Notizen zu SBL 6: Mathe 1

Kapitel

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben, welche Sie ebenfalls im Ilias finden, zu bearbeiten.

Folie 34

Folie 34 – Aufgabe 1

Untenstehend die Aufgabe 1 von Folie 34. Rechts ist die Regel dargestellt, welche wir benutzen, um die Aufgabe zu lösen. In diesem Fall handelt es sich um Regel (P1) von Folie 34.

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 \quad \mid \text{REGEL (P1)}$$

Folie 34 – Aufgabe 2

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 12^3 = \left(\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 12\right)^3 \quad \mid \text{REGEL (P2)}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 12\right)^3$$

$$= \left(\frac{12}{4}\right)^3$$

$$= 3^3 = 27$$

Folie 34 – Aufgabe 3

$$\left(2^3\right)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 \quad \mid \text{REGEL (P3)}$$

$$= 512$$

Folie 35

Folie 35 – Aufgabe 1

Zur Veranschaulichung bei dieser Aufgabe auch ein zweiter Lösungsweg mit Kürzen – hier mit 'ODER' gekennzeichnet.

$$3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 3^5 = 3^{2-4+5} = 3^3 \quad \Big| \text{ REGEL (P1)}$$

ODER:

$$3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 3^5 = 3^2 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot 3^5$$

$$= \frac{3^2 \cdot 3^5}{3^4}$$

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} \quad \Big| \text{ KÜRZEN}$$

$$= 3^3$$

Alternativ dazu können wir die Aufgabe auch mit Kürzen lösen. Die Aufgabe wird dadurch länger, allerdings soll so veranschaulicht werden, wieso die Rechenregel gilt.
Das Ergebnis ist in beiden Fällen genau dasselbe, nämlich $3^3 = 27$.

Folie 35 – Aufgabe 2

Bei dieser Aufgabe werden mehrere Regeln angewandt. Neben dem negativen Exponenten wenden wir auch die Rechenregeln (P1) und (P3) von Folie 34 an.

$$\frac{(6^3)^{-5}}{6^3 \cdot 6^{-2}} = \frac{6^{3 \cdot -5}}{6^{3-2}} \quad \begin{array}{l} \mid (P3) \\ \mid (P1) \end{array}$$

$$= \frac{6^{-15}}{6^1}$$

$$= 6^{-15} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= 6^{-15} \cdot 6^{-1} \quad \mid (P1)$$

$$= 6^{-16}$$

$$= \frac{1}{6^{16}}$$

Folie 35 – Aufgabe 3

Bei dieser Aufgabe verwenden wir auch die Rechenregeln (P1) sowie (P3). Die Potenzen mit derselben Basis sind mit Schlangenlinien farblich gekennzeichnet.

$$(3 \cdot 2^{-3} \cdot 5^{2})^{-3} \cdot 3^{2} \cdot 2^{12} = \quad | \,(P3)$$

$$3^{-3} \cdot 2^{-3 \cdot -3} \cdot 5^{2 \cdot -3} \cdot 3^{2} \cdot 2^{12} =$$

$$3^{-3} \cdot 2^{9} \cdot 5^{-6} \cdot 3^{2} \cdot 2^{12} = \quad | \,(P1)$$

$$3^{-3+2} \cdot 2^{9+12} \cdot 5^{-6} =$$

$$3^{-1} \cdot 2^{21} \cdot 5^{-6} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{21} \cdot \frac{1}{5^{6}} = \frac{2^{21}}{3 \cdot 5^{6}}$$

Folie 36

Folie 36 – Aufgabe 1

Diese Aufgabe lösen wir mit Rechenregel (P1) von Folie 36. Zur Veranschaulichung auch ein zweiter Lösungsweg mit Kürzen – hier mit 'ODER' gekennzeichnet.

$$3^5 : 3^3 = \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 \qquad | \text{ (P1)}$$

ODER:

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^2 \qquad | \text{ KÜRZEN}$$

Alternativ dazu können wir auch hier die Aufgabe zur Veranschaulichung mit Kürzen lösen. Das Ergebnis ist dasselbe: $3^2 = 9$.

Folie 36 – Aufgabe 2

$$36^3 : 12^3 = \frac{36^3}{12^3} \qquad | \text{ (P2)}$$

$$= \left(\frac{36}{12}\right)^3$$

$$= 3^3 = 27$$

Folie 38

Folie 38 – Aufgabe 1

Zur Veranschaulichung auch hier ein zweiter Lösungsweg, wenn wir 16 als eine Potenz von 2 auffassen– hier mit 'ODER' gekennzeichnet.

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$

ODER:

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} \qquad | \rightarrow 2^4 = 16 \,!$$

$$= (2^4)^{\frac{1}{2}} \qquad | \; (P3)$$

$$= 2^{4 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= 2^2 = 4$$

Alternativ dazu können wir hier auch die Aufgabe mit 16 als Potenz von 2 lösen. Das Ergebnis ist dasselbe: 4.

Folie 38 – Aufgabe 2

Diese Aufgabe funktioniert analog zur Aufgabe 1 von dieser Folie – allerdings benutzen wir hier dazu eine Variable (= Buchstabe) anstelle einer Zahl.

$$\sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} \qquad | \; (P3)$$

$$= a^{4 \cdot \frac{1}{2}} = a^2$$

Folie 39

Folie 39 – Aufgabe 1

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32}$$
$$= \sqrt[5]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$
$$= \sqrt[5]{2^5}$$
$$= 2$$

Folie 39 – Aufgabe 2

$$\sqrt[3]{a^6} = \left(a^6\right)^{\frac{1}{3}} \qquad | \text{ (P3)}$$
$$= a^{6 \cdot \frac{1}{3}}$$
$$= a^2$$

Folie 40

Folie 40 – Aufgabe 1

$$4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} =$$

$$(2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^1)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} = \qquad | \ (P3)$$

$$2^{2 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{1 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^1 = \qquad | \ (P1)$$

$$2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1} = 2^2$$

Folie 40 – Aufgabe 2

$$120^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{900} =$$

$$120^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{30^2} =$$

$$120^{\frac{1}{2}} \cdot (30^2)^{\frac{1}{4}} = \qquad | (P3)$$

$$120^{\frac{1}{2}} \cdot 30^{2 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$120^{\frac{1}{2}} \cdot 30^{\frac{1}{2}} = \qquad | \ (P2)$$

$$(120 \cdot 30)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(3600)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{3600} = 60$$

Folie 40 – Aufgabe 3

$$\sqrt{\mathbf{0}}\mathbf{.16} = \mathbf{0.4}$$

Logarithmen

$$\log_a(b) = x$$

$$a^x = b$$

Bsp. gesucht $\rightarrow x$

$$\boxed{2^3 = 8}$$

$\rightarrow$ $2^x = 8$???

$\rightarrow$ $\log_2(8) = x$

$\rightarrow$ $x = 3$

Um die Logarithmen zu veranschaulichen, bitte ich folgende Tabellen zu betrachten:

Potenzen von 2:

Logarithmus	***Potenzform zum Vergleich***	**Lösung (x)**
$\log_2 (2) = x$	$2^x = 2$	$x = 1$
$\log_2 (4) = x$	$2^x = 4$	$x = 2$
$\log_2 (8) = x$	$2^x = 8$	$x = 3$
$\log_2 (16) = x$	$2^x = 16$	$x = 4$
$\log_2 (32) = x$	$2^x = 32$	$x = 5$
$\log_2 (64) = x$	$2^x = 64$	$x = 6$
$\log_2 (128) = x$	$2^x = 128$	$x = 7$
$\log_2 (256) = x$	$2^x = 256$	$x = 8$
$\log_2 (512) = x$	$2^x = 512$	$x = 9$

Potenzen von 10:

Logarithmus	***Potenzform zum Vergleich***	**Lösung (x)**
$\log_{10} (1) = x$	$10^x = 1$	$x = 0$
$\log_{10} (10) = x$	$10^x = 10$	$x = 1$
$\log_{10} (100) = x$	$10^x = 100$	$x = 2$
$\log_{10} (1000) = x$	$10^x = 1000$	$x = 3$
$\log_{10} (10000) = x$	$10^x = 10000$	$x = 4$
$\log_{10} (100000) = x$	$10^x = 100000$	$x = 5$
$\log_{10} (1000000) = x$	$10^x = 1000000$	$x = 6$
$\log_{10} (10000000) = x$	$10^x = 10000000$	$x = 7$
$\log_{10} (100000000) = x$	$10^x = 100000000$	$x = 8$

Beachte I: $a^0 = 1$, für a ungleich 0 – siehe auch Folie 34!
Beachte II: $\log_{10}(\ldots)$ wird sehr oft auch synonym als $\lg(\ldots)$ bezeichnet

Potenzen von 3:

Logarithmus	***Potenzform zum Vergleich***	**Lösung (x)**
$\log_3 (1) = x$	$3^x = 1$	$x = 0$
$\log_3 (3) = x$	$3^x = 3$	$x = 1$
$\log_3 (9) = x$	$3^x = 9$	$x = 2$
$\log_3 (27) = x$	$3^x = 27$	$x = 3$
$\log_3 (81) = x$	$3^x = 81$	$x = 4$
$\log_3 (243) = x$	$3^x = 243$	$x = 5$
$\log_3 (729) = x$	$3^x = 729$	$x = 6$
$\log_3 (2187) = x$	$3^x = 2187$	$x = 7$
$\log_3 (6561) = x$	$3^x = 6561$	$x = 8$

Beachte I: $a^0 = 1$, für a ungleich 0 – siehe auch Folie 34!