SBL - Notizen aus Mathematik 3: Differentialrechnung

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben des Aufgabenpools zu bearbeiten.

Die wichtigsten Ableitungsregel im Überblick

Ableitungsregeln

Konstante Funktion	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Potenzregel	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Faktorenregel	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Summenregel	$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g(x)' + h(x)'$
Produktregel	$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Kettenregel	$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$
Winkelfunktionen	$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$
	$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$
	$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
	$f(x) = cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = e^{k \cdot x}$	$f'(x) = k \cdot e^{k \cdot x}$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$

Seite 69 - Beispiele Produktregel

Beispiel I

Beispiel: Differenziere die Funktion $h(x) = (x^2 + 2x)(x^3 - 1)$.

Lösung:

Schritt 1: Ableiten mit Produktregel

$$h'(x) = (2x + 2)(x^3 - 1) + (x^2 + 2x)(3x^2)$$

Schritt 2: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\begin{gathered} h'(x) = (2x + 2)(x^3 - 1) + (x^2 + 2x)(3x^2) \\ h'(x) = (2x^4 - 2x + 2x^3 - 2) + (3x^4 + 6x^3) \\ h'(x) = 2x^4 - 2x + 2x^3 - 2 + 3x^4 + 6x^3 \\ h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x - 2 \end{gathered}$$

Alternativer Lösungsansatz:

Schritt 1: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\begin{gathered} h(x) = (x^2 + 2x)(x^3 - 1) \\ h(x) = x^5 - x^2 + 2x^4 - 2x \end{gathered}$$

Schritt 2: Ableiten

$$\begin{gathered} h(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x \\ h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x - 2 \end{gathered}$$

Beispiel II

Beispiel: $h(x) = (3x + sin(x))\sqrt{x}$

Lösung:

$$h'(x) = (3 + cos(x))\sqrt{x} + (3x + sin(x))\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Optional noch Vereinfachen:

$$h'(x) = \frac{9x + 2x \cdot cos(x) + sin(x)}{2\sqrt{x}}$$

Übung I

Aufgabe: Bestimme die Ableitung von $f(x) = (2x-2)(5x^3-1)(3x^{-1}-x)$.

Hinweis: Produkte mit drei Faktoren können nach dem folgenden Schema abgeleitet werden.

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot j(x)$$
$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot j(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot j(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot j'(x)$$

Lösung:

$$f'(x) = 2(5x^3-1)(3x^{-1}-x) + (2x-2)15x^2(3x^{-1}-x) + (2x-2)(5x^3-1)(-3x^{-2}-1)$$

Vereinfachen:

$$f'(x) = (10x^3-2)(3x^{-1}-x) + (30x^3-30x^2)(3x^{-1}-x) + (10x^4-2x-10x^3+2)(-3x^{-2}$$
$$f'(x) = -50x^5 + 40x^3 + 90x^2 - 56x - \frac{6}{x^2} - 2$$

Übung II

Aufgabe: Bestimme die Ableitung von $f(x) = (2x^2 - \frac{1}{x^3})(-x^2 + \frac{5}{x})$.

Lösung:

Schritt 1: Ableiten mit Produktregel

$$f(x) = (2x^2 - x^{-3})(-x^2 + 5x^{-1})$$
$$f'(x) = (4x + 3x^{-4})(-x^2 + 5x^{-1}) + (2x^2 - x^{-3})(-2x - 5x^{-2})$$

Schritt 2: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$f'(x) = -4x^3 + 20 - 3x^{-2} + 15x^{-5} - 4x^3 - 10 + 2x^{-2} + 5x^{-5}$$
$$f'(x) = \frac{20}{x^5} - 8x^3 - \frac{1}{x^2} + 10$$

Seite 70 - Beispiele Quotientenregel

Beispiel I

Beispiel: Differenziere die Funktion $h(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Lösung:

Schritt 1: Ableiten mit Quotientenregel

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2}$$
$$h'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{x^4}$$

Schritt 2: Zusammenfassen und Vereinfachen

$$h'(x) = \frac{x^2 - (2x^2 - 2x)}{x^4}$$
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^4}$$
$$h'(x) = \frac{x(-x+2)}{x^4}$$
$$h'(x) = \frac{-x+2}{x^3}$$

Beispiel II

Beispiel: Differenziere die Funktion $f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2+3}$.

Lösung:

Schritt 1: Ableiten mit Quotientenregel (und Produktregel im Zähler für $(x-1)e^x$)

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2+3}$$
$$f'(x) = \frac{[(1 \cdot e^x) + (x-1)e^x](x^2+3) - (x-1)e^x \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

Schritt 2: Zusammenfassen und Vereinfachen

$$f'(x) = \frac{(e^x x)(x^2+3) - 2e^x x^2 + 2e^x x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x x^3 + 3e^x x - 2e^x x^2 + 2e^x x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x x^3 - 2e^x x^2 + 5e^x x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x x(x^2 - 2x + 5)}{(x^2+3)^2}$$

Übung

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{x^3-15x}{x^4+3x^2+x+15}$.

Lösung:

Schritt 1: Ableiten mit Quotientenregel (und Produktregel im Nenner für $(x-1)e^x$)

$$f(x) = \frac{x^3-15x}{x^4+3x^2+x+15}$$
$$f'(x) = \frac{(3x^2-15)(x^4+3x^2+x+15) - (x^3-15x)(4x^3+6x+1)}{(x^4+3x^2+x+15)^2}$$

Schritt 2: Zusammenfassen und Vereinfachen

$$f'(x) = \frac{(3x^2-15)(x^4+3x^2+x+15) - (x^3-15x)(4x^3+6x+1)}{(x^4+3x^2+x+15)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-x^6 + 48x^4 + 2x^3 + 90x^2 - 225}{(x^4+3x^2+x+15)^2}$$

Seite 71 - Beispiele Kettenregel

Beispiel I

Beispiel: Differenziere die Funktion $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Lösung:

Schritte 1: Ableiten mit Kettenregel

$$h(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

Schritt 2: Zusammenfassen und Vereinfachen

$$h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Beispiel II

Beispiel: Differenziere die Funktion $f(x) = (-2)(-x^2-1)^3$.

Lösung:

$$f(x) = (-2)(-x^2-1)^3$$
$$f'(x) = (-6)(-x^2-1)^2 \cdot -2x = 12x(-x^2-1)^2$$

Übung I

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = ln(3x^3)$.

Lösung:

$$f(x) = ln(3x^3)$$
$$f'(x) = \frac{1}{3x^3} \cdot 9x^2 = \frac{3}{x}$$

Übung II

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = e^{2x}cos(5x)$.

Lösung:

$$f(x) = e^{2x}cos(5x)$$
$$f'(x) = 2e^{2x}cos(5x) - 5e^{2x}sin(5x) = e^{2x}(2cos(5x) - 5sin(5x))$$

Seite 72 - Spezielle Ableitungen: Exponentialfunktion & Logratihmusfunktion

Beispiel I

Beispiel: Differenziere die Funktion $f(x) = e^{x^2-1}$.

Lösung:

$$f(x) = e^{x^2-1}$$
$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$$

Beispiel II

Beispiel: Differenziere die Funktion $f(x) = ln(\sqrt{2x})$.

Lösung:

$$f(x) = ln(\sqrt{2x})$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

Seite 72 - Spezielle Ableitungen: Winkelfunktionen

Übung I

Übung: Finden Sie eine andere Darstellung der Ableitung des Tanges $tan(x)$.

Hinweis: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

Lösung:

$$f(x) = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$f'(x) = \frac{cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot -sin(x)}{cos^2(x)}$$
$$f'(x) = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Übung II

Übung: Bestimmen Sie die Ableitung des Cotangens $cot(x)$.

Hinweis: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

Lösung:

$$f(x) = cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$
$$f'(x) = \frac{-sin(x) \cdot sin(x) - cos(x) \cdot -cos(x)}{sin^2(x)}$$
$$f'(x) = \frac{-sin^2(x) + cos^2(x)}{sin^2(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

Seite 75 - Übungen

Übung (a)

$$f(x) = 12x^7$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 84x^6$$
$$f''(x) = 504x^5$$

Übung (b)

$$f(x) = -4x^{-5}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 20x^{-6} = \frac{20}{x^6}$$
$$f''(x) = 120x^{-7} = \frac{120}{x^7}$$

Übung (c)

$$f(x) = (a+5)x^4, a \in \mathbb{R}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4(a+5)x^3 = (4a+20)x^3$$
$$f''(x) = 3(4a+20)x^2 = (12a+60)x^2$$

Übung (d)

$$f(x) = -x^{3c+1}, c \in \mathbb{R}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = -(3c+1)x^{3c}$$
$$f''(x) = -(3c)(3c+1)x^{3c-1} = c(-9c-3)x^{3c-1}$$

Übung (e)

$$f(x) = (x-1)(2x^2-2)(2x^3-3)$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 2(12x^5 - 10x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x + 3)$$
$$f''(x) = 4(30x^4 - 20x^3 - 12x^2 - 3x + 3)$$

Übung (f)

$$f(x) = (2x^3 - \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x}) = 2x^4 + 2x^2 - x^{-1} - x^{-3}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 8x^3 + 4x + x^{-2} + 3x^{-4} = \frac{3}{x^4} + 8x^3 + \frac{1}{x^2} + 4x$$
$$f''(x) = -\frac{12}{x^5} - \frac{2}{x^3} + 24x^2 + 4$$

Übung (g)

$$f(x) = \frac{x^2 - 15}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Ableitung:

$$f'(x) = \frac{-x^4 + 46x^2 + 32x + 15}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Übung (h)

$$f(x) = tan(3x^3)$$

Ableitung:

$$f'(x) = \frac{9x^2}{cos^2(3x^3)}$$

Seite 79 - Anwendung

Übung 1

Übung: An einer Mauer soll ein rechteckiger Garten abgegrenzt werden, dessen Flächeninhalt möglichst groß sein soll. Zur Abgrenzung sind insgesamt 48m Zaun verfügbar. Berechne die Abmessungen und den maximalen Flächeninhalt.

Lösung:

Hauptbedingung (HB): $A = a \cdot b$

Nebenbedingung (NB): $48 = 2(a + b)$

NB in HB:

NB nach a freigestellt: $a = \frac{48}{2} - b = 24 - b$

In HB eingesetzt: $A = (24 - b) \cdot b = 24b - b^2$

Ableiten, Nullsetzen, Überprüfen mittels 2. Ableitung:

$$A'(b) = 24 - 2b$$
$$A''(b) = -2$$

$-2 < 0$, weshalb es sich um eine Maximalstelle handelt.

$$0 = 24 - 2b$$
$$-24 = -2b$$
$$\frac{-24}{-2} = b$$
$$b = 12$$

Lösung:

$a = 24 - b = 24 - 12 = 12$

Der Flächeninhalt wird maximal bei $A = 12 \cdot 12 = 144$ und den Abmessungen $a = 12$ und $b = 12$.

Übung 2

Übung: Bestimmen sie zwei nicht negative Zahlen a und b, deren Summe gleich 50 ist, so dass ab^2 maximal ist!

Lösung:

Hauptbedingung (HB): ab^2

Nebenbedingung (NB): $50 = a + b$

NB in HB:

NB nach a freigestellt: $a = 50 - b$

In HB eingesetzt: $f(b) = (50 - b)b^2 = -b^3 + 50b^2$

Ableiten, Nullsetzen, Überprüfen mittels 2. Ableitung:

$$f'(b) = -3b^2 + 100b$$
$$f''(b) = -6b + 100$$

$$0 = -3b^2 + 100b$$
$$0 = b^2 - \frac{100}{3}b$$
$$b_{1,2} = \frac{100}{6} \pm \sqrt{(\frac{100}{6})^2}$$
$$b_{1,2} = \frac{50}{3} \pm \frac{50}{3}$$
$$b_1 = \frac{100}{3}, b_2 = 0$$

$f''(\frac{100}{3}) = -6 \cdot \frac{100}{3} + 100 = -100 < 0$, weshalb es sich um ein Maximum handelt.

(b_2 wäre ein Minimum.)

Lösung:

ab^2 wird maximal bei $a = \frac{50}{3}$ und $b = \frac{100}{3}$.

Übung 3

Übung: Ein Zeitungsverlag will seinen Gewinn dadurch erhöhen, dass er seine Abonenntenzahl steigert. Der Kundenstamm besteht aus 2000 Abonennten. Der Verlag verdient mit jedem Kunden 50 Euro pro Jahr. Marktuntersuchungen besagen, dass bei jeder Preissenkung um 1 Euro pro Abonnement jeweils 100 Kunden dazu gewonnen werden.

Wie lautet der mathematische Ausdruck für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit von der Preissenkung x? **Für welche Preissenkung wird der Gewinn des Verlags extremal?** Wie hoch ist der Gewinn in der Extremstelle? Handelt es sich um ein Minimum oder Maximum?

Lösung:

Hauptbedingung und Nebenbedingung:

Gewinn ergibt sich aus $\text{Kundenzahl} \cdot \text{Gewinn pro Kunde}$.

Gesamt ergibt sich $G(x) = (\text{Kundenzahl} + 100x) \cdot (\text{Gewinn pro Kunde} - x)$, wobei x die Preisenkung in Euro ausdrückt.

Einsetzen der Zahlen:

$\text{Kundenzahl} = 2000, \text{Gewinn pro Kunde} = 50$

$G(x) = (2000 + 100x)(50 - x) = -100x^2 + 3000x + 100000$

Ableiten, Nullsetzen, Überprüfen mittels 2. Ableitung:

$$G'(x) = -200x + 3000$$
$$G'(x) = -200 < 0, \text{daher Maximum}$$
$$0 = -200x + 3000$$
$$\frac{-3000}{-200} = x$$
$$x = 15$$

Lösung:

Die Preissenkung wird bei einer Senkung um 15 Euro pro Jahr maximal. Der Gewinn beträgt $G(15) = 122500$ Euro.

Übung 4

Übung: Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit ausgesetzem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters ist $U = 500cm$. Ermitteln Sie Breite und Höhe des Fensters so, dass der Flächeninhalt maximal ist!

Lösung:

Hauptbedingung (HB): $A(a,b) = ab - \frac{(\frac{b}{2})^2\pi}{2} = ab - \frac{\pi b^2}{8}$

Nebenbedingung (NB):
$500 = 2a + b + \pi b$
$500 = 2a + (1+\pi)b$

NB in HB:

NB nach a freigestellt: $a = \frac{500-(1+\pi)b}{2}$

In HB eingesetzt: $A(b) = \frac{500-(1+\pi)b}{2}b - \frac{\pi b^2}{8} = \frac{-(1+\pi)b^2+500b}{2} - \frac{\pi b^2}{8}$

Ableiten, Nullsetzen, Überprüfen mittels 2. Ableitung:

$$A'(b) = -(1+\pi)b - \frac{\pi b}{4} + 250 = -(1+\frac{5\pi}{4})b + 250$$
$$A''(b) = -(1+\frac{5\pi}{4})$$

$$0 = -(1+\frac{5\pi}{4})b + 250$$
$$b = \frac{250}{1+\frac{5\pi}{4}}$$

$A''(b) = -(1+\frac{5\pi}{4}) < 0$, weshalb es sich um ein Maximum handelt.

Lösung:

b beträgt $b = \frac{250}{1+\frac{5\pi}{4}} \approx 50.74 \text{ cm}$. a beträgt $a \approx 144.93 \text{ cm}$.

Die maximale Fläche beträgt $A(a,b) \approx 7352.44 \text{ cm}^2$.