Notizen zu SBL 6: Mathe 1

Kapitel

Elementare Algebra

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben, welche Sie ebenfalls im Ilias finden, zu bearbeiten.

Folie 46

Folie 46 – Zwei Beispiele zum Ausklammern

$$(2x - 5y) \cdot (-b + 4c) = -2bx + 5by + 8cx - 20cy$$

Beispiel I

$$\begin{aligned}(b + 3c) \cdot (-3a) \cdot (2x - y) &= (-3a)(b + 3c)(2x - y) \\ &= (-3a)\,(2bx + 6cx - by - 3cy) \\ &= -6abx - 18acx + 3aby + 9acy\end{aligned}$$

Beispiel II

Beispiel I anschaulich:

$$(2x - 5y) \cdot (-b + 4c) =$$

$$-2xb + 5yb + 2x \cdot 4c - 5y \cdot 4c$$

$$= -2xb + 5yb + 8xc - 20cy$$

Beispiel II anschaulich:

$$(b+3c)\cdot(-3a)\cdot(2x-y) =$$

$$(-3a)\underbrace{(b+3c)(2x-y)}_{\text{Ausmultiplizieren}} =$$

$$(-3a)\,(2xb+6cx-by-3cy)$$

„Hineingeben"

$$= -6abx - 18acx + 3aby + 9acy$$

Folie 47

Folie 47 – Beispiel zu binomischen Formeln

Die binomischen Formeln:

Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(B1)} & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{(B2)} & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{(B3)} & (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

$\hookrightarrow$ Beispiel:

$$(3a+5b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(5b) + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$$

Das dies tatsächlich stimmt kann durch einsetzen von zahlen für a und b überprüft werden. Angenommen $a = 2$ Und $b = 1$, dann gilt für die linke Seite

$$(3\cdot 2 + 5\cdot 1)^2 = (6+5)^2 = 11^2 = 121$$

und auf der rechten Seite

$$9\cdot 2^2 + 30\cdot 2\cdot 1 + 25\cdot 1^2 = 9\cdot 4 + 30\cdot 2\cdot 1 + 25\cdot 1 = 36 + 60 + 25 = 121$$

Beispiel anschaulich:

$$(3a + 5b)^2 =$$

$$(3a)^2 + 2(3a)(5b) + (5b)^2$$

$$= 9a^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot a\cdot b + 25b^2$$

$$= 9a^2 + 30ab + 25b^2$$

Folie 48

Folie 48 – Zusammenfassen gleichnamiger Terme

Die folgende Konvention haben wir bereits angewandt:

Zusammenfassen gleichnamiger Terme:

Nach dem Ausmultiplizieren von Klammern sollten gleichnamige Terme (also solche, die die selben Variablen enthalten) zusammengefasst werden.

↪ Beispiele:

$$\begin{aligned}(2x-5)\cdot(-xy+4y) &= -2x^2y\overbrace{+5xy+8xy}^{=13xy}-20y\\ &= -2x^2y+13xy-20y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+3)\cdot(1-3a)\cdot(2a-4) &= (a+3)(2a-4+12a-6a^2)\\ &= (a+3)(14a-4-6a^2)\\ &= 14a^2-4a-6a^3+42a-12-18a^2\\ &= -6a^3-4a^2+38a-12\end{aligned}$$

Folie 49

Folie 49 – Ausklammern eines Faktors

Beim Umgang mit **geschachtelte Klammern** gilt:

Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

$$
\begin{aligned}
(a+bc)\cdot(3a\cdot(2a-3b)) &= (a+bc)\cdot\left(6a^2-9ab\right)\\
&= 6a^3-9a^2b+6a^2bc-9ab^2c
\end{aligned}
$$

Manchmal ist es sinnvoll aus einer Summe von Termen gemeinsame Varialen (oder Teilterme) auszuklammern.

Ausklammern eines Faktors:

Die Umformung einer Summe der Form $ax+ay$ in die Form $a\cdot(x+y)$ nennt man **Ausklammern des Faktors a** aus der Summe.

↪ Im obigen Beispiel haben alle vier Summanden den gemeinsamen Faktor a. Wir können also a ausklammern:

$$
\begin{aligned}
6a^3-9a^2b+6a^2bc-9ab^2c &= a\cdot\left(6a^2-9ab+6abc-9b^2c\right)\\
&= 3a\cdot\left(2a^2-3ab+2abc-3b^2c\right)\\
&= 3a\cdot\left(a\cdot(2a-3b+2bc)-3b^2c\right)
\end{aligned}
$$

Beispiel anschaulich:

$$6a^3-9a^2b+6a^2bc-9ab^2c =$$

→ Vielfaches von 3

→ Vielfaches von a

$$3a\cdot(2a^2-3ab+2abc-3b^2c)$$

$$= 3a\,(2a^2-3ab+2abc-3b^2c)$$

$$= 3a\,[a\,(2a-3b+2bc)-3b^2c]$$

Folie 50 & 51

Folie 50 & 51 – Kürzen von Bruchtermen

Eine wichtige Anwendung des Ausklammerns gemeinsamer Faktoren aus Summen ist das **Kürzen von Bruchtermen**:

- Kürzen ist bei Termen nicht anders als in Zahlenbrüchen!
- Dazu müssen gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner gefunden werden.

Beispiel 1:

$$\frac{4ax - 2ay}{ay} = \frac{2a \cdot (2x - y)}{ay} = \frac{2 \cdot (2x - y)}{y}$$

Eine wichtige Anwendung des Ausklammerns gemeinsamer Faktoren aus Summen ist das **Kürzen von Bruchtermen**:

- Kürzen ist bei Termen nicht anders als in Zahlenbrüchen!
- Dazu müssen gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner gefunden werden.

Beispiel 2:

$$\frac{12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab}{4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx}$$

Zuerst ein Blick auf den Zähler:

$$12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab = 2a(6bx^2 - 2ax + x - 4b)$$

Nun betrachten wir den Nenner:

$$4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx = 2ax(2y^2 - 8x + 5ab)$$

Insgesammt folgt also:

$$\frac{12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab}{4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx} = \frac{2a(6bx^2 - 2ax + x - 4b)}{2ax(2y^2 - 8x + 5ab)}$$

$$= \frac{(6bx^2 - 2ax + x - 4b)}{x(2y^2 - 8x + 5ab)}$$

Beispiel I anschaulich:

$$\frac{4ax-2ay}{ay}=\frac{2a\cdot(2x-y)}{ay}$$

$$=\frac{2\cancel{a}\cdot(2x-y)}{\cancel{a}y}$$

$$=\frac{2\cdot(2x-y)}{y}$$