur mit Gleichung (6) identisch. Der ungedämpfte elektrische Schwingkreis vollführt somit eine harmonische Schwingung. Die Lösung der Gleichung (18) hat die Form

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \hat{u} \cos(\omega_o t + \phi) \quad (19)$$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_o t + \phi) \quad (20)$$

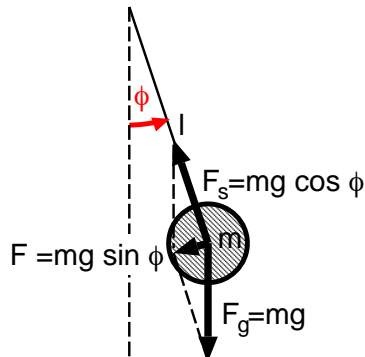
mit der Eigenfrequenz  $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

**Aufgabe 5:** Löse die Differentialgleichung 18 mit dem Exponentialansatz  $q(t) = A e^{\lambda t}$ , mit den zu bestimmenden Unbekannten  $A$  und  $\lambda$ . Welche Bedingung folgt für  $A$  und  $\lambda$ ? Stimmt das Resultat mit der obigen Lösung überein? (verwende die Euler'sche Formel  $e^{i\alpha} \equiv \cos \alpha + i \sin \alpha$ )

<sup>a</sup>Die Summe der Spannungen in einer geschlossenen Leiterschleife ist Null.

Mathematisches Pendel

Wir betrachten nun einen Massepunkt mit Masse  $m$ , der über einen masselosen Faden der Länge  $l$  an der Decke befestigt ist und der Schwerkraft unterliegt, siehe Abbildung.



Wird die Masse aus ihrer Ruhelage um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt, entsteht aus der Gewichtskraft  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  eine rücktreibende Kraft der Größe

$$F = -m g \sin \varphi, \quad (21)$$

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$  ist die Erdbeschleunigung. Die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  wird dabei in eine das Seil spannende Komponente  $\vec{F}_S$  und eine rücktreibende Komponente  $\vec{F}$  zerlegt.

Aus der Kraft  $F$  resultiert ein rücktreibendes Moment bezüglich des Aufhängepunktes

$$M_R = -m g l \sin \varphi. \quad (22)$$

Dieses Drehmoment beschleunigt die Masse gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung,  $J \ddot{\varphi} = M_R$ . Das Trägheitsmoment der Masse beträgt  $J = m l^2$ ,

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -m g l \sin \varphi, \quad (23)$$

beziehungsweise

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (24)$$

Diese Bewegungsgleichung ist aufgrund der Sinusfunktion nichtlinear und kann nur mit großem mathematischem Aufwand beziehungsweise numerisch gelöst werden. Diese Probleme können jedoch umgangen werden, wenn wir uns auf kleine Auslenkungen  $\varphi \ll 1$  beschränken. Unter dieser Annahme kann die Sinusfunktion durch eine Taylorreihenentwicklung approximiert werden

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (25)$$

Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  genügt der ersten Term der Näherung,  $\sin \varphi \approx \varphi$ , und es folgt

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (26)$$

Diese Gleichung ist wiederum die Oszillatorgleichung für eine harmonische Schwingung und hat die bereits behandelte Lösungsstruktur. Die Auslenkungsfunktion  $\varphi(t)$  ist

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_o t + \phi). \quad (27)$$

Die Eigenfrequenz ist für das mathematische Pendel kleiner Auslenkungen

$$\omega_o = 2 \pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (28)$$

**Aufgabe 6:** Ein Fadenpendel der Länge  $l = 0.371 \text{ m}$  schwingt mit einer Frequenz  $f = 0.81 \text{ Hz}$ . Wie groß ist die Erdbeschleunigung?

## 2.2– Energie eines Oszillators

Die Energie eines mechanischen Schwingkreises folgt aus der Bewegungsgleichung (4), indem mit der Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  multipliziert und integriert wird:

$$m \frac{d}{dt} v = F \quad | \cdot dx \equiv v dt \quad | \int_A^B \quad (29)$$

$$\int_{v_A}^{v_B} m v \cdot dv = m \frac{v_B^2}{2} - m \frac{v_A^2}{2} = - \int_A^B c \cdot x \cdot dx = -c \frac{x_B^2}{2} + c \frac{x_A^2}{2} \quad (30)$$

Dieses Resultat ist gerade die Energieerhaltung für den harmonischen Oszillator

$$E_{\text{ges}} := \left( m \frac{v^2}{2} + c \frac{x^2}{2} \right) \Big|_A = \left( m \frac{v^2}{2} + c \frac{x^2}{2} \right) \Big|_B = \text{konstant.} \quad (31)$$

Die Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt lautet nun

$$E_{\text{ges}} = m \frac{v(t)^2}{2} + c \frac{x(t)^2}{2} = \text{konstant.} \quad (32)$$

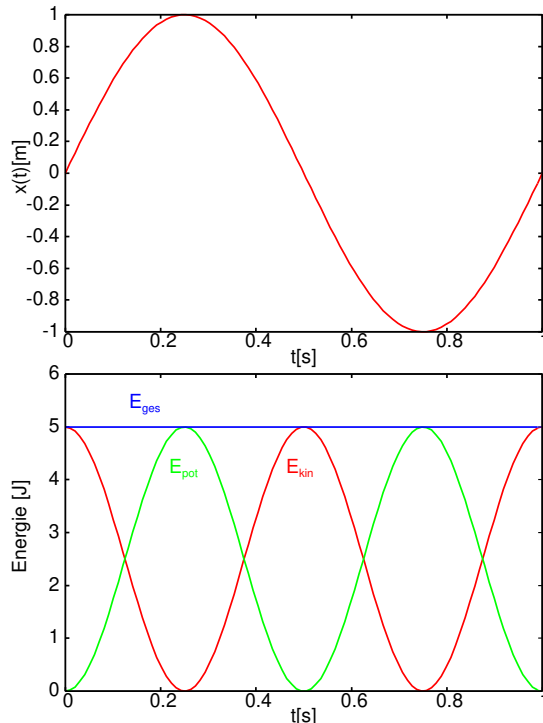
Die Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  des harmonischen Oszillators setzt sich immer aus der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$ ,

$$E_{\text{kin}} = \frac{m v^2}{2}, \quad (33)$$

und der potentiellen Energie  $E_{\text{pot}}$ ,

$$E_{\text{pot}} = - \int \vec{F} d\vec{s} = \frac{c x^2}{2}, \quad (34)$$

zusammen. ( $\vec{F}$  ist die auf die schwingende Masse  $m$  wirkende Kraft.)



Setzt man die Lösung der Bewegungsgleichung (8,9) für die kinetische und potentielle Energie ein, folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m \hat{x}^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t + \phi)}{2}. \quad (35)$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{c \hat{x}^2 \cos^2(\omega_o t + \phi)}{2} \quad (36)$$

Die Energie pendelt also ständig zwischen rein kinetischer und rein potentieller Energie, siehe Abbildung. Die Summe beider Energien ist, wie für ein System ohne Dissipation zu erwarten, konstant,

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{c \hat{x}^2}{2} = \text{konstant.} \quad (37)$$

Hier wurde die Eigenfrequenz durch die Federkonstante ausgedrückt,  $c = m\omega_0^2$ .

**Aufgabe 7:** Wie lauten kinetische und potentielle Energie im Falle eines elektrischen LC-Schwingkreises und im Fall eines mathematischen Pendels



### 2.3– Phasenraum

In der klassischen Mechanik wird der Zustand eines Teilchen (für alle Zeiten) eindeutig durch die momentane Position  $x(t)$  und die momentane Geschwindigkeit  $v(t)$ , bzw. den momentanen Impuls  $p(t) := mv(t)$ , beschrieben, also durch eine "Positionsfunktion" und eine "Geschwindigkeitsfunktion". Entsprechend wird der Positionsfunktion eine "Lage-Energie" (potentielle Energie) und der Geschwindigkeitsfunktion eine "Bewegungs-Energie" zugeordnet. Im Falle des harmonischen Oszillators ist jede dieser Energie proportional zum Quadrat der zugehörigen Zustandsgröße, also proportional zu  $x(t)^2$  bzw.  $p(t)^2$ .

Die mathematische Struktur der Gesamtenergie eines harmonischen Masse-Federsystems, Gleichung (37), entspricht einer Kreisgleichung, aufgespannt durch die skalierte verallgemeinerte Positionsfunktion,

$$X(t) := \sqrt{\frac{c}{2}} x(t), \quad (38)$$

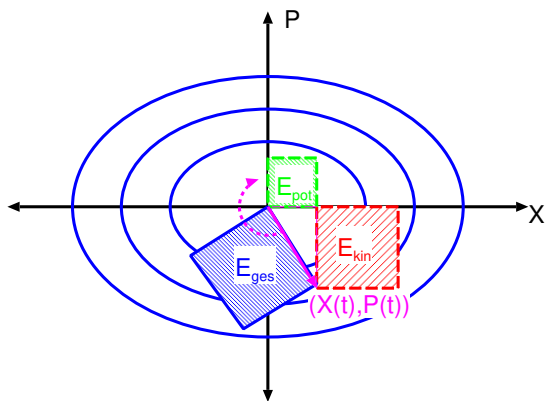
und die skalierte verallgemeinerte Geschwindigkeitsfunktion,

$$P(t) := \sqrt{\frac{m}{2}} v(t). \quad (39)$$

Ausgedrückt durch  $X(t)$  und  $P(t)$  lautet die Energieerhaltung

$$E_{\text{ges}} = X(t)^2 + P(t)^2. \quad (40)$$

Die skalierten Zustandsgrößen  $X(t)$  und  $V(t)$  sind die verallgemeinerten  $x$  und  $y$  Koordinaten, der Radius des Kreises ist gerade die Wurzel der Gesamtenergie,  $\sqrt{E_{\text{ges}}}$ , siehe Abbildung.



Der Raum, welcher durch die Positionsfunktion und die Geschwindigkeitsfunktion aufgespannt ist, wird **Phasenraum** genannt. Jedem Zustand (jeder momentane Position mit zugehörigem Impuls) kann ein Punkt im Phasenraum zugeordnet werden, d.h. einem Vektor mit den Koordinaten  $(X(t), P(t))$ . Der zeitliche Ablauf einer harmonischen Schwingung wird durch die Bewegungsgleichungen beschrieben, welche zu neuen Koordinaten führt. Aufgrund der Energieerhaltung, Gleichung (40), bewegt sich der Zustand entlang eines Kreises mit Radius  $\sqrt{E_{\text{ges}}}$ .

Das Quadrat über dem Radius bleibt hierbei konstant, mit Flächeninhalt  $E_{\text{ges}}$ , die Quadrate über den Koordinatenabschnitten sind gerade die potentielle und die kinetische Energie. Die Energieerhaltung entspricht gerade dem Lehrsatz von Pythagoras, siehe Abbildung.

Die Trajektorie eines harmonischen Oszillators entspricht einer reinen gleichförmigen Rotation des Vektors  $(X(t), P(t))$  im Uhrzeigersinn (siehe strichlierter Pfeil). Die Länge dieses Vektors im Phasenraumes bleibt aufgrund der Energieerhaltung konstant, die Komponenten wechseln zwischen maximaler Auslenkung bei verschwindender Geschwindigkeit (maximale potentielle Energie im Umkehrpunkt) und maximaler Impuls beim Durchlaufen der Ruhelage (maximale kinetische Energie).

Die Trajektorien des gleichen harmonischen Oszillators zu unterschiedlichen Auslenkungen entsprechen konzentrischen Kreisen, wobei der Radius wieder genau durch die Wurzel der Gesamtenergie gegeben ist. Der Phasenraum ist also eine elegante Methode dynamische Systeme vollständig zu beschreiben.

**Aufgabe 8:** Zeige, dass die Bewegungsgleichung des Masse Federsystems (die Trajektorie) eine gleichförmige Rotation des Zustandsvektors  $(X(t), P(t))$  im Phasenraum ergibt.

### Phasenraum von Oszillatoren

Die Gesamtenergie des elektrischen LC-Schwingkreises und des mathematischen Pendels kann analog zum Masse-Feder System, Gleichung 32, berechnet werden. Die Energiefunktionen aller drei betrachteten Systeme lauten

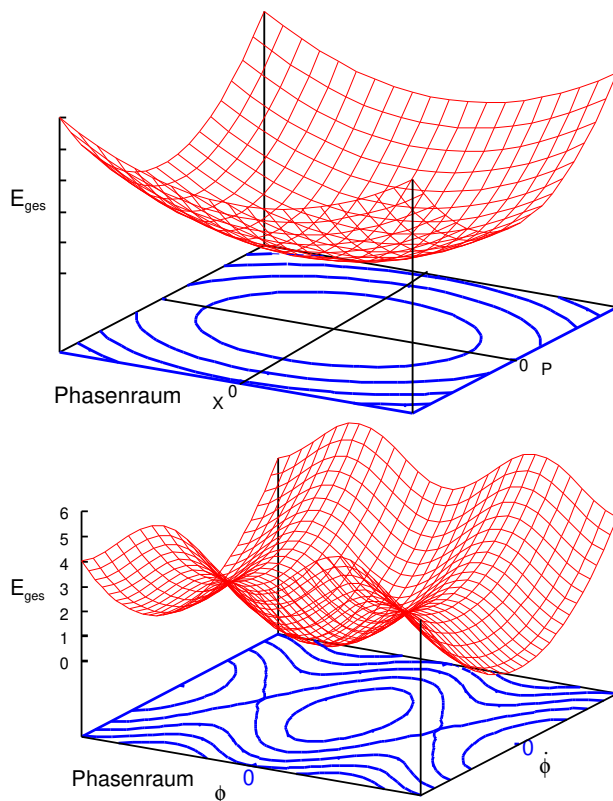
$$E_{\text{ges}} = m \frac{v(t)^2}{2} + c \frac{x(t)^2}{2} = \text{konstant} \quad (41)$$

$$E_{\text{ges}} = C \frac{u(t)^2}{2} + L \frac{i(t)^2}{2} = C \frac{\hat{u}^2}{2} = \text{konstant} \quad (42)$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{ml^2 \dot{\varphi}(t)^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi(t)) = \text{konstant}. \quad (43)$$

Die "Positionsfunktion" des elektrischen Schwingkreises ist die Ladung  $q(t)$  beziehungsweise die entsprechende Spannung an der Kapazität  $u(t) = q(t)/C$ . Die dynamische Größe, die "Geschwindigkeitsfunktion", des elektrischen Schwingkreises ist die Ladungsänderung an der Kapazität, also der elektrische Strom  $i(t) = -\dot{q}(t)$ . Die potentielle Energie entspricht der elektrischen Energie im Kondensator,  $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}Cu^2$ , die kinetische Energie entspricht der magnetischen Energie in der Spule,  $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2$ .

Im Fall des mathematischen Pendels wird die Position durch die Auslenkung  $\varphi(t)$  beschrieben. Die entsprechende Geschwindigkeit ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels,  $\dot{\varphi}(t)$ .



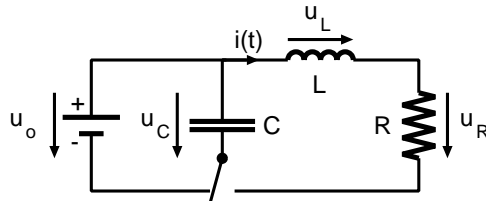
Der **Phasenraum** wird nun durch die Positionssvariablen  $(x(t), q(t), \varphi(t))$  und den zugehörigen 'Geschwindigkeiten'  $(\dot{x}(t), \dot{q}(t), \dot{\varphi}(t))$  aufgespannt. Anstelle der Geschwindigkeiten können auch die entsprechenden Impulse verwendet werden. Die Energiefunktion beschreibt eine Fläche über dem Phasenraum. Die Höhenlinien dieser Fläche sind Linien konstanter Energie. Jeder Bewegungszustand eines harmonischen Oszillators gegebener Energie ist ein Punkt im Phasenraum auf der entsprechenden Höhenlinie. Im Verlauf einer Periode wird die Höhenlinie einmal im Uhrzeigersinn abgefahren.

Die Energiefunktion des harmonischen Oszillators und des LC-Schwingkreises ist ein Paraboloid mit elliptischen Höhenlinien im Phasenraum, siehe Abbildung oben. Die Energiefunktion des mathematischen Pendels ist nur für kleine Auslenkungen ein Paraboloid, siehe Abbildung links.

**Aufgabe 9:** Welche Trajektorie resultiert beim mathematischen Pendel bei entsprechend hoher Energie? (Diskussion mithilfe des Phasenraums.)

### 2.4– Gedämpfter harmonischer Oszillator

Bisher wurden frei schwingende Systeme ohne Reibung betrachtet. In jedem realen System gibt es aber Kräfte, die der Bewegung des Oszillators entgegenwirken, d.h. die Bewegung dämpfen. In mechanischen Systemen ist dies meist die Reibung, in elektrischen Schwingkreisen ist oft der Ohm'sche Widerstand für die Dämpfung verantwortlich. Die dämpfenden Kräfte leisten Arbeit und verringern daher die im System hin- und herpendelnde Energie.



Die Maschenregel für einen elektrischen Schwingkreis mit Ohm'schem Widerstand  $R$  berücksichtigt den zusätzlichen Spannungsabfall  $u_R(t) = Ri(t)$ . Alle weiteren Bedingungen sind analog zum ungedämpften Fall,  $u_C = \frac{q}{C}$  und  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .

Die Gleichung des LRC-Schwingkreises folgt nun aus  $u_C = u_L + u_R$ ,

$$\frac{q(t)}{C} + L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) = 0. \quad (44)$$

Division der Gleichung durch  $L$  und Verwendung der Abkürzungen

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC}, \quad (45)$$

ergibt die Gleichung des **gedämpften harmonischen Oszillators**

$$\ddot{q}(t) + 2\gamma\dot{q}(t) + \omega_o^2 q(t) = 0, \quad (46)$$

eine lineare, homogene, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. (Im Falle des Masse-Feder Systems ist der Dämpfungsterm  $\gamma = \beta/2m$  wobei  $\beta$  eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit,  $F_{\text{reib}} = -\beta\dot{x}$ , beschreibt.)

#### Energie der freien gedämpften harmonischer Schwingungen

Wird die Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators mit  $L\dot{q}(t)$  multipliziert

$$L\ddot{q}\dot{q} + L\omega_o^2 q\dot{q} = -2L\gamma\dot{q}^2, \quad (47)$$

kann die linke Seite als ein vollständiges Differential geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L}{2} \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2C} q(t)^2 \right) = -2L\gamma\dot{q}^2 \quad (48)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist gerade die gesamte im Schwingkreis enthaltene elektrische Energie  $E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} + E_{\text{mag}}$ . Drückt man  $\gamma$  durch die  $L$  und  $R$  folgt

$$\frac{d}{dt} E_{\text{ges}} = -Ri(t)^2. \quad (49)$$

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator verliert also mit der Zeit Energie, entsprechend der dissipierten Leistung am ohm'schen Widerstand, welche zu einer Erwärmung des Widerstands führt. Die Gesamtenergie (elektromagnetisch und Wärme) bleibt erhalten (1. Hauptsatz). (Im Falle des Massefeder-Systems wird  $L$  durch  $m$  ersetzt,  $q$  durch  $x$  und  $C$  durch  $1/c$ .)

**Aufgabe 10:** Wie lautet die Differentialgleichung, wenn der Serienwiderstand durch einen hochohmigen Parallelwiderstand zur Kapazität ersetzt wird?

### Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Bewegung eines gedämpften harmonischen Oszillators erhält man mit dem Ansatz  $q(t) = e^{\lambda t}$ . Dazu differenziert man den Ansatz zweimal nach der Zeit und setzt die Ableitungen in Gleichung (46) ein

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2)e^{\lambda t} = 0. \quad (50)$$

Die Gleichung wird nur an den Nullstellen der quadratischen Gleichung erfüllt

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}. \quad (51)$$

Somit haben wir zwei Lösungen der Differentialgleichung gefunden:

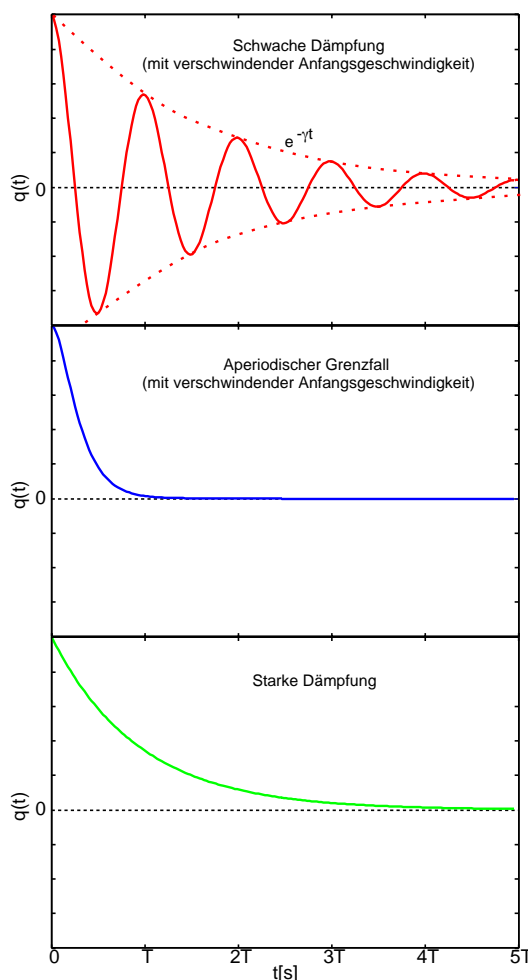
$$q_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t} e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t}, \quad (52)$$

$$q_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t}. \quad (53)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist eine Linearkombination dieser beiden

$$q(t) = A q_1(t) + B q_2(t) = A e^{-\gamma t} e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} + B e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t}. \quad (54)$$

$A$  und  $B$  sind reelle Konstanten. Je nach Wert des Ausdrucks  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$  haben die Lösungen der Differentialgleichung sehr unterschiedlichen Charakter:



- **Schwache Dämpfung**  $\gamma^2 < \omega_o^2$ : Die Wurzel ist imaginär,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind komplexe Zahlen:

$$q(t) = \hat{q} e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi), \quad (55)$$

$\gamma$  wird als **Abklingkonstante** bezeichnet, die Eigenfrequenz  $\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$  ist relativ zum ungedämpften Oszillator reduziert.

- **Aperiodischer Grenzfall**  $\gamma^2 = \omega_o^2$ : Die charakteristische Gleichung hat eine zweifache Lösung  $\lambda_{1,2} = -\gamma$ :

$$q(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}, \quad (56)$$

$A$  und  $B$  werden an die Anfangsbedingungen angepasst. Der aperiodische Grenzfall ist gerade die Bedingung für die schnellste Abklingzeit, d.h. schnellste Dämpfung.

- **Starke Dämpfung**  $\gamma^2 > \omega_o^2$ :  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reelle Zahlen und es liegt eine rein exponentielle Dämpfung vor

$$q(t) = \left( A e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} \right) e^{-\gamma t}. \quad (57)$$

$A$  und  $B$  werden an die Anfangsbedingungen angepasst.

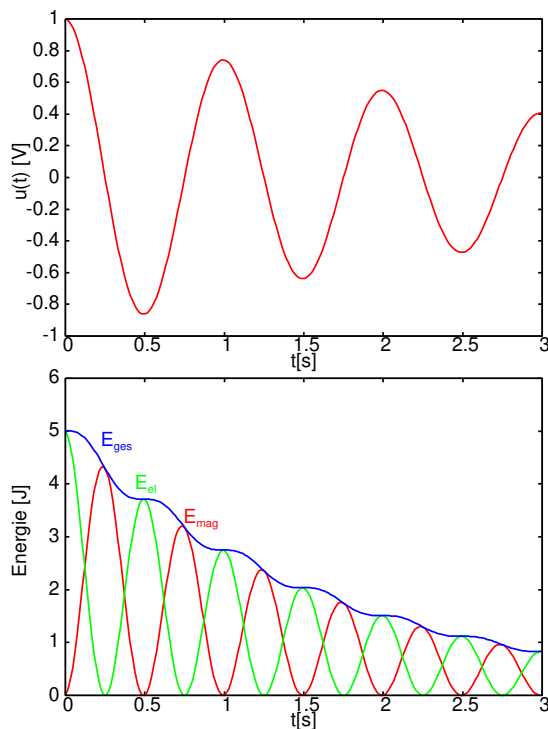
**Aufgabe 11:** Wie lautet die Bedingung für den aperiodischen Grenzfall für einen LRC-Schwingkreis? Wie sieht das Verhalten bei verschwindender Anfangsauslenkung aus?

### Energie eines gedämpften harmonischen Oszillators

Die Gesamtenergie eines gedämpften harmonischen Oszillators nimmt mit der Zeit ab. Der Dämpfungsterm  $\gamma$  bestimmt die Stärke der Energieumwandlung in Wärme.

Im Falle des LRC Schwingkreises führen die ohmschen Verluste am Widerstand zu einer Dissipation und daher zur Umwandlung der elektrischen und magnetischen Energie in Wärme. Die entsprechende Gleichung lautet, siehe Gleichung (49):

$$\frac{d}{dt} E_{\text{ges}} = \frac{d}{dt} \left[ C \frac{u(t)^2}{2} + L \frac{i(t)^2}{2} \right] = -R i(t)^2 \quad (58)$$

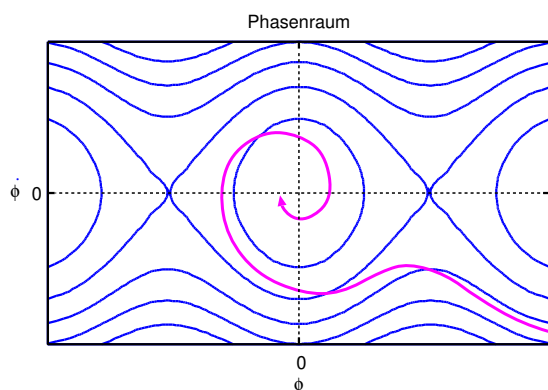


Die ohm'schen Verlustleistung  $P = Ri^2$  hängt nur von der dynamischen Zustandsgröße, d.h. dem elektrischen Strom, ab. Die Gesamtenergie im Schwingkreis  $E_{\text{ges}}$  nimmt daher nur bei fließendem Strom ab, also in Phasen mit großer magnetischer Energie. In den Phasen großer elektrischer Energie wird keine Leistung dissipiert.

Die Abnahme der Gesamtenergie im betrachteten LRC Schwingkreises erfolgt in Stufen jeweils bei maximalem Strom, also maximaler magnetischer Energie  $E_{\text{mag}}$ . Die Plateaus zwischen den Stufen entsprechen jeweils den Phasen maximaler Spannung in der Kapazität, also maximaler elektrischer Energie  $E_{\text{el}}$ , siehe Abbildung.

N.B.: In der Abbildung wurde nur der schwach gedämpfte Fall gezeichnet.

Im Falle des mathematischen Pendels führt Reibung dazu, dass auch überschlagende Pendel nach einer gewissen Zahl von Überschlägen in eine pendelnde Schwingung abnehmender Amplitude übergehen.



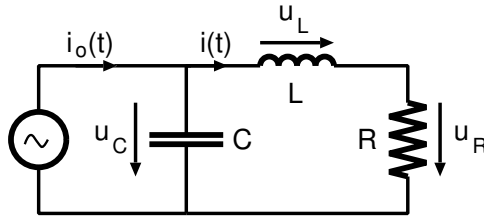
Die Bewegung eines gedämpften harmonischen Oszillators kann im Phasenraum sehr anschaulich dargestellt werden. Die Energie, d.h. die Länge des Zustandsvektors, nimmt ab und wir erhalten eine spiralförmige Trajektorie im Phasenraum, siehe Abbildung (mathematisches Pendel).

N.B.: Die Trajektorie schneidet die x-Achse immer im rechten Winkel.

**Aufgabe 12:** Warum schneidet die Trajektorie die x-Achse immer im rechten Winkel? Wo endet die gedämpfte Schwingung im Phasenraum?

### 2.5– Gedämpfter getriebener harmonischer Oszillator

Bisher wurden nur freie schwingende Systeme betrachtet. Was passiert nun, wenn einem Oszillator eine periodische Kraft aufgezwungen wird, eine **äußere Anregung**? Betrachten wir einen LRC-Schwingkreis, der mit einem sinusförmigen Strom  $i_o(t) = \hat{i}_o \sin \omega t$  angeregt wird.



Die Stromanregung bewirkt eine zusätzliche periodische Ladung  $q_o(t)$  auf der Kapazität gemäß

$$q_o(t) = -\hat{q}_o \cos(\omega t) = -\frac{\hat{i}_o}{\omega_o} \cos(\omega t). \quad (59)$$

Die Ladung  $q_o(t)$  addiert sich zur Ladung  $q(t)$ .

Die Gleichung des getriebenen LRC-Schwingkreises folgt nun aus der Maschenregel,

$$\frac{q(t) + q_o(t)}{C} + L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) = 0. \quad (60)$$

Mit den Abkürzungen  $\gamma = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$  und  $f_o = \omega_o^2 \hat{q}_o$  lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{q}(t) + 2\gamma\dot{q}(t) + \omega_o^2 q = f_o \cos \omega t. \quad (61)$$

Das ist die Bewegungsgleichung für eine **gedämpfte erzwungene harmonische Schwingung**. Die allgemeine Lösung besteht aus einem homogenen und einem partikulären Anteil,

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t). \quad (62)$$

Den homogenen Lösungsanteil  $q_h(t)$  haben wir bereits im vorigen Kapitel berechnet:

Dämpfungsfall	Homogene Lösung $x_h(t)$
$\gamma < \omega_o$	$q_h(t) = \hat{x} e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$
$\gamma = \omega_o$	$q_h(t) = (A + B t) e^{-\gamma t}$
$\gamma > \omega_o$	$q_h(t) = e^{-\gamma t} (A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t})$

Die Lösungsfunktionen beinhaltet für alle drei Fälle einen  $e^{-\gamma t}$ -Term. Daher verschwindet für große Zeiten der homogene Anteil der allgemeinen Lösung und nur der partikuläre Anteil bestimmt dann die Bewegung des Systems! Im eingeschwungenen Zustand wird das System mit der Erregerfrequenz  $\omega$  schwingen. Daher wählen wir folgenden Lösungsansatz für  $x_p(t)$ :

$$q_p(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \quad (63)$$

Eingesetzt in Gleichung (61) folgt durch Vergleich der sin und cos Koeffizienten:

$$C_1 = \frac{2\gamma\omega f_o}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (64)$$

$$C_2 = \frac{f_o(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (65)$$

**Aufgabe 13:** Erfüllt die allgemeine Lösung (62)-(65) die Differentialgleichung (61)?

### Resonanz und Q Faktor

Die Partikulärlösung kann mithilfe der Beziehung  $C \cos(\omega t - \varphi) := C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ , in einen Amplitudenanteil  $C(\omega)$  und einen Phasenanteil  $\varphi(\omega)$  zerlegt werden

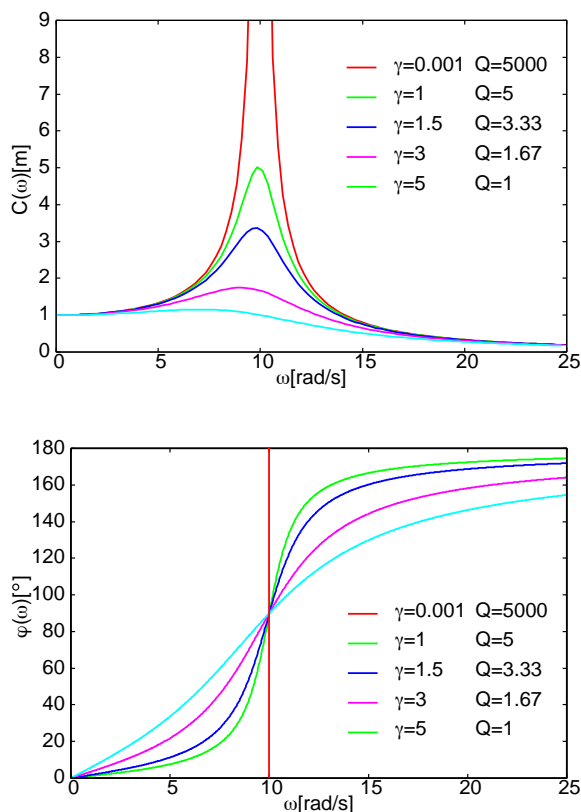
$$q_p(t) = C(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)). \quad (66)$$

Die Amplitudenfunktion  $C(\omega) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  und die Phasenfunktion  $\varphi(\omega) = \arctan \frac{C_1}{C_2}$  lauten:

$$C(\omega) = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (67)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad (68)$$

Die Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  zeigt wieviel die Lösung  $q_p$  der Anregung  $f_o \cos(\omega t)$  nacheilt.



Bei einer Anregung mit sehr niedriger Frequenz folgt der Oszillator genau der äußeren Anregung. Daher ist die Amplitudenfunktion  $C(0) = 1$  und es liegt keine Phasenverschiebung vor. Bei sehr hoher Frequenz der Anregung kann der Oszillator der Anregung nicht mehr folgen und schwankt daher im Wesentlichen nur wenig um die Ruhelage mit  $180^\circ$  Phasenverschiebung. In der Nähe der **Eigenresonanz** zeigt die Amplitudenfunktion hingegen eine Polstelle und kann sehr groß werden - es liegt also eine **Resonanzüberhöhung** vor, die Phasenlage beträgt dort genau  $90^\circ$ .

Die Abbildung zeigt Amplituden- und Phasenfunktion eines getriebenen harmonischen Oszillators, dessen Resonanz bei  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  liegt, für unterschiedliche Dämpfung  $\gamma$ .

Die Höhe und Schärfe einer Resonanz wird durch die **Güte** oder den **Q-Faktor** angegeben,

$$Q := \frac{\omega_o}{2\gamma} \equiv \omega_o \frac{E_{\text{ges}}}{\left| \frac{dE_{\text{ges}}}{dt} \right|}. \quad (69)$$

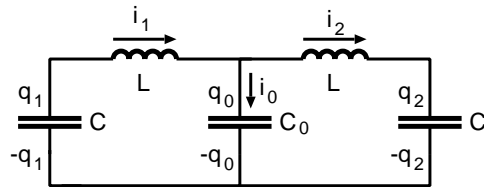
Die Güte ist der Kehrwert des relativen Energieverlustes pro Periode  $1/\omega_o$ . Im Falle schwacher Dämpfung kann die Güte aus der 3dB-Bandbreite der Leistungsspektrums  $\Delta\omega$  ermittelt werden, und entspricht der Anzahl Perioden des freien Oszillators bis 27dB Dämpfung

$$Q \approx \frac{\omega_o}{\Delta\omega}. \quad (70)$$

**Aufgabe 14:** Wie lautet die Güte im Falle des LRC-Schwingkreises?

## 2.6– Gekoppelte Schwingkreise

Ein **Wellenleiter** ist ein **System gekoppelter Oszillatoren**. Wir betrachten daher zuerst ein System von zwei gekoppelten Schwingkreisen. Die Kopplung erfolgt über eine gemeinsame Kapazität  $C_0$  beider Schwingkreise, siehe Abbildung.



Die äußeren Kapazitäten sind gleich  $C$ , ebenso die beiden Induktivitäten  $L$ . Die Stromrichtung der Ströme  $i_1$  und  $i_2$  wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich gewählt. Alle Kapazitäten sind über Masse verbunden.

Die Knotenregel  $i_o = i_1 - i_2$  ist gleichbedeutend mit der Ladungserhaltung  $q_o - q_1 + q_2 = 0$ . Die Maschenregeln im rechten und linken Schwingkreis führen zu den Differentialgleichungen

$$\frac{q_1}{C} = L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_o}{C_o} \quad (71)$$

$$\frac{q_2}{C} = -L \frac{di_2}{dt} + \frac{q_o}{C_o}. \quad (72)$$

Mit  $\frac{dq_1}{dt} = -i_1$  und  $\frac{dq_2}{dt} = i_2$  und der Ladungserhaltung folgt durch Ableitung nach der Zeit

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i_1 - \frac{1}{LC_o} (i_1 - i_2) \quad (73)$$

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i_2 + \frac{1}{LC_o} (i_1 - i_2). \quad (74)$$

Das Differentialgleichungssystem für  $i_1$  und  $i_2$  ist aufgrund des rechten Termes gekoppelt und kann durch geschickte Linearkombination der beiden Gleichungen entkoppelt werden. Intuitiv ist zu erwarten, dass die möglichen Schwingungszustände die Symmetrie des System widerspiegeln. Eine Zerlegung in Gleich- und Differenzanteil der Ströme,  $i_1 + i_2$  und  $i_1 - i_2$ , also eine Addition und eine Subtraktion der Gleichungen, ergibt:

$$\frac{d^2 (i_1 + i_2)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} (i_1 + i_2) \quad (75)$$

$$\frac{d^2 (i_1 - i_2)}{dt^2} = -\left(\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_o}\right) (i_1 - i_2). \quad (76)$$

Die Gleichungen sind nun entkoppelt und entsprechen jeweils einem harmonischen Oszillator für den Gleichanteil  $i_1 + i_2$  und den Differenzanteil  $i_1 - i_2$ . Die Eigenfrequenz des Gleich- und Differenzanteils folgen aus dem Vergleich mit dem harmonischen Oszillator, Gleichung (6),

$$(i_1 + i_2) \longrightarrow \omega_{\text{gleich}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (77)$$

$$(i_1 - i_2) \longrightarrow \omega_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_o}}. \quad (78)$$

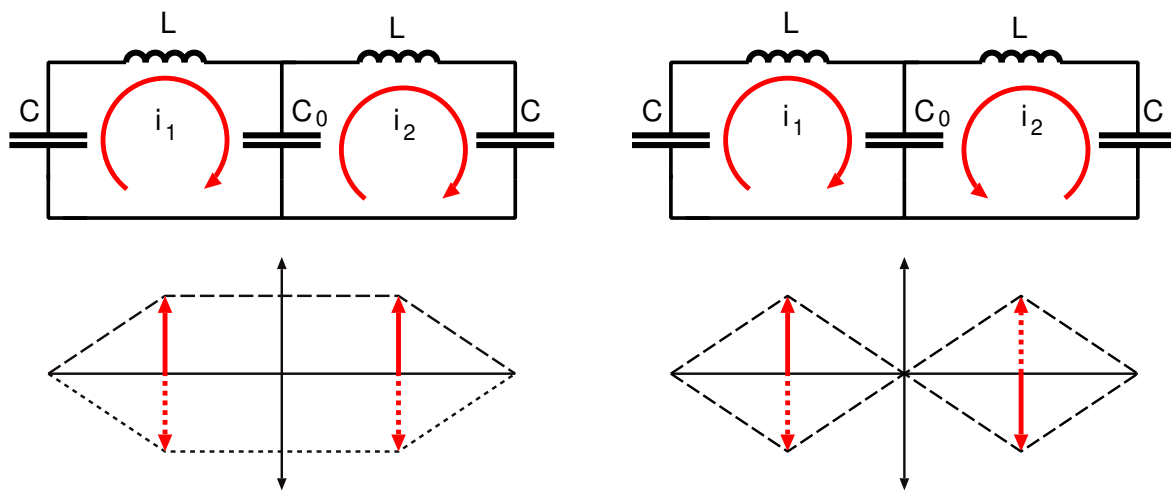
**Aufgabe 15:** Was passiert im Grenzfall starker Kopplung  $C_0 \rightarrow 0$ , was passiert im Grenzfall schwacher Kopplung mit dem Schwingkreis und den Eigenfrequenzen?



### 2.7– Eigenmodi gekoppelter Schwingkreise

Die Differentialgleichung von zwei gekoppelten Schwingkreisen kann auf zwei Eigenfrequenzen schwingen. Die Schwingung niederster Frequenz, die sogenannte **Grundschwingung** mit  $\omega_{\text{gleich}}^2 = 1/LC$ , entspricht der Eigenmode, bei der die Ströme der beiden Kreise gleich schwingen. In diesem Fall ist  $i_1 = i_2$  und es fließt kein Strom auf die Koppelkapazität  $C_o$ , der Schwingkreis verhält sich also wie ein einfacher LC-Schwingkreis mit einer Induktivität  $2L$  und einer Kapazität die aus der Serienschaltung der zwei äußeren Kapazitäten resultiert,  $C/2$ .

Die zweite Schwingungsmode mit  $\omega_{\text{diff}}^2 = 1/LC + 2/LC_o$  entspricht dem Fall mit gegengleich schwingenden Strömen in den beiden Kreisen. Nachdem die Koppelkapazität mit zwei gleichen Strömen geladen wird, verhält sich die Spannung aus Sicht eines der Kreise gleich einer halb so grossen Kapazität,  $C_o/2$ . Die Eigenfrequenz entspricht daher der eines Schwingkreises mit der Serienschaltung einer der Kapazitäten  $C$  und  $C_o/2$ , d.h. die Kehrwerte addieren sich. Die Symmetrien der Ströme sind in der Abbildung dargestellt.



Der allgemeine Schwingungszustand gekoppelter Schwingkreise lautet nun

$$i_1 + i_2 = A \cos(\omega_{\text{gleich}} t + \phi_{\text{gleich}}) \quad (79)$$

$$i_1 - i_2 = B \cos(\omega_{\text{diff}} t + \phi_{\text{diff}}), \quad (80)$$

wobei  $A$  und  $B$  die Amplituden und  $\phi_{\text{gleich}}$  und  $\phi_{\text{diff}}$  die Anfangsphasen sind, die an die Anfangsbedingungen angepasst werden müssen. Für die einzelnen Kreise gilt

$$i_1 = C \cos(\omega_{\text{gleich}} t + \phi_{\text{gleich}}) + D \cos(\omega_{\text{diff}} t + \phi_{\text{diff}}) \quad (81)$$

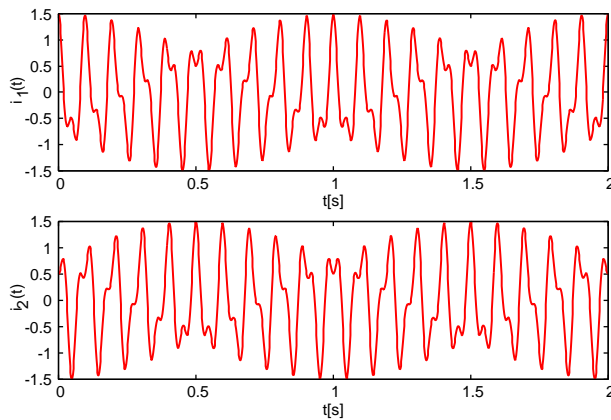
$$i_2 = C \cos(\omega_{\text{gleich}} t + \phi_{\text{gleich}}) - D \cos(\omega_{\text{diff}} t + \phi_{\text{diff}}), \quad (82)$$

mit den neuen Integrationskonstanten  $C = A/2$  und  $D = B/2$  (aus Gründen der Einfachheit).

**Aufgabe 16:** Ist der allgemeine Schwingungszustand von  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  periodisch? Unter welchen Bedingungen kann er nicht exakt periodisch sein?

## 2.8– Schwebung

Der Schwingungszustand von  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen.



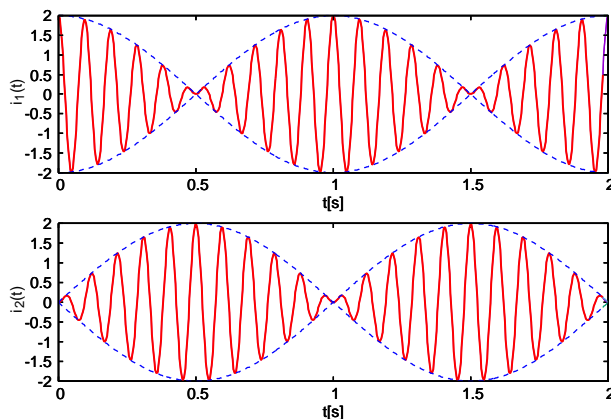
Aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen der Eigenmoden können sich die Amplituden der beiden Modi je nach Phasenlage addieren (**konstruktive Interferenz**) oder subtrahieren, (**destruktive Interferenz**). Die Amplituden und daher die Schwingungsenergie wechselt periodisch von einem Oszillator zum anderen.

Betrachten wir nun die Anfangsbedingung  $i_2(0) = di_2(0)/dt = 0$  und  $i_1(0) = \hat{i}_1$ ,  $di_1(0)/dt = 0$

$$i_1 = \frac{\hat{i}_1}{2} (\cos(\omega_{\text{gleich}}t) + \cos(\omega_{\text{diff}}t)) \quad (83)$$

$$i_2 = \frac{\hat{i}_1}{2} (\cos(\omega_{\text{gleich}}t) - \cos(\omega_{\text{diff}}t)). \quad (84)$$

In diesem Fall sind beide Eigenmoden gleich stark angeregt. Aus diesem Grund addieren sich die Eigenmodi im Fall konstruktiver Interferenz zur doppelten Amplitude und löschen sich im Fall destruktiver Interferenz vollständig aus. Man bezeichnet diesen Fall als **Schwebung**.



Die Schwingungen der einzelnen Kreise sind amplitudenmoduliert. Die Schwingungsenergie ist aufgrund der gewählten Anfangsbedingung anfänglich nur auf dem Strom  $i_1(t)$ . Durch die Kopplung wird  $i_2(t)$  mehr und mehr angeregt, bis nur noch  $i_2(t)$  schwingt und  $i_1(t)$  quasi in Ruhe ist. Nun beginnt das Spiel in umgekehrter Richtung.

Mithilfe der trigonometrischen Beziehung  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$  gilt

$$i_1 = \hat{i}_1 \cos(\omega_{\text{mittel}}t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (85)$$

$$i_2 = \hat{i}_1 \sin(\omega_{\text{mittel}}t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right). \quad (86)$$

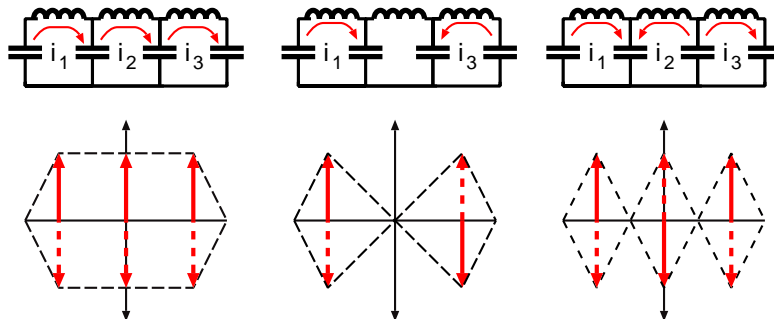
Die Kreise schwingen also mit der mittleren Frequenz  $\omega_{\text{mittel}} := (\omega_{\text{diff}} + \omega_{\text{gleich}})/2$ , die Amplitude ist mit der **Schwebungsfrequenz**  $\Delta\omega := (\omega_{\text{diff}} - \omega_{\text{gleich}})$  moduliert.

**Aufgabe 17:** Wie lautet die Energie des einzelnen Oszillators? Ist die Energie des ganzen Systems erhalten?

### 3 – Wellen

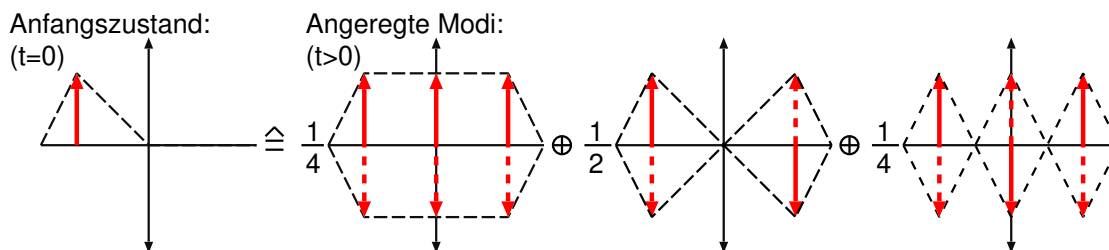
#### 3.1– Wellen durch gekoppelte Schwingkreise

Ein System mit 3 gekoppelten Oszillatoren besitzt auch 3 Eigenmodi.

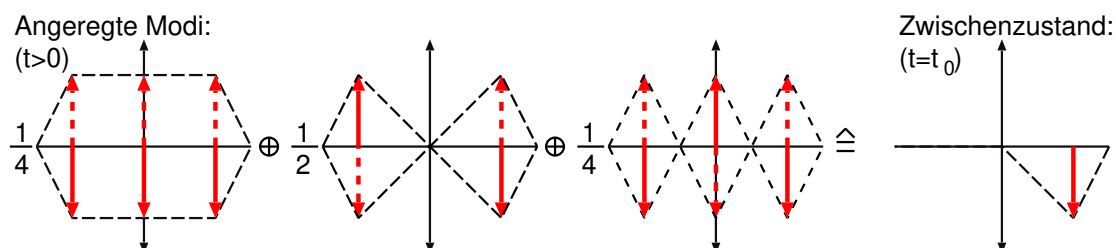


Die Grundschiwingung entspricht dem Fall in dem alle einzelnen Kreise synchron schwingen, die höchste Frequenz folgt, wenn jeweils benachbarte Kreise gegenphasig schwingen. Auf der mittleren Mode schwingen nur die äußeren Schwingkreise gegeneinander.

Die Verallgemeinerung der Schwebung auf Systeme mehrerer Eigenmodi ergibt ein erstes Modell eines Wellenleiters. Betrachten wir dazu den Anfangszustand ( $t = 0$ ) bei dem nur der linke Schwingkreis angeregt wird. Nachdem jeder Schwingungszustand nur eine Überlagerung der Eigenfrequenzen sein kann, entspricht dieser Anfangszustand der Überlagerung aller 3 Modi mit entsprechender Amplitude, siehe Abbildung.



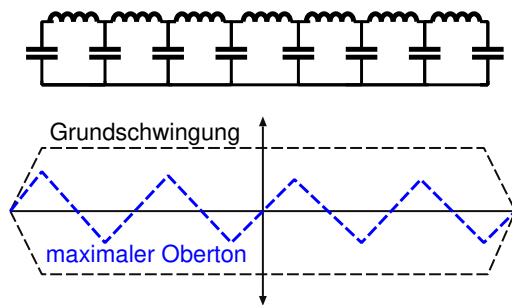
Jeder dieser angeregten Eigenmodi schwingt nun mit seiner Eigenfrequenz. Das Frequenzverhältnis der Eigenmodi hängt von der genauen Wahl der Induktivitäten und Kapazitäten ab. Betrachten wir den Fall in dem die beiden Oberschwingungen genau auf der doppelten bzw. dreifachen Grundfrequenz sind. Nach einer halben Periodenlänge der Grundfrequenz ist die Grundmode gerade bei maximal negativem Ausschlag, ebenso die zweite Oberschwingung, welche gerade 1.5 Schwingungsperioden durchlaufen hat, die erste Oberschwingung ist, nach einer vollen Periode, wieder im maximal positiven Ausschlag, siehe Abbildung. Die Überlagerung aller drei Modi ergibt ein Signal nur im rechten Schwingkreis. Nach einer weiteren halben Periodenlänge ist wieder der Ausgangszustand erreicht. Die Energie pendelt also zwischen dem linken und rechten Schwingkreis hin und her. Die Überlagerung der Eigenmodi ergibt eine laufende Welle entlang der LC-Kette, welche an den Enden jeweils vollständig reflektiert wird.



**Aufgabe 18:** Welches Schwingungsmuster resultiert, wenn zum Anfangszeitpunkt nur der mittlere Schwingkreis angestoßen wird? Wie sieht die zeitliche Entwicklung dieses Schwingungsmusters aus? Wie lässt sich das als Überlagerung von hin und her laufenden Wellen interpretieren?

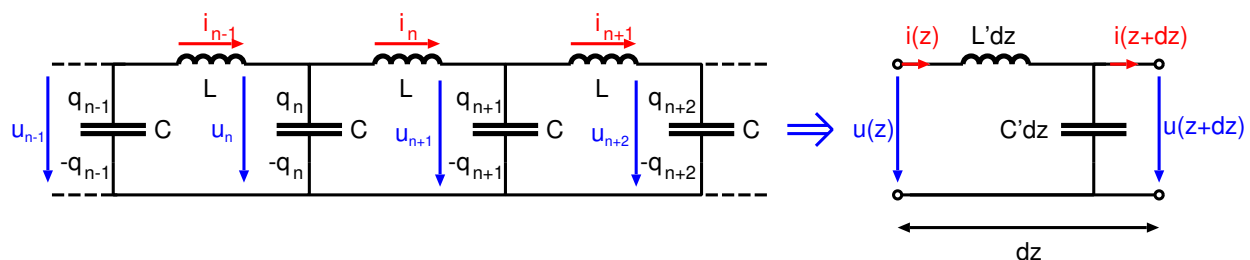
### n-Gekoppelte Schwingkreise, Leiterbahn

Ein System mit  $n$  gekoppelten Oszillatoren besitzt analog auch  $n$  Eigenmoden.



Die Grundschwingung entspricht dem Fall in dem alle einzelnen Kreise synchron schwingen, also einem räumlichen Muster einer halben Sinuswelle. Die 1. Oberwelle entspricht dem räumlichen Muster eines vollen Sinus (halbe Wellenlänge der Grundmode), die 2. Oberwelle entsprechend einem Drittel der Wellenlänge und so weiter. Die maximale Frequenz (siehe Abbildung) entspricht  $n/2$  Sinuswellen.

Betrachten wir nun den Grenzfall unendlich vieler kleiner gekoppelter Schwingkreise, also einer **idealen Leiterbahn** mit konstanter Induktivität pro Länge,  $L'$ , und konstanter Kapazität pro Länge,  $C'$ . Wir berechnen den Fall, indem wir die  $LC$ -Schwingkreise einer unendlich langen Kette in immer kleinere  $LC$  Schwingkreise zerlegen. Im Grenzfall unendlich kleiner  $LC$  Schwingkreise wird es sinnvoll, die Position durch eine kontinuierliche (Orts-)Variable  $z$  entlang der Kette anzugeben. Die Induktivität jedes Abschnittes  $dz$  beträgt  $L'dz$ , die Kapazität  $C'dz$ .



Eine infinitesimale Zelle ist oben rechts dargestellt. Die Knoten- und Maschenregel ergeben

$$u(t, z) - u(t, z + dz) = L'dz \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) \quad (87)$$

$$i(t, z) - i(t, z + dz) = C'dz \frac{\partial}{\partial t} u(t, z + dz). \quad (88)$$

Unter Verwendung der Taylorentwicklung bis zum linearen Glied,  $u(t, z + dz) \approx u(t, z) + \partial_z u(t, z) dz$  und  $i(t, z + dz) \approx i(t, z) + \partial_z i(t, z) dz$  folgt in linearer Ordnung  $dz$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} u(t, z) = -L' \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) \quad (89)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} i(t, z) = -C' \frac{\partial}{\partial t} u(t, z). \quad (90)$$

Die Kombination beider Gleichungen führt schliesslich zu den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, z) = \frac{1}{L'C'} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(t, z) \quad (91)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} i(t, z) = \frac{1}{L'C'} \frac{\partial^2}{\partial z^2} i(t, z). \quad (92)$$

Die materialabhängige Konstante  $c := 1/\sqrt{L'C'}$  hat die Dimension einer Geschwindigkeit.

**Aufgabe 19:** Wie lautet die Grundschwingung einer  $LC$ -Leitung mit Länge  $l$  wenn beide Enden offen ( $i(t, 0) = i(t, l) = 0$ ), und wie wenn sie kurzgeschlossen sind ( $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ )?

### 3.2– Wellengleichung

Die Differentialgleichung der idealen Leiterbahn ist ein Beispiel der **Wellengleichung**,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) q(t, z) = 0 \quad (93)$$

mit der konstanten Wellengeschwindigkeit  $c$  und der allgemeinen Zustandsgröße  $q(t, z)$ . Im Fall von mechanischen Wellen, kann die Zustandsgröße z.B. die Auslenkung eines Seiles oder der ortsabhängige Druck einer Luftsäule sein. Im Falle elektrischer Wellen entlang eines Leiters ist die Zustandsgröße z.B. die Spannung oder der Strom entlang der Leitung, im Falle elektromagnetischer Wellen das elektrische  $\vec{E}$  oder das magnetische Feld  $\vec{B}$ .

Die Wellengeschwindigkeit  $c$  ist in unserem Beispiel eine Konstante. Dadurch hängt die Lösung der Wellengleichung, Gleichung (93), nur von der Variablen  $z \pm ct$  ab, die Form des Wellenpaketes bleibt erhalten. Wellenleiter mit dieser Eigenschaft nennt man **dispersionsfrei**.

Wir zeigen, dass jede Funktion  $f(z \pm ct)$  die Wellengleichung löst:

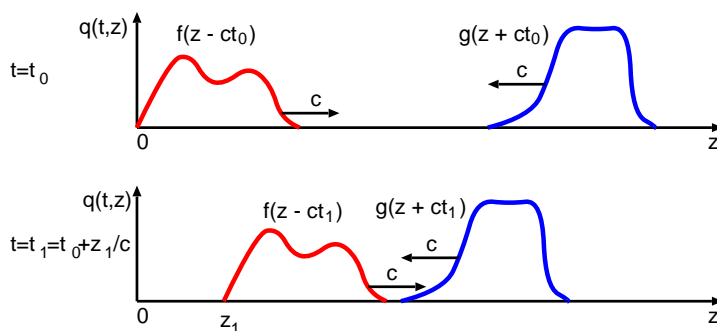
$$q(t, z) = Af(z - ct) + Bg(z + ct) \quad (94)$$

für beliebige Funktionen  $f(z - ct)$  und  $g(z + ct)$ ,  $A$  und  $B$  sind Integrationskonstante. Die Funktion  $f(z - ct)$  beschreibt die Auslenkung einer in positiver  $z$ -Richtung laufenden Welle,  $g(z + ct)$  läuft in negative  $z$ -Richtung. Zweimalige Ableitung nach  $z$  und  $t$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t^2} q(t, z) = c^2 (Af''(z - ct) + Bg''(z + ct)) \quad (95)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2} q(t, z) = (Af''(z - ct) + Bg''(z + ct)). \quad (96)$$

Einsetzen in die Wellengleichung (93) bestätigt die Lösung (94).



Der Wellenberg  $f(z - ct)$  bewegt sich mit Geschwindigkeit  $c$  nach rechts, der Wellenberg  $g(z + ct)$  mit Geschwindigkeit  $c$  nach links. Nachdem die Wellengeschwindigkeit in diesem Fall konstant ist, bewegen sich alle Fourierkomponenten mit der gleichen Geschwindigkeit und die Form der Pakete bleibt erhalten.

Die **Wellengleichung im 3-dimensionalen Raum** lautet analog zum 1-dimensionalen Fall:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) q(t, x, y, z) = 0 \quad (97)$$

Die Wellengleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der **Laplace-Operator**  $\Delta$  stellt die Verallgemeinerung der zweiten räumlichen Ableitung in alle Raumrichtungen dar und lautet in kartesischen Koordinaten

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (98)$$

**Aufgabe 20:** Was passiert wenn zwei 1-dim Wellen mit unterschiedlicher Richtung aufeinandertreffen, vgl. Abbildung? Wie lauten die Wellen beim und nach dem Aufeinandertreffen?

### 3.3– Elektromagnetische Wellen

Die **Maxwell-Gleichungen** beschreiben die Dynamik elektromagnetischer Felder. Wir betrachten hier nur homogene ladungsfreie Medien, d.h. die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die magnetische Leitfähigkeit  $\mu$  sind ortonunabhängig, und es gibt keine freien Ladungen und Ströme:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (99)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (100)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (101)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (102)$$

$\vec{E}$  ist die elektrische Feldstärke,  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  die elektrische Flussdichte,  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  die magnetische Flussdichte. Bildet man die Rotation des Faraday'schen Induktionsgesetzes (101) bzw. des Ampère-Gesetzes (102) folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \mu \vec{H}) \quad (103)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = +\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \epsilon \vec{E}). \quad (104)$$

Im homogenen Medien kann  $\epsilon$  und  $\mu$  vor die Ableitung gezogen werden, die linke Seite wird mit der Beziehung  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$  vereinfacht. Mit Verwendung des Gauß-Gesetzes (99) und des Ampère-Gesetzes (102) für die erste Gleichung (103) und mit Verwendung der Quellfreiheit des  $\vec{B}$ -Feldes (100) und des Faraday'schen Induktionsgesetzes (101) für die zweite Gleichung (104) folgen die **Wellengleichungen der elektromagnetischen Felder**:

$$\left[ \Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = 0 \quad (105)$$

$$\left[ \Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{B} = 0 \quad (106)$$

Die Dielektrizitätskonstante setzt sich aus der relativen Dielektrizitätskonstanten des Mediums,  $\epsilon_r$ , und der Permittivität des Vakuums,  $\epsilon_0$ , zusammen,  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ . Ebenso ist die magnetische Leitfähigkeit mit der Permittivität des Vakuums  $\mu_0$  über die Materialkonstante  $\mu_r$  verknüpft,  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum steckt in den Permittivitäten des Vakuums

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99793 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (107)$$

Mit der Abkürzung  $n := \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , genannt **Brechungsindex**, erhalten wir die Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{n^2} \Delta \right) q(t, x, y, z) = 0. \quad (108)$$

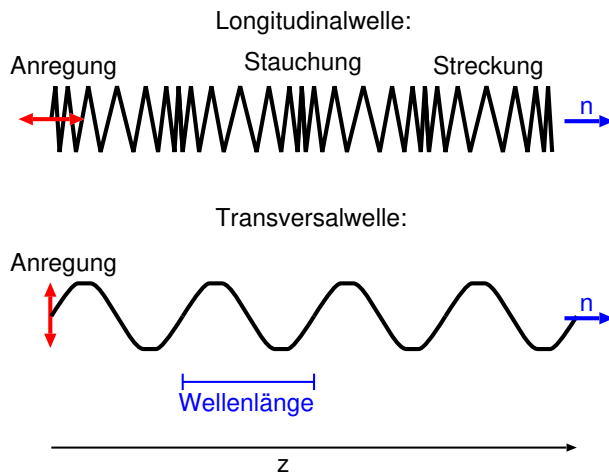
Das elektrische und magnetische Feld erfüllen also die 3-dimensionale Wellengleichung mit der Wellengeschwindigkeit  $c/n$ . Im Kapitel Optik gehen wir näher darauf ein.

**Aufgabe 21:** Was folgt für die Lichtgeschwindigkeit in Dielektrika ( $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r > 1$ )?

### 3.4– Polarisation

#### Longitudinal-und Transversalwellen

Wellenpakete von laufenden Wellen im Raum breiten sich entlang einer definierten Richtung  $\vec{n}$  aus. Die Schwingungsebene der Welle kann in Richtung der Ausbreitung, **Longitudinalwelle**, oder orthogonal dazu sein, **Transversalwelle**. Man spricht von **longitudinaler** bzw. **transversaler Polarisation**.



**Longitudinalwellen** schwingen in Richtung der Ausbreitung. Die Auslenkung  $q(t, z)$  zeigt sich in Form von Stauchungen und Streckungen entlang der Ausbreitung. Beispiele dafür sind Longitudinalwellen entlang einer Feder, Schallwellen (d.h. Druckwellen) oder Stoßwellen im Festkörper.

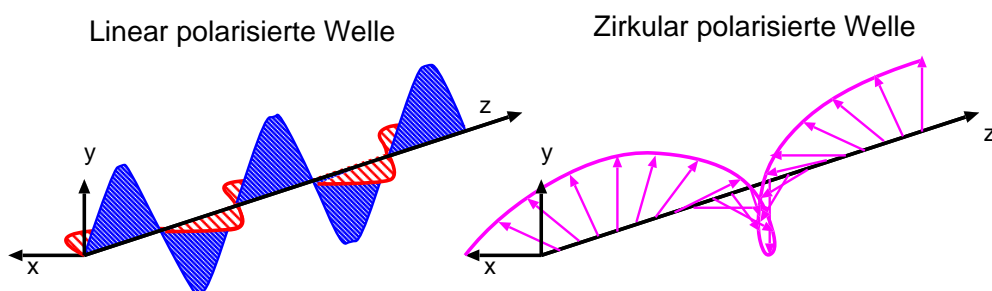
**Transversalwellen** schwingen in einer Ebene orthogonal zur Ausbreitungsrichtung. Beispiele dafür sind elektromagnetische Wellen, Wellen entlang eines Seils oder Scherwellen in Festkörpern.

In gewissen Medien (Feder, Festkörper) können auch beide Arten von Wellen gleichzeitig vorliegen.

#### Arten von transversaler Polarisation

Bei Transversalwellen ist nur die Ebene der Auslenkung (orthogonal zur Ausbreitung) eindeutig bestimmt. Variiert die Richtung der Auslenkung innerhalb dieser Ebene in zufälliger Weise, spricht man von einer **unpolarisierten Welle**.

Eine **linear polarisierte Welle** schwingt in einer fixen Richtung innerhalb der Transversalebene, z.B. in der  $x$ -Richtung oder der  $y$ -Richtung in der Abbildung. Die Überlagerung linear polarisierter Wellen mit gleicher Phasenlage  $\Phi$  ergibt wieder eine linear polarisierte Welle. Die Amplitudenvektoren addieren sich zur resultierenden Welle.



Eine **zirkular polarisierte Welle** ergibt sich, wenn zwei orthogonal linear polarisierte Wellen mit Phasendifferenz  $\Delta\phi = \pm\pi/2$  addiert werden. Der resultierende Amplitudenvektor beschreibt eine Ellipse in der Schwingungsebene. Es resultiert eine Schraubenlinie in Raum und Zeit. Je nach Drehsinn unterscheidet man recht- und linkszirkular polarisierte Wellen.

**Aufgabe 22:** Was ergibt die Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle gleicher Amplitude?

### 3.5– Ebene Wellen

Eine besonders einfache Klasse von Lösungen der Wellengleichung im Raum (97) sind **ebene Wellen** in eine bestimmte Richtung  $\hat{k}$ . In diesem Fall sind die **Wellenfronten**, also die Punkte mit dem gleichen Schwingungszustand, Ebenen, orthogonal zur Ausbreitungsrichtung. Eine ebene Welle mit Frequenz  $\omega$  ist gegeben durch

$$\vec{q}(t, \vec{x}) := \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + \vec{B} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t). \quad (109)$$

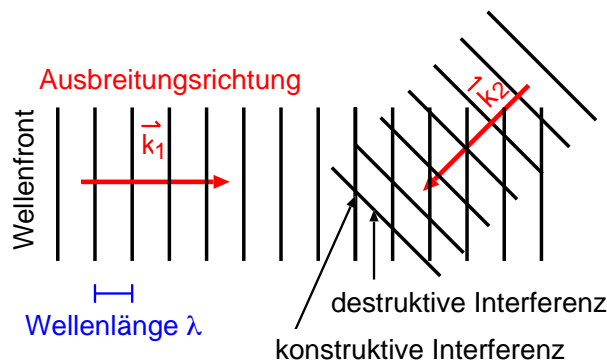
Der erste Beitrag ist die Welle in Richtung  $\hat{k}$ , der zweite Beitrag ist die Welle in Richtung  $-\hat{k}$ . Eingesetzt in die Wellengleichung (97) folgt

$$k = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \frac{\omega}{c}. \quad (110)$$

Der Vektor  $\vec{k}$  entspricht der 'räumlichen Frequenz' der Welle und wird als **Wellenvektor** bezeichnet. Der Wellenvektor zeigt in Richtung der Wellenausbreitung und hängt direkt mit der Wellenlänge  $\lambda$  zusammen,

$$k := \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (111)$$

Für Transversalwellen ist die Amplitude orthogonal zum Wellenvektor,  $\vec{k} \cdot \vec{q} = 0$ , bei Longitudinalwellen sind die beiden Größen parallel.



Ebene Wellen (109) können mithilfe der Euler'schen Formel  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  besonders einfach dargestellt werden. Der Realteil entspricht hier der ursprünglichen Formel (109),

$$\vec{q}(t, \vec{x}) := \vec{C} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{D} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)}. \quad (112)$$

Bisher wurden nur ebene Wellen mit bestimmter Frequenz und Wellenzahl betrachtet. Allgemeine Wellenfronten setzen sich aus Beiträgen unterschiedlicher Frequenzen und Wellenlängen zusammen. Mithilfe der Fourier-Zerlegung kann jede allgemeine Wellenfront in eine Summe ebener Wellen zerlegt werden. Jede räumliche Welle kann wie folgt geschrieben werden:

$$f(t, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \tilde{f}(\omega, \vec{k}), \quad (113)$$

$\tilde{f}(\omega, \vec{k})$  sei die Fourierkomponente zur Frequenz  $\omega$  und Wellenzahl  $\vec{k}$ .

**Aufgabe 23:** Erfüllt die allgemeine Wellenfront (113) die Wellengleichung (97)?



### Dispersionsrelation eines einfachen Wellenleiters

Die Wellengleichung (97) für 3-dim Wellen kann, wie vorhin beschrieben, durch eine Überlagerung ebener Wellen gelöst werden. Betrachten wir hierzu, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, eine **ebene Welle** mit gegebener Kreisfrequenz  $\omega$  in Richtung  $\vec{n}$  mit Wellenzahl  $k$ ,

$$\vec{k} := \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}. \quad (114)$$

Der Ansatz für die ebene Welle mit beliebigem  $\omega$  und  $\vec{k}$  lautet nun, siehe auch Gleichung (112)

$$\vec{q}(t, \vec{x}) := \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (115)$$

Eine 3-dim ebene Welle wird also durch die Frequenz  $\omega$  (für das zeitliche Verhalten) und den Wellenvektor  $\vec{k}$  (für das räumliche Verhalten) vollständig charakterisiert. Einsetzen in die Wellengleichung (97) zeigt, dass Wellenvektor  $\vec{k}$  und Kreisfrequenz  $\omega$  eine zusätzliche Bedingung erfüllen müssen,

$$\omega^2 \stackrel{!}{=} c^2 \vec{k}^2. \quad (116)$$

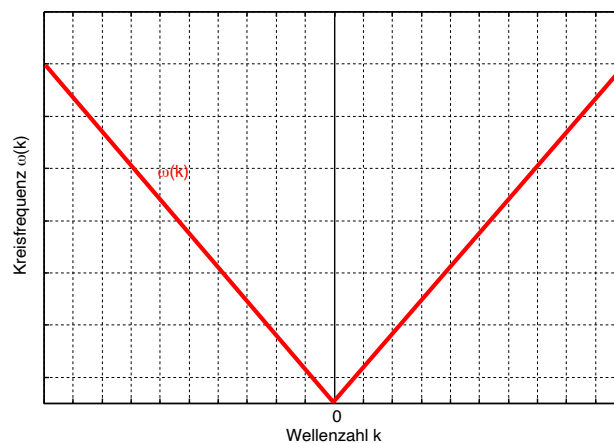
Wird die Kreisfrequenz durch die zeitliche Periodenlänge  $T$  und die Wellenzahl durch die 'räumliche Periodenlänge', die **Wellenlänge**  $\lambda$  ausgedrückt, erhalten wir wie erwartet

$$\lambda \stackrel{!}{=} cT, \quad (117)$$

die Wellenlänge ist also gerade die Strecke, die die Welle (der Geschwindigkeit  $c$ ) in einer Periode zurücklegt. Die notwendige Bedingung zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor des gegebenen Wellenleiters

$$\omega = v|\vec{k}| \quad (118)$$

heißt **Dispersionsrelation**, das Vorzeichen der Wellenzahl entspricht der vor- bzw. rücklaufenden Welle.

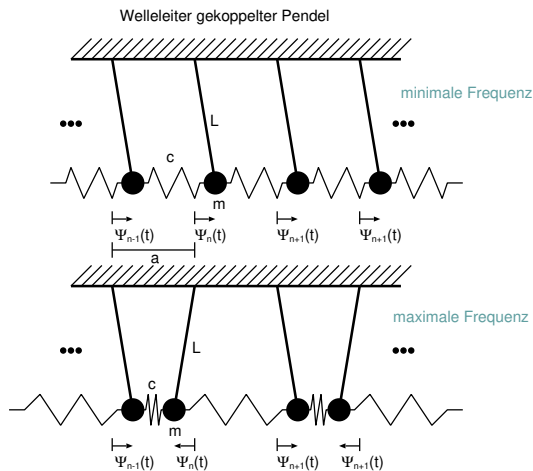


Bei komplizierteren Wellenleitern (Perlenketten, Pendelketten, Wellenfunktionen im Festkörper), siehe Vorlesung Halbleitertechnik, kann die Lösung ebenfalls in gleicher Weise durch den Ansatz ebener Wellen (112) gelöst werden. Die Wellengleichung ist in diesem Fall aber eine kompliziertere Differentialgleichung, welche zeitliches und räumliches Verhalten der Welle miteinander verknüpft, und daher einen notwendigen Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor ergibt. Die **Dispersionsrelation** eines beliebigen Wellenleiters,  $\omega(\vec{k})$ , definiert folglich den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor aller möglichen ebenen Wellen und charakterisiert die Eigenschaften des betrachteten Wellenleiters.

**Aufgabe 24:** Leite die Dispersionsrelation des 3-dimensionalen Wellenleiters, Gleichung (118), durch Einsetzen in die Wellengleichung (97) her.

## Dispersionsrelationen mit oberer und unterer Grenzfrequenz

Die bisher betrachteten Wellenleiter erlauben ebene Wellen beliebiger Frequenz  $\omega$ , solange Gleichung (118) eingehalten wird. Ein mechanischer Wellenleiter mit komplizierterer Dispersionsrelation ist die **Pendelkette**, also eine Kette von Pendeln der Masse  $m$  im Abstand  $a$ , welche mit Federn  $c$  gekoppelt sind.



Die Physik der Schwingungen ist leicht zu verstehen:

- Die minimale Frequenz entspricht der Pendelfrequenz

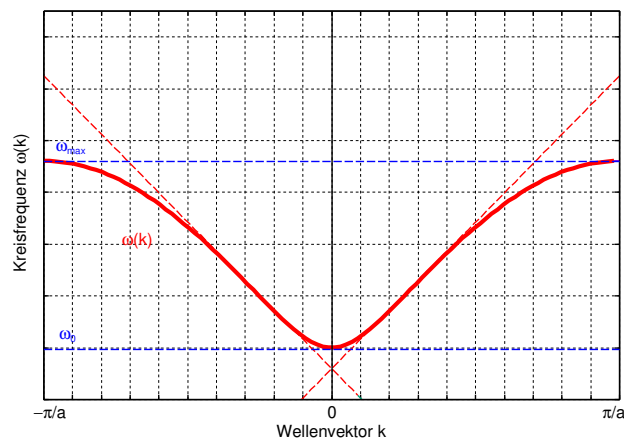
$$\omega_0^2 := \frac{g}{L}. \quad (119)$$

- Die maximal mögliche Frequenz entspricht dem Fall antiparallel schwingender Pendel, d.h. es addiert sich die Pendelkraft zur Federkraft

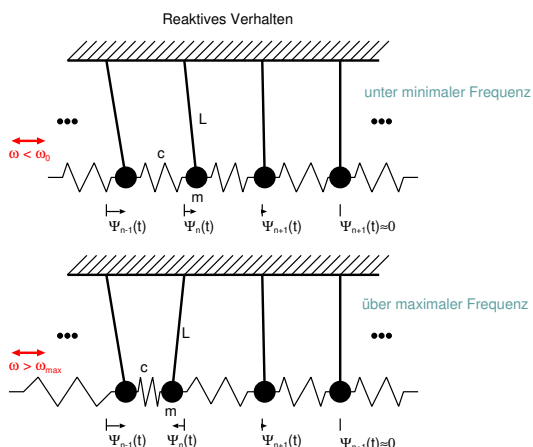
$$\omega_{\max}^2 = \frac{g}{L} + \frac{4c}{m}. \quad (120)$$

Die Pendelkette erlaubt folglich nur ebene Wellen mit Frequenzen  $\omega \in [\omega_0, \omega_{\max}]$ , d.h. Wellenlängen im Bereich  $\lambda \in [\infty, 2a]$ , bzw. Wellenzahlen im Bereich  $|k| \in [0, 2\pi/a]$ .

Die entsprechende **Dispersionsrelation** mit dem **dispersiven Band**  $[\omega_0, \omega_{\max}]$  sei hier nur angeführt,



Was passiert bei einer Anregung der Pendelkette mit Frequenzen ausserhalb des **dispersiven Bandes**?



Die Pendelkette zeigt **reaktives Verhalten**:

- Bei Frequenzen unterhalb der minimalen Frequenz,  $\omega < \omega_0$ , folgt jedes Pendel der Auslenkung des Vorgängers, erreicht aber nur eine kleinere Amplitude. Die Pendel schwingen **in Phase** mit **exponentiell abklingender Amplitude**, siehe Abbildung
- Bei Frequenzen oberhalb der maximalen Frequenz,  $\omega > \omega_{\max}$ , versucht jedes Pendel der Auslenkung des Vorgängers gegengleich zu folgen, erreicht die volle Amplitude aber nicht rechtzeitig. Die Pendel schwingen **gegenphasig** mit **exponentiell abklingender Amplitude**, siehe Abbildung.

**Aufgabe25:** Erkläre das reaktives Verhalten mit den getriebenen harmonischen Oszillator.

### 3.6– Stehende Wellen

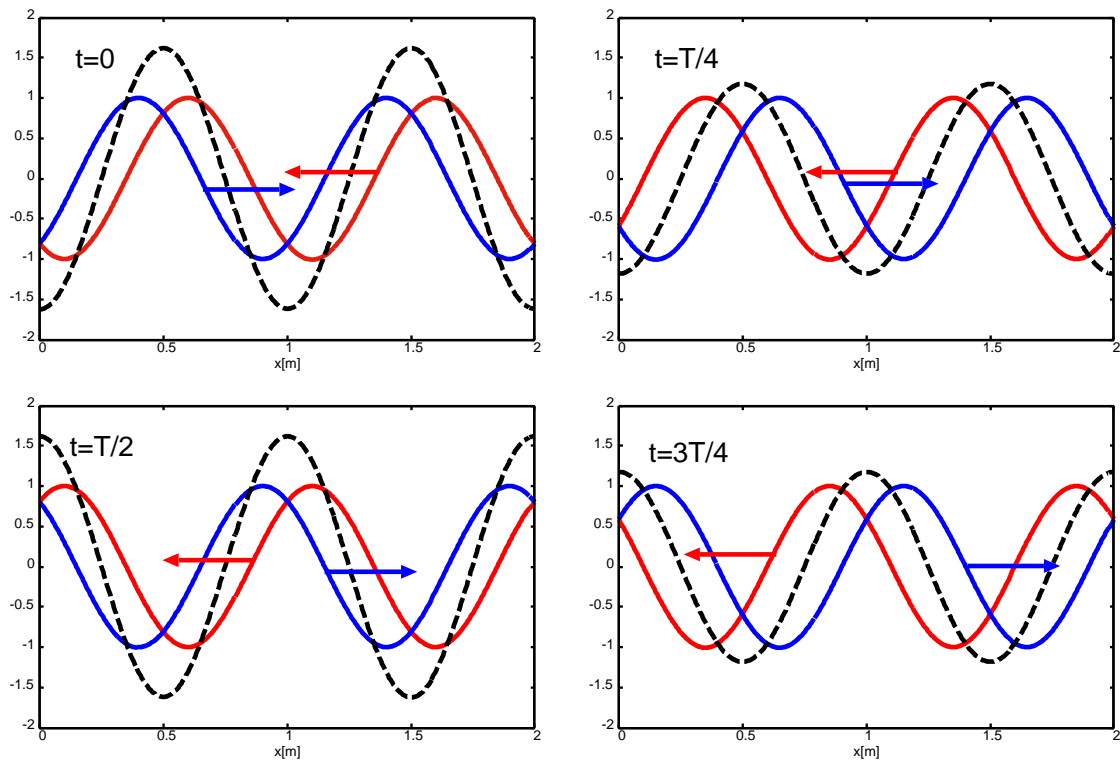
Betrachten wir die Interferenz von zwei gegenläufigen Wellen gleicher Amplitude und Frequenz: An den Orten aufeinandertreffender Wellenberge tritt **konstruktive Interferenz** auf, bei Aufeinandertreffen vom Wellenberg einer Welle mit dem Wellental der anderen Welle tritt **destruktive Interferenz** auf. Die Summe der Wellen lautet (ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurden die Amplituden gleich 1 gesetzt),

$$q(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)}. \quad (121)$$

Der Faktor  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  kann herausgehoben werden. Unter Verwendung der Euler'schen Formel folgt eine zeitliche Abhängigkeit von  $\cos \omega t$ . Der Realteil der Welle ergibt sich schliesslich zu

$$q(t, \vec{x}) = 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) \cos(\omega t). \quad (122)$$

Im Gegensatz zu den ursprünglichen gegenläufigen Wellen handelt es sich hier um eine **stehende Welle**. Die raumfesten Schwingungsknoten liegen an den Nullstellen des ersten Terms.

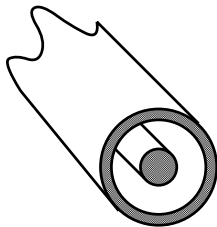


Die Summe einer rechtsläufigen Welle (blau) und einer linksläufigen Welle (rot) gleicher Frequenz und Amplitude ergibt eine stehende Welle (schwarz gestrichelt) mit raumfesten Schwingungsknoten. Stehende Wellen entsprechen den Eigenmodi eines Wellenleiters, siehe Kapitel der gekoppelten Schwingkreise.

**Aufgabe 26:** Welche stehenden Wellen bilden sich an einem Wellenleiter der Länge  $l$  bei offenen Enden, und bei Kurzschluss an den Enden?

### 3.7– Wellenimpedanz und Reflexion

Trifft eine Welle auf ein Hindernis oder auf das Ende des Wellenleiters wird zumindest ein Teil der Welle reflektiert. Wie betrachten hierzu einen elektrischen Wellenleiter, z.B. ein Koaxialkabel mit Innendurchmesser  $r$ , Aussendurchmesser  $R$ , gefüllt mit einem Dielektrikum  $\epsilon$ .



Der Kapazitätsbelag  $C'$  folgt sofort aus den Maxwell-Gleichungen,

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln R/r}. \quad (123)$$

Der Induktivitätsbelag  $L'$  lässt sich in ähnlicher Weise berechnen

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln R/r. \quad (124)$$

Die Strom- und Spannungswelle entlang des Wellenleiters sind laut Gleichung (94):

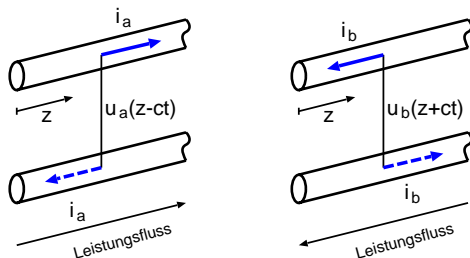
$$u(t, z) = u_a(z - ct) + u_b(z + ct) \quad (125)$$

$$i(t, z) = i_a(z - ct) - i_b(z + ct) \quad (126)$$

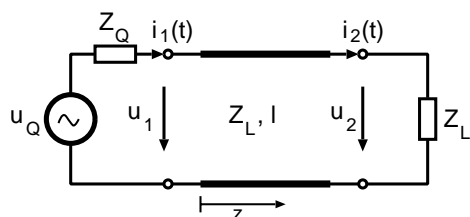
(Beachte das '-' in der Stromgleichung). Setzen wir diesen Ansatz in Gleichung (90) erhalten wir für die Spannungs- und die Stromamplitude der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle

$$\frac{u_a(t, z)}{i_a(t, z)} = \frac{u_b(t, z)}{i_b(t, z)} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} =: Z_W. \quad (127)$$

Strom- und Spannungswelle sind durch eine leiterspezifische Impedanz der sogenannten **Wellenimpedanz**  $Z_W$  direkt miteinander verknüpft.



Die Spannungswelle  $u_a$  in  $z$ -Richtung ist mit einem Leitungsstrom  $i_a = u_a/Z_W$  verbunden und daher mit einem Leistungsfluss in positiver  $z$ -Richtung. Die Spannungswelle  $u_b$  in  $-z$ -Richtung ist mit einem Leitungsstrom  $i_b = u_b/Z_W$  verbunden und daher mit einem Leistungsfluss in negativer  $z$ -Richtung.



Das Verhältnis zwischen reflektierter und einfallender Welle, der **Reflexionsfaktor**  $\Gamma$ , eines Wellenleiters mit Abschlussimpedanz  $Z_L$  folgt direkt aus dem Ohm'schen Gesetz und Gleichung (126),

$$\Gamma := \frac{u_b(l)}{u_a(l)} = \frac{Z_L - Z_W}{Z_L + Z_W}. \quad (128)$$

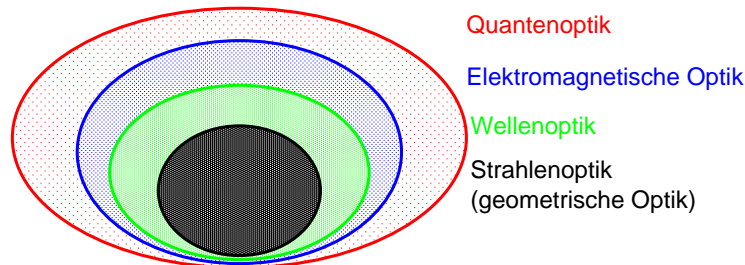
Im Falle eines Kurzschlusses  $Z_L = 0$  wird die Welle vollständig reflektiert mit umgekehrtem Vorzeichen in der Amplitude. Im Falle eines offenen Endes wird die Welle ohne Phasensprung reflektiert. Im Falle idealer Wellenanpassung,  $Z_L = Z_W$  wird keine Welle reflektiert,  $r \equiv 0$ .

**Aufgabe 27:** Wie lauten die betrachteten Grenzfälle der Reflexion für die Stromwelle? Wie lauten Wellengeschwindigkeit und Wellenimpedanz für das Koaxialkabel?

## 4 – Optik

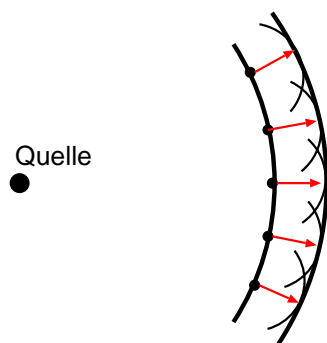
Elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich von 380nm bis 780nm kann mit dem menschlichen Auge wahrgenommen werden und wird als **Licht** bezeichnet. Die Lehre der Erzeugung und Ausbreitung von Licht, sowie der Wechselwirkung von Licht mit Materie nennt man **Optik**.

Die Optik wird je nach benötigter Detaillierung in verschiedene Teilgebiete unterteilt:



Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie auf atomarer Ebene wird von der **Quantenoptik** beschrieben, die zugrundeliegende Theorie ist die **Quanten-Elektrodynamik**, eine der 4 fundamentalen Theorien der Physik. Quantenoptik ist die umfassendste Beschreibung optischer Phänomene und wird z.B. zur Berechnung von Lasern benötigt. Im Rahmen dieser Vorlesung wird nicht weiter darauf eingegangen.<sup>a</sup>

### Huygen'sches Prinzip



Die **Elektromagnetische Optik** beschreibt Licht als klassische elektromagnetische Welle mit transversalem elektrischem und magnetischem Feld. Die Grundlage dafür sind die Maxwell-Gleichungen. Elektromagnetische Optik wird zum Beispiel benötigt um Polarisation zu verstehen.

Oft kann der Vektorcharakter der elektromagnetischen Strahlung vernachlässigt werden und es genügt im Rahmen der **Wellenoptik** die Beschreibung als skalare Welle. Jeder Punkt einer Wellenfront wird als Ausgangspunkt einer Elementarwelle gesehen, die Einhüllende dieser Elementarwellen bildet die neue Wellenfront (**Huygen'sches Prinzip**).

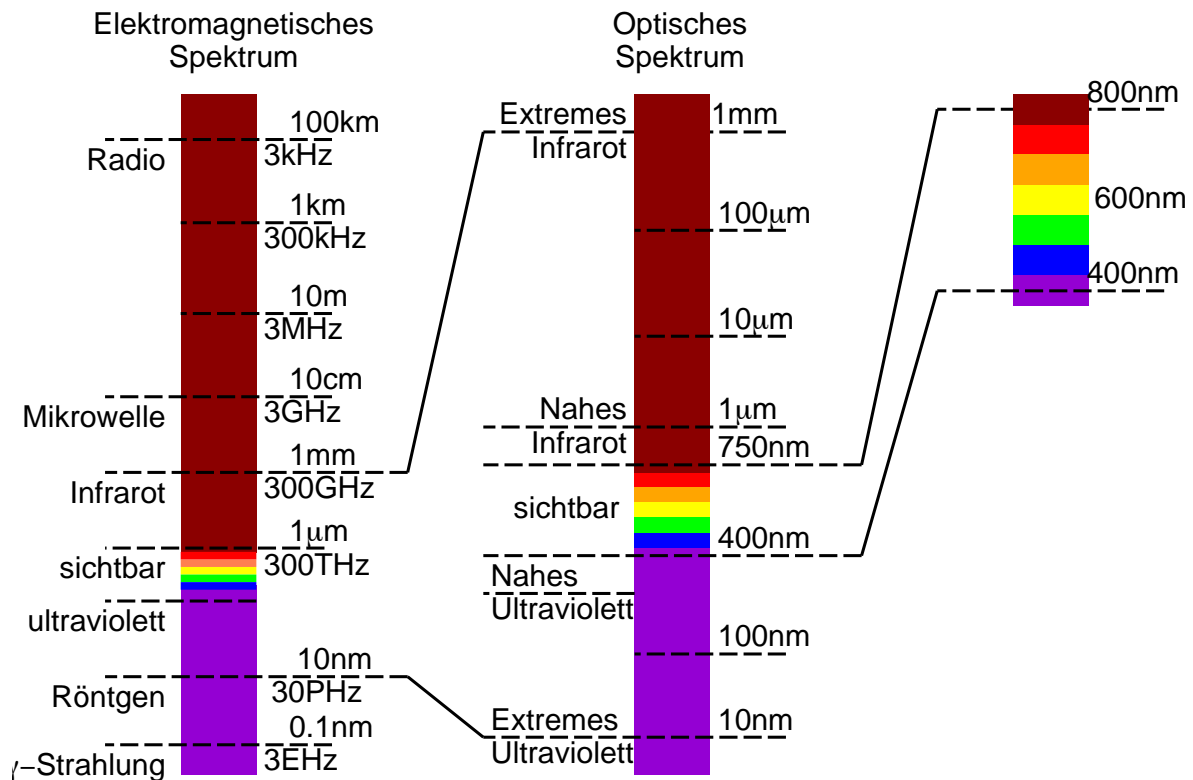
Die Wellennatur des Lichtes kann für Objekte, die deutlich größer als die Wellenlänge  $\lambda$  sind, vernachlässigt werden. Es genügt in diesem Fall eine optische Beschreibung in Form von geraden Lichtstrahlen im Rahmen der **Strahlenoptik** oder auch **Geometrischen Optik**. Zum Verständnis optischer Geräte wie Mikroskope und Fernrohre ist die geometrische Optik meist ausreichend.

**Aufgabe 28:** Wie sieht nach dem Huygen'schen Prinzip der Durchgang einer ebenen Welle mit Wellenlänge  $\lambda$  durch eine Lochblende mit Öffnung  $d$  aus, falls  $d \approx \lambda$  und falls  $d \gg \lambda$ ? In welchem Fall gilt die Strahlenoptik?

<sup>a</sup>Siehe z.B. R. P. Feynman: QED Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie

### Spektrum elektromagnetischer Wellen

Die Gesetzmäßigkeiten der Optik gelten prinzipiell für elektromagnetische Strahlung jeder Wellenlänge. Elektromagnetische Strahlung tritt je nach Wellenlänge  $\lambda$  (und Frequenz  $f = c_0/\lambda$ ) in unterschiedlichsten Bereichen auf:



Das sichtbare optische Licht ist ein kleiner Ausschnitt des elektromagnetischen Spektrums. Licht in einem bestimmten Frequenzbereich wird als Farbe wahrgenommen, die Überlagerung von Licht aller Wellenlängen als weiß.

Farbe	Frequenz $f$ ( $10^{12}$ Hz)	Wellenlänge $\lambda$ (nm= $10^{-9}$ m)
Violett	659...769	455...390
Blau	610...659	492...455
Grün	520...610	577...492
Gelb	503...520	597...577
Orange	482...503	622...597
Rot	384...482	780...622

**Aufgabe 29:** Wie groß ist die Wellenlänge eines UKW-Signals mit 93.3MHz? Wie groß sind daher UKW-Antennen?

#### 4.1– Elektromagnetische Optik

Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen wurde bereits in Gleichung (108) abgeleitet:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{n^2} \Delta\right) \vec{E}(t, z) = 0 \quad (129)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{n^2} \Delta\right) \vec{B}(t, z) = 0 \quad (130)$$

Eine einfache Lösung einer bestimmten Frequenz  $\omega$  ist die ebene Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}$ ,

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (131)$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (132)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung folgt, dass Frequenz  $\omega$  und Wellenzahl  $\vec{k}$  über eine sogenannte **Dispersionsrelation** miteinander verknüpft sind:

$$\omega \equiv c \left| \vec{k} \right|. \quad (133)$$

Die Welle ist **transversal** wie man durch Einsetzen in das Gauß-Gesetz (99) sieht

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = i \epsilon \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (134)$$

Die Auslenkung des elektrischen Feldes  $\vec{E}_0$  steht immer orthogonal zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ . Das Magnetfeld  $\vec{B}$  ist über das Induktionsgesetz (101) mit dem elektrischen Feld verknüpft,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (135)$$

Unter Verwendung der **Dispersionsrelation**  $k = \omega/c$  und des Richtungsvektors  $\hat{k} := \frac{\vec{k}}{k}$  folgt

$$c \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \hat{k}. \quad (136)$$

Elektrisches Feld und magnetisches Feld bilden, zusammen mit der Ausbreitungsrichtung  $\hat{k}$ , ein orthogonales Dreibein, wobei  $c B_0 = E_0$ . Eine elektromagnetische Welle ist demnach eine **Transversalwelle** bei der elektrisches und magnetisches Feld orthogonal zueinander stehen.

Die **Energiedichte**  $w$  von Licht (also die Energie pro Volumen) folgt aus der Summe der elektrischen  $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$  und der magnetischen Energiedichte  $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ ,

$$w = \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu} |\vec{B}|^2. \quad (137)$$

Einsetzen der Lösung (136) zeigt, dass die Hälfte der Energie jeweils in elektrischer und die andere Hälfte in magnetischer Form vorliegt. Die Energie, die eine elektromagnetische Welle pro Zeit und Fläche transportiert, wird durch den **Poynting-Vektor**  $\vec{S}$  ausgedrückt,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (138)$$

Der Energiefluss zeigt also in Richtung der Ausbreitung  $\hat{k}$ . Der mittlere Energiefluss einer elektromagnetischen Welle ist die Intensität, d.h. die Leistung pro Fläche,

$$I := \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu}. \quad (139)$$

**Aufgabe 30:** Die Intensität der Sonnenstrahlung oberhalb der Erdatmosphäre beträgt  $1350 \text{ W/m}^2$ . Wie groß ist  $E_0$  und  $B_0$  unter der Annahme, dass es sich um eine ebene Welle handelt?

## 4.2– Geometrische Optik

Die Strahlenoptik oder geometrische Optik ist die einfachste Art die Ausbreitung, Reflexion und Refraktion (Brechung) von Licht zu beschreiben und gilt solange die Wellenlänge gegenüber der Größe der vorkommenden Objekte vernachlässigt werden kann. Geometrische Optik beruht auf folgenden Postulaten:

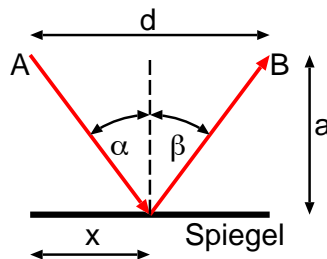
- Licht breitet sich in **Strahlen** aus, die von Lichtquellen emittiert werden und detektiert werden können.
- Jedes optische Medium wird mit einem **Brechungsindex**  $n \geq 1$  charakterisiert. Der Brechungsindex gibt die Reduktion der Lichtgeschwindigkeit im Medium  $c$  relativ zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c_0$  an,  $c = c_0/n$ . Die Zeit, in der ein Lichtstrahl die Strecke  $d$  zurücklegt, wird als **optische Pfadlänge** bezeichnet,  $d/c = nd/c_0$ . (Treffender wäre die Bezeichnung "Flugdauer".)
- In inhomogenen Medien mit  $n(\vec{x})$  ist die optische Pfadlänge durch ein Integral über den Pfad  $ds$  gegeben:

$$t_{AB} = \frac{1}{c_0} \int_A^B n(\vec{x}(s)) ds \quad (140)$$

- **Fermat'sches Prinzip:** Lichtstrahlen zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  nehmen stets den zeitlich kürzesten Pfad, also die extremale optische Pfadlänge.

### Reflexion

Ein Lichtstrahl vom Punkt  $A$  tritt im Winkel  $\alpha$  zum Lot auf einen idealen Spiegel. Der reflektierte Strahl erreicht den Punkt  $B$  unter dem Winkel  $\beta$ .



Die optische Pfadlänge ausgedrückt als Funktion der Koordinate  $x$  setzt sich aus dem Lichtweg des einfallenden Strahls  $\sqrt{x^2 + a^2}$  und dem Lichtweg des reflektierten Strahls  $\sqrt{(d-x)^2 + a^2}$  zusammen

$$t_{AB}(x) = \frac{1}{c_0} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c_0} \sqrt{(d-x)^2 + a^2}. \quad (141)$$

Die Koordinate  $x$  des Reflexionspunktes ist die unbekannte Größe.

Die minimale optische Pfadlänge folgt durch Nullsetzen der Ableitung,

$$\frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}} \right) = \frac{1}{c_0} (\sin \alpha - \sin \beta) = 0. \quad (142)$$

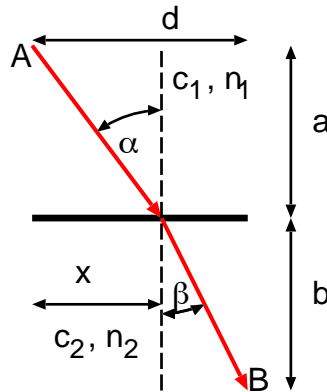
Wir haben das **Reflexionsgesetz**  $\alpha = \beta$ , **Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel** erhalten!

**Aufgabe 31:** Lichtstrahlen einer punktförmigen Lichtquelle fallen von der Stelle  $y = F$  auf einen gewölbten Spiegel. Welche Form  $y(x)$  muss der Spiegel haben, damit alle reflektierten Strahlen parallel zur  $y$ -Achse ausfallen (Parabolspiegel)?



**Brechung (Refraktion)**

Ein Lichtstrahl in einem Medium mit Brechungsindex  $n_1$  tritt im Winkel  $\alpha$  auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit  $n_2$ . Der Strahl wird gebrochen und tritt im Winkel  $\beta$  aus.



Die optische Pfadlänge der beiden Strahlen berücksichtigt die unterschiedliche Wellengeschwindigkeit in den beiden Materialien. Ausgedrückt als Funktion der Koordinate  $x$  setzt sich die optische Pfadlänge aus dem Lichtweg des einfallenden Strahls  $n_1\sqrt{x^2 + a^2}$  und dem Lichtweg des gebrochenen Strahls  $n_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}$  zusammen,

$$t_{AB}(x) = \frac{n_1}{c_0} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{n_2}{c_0} \sqrt{(d-x)^2 + b^2}. \quad (143)$$

Die Koordinate  $x$  ist die Variable des Fermat'schen Prinzips.

Die minimale optische Pfadlänge folgt durch Nullsetzen der Ableitung,

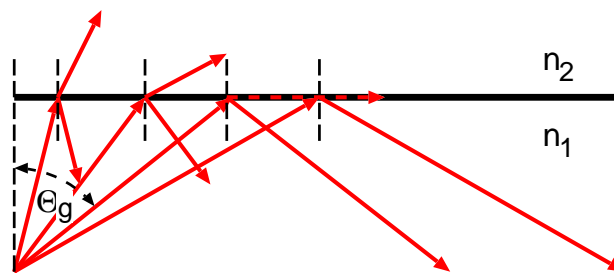
$$\frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{1}{c_0} \left( n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2 \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \right) = \frac{1}{c_0} (n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \beta) = 0. \quad (144)$$

Wir haben das **Snellius'sche Brechungsgesetz** erhalten:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (145)$$

Beim Übergang von einem optisch dünneren Medium zu einem optisch dichteren Medium,  $n_1 < n_2$ , wird der Strahl zum Lot gebrochen,  $\beta < \alpha$ , wie in der oberen Abbildung dargestellt.

Beim Übergang von einem optisch dichteren zu einem optisch dünneren Medium,  $n_1 > n_2$ , wird der Strahl vom Lot gebrochen, ein Teil des Lichtes wird an der Grenzfläche reflektiert.



Nachdem der Winkel im dünneren Medium aber nicht größer  $90^\circ$  sein kann, erfolgt für flacheren Einfall **Totalreflexion**, d.h. der ganze einfallende Strahl wird reflektiert. Der Grenzwinkel für Totalreflexion  $\theta_g$  folgt aus der Bedingung  $\beta = 90^\circ$  für den ausfallende Strahl:

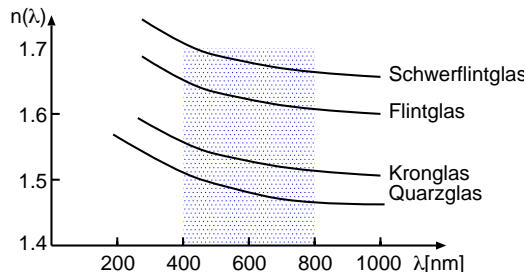
$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} \quad (146)$$

Für Einfallswinkel  $\alpha \geq \theta_g$  erfolgt Totalreflexion.

**Aufgabe 32:** Unter welchem Winkel erfolgt Totalreflexion beim Blick aus dem Wasser ( $n_1 = 1.33$ )? Der Brechungsindex von Luft ist  $n_2 = 1$ .

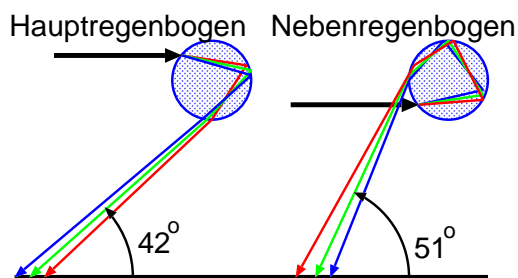
## Dispersion

Die Lichtgeschwindigkeit hängt in den meisten Medien von der Wellenlänge ab. Für die meisten Flüssigkeiten und lichtdurchlässigen Gläser nimmt der Brechungsindex mit wachsender Wellenlänge ab. Man bezeichnet diese Abhängigkeit normale **Dispersion**.



Der Brechungsindex verschiedener optischer Gläser variiert zwischen  $n = 1.7$  für Schwerflintglas bis  $n = 1.45$  für Quarzglas und zeigt normale Dispersion. Als Konsequenz wird kurzwelliges Licht (blau) stärker gebrochen als langwelliges Licht (rot). Weißes Licht wird durch ein optisches Prisma in die Spektralfarben aufgespalten.

Die Farben des **Regenbogens** sind eine Konsequenz der Dispersion in Wasser. Weisses Sonnenlicht fällt auf Regentropfen (hier als Kugeln dargestellt). Die Brechung am Übergang Luft-Wasser spaltet das weiße Licht in seine Komponenten auf, sodass jede Farbe unter einem leicht unterschiedlichen Winkel gebrochen wird. Bei jedem Auftreffen dieser Strahlen auf die Wasseroberfläche wird ein Teil des Strahls reflektiert, der andere Teil wird am Wasser-Luft Übergang vom Lot gebrochen und tritt wieder aus.

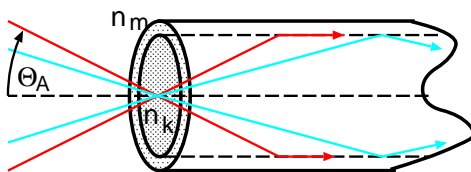


Berechnet man die Austrittswinkel für alle Strahlen mit einfacher Reflexion, erhält man ein Intensitätsmaximum bei einem Austrittswinkel von  $42^\circ$  relativ zur Einfallsrichtung. Diese Strahlen bilden den **Hauptregenbogen**, wobei aufgrund der Dispersion der rote Bogen unter einem steileren Winkel, also Aussen, erscheint, der blaue Bogen Innen.

Das Intensitätsmaximum der Strahlen mit zwei Reflexionen im Wassertropfen liegt bei  $51^\circ$ . Dieser **Nebenregenbogen** ist deutlich schwächer und hat die Farben gerade umgekehrt.

## Lichtwellenleiter

Eine praktische Anwendung der Totalreflexion sind **Glasfasern**, oder **Lichtwellenleiter**. Glasfasern bestehen aus Quarzglas oder Polymeren und sind aus konzentrischen Schichten aufgebaut. Der Brechungsindex des Kerns  $n_K$  ist etwas größer als der Brechungsindex des Mantels  $n_M$ . Flach auf den Mantel auftreffende Strahlen werden totalreflektiert und deshalb entlang der Faser geleitet.



Der maximal erlaubte Eintrittswinkel für Lichtstrahlen wird **numerische Apertur** genannt. Für Strahlen aus einem Medium mit Index  $n$  gilt

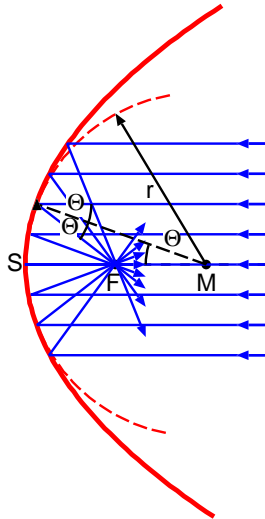
$$n \sin \theta_A = \sqrt{n_K^2 - n_M^2}. \quad (147)$$

Die Dämpfung moderner Glasfasern liegt im Bereich von 0.1dB/km, typischerweise für infrarotes Licht mit 1500nm.

**Aufgabe 33:** Was passiert wenn Glasfasern stark gebogen werden?

### 4.3– Spiegel

Ein parabolischer Hohlspiegel (**Konkavspiegel**) fokussiert parallel einfallende Strahlen auf den **Brennpunkt**  $F$ . Der Abstand vom Scheitel  $S$  zum Brennpunkt  $F$  ist die **Brennweite**  $f$ .



Eine Parabel der Brennweite  $f$  genügt der Gleichung

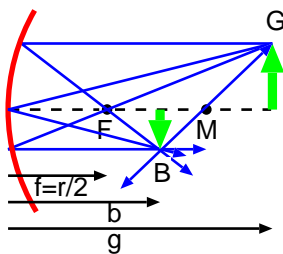
$$y^2 = 4fx. \quad (148)$$

In der Nähe des Scheitels, also für  $x \ll f$  kann diese Parabel durch eine sphärisch gekrümmte Fläche mit Radius  $r = 2f$  approximiert werden

$$y^2 = -(x - r)^2 - r^2 \approx 2rx. \quad (149)$$

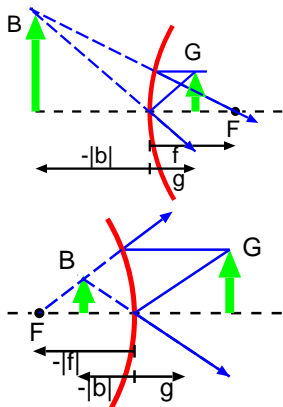
Achsennahe Lichtstrahlen werden **paraxiale Strahlen** genannt. Für paraxiale Strahlen verhält sich ein sphärischer Spiegel gleich wie ein Parabolspiegel. Achsenferne Strahlen kreuzen bei sphärischen Spiegeln die optische Achse zwischen Brennpunkt und Scheitel und führen zu einem Abbildungsfehler, genannt **sphärische Abberation**.

Ein Objekt  $G$  in der **Gegenstandsweite**  $g$  wird mit einem **Hohlspiegel** auf ein Bild  $B$  in der **Bildweite**  $b$  abgebildet. Die Bildkonstruktion erfolgt mithilfe eines Parallelstrahls, der durch den Brennpunkt reflektiert wird, eines Mittelpunktstrahls, der durch den Kreismittelpunkt geht und daher in sich selbst reflektiert wird, eines Scheitelstrahls, der symmetrisch zur Achse reflektiert wird und eines Brennpunktstrahls, der parallel zur optischen Achse reflektiert wird.



Befindet sich das Objekt ausserhalb der doppelten Brennweite, d.h. ausserhalb des Radius erhält man ein invertiertes verkleinertes Bild. Befindet sich das Objekt auf dem Brennpunkt entsteht kein Bild. Liegt das Objekt zwischen Brennpunkt und Radius entsteht ein vergrößertes invertiertes Bild. Mit dem Scheitelstrahl folgt die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (150)$$



Für den Parallelstrahl gilt  $(f - b)/B = f/G$ . Zusammen mit der Gleichung (150) folgt die **Abbildungsgleichung**:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (151)$$

Liegt das Objekt zwischen Scheitel und Brennpunkt entsprechen die reflektierten Strahlen einem hinter dem Spiegel liegenden (virtuellen) aufrechten vergrößerten Bild. Die Bildweite in der Abbildungsgleichung ist daher negativ.

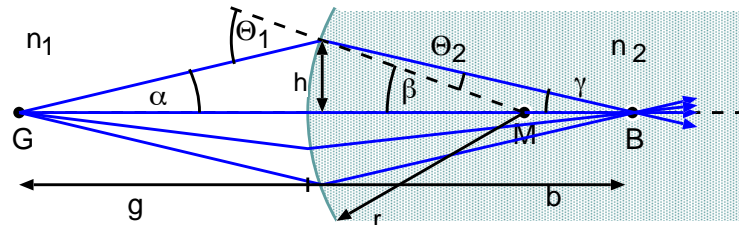
Für gewölbte Spiegel (**Konvexspiegel**) gilt die gleiche Abbildungsgleichung, wobei die Brennweite und daher auch die Bildweite negativ ist. Die Bilder sind virtuell und verkleinert.

**Aufgabe 34:** Warum entsteht kein Bild, wenn das Objekt im Brennpunkt steht?

#### 4.4– Linsen

##### Brechung an der sphärischen Grenzfläche

Als ersten Schritt zur Ableitung der Linsengleichung betrachten wir die Brechung von Lichtstrahlen an einer sphärischen Oberfläche mit Radius  $r$  eines durchlässigen Mediums. Der Brechungsindex ausserhalb des Mediums sei  $n_1$ , der Brechungsindex des Mediums  $n_2$ .



Wir betrachten nur paraxiale Strahlen mit Einfallswinkel nahe dem Lot. Für kleine Einfallswinkel gilt die Näherung  $\sin \theta \approx \theta$  und das Snellius'sche Brechungsgesetz (145) lautet

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2. \quad (152)$$

Die Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , werden nun durch die Winkel zur optischen Achse,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , dargestellt

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (153)$$

$$\theta_2 = \beta - \gamma. \quad (154)$$

Eingesetzt in das Snellius'sche Brechungsgesetz für kleine Winkel ergibt

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta. \quad (155)$$

In der Näherung paraxialer Strahlen sind auch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  klein und können in niederster Ordnung der Taylor Entwicklung durch die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildweite  $b$  und den Radius  $r$  dargestellt werden, z.B.  $h/g = \tan \alpha \approx \alpha$ . Wir erhalten die Abbildungsgleichung einer sphärischen Grenzfläche in der Näherung paraxialer Strahlen

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (156)$$

Die Bildweite ist also unabhängig von Winkel der paraxialen Strahlen und hängt über eine geometrische Größe, die nur vom Radius und den Brechungsindizes der Medien abhängt, mit der Gegenstandsweite zusammen. Daher treffen sich alle Strahlen des Objektes  $G$  in der Bildebene  $B$ .

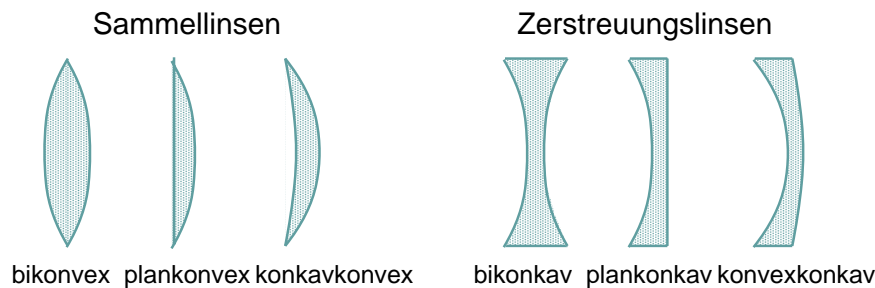
Die obige Ableitung gilt auch für eine (aus Sicht des einfallenden Strahles) konkave Oberfläche. Allerdings müssen folgende Vorzeichenkonventionen berücksichtigt werden:

- Liegt  $M$  hinter der Grenzfläche (konvexe Fläche), ist der Radius  $r$  positiv, sonst negativ
- Liegt das Bild hinter der Grenzfläche, ist die Bildweite  $b$  positiv, sonst negativ
- Liegt das Objekt vor der Grenzfläche, ist die Gegenstandsweite  $g$  positiv, sonst negativ

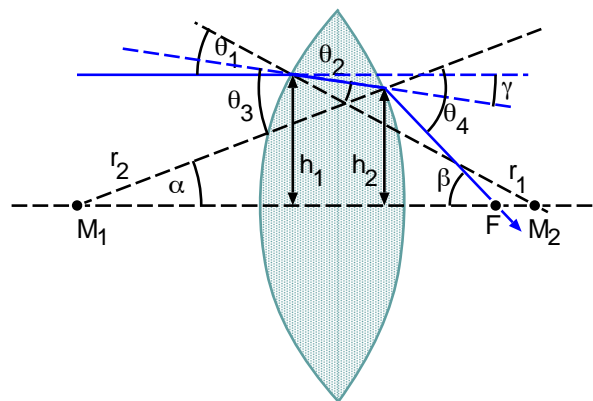
**Aufgabe 35:** Wie lautet die Herleitung für eine konkave Grenzfläche?

### Linsenmachergleichung

Die Kombination von zwei Grenzflächen, typischerweise Luft-Glas mit dahinterliegendem Übergang Glas-Luft, wird als Linse bezeichnet. Je nach Krümmungsradien der Grenzflächen wirken Linsen als Sammellinsen oder Zerstreuungslinsen und werden wie folgt bezeichnet:



Die **Linsenmachergleichung** beschreibt die Brennweite einer Linse aus zwei sphärischen Grenzflächen mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ . Im Folgenden wird die Linsenmachergleichung für dünne sphärische Linsen mit Brechungsindex  $n$  in Luft und paraxialem Einfall berechnet.



Das Brechungsgesetz an der ersten Grenzfläche mit Krümmungsradius  $r_1$  lautet approximativ  $\theta_1 = n\theta_2$ , an der zweiten Grenzfläche gilt  $\theta_4 = n\theta_3$ . Für paraxiale Strahlen können die Winkel relativ zur optischen Achse wieder wie folgt approximiert werden:

$$\beta \approx \frac{h_2}{f} \quad \alpha \approx \frac{h_2}{r_2} \quad \theta_1 = \frac{h_1}{r_1} \quad (157)$$

In der ersten Beziehung wurde die Dicke der Linse vernachlässigt und somit die Hauptebene  $h_2$  in die Mitte der dünnen Linse verlegt. An der ersten Grenzfläche gilt  $\theta_1 - \theta_2 = \gamma = \theta_3 - \alpha$ , außerdem ist  $\theta_4 = \alpha + \beta$ . Durch Eliminieren der Winkel  $\theta_4$  und  $\theta_2$  erhält man für  $\beta$ :

$$\beta = \alpha(n - 1) + \theta_1(n - 1) \quad (158)$$

Für dünne Linsen gilt die Näherung  $h_1 \approx h_2$  und die Linsenmachergleichung lautet:

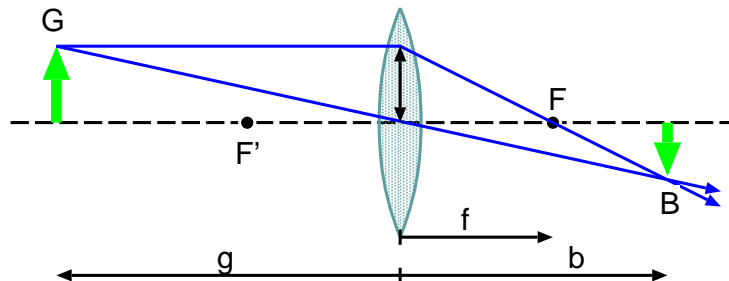
$$B := \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (159)$$

Die **Brechkraft**  $B$ , gemessen in **Dioptrie** ( $[B] = D = m^{-1}$ ) hängt nur von den Krümmungsradien und dem Brechungsindex ab. Bei Konkavlinsen sind beide Radien negativ anzusetzen.

**Aufgabe 36:** Wie groß ist die Brechkraft eines konkavkonvexen Brillenglases ( $n = 1.5$ ) mit  $r_1 = 22.4\text{cm}$  und  $r_2 = -46.2\text{cm}$ ?

### Linsengleichung und Linsenfehler

Aufgrund der Symmetrie der Linsenmachergleichung folgt, dass die Brennweite  $f$  auf beiden Seiten der dünnen Linse gleich ist. Die Bildkonstruktion erfolgt nun, analog zum Spiegel, mithilfe des Parallelstrahls, der durch den Brennpunkt gebrochen wird, des Brennstrahls, der parallel zur optischen Achse ausfällt und des Mittelpunktstrahls, der für dünne Linsen und paraxiale Strahlen gerade bleibt.



Die beiden ähnlichen Dreiecke durch den Brennpunkt  $F$  ergeben  $G/f = -B/(g - f)$ .

Die **Lateralvergrößerung** folgt aus den ähnlichen Dreiecken durch den Linsenmittelpunkt

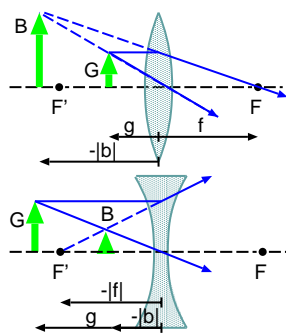
$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (160)$$

Die **Linsengleichung** für dünne Linsen und paraxiale Strahlen lautet nun

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (161)$$

analog zur Abbildungsgleichung sphärischer Spiegel (151) mit folgender Vorzeichenkonvention:

- Die Brennweite  $f$  ist positiv für Sammellinsen, negativ für Zerstreuungslinsen.
- Die Bildweite  $b$  ist positiv hinter der Linse, sonst negativ.
- Die Gegenstandsweite  $g$  ist positiv vor der Linse, sonst negativ.
- Bild  $B$  und Objekt  $G$  positiv oberhalb der optischen Achse, sonst negativ.



Die Abbildungseigenschaften von Sammellinsen hängen von der Lage des Objektes relativ zum Brennpunkt zusammen

$g > 2 f $	invertiert	reell	verkleinert
$2 f  > g >  f $	invertiert	reell	vergrößert
$ f  > g > 0$	aufrecht	virtuell	vergrößert

Im Fall von Zerstreuungslinsen ist die Brennweite negativ und es folgt

$0 > f$	aufrecht	virtuell	verkleinert
---------	----------	----------	-------------

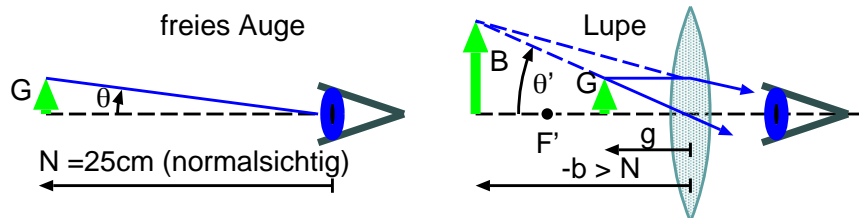
Reale Linsen weichen vom idealen Abbildverhalten ab und weisen **Linsenfehler** auf. Die Verwendung sphärisch geschliffener Linsen bedeutet, dass nichtparaxiale Strahlen ihren Brennpunkt näher bei der Linse haben (**sphärische Abberation**). Die Dispersion von Glas bedeutet, dass der Brennpunkt für blaues Licht näher bei der Linse liegt als für rotes Licht (**chromatische Abberation**). Weitere Linsenfehler wie **Koma** und **Astigmatismus** (Asymmetrie der Linse), **Bildfeldwölbung** und **Verzeichnung** seien hier nur erwähnt.

**Aufgabe 37:** Wie lautet die Bildkonstruktion im Fall einer reellen Vergrößerung?

#### 4.5– Optische Instrumente

##### Vergrößerungsglas, Lupe

Um ein Objekt genau zu betrachten, wird es nahe ans Auge gehalten. Ausschlaggebend ist hier der Winkel  $\theta$  unter dem das Objekt erscheint. Augen können nur bis zu einem minimalen Abstand, genannt **Nahpunkt**  $N$ , akkomodieren (scharfstellen). Bei normalsichtigen Augen liegt der Nahpunkt bei  $N = 25\text{cm}$  und der maximale Schwinkel bei  $\theta = G/N$ .

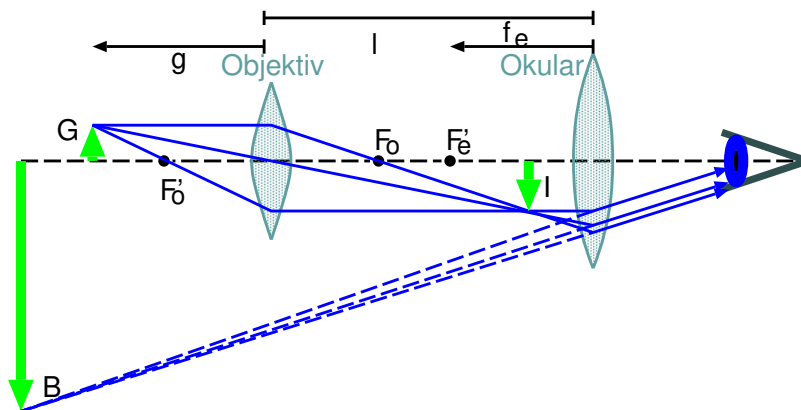


Mithilfe einer Lupe im Abstand  $g < f$  wird nun ein virtuelles aufrechtes Bild in einem Abstand  $-b$  erzeugt. Dadurch kann die Lupe deutlich näher als nur bis zum Nahpunkt an das Objekt herangeführt werden (solange  $b \leq -N$  bleibt) und erscheint im Winkel  $\theta' = G/g$ . Die größte Vergrößerung ergibt sich für  $b = -N$ , und aus der Linsengleichung folgt

$$V := \frac{\theta'}{\theta} = \frac{N}{f} + 1. \quad (162)$$

##### Mikroskop

Bei einem Mikroskop erfolgt die Vergrößerung des Objektes mit zwei Linsen. Die dem Objekt naheliegende Linse wird **Objektiv** genannt, die dem Auge naheliegende Linse **Okular**.



Das Objektiv erzeugt ein invertiertes reelles Bild  $I$  mit der Vergrößerung

$$V_o = -\frac{I}{G} = \frac{l - f_e}{g}. \quad (163)$$

Dieses Bild wird mit dem Okular als Lupe betrachtet, wobei das Bild ins Unendliche (d.h. für entspannte Augen) gelegt wird,  $V_e = N/f_e$ . Die Gesamtvergrößerung des Mikroskopes beträgt

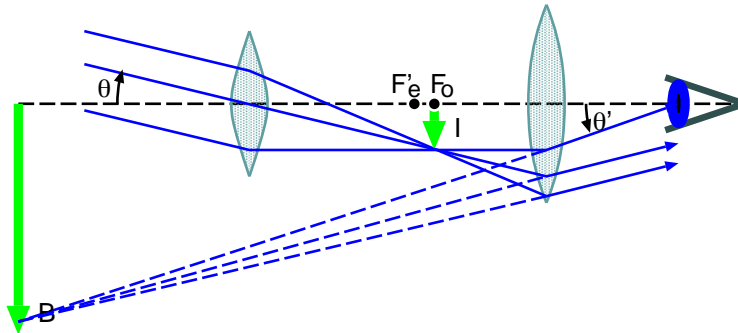
$$V := V_e V_o = \left(\frac{N}{f_e}\right) \left(\frac{l - f_e}{g}\right) \approx \frac{Nl}{f_e f_o}. \quad (164)$$

In der letzten Gleichung wurde verwendet, dass das Objekt sehr nahe am Brennpunkt liegt  $g \approx f_o$  und die Bildweite des Zwischenbildes deutlich über den beiden Brennweiten.

**Aufgabe 38:** Wie lautet die Linsenvergrößerung, wenn das Auge ins Unendliche fokussiert?

### Linsenfernrohr (Refraktor)

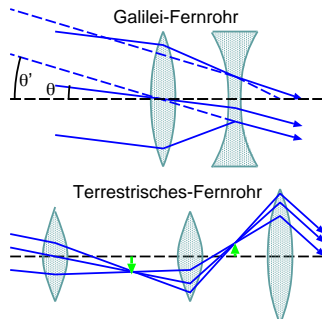
Die ersten historischen astronomischen Teleskope waren Linsenfernrohre, **Refraktoren**. Das **Kepler-Fernrohr** besteht aus zwei Linsen. Das Objektiv fokussiert die parallel einfallenden Strahlen in die Brennebene des Objektivs,  $F_o$ . Dieses invertierte reelle Bild  $I$  wird mit dem Okular betrachtet. Man erhält folglich ein virtuelles, invertiertes, stark vergrößertes Bild.



Fallen die Brennpunkte von Okular und Objektiv zusammen, liegt die Bildebene im Unendlichen und eine Beobachtung mit entspanntem Auge ist möglich, und es gilt

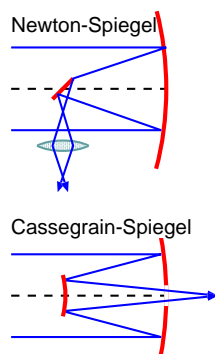
$$V = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f_o}{f_e}. \quad (165)$$

Für astronomische Beobachtungen ist die Lichtstärke ein wichtiger Parameter. Daher wird das Objektiv möglichst groß gebaut (bis ca 1m) mit großer Brennweite.



Historisch bedeutsam ist das **Galilei-Fernrohr**, welches sich aus einer Sammellinse als Objektiv und einer Zerstreuungslinse als Okular, innerhalb der Brennweite des Objektivs, zusammensetzt. Das Bild ist virtuell und aufrecht. Galilei-Fernrohre werden aufgrund ihrer kompakten Bauart als Operngläser verwendet. **Terrestrische Fernrohre** oder **Ferngläser** sind im Wesentlichen Kepler-Fernrohre mit aufrechtem Bild. Diese Bildumkehrung wird entweder durch eine zusätzliche Linse (**Feldlinse**) oder durch Umkehrprismen (z.B. im Feldstecher) erreicht.

### Spiegelteleskop (Reflektor)



Deutlich grössere Öffnungen und daher lichtstärkere Teleskope können mit sphärischen Spiegeln erzeugt werden, mit sogenannten **Spiegelteleskopen**. Ein weiterer Grund für den Wunsch nach großen Öffnungen ist die Auflösung (siehe nächstes Kapitel), welche umgekehrt proportional zur Öffnung ist. Moderne Spiegelteleskope bestehen aus vielen kleinen adjustierbaren Spiegelstücken. Beim **Newton'sche Spiegelteleskop** wird das Licht mit einem zweiten Spiegel seitlich zum Okular geleitet, beim **Cassegrain-Spiegel** lenkt der zweite Spiegel das Bild durch eine Öffnung im Hauptspiegel zum Okular.

**Aufgabe 39:** Welche Vergrößerung hat der weltgrößte Refraktor? ( $f_o = 19\text{m}$ ,  $f_e = 10\text{cm}$ ).



#### 4.6– Wellenoptik

Im Rahmen der geometrischen Optik wurde die Wellennatur des Lichtes vernachlässigt. Im Rahmen der Wellenoptik wird Licht als skalare Welle  $\psi(t, \vec{x})$  betrachtet, mit

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \psi(t, \vec{x}) = 0. \quad (166)$$

Lösungen der skalaren Wellenfunktion sind z.B. ebene Wellen ( $|k|c = \omega$ ),

$$\psi(t, \vec{x}) := A e^{i(\vec{k}x - \omega t)} + B e^{i(\vec{k}x + \omega t)}. \quad (167)$$

Eine zweite Klasse von Lösungen sind Kugelwellen relativ zum Ursprung  $r = 0$ ,

$$\psi(t, r) := A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + B \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r}. \quad (168)$$

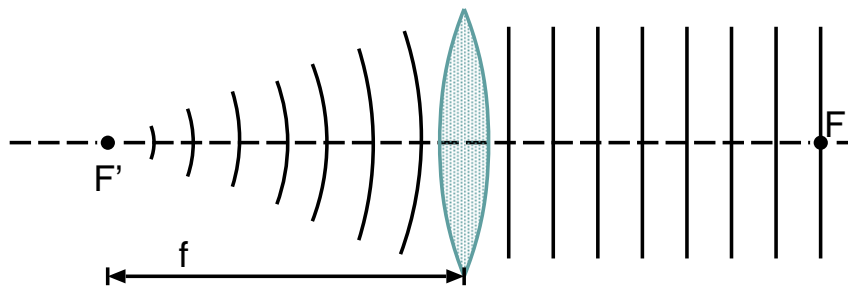
Die erste Welle stellt eine vom Ursprung ausgehende Kugelwelle dar, der zweite Term eine auf den Ursprung zulaufende Kugelwelle. Betrachten wir nun das Fernfeld einer auslaufenden Kugelwelle in paraxialer Näherung. Die Quelle liege im Ursprung, die optische Achse sei die  $z$ -Achse. In paraxialer Näherung betrachten wir nur Strahlen in der Nähe der optischen Achse, d.h.  $x \ll z$  und  $y \ll z$ , und der Radialvektor kann als Taylorreihe entwickelt werden,

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right). \quad (169)$$

Die Kugelwelle in paraxialer Näherung entspricht einer ebenen Welle in  $z$ -Richtung, mit einer parabolischen Phasenfunktion in  $x$  und  $y$  Richtung. An einem fixen Punkt  $z = R$  gilt nun

$$\psi(t, x, y, R) \approx A \frac{e^{i(kz - \omega t)}}{R} e^{i \frac{\pi}{\lambda R} (x^2 + y^2)}. \quad (170)$$

Im Rahmen der geometrischen Optik wurden gezeigt, dass dünne Linsen alle Strahlen durch den Brennpunkt  $F$  zu Parallelstrahlen brechen. Im Rahmen der Wellenoptik haben wir nun die Beschreibung einer Linse mit Brennweite  $f$  gefunden:



Die Strahlen durch den Brennpunkt werden durch eine auslaufende Kugelwelle (170) beschrieben. An der Stelle  $z = f$  wird diese Kugelwelle in eine ebene Welle  $\psi(t, x, y, z) \propto e^{i(kz - \omega t)}$  gebrochen. Die Linse entspricht daher der Multiplikation mit der Phasenfunktion  $\phi_L(x, y)$

$$\phi_L(x, y) = e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)}. \quad (171)$$

**Aufgabe 40:** Welcher Phasenmultiplikation entspricht eine Zerstreuungslinse?

#### 4.7– Überlagerung von Lichtwellen

##### Kohärenz

Lichtwellen werden als **kohärent** bezeichnet, wenn ihre Wellenzüge in konstanter Phasenlage zueinander liegen. Die **Kohärenzzeit** ist die mittlere Zeit in der diese konstante Phasenlage eingehalten wird. Die Strecke, die das Licht während der Kohärenzzeit zurücklegt, wird **Kohärenzlänge**  $l_{\text{coh}}$  genannt. Die Kohärenzlänge bezeichnet also die typische Länge eines zusammenhängenden Wellenzuges. Reale Lichtquellen senden Wellenzüge endlicher Kohärenzlängen aus.

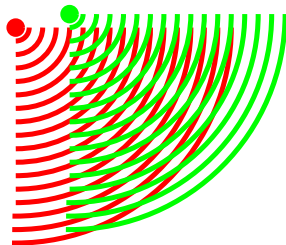
Kohärenzeigenschaften verschiedener Lichtquellen:

Lichtquelle	$\lambda[\text{nm}]$	$l_{\text{coh}}$
weißes Licht	$600 \pm 200$	$1.5\mu\text{m}$
rotes Licht	$620 \pm 30$	$13\mu\text{m}$
Spektrallampe	$640 \pm 0.002$	$20\text{cm}$
GaAlAs-Laser	820	$100\text{m}$
HeNe-Laser	633	$2\text{km}$

##### Interferenz

Überlagern sich zwei oder mehrere Wellen ( $\psi_1(t, \vec{x}), \psi_2(t, \vec{x}), \dots$ ) kann es an verschiedenen Raumpunkten zu einer Addition (**konstruktive Interferenz**) oder zu einer Subtraktion (**destruktive Interferenz**) der Auslenkungen kommen. Das Auge sieht nicht die Amplitude sondern die Intensität des Lichtes,

$$I \propto \langle (\psi_1(t, \vec{x}) + \psi_2(t, \vec{x}) + \psi_3(t, \vec{x}) \dots)^2 \rangle. \quad (172)$$



Voraussetzung für die Beobachtung von Interferenzmustern sind:

- Gleiche Polarisierung der Wellen
- möglichst gleiche Amplitude der Wellen
- konstante Phasenlage zwischen den Wellen, d.h. **kohärente Wellen**

##### Huygen'sches Prinzip

Die Ausbreitung kohärenter Wellenfronten lässt sich mithilfe des **Huygen'schen Prinzips** vorhersagen, sobald die Position der Wellenfront zu einem früheren Zeitpunkt bekannt war.

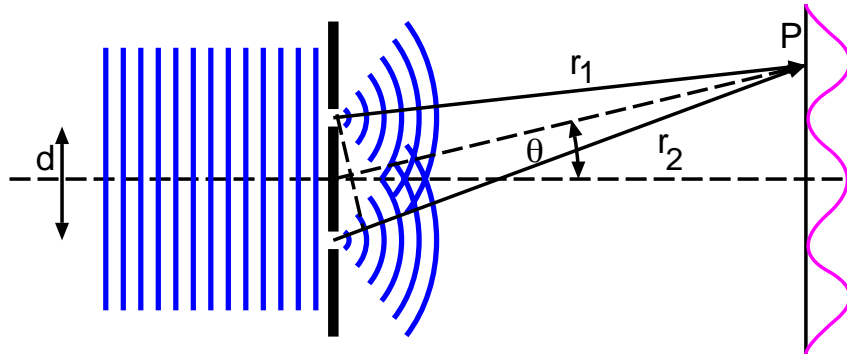
Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Quelle einer kleinen Welle (**Elementarwelle**) betrachtet werden, die sich in Vorwärtsrichtung mit der Wellengeschwindigkeit ausbreitet. Die neue Wellenfront ist die Einhüllende dieser Elementarwellen.

Bei bekannter Wellenfront  $\psi(x, y, 0)$  an der Position  $z = 0$ , folgt das Fernfeld bei  $z = R \gg \max(x, y)$  einfach durch Summation aller paraxialer Kugelwellen der Ebene  $z = 0$ .

**Aufgabe 41:** Wie lautet die Herleitung des Brechungsgesetzes im Wellenbild?

### Doppelspaltversuch nach Young

Die Wellennatur des Lichtes wurde von Thomas Young (1773-1829) mithilfe des berühmten Doppelspaltexperimentes nachgewiesen: Monochromatisches (kohärentes) Licht fällt auf eine Blende mit 2 punktförmigen Öffnungen im Abstand  $d$ . Beobachtet wird die Lichtintensität auf einem Schirm im Fernfeld dieser Blende, also  $z = R \gg d$ .



Nach dem Huygen'schen Prinzip geht von jeder Öffnung der Blende eine Kugelwelle aus

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)}. \quad (173)$$

Drückt man die beiden Radien als Mittelwert und Differenz aus,  $r := \frac{r_1 + r_2}{2}$  und  $\Delta r := r_1 - r_2$  und verwendet die Fernfeld-Näherung  $r \approx R$  folgt

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{A}{R} e^{i(kR - \omega t)} (e^{ik\frac{\Delta r}{2}} + e^{-ik\frac{\Delta r}{2}}) = \frac{2A}{R} e^{i(kR - \omega t)} \cos k \frac{\Delta r}{2}. \quad (174)$$

Im Fernfeld können  $r_1$  und  $r_2$  als nahezu parallel betrachtet werden. Die Wegdifferenz  $\Delta r$  ist daher durch den Abstand der beiden Öffnungen und durch den Winkel  $\theta$  gegeben:

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (175)$$

Die Intensität des Lichtes auf dem Schirm als Funktion des Winkels  $\theta$  (genormt auf die Intensität  $I_o$  ohne Doppelspalt) folgt nun durch Quadrieren und Mitteln der Wellenfunktion,

$$I = 4I_o \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right). \quad (176)$$

Wie aus Symmetriegründen zu erwarten summieren sich die Amplituden auf der optischen Achse zur doppelten Amplitude und daher  $4I_o$ . Die Intensität auf dem Schirm ist mit  $\cos^2$  moduliert und zeigt Maxima (konstruktive Interferenz) und Minima (destruktive Interferenz):

$$\text{Maxima} \quad d \sin \theta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (177)$$

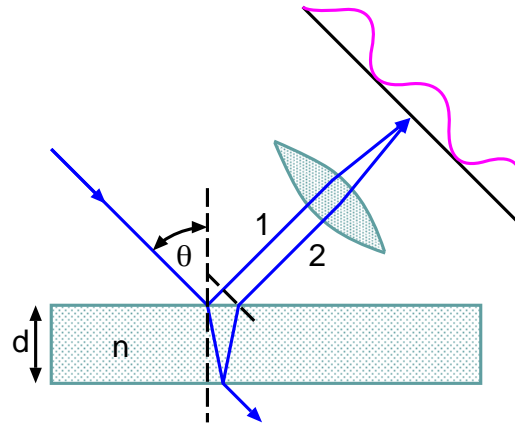
$$\text{Minima} \quad d \sin \theta = \frac{2m+1}{2}\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (178)$$

Anstelle des Schirmes im Fernfeld kann der Schirm auch im Brennpunkt einer Sammellinse angebracht werden.

**Aufgabe 42:** Warum bringt eine Linse das Fernfeld in die Brennebene?

### Dünne Schichten

Beim **Pohl'sche Interferenzversuch** fällt monochromatisches Licht unter verschiedenen Einfallswinkeln auf eine planparallele Platte. Ein Teil des Lichtes (1) wird an der oberen Grenzfläche reflektiert (festes Ende, Phasensprung) der Rest des Lichts wird in das Medium gebrochen. An der zweiten Grenzfläche wird wiederum ein Teil des Lichtes reflektiert (2). Dieses Licht interferiert mit dem Strahl (1) und erzeugt Intensitätsmaxima auf dem Schirm.



Mithilfe des Snellius'schen Gesetzes folgt der Winkel  $\theta'$  des Strahles in der Platte. Der optische Weg des Strahles (2) lautet

$$\delta_2 = \frac{2dn}{\cos \theta'} = \frac{2dn}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta'}} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (179)$$

Der optische Weg des Strahles (1) errechnet sich analog zum Young'schen Experiment

$$\delta_1 = 2d \sin \theta \tan \theta' = \frac{2d \sin^2 \theta}{n \sqrt{1 - \sin^2 \theta'}} = \frac{2d \sin^2 \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (180)$$

Berücksichtigt man noch den Phasensprung von  $\pi$  für die Reflexion des Strahles (1) erhält man den optischen Wegunterschied der beiden Strahlen

$$\delta_2 - \frac{\lambda}{2} - \delta_1 = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \frac{\lambda}{2}. \quad (181)$$

Die Intensitätsmaxima befinden sich unter Winkeln mit einem Wegunterschied  $m\lambda$ .

$$\text{Maxima} \quad 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = \frac{2m+1}{2} \lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (182)$$

$$\text{Minima} \quad 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = m \lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (183)$$

### Dielektrische Spiegel

Maximale Reflexion bei senkrechtem Einfall erfolgt für Schichtdicken von  $d = \lambda/4$ . Diesen Effekt macht man sich bei dielektrischen Spiegeln zu nutze (z.B. bei integrierten Lasern). Hier werden mehrere Schichten abwechselnd mit Materialien unterschiedlicher Brechungsindizes aufgetragen. Die Schichtdicke wird so gewählt, dass sich die reflektierten Strahlen jeweils konstruktiv überlagern. Bei 15-20 Schichten lassen sich Reflexionsgrade von 99.99% erzielen.

**Aufgabe 43:** Welchen Index  $n_2$  und welche Dicke muss eine reflexionsmindernde Schicht zwischen Luft  $n_1$  und einem Material mit Index  $n_3$  optimalerweise haben?

#### 4.8– Fourier Optik und Beugung

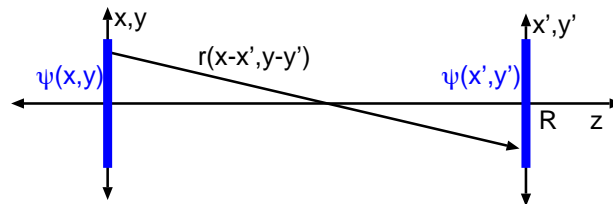
Das **Kirchhoffsche Beugungsintegral** entspricht der mathematischen Formulierung des Huygen'schen Prinzips. Betrachten wir hierzu kohärente Wellen mit der Amplitude  $\psi(x, y)$  in der Ebene  $z = 0$ . Der zeitabhängige Faktor  $e^{-i\omega t}$  kann für kohärente Wellen weggelassen werden. Das Feld  $\psi(x', y')$  im Abstand  $R \gg \lambda$  in paraxialer Näherung lautet

$$\psi(x', y') \stackrel{R \gg \lambda}{\approx} \frac{1}{\lambda i} \int dx dy \psi(x, y) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (184)$$

(Der Faktor  $\frac{1}{\lambda i}$  erfordert eine aufwändige Herleitung.) Die Integration über das Feld erfolgt in der  $(x, y)$ -Ebene, das resultierende Feld liegt in der  $(x', y')$ -Ebene bei  $z = R$ . Der Abstand  $r$  lautet

$$r(x - x', y - y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + R^2} \approx R + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2R}. \quad (185)$$

Im letzten Ausdruck wurde verwendet, dass die Entfernung  $R$  deutlich größer ist, als alle Dimensionen in  $x$  und  $y$ -Richtung.



Im Fernfeld kann außerdem der Radius im Nenner durch  $z'$  ersetzt werden und es folgt

$$\psi(x', y') \stackrel{z' \gg \lambda}{\approx} \frac{1}{\lambda i} \frac{e^{ikz'}}{z'} \int dx dy \psi(x, y) e^{ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2R}}. \quad (186)$$

Betrachten wir nun eine ebene Welle mit der Feldverteilung  $\psi_{\text{in}}(x, y)$ , außerdem sei eine Linse mit Brennweite  $f$  in der Ebene  $(x, y)$ . Das Feld an der Stelle  $z = 0$  lautet nun

$$\psi(x, y) = \psi_{\text{in}}(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)}. \quad (187)$$

Das Kirchhoff'sche Beugungsintegral ergibt Feldverteilung in der Brennebene  $z = f$ ,

$$\psi(x', y') \approx \frac{1}{\lambda i} \frac{e^{ikf}}{f} \int dx dy \psi_{\text{in}}(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)} e^{ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2f}} \quad (188)$$

$$\approx \frac{1}{\lambda i} \frac{e^{ik(f + \frac{x'^2 + y'^2}{2f})}}{f} \int dx dy \psi_{\text{in}}(x, y) e^{-ik \frac{xx' + yy'}{f}}. \quad (189)$$

Der Exponent vor dem Integral ist gerade die Phase im Abstand  $R(x', y', f)$ , im Integral steht die **Fourier-Transformierte** der Feldverteilung. Mithilfe der Wellenvektoren  $\vec{k} := (kx'/f, ky'/f)$  gilt,

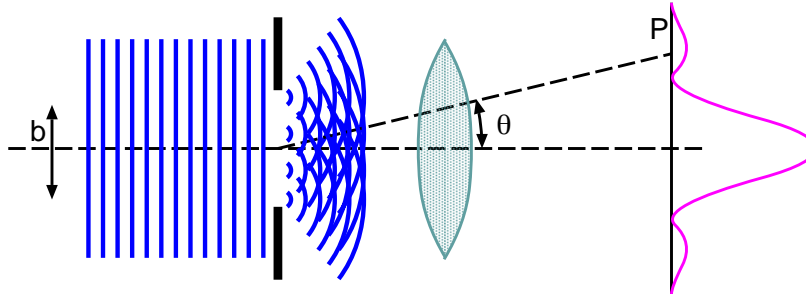
$$\psi(\vec{x}')|_{z=f} \approx \frac{1}{\lambda i} \frac{e^{ikR}}{R} \int dx dy \psi_{\text{in}}(\vec{x})|_{z=0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{\lambda i} \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\psi}_{\text{in}}(\vec{k}). \quad (190)$$

Eine Linse bildet in der Brennebene genau die Fouriertransformierte der Feldverteilung des einfallenden Feldes ab. In der Optik wird durch diese Art der Fouriertransformation gefiltert.

**Aufgabe 44:** Wie lautet das  $\psi_{\text{in}}$  beim Doppelspaltexperiment?

### Beugung am Spalt

Trifft eine Welle auf einen Spalt mit endlicher Breite  $b$  wird jeder Punkt des Spaltes wieder Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Diese Elementarwellen werden sich entlang der optischen Achse wieder verstärken. Wie sieht aber die Intensitätsverteilung im Detail aus?



Die Feldverteilung am Spalt ist gegeben durch eine Rechteckfunktion

$$\psi_{\text{in}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (191)$$

Die Feldverteilung in der Brennebene ist gerade die Fouriertransformierte der Feldverteilung im Spalt,  $\psi(x')|_{z'=f} \propto \tilde{\psi}_{\text{in}}(kx'/f)$ ,

$$\psi(x') \propto \int dx \psi_{\text{in}}(x) e^{-ik \frac{xx'}{f}} = \int_{-b/2}^{b/2} dx e^{-ik \frac{xx'}{f}} = \frac{f i}{kx'} (e^{+ik \frac{bx'}{2f}} - e^{-ik \frac{bx'}{2f}}) = b \frac{\sin(\frac{kbx'}{2f})}{\frac{kbx'}{2f}}. \quad (192)$$

Die Koordinate  $x'$  kann durch den Winkel  $\sin \theta = x'/f$  ersetzt werden. Die Intensitätsverteilung auf dem Schirm lautet

$$I(\theta) = I_o \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)^2} = I_o \text{sinc}^2(\frac{b}{\lambda} \sin \theta). \quad (193)$$

Im letzten Ausdruck wurde die sinc-Funktion verwendet. Diese Funktion besitzt Nullstellen bei allen ganzen Zahlen, nur bei 0 gilt  $\text{sinc}(0) = 1$ , siehe Skizze.

Bei der Beugung am Spalt erhalten wir nun wie erwartet ein Intensitätsmaximum auf der optischen Achse. Die ersten Intensitätsminima liegen bei  $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}$ . Allgemein gilt

$$\text{Minima} \quad \sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{b} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (194)$$

### Beugung an der Lochblende

Die Beugung an einer kreisrunden Lochblende mit Durchmesser  $D = 2r$  wird in ähnlicher Weise berechnet. Die zweidimensionale Integration wird am einfachsten in Zylinderkoordinaten vorgenommen und führt auf die sogenannte **Besselfunktion** für die Intensitätsverteilung. Auf dem Schirm wird wieder ein Intensitätsmaximum mit abklingender Intensität im Zentrum beobachtet, umgeben von konzentrischen dunklen Ringen. Der erste dunkle Ring liegt bei

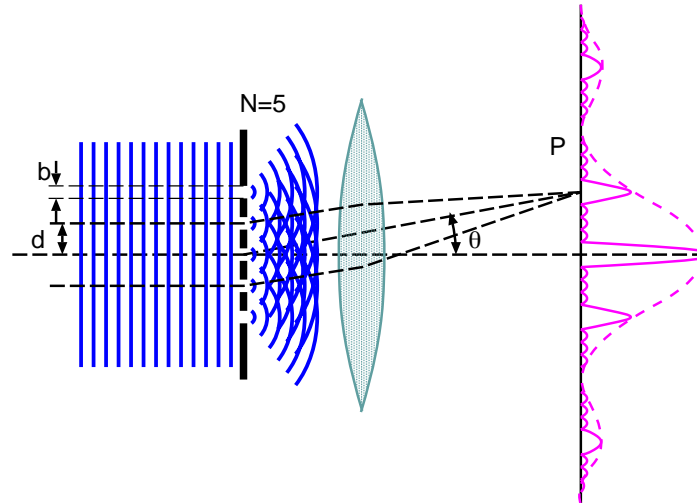
$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (195)$$

In der technischen Optik tritt Beugung an allen kreisförmigen Blenden und Fassungen auf.

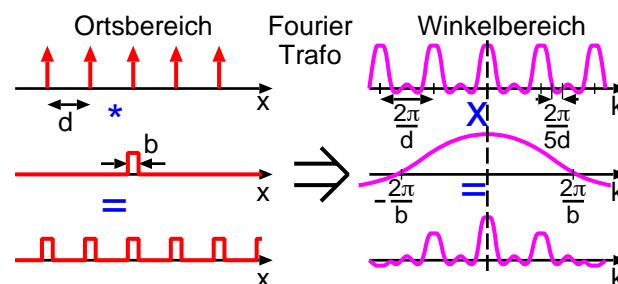
**Aufgabe 45:** Unter welcher Bedingung gibt es am Spalt nur ein Intensitätsmaximum?

### Beugung am Gitter

Ein **Optisches Gitter** besteht aus  $N$  äquidistanten Einzelspalten der Breite  $b$  mit dem Abstand  $d$  zueinander. Der Abstand  $d$  wird auch Gitterkonstante genannt. Das Beugungsbild auf dem Schirm folgt mithilfe der Fouriertransformation.



Das Feld  $\psi_{\text{in}}(x)$  am Gitter ist ein Rechteckspuls mit  $N$  Pulsen der Breite  $b$  und einer Periode  $d$ . Mithilfe des Konvolutionstheorems kann diese Funktion als Konvolution eines Kamms von  $N$  Dirac-Impulsen im Abstand  $d$  mit einem Rechteckspuls der Weite  $b$  dargestellt werden.



Die Fouriertransformation eines Dirac-Kamms mit  $N$  Pulsen lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \delta(x - nd) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ikdn} = \frac{\sin kd \frac{N}{2}}{\sin kd \frac{1}{2}}. \quad (196)$$

Die Fouriertransformierte des Rechtecksimpulses lautet analog zur Beugung am Spalt

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ikx} = \frac{\sin kb \frac{1}{2}}{kb \frac{1}{2}}. \quad (197)$$

Die Fouriertransformierte der Konvolution ist gerade das Produkt der beiden Fouriertransformierten und wir erhalten den Intensitätsverlauf für die Beugung am Gitter ( $k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ ):

$$I(\sin \theta) = I_o \left( \frac{\sin \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta}{\sin \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} \right)^2. \quad (198)$$

Das Beugungsbild zeigt Maxima im Abstand  $\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$  mit Zwischenmaxima der Höhe  $1/N^2$  im Abstand  $\sin \theta = \frac{\lambda}{Nd}$ . Eine sinc-förmige Einhüllende erzeugt Nullstellen bei  $\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{b}$ .

**Aufgabe 46:** Wie kann aus dem Beugungsbild die Wellenlänge  $\lambda$  ermittelt werden?

### Auflösung optischer Instrumente

Jede Linse hat eine endliche Öffnung und ist daher eine Blende mit endlichem Durchmesser. Jeder Punkt einer realen Linse stellt ein Beugungsbild dar und sehr eng benachbarte Punkte eines Objektes können nicht mehr getrennt abgebildet werden. Die Beugung bestimmt das **Auflösungsvermögen optischer Instrumente**. Der Radius des Beugungsscheibchen folgt aus dem Winkel des ersten dunklen Ringes,

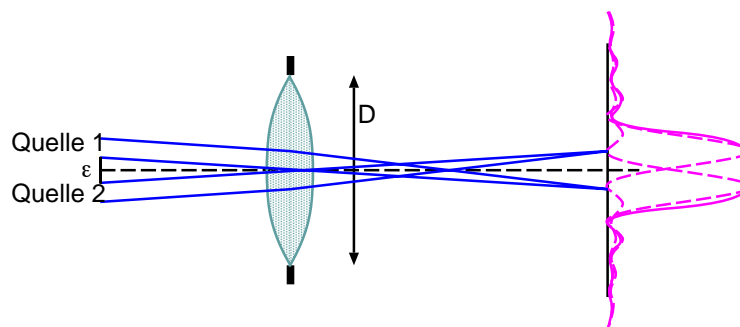
$$r_S = f' \tan \theta \approx f' 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (199)$$

Das **Rayleigh-Kriterium** gibt die Grenze der Auflösung:

Die Bildpunkte (Beugungsscheibchen) der einfallenden Welle zweier Punktlichtquellen kann man unterscheiden, falls das zentrale Maximum der ersten Welle auf das erste Minimum der zweiten Welle fällt (und umgekehrt).

Der Minimale Winkel unter dem zwei Objekte noch aufgelöst werden können ist

$$\sin \epsilon_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (200)$$



Die **Auflösung eines Teleskops** ist durch die Beugung am Objektiv (mit Durchmesser  $D$ ) begrenzt. Der minimale Winkel, unter dem entfernt Objekte getrennt wahrgenommen werden, ist gegeben durch Gleichung (200).

Die **Auflösung eines Mikroskops** ist ebenfalls durch die Öffnung des Objektivs bestimmt. Damit zum Beispiel ein Beugungsgitter mit  $b_{\min}$  überhaupt gesehen werden kann, muss zumindest das zentrale Maximum in das Objektiv gelangen, d.h.  $\sin \theta = \frac{\lambda}{b_{\min}}$ . Oft wird noch ein Dispersionsöl mit Brechungsindex  $n$  zwischen Objekt und Objektiv gegeben. In diesem Fall ist die minimale Strukturgöße gegeben durch

$$b_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin \theta}, \quad (201)$$

wobei wieder  $n \sin \theta$  die numerische Apertur ist. Nachdem maximal  $n \sin \theta \approx 1$  erreicht werden kann, ist die Auflösung eines Mikroskops durch die Wellenlänge  $\lambda$  gegeben

$$b_{\min} \approx \lambda. \quad (202)$$

**Aufgabe 47:** Warum sollte zumindest das erste Beugungsmaximum das Objektiv erreichen? Was passiert, wenn weniger als das erste Beugungsmaximum das Objektiv erreicht?