

GLT 2

C7

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot \vec{A} \cdot \cos(\varphi) = 20 \cdot 5 \cdot \cos(30^\circ) = 86,6025 \text{ mA}$$

Beispiel 6.1

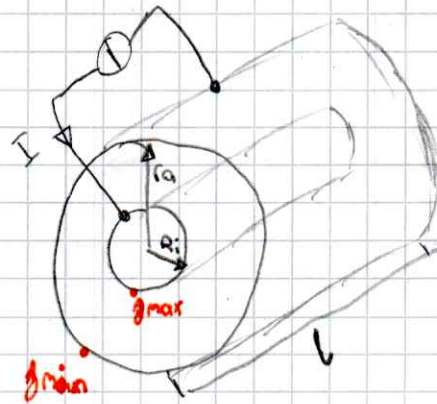
$$I = 5 \text{ mA}$$

$$j_{\max} = 8 \text{ } \mu\text{A/mm}^2$$

$$j_{\min} = 2 \text{ } \mu\text{A/mm}^2$$

ges.: Länge des Körpers, Radius der Innenelektrode, Graph der Funktion $j = f(r)$

$$r_0 = 10 \text{ mm}$$

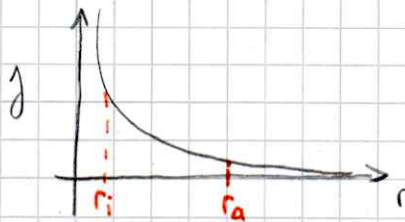


$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

geeignete Integrationsfläche \rightarrow Zylindermantel

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \stackrel{\vec{j} \parallel d\vec{A}}{=} \int j dA \stackrel{j \text{ homogen}}{=} j \cdot \int dA = j \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l r d\varphi dz =$$

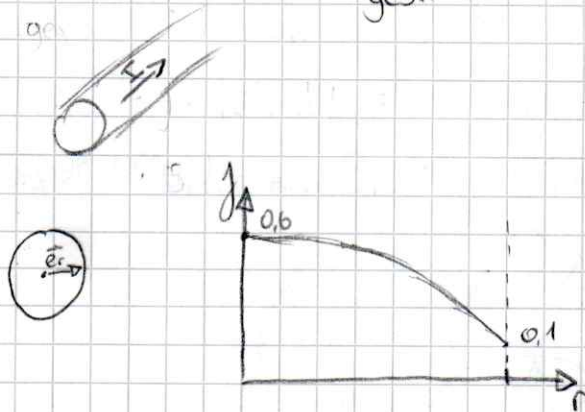
$$= j \cdot 2\pi \cdot \int_{z=0}^l r dz = j \cdot r \cdot 2\pi \cdot l \rightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{r}$$



$$j_{\min} = \frac{I}{2\pi \cdot l \cdot r_0} \rightarrow l = 39,7887 \text{ mm}$$

$$j_{\max} = \frac{I}{2\pi \cdot 39,7887 \cdot r_i} \rightarrow r_i = 2,5 \text{ mm}$$

C8

ges.: I 

$$j(r) = a \cdot r^2 + b \rightarrow j(r) = 0 \cdot r^2 + 0.6 \rightarrow j(r) = 0.0102 r^2 + 0.6$$

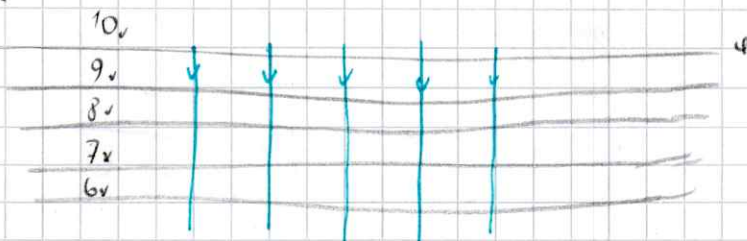
$$I = \int \vec{j} d\vec{A} = \int j dA$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{7\text{mm}} j \cdot r d\varphi dr = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{7\text{mm}} \left(-\frac{1}{98} \cdot r^2 + 0.6 \right) \cdot r d\varphi dr =$$

$$= 2\pi \cdot \int \left(-\frac{1}{98} \cdot r^3 + 0.6 \cdot r \right) dr = 2\pi \left[-\frac{r^4}{392} + 0.3 \cdot r^2 \right]_0^{7\text{mm}}$$

$$I = 53.8783$$

Bsp.:



GLET_2

Selbststudium - Felder - C19

geg.: - Zylinder ($h=0,1\text{m}$)

- $r_a = 60\text{mm}$

- $r_i = 20\text{mm}$

- $\gamma_1 = 20\text{ S/m}$

- $\gamma_2 = 100\text{ S/m}$

> jeweilige Dicke 20mm

ges.: I , Potenzial bei $U = 10\text{mV}$, Wo max Leistungsdichte

$$P = \frac{1}{R}$$

~~RAWA~~

$$A = 2\pi r h$$

$$R = P \cdot A \hat{=} \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{L}{A}$$

$$\vec{R} = \int d\vec{R} \Rightarrow R = \int dR(r)$$

parallel

$$R = \int \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dr}{A} = \int \frac{1}{\gamma \cdot 2\pi \cdot h} \cdot \int \frac{dr}{r}$$

$$R = \frac{1}{\gamma 2\pi h} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$R_1 = \frac{1}{20 \cdot 2\pi \cdot 0,1} \cdot \ln\left(\frac{60}{20}\right) = 0,055158 \Omega \hat{=} \underline{\underline{55,158\text{m}\Omega}}$$

$$R_2 = \frac{1}{100 \cdot 2\pi \cdot 0,1} \cdot \ln\left(\frac{60}{40}\right) = 0,006453 \Omega \hat{=} \underline{\underline{6,453\text{m}\Omega}}$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 = \underline{\underline{61,611\text{m}\Omega}}$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = 0,162308\text{A} \hat{=} \underline{\underline{162,308\text{mA}}}$$

$$U_{\text{gr}} = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \underline{\underline{8,9526\text{mV}}}$$

leistungsdichte $S = j \cdot E = \frac{j^2}{\gamma}$

$$j_{\text{innen}} = \frac{I}{A} = \frac{162,308}{2\pi \cdot 20 \cdot 100} = 12,916 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$j_{\text{außen}} = \frac{I}{A} = \frac{162,308}{2\pi \cdot 40 \cdot 100} = 6,458 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$S_{\text{innen}} = \frac{j_{\text{innen}}^2}{\gamma_1} = \underline{\underline{8,341 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

$$S_{\text{außen}} = \frac{j_{\text{außen}}^2}{\gamma_2} = \underline{\underline{0,416 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

GLET_2 5.3.25

fem -> Simulation von 2D-Geometrien

Potential und Strömungsfeld

Kästchenmethode

- 1) Feldlinien von \vec{j} sind senkrecht auf die Äquipotentiallinien von φ
- 2) Ideale Leiter ($\hat{=}$ Elektroden) sind Äquipotentialflächen/-linien
- 3) \vec{j} und φ bilden ähnliche Flächen

Formelsammlung

- $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$
- $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ (1)
- $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$
- $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (2)
- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
- $S = \vec{E} \cdot \vec{j}$ Leistungsdichte $\frac{P}{V}$
- $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ (3)



Zylindermantelfläche

$$2\pi \cdot r \cdot l$$

Beispiel 6.2

$$\gamma = 2 \cdot 10^{-6} \text{ S/cm}$$

$$r_1 = 15 \text{ mm} \hat{=} 1.5 \text{ cm}$$

$$r_2 = 50 \text{ mm} \hat{=} 5 \text{ cm}$$

$$l = 120 \text{ mm} \hat{=} 12 \text{ cm}$$

$$I = 12 \text{ mA}$$

ges.: Potentialdifferenz
 r_1 zu r_2 ,
R

$$1) I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \int dA = j \cdot 2\pi r \cdot l$$

$$\vec{j} \parallel d\vec{A} \checkmark$$

$$j \text{ homogen in } A \checkmark$$

$$\rightarrow j = \frac{I}{2\pi r \cdot l} \rightarrow \vec{j} = \frac{I}{2\pi r \cdot l} \cdot \vec{e}_r$$

$$2) \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \gamma} \cdot \vec{e}_r$$

$$3) U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r$$

$$U = \int \frac{I}{2\pi r \cdot l \cdot \gamma} \cdot \vec{e}_r \cdot dr \cdot \vec{e}_r$$

$$U = \int_{1,5}^5 \frac{I}{2\pi r \cdot l \cdot \gamma} \cdot dr$$

2 gleiche Einheitsvektoren
wenn miteinander

multipliziert werden ergibt 1

$$U = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 12 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \int_{1,5}^5 \frac{1}{r} dr \quad \left(\int \frac{1}{r} dr \rightarrow \ln(r) \Big|_{1,5}^5 \rightarrow \ln\left(\frac{5}{1,5}\right) \right)$$

$$U = 79,5774 \cdot \ln\left(\frac{5}{1,5}\right) = \underline{\underline{95,809 V}}$$

$$R = \frac{U}{I} = \underline{\underline{7984,092 \Omega}} \hat{=} \underline{\underline{7,984 k\Omega}}$$

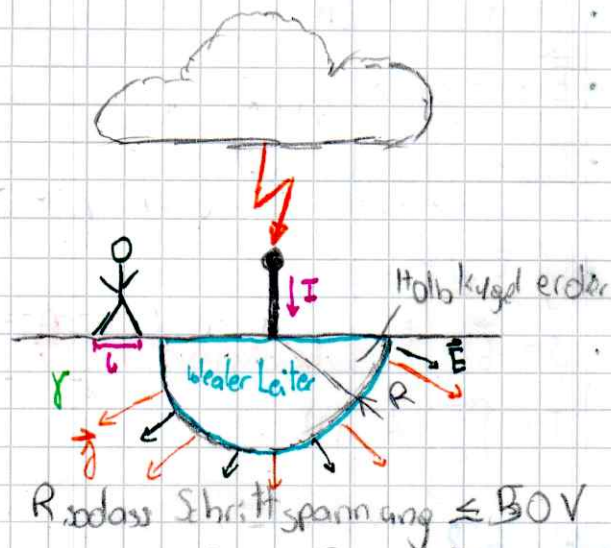
Beispiel C21

geg.: $I = 100 A$

$$\gamma = 5 \cdot 10^{-2} S/m$$

$$l = 1 m$$

$$U \leq 50 V$$



R sodass Schrittspannung $\leq 50 V$

$$1) I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \cdot A = j \cdot 2\pi r^2 \rightarrow \vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$2) \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r^2 \cdot \gamma} \cdot \vec{e}_r$$

$$3) U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R+l}^{R+L} \frac{I}{2\pi r^2 \cdot \gamma} \cdot \vec{e}_r \cdot dr \cdot \vec{e}_r$$

$$U = \frac{I}{2\pi \gamma} \cdot \int_{R+l}^{R+L} \frac{1}{r^2} dr \rightarrow U = \frac{I}{2\pi \gamma} \cdot \left(\frac{1}{R+l} + \frac{1}{R} \right) = \frac{I}{2\pi \gamma} \cdot \frac{1}{R^2 + R}$$

$$R^2 + R = \frac{I}{2\pi \gamma \cdot U} \rightarrow R = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{100}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} = R_1 = -3,0$$

GLT.2 12.03.25

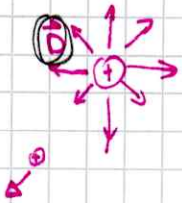
weiter mit elektrostatischer Felder:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$
$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$$
$$U = \int E d\vec{s}$$

- in elektrostatischem Feld $\gamma = 0$

Elektrische Flussdichte



Die Wirkung der Ladung in Raum kann man als den elektrischen Fluss ψ_E (psi) bezeichnen.

Die Flussdichte ist der Fluss pro Fläche.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{Gaußscher Satz}$$

„Wenn D über die geschlossene ~~Fläche~~ Oberfläche A aufintegriert wird, so entspricht dies der eingeschlossenen Ladung Q “

Permittivität

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{relative Permittivität} \\ \text{(Materialeigenschaft)} \end{array}$$

\downarrow
absolute Per. / elektrische Feld konstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$$\epsilon_r \geq 1$$

Bsp. elektr. Feld einer Punktladung



ges.: - Felder \vec{E}, \vec{D}

- Potential eines Punktes P
im Abstand r_p

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{\lambda} = Q$$

homogen + parallel

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{\lambda} = D \oint dA = D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \epsilon} \cdot \vec{e}_r$$

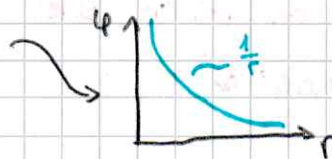
$$\varphi_P = U + 0V$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$U = \int_{r_p}^{\infty} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon} \cdot \cancel{\vec{e}_r} \cdot dr \cdot \cancel{\vec{e}_r}$$

$$U = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \int_{r_p}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_p}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r_p}$$

$$\varphi_P = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{1}{r}$$



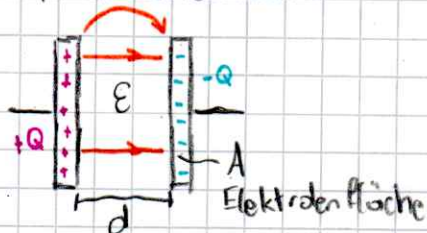
Kondensator und Kapazität



$$Q = C \cdot U$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

Plattenkondensator



Elektr. Isolat. / Folien / Keramik

Berechnung von C

1) Annahme von Q

$$2) Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$3) \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$4) U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$5) C = \frac{Q}{U}$$

Für eine allg. Geometrie
aufgrund des schwer zu
beschreibenden Feldverlaufs
nicht lösbar.

→ FEM-Simulation

→ Vereinfachende
Annahmen
 $d \ll A$



Randeffekte

Wenn $d \ll A$ sind die Randeffekte vernachlässigbar.

Die Integrationsfläche besteht aus zwei Teilen

A_1 dient zu Elektrodenfläche A ($\vec{D} \parallel d\vec{A}$, D homogen)

A_2 macht die Oberfläche zu (D ist Null)

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\rightarrow \int_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \int_{A_1} d\vec{A} = D \cdot \underbrace{A_1}_{A} = Q$$

$$D = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{A}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\vec{D} = \frac{Q}{A} \cdot \vec{e}_y}}$$

$$\underline{\underline{\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot \vec{e}_y}}$$

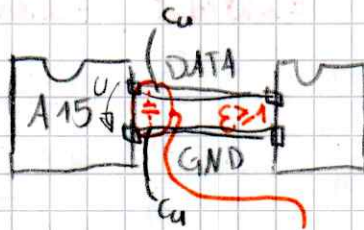
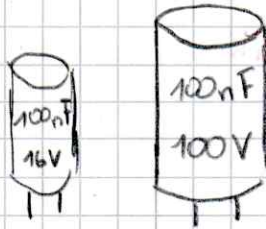
$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot \vec{e}_y \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \int_0^d dy = \underline{\underline{\frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot d}}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot d} = \underline{\underline{\epsilon \cdot \frac{A}{d}}}$$

Praxisbezug

$C \uparrow$ — $A \uparrow$ jedoch Bauteilgröße \uparrow
 $C \uparrow$ — $\epsilon \uparrow$ spezielle Werkstoffe
 $C \uparrow$ — $d \downarrow$ ja, aber $E \sim \frac{U}{d}$

Durchschlagfestigkeit
 $PVC = 40 \text{ kV/mm}$



parasitäre Kapazität

$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C}$$

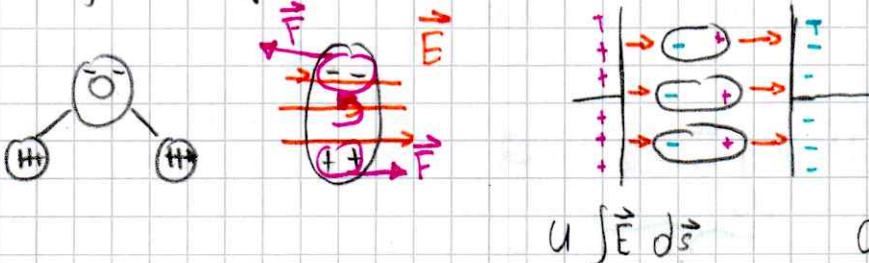
Materie im elektrischen Feld

es wirken Kräfte auf die Ladung

3 Arten von Isolatoren

- unpolarisierbare Materie $\epsilon_r = 1 \dots 10$
- Polarisierbare Materie $\epsilon_r = 10 \dots 1000$
Orientierung
- Elektret (wenn polarisiert und Feld weg, bleibt polarisiert)
Feldquelle

Polarisierung an Bsp H_2O



Die Polarisierung führt zu einer verringerten Spannung U

Dadurch erhöht sich C . $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$

Polarisierung wird über ein großes ϵ_r modelliert.

Parallelschaltung $C \rightarrow C_c = C_1 + C_2$ (Fläche wird größer)

C in Serie $\frac{1}{C_c} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (zur Erhöhung der Spannungsfestigkeit)

Achtung: Kleinster C sieht höchste Spannung

GLET_2

14.03.25

C41

geg.: $\epsilon_r = 2,2$ $h = 4\text{cm}$ $l = 8\text{m}$
 $d = 0,5\text{mm}$

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{l} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 2,2 \cdot 8,85418 \cdot \frac{0,32}{0,0005} = \frac{12466,685 \mu\text{F}}{12,466685 \text{ nF}}$$

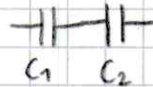
$$A = 4\text{cm} \cdot 8\text{m} = 3200 \text{ cm}^2 \hat{=} 0,32 \text{ m}^2$$

$$d = 0,5\text{mm} \hat{=} 0,0005 \text{ m}$$

Die Kapazität des Kondensators ist 12,466 nF.

C44

geg.: $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$
 $C_2 = 2,2 \mu\text{F}$



$$C_{\min} = C_1$$

$$U_{\max} = 100 \text{ V Nennspannung}$$

Nennspannung $\leq 100 \text{ V}$ pro Kondensator

$$Q = U_1 \cdot C_1 = U_2 \cdot C_2 \Rightarrow 0,1 \mu\text{F} \cdot U_1 + 2,2 \mu\text{F} \cdot U_2$$

$$Q_{\max} = C_{\min} \cdot U_{\max} = 0,1 \mu\text{F} \cdot 100 \text{ V} = \underline{\underline{10 \mu\text{C}}}$$

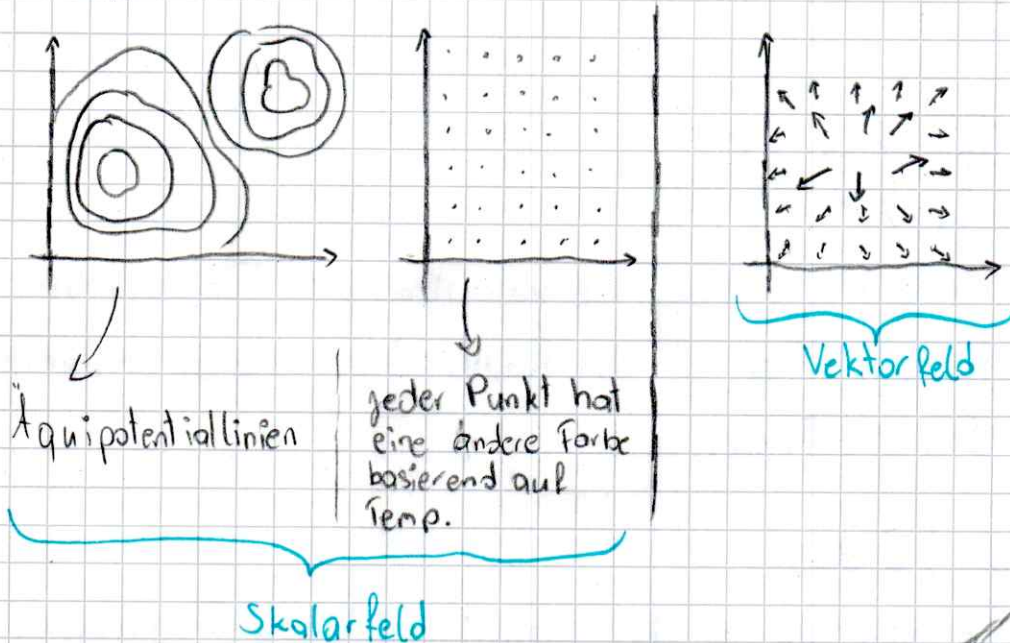
$$U_2 = \frac{Q_{\max}}{C_2} = \frac{10 \mu\text{C}}{2,2 \mu\text{F}} = \underline{\underline{4,54 \text{ V}}}$$

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = 100 \text{ V} + 4,54 \text{ V} = \underline{\underline{104,54 \text{ V}}}$$

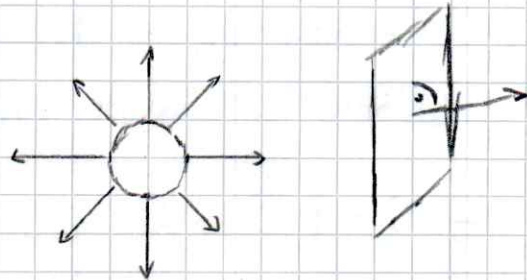
GLET - Übung 1 „el. Felder“

- 1) Skalarfeld: Temperatur in Raum
 Vektorfeld: Gravitation / Windrichtung

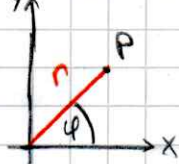
Skizzen:



- 2) senkrecht zur Fläche

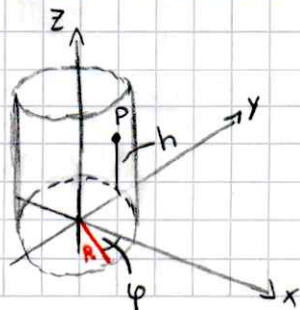


- 4) Koordinaten mit Radius und Winkel (es kann jeder Punkt auf einer Ebene erreicht werden)



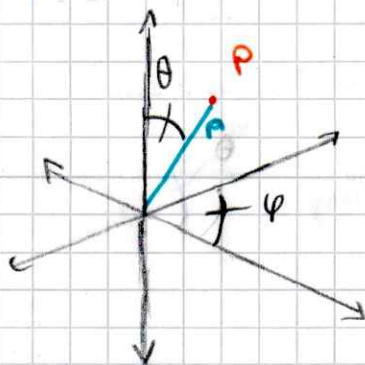
Anwendung: Felder auf Ebene mit Kreis

- 5) Koordinaten mit Radius, Winkel und Höhe (es kann jeder Punkt im 3dimensionalen Raum erreicht werden)



Anwendung: Elektrischer Leiter Kabel / Elektrode

6) Koordinaten mit Radius, Winkel, Winkel



Anwendung: Erdung Blitz einschlag

7)

$$- I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Strandichte gibt an, wie viel Strom pro Flächeninhalt fließt. Strom ist das Flächenintegral der Stromdichte über eine Fläche.

$$- U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Die Spannung ist das Linienintegral der Elektrischen Feldstärke entlang des Weges \vec{s}

$$- Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Die Ladung Q ist das Flächenintegral der elektrischen Flussdichte \vec{D} über eine geschlossene Fläche \vec{A}

8) Linien bzw Flächen, auf denen das elektrische Potenzial konstant ist.

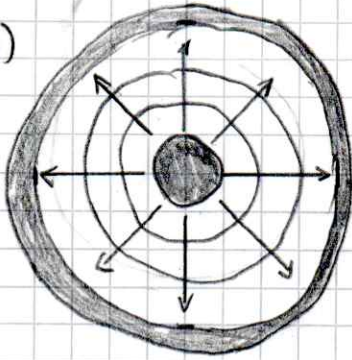
Je größer der Abstand zwischen Äquipotentiallinien desto größer die Spannung / stärker das elektrische Feld

Zwei Punkte auf dem gleichen Potential $\rightarrow U=0$

Äquipotentiallinien immer Senkrecht zu den elektrischen Feldlinien.

9)

a)



b) Beim kleineren Zylinder, dort
wo die Feldlinien am engsten
zusammen liegen

10)

$$Q = C \cdot U$$

GLET_2 19.3.25

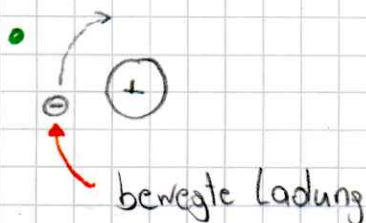
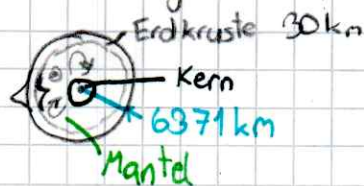
Magnetfeld

- Dauermagnetismus schon lange bekannt.
Magnesia, Stommi Magnete
- Kompass (Erdmagnetfeld) im Mittelalter von China nach Europa.
- Erste wissenschaftliche Buch „De Magnete“ William Gilbert
London ca. 1600
- 1820 Oerstedt, Kopenhagen (Zusammenhang Elektrizität und Magnetismus)

Die Ursache des Magnetfelds sind **bewegte** Ladungen.

- Strom ist bewegte Ladung

- „Dynamotheorie“
Ströme im Mantel
bewegen Ladungen



„Elementarmagnet“



„magnetische“ Materialien (sind ausgerichtet)

Nice to know:

Pole: Orte der maximalen Feldstärke
(herauskommen → Nord, eintreten → Süd)

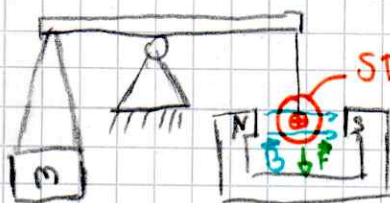
Die Feldlinien des Magnetfelds sind geschlossen.

„Wirbelfeld“



Kraft im Magnetfeld

Experiment Stromwaage



Stromführender Leiter über Länge l in
 B -Feld

Es entsteht eine Kraftwirkung
die Kraft ist proportional

- I
- l
- B ... Flussdichte

$$[B] = \underset{\text{Tesla}}{1 \text{ T}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \quad \text{Betrag: } F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

Richtung mit rechter Hand

F ... Mittelfinger

B ... Zeigefinger

I, l ... Daumen

FBI

D12

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

$$I = \frac{F}{l \cdot B \cdot \sin(\alpha)} = \underline{\underline{2,071 \text{ A}}}$$

$$\text{geg.: } \begin{array}{ll} 75^\circ & ,0,5 \text{ T} \\ 10 \text{ cm} & ,0,1 \text{ N} \end{array}$$

Die magnetische Flussdichte ist ^{für} die Kraft verantwortlich

Magnetischer Fluss

$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $[\Phi] = 1 \text{ Vs} = 1 \text{ Wb}$
Phi, Weber

017

$a = 1 \text{ cm}$

ges.: Φ, M

$I = \frac{1}{2} \text{ A}$

$B = 0,2 \text{ T}$

1) $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ a) Δ zwischen \vec{B} und $\vec{A} \rightarrow \Phi = 0$
Fläche der
Leiterschleife

b) $\vec{B} \parallel \vec{A}$ & B homogen

$\Phi = B \cdot A = 0,2 \text{ T} \cdot 0,01^2 = 0,00002 \text{ Vs} \approx \underline{\underline{20 \mu\text{Wb}}}$

2) Drehmoment

b) $M = 0$ da $\vec{r}_F \parallel \vec{F}$

$\vec{M} = \vec{r}_F \cdot \vec{F}$

a) $F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$

$F = 0,5 \cdot 0,01 \cdot 0,2 \cdot \sin(90^\circ) = 0,001 \text{ N} \approx \underline{\underline{1 \text{ mN}}}$

$M = 2 \cdot \frac{0,01 \text{ m}}{2} \cdot 0,001 \text{ N} = 0,00001 \text{ Nm} \approx \underline{\underline{10^{-5} \text{ Nm}}}$

Kraft auf eine bewegte Ladung

Lorentz - Kraft

$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

D14

Magnetfeld

 $B \otimes$ $B = 50 \mu\text{T}$

$$F_L = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Kreisbahn

 F_L \vec{v} $v = 10.000 \text{ km/s}$ e^- \ominus

$$F_z = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$F_z = F_L$$

$$r = 1,137 \text{ m}$$

$$r = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$