LiAlg_Übung 3

14.03.25

2. Gausches Eliminationsverfahren

$$2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0$$
$$-2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$$
$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$\mathrm{II}+\mathrm{I}$ $\quad$ $8(2\cdot \mathrm{I})-\mathrm{III}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\mathrm{III}+\mathrm{II}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{n=3\ ,\ r=2}$$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen, da $r < n$.

II $\quad -12x_2 + 9x_3 = 0$

$$x_2 = \frac{9x_3}{12} = \frac{3x_3}{4}$$

I $\quad 2x_1 - 5\cdot\left(\frac{3x_3}{4}\right) + 8\cdot x_3 = 0$

$$2x_1 - \frac{15x_3}{4} + \frac{32x_3}{4} = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{17x_3}{8}}}$$

II $\quad -12\cdot x_2 + 9\cdot x_3 = 0$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{3}{4}\cdot x_3}}$$

die LGS sind vielfachen des Vektors

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 \approx \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

3. GEV und Python

Beispiel A:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}\ \&\ \mathrm{III}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\underbrace{n=3,\ r=3}_{\text{eindeutige Lösung}}$

$$\underline{\underline{x_3 = 0}}$$

$\mathrm{II}: x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + 0 = 0$

$\underline{\underline{x_2 = 0}}$

$\mathrm{I}: x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 + 0 + 0 = 1$

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel B:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$
$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0$$
$$-x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\mathrm{II}\ \&\ \mathrm{III})-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-(2\cdot\mathrm{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$[0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1]$ ist ein Widerspruch → keine Lösung

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Rang}(A) = 2 \\ \mathrm{Rang}(A|b) = 3 \end{array}\right\}$$ das LGS hat keine Lösung.

Beispiel C:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$$
$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(\mathrm{II}\ \&\ \mathrm{III})-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-(2\cdot\mathrm{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang $A = 2$
Rang $A|b = 2$
$n = 3,\ r = 2$

unendlich viele Lösungen

$\mathrm{II}: x_2 - x_3 = 1 \rightarrow \underline{\underline{x_2 = x_3 + 1}}$

$\mathrm{I}: -x_1 + 3\cdot(x_3 + 1) - 2x_3 = 4 \rightarrow \underline{\underline{x_1 = x_3 - 1}}$

4. Existenz und Eindeutigkeit

Die Anzahl der Variablen ist nicht gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix. (III ist Linearkombination von I und II)

5. Parabel durch drei Punkte

1. $y = a + bx + cx^2$ Punkte (1,1), (2,2), (3,0)

$$\text{I}: \quad a + b + c = 1$$

$$\text{II}: \quad a + 2b + 4c = 2$$

$$\text{III}: \quad a + 3b + 9c = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\text{II} \,\&\, \text{III}) - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - (2\cdot\text{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

[Rang $A = 3$; Rang $A|b = 3$] ; [$n = 3$; $r = 3$] → eine Lösung

$\text{III}: 2c = -3 \rightarrow \underline{\underline{c = -\frac{3}{2}}}$

$\text{II}: b + 3 \cdot c = 1 \rightarrow \underline{\underline{b = \frac{11}{2}}}$

$\text{I}: a + b + c = 1 \rightarrow \underline{\underline{a = -3}}$

$$\underline{\underline{y(x) = -3 + \frac{11}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{y(x) = -3 + 5{,}5x + 1{,}5x^2}}$$

3. Keine Lösung

Das LGS hat keine Lösung, wenn die Punkte nicht auf einer Parabel liegen (z.B. wenn die Punkte auf einer Geraden liegen)

Unendlich viele Lösungen

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wenn alle Punkte auf unendlich vielen Parabeln liegen. (z.B. wenn alle Punkte identisch sind)