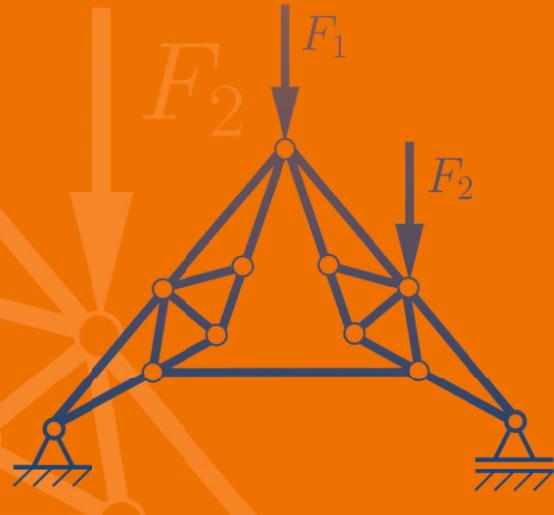


Dietmar Gross · Werner Hauger  
Jörg Schröder · Wolfgang A. Wall

# Technische Mechanik 1

Statik

14. Auflage



EXTRAS ONLINE



Springer Vieweg

---

# Technische Mechanik 1

---

Dietmar Gross · Werner Hauger  
Jörg Schröder · Wolfgang A. Wall

# Technische Mechanik 1

## Statik

14., aktualisierte Auflage



Springer Vieweg

Dietmar Gross  
Technische Universität Darmstadt  
Darmstadt, Deutschland

Werner Hauger  
Technische Universität Darmstadt  
Darmstadt, Deutschland

Jörg Schröder  
Universität Duisburg-Essen  
Essen, Deutschland

Wolfgang A. Wall  
Technische Universität München  
Garching, Deutschland

ISBN 978-3-662-59156-7

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59157-4>

ISBN 978-3-662-59157-4 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Michael Kottusch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

## Vorwort

Die *Statik* stellt den ersten Teil eines vierbändigen Lehrbuches der Technischen Mechanik dar. Sie wird gefolgt von der *Elastostatik*, der *Kinetik* und einem Band, der sich mit der Hydromechanik, Elementen der Höheren Mechanik und Numerischen Methoden befasst.

Ziel des Buches ist es, an das Verstehen der wesentlichen Grundgesetze und Methoden der Mechanik heranzuführen. Auch soll es zur Entwicklung der Fähigkeit beitragen, mit Hilfe der Mechanik Ingenieurprobleme zu formulieren und selbstständig zu lösen.

Das Buch ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die von den Verfassern für Studierende aller Ingenieur-Fachrichtungen gehalten wurden. Der dargestellte Stoff orientiert sich im Umfang an den Mechanik Kursen deutschsprachiger Hochschulen und am internationalen Standard. Bei Beschränkung auf das unumgänglich Notwendige wurde bewusst so manches wünschenswerte Detail einer ausführlicheren Darstellung des Grundlegenden geopfert. Ohne unpräzise zu sein, haben wir einen möglichst einfachen Zugang zur Mechanik gewählt, der den unterschiedlichen Eingangskenntnissen der heutigen Studienanfänger gerecht wird. Uns kam es vor allem darauf an, ein tragfähiges Fundament zu legen, das in den Ingenieurfächern genutzt werden kann und das ein tieferes Eindringen in weitergehende Gebiete der Mechanik ermöglicht.

Die Mechanik ist nicht durch reine Lektüre erlernbar. Dieses Buch sollte deshalb als echtes Arbeitsmittel verwendet werden. Der Leser muss sich schon die Mühe machen, mit Bleistift und Papier die eine oder andere Herleitung nachzuvollziehen. Vor allem kann die Anwendung der scheinbar so leichten Gesetzmäßigkeiten nur durch selbstständiges Lösen von Aufgaben gelernt werden. Diesem Zweck dienen auch die durchgerechneten Beispiele.

Die freundliche Aufnahme, welche dieses Buch gefunden hat, macht eine Neuauflage erforderlich. Wir haben sie genutzt, um das Buch zu überarbeiten sowie eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen vorzunehmen. Hingewiesen sei auch auf das erweiterte Zusatzmaterial im Netz, das wir unter [tm-tools.de](http://tm-tools.de) der Leserschaft zur Verfügung stellen. Erwähnt seien in diesem Zusammenhang noch unsere Aufgabensammlungen sowie die englische Ausgabe dieser Werke als ‚Engineering Mechanics 1, 2, 3‘ und ‚Statics –, Mechanics of Materials –, Dynamics – Formulas and Problems‘.

Herzlich gedankt sei an dieser Stelle Frau Heike Herbst, die mit großer Sorgfalt die Zeichnungen anfertigte. Unser Dank gilt auch den Studenten Simon Altmanns-

hofer, Andreas Bollinger, Bernd Budich, Matthias Mayr, Sonja Stegbauer, Fritz Wenzl und Simon Winkler, welche die ersten TM-Tools erstellt haben. Schließlich danken wir dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und für die ansprechende Ausstattung des Buches.

Darmstadt, Essen und München  
Sommer 2019

D. Gross  
W. Hauger  
J. Schröder  
W.A. Wall

## Die Autoren



**Dietmar Gross** studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr- und Fachbücher.



**Werner Hauger** studierte Angewandte Mathematik und Mechanik an der Universität Karlsruhe und promovierte an der Northwestern University in Evanston/Illinois. Er war mehrere Jahre in der Industrie tätig, hatte eine Professur an der Helmut-Schmidt-Universität in Hamburg und wurde 1978 an die TU Darmstadt berufen. Sein Arbeitsgebiet ist die Festkörpermechanik mit den Schwerpunkten Stabilitätstheorie, Plastodynamik und Biomechanik. Er ist Autor von Lehrbüchern und war Mitherausgeber internationaler Fachzeitschriften.



**Jörg Schröder** studierte Bauingenieurwesen, promovierte an der Universität Hannover und habilitierte an der Universität Stuttgart. Nach einer Professur für Mechanik an der TU Darmstadt ist er seit 2001 Professor für Mechanik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die theoretische und die computerorientierte Kontinuumsmechanik sowie die phänomenologische Materialtheorie mit Schwerpunkten auf der Formulierung anisotroper Materialgleichungen und der Weiterentwicklung der Finite-Elemente-Methode.



**Wolfgang A. Wall** studierte Bauingenieurwesen an der Universität Innsbruck und promovierte an der Universität Stuttgart. Seit 2003 leitet er den Lehrstuhl für Numerische Mechanik an der Fakultät Maschinenwesen der TU München. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die numerische Strömungs- und Strukturmechanik. Schwerpunkte dabei sind gekoppelte Mehrfeld- und Mehrskalenprobleme mit Anwendungen, die sich von der Aeroelastik bis zur Biomechanik erstrecken.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	
1.1	Die Kraft . . . . .	3
1.2	Eigenschaften und Darstellung der Kraft . . . . .	3
1.3	Der starre Körper . . . . .	5
1.4	Einteilung der Kräfte, Schnittprinzip . . . . .	6
1.5	Wechselwirkungsgesetz . . . . .	9
1.6	Dimensionen und Einheiten . . . . .	10
1.7	Lösung statischer Probleme, Genauigkeit . . . . .	11
1.8	Zusammenfassung . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt</b>	
2.1	Zusammensetzung von Kräften in der Ebene . . . . .	17
2.2	Zerlegung von Kräften in der Ebene, Komponentendarstellung . . . . .	21
2.3	Gleichgewicht in der Ebene . . . . .	24
2.4	Beispiele ebener zentraler Kräftegruppen . . . . .	27
2.5	Zentrale Kräftegruppen im Raum . . . . .	33
2.6	Zusammenfassung . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht des starren Körpers</b>	
3.1	Allgemeine Kräftegruppen in der Ebene . . . . .	45
3.1.1	Kräftepaar und Moment des Kräftepaars . . . . .	45
3.1.2	Moment einer Kraft . . . . .	49
3.1.3	Die Resultierende ebener Kraftsysteme . . . . .	52
3.1.4	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	54
3.1.5	Grafische Zusammensetzung von Kräften: das Seileck . . . . .	63
3.2	Allgemeine Kräftegruppen im Raum . . . . .	67
3.2.1	Der Momentenvektor . . . . .	67
3.2.2	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	74
3.2.3	Dyname, Kraftschraube . . . . .	79
3.3	Zusammenfassung . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Schwerpunkt</b>	
4.1	Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte . . . . .	89
4.2	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers . . . . .	92
4.3	Flächenschwerpunkt . . . . .	97

4.4	Linienschwerpunkt . . . . .	107
4.5	Zusammenfassung . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Lagerreaktionen</b>	
5.1	Ebene Tragwerke . . . . .	113
5.1.1	Lager . . . . .	113
5.1.2	Statische Bestimmtheit . . . . .	116
5.1.3	Berechnung der Lagerreaktionen . . . . .	118
5.1.4	Superpositionsprinzip . . . . .	121
5.2	Räumliche Tragwerke . . . . .	123
5.3	Mehrteilige Tragwerke . . . . .	126
5.3.1	Statische Bestimmtheit . . . . .	126
5.3.2	Dreigelenkbogen . . . . .	131
5.3.3	Gelenkbalken . . . . .	134
5.3.4	Kinematische Bestimmtheit . . . . .	137
5.4	Zusammenfassung . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Fachwerke</b>	
6.1	Statische Bestimmtheit . . . . .	147
6.2	Aufbau eines Fachwerks . . . . .	149
6.3	Ermittlung der Stabkräfte . . . . .	151
6.3.1	Knotenpunktverfahren . . . . .	151
6.3.2	Cremona-Plan . . . . .	157
6.3.3	Rittersches Schnittverfahren . . . . .	161
6.4	Zusammenfassung . . . . .	165
<b>7</b>	<b>Balken, Rahmen, Bogen</b>	
7.1	Schnittgrößen . . . . .	169
7.2	Schnittgrößen am geraden Balken . . . . .	173
7.2.1	Balken unter Einzellasten . . . . .	173
7.2.2	Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen .	181
7.2.3	Integration und Randbedingungen . . . . .	183
7.2.4	Übergangsbedingungen bei mehreren Feldern . . . . .	187
7.2.5	Föppl-Symbol . . . . .	193
7.2.6	Punktweise Ermittlung der Schnittgrößen . . . . .	197
7.3	Schnittgrößen bei Rahmen und Bogen . . . . .	201
7.4	Schnittgrößen bei räumlichen Tragwerken . . . . .	207
7.5	Zusammenfassung . . . . .	211

<b>8 Arbeit</b>	
8.1 Arbeitsbegriff und Potential . . . . .	215
8.2 Der Arbeitssatz . . . . .	221
8.3 Gleichgewichtslagen und Kräfte bei beweglichen Systemen . . . . .	223
8.4 Ermittlung von Reaktions- und Schnittkräften . . . . .	228
8.5 Stabilität einer Gleichgewichtslage . . . . .	233
8.6 Zusammenfassung . . . . .	244
<b>9 Haftung und Reibung</b>	
9.1 Grundlagen . . . . .	247
9.2 Die Coulombschen Reibungsgesetze . . . . .	249
9.3 Seilhaftung und Seilreibung . . . . .	259
9.4 Zusammenfassung . . . . .	263
<b>A Vektoren, Gleichungssysteme</b>	. . . . . 265
A.1 Elemente der Vektorrechnung . . . . .	265
A.1.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	268
A.1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . .	269
A.1.3 Skalarprodukt . . . . .	269
A.1.4 Vektorprodukt . . . . .	270
A.2 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	272
<b>Englische Fachausdrücke</b>	. . . . . 277
<b>Glossar</b>	. . . . . 287
<b>Stichwortverzeichnis</b>	. . . . . 299

---

# Einführung

Die Mechanik ist der älteste und am weitesten entwickelte Teil der Physik. Als eine wichtige Grundlage der Technik nimmt ihre Bedeutung wegen der laufenden Erweiterung ihrer Anwendungsgebiete immer mehr zu.

Die Aufgabe der Mechanik ist die Beschreibung und Vorherbestimmung der Bewegungen von Körpern sowie der Kräfte, die mit diesen Bewegungen im Zusammenhang stehen. Technische Beispiele für solche Bewegungen sind das rollende Rad eines Fahrzeugs, die Strömung einer Flüssigkeit in einem Kanal, die Bahn eines Flugzeuges oder die eines Satelliten. „Bewegungen“ im verallgemeinerten Sinn sind aber auch die Durchbiegung einer Brücke oder die Deformation eines Bauteiles unter der Wirkung von Lasten. Ein wichtiger Sonderfall der Bewegung ist der Zustand der Ruhe. Ein Gebäude, ein Damm oder ein Fernsehturm sollen schließlich so bemessen sein, dass sie sich gerade *nicht* bewegen oder einstürzen.

Die Mechanik gründet sich auf einige wenige Naturgesetze von *axiomatischem Charakter*. Darunter versteht man Aussagen, die vielfachen Beobachtungen entnommen sind und aus der Erfahrung heraus als richtig angesehen werden; auch ihre Folgerungen werden durch die Erfahrung bestätigt. In diesen Naturgesetzen und den daraus folgenden Sätzen werden über mechanische Größen, wie Geschwindigkeit, Masse, Kraft, Impuls, Energie, welche die mechanischen Eigenschaften eines Systems bzw. die Wirkungen auf dieses System beschreiben, Aussagen gemacht, oder diese Begriffe werden miteinander verknüpft.

Sowohl in den Naturgesetzen selbst als auch in deren Anwendungen werden nicht reale Körper oder reale technische Systeme mit ihren vielfältigen Eigenschaften betrachtet, sondern es werden Modelle untersucht, welche die wesentlichen mechanischen Merkmale der realen Körper oder Systeme besitzen. Beispiele hierfür sind Idealisierungen wie *starrer Körper* oder *Massenpunkt*. Ein realer Körper oder ein technisches Bauteil sind natürlich immer in gewissem Maße deformierbar. Man wird sie jedoch dann als nichtverformbar, d.h. als *starre Körper* auffassen können, wenn die Deformationen keine wesentliche Rolle bei der Beschreibung eines mechanischen Vorganges spielen. Sollen der Wurf eines Steines oder die Bewegung eines Planeten im Sonnensystem untersucht werden, so ist es meist hinreichend, diese Körper als *Massenpunkte* anzusehen, da ihre Abmessungen sehr klein im Vergleich zu den zurückgelegten Wegen sind.

Als exakter Sprache bedient sich die Mechanik der Mathematik. Erst sie ermöglicht präzise Formulierungen ohne Bindung an einen bestimmten Ort oder an eine bestimmte Zeit, und sie versetzt uns in die Lage, mechanische Vorgänge zu

beschreiben und zu erfassen. Will ein Ingenieur ein technisches Problem mit Hilfe der Mechanik lösen, so hat er das reale technische System zunächst auf ein Modell abzubilden, das dann unter Anwendung der mechanischen Grundgesetze mathematisch analysiert werden kann. Die mathematische Lösung ist schließlich wieder zurück zu übersetzen, d.h. mechanisch zu interpretieren und technisch auszuwerten.

Da es zunächst auf das Erlernen der Grundgesetze und ihrer richtigen Anwendung ankommt, werden wir die Frage der Modellbildung, die viel Können und Erfahrung voraussetzt, meist ausklammern. Die mechanische Analyse idealisierter Systeme, in denen der reale technische Ausgangspunkt manchmal nicht mehr erkennbar ist, ist jedoch nicht wirklichkeitsfremde Spielerei, sondern sie soll den angehenden Ingenieur in die Lage versetzen, später praktische Probleme mit Hilfe der Theorie selbstständig zu lösen.

Eine Einteilung der Mechanik kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. So spricht man je nach dem Aggregatzustand der Körper von der *Mechanik fester Körper*, der *Mechanik flüssiger Körper* und der *Mechanik gasförmiger Körper*. Die festen Körper, mit denen wir uns hier ausschließlich beschäftigen, kann man wieder unterteilen in *starre Körper*, *elastische Körper* oder *plastische Körper*; bei den flüssigen Körpern unterscheidet man zum Beispiel *reibungsfreie* und *viskose* Flüssigkeiten. Die Eigenschaften *starr*, *elastisch* oder *viskos* sind dabei wieder Idealisierungen, durch welche die wesentlichen Eigenschaften der realen Körper mathematisch erfassbar werden.

Nach der Grundaufgabe, nämlich der Untersuchung von Kräften und Bewegungen, unterteilt man die Mechanik auch in *Kinematik* und *Dynamik*. Die Kinematik (griech. kinesis = Bewegung) ist dabei die Lehre vom geometrischen und zeitlichen Bewegungsablauf, ohne dass auf Kräfte als Ursache oder Wirkung der Bewegung eingegangen wird. Die Dynamik (griech. dynamis = Kraft) beschäftigt sich dagegen mit den Kräften und den mit ihnen im Zusammenhang stehenden Bewegungen. Die Dynamik unterteilt man in die *Statik* und die *Kinetik*. Dabei befasst sich die Statik (lat. status = Stehen) mit den Kräften und dem Gleichgewicht (Sonderfall der Ruhe), während die Kinetik tatsächliche Bewegungen unter der Wirkung von Kräften untersucht.

Daneben unterteilt man die Mechanik auch noch in *Analytische Mechanik* und *Technische Mechanik*. Die Analytische Mechanik untersucht die mechanischen Vorgänge mit den analytischen Hilfsmitteln der Mathematik und dem Ziel, zu prinzipiellen Einsichten und Gesetzmäßigkeiten zu gelangen. Das Detailproblem ist dabei untergeordnet. Unter Technischer Mechanik versteht man dagegen eine Mechanik, die sich auf die Probleme und Ansprüche der konstruierenden und berechnenden Ingenieure konzentriert. Sie müssen Brücken, Kräne, Gebäude, Maschinen,

Fahrzeuge oder Komponenten von Mikrosystemen statisch und dynamisch so analysieren, dass sie bestimmte Belastungen ertragen oder bestimmte Bewegungen ausführen können.

In der geschichtlichen Entwicklung ist der Ursprung der Mechanik in der griechischen Antike anzusiedeln, obwohl sich natürlich die Menschen bei Werkzeugen und Geräten schon viel früher ihrer durch Erfahrung gewonnenen mechanischen Erkenntnisse bedienten. Durch die Arbeiten von Archimedes (287–212) über Hebel, Flaschenzug, Schwerpunkt und Auftrieb wurden einige Grundsteine für die Statik gelegt, zu denen jedoch bis zur Renaissance nichts Bemerkenswertes hinzukam. Weitere Fortschritte erzielten Leonardo da Vinci (1452–1519) mit Betrachtungen über das Gleichgewicht auf der schießen Ebene und Simon Stevin (1548–1620) mit seiner Erkenntnis des Gesetzes der Kräftezusammensetzung. Die ersten Untersuchungen zur Bewegungslehre gehen auf Galileo Galilei (1564–1642) zurück, der die Fallgesetze fand; zu ihnen kamen die Gesetze der Planetenbewegung von Johannes Kepler (1571–1630) und die vielfältigen Arbeiten von Christian Huygens (1629–1695). Sie mündeten in die Formulierung der Bewegungsgesetze durch Isaac Newton (1643–1727). Hier setzte eine stürmische Entwicklung ein, die einherging mit der Entwicklung der Analysis und die mit der Familie Bernoulli (17. und 18. Jhd.), mit Leonhard Euler (1707–1783), Jean Lerond D'Alembert (1717–1783) und Joseph Louis Lagrange (1736–1813) verbunden ist. Infolge der Fortschritte der analytischen und numerischen Methoden – letztere besonders gefördert durch die Computerentwicklung – erschließt die Mechanik heute immer weitere Gebiete und immer komplexere Problemstellungen einer exakten Analyse. Gleichzeitig dringt sie durch ihre Methodik der Modellbildung und mathematischen Analyse auch in Teile von früher rein beschreibenden Wissenschaften, wie Medizin, Biologie oder Sozialwissenschaften ein.

---

# Grundbegriffe

1

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

1.1	Die Kraft . . . . .	3
1.2	Eigenschaften und Darstellung der Kraft . . . . .	3
1.3	Der starre Körper . . . . .	5
1.4	Einteilung der Kräfte, Schnittprinzip . . . . .	6
1.5	Wechselwirkungsgesetz . . . . .	9
1.6	Dimensionen und Einheiten . . . . .	10
1.7	Lösung statischer Probleme, Genauigkeit . . . . .	11
1.8	Zusammenfassung . . . . .	13

- **Lernziele** Die *Statik* ist die Lehre von den Kräften an Körpern, die sich im Gleichgewicht befinden. Um statische Probleme untersuchen zu können, müssen wir uns zunächst mit einigen Grundbegriffen, Erfahrungssätzen und Arbeitsprinzipien beschäftigen. Besondere Bedeutung haben dabei das Schnittprinzip, das Wechselwirkungsgesetz sowie das „Freikörperbild“. Sie werden bei der Lösung von nahezu allen Problemen der Statik angewendet.

## 1.1 Die Kraft

Den Begriff der *Kraft* entnehmen wir unserer täglichen Erfahrung. Obwohl man Kräfte nicht sehen oder direkt beobachten kann, sind uns doch ihre Wirkungen geläufig: eine Schraubenfeder verlängert sich, wenn wir ein Gewicht daran hängen oder wenn wir daran ziehen. Die Muskelspannung vermittelt uns dabei ein qualitatives Gefühl für die Kraft in der Feder. Ein Stein wird beim freien Fall durch die Schwerkraft, beim Abwerfen durch die Muskelkraft beschleunigt. Wir spüren den Druck auf die Handfläche, wenn wir einen darauf liegenden Körper heben. Gehen wir davon aus, dass uns die Schwerkraft und ihre Wirkungen aus der Erfahrung bekannt sind, so können wir die Kraft als eine Größe bezeichnen, die mit der Schwerkraft vergleichbar ist.

Die Statik untersucht ruhende Körper. Aus Erfahrung wissen wir, dass ein Körper, der *nur* der Wirkung der Schwerkraft überlassen ist, sich bewegt: er fällt. Damit ein Stein nicht fällt, sich also im Gleichgewicht befindet, müssen wir auf ihn einwirken, zum Beispiel durch unsere Muskelkraft. Wir können somit auch sagen:

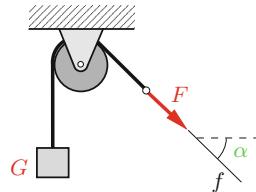
Eine Kraft ist eine physikalische Größe, die sich mit der Schwerkraft ins Gleichgewicht setzen lässt.

## 1.2 Eigenschaften und Darstellung der Kraft

Die Kraft ist durch drei Eigenschaften bestimmt: Betrag, Richtung und Angriffspunkt.

Der *Betrag* gibt die Größe der wirkenden Kraft an. Ein qualitatives Gefühl dafür vermittelt die unterschiedliche Muskelspannung, wenn wir verschiedene Körper heben oder wenn wir mit unterschiedlicher Intensität gegen eine Wand drücken. Gemessen werden kann der Betrag  $F$  einer Kraft, indem man sie mit der Schwerkraft, d. h. mit geeichten Gewichten vergleicht: befindet sich in Abb. 1.1 der Körper vom Gewicht  $G$  im Gleichgewicht, so gilt  $F = G$ . Als Maßeinheit für die Kraft verwenden wir das „Newton“ oder abgekürzt N (vgl. Abschn. 1.6).

Dass die Kraft eine *Richtung* hat, ist uns ebenfalls geläufig. Während die Schwerkraft immer lotrecht nach unten wirkt, können wir mit der Hand senkrecht oder schräg auf eine Tischplatte drücken. Die Kiste auf der glatten Unterlage in



**Abb. 1.1** Gleichgewicht

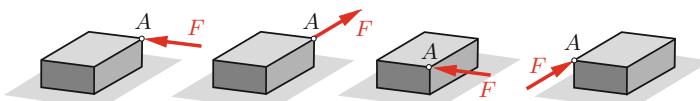
Abb. 1.2 wird sich in verschiedene Richtungen bewegen, je nachdem in welcher Richtung man auf sie mit der Kraft  $F$  einwirkt. Die Richtung der Kraft können wir durch ihre *Wirkungslinie* und den Richtungssinn auf ihr beschreiben. In Abb. 1.1 ist die Wirkungslinie  $f$  der Kraft  $F$  unter dem Winkel  $\alpha$  zur Horizontalen geneigt. Der Richtungssinn wird durch den Pfeil ausgedrückt.

Schließlich wirkt die Kraft an einem bestimmten *Angriffspunkt*. Abhängig davon, wo sich dieser Punkt  $A$  in Abb. 1.2 an der Kiste befindet, wird die Kraft unterschiedliche Bewegungen verursachen.

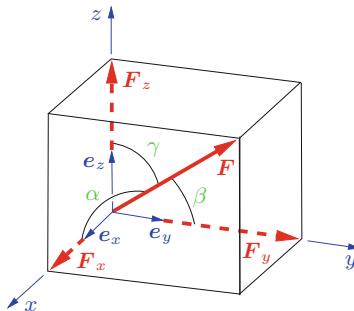
Durch Betrag und Richtung ist mathematisch ein *Vektor* bestimmt. Im Unterschied zu einem freien Vektor, der im Raum beliebig parallel verschoben werden kann, ist die Kraft an ihre Wirkungslinie gebunden und besitzt einen Angriffspunkt:

Die Kraft ist ein gebundener Vektor.

Entsprechend der Symbolik der Vektorrechnung schreiben wir für die Kraft  $\mathbf{F}$  und für den Betrag der Kraft  $|F|$  oder  $F$ . In Zeichnungen stellen wir die Kraft wie in den Abb. 1.1 und 1.2 durch einen Pfeil dar. Da aus dem Pfeilbild der Vektorcharakter meist eindeutig hervorgeht, begnügt man sich oft damit, nur den Betrag  $F$  der Kraft an den Pfeil zu schreiben.



**Abb. 1.2** Angriffspunkt  $A$  einer Kraft



**Abb. 1.3** Darstellung einer Kraft in kartesischen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten (vgl. Abb. 1.3 und Anhang A) können wir den Kraftvektor mit Hilfe der Einheitsvektoren  $e_x, e_y, e_z$  darstellen als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z. \quad (1.1)$$

Für den Betrag  $F$  gilt nach dem Satz von Pythagoras im Raum

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.2)$$

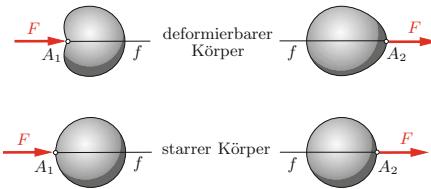
Die Richtungswinkel und damit die Richtung der Kraft folgen aus

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (1.3)$$

### 1.3 Der starre Körper

Als *starren Körper* bezeichnen wir einen Körper, der unter der Wirkung von Kräften keine Deformationen erfährt; die gegenseitigen Abstände beliebiger Körperpunkte bleiben immer gleich. Dies stellt natürlich eine Idealisierung eines realen Körpers dar, die allerdings oft mit hinreichender Näherung erfüllt ist. Aus Erfahrung mit solchen Körpern weiß man, dass eine Einzelkraft entlang ihrer Wirkungs linie beliebig verschoben werden kann, ohne dass die Wirkung auf diesen Körper als Ganzes verändert wird.

Wir veranschaulichen dies in Abb. 1.4. Während bei der deformierbaren Kugel die Wirkung der Kraft vom Angriffspunkt abhängt, ist es bei der starren Kugel

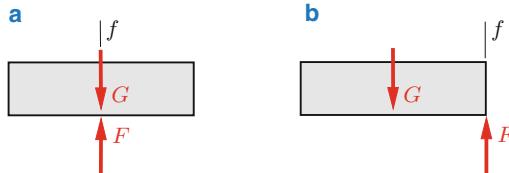


**Abb. 1.4** Deformierbarer bzw. starrer Körper

hinsichtlich der Wirkung der Kraft  $F$  auf den ganzen Körper gleichgültig, ob an der Kugel gezogen oder gedrückt wird. Diese Tatsache drücken wir durch die Sätze aus:

Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper ist von der Lage des Angriffspunktes auf der Wirkungslinie unabhängig. Die Kräfte an starren Körpern sind linienflüchtige Vektoren: sie können entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden.

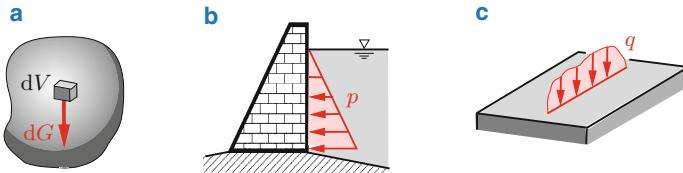
Eine *Parallelverschiebung* von Kräften ändert ihre Wirkung jedoch wesentlich. So zeigt die Erfahrung, dass wir einen Körper vom Gewicht  $G$  im Gleichgewicht halten können, wenn wir ihn geeignet (unterhalb des Schwerpunktes) durch die Kraft  $F$  mit  $F = G$  unterstützen (Abb. 1.5a). Verschieben wir die Kraft  $F$  parallel, so kommt es zu einer Drehwirkung, und der Körper wird rotieren (Abb. 1.5b).



**Abb. 1.5** Zur Parallelverschiebung einer Kraft

## 1.4 Einteilung der Kräfte, Schnittprinzip

Die Kraft mit Wirkungslinie und Angriffspunkt stellt eine Idealisierung dar. Wir bezeichnen sie als *Einzelkraft*. Man kann sie sich weitgehend realisiert vorstellen, wenn ein Körper über einen dünnen Faden oder eine Nadelspitze belastet wird. In



**Abb. 1.6** **a** Volumenkraft, **b** Flächenkraft, **c** Linienkraft

der Natur sind nur zwei Arten von Kräften bekannt: die Volumenkräfte und die Flächenkräfte.

Als *Volumenkräfte* bezeichnet man Kräfte, die über das Volumen eines Körpers verteilt sind. Ein Beispiel hierfür ist das Gewicht. Jedes noch so kleine Teilchen (infinitesimales Volumenelement  $dV$ ) des Gesamtvolumens hat ein bestimmtes Teilgewicht  $dG$  (Abb. 1.6a). Die Summe aller dieser im Volumen kontinuierlich verteilten Kräfte  $dG$  ergibt das Gesamtgewicht  $G$ . Andere Beispiele für Volumenkräfte sind magnetische und elektrische Kräfte.

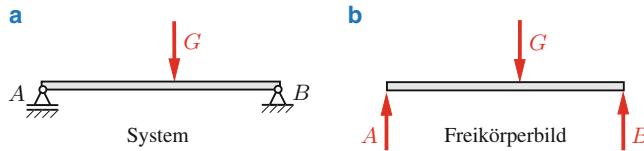
*Flächenkräfte* treten in der Berührungsfläche zweier Körper auf. So sind beispielsweise der Wasserdruk  $p$  auf eine Staumauer (Abb. 1.6b), die Schneelast auf einem Dach oder der Druck eines Körpers auf der Handfläche flächenförmig verteilt.

Als Idealisierung findet in der Mechanik noch die *Linienkraft* (Streckenlast) Verwendung. Es handelt sich dabei um Kräfte, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sind. Drückt man mit einer Schneide gegen einen Körper und sieht von der endlichen Dicke der Schneide ab, so wirkt entlang der Berührungsline die Linienkraft  $q$  (Abb. 1.6c).

Kräfte können auch noch nach anderen Gesichtspunkten eingeteilt werden. So unterscheidet man *eingeprägte Kräfte* und *Reaktionskräfte*. Als *eingeprägt* bezeichnet man die bei einem mechanischen System physikalisch vorgegebenen Kräfte, wie zum Beispiel das Gewicht, den Winddruck oder eine Schneelast.

*Reaktionskräfte* oder Zwangskräfte entstehen durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheit, d. h. durch die Zwangsbedingungen, denen ein System unterliegt. Auf einen fallenden Stein wirkt nur die eingeprägte Gewichtskraft. Hält man den Stein in der Hand, so ist seine Bewegungsfreiheit eingeschränkt; auf den Stein wird dann von der Hand zusätzlich eine Zwangskraft ausgeübt.

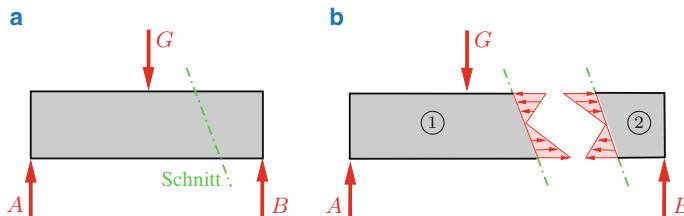
Reaktionskräfte kann man sich nur veranschaulichen, indem man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst. Man nennt dies *Freimachen* oder *Freischneiden*. In Abb. 1.7a ist ein Balken durch die eingeprägte Kraft  $G$  belastet. Die Lager  $A$  und  $B$  verhindern, dass sich der Balken bewegt: sie wirken mit Reak-



**Abb. 1.7** System und Freikörperbild

kräften auf ihn. Wir machen diese Reaktionskräfte, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit  $A$  und  $B$  bezeichnen, im sogenannten *Freikörperbild* (Abb. 1.7b) sichtbar. In ihm sind anstelle der geometrischen Bindungen durch die Lager die dort auf den Körper wirkenden Kräfte eingezeichnet. Durch dieses „Freimachen“ werden die entsprechenden Kräfte einer Analyse zugänglich gemacht (vgl. Kapitel 5). Dies gilt auch dann, wenn durch das Freischneiden ein mechanisches System beweglich wird. In diesem Fall denken wir uns bei der Bestimmung der Reaktionskräfte das System in der gegebenen Lage „erstarrt“: *Erstarrungsprinzip* (vgl. Abschn. 5.3).

Eine weitere Einteilung erfolgt durch die Begriffe *äußere Kraft* und *innere Kraft*. Eine *äußere Kraft* wirkt von außen auf ein mechanisches System. Sowohl eingravierte Kräfte als auch Reaktionskräfte sind äußere Kräfte. Die *inneren Kräfte* wirken zwischen den Teilen eines Systems. Auch sie kann man sich nur durch gedankliches Zertrennen oder *Schneiden* des Körpers veranschaulichen. Führt man in Abb. 1.8a durch den Körper in Gedanken einen Schnitt, so müssen anstelle der Bindung in der Schnittfläche die flächenförmig verteilten inneren Kräfte eingezeichnet werden (Abb. 1.8b). Dem liegt die durch die Erfahrung bestätigte Hypothese zugrunde, dass die mechanischen Gesetze auch für Teile eines Systems gültig sind. Wir betrachten danach das System zunächst als einen Gesamtkörper, der sich in Ruhe befindet. Nach dem gedachten Schnitt fassen wir es dann als *zwei Teilen*



**Abb. 1.8** Schnitt durch einen Körper

bestehend auf, die über die Schnittflächen gerade so aufeinander einwirken, dass sich jeder Teil für sich im Gleichgewicht befindet. Man bezeichnet diese Hypothese, durch die die inneren Kräfte erst berechenbar werden, als *Schnittprinzip*. Es gilt nicht nur für ein System, das sich im Gleichgewicht befindet, sondern auch allgemein für den Fall der Bewegung.

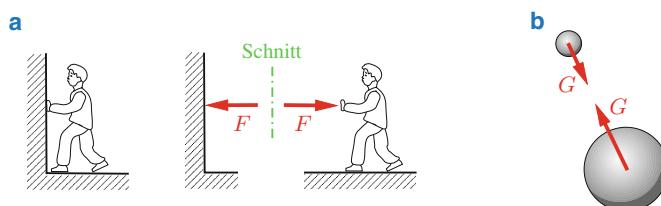
Die Einteilung nach äußeren und inneren Kräften hängt davon ab, welches System wir untersuchen wollen. Fassen wir den Gesamtkörper in Abb. 1.8a als das System auf, so sind die durch den Schnitt freigelegten Kräfte innere Kräfte; sie wirken ja zwischen den Teilen des Systems. Betrachten wir dagegen nur den Teilkörper ① oder nur den Teilkörper ② in Abb. 1.8b als unser System, so sind die entsprechenden Kräfte jetzt äußere Kräfte.

Wie wir in Abschn. 1.3 festgestellt haben, kann eine Kraft hinsichtlich ihrer Wirkung auf einen starren Körper entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Dies bedeutet insbesondere, dass wir die Linienflüchtigkeit der Kraft bei der Analyse der äußeren Kräfte nutzen können. Dagegen ist bei den inneren Kräften dieses Prinzip im allgemeinen *nicht* anwendbar. Bei ihnen wird ja der Körper gedanklich geschnitten oder geteilt, und es spielt dann doch eine Rolle, ob eine äußere Kraft auf den einen oder den anderen Teilkörper wirkt.

Die Bedeutung der inneren Kräfte für den berechnenden Ingenieur ist in der Tatsache begründet, dass ihre Größe ein Maß für die Materialbeanspruchung ist.

## 1.5 Wechselwirkungsgesetz

Ein Gesetz, das wir aus Erfahrung als richtig akzeptieren, ist das *Wechselwirkungsgesetz*. Dieses Axiom besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große Gegenkraft gehört, eine Kraft allein also nie existieren kann. Stemmen wir uns mit der Hand gegen eine Wand (Abb. 1.9a), so übt die Hand eine Kraft  $F$  auf die Wand aus. Eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft wirkt aber auch von der



**Abb. 1.9** actio = reactio

Wand auf unsere Hand. Wir können die entsprechenden Kräfte wieder sichtbar machen, indem wir die beiden Körper, Wand und Hand, an der Kontaktstelle trennen. Zu beachten ist, dass die Kräfte an zwei verschiedenen Körpern angreifen. Ganz analog hat aufgrund der Gravitation ein Körper auf der Erde ein Gewicht  $G$ . Mit der gleich großen Kraft wirkt jedoch der Körper auch auf die Erde: beide ziehen sich gegenseitig an (Abb. 1.9b). Wir formulieren diesen Sachverhalt im Satz:

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.

Dieses Prinzip, das man kurz als

actio = reactio

aussprechen kann, stellt das dritte Newtonsche Axiom dar (vgl. Band 3). Es gilt sowohl für Nah- als auch für Fernkräfte und ist unabhängig davon, ob die Körper ruhen oder bewegt werden.

## 1.6 Dimensionen und Einheiten

In der Mechanik beschäftigen wir uns mit den drei physikalischen Grundgrößen Länge, Zeit und Masse; hinzu kommt die Kraft als wichtige, im physikalischen Sinn aber abgeleitete Größe. Alle anderen physikalischen Größen wie zum Beispiel Geschwindigkeit, Impuls oder Energie lassen sich hierdurch ausdrücken. Der geometrische Raum, in dem sich mechanische Vorgänge abspielen, ist dreidimensional. Der Einfachheit halber werden wir uns jedoch manchmal auf ebene oder auf eindimensionale Probleme beschränken.

Verbunden mit Länge, Zeit, Masse und Kraft sind ihre Dimensionen  $[l]$ ,  $[t]$ ,  $[M]$  und  $[F]$ , die entsprechend dem internationalen Einheitensystem SI (Système International d'Unités) in den Grundeinheiten Meter (m), Sekunde (s) und Kilogramm (kg) sowie der abgeleiteten Einheit Newton (N) angegeben werden. Eine Kraft vom Betrag 1 N erteilt einer Masse von 1 kg die Beschleunigung 1 m/s<sup>2</sup>; formelmäßig gilt  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ . Volumenkräfte haben die Dimension Kraft pro

Volumen [ $F/l^3$ ] und werden z. B. in Vielfachen der Einheit N/m<sup>3</sup> gemessen. Analog haben Flächen- bzw. Linienkräfte die Dimensionen [ $F/l^2$ ] bzw. [ $F/l$ ] und die Einheiten N/m<sup>2</sup> bzw. N/m.

Der Betrag einer physikalischen Größe wird vollständig angegeben durch die Maßzahl und die Einheit. So bedeuten die Angaben  $F = 17\text{ N}$  bzw.  $l = 3\text{ m}$  eine Kraft von siebzehn Newton bzw. eine Länge von drei Metern. Mit Einheiten kann man genauso rechnen wie mit Zahlen. Es gilt zum Beispiel mit den obigen Größen  $F \cdot l = 17\text{ N} \cdot 3\text{ m} = 17 \cdot 3\text{ N m} = 51\text{ N m}$ . Bei physikalischen Gleichungen haben jede Seite und jeder additive Term die gleiche Dimension; dies sollte zur Kontrolle von Gleichungen immer beachtet werden.

Bei sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlenwerten werden den Einheiten Meter, Sekunde usw. die Bezeichnungen k (Kilo =  $10^3$ ), M (Mega =  $10^6$ ), G (Giga =  $10^9$ ) bzw. m (Milli =  $10^{-3}$ ), μ (Mikro =  $10^{-6}$ ), n (Nano =  $10^{-9}$ ) vorangestellt (Beispiel: 1 kN =  $10^3\text{ N}$ ).

## 1.7 Lösung statischer Probleme, Genauigkeit

Die Lösung von Ingenieuraufgaben aus dem Bereich der Mechanik bedarf einer überlegten Vorgehensweise, die in gewissem Maße von der Art der Problemstellung abhängt. Wichtig ist jedoch in jedem Fall, dass sich ein Ingenieur verständlich und klar ausdrückt, da er sowohl die Formulierung als auch die Lösung eines Problems Fachleuten oder Laien mitzuteilen hat und von ihnen verstanden werden muss. Diese Klarheit ist auch für den eigenen Verständnisprozess wichtig, denn klare, saubere Formulierungen bergen in sich schon den Keim der richtigen Lösung. Obwohl es, wie schon erwähnt, kein festes Schema zur Behandlung von mechanischen Problemen gibt, so müssen doch meist die folgenden Schritte getan werden:

1. Formulierung des Ingenieurproblems.
2. Erstellen eines mechanischen Ersatzmodells, Überlegungen zur Güte der Abbildung der Realität auf das Modell.
3. Lösung des mechanischen Problems am Ersatzmodell. Dies schließt ein:
  - Feststellen der gegebenen und der gesuchten Größen. Dies geschieht in der Regel mit Hilfe einer Skizze des mechanischen Systems. Den Unbekannten ist ein Symbol zuzuweisen.
  - Zeichnen des Freikörperbildes mit allen angreifenden Kräften.
  - Aufstellen der mechanischen Gleichungen (z. B. der Gleichgewichtsbedingungen).

- Aufstellen geometrischer Beziehungen (falls benötigt).
  - Auflösung der Gleichungen nach den Unbekannten. Zuvor muss geprüft werden, ob die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt.
  - Kenntlichmachen des Resultats.
4. Diskussion und Deutung der Lösung.

Wir werden in der Technischen Mechanik meist nicht vom Ingenieurproblem ausgehen, sondern uns auf den dritten Punkt, die Lösung von mechanischen Problemen am Modell, konzentrieren. Trotzdem dürfen wir nicht aus dem Auge verlieren, dass unsere Modelle Abbilder realer Körper oder Systeme sind, deren Verhalten wir manchmal anschaulich aus der Erfahrung heraus beurteilen können. Es ist deshalb immer zweckmäßig, die Ergebnisse einer Rechnung mit der Anschauung zu überprüfen.

Was die Genauigkeit von Ergebnissen anbelangt, so müssen wir zwischen der numerischen Genauigkeit unserer Rechnungen am Modell und der Treffsicherheit der ingenieurmäßigen Aussage über das Verhalten realer Körper unterscheiden. Das numerische Ergebnis hängt dabei von der Genauigkeit der Eingangsdaten und von der Rechengenauigkeit ab. So können Ergebnisse nie präziser als die Eingangsdaten sein. Sie sollten auch nie in einer Weise angegeben werden (z. B. viele Stellen hinter dem Komma), die eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuscht.

Die Treffsicherheit der Ingenieuraussage ist von der Güte des Modells abhängig. So können wir zum Beispiel den Wurf eines Steines beschreiben, indem wir den Luftwiderstand berücksichtigen oder ihn vernachlässigen; die Ergebnisse werden natürlich voneinander abweichen. Es ist die Aufgabe des Ingenieurs, ein Modell gerade so zu bilden, dass es die für sein Problem *erforderliche* Genauigkeit auch liefern kann.

## 1.8 Zusammenfassung

- Die Statik befasst sich mit Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden.
- Eine an einem starren Körper angreifende Kraft ist ein Vektor, der entlang seiner Wirkungslinie beliebig verschoben werden kann.
- Eine eingeprägte Kraft ist durch eine physikalische Gesetzmäßigkeit vorgegeben. Beispiel: Gewichtskraft im Erdschwerefeld.
- Eine Reaktionskraft entsteht durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheit eines Körpers.
- Schnittprinzip: Reaktionskräfte und innere Kräfte können durch gedankliches Schneiden freigelegt und damit einer Analyse zugänglich gemacht werden.
- Freikörperbild: Darstellung aller eingeprägten Kräfte und Reaktionskräfte am freigeschnittenen Körper. Beachte: bewegliche Körperteile können als „erstarrt“ angesehen werden (Erstarrungsprinzip).
- Wechselwirkungsgesetz:  $\text{actio} = \text{reactio}$ .
- Physikalische Grundgrößen sind Länge, Masse und Zeit. Die Kraft ist eine abgeleitete Größe. Es gilt:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ .
- In der Mechanik werden idealisierte Modelle untersucht, welche die wesentlichen Eigenschaften der realen Körper oder Systemen haben. Beispiele für Idealisierungen: starrer Körper, Einzelkraft.

---

# Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

2

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

2.1	Zusammensetzung von Kräften in der Ebene . . . . .	17
2.2	Zerlegung von Kräften in der Ebene, Komponentendarstellung . . . . .	21
2.3	Gleichgewicht in der Ebene . . . . .	24
2.4	Beispiele ebener zentraler Kräftegruppen . . . . .	27
2.5	Zentrale Kräftegruppen im Raum . . . . .	33
2.6	Zusammenfassung . . . . .	41

- **Lernziele** Wir untersuchen in diesem Kapitel Einzelkräfte, die einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Solche Kraftsysteme bezeichnet man auch als *zentrale Kraftsysteme* oder *zentrale Kräftegruppen*. Es sind in diesem Zusammenhang immer Kräfte gemeint, die an einem Körper angreifen; Kräfte alleine, ohne Wirkung auf einen Körper, gibt es nicht. Ist der Körper starr, so müssen die Kräfte nicht tatsächlich in einem Punkt angreifen, sondern ihre Wirkungslinien müssen sich nur in einem Punkt schneiden. Die Kräfte sind in diesem Fall ja linienglückig und können entlang ihrer Wirkungslinien in den Schnittpunkt verschoben werden. Liegen alle Kräfte in einer Ebene, so spricht man von einer *ebenen Kräftegruppe*.
- Die Studierenden sollen lernen, wie man die Resultierende einer zentralen Kräftegruppe bestimmt und wie man die Gleichgewichtsbedingungen bei konkreten Aufgaben formuliert. Hierfür müssen sie in der Lage sein, das Schnittprinzip sachgerecht anzuwenden und ein Freikörperbild anzufertigen.

## 2.1 Zusammensetzung von Kräften in der Ebene

Greifen an einem Punkt  $A$  eines Körpers zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  an, so können diese beiden Kräfte durch eine einzige Kraft  $R$  gleichwertig ersetzt werden (Abb. 2.1a). Diese Erfahrungstatsache kommt im Satz vom *Parallelogramm der Kräfte* zum Ausdruck. Der Satz besagt, dass den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  eine Kraft  $R$  äquivalent ist, die sich in Größe und Richtung als Diagonale eines durch  $F_1$  und  $F_2$  aufgespannten Parallelogramms ergibt. Die Kraft  $R$  bezeichnet man als *Resultierende* von  $F_1$  und  $F_2$ . Wir können dieses Axiom auch folgendermaßen aussprechen:

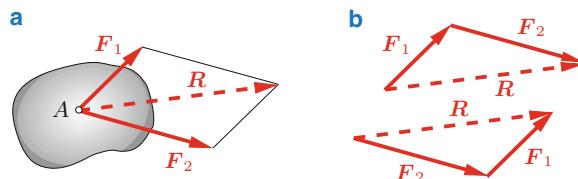
Die Wirkung zweier an einem Punkt angreifenden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  ist äquivalent der Wirkung einer Kraft  $R$ , die sich aus der Parallelogrammkonstruktion ergibt.

Die geometrische Konstruktion entspricht der Vektoraddition (vgl. Anhang A.1)

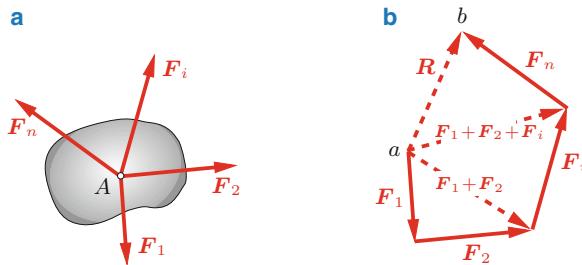
$$R = F_1 + F_2 . \quad (2.1)$$

Haben wir es mit  $n$  Kräften zu tun, deren Wirkungslinien alle durch einen Punkt  $A$  gehen (Abb. 2.2a), so ergibt sich die Resultierende durch aufeinander folgende Anwendung des Parallelogrammgesetzes, d. h. als Vektorsumme aller  $n$  Kräfte:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i . \quad (2.2)$$



**Abb. 2.1** **a** Kräfteparallelogramm, **b** Kräftedreieck



**Abb. 2.2** a Zentrales Kraftsystem, b Kräftepolygon

Die Reihenfolge der Addition ist dabei beliebig. Die Bestimmung der Resultierenden bezeichnet man auch als *Reduktion*: eine Kräftegruppe wird auf *eine einzige* äquivalente Kraft reduziert.

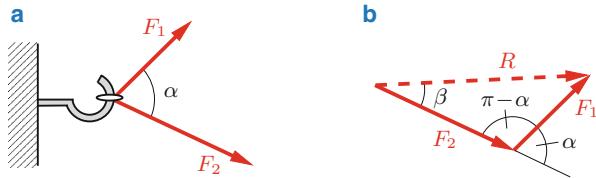
Führt man die Addition zweier Kräfte grafisch aus, so genügt es, nur ein halbes Parallelogramm, d. h. ein *Kräftedreieck* zu zeichnen (Abb. 2.1b). Dies hat zwar den Nachteil, dass man nicht mehr sieht, dass die Wirkungslinien der Kräfte durch einen Punkt gehen. Dem steht jedoch als Vorteil gegenüber, dass man die geometrische Konstruktion auf beliebig viele Kräfte ausdehnen kann. Die  $n$  Kräfte  $F_i$  werden in *beliebiger* Reihenfolge hintereinander angetragen, und  $R$  ergibt sich als Vektor, der vom Anfangspunkt  $a$  zum Endpunkt  $b$  des *Kräftelegons* oder *Kraftecks* zeigt (Abb. 2.2b).

Die grafische Addition von Kräften in der Ebene erfolgt zweckmäßig mit einem *Lageplan* und einem *Kräfteplan*. Der Lageplan ist dabei die maßstäbliche Darstellung der geometrischen Gegebenheiten einer Aufgabe; er enthält bei einer zentralen Kräftegruppe nur die Wirkungslinien der gegebenen Kräfte. Im Kräfteplan erfolgt das maßstäbliche Aneinanderfügen der Kräfte unter Berücksichtigung ihrer Richtungen. Hierzu ist die Angabe eines Kräftemaßstabes (z. B. 1 cm  $\hat{=} 10$  N) notwendig.

Manchmal löst man Aufgaben analytisch mit Hilfe einer *Skizze* des Kraftecks (siehe Beispiele 2.1 und 2.4). Dann ist kein Maßstab für das Krafteck erforderlich.

► **Beispiel 2.1** An einem Haken greifen nach Abb. 2.3a zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  an. Der Winkel zwischen ihren Wirkungslinien sei  $\alpha$ .

Es sind die Größe und die Richtung der Resultierenden zu bestimmen.



**Abb. 2.3** **a** Belasteter Haken, **b** Kräftedreieck

**Lösung** Die Antwort folgt unmittelbar aus einer Skizze des Kräftedreiecks (Abb. 2.3b). Bekannt sind die „Längen“  $F_1$ ,  $F_2$  und der Winkel  $\alpha$ . Der Kossinussatz liefert somit

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\pi - \alpha)$$

bzw.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}.$$

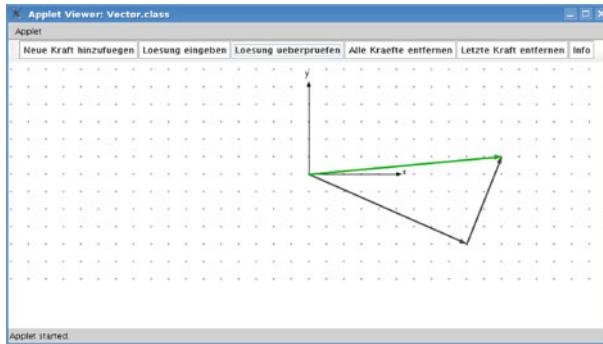
Für den Winkel  $\beta$ , der die Richtung der Wirkungslinie von  $R$  gegenüber  $F_2$  angibt, erhält man aus dem Sinussatz

$$\frac{\sin \beta}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{F_1}{R}$$

oder nach Einsetzen von  $R$  mit  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

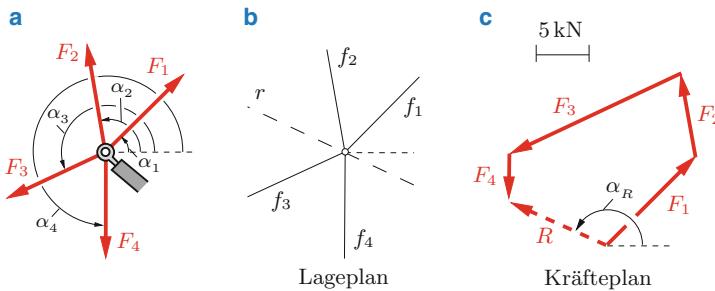
$$\sin \beta = \frac{F_1 \sin \alpha}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}}.$$

Dieses Beispiel – und viele weitere Beispiele zur Zusammensetzung von Kräften in der Ebene – können Sie auch mit dem TM-Tool „Resultierende ebener Kraftsysteme“ bearbeiten (siehe Screenshot). Es steht Ihnen zusammen mit einer Reihe weiterer TM-Tools frei zur Verfügung.



► **Beispiel 2.2** An einer Ringschraube wirken vier Kräfte ( $F_1 = 12 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 8 \text{ kN}$ ,  $F_3 = 18 \text{ kN}$ ,  $F_4 = 4 \text{ kN}$ ) unter vorgegebenen Richtungen ( $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 100^\circ$ ,  $\alpha_3 = 205^\circ$ ,  $\alpha_4 = 270^\circ$ ) gegenüber der Horizontalen (Abb. 2.4a).

Es sollen die Größe und die Richtung der Resultierenden grafisch bestimmt werden.



**Abb. 2.4** a Belastete Ringschraube, b Lageplan, c Kräfteplan

**Lösung** Wir zeichnen den Lageplan, in dem die Wirkungslinien  $f_1, \dots, f_4$  der Kräfte  $F_1, \dots, F_4$  in richtiger Richtung, d.h. unter den gegebenen Winkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  eingetragen werden (Abb. 2.4b). Für den Kräfteplan wählen wir zunächst einen Maßstab und fügen dann alle Kräfte unter Berücksichtigung ihrer Richtungen maßstäblich aneinander (Abb. 2.4c). Als Ergebnis für den Betrag und die Richtung der Resultierenden  $R$  lesen wir im Rahmen der Zeichengenauigkeit ab:

$$\underline{\underline{R = 10,5 \text{ kN}}}, \quad \underline{\underline{\alpha_R = 155^\circ}}.$$

Die Wirkungslinie  $r$  von  $R$  übertragen wir noch in den Lageplan.

Je nachdem in welcher Reihenfolge die Kräfte im Kräfteplan aneinander gefügt werden, erhält das Krafteck ein anderes Aussehen. Größe und Richtung von  $R$  sind jedoch in jedem Fall gleich. ■

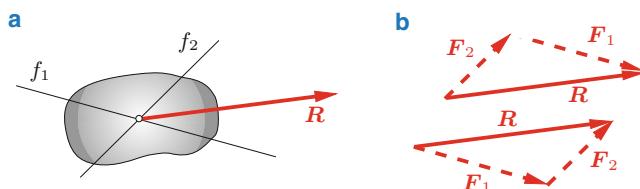
## 2.2 Zerlegung von Kräften in der Ebene, Komponentendarstellung

Ähnlich wie man Kräfte zusammensetzen kann, kann man sie auch zerlegen. Wollen wir eine Kraft  $\mathbf{R}$  durch zwei Kräfte mit den vorgegebenen zentralen Wirkungslinien  $f_1$  und  $f_2$  ersetzen (Abb. 2.5a), so zeichnen wir das Kräftedreieck, indem wir durch den Anfangs- und den Endpunkt von  $\mathbf{R}$  je eine der vorgegebenen Richtungen legen. Aus dem Krafteck, das in zwei verschiedenen Varianten gezeichnet werden kann, folgen eindeutig die gesuchten Kräfte nach Betrag und Richtungssinn (Abb. 2.5b).

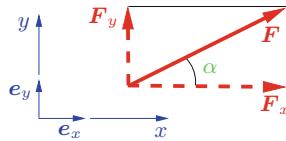
Die Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  bezeichnen man als *Komponenten* der Kraft  $\mathbf{R}$  bezüglich der Richtungen  $f_1$  und  $f_2$ . Wir folgern also: in der Ebene ist die Zerlegung einer Kraft nach zwei verschiedenen Richtungen eindeutig möglich. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Zerlegung einer Kraft in der Ebene nach mehr als zwei Richtungen nicht mehr eindeutig erfolgen kann: es existieren dann beliebig viele verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die Kräfte entsprechend ihrer Darstellung in kartesischen Koordinaten in Komponenten zu zerlegen, die aufeinander senkrecht stehen. Die Richtungen der Komponenten sind in diesem Fall durch die  $x$ - und die  $y$ -Achse festgelegt (Abb. 2.6). Mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  lassen sich die Komponenten schreiben als

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{e}_y, \quad (2.3)$$



**Abb. 2.5** Zerlegung einer Kraft



**Abb. 2.6** Komponenten einer Kraft

und  $\mathbf{F}$  wird

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y . \quad (2.4)$$

Darin sind  $F_x$  und  $F_y$  die *Koordinaten* des Vektors  $\mathbf{F}$ .

Es sei angemerkt, dass  $F_x$  und  $F_y$  ungenau in der Ausdrucksweise meist auch als Komponenten von  $\mathbf{F}$  bezeichnet werden. Wie schon in Abschn. 1.2 erwähnt, hat es sich daneben eingebürgert, vor allem bei Aufgaben oder konkreten Problemen, in denen der Vektorcharakter von Kräften eindeutig ist, an das Pfeilbild nur noch Beträge oder Koordinaten zu schreiben.

Aus Abb. 2.6 liest man ab

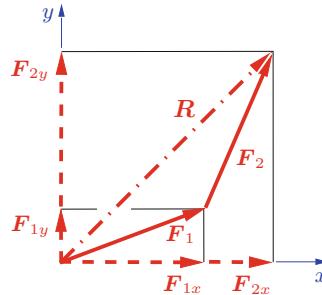
$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha , & F_y &= F \sin \alpha , \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} , & \tan \alpha &= \frac{F_y}{F_x} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hat man die Resultierende einer zentralen ebenen Kräftegruppe zu ermitteln, so kann man die Vektoraddition so durchführen, dass man an Stelle der Kräfte ihre Komponenten addiert. Wir machen uns dies am Beispiel von zwei Kräften klar (Abb. 2.7). Bezeichnen wir die  $x$ - und die  $y$ -Komponenten der Kräfte  $\mathbf{F}_i$  mit  $\mathbf{F}_{ix} = F_{ix} \mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{F}_{iy} = F_{iy} \mathbf{e}_y$ , so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{1x} + \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2x} + \mathbf{F}_{2y} \\ &= F_{1x} \mathbf{e}_x + F_{1y} \mathbf{e}_y + F_{2x} \mathbf{e}_x + F_{2y} \mathbf{e}_y = (F_{1x} + F_{2x}) \mathbf{e}_x + (F_{1y} + F_{2y}) \mathbf{e}_y . \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Resultierenden folgen somit zu

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} , \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} .$$

**Abb. 2.7** Vektoraddition

Im allgemeinen Fall für  $n$  Kräfte erhalten wir aus

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y = \sum \mathbf{F}_i = \sum (F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y) \\ &= \left( \sum F_{ix} \right) \mathbf{e}_x + \left( \sum F_{iy} \right) \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (2.6)$$

für die Koordinaten von  $\mathbf{R}$

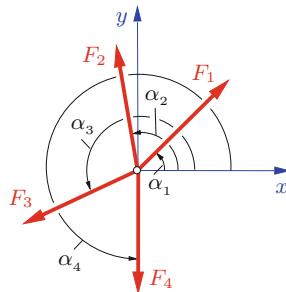
$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}. \quad (2.7)$$

Betrag und Richtung errechnen sich nach (2.5):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}. \quad (2.8)$$

Der Vektorgleichung (2.2) entsprechen im ebenen Fall also die beiden skalaren Gleichungen (2.7).

► **Beispiel 2.3** Das Beispiel 2.2 soll mit der Komponentendarstellung gelöst werden.



**Abb. 2.8** Wahl eines Koordinatensystems

**Lösung** Wir wählen dazu das Koordinatensystem so, dass die  $x$ -Achse mit der Horizontalen zusammenfällt, von der aus die Winkel gemessen werden (Abb. 2.8). Es gilt dann

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ &= F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + F_4 \cos \alpha_4 \\ &= 12 \cos 45^\circ + 8 \cos 100^\circ + 18 \cos 205^\circ + 4 \cos 270^\circ \\ &= -9,22 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

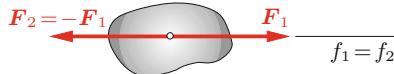
$$\begin{aligned} R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\ &= F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + F_4 \sin \alpha_4 = 4,76 \text{ kN}, \end{aligned}$$

und es werden

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{9,22^2 + 4,76^2} = \underline{\underline{10,4 \text{ kN}}}, \\ \tan \alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} = -\frac{4,76}{9,22} = -0,52 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_R = 152,5^\circ}}. \end{aligned}$$
■

## 2.3 Gleichgewicht in der Ebene

Wir untersuchen nun die Frage, unter welchen Bedingungen ein Körper im *Gleichgewicht* ist. Antwort darauf gibt wieder die Erfahrung, aus der wir wissen, dass ein ursprünglich ruhender Körper in Ruhe bleibt, wenn wir an ihm zwei entgegen-

**Abb. 2.9** Gleichgewicht von zwei Kräften

gesetzt gleich große Kräfte auf gleicher Wirkungslinie anbringen (Abb. 2.9). Wir können diese Tatsache durch den Satz ausdrücken:

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie auf der gleichen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.

Dies bedeutet, dass die Vektorsumme der beiden Kräfte (d. h. die Resultierende) Null sein muss:

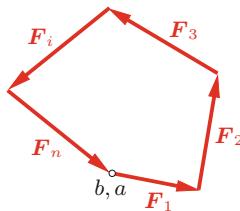
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Aus Abschn. 2.1 wissen wir, dass ein zentrales Kräftesystem aus  $n$  Kräften  $\mathbf{F}_i$  immer eindeutig durch eine Resultierende  $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$  ersetzt werden kann. Damit lässt sich die *Gleichgewichtsbedingung* (2.9) sofort auf beliebig viele Kräfte übertragen. Eine zentrale Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme aller Kräfte (d. h. die Resultierende) Null ist:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Geometrisch bedeutet Gleichung (2.10), dass das Kraftdreieck *geschlossen* sein muss, d. h. sein Anfangs- und sein Endpunkt fallen zusammen (Abb. 2.10). Eine Kräftegruppe, die der Gleichgewichtsbedingung (2.10) genügt, bezeichnet man als *Gleichgewichtsgruppe*.

Die resultierende Kraft ist dann Null, wenn ihre Komponenten verschwinden. Dies bedeutet mit (2.7), dass der Gleichgewichtsbedingung (2.10) in Vektorform



**Abb. 2.10** Geschlossenes Krafteck

im Fall eines ebenen Kraftsystems die beiden skalaren Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0 \quad (2.11)$$

äquivalent sind. Ein zentrales ebenes Kraftsystem ist demnach im Gleichgewicht, wenn die Summen der Kraftkomponenten (hier in  $x$ - und in  $y$ -Richtung) verschwinden.

Haben wir es mit einem Gleichgewichtsproblem zu tun, bei dem Kräfte nach Größe und (oder) Richtung zu bestimmen sind, so können höchstens *zwei* Unbekannte mit Hilfe der *zwei* Gleichgewichtsbedingungen (2.11) ermittelt werden. Probleme, die auf diese Weise einer Lösung zugeführt werden können, nennt man *statisch bestimmt*. Treten mehr als zwei Unbekannte bei einer zentralen ebenen Kräftegruppe auf, so ist das Problem *statisch unbestimmt*; es kann mit den Gleichgewichtsbedingungen (2.11) alleine nicht gelöst werden.

Um die Gleichgewichtsbedingungen bei einem konkreten Problem formulieren zu können, muss man sich Klarheit über alle auf den Körper wirkenden Kräfte verschaffen. Dies geschieht mit Hilfe des *Freikörperbildes*. Dabei wird der Körper durch gedachte Schnitte von seinen Bindungen befreit, und alle *auf den Körper wirkenden Kräfte* (bekannte und unbekannte) werden eingezeichnet. Nur diese Kräfte treten dann in den Gleichgewichtsbedingungen auf. Man beachte, dass Kräfte, die *vom Körper auf die Umgebung ausgeübt werden*, nicht ins Freikörperbild gehören.

Zur rechnerischen Lösung eines konkreten Problems hat man zuerst ein Koordinatensystem festzulegen. Dabei können die Koordinatenrichtungen beliebig gewählt werden. Bei der Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen genügt es dann, die Komponenten der Kraftvektoren zu bestimmen, die Vektoren selbst müssen nicht explizit angeschrieben werden.

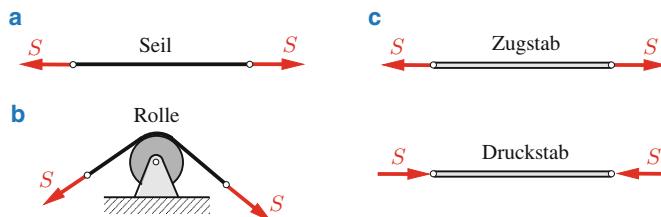
## 2.4 Beispiele ebener zentraler Kräftegruppen

Um die bisherigen Ergebnisse an Beispielen anwenden zu können, benötigen wir einige Idealisierungen von einfachen technischen Bauteilen. So bezeichnen wir einen Körper, dessen Querschnittsabmessungen klein gegenüber der Längsabmessung sind und der nur Zugkräfte in Richtung seiner Längsachse aufnehmen kann, als ein *Seil* (Abb. 2.11a).

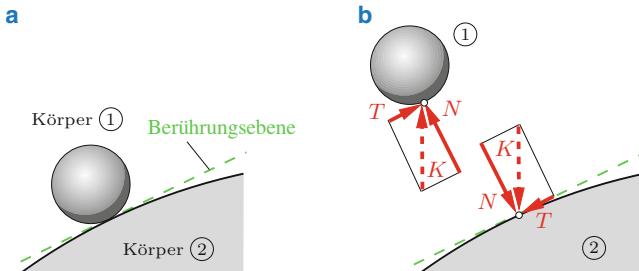
Ist das Gewicht des Seiles klein gegenüber der Kraft im Seil (Seilkraft), so vernachlässigt man es in der Regel. Man spricht in diesem Fall von einem „masselosen“ Seil. Wird ein Seil über eine Rolle geführt (Abb. 2.11b), so sind die Kräfte an beiden Seilenden gleich groß, sofern die Rolle „reibungsfrei“ gelagert ist (vgl. Beispiele 2.6 und 3.3).

Bei einem *Stab* sind die Querschnittsabmessungen ebenfalls klein im Vergleich zur Längsabmessung. Im Unterschied zum Seil kann ein Stab jedoch sowohl Zug- als auch Druckkräfte in Richtung seiner Längsachse aufnehmen (Abb. 2.11c).

Nach Abschn. 1.5 kann man die Kräfte, die in einer Berührungsstelle zweier Körper wirken, sichtbar machen, indem man die Körper gedanklich trennt (Abb. 2.12a, b). Die Kontaktkraft  $K$ , die nach dem Prinzip *actio = reactio* entgegengesetzt gleich groß auf jeden der beiden Körper wirkt, können wir durch ihre Komponenten, die *Normalkraft*  $N$  und die *Tangentialkraft*  $T$ , ersetzen. Die Kraft  $N$  wirkt dabei senkrecht (normal) zur tangentialen *Berührungsfläche* der beiden Körper, während die Kraft  $T$  in der Berührungsfläche selbst liegt. Berühren sich die Körper lediglich, so können sie nur gegeneinander drücken und nicht etwa aneinander ziehen; d. h. die Normalkraft  $N$  ist dann jeweils zum Innern des Körpers, auf den sie wirkt, gerichtet. In tangentialer Richtung können die Körper nur dann aufeinander einwirken, wenn ihre Oberflächen *rau* sind. Idealisieren wir eine Oberfläche als vollkommen *glatt*, so verschwindet  $T$ , und es tritt nur die Normalkraft  $N$  auf.



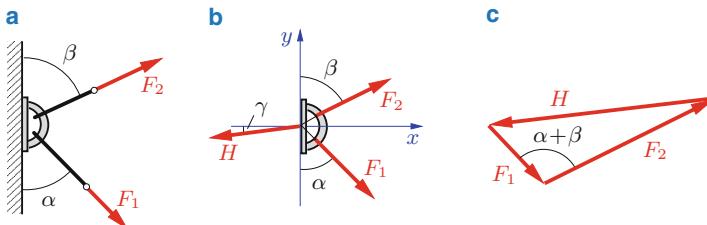
**Abb. 2.11** a Seil, b Rolle, c Stab



**Abb. 2.12** a Berührungsfläche, b Kräfte im Berührungsrand

► **Beispiel 2.4** An einer festen Öse sind zwei Seile befestigt, an denen mit den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gezogen wird (Abb. 2.13a).

Gesucht ist der Betrag der Kraft  $H$ , die von der Wand auf die Öse ausgeübt wird.



**Abb. 2.13** a Belastete Öse, b Freikörperbild, c Krafteck

**Lösung** Die Öse ist unter der Wirkung der an ihr angreifenden Kräfte im Gleichgewicht. Um alle auf die Öse wirkenden Kräfte zu erkennen, denken wir sie uns von der Wand getrennt. An der Trennstelle führen wir die nach Größe  $H$  und Richtung  $\gamma$  unbekannte Haltekraft ein und zeichnen das Freikörperbild Abb. 2.13b.

Wir lösen die Aufgabe zunächst *grafoanalytisch* (halb grafisch, halb analytisch). Dazu skizzieren wir die grafische Gleichgewichtsbedingung, indem wir  $H$  gerade so wählen, dass sich das Krafteck schließt (Abb. 2.13c). Auf das Kräfte-dreieck wenden wir den Kosinussatz an und erhalten analytisch für den Betrag der Kraft

$$H = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\alpha + \beta)}.$$

Man kann das Problem auch durch Anwendung der skalaren Gleichgewichtsbedingungen (2.11) rein analytisch lösen. Zu diesem Zweck wählen wir ein Koordinatensystem  $x, y$  (Abb. 2.13b), ermitteln dann jeweils die Komponenten der Kräfte in den entsprechenden Richtungen und setzen diese in (2.11) ein:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0: \quad & F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta - H \cos \gamma = 0 \\ \rightarrow \quad & H \cos \gamma = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta, \\ \sum F_{iy} = 0: \quad & -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - H \sin \gamma = 0 \\ \rightarrow \quad & H \sin \gamma = -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta.\end{aligned}$$

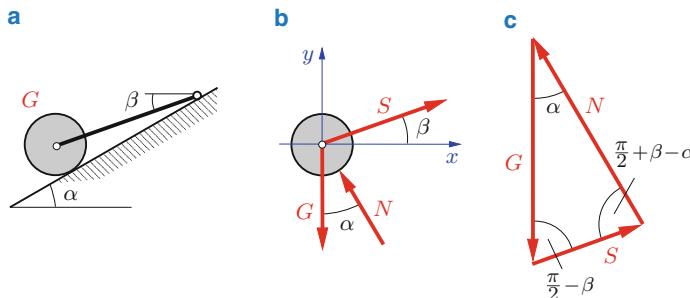
Damit stehen *zwei* Gleichungen für die *zwei* Unbekannten  $H$  und  $\gamma$  zur Verfügung. Zur Bestimmung von  $H$  quadrieren und addieren wir die beiden Gleichungen und erhalten so unter Anwendung des Additionstheorems  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  das Ergebnis

$$H^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\alpha + \beta).$$

Es stimmt selbstverständlich mit dem grafoanalytisch gewonnenen Resultat überein. ■

► **Beispiel 2.5** Eine Walze vom Gewicht  $G$  wird durch ein Seil auf einer *glatten* schiefen Ebene gehalten (Abb. 2.14a).

Für gegebene Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sollen die Seilkraft und die Kontaktkraft zwischen Ebene und Walze ermittelt werden.



**Abb. 2.14** a Walze auf schiefer Ebene, b Freikörperbild, c Krafteck

**Lösung** Da die Walze in Ruhe ist, müssen die an ihr angreifenden Kräfte der Gleichgewichtsbedingung (2.10) genügen. Um wieder alle Kräfte sichtbar zu machen, schneiden wir das Seil und trennen die Walze von der Unterlage. An den Trennstellen bringen wir die Seilkraft  $S$  und die Kontaktkraft an. Da die Fläche glatt ist, besteht die Kontaktkraft nur aus der Normalkomponente  $N$ , die senkrecht auf der schießen Ebene steht. Das Freikörperbild (Abb. 2.14b) zeigt, dass wir es mit einem zentralen ebenen Kraftsystem zu tun haben, bei dem nur die Beträge von  $N$  und  $S$  unbekannt sind; das Gewicht  $G$  und die Richtungen von  $N$  und  $S$  sind bekannt.

Wir lösen die Aufgabe zuerst wieder grafoanalytisch, indem wir die Gleichgewichtsbedingung (geschlossenes Kraftsack) skizzieren (Abb. 2.14c). Aus dem Kräfteleck kann man dann mit dem Sinussatz ablesen

$$\underline{\underline{S}} = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha)} = \underline{\underline{G}} \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)},$$

$$\underline{\underline{N}} = G \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha)} = \underline{\underline{G}} \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Wollen wir rein analytisch mit den skalaren Gleichgewichtsbedingungen arbeiten, so wählen wir ein Koordinatensystem  $x, y$  (Abb. 2.14b) und setzen die Kraftkomponenten in  $x$ - und in  $y$ -Richtung in (2.11) ein:

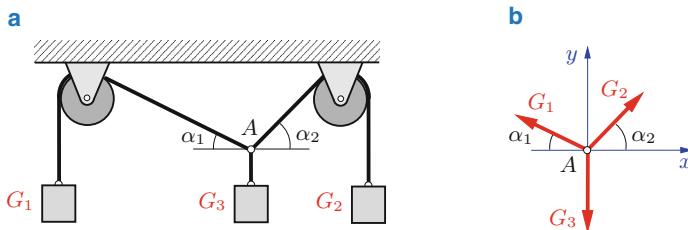
$$\sum F_{ix} = 0: \quad S \cos \beta - N \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad S \sin \beta + N \cos \alpha - G = 0.$$

Dies sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $N$  und  $S$ . Durch Eliminieren von  $N$  bzw. von  $S$  folgen unter Anwendung der Additionstheoreme wieder die obigen Ergebnisse. Wie man  $x$  und  $y$  wählt, ist formal zwar gleichgültig, doch werden wir später sehen, dass man sich durch geschickte Wahl der Richtungen häufig Rechenarbeit ersparen kann. ■

► **Beispiel 2.6** An zwei Seilen, die über reibungsfreie Rollen geführt sind (Abb. 2.15a), hängen Körper mit den Gewichten  $G_1$  bis  $G_3$ .

Welche Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  stellen sich ein?



**Abb. 2.15** a Belastete Seile, b Freikörperbild

**Lösung** Das Freikörperbild (Abb. 2.15b) zeigt die auf den Punkt A wirkenden Kräfte, wobei die zwei Richtungen α<sub>1</sub> und α<sub>2</sub> unbekannt sind. Wir wählen x und y wie dargestellt und formulieren die Gleichgewichtsbedingungen. Dabei schreiben wir für  $\sum F_{ix} = 0$  bzw.  $\sum F_{iy} = 0$  von nun an symbolisch kurz → : bzw. ↑ :

(Summe aller Kraftkomponenten in Pfeilrichtung gleich Null):

$$\rightarrow : -G_1 \cos \alpha_1 + G_2 \cos \alpha_2 = 0 , \\ \uparrow : G_1 \sin \alpha_1 + G_2 \sin \alpha_2 - G_3 = 0 .$$

Wollen wir α<sub>1</sub> bestimmen, so eliminieren wir α<sub>2</sub>, indem wir zunächst die Gleichungen umschreiben:

$$G_1 \cos \alpha_1 = G_2 \cos \alpha_2 , \quad G_1 \sin \alpha_1 - G_3 = -G_2 \sin \alpha_2 .$$

Quadrieren und Addieren liefert

$$\underline{\underline{\sin \alpha_1 = \frac{G_3^2 + G_1^2 - G_2^2}{2 G_1 G_3}}} .$$

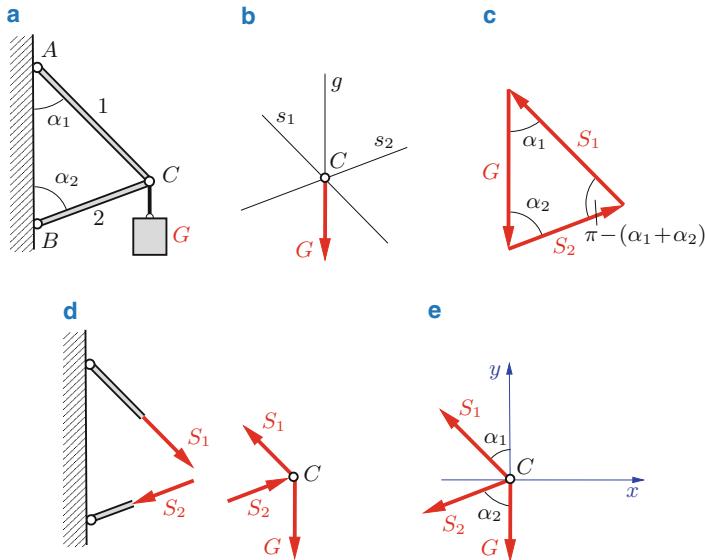
Analog erhält man

$$\underline{\underline{\sin \alpha_2 = \frac{G_3^2 + G_2^2 - G_1^2}{2 G_2 G_3}}} .$$

Eine physikalisch sinnvolle Lösung (d. h. Gleichgewicht) existiert nur für Winkel α<sub>1</sub>, α<sub>2</sub> im Bereich  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \pi/2$ . Daher müssen die Gewichte so vorgegeben sein, dass beide Zähler größer als Null und kleiner als die Nenner sind. ■

► **Beispiel 2.7** Zwei gelenkig miteinander verbundene Stäbe 1 und 2 sind in A und B an einer Wand befestigt und in C durch einen Körper vom Gewicht  $G$  belastet (Abb. 2.16a).

Wie groß sind die Stabkräfte?



**Abb. 2.16** a Stabzweischlag, b Lageplan, c Kräfteplan, d actio = reactio, e Koordinaten-  
system

**Lösung** Wir betrachten das Gelenk C, das sich unter der Wirkung des Gewichtes  $G$  und der Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$  im Gleichgewicht befindet. Bekannt sind dabei die Größe und Richtung von  $G$  und die Wirkungslinien  $s_1, s_2$  der Stabkräfte  $S_1, S_2$ , die durch die Stabrichtungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegeben sind. Durch Zeichnen des Lageplans (Abb. 2.16b) und des geschlossenen Kräftedreiecks (Abb. 2.16c) lässt sich die Aufgabe grafisch lösen, wenn die Winkel bekannt sind.

Arbeiten wir grafoanalytisch, so genügen Skizzen, und wir erhalten durch Anwendung des Sinussatzes auf das Kräftedreieck die Beträge der Stabkräfte

$$\underline{\underline{S_1 = G \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}, \quad \underline{\underline{S_2 = G \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}}}.$$

Der Richtungssinn der Kräfte kann dem Krafteck entnommen werden, wobei zu beachten ist, dass es sich hierbei um die Kräfte handelt, die auf das Gelenk ausgeübt werden. Die Kräfte, die vom Gelenk auf die Stäbe ausgeübt werden, haben nach dem Prinzip  $\text{actio} = \text{reactio}$  den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung (Abb. 2.16d). Stab 1 wird demnach auf Zug und Stab 2 auf Druck beansprucht. Wir können die Aufgabe auch mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (2.11) rein analytisch lösen. Dazu schneiden wir das Gelenk  $C$  frei und skizzieren das Freikörperbild (Abb. 2.16e).

Da zwar die Richtungen der Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$  festliegen, nicht aber ihre Richtungssinne, könnten wir letztere noch beliebig annehmen. Es hat sich jedoch als Konvention durchgesetzt, Stabkräfte immer als Zugkräfte positiv anzusetzen; ein negatives Vorzeichen im Ergebnis zeigt dann einen Druckstab an. Aus den Gleichgewichtsbedingungen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung

$$\begin{aligned}\rightarrow : \quad & -S_1 \sin \alpha_1 - S_2 \sin \alpha_2 = 0, \\ \uparrow : \quad & S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 - G = 0\end{aligned}$$

folgt

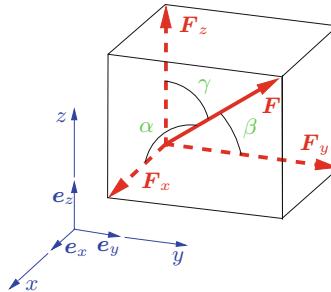
$$S_1 = G \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad S_2 = -G \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Das Minuszeichen bei  $S_2$  deutet an, dass der Richtungssinn der Kraft entgegengesetzt zu dem angenommenen Richtungssinn ist; d. h.  $S_2$  ist nicht wie angenommen eine Zug-, sondern eine Druckkraft. ■

## 2.5 Zentrale Kräftegruppen im Raum

Analog zur Darstellung einer Kraft in der Ebene durch *zwei* aufeinander senkrecht stehende Komponenten lässt sich eine Kraft im Raum eindeutig durch *drei* aufeinander senkrecht stehende Komponenten ersetzen. Wie schon in Abschn. 1.2 angedeutet, können wir dann im kartesischen Koordinatensystem  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nach Abb. 2.17 eine Kraft  $\mathbf{F}$  darstellen durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z. \quad (2.12)$$



**Abb. 2.17** Darstellung einer Kraft in kartesischen Koordinaten

Für den Betrag der Kraft und die Richtungskosinus liest man ab:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind nicht unabhängig voneinander. Quadriert man die erste Gleichung aus (2.13) und setzt  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$  nach der zweiten Zeile von (2.13) ein, so ergibt sich der Zusammenhang

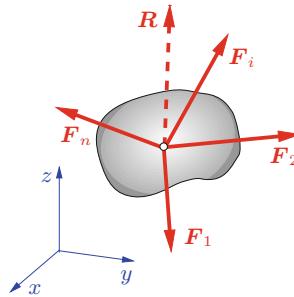
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.14)$$

In Abschn. 2.1 haben wir festgestellt, dass sich die Resultierende  $R$  zweier Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  aus der Parallelogrammkonstruktion ergibt. Sie entspricht der Vektoraddition

$$R = F_1 + F_2. \quad (2.15)$$

Betrachten wir eine *räumliche* zentrale Kräftegruppe aus  $n$  Kräften (Abb. 2.18), so folgt demnach die Resultierende durch die aufeinander folgende Anwendung des Parallelogrammgesetzes im Raum, d. h. genau wie bei der ebenen Kräftegruppe als Vektorsumme aller  $n$  Kräfte:

$$R = \sum F_i. \quad (2.16)$$



**Abb. 2.18** Räumliche zentrale Kräftegruppe

Stellen wir die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  entsprechend (2.12) durch ihre Komponenten  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ ,  $F_{iz}$  dar, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z = \sum (F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y + F_{iz} \mathbf{e}_z) \\ &= \sum (F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y + F_{iz} \mathbf{e}_z) \\ &= \left( \sum F_{ix} \right) \mathbf{e}_x + \left( \sum F_{iy} \right) \mathbf{e}_y + \left( \sum F_{iz} \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Für die Komponenten der Resultierenden im Raum gilt somit

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz}. \quad (2.17)$$

Ihren Betrag und ihre Richtung errechnen wir nach (2.13) aus

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \\ \cos \alpha_R &= \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R}.\end{aligned} \quad (2.18)$$

Wie beim ebenen Problem ist eine räumliche zentrale Kräftegruppe im *Gleichgewicht*, wenn ihre Resultierende verschwindet:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

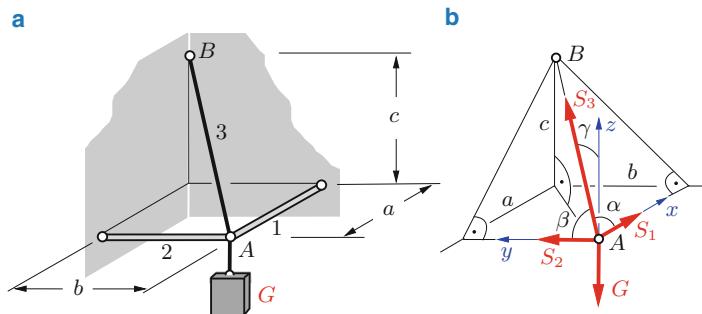
Dieser Vektorbedingung sind im Raum die *drei* skalaren *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0 \quad (2.20)$$

äquivalent. Mit diesen drei Gleichungen ist die Bestimmung von drei Unbekannten möglich.

► **Beispiel 2.8** Eine Aufhängung in einer räumlichen Ecke besteht aus dem schrägen Seil 3 und den zwei horizontalen Stäben 1 und 2 (Abb. 2.19a).

Wie groß sind die Seil- und die Stabkräfte, wenn im Gelenk A eine Kiste mit dem Gewicht  $G$  angebracht wird?



**Abb. 2.19** a Aufhängung, b Freikörperbild

**Lösung** Wir betrachten die auf das Gelenk A wirkenden Kräfte. Dazu schneiden wir das Seil und die Stäbe und setzen die Seil- und die Stabkräfte als Zugkräfte an

(Abb. 2.19b). Führen wir die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ein, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0: \quad S_1 + S_3 \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_{iy} = 0: \quad S_2 + S_3 \cos \beta &= 0, \\ \sum F_{iz} = 0: \quad S_3 \cos \gamma - G &= 0.\end{aligned}\tag{a}$$

Für die Winkel liest man aus Abb. 2.19b mit der Raumdiagonalen  $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  ab:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, & \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.\end{aligned}$$

Damit folgen

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}_3} &= \frac{G}{\cos \gamma} = G \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c}, \\ \underline{\underline{S}_1} &= -S_3 \cos \alpha = -G \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = -G \frac{a}{c}, \\ \underline{\underline{S}_2} &= -S_3 \cos \beta = -G \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -G \frac{b}{c}.\end{aligned}$$

Was anschaulich klar ist, liefert auch die Rechnung: die Stäbe werden auf Druck, das Seil wird auf Zug beansprucht.

Da bei dieser Aufgabe die Geometrie sehr übersichtlich ist, haben wir die Lösung ohne Anwendung des Vektorformalismus durchgeführt. Bei Problemen mit komplizierter Geometrie empfiehlt es sich allerdings, alle Kraftvektoren explizit anzuschreiben. Diesen (mehr formalen und damit sichereren) Lösungsweg wollen wir nun noch skizzieren.

Die Kraftvektoren (Darstellung als Spaltenvektoren, siehe Anhang A.1)

$$S_1 = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

können sofort angeschrieben werden. Um den Vektor  $\mathbf{S}_3$  darzustellen, geben wir zunächst den Vektor  $\mathbf{r}_{AB}$  von  $A$  nach  $B$  an:

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wenn wir ihn durch seinen Betrag  $r_{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  teilen, erhalten wir den Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

in Richtung von  $A$  nach  $B$ . Der Kraftvektor  $\mathbf{S}_3$  hat die gleiche Richtung und ergibt sich daher zu

$$\mathbf{S}_3 = S_3 \mathbf{e}_{AB} = \frac{S_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ , d. h.  $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{G} = \mathbf{0}$  lautet somit ausgeschrieben

$$S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{S_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sie wird nun komponentenweise ausgewertet:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: \quad & S_1 + \frac{a S_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0: \quad & S_2 + \frac{b S_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \\ \sum F_{iz} = 0: \quad & -G + \frac{c S_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0. \end{aligned}$$

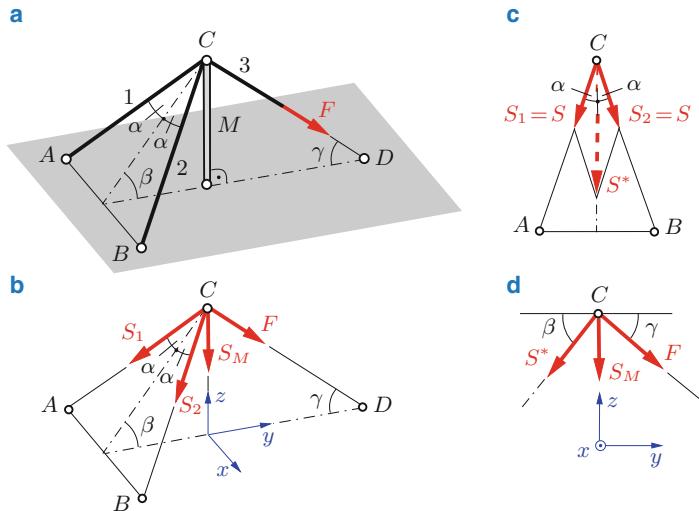
Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (a) überein.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Größen  $S_j$  die positiv angesetzten Stabkräfte bzw. die Seilkraft sind und *nicht* die Beträge der Vektoren  $\mathbf{S}_j$ . Die Rechnung liefert ja  $S_1 < 0$  und  $S_2 < 0$  (Druckstäbe), während Beträge immer positiv sind.



► **Beispiel 2.9** Ein vertikaler Mast  $M$  wird durch Seile abgespannt (Abb. 2.20a).

Wie groß sind die Kräfte in den Seilen 1 und 2 sowie im Mast, wenn am Seil 3 mit der Kraft  $F$  gezogen wird?



**Abb. 2.20** a Abgespannter Mast, b Freikörperbild, c, d Geometrie

**Lösung** Wir schneiden den Punkt  $C$  (Mastspitze) heraus und betrachten die auf ihn wirkenden Kräfte (Abb. 2.20b), wobei wir die Seilkräfte  $S_1$ ,  $S_2$  und die Kraft  $S_M$  im Mast als Zugkräfte ansetzen. Wegen der Symmetrie bezüglich der  $y, z$ -Ebene müssen die beiden Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  gleich groß sein:  $S_1 = S_2 = S$  (dies kann man auch durch die Gleichgewichtsbedingung in  $x$ -Richtung bestätigen). Wir können  $S_1$  und  $S_2$  zu einer resultierenden Kraft

$$S^* = 2 S \cos \alpha$$

zusammenfassen (Abb. 2.20c), die wie  $S_M$  und  $F$  in der  $y, z$ -Ebene liegt (Abb. 2.20d). Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= 0: & -S^* \cos \beta + F \cos \gamma &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0: & -S^* \sin \beta - S_M - F \sin \gamma &= 0 \end{aligned}$$

liefern nach Einsetzen von  $S^*$

$$\underline{\underline{S = F \frac{\cos \gamma}{2 \cos \alpha \cos \beta}}}, \quad \underline{\underline{S_M = -F \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos \beta}}}.$$

Wie zu erwarten war, herrscht in den Seilen Zug ( $S > 0$ ), im Mast Druck ( $S_M < 0$ ).

Als einfache Kontrolle setzen wir  $\gamma = \pi/2$ : die Kraft  $F$  wirkt in diesem Grenzfall in Mastrichtung. Mit  $\cos(\pi/2) = 0$  und  $\sin(\beta + \pi/2) = \cos \beta$  folgen hierfür  $S = 0$  und  $S_M = -F$ . ■

## 2.6 Zusammenfassung

- Bei einer zentralen Kräftegruppe an einem starren Körper schneiden sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt.
- Die Resultierende einer zentralen Kräftegruppe ist gegeben durch  $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$  bzw. durch ihre Komponenten

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz}.$$

Beim ebenen Problem entfällt die  $z$ -Komponente. Beachte: das Koordinatensystem kann beliebig (sollte aber zweckmäßig) gewählt werden.

- Die Gleichgewichtsbedingung für eine zentrale Kräftegruppe lautet  $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$  bzw. in Komponenten

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0.$$

Beim ebenen Problem entfällt die  $z$ -Komponente.

- Für die Lösung von Gleichgewichtsaufgaben sind in der Regel folgende Schritte erforderlich:
  - Freischneiden des Körpers (Punktes).
  - Richtige und saubere Skizze des Freikörperbildes; alle eingeprägten Kräfte sowie Reaktions- und Schnittkräfte einzeichnen. Konvention: Stabkräfte immer als Zugkräfte ansetzen.
  - Wahl eines Koordinatensystems.
  - Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen. Im ebenen Fall sind dies 2 Gleichungen, im räumlichen Fall 3 Gleichungen.
  - Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten.
- Berühren sich zwei Körper, dann üben sie im Berührungsrand eine Kontaktkraft aufeinander aus. Bei ideal glatten Körpern ist diese normal zur Berührungsfläche gerichtet.

---

# Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht des starren Körpers

3

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

3.1	Allgemeine Kräftegruppen in der Ebene . . . . .	45
3.1.1	Kräftepaar und Moment des Kräftepaars . . . . .	45
3.1.2	Moment einer Kraft . . . . .	49
3.1.3	Die Resultierende ebener Kraftsysteme . . . . .	52
3.1.4	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	54
3.1.5	Grafische Zusammensetzung von Kräften: das Seileck . . . . .	63
3.2	Allgemeine Kräftegruppen im Raum . . . . .	67
3.2.1	Der Momentenvektor . . . . .	67
3.2.2	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	74
3.2.3	Dyname, Kraftschraube . . . . .	79
3.3	Zusammenfassung . . . . .	85

- **Lernziele** Wir wollen uns nun allgemeinen Kräftegruppen zuwenden, d.h. Kräften, deren Wirkungslinien sich *nicht* in einem Punkt schneiden. Zu ihrer Analyse werden wir den Begriff des Moments einführen. Die Studierenden sollen lernen, wie man ein ebenes oder räumliches Kräftesystem reduziert und unter welchen Umständen Gleichgewicht herrscht. Sie sollen in die Lage versetzt werden, mit Hilfe von Schnittprinzip, Freikörperbild und sachgerechter Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen zwei- bzw. dreidimensionale Probleme zu lösen.

## 3.1 Allgemeine Kräftegruppen in der Ebene

### 3.1.1 Kräftepaar und Moment des Kräftepaars

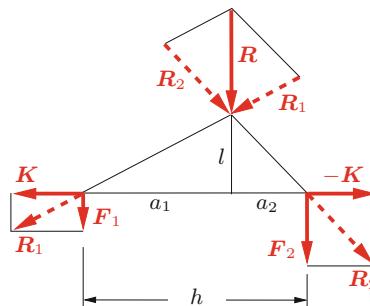
Nach Abschn. 2.1 können wir zentrale Kräftegruppen, d. h. sowohl mehrere Kräfte auf einer Wirkungslinie als auch nichtparallele Kräfte durch einen Punkt zu einer Resultierenden zusammenfassen.

Wie zwei *parallele* Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  durch eine Resultierende  $\mathbf{R}$  ersetzt werden, sei im folgenden beschrieben. Wir fügen zunächst zu den gegebenen Kräften  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  die Gleichgewichtsgruppe  $\mathbf{K}$  und  $-\mathbf{K}$  hinzu, die ja keine Wirkung auf den starren Körper ausübt (Abb. 3.1). Damit können dann in bekannter Weise die beiden Teilresultierenden  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{K}$  und  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + (-\mathbf{K})$  und daraus nach einer Verschiebung entlang ihrer Wirkungslinien in deren Schnittpunkt wiederum die Resultierende

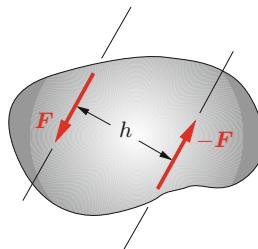
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (3.1)$$

gebildet werden. Der Betrag  $R$  der Resultierenden sowie die Lage ihrer Wirkungslinie fallen bei der grafischen Konstruktion gleichzeitig an. Aus Abb. 3.1 kann man ablesen:

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2, \\ h &= a_1 + a_2, \quad \frac{a_1}{l} = \frac{K}{F_1}, \quad \frac{a_2}{l} = \frac{K}{F_2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$



**Abb. 3.1** Addition paralleler Kräfte



**Abb. 3.2** Kräftepaar

Bei parallelen Kräften ergibt sich  $R$  demnach als algebraische Summe der Kräfte. Aus (3.2) folgen daneben das *Hebelgesetz* von Archimedes

$$a_1 F_1 = a_2 F_2 \quad (3.3)$$

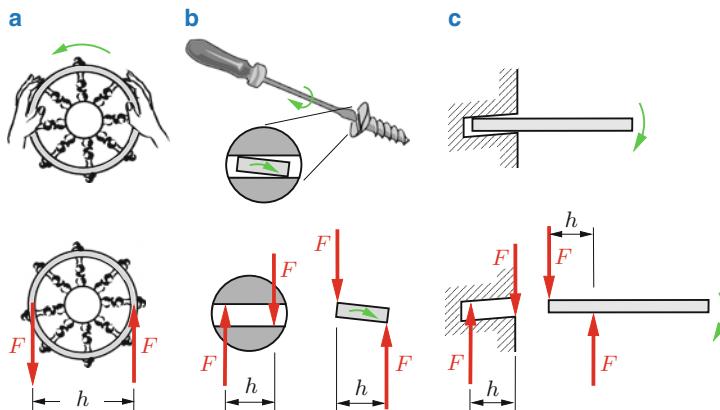
und die Abstände

$$a_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} h = \frac{F_2}{R} h, \quad a_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} h = \frac{F_1}{R} h. \quad (3.4)$$

Wir erkennen, dass auf diese Weise immer die Größe und die Lage der Resultierenden ermittelt werden können, sofern nicht der Nenner in (3.4) verschwindet. Letzterer Fall tritt ein, wenn ein so genanntes *Kräftepaar* vorliegt; er sei im folgenden betrachtet.

Unter einem Kräftepaar versteht man zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte auf parallelen Wirkungslinien (Abb. 3.2). Hier versagt die zuvor beschriebene Vorgehensweise. Mit  $F_2 = -F_1$  erhält man aus (3.2) und (3.4)  $R = 0$  und  $a_1, a_2 \rightarrow \pm\infty$ . Ein Kräftepaar kann demnach *nicht* auf eine resultierende Einzelkraft reduziert werden.

Obwohl die resultierende Kraft eines Kräftepaars Null ist, hat das Kräftepaar doch eine physikalische Wirkung: es versucht einen Körper zu drehen. In Abb. 3.3 sind einige Beispiele dargestellt, in denen Kräftepaare auftreten: a) ein Ventilrad, das gedreht werden soll, b) ein Schraubenzieher, der mit etwas Spiel auf den Schlitz einer Schraube wirkt und c) ein Balken, der in einer Wand „eingespannt“ gelagert ist und dessen Ende verdreht wird. Wir erkennen, dass ein Kräftepaar einen bestimmten *Dreh Sinn*, entweder links- oder rechtsherum hat. Genau wie die Einzelkraft ist auch das Kräftepaar eine Idealisierung, durch welche die Wirkung der stets flächenförmig verteilten Kräfte ersetzt wird.



**Abb. 3.3** Beispiele von Kräftepaaren

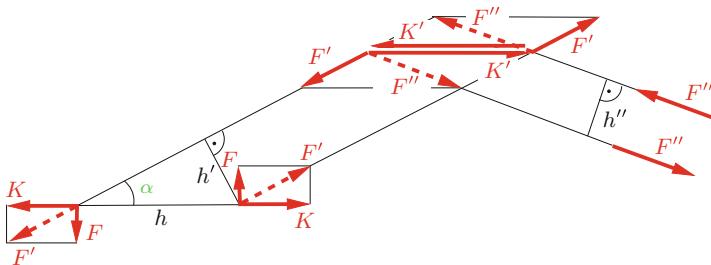
Betrachten wir nun die Bestimmungsgrößen und die Eigenschaften des Kräftepaars. Die Wirkung eines Kräftepaars wird eindeutig bestimmt durch sein *Moment*. Dieses ist gegeben durch den Betrag  $M$ , der gebildet wird aus senkrechtem Abstand  $h$  mal Kraftbetrag  $F$ ,

$$M = h F , \quad (3.5)$$

sowie durch den Drehsinn, den wir symbolisch durch einen gebogenen Pfeil ( $\curvearrowright$  oder  $\curvearrowleft$ ) angeben. Die beiden Größen, *Betrag  $M$*  und *Drehsinn  $\curvearrowright$* , deuten hier schon an, dass das Moment im Raum den Charakter eines Vektors hat. Das Moment hat die Dimension Länge mal Kraft [ $l \cdot F$ ] und wird in Vielfachen der Einheit N m angegeben (um eine Verwechslung mit der Einheit mN  $\cong$  Milli-Newton zu vermeiden, wird dabei die Reihenfolge der Einheiten von Länge und Kraft vertauscht: N m  $\cong$  Newton-Meter).

Wie aus Abb. 3.4 zu entnehmen ist, gibt es beliebig viele äquivalente Darstellungen für ein Kräftepaar. Das Kräftepaar  $F$  mit dem Abstand  $h$  kann durch Hinzufügen der Gleichgewichtsgruppe  $K$  durch ein Kräftepaar  $F'$  mit dem Abstand  $h'$  gleichwertig ersetzt werden. Dabei bleibt das Moment, d. h. der Drehsinn und der Betrag des Momentes

$$M = h' F' = (h \sin \alpha) \left( \frac{F}{\sin \alpha} \right) = h F$$



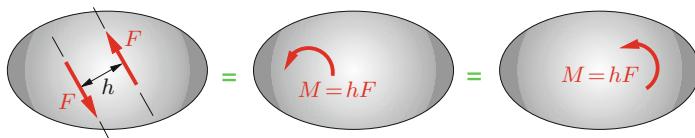
**Abb. 3.4** Äquivalente Darstellungen eines Kräftepaars

unverändert. Wie aus der Abbildung gleichfalls hervorgeht, kann durch geeignetes Aneinanderreihen solcher Konstruktionen ein Kräftepaar beliebig in der Ebene verschoben werden, ohne dass sich das Moment ändert. Das Kräftepaar ist also im Gegensatz zur Kraft *nicht* an eine Wirkungslinie gebunden: es kann ohne Änderung der Wirkung an beliebigen Stellen eines starren Körpers angreifen.

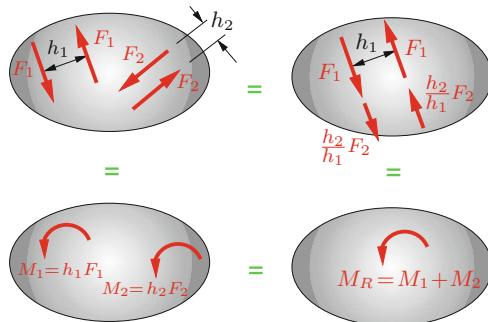
Wegen der eindeutigen Beschreibung eines Kräftepaars durch sein Moment werden wir später das Kräftepaar meist durch den Begriff des Momentes ersetzen und auf das Zeichnen eines der beliebig vielen äquivalenten Kräftepaare verzichten. In Analogie zur Darstellung einer Kraft durch das Symbol  $\nearrow F$  (Pfeil mit Kraftbetrag) verwenden wir dann das Symbol  $\curvearrowright M$  (Abb. 3.5); in ihm sind der Drehsinn (gebogener Pfeil) und der Betrag  $M$  des Momentes zusammengefasst.

Genau wie es zu jeder Kraft eine gleichgroße Gegenkraft gibt (*actio = reactio*), so gibt es zu jedem Kräftepaar ein gleichgroßes Kräftepaar mit entgegengesetztem Drehsinn bzw. zu jedem Moment ein gleichgroßes Gegenmoment. So wirkt zum Beispiel der Schraubenzieher nach Abb. 3.3b mit dem Moment  $M = h F$  rechtsdrehend auf die Schraube. Umgekehrt wirkt die Schraube mit dem betragmäßig gleichen Moment linksdrehend auf den Schraubenzieher.

Greifen an einem starren Körper mehrere Kräftepaare an, so kann man sie durch geeignetes Verschieben und Verdrehen zu einem resultierenden Kräftepaar



**Abb. 3.5** Symbol für ein Moment

**Abb. 3.6** Resultierendes Moment

mit dem Moment  $M_R$  zusammenfassen (Abb. 3.6). Ihre Momente werden dabei unter Beachtung des Drehsinns algebraisch addiert:

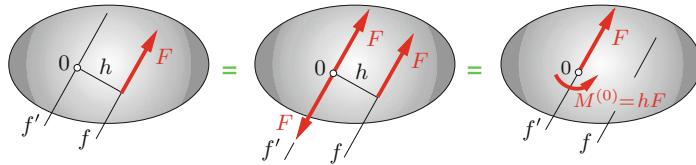
$$M_R = \sum M_i . \quad (3.6)$$

Ist die Summe der Momente Null, so verschwindet das resultierende Kräftepaar und damit die Drehwirkung auf den Körper. Die Gleichgewichtsbedingung für eine Gruppe von Kräftepaaren lautet somit

$$M_R = \sum M_i = 0 . \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Moment einer Kraft

Eine Kraft kann ohne Änderung ihrer Wirkung nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Mit Hilfe des Begriffs des Kräftepaars wollen wir uns nun dem Problem der Parallelverschiebung einer Kraft zuwenden. Hierzu betrachten wir in Abb. 3.7 eine Kraft  $F$ , die um den Abstand  $h$  in eine zu  $f$  parallele Wirkungslinie  $f'$  durch den Punkt 0 verschoben werden soll. Lassen wir entlang  $f'$  zwei Gleichgewichtskräfte vom Betrag  $F$  wirken, so bildet eine dieser Kräfte mit der ursprünglichen Kraft  $F$  im Abstand  $h$  ein Kräftepaar, dessen Wirkung durch



**Abb. 3.7** Zur Parallelverschiebung einer Kraft

das Moment vom Betrag  $M^{(0)} = h F$  und den entsprechenden Drehsinn beschrieben wird. Einer Kraft  $F$  im senkrechten Abstand  $h$  von  $0$  sind also eine Kraft  $F$  durch  $0$  und ein Moment der Größe  $M^{(0)} = h F$  gleichwertig. Die Größe  $M^{(0)} = hF$  bezeichnet man als das *Moment der Kraft*  $F$  bezüglich des Punktes  $0$ ; der hochgestellte Index bei  $M$  kennzeichnet dabei den *Bezugspunkt*. Den senkrechten Abstand zwischen  $0$  und der Kraft  $F$  nennt man den *Hebelarm* der Kraft bezüglich  $0$ . Der *Drehsinn* des Momentes ist durch den Drehsinn der Kraft  $F$  um den Punkt  $0$  festgelegt.

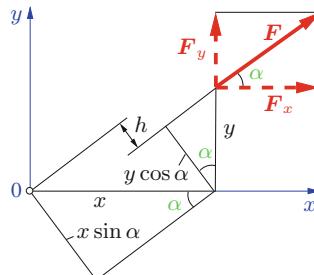
Während das Moment eines Kräftepaars nicht von einem Bezugspunkt abhängt, sind der Betrag und der Drehsinn des Momentes einer Kraft von der Wahl des Bezugspunktes abhängig. Dieser Unterschied muss immer beachtet werden.

Es ist oft zweckmäßig, eine Kraft  $F$  durch ihre kartesischen Komponenten  $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{F}_y = F_y \mathbf{e}_y$  zu ersetzen (Abb. 3.8). Vereinbaren wir, dass ein Moment *positiv* ist, wenn es *gegen den Uhrzeigersinn* dreht ( $\curvearrowleft$ ), so ist das Moment von  $F$  bezüglich  $0$  durch  $M^{(0)} = h F$  gegeben. Wegen

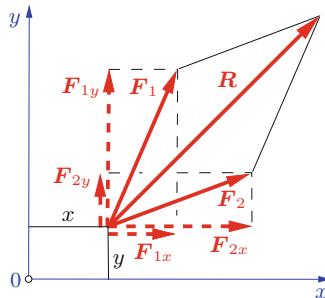
$$h = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

und

$$\sin \alpha = F_y / F, \quad \cos \alpha = F_x / F$$



**Abb. 3.8** Momente der kartesischen Kraftkomponenten



**Abb. 3.9** Moment der Resultierenden

folgt

$$M^{(0)} = hF = \left( x \frac{F_y}{F} - y \frac{F_x}{F} \right) F = x F_y - y F_x. \quad (3.8)$$

Man kann das Moment also auch aus der Summe der Momente der Kraftkomponenten bezüglich 0 bestimmen, wobei der Drehsinn der Komponenten zu beachten ist.

Wir bestimmen nun das Moment der Resultierenden  $R$  der zwei nichtorthogonalen Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  (Abb. 3.9). Hier werden die Momente von  $F_1$  und  $F_2$  bezüglich 0

$$M_1^{(0)} = x F_{1y} - y F_{1x}, \quad M_2^{(0)} = x F_{2y} - y F_{2x},$$

und für die Summe erhält man

$$M_1^{(0)} + M_2^{(0)} = x (F_{1y} + F_{2y}) - y (F_{1x} + F_{2x}) = x R_y - y R_x = M_R^{(0)}.$$

Es spielt demnach keine Rolle, ob man Kräfte erst addiert und dann das Moment bildet, oder ob man die Summe der Einzelmomente bildet. Dies gilt auch für beliebig viele Kräfte. Wir können diesen Sachverhalt folgendermaßen aussprechen:

Die Summe der Momente von Einzelkräften ist gleich dem Moment der Resultierenden.

### 3.1.3 Die Resultierende ebener Kraftsysteme

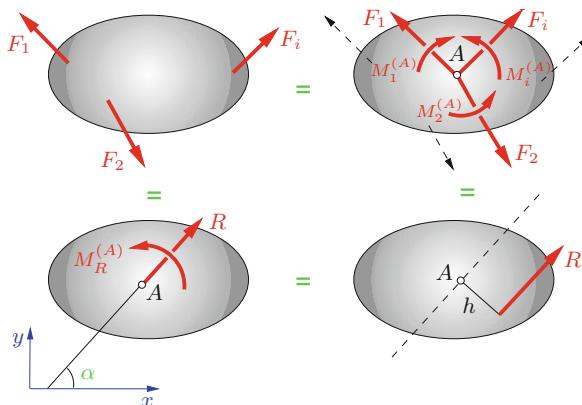
Wir betrachten nun einen starren Körper, der unter der Wirkung einer allgemeinen ebenen Kräftegruppe steht (Abb. 3.10) und fragen danach, wie das System reduzierbar ist. Um die Frage zu beantworten, wählen wir einen beliebigen Bezugspunkt  $A$  und verschieben die Kräfte parallel zu sich selbst, bis ihre Wirkungslinien durch den Punkt  $A$  gehen. Damit dabei die Wirkung nicht geändert wird, müssen die entsprechenden Momente der Kräfte bezüglich  $A$  hinzugefügt werden. Auf diese Weise können wir das Kraftsystem reduzieren auf eine zentrale Kräftegruppe und auf eine Gruppe von Momenten, die wir ihrerseits durch eine Resultierende  $R$  mit den Komponenten  $R_x$ ,  $R_y$  und durch ein resultierendes Moment  $M_R^{(A)}$  ersetzen können. Nach (2.7) und (3.6) sind diese gegeben durch

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)}. \quad (3.9)$$

Betrag und Richtung der Resultierenden errechnen sich aus

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}. \quad (3.10)$$

Die Belastung durch  $R$  (mit Wirkungslinie durch  $A$ ) und durch  $M_R^{(A)}$  lässt sich noch durch die Wirkung der Resultierenden  $R$  alleine ersetzen, deren Wirkungslinie dann jedoch parallel verschoben werden muss. Der senkrechte Abstand  $h$  ist



**Abb. 3.10** Resultierende einer allgemeinen ebenen Kräftegruppe

dabei so zu wählen, dass das Moment  $M_R^{(A)}$  gerade  $hR$  ist:  $hR = M_R^{(A)}$ . Daraus folgt

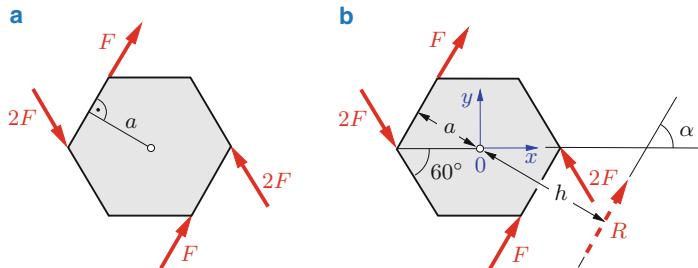
$$h = \frac{M_R^{(A)}}{R}. \quad (3.11)$$

Für den Fall  $M_R^{(A)} = 0$  und  $R \neq 0$  wird  $h = 0$ , d.h. die Wirkungslinie von  $R$  geht dann durch den Punkt  $A$ . Für  $R = 0$  und  $M_R^{(A)} \neq 0$  ist keine weitere Reduktion möglich: das Kraftsystem wird jetzt alleine auf ein Moment (d.h. auf ein Kräftepaar) reduziert, das von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (3.9) bis (3.11) kann man den Betrag und die Richtung der Resultierenden sowie die Lage ihrer Wirkungslinie analytisch ermitteln. Wie man die Reduktion grafisch durchführen kann, wird in Abschn. 3.1.5 gezeigt.

► **Beispiel 3.1** Eine gleichseitige Sechseckscheibe ist durch vier Kräfte mit den Beträgen  $F$  bzw.  $2F$  belastet (Abb. 3.11a).

Es sind die Größe und die Lage der Resultierenden zu ermitteln.



**Abb. 3.11** a Belastete Scheibe, b Freikörperbild

**Lösung** Wir wählen ein Koordinatensystem  $x, y$  und seinen Ursprung 0 als Bezugspunkt (Abb. 3.11b). Momente sollen positiv gezählt werden, wenn sie links herum drehen ( $\curvearrowleft$ ). Dann werden nach (3.9)

$$R_x = \sum F_{ix} = 2F \cos 60^\circ + F \cos 60^\circ + F \cos 60^\circ - 2F \cos 60^\circ = F,$$

$$R_y = \sum F_{iy} = -2F \sin 60^\circ + F \sin 60^\circ + F \sin 60^\circ + 2F \sin 60^\circ = \sqrt{3}F,$$

$$M_R^{(0)} = \sum M_i^{(0)} = 2aF + aF + 2aF - aF = 4aF.$$

Daraus erhält man (siehe (3.10))

$$\underline{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \underline{2F}, \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \underline{\alpha = 60^\circ}.$$

Der Hebelarm der Resultierenden in Bezug auf 0 ergibt sich zu

$$\underline{h} = \frac{M_R^{(0)}}{R} = \frac{4a F}{2 F} = \underline{2a}. \quad \blacksquare$$

### 3.1.4 Gleichgewichtsbedingungen

Wie wir in Abschn. 3.1.3 gesehen haben, kann jede ebene Kräftegruppe auf eine zentrale Kräftegruppe und eine Gruppe von Momenten um einen beliebigen Bezugspunkt  $A$  reduziert werden (dabei setzen sich die Momente aus den Momenten der Einzelkräfte und aus den Momenten eventuell vorhandener Kräftepaare zusammen). Auf jede dieser Gruppen kann man die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen (2.11) und (3.7) anwenden. Ein starrer Körper unter der Wirkung einer ebenen Kräftegruppe ist demnach im Gleichgewicht, wenn gilt:

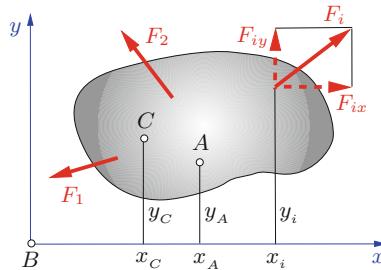
$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i^{(A)} = 0. \quad (3.12)$$

Der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen (drei) entspricht die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten (drei) oder *Freiheitsgrade* eines Körpers in der Ebene: je eine Translation in  $x$ - und  $y$ -Richtung und eine Drehung um eine Achse senkrecht zur  $x$ ,  $y$ -Ebene.

Wir untersuchen nun, ob die Wahl des Bezugspunktes in der Momentengleichgewichtsbedingung tatsächlich beliebig ist. Hierzu bilden wir mit den Bezeichnungen nach Abb. 3.12 die Momentensumme bezüglich des Punktes  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum M_i^{(A)} &= \sum \{(x_i - x_A) F_{iy} - (y_i - y_A) F_{ix}\} \\ &= \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} \\ &= \sum M_i^{(B)} - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sind die Gleichgewichtsbedingungen (3.12) erfüllt, so folgt daraus sofort  $\sum M_i^{(B)} = 0$ . Umgekehrt ergibt sich aus  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$ ,  $\sum M_i^{(B)} = 0$



**Abb. 3.12** Zur Wahl eines Bezugspunkts

auch  $\sum M_i^{(A)} = 0$ . Die Wahl des Bezugspunktes spielt also tatsächlich keine Rolle; er kann auch außerhalb des Körpers liegen.

An Stelle von *zwei* Kraft- und *einer* Momentengleichgewichtsbedingung kann man auch mit *einer* Kraft- und *zwei* Momentenbedingungen arbeiten. Durch Einsetzen in (3.13) kann man sich davon überzeugen, dass die Bedingungen

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum M_i^{(A)} = 0, \quad \sum M_i^{(B)} = 0 \quad (3.14)$$

auch  $\sum F_{iy} = 0$  zur Folge haben, sofern nur  $x_A \neq 0$  ist. Damit die Gleichgewichtsbedingungen (3.14) den Gleichgewichtsbedingungen (3.12) gleichwertig sind, dürfen also nicht beide Bezugspunkte A und B auf einer Geraden liegen (hier die y-Achse), die senkrecht zu der Richtung ist, in der Kräftegleichgewicht gebildet wird (hier die x-Richtung). Analog führen die Bedingungen

$$\sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i^{(A)} = 0, \quad \sum M_i^{(B)} = 0 \quad (3.15)$$

auch auf  $\sum F_{ix} = 0$ , sofern  $y_A \neq 0$  ist.

Auch die Anwendung der Momentengleichgewichtsbedingung auf drei verschiedene Punkte A, B und C

$$\sum M_i^{(A)} = 0, \quad \sum M_i^{(B)} = 0, \quad \sum M_i^{(C)} = 0 \quad (3.16)$$

ist äquivalent zu (3.12), wenn die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nicht auf einer Geraden liegen. Um diese Aussage zu beweisen, verwenden wir (3.13) und die entsprechende Beziehung für einen beliebigen Punkt  $C$ :

$$\begin{aligned}\sum M_i^{(A)} &= \sum M_i^{(B)} - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix}, \\ \sum M_i^{(C)} &= \sum M_i^{(B)} - x_C \sum F_{iy} + y_C \sum F_{ix}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Einsetzen von (3.16) liefert

$$-x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} = 0, \quad -x_C \sum F_{iy} + y_C \sum F_{ix} = 0,$$

woraus man durch Eliminieren von  $\sum F_{iy}$  bzw. von  $\sum F_{ix}$  die Beziehungen

$$\left(-x_C \frac{y_A}{x_A} + y_C\right) \sum F_{ix} = 0, \quad \left(-x_C + \frac{x_A}{y_A} y_C\right) \sum F_{iy} = 0$$

erhält. Daraus folgen  $\sum F_{ix} = 0$  und  $\sum F_{iy} = 0$ , wenn die Klammern von Null verschieden sind, wenn also  $y_A/x_A \neq y_C/x_C$  ist. Die Punkte  $A$  und  $C$  dürfen also tatsächlich nicht auf derselben Geraden durch den Ursprung  $B$  liegen.

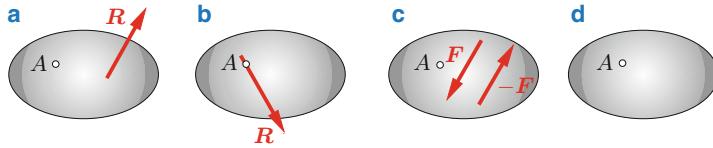
Ob man bei der Lösung von Aufgaben die Gleichgewichtsbedingungen in der Form (3.12) oder (3.14) oder (3.16) anwendet, ist zwar im Prinzip gleichgültig, doch kann es je nach Aufgabenstellung zweckmäßig sein, die eine oder die andere Form zu bevorzugen.

Bei der Anwendung einer Momentengleichgewichtsbedingung (z. B.  $\sum M_i^{(A)} = 0$ ) ist es erforderlich, sowohl einen Bezugspunkt anzugeben, als auch einen positiven Drehsinn (z. B. linksherum positiv) zu wählen. Ähnlich wie beim Kräftegleichgewicht schreiben wir dafür symbolisch kurz  $\overset{\curvearrowright}{A}$ : (Summe aller Momente um den Bezugspunkt  $A$  gleich Null; Momente in Pfeilrichtung werden positiv gezählt).

Kehren wir nun nochmals zu allgemeinen ebenen Kräftegruppen zurück. Aus (3.12) und den Ergebnissen aus Abschn. 3.1.3 ergibt sich zusammenfassend, dass ebene Kräftegruppen stets auf einen der vier nachfolgenden Fälle reduziert werden können:

1. Resultierende nicht durch Bezugspunkt  $A$  (Abb. 3.13a):

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}, \quad M^{(A)} \neq 0.$$



**Abb. 3.13** Zur Reduktion einer allgemeinen ebenen Kräftegruppe

2. *Resultierende* durch Bezugspunkt  $A$  (Abb. 3.13b):

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}, \quad M^{(A)} = 0.$$

3. *Kräftepaar* (unabhängig vom Bezugspunkt) (Abb. 3.13c):

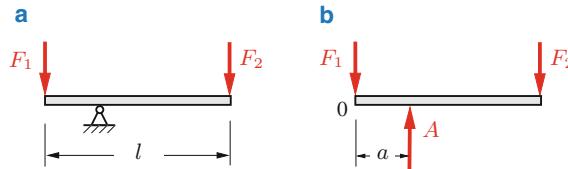
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad M^{(A)} = M \neq 0.$$

4. *Gleichgewicht* (Abb. 3.13d):

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad M^{(A)} = 0.$$

► **Beispiel 3.2** Wo muss der gewichtslose Balken (Abb. 3.14a) durch ein Lager unterstützt werden, damit er sich unter den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  im Gleichgewicht befindet?

Wie groß ist die Kraft  $A$ , die vom Lager auf den Balken ausgeübt wird (Lagerkraft)?



**Abb. 3.14** a Beweglicher Balken im Gleichgewicht, b Freikörperbild

**Lösung** Wir bezeichnen den Abstand des Lagers vom Punkt 0 mit  $a$ , befreien den Körper vom Lager und bringen die Lagerkraft  $A$  an (Abb. 3.14b). Da  $F_1$  und  $F_2$  vertikal gerichtet sind (Horizontalkomponenten sind Null), muss auch  $A$  vertikal gerichtet sein. Dies folgt aus der Gleichgewichtsbedingung in horizontaler Richtung (Horizontalkomponente von  $A$  muss verschwinden!).

Es ist meist zweckmäßig, den Bezugspunkt für eine Momentengleichgewichtsbedingung so zu wählen, dass er auf der Wirkungslinie einer Kraft liegt. Da der Hebelarm dieser Kraft dann Null ist, taucht sie im Momentengleichgewicht nicht auf. Mit dem Bezugspunkt 0 lauten die Gleichgewichtsbedingungen (die Bedingung in horizontaler Richtung ist identisch erfüllt, liefert also nichts):

$$\uparrow: A - F_1 - F_2 = 0, \quad \overset{\curvearrowleft}{0}: a A - l F_2 = 0.$$

Daraus erhält man

$$\underline{\underline{A = F_1 + F_2}}, \quad \underline{\underline{a = \frac{F_2}{F_1 + F_2} l}}.$$

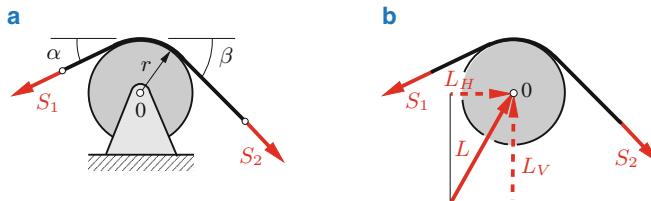
Wählen wir zur Probe den Bezugspunkt  $A$ , so lautet das Momentengleichgewicht

$$\overset{\curvearrowright}{A}: a F_1 - (l - a) F_2 = 0,$$

woraus dasselbe Ergebnis folgt. ■

► **Beispiel 3.3** Ein Seil, das über eine reibungsfrei gelagerte Rolle geführt wird, ist unter den Kräften  $S_1$  und  $S_2$  im Gleichgewicht (Abb. 3.15a).

Wie groß sind bei gegebenem  $S_1$  die Seilkraft  $S_2$  und die Kraft, die im Lager 0 auf die Rolle wirkt?



**Abb. 3.15** a Umlenkrolle, b Freikörperbild

**Lösung** Die Antwort auf die erste Frage folgt unmittelbar aus dem Momentengleichgewicht bezüglich 0 (die Kraft, die im Lager 0 auf die Rolle wirkt, hat kein Moment bezüglich 0):

$$\overset{\curvearrowleft}{0}: r S_1 - r S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S_2 = S_1}}.$$

Dieses Ergebnis ist schon aus der Erfahrung bekannt (vgl. Abb. 2.11b).

Zur Ermittlung der Lagerkraft schneiden wir die Rolle frei und führen eine nach Größe und Richtung unbekannte Lagerkraft  $L$  ein, die in ihre Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt wird (Abb. 3.15b). Aus

$$\begin{aligned}\uparrow: \quad L_V - S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \beta &= 0, \\ \rightarrow: \quad L_H - S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta &= 0\end{aligned}$$

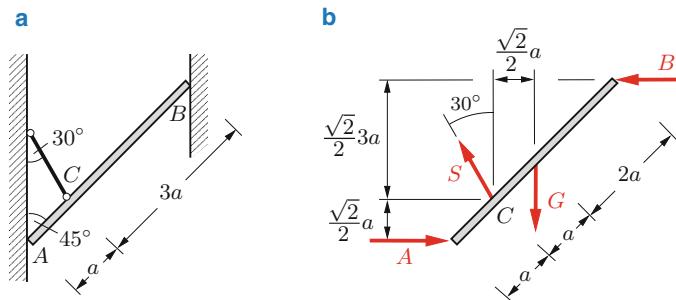
erhält man mit  $S_2 = S_1$  das Ergebnis

$$\underline{\underline{L_V = S_1(\sin \alpha + \sin \beta)}}, \quad \underline{\underline{L_H = S_1(\cos \alpha - \cos \beta)}}.$$

Für  $\alpha = \beta$  werden  $L_V = 2 S_1 \sin \alpha$ ,  $L_H = 0$ , und im Spezialfall  $\alpha = \beta = \pi/2$  folgt  $L_V = 2 S_1$ . ■

► **Beispiel 3.4** Ein homogener Balken (Länge  $4a$ , Gewicht  $G$ ) wird im Punkt  $C$  von einem Seil gehalten und liegt in  $A$  und  $B$  an *glatten* vertikalen Wänden an (Abb. 3.16a).

Wie groß sind die Seilkraft und die Kontaktkräfte in  $A$  und  $B$ ?



**Abb. 3.16** a Balken zwischen glatten Wänden, b Freikörperbild

**Lösung** Um das Freikörperbild zu skizzieren, schneiden wir das Seil und trennen den Balken von den Wänden. An den Trennstellen führen wir die Kontaktkräfte  $A$  und  $B$  senkrecht zu den Berührungssebenen (glatte Wände!) sowie die Seilkraft  $S$  ein (Abb. 3.16b). Das Gewicht  $G$  wird in der Balkenmitte (Schwerpunkt, vgl. Kap. 4) angebracht. Die horizontalen und die vertikalen Kraftabstände ergeben sich aus einfachen geometrischen Überlegungen. Mit dem Bezugspunkt  $C$  für die

Momente lauten die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\uparrow: \quad S \cos 30^\circ - G = 0,$$

$$\rightarrow: \quad A - B - S \sin 30^\circ = 0,$$

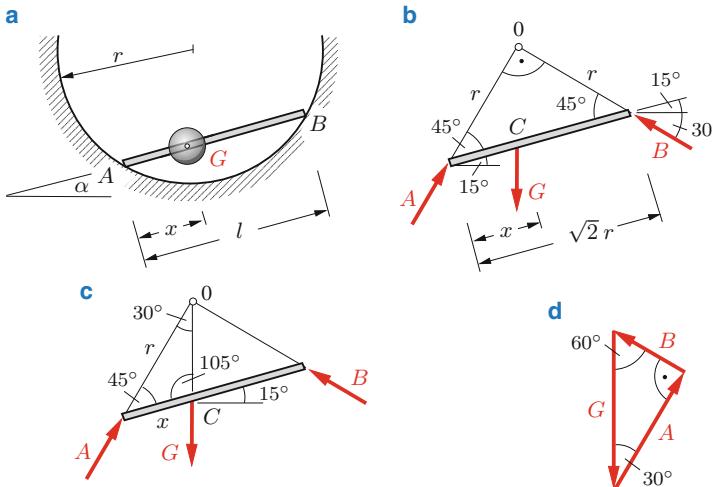
$$\curvearrowleft: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} a A - \frac{\sqrt{2}}{2} a G + \frac{\sqrt{2}}{2} 3 a B = 0.$$

Die drei Kräfte folgen daraus mit  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin 30^\circ = 1/2$  zu

$$\underline{\underline{S = \frac{2\sqrt{3}}{3} G}}, \quad \underline{\underline{A = \frac{1+\sqrt{3}}{4} G}}, \quad \underline{\underline{B = \frac{3-\sqrt{3}}{12} G}}.$$
■

► **Beispiel 3.5** In einer glatten Kugelkalotte vom Radius  $r$  liegt ein Balken der Länge  $l = \sqrt{2} r$  (Abb. 3.17a).

In welchem Abstand  $x$  vom Punkt  $A$  muss ein Gewicht  $G$  angebracht werden, damit sich der Balken unter dem Winkel  $\alpha = 15^\circ$  im Gleichgewicht befindet? Wie groß sind dann die Kontaktkräfte in  $A$  und in  $B$ ? Das Gewicht des Balkens darf im Vergleich zu  $G$  vernachlässigt werden.



**Abb. 3.17** a Balken in Kugelkalotte, b Freikörperbilder, c Krafteck

**Lösung** Das Freikörperbild (Abb. 3.17b) zeigt die auf den Balken wirkenden Kräfte. Die Kontaktkräfte  $A$  und  $B$  stehen senkrecht auf den jeweiligen Berühr-

rungsebenen (glatte Oberflächen!), sind also auf den Kugelmittelpunkt 0 gerichtet. Wegen der gegebenen Längen  $r$  und  $l = \sqrt{2}r$  ist das Dreieck 0 A B gleichschenklig und rechtwinklig. Mit dem Winkel  $\alpha = 15^\circ$  ergeben sich für die Kräfte  $A$  und  $B$  Neigungswinkel von  $60^\circ$  bzw. von  $30^\circ$  zur Horizontalen. Damit lauten die drei Gleichgewichtsbedingungen (in der Momentengleichung zerlegen wir  $A$  und  $B$  zweckmäßig in Komponenten senkrecht und parallel zum Balken):

$$\begin{aligned}\uparrow: \quad & A \sin 60^\circ + B \sin 30^\circ - G = 0, \\ \rightarrow: \quad & A \cos 60^\circ - B \cos 30^\circ = 0, \\ \curvearrowleft: \quad & -x(A \sin 45^\circ) + (l-x)(B \sin 45^\circ) = 0.\end{aligned}$$

Aus ihnen können die drei Unbekannten  $A$ ,  $B$  und  $x$  bestimmt werden. Auflösen der ersten beiden Gleichungen liefert mit  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$ ,  $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$  die Kontaktkräfte

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\sqrt{3}}{2} G, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} G.$$

Durch Einsetzen in die Momentengleichgewichtsbedingung erhält man mit  $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$  den Abstand

$$\underline{x} = l \frac{B}{A+B} = \frac{l}{\sqrt{3}+1}.$$

Wir können die Aufgabe auch anders lösen. Die drei Kräfte  $A$ ,  $B$  und  $G$  können nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie durch *einen* Punkt gehen (vgl. Abschn. 3.1.5). Da  $A$  und  $B$  durch 0 hindurchgehen, muss demnach auch  $G$  durch 0 gehen (Abb. 3.17c). Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck 0 A C liefert mit  $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = (\sqrt{2}/4)(1 + \sqrt{3})$  und  $r = l/\sqrt{2}$  wieder den Abstand

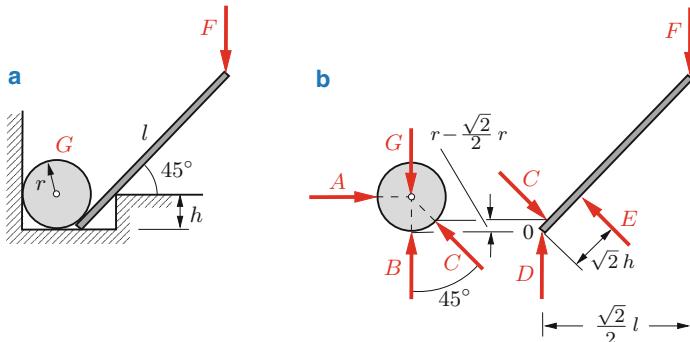
$$\underline{x} = r \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{l}{\sqrt{2}} \frac{1/2}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})} = \frac{l}{1 + \sqrt{3}}.$$

Die Kontaktkräfte  $A$  und  $B$  ergeben sich aus dem geschlossenen Kräftedreieck (Abb. 3.17d) unmittelbar zu

$$\underline{\underline{A}} = G \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} G, \quad \underline{\underline{B}} = G \sin 30^\circ = \frac{G}{2}. \quad \blacksquare$$

► **Beispiel 3.6** Eine Walze (Radius  $r$ , Gewicht  $G$ ) wird über einen Hebel der Länge  $l$  belastet, der auf einer Ecke der Höhe  $h$  aufliegt (Abb. 3.18a). Alle Berührungsflächen seien ideal glatt; das Eigengewicht des Hebels kann vernachlässigt werden.

Wie groß ist die Druckkraft zwischen der Walze und dem horizontalen Boden, wenn am Hebel die Kraft  $F$  wirkt und  $h = r$  ist?



**Abb. 3.18** a Über Hebel belastete Walze, b Freikörperbild

**Lösung** Wir zerlegen das System in die einzelnen starren Körper (Walze, Hebel) und führen an den Berührungsstellen die Druckkräfte  $A$  bis  $E$  senkrecht zur jeweiligen Berührungsfläche ein (Abb. 3.18b). Dabei ist zu beachten, dass beim Angriffspunkt der Kraft  $E$  der Hebel und beim Angriffspunkt der Kraft  $D$  die horizontale Unterlage die jeweiligen Berührungsflächen sind. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen für den Hebel

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & \frac{\sqrt{2}}{2} C - \frac{\sqrt{2}}{2} E = 0, \\ \uparrow: \quad & D - \frac{\sqrt{2}}{2} C + \frac{\sqrt{2}}{2} E - F = 0, \\ \widehat{\circ}: \quad & \sqrt{2} r \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) C - \sqrt{2} h E + \frac{\sqrt{2}}{2} l F = 0 \end{aligned}$$

und für die Walze (zentrale Kräftegruppe!)

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & A - \frac{\sqrt{2}}{2} C = 0, \\ \uparrow: \quad & B + \frac{\sqrt{2}}{2} C - G = 0. \end{aligned}$$

Damit stehen fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten  $A$  bis  $E$  zur Verfügung. Auflösen liefert mit  $h = r$  für die Kontaktkraft  $B$

$$\underline{\underline{B = G - \frac{l}{2r} F}}.$$

Für  $F = (2r/l)G$  wird  $B = 0$ . Für größere Kräfte  $F$  ist Gleichgewicht nicht mehr möglich: die Walze wird dann angehoben. ■

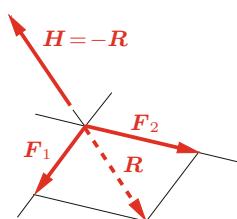
### 3.1.5 Grafische Zusammensetzung von Kräften: das Seileck

Wie die Zusammensetzung von Kräften grafisch erfolgen kann, wurde bereits erläutert. Liegen zum Beispiel zwei *nichtparallele* Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  vor (Abb. 3.19), so ergibt sich die Resultierende  $\mathbf{R}$  durch Zeichnen des Kräfteparallelogramms bzw. eines Kräftedreiecks. Man erkennt, dass Gleichgewicht nur dann erzeugt werden kann, wenn zusätzlich zu  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  noch eine Haltekraft  $\mathbf{H} = -\mathbf{R}$  wirkt, deren Wirkungslinie mit der von  $\mathbf{R}$  zusammenfällt. Daraus schließen wir:

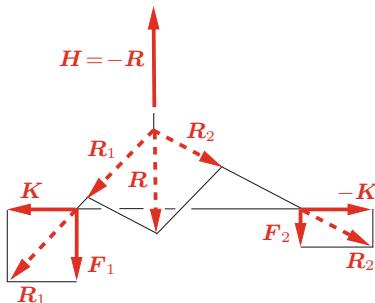
Drei nichtparallele Kräfte können nur dann im Gleichgewicht sein, wenn ihre Wirkungslinien durch einen Punkt gehen.

Für zwei *parallele* Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  findet man die Resultierende  $\mathbf{R}$  (bzw. die Kraft  $\mathbf{H}$ , die  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  das Gleichgewicht hält) mit Hilfe der Gleichgewichtsgruppe  $\mathbf{K}$  und  $-\mathbf{K}$  durch die in Abb. 3.20 dargestellte Konstruktion. Sie führt, wie wir in Abschn. 3.1.1 gesehen haben, immer zum Ziel, sofern kein Kräftepaar vorliegt, das ja nicht weiter reduzierbar ist.

Prinzipiell kann die eben geschilderte zeichnerische Zusammensetzung von zwei Kräften auf beliebig viele Kräfte übertragen werden: zwei Kräfte werden zu



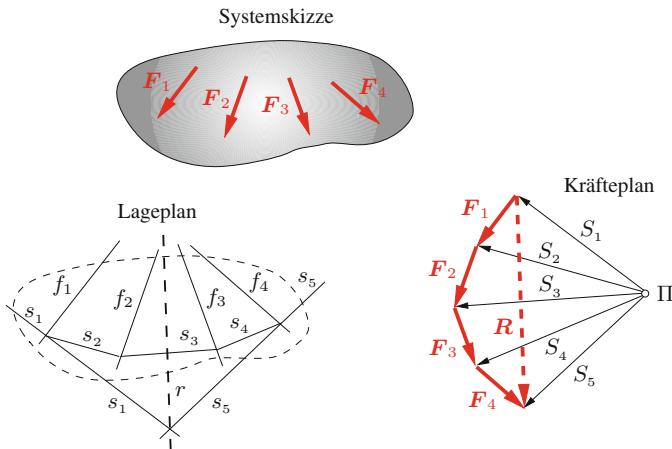
**Abb. 3.19** Resultierende und Haltekraft



**Abb. 3.20** Resultierende und Haltekraft bei parallelen Kräften

einer Teilresultierenden zusammengefasst, diese wiederum mit der dritten Kraft zu einer neuen Teilresultierenden und so fort. Bei vielen Kräften wird dieses Verfahren jedoch sehr unübersichtlich und unbequem. Man bedient sich an Stelle dieses schrittweisen Vorgehens deshalb einer systematischen Konstruktion, die den Namen *Seileck* oder *Seilpolygon* trägt.

Die Vorgehensweise sei an Hand von vier Kräften  $F_1$  bis  $F_4$  nach Abb. 3.21 dargestellt. Zunächst zeichnen wir unter Angabe eines Längenmaßstabes den Lageplan mit den Wirkungslinien  $f_1, \dots, f_4$  der Kräfte  $F_1, \dots, F_4$ . Nach Wahl eines Kräftemaßstabes werden die Kräfte im Kräfteplan zusammengesetzt, woraus sich die Resultierende  $R$  nach Größe und Richtung ergibt. Die Lage von  $R$  im Lage-



**Abb. 3.21** Lageplan und Kräfteplan

plan folgt aus der Seileckkonstruktion. Zu diesem Zweck wählen wir im Kräfteplan einen beliebigen Punkt  $\Pi$ , den man als „Pol“ bezeichnet, und ziehen die „Polstrahlen“  $S_1$  bis  $S_5$  (Verbindungslinien von  $\Pi$  zu den Anfangs- und den Endpunkten der Kräfte). Parallel zu den Polstrahlen werden im Lageplan die „Seilstrahlen“  $s_1, \dots, s_5$  gezeichnet. Dazu bringen wir zunächst  $s_1$  und  $s_2$  in einem beliebigen Punkt auf  $f_1$  zum Schnitt. Der Reihe nach legen wir dann durch den Schnittpunkt von  $s_2$  und  $f_2$  den Strahl  $s_3$ , durch den Schnittpunkt von  $s_3$  und  $f_3$  den Strahl  $s_4$  usw. Durch den Schnittpunkt des ersten und des letzten Seilstrahles  $s_1$  und  $s_5$  wird letztlich die Lage der Resultierenden  $R$  bzw. ihrer Wirkungslinie  $r$  festgelegt.

Die Richtigkeit der Vorgehensweise ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Fassen wir im Krafteck die Polstrahlen als Kräfte  $S_1$  bis  $S_5$  auf (daher befinden sich in Abb. 3.21 ausnahmsweise Pfeile an den Polstrahlen), so können wir die Kraft  $F_1$  zerlegen in  $-S_1$  und  $S_2$ , die Kraft  $F_2$  zerlegen in  $-S_2$  und  $S_3$  usw. Die Wirkungslinien von  $S_1, \dots, S_5$  sind dann die Seilstrahlen  $s_1, \dots, s_5$  im Lageplan. Es gilt demnach

$$\begin{aligned} F_1 &= -S_1 + S_2, & F_2 &= -S_2 + S_3, \\ F_3 &= -S_3 + S_4, & F_4 &= -S_4 + S_5. \end{aligned}$$

Da sich die Gleichgewichtspaares  $(S_2, -S_2)$ ,  $(S_3, -S_3)$ ,  $(S_4, -S_4)$  gegenseitig aufheben, folgt für die Resultierende

$$R = \sum F_i = -S_1 + S_5.$$

Den vier Kräften  $F_1, \dots, F_4$  sind also die zwei Kräfte  $-S_1$  und  $S_5$  äquivalent. Durch den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien  $s_1$  und  $s_5$  muss die Wirkungslinie  $r$  der Resultierenden  $R$  gehen.

Da die Wahl des Pols  $\Pi$  und des ersten Schnittpunktes im Seileck beliebig sind, gibt es für jedes ebene Kraftsystem unendlich viele Seilecke, die jedoch alle zum gleichen Endresultat führen. Der Name „Seileck“ röhrt von der mechanischen Deutung, die man dem Linienzug  $s_1, \dots, s_5$  im Lageplan geben kann: ein Seil, das dem Linienzug folgt, ist unter der Wirkung der Kräfte  $F_1, \dots, F_4$  im Gleichgewicht.

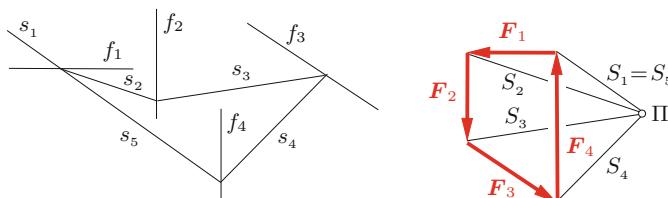
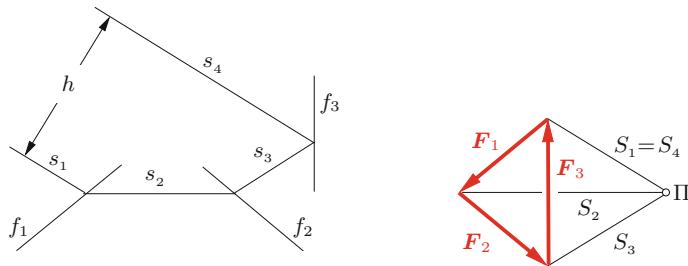


Abb. 3.22 Seileck bei einer Gleichgewichtsgruppe



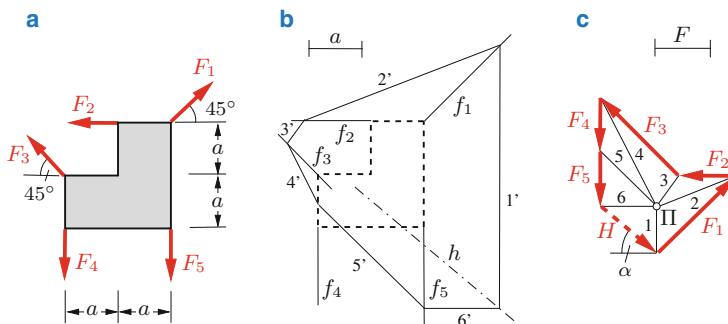
**Abb. 3.23** Seileck beim Kräftepaar

Bilden die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  eine Gleichgewichtsgruppe ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ,  $M = 0$ ), so fallen sowohl erster und letzter Polstrahl als auch erster und letzter Seilstrahl zusammen (Abb. 3.22); Krafteck und Seileck sind dann *geschlossen* (vgl. auch Band 4, Abschnitt 3.3.2).

Sind die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  nur auf ein Kräftepaar reduzierbar, so ist das Krafteck zwar geschlossen ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ), der erste und der letzte Seilstrahl sind jedoch parallel und „schneiden“ sich erst im Unendlichen (Abb. 3.23). Das Seileck ist in diesem Fall *offen*. Das Moment des Kräftepaars wird  $M = h S_1$ .

► **Beispiel 3.7** Auf eine starre Scheibe wirken die Kräfte  $F_1 = 2 F$ ,  $F_2 = F$ ,  $F_3 = 2 F$ ,  $F_4 = F$ ,  $F_5 = F$  (Abb. 3.24a).

Es sind die Wirkungslinie sowie die Größe und Richtung der Kraft  $H$  zu bestimmen, die den Kräften  $F_1$  bis  $F_5$  das Gleichgewicht hält.



**Abb. 3.24** a Belastete Scheibe, b Lageplan, c Kräfteplan

**Lösung** Nach Wahl eines Längenmaßstabes zeichnen wir zunächst den Lageplan, der die Geometrie der Scheibe und die Wirkungslinien  $f_1, \dots, f_5$  der Kräfte  $F_1, \dots, F_5$  enthält (Abb. 3.24b). Unter Verwendung eines geeigneten Kräftemaßstabes zeichnen wir anschließend den Kräfteplan, indem die Kräfte  $F_1, \dots, F_5$  maßstabsgerecht der Reihe nach aneinander gefügt werden (Abb. 3.24c). Die Kraft  $H$  schließt das Kraftscheit (Gleichgewicht!), für ihre Größe und ihre Richtung lesen wir im Rahmen der Zeichengenauigkeit ab:

$$\underline{H = 1,3 F}, \quad \underline{\alpha = 40^\circ}.$$

Die Seileckkonstruktion wird nach Wahl des Pols  $\Pi$  im Kraftscheit und eines Anfangspunktes auf der Wirkungslinie  $f_1$  im Lageplan – wie vorne beschrieben – durchgeführt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Pol- bzw. die Seilstrahlen nur noch mit  $1, \dots, 6$  bzw.  $1', \dots, 6'$ . Die Wirkungslinie  $h$  der Kraft  $H$  geht durch den Schnittpunkt von  $1'$  und  $6'$ . Ihre Richtung ist durch den Winkel  $\alpha$  festgelegt. ■

## 3.2 Allgemeine Kräftegruppen im Raum

### 3.2.1 Der Momentenvektor

Zur mathematischen Behandlung räumlicher Kräftegruppen führt man neben dem Kraftvektor noch den Begriff des *Momentenvektors* ein. Hierzu betrachten wir zunächst in Abb. 3.25 das schon behandelte ebene Problem (vgl. auch Abb. 3.8). Das Moment der in der  $x, y$ -Ebene wirkenden Kraft  $\mathbf{F}$  bezüglich des Punktes 0 ist mit  $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{e}_x$  usw. gegeben durch (vgl. (3.8))

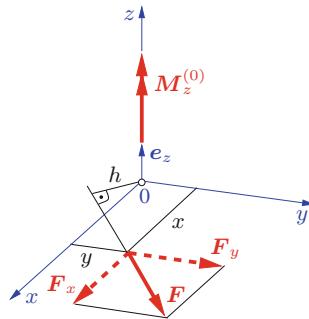
$$\mathbf{M}_z^{(0)} = h \mathbf{F} = x \mathbf{F}_y - y \mathbf{F}_x. \quad (3.18)$$

Die Vorzeichen (positiver Drehsinn) wurden dabei in Übereinstimmung mit Abschn. 3.1.2 gewählt. Der Index  $z$  zeigt an, dass  $\mathbf{M}_z^{(0)}$  um die  $z$ -Achse dreht.

Die beiden Bestimmungsstücke des Moments in der Ebene (Betrag und Drehsinn) können mathematisch durch den Momentenvektor

$$\mathbf{M}_z^{(0)} = M_z^{(0)} \mathbf{e}_z \quad (3.19)$$

zum Ausdruck gebracht werden. Der Vektor  $\mathbf{M}_z^{(0)}$  zeigt in  $z$ -Richtung und beinhaltet sowohl den Betrag  $M_z^{(0)}$  als auch den positiven Drehsinn. Letzterer ist durch



**Abb. 3.25** Momentenvektor bei ebenen Problemen

die sogenannte *Rechtsschraube* oder *Korkenzieherregel* festgelegt: blicken wir in Richtung des Einheitsvektors  $e_z$ , so dreht ein positives Moment rechtsherum.

Um in Zeichnungen Kraft- und Momentenvektoren unterscheiden zu können, stellen wir letztere meist durch einen *Doppelpfeil* dar (vgl. Abb. 3.25). Man beachte, dass Kraft- und Momentenvektoren unterschiedliche Dimensionen haben; sie können daher niemals addiert werden!

Im ebenen Fall hat der Momentenvektor aufgrund der einen Drehmöglichkeit um die  $z$ -Achse nur die Komponente  $M_z^{(0)}$ . Im räumlichen Fall müssen entsprechend den drei Drehmöglichkeiten um die drei Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  die drei Komponenten  $M_x^{(0)}$ ,  $M_y^{(0)}$  und  $M_z^{(0)}$  berücksichtigt werden:

$$\mathbf{M}^{(0)} = M_x^{(0)} \mathbf{e}_x + M_y^{(0)} \mathbf{e}_y + M_z^{(0)} \mathbf{e}_z. \quad (3.20)$$

Mit den Komponenten der Kraft  $\mathbf{F}$  liest man aus Abb. 3.26 für die Momente um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse ab:

$$M_x^{(0)} = yF_z - zF_y, \quad M_y^{(0)} = zF_x - xF_z, \quad M_z^{(0)} = xF_y - yF_x. \quad (3.21)$$

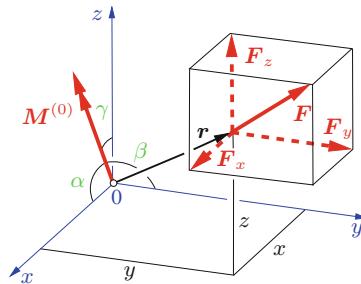
Der Betrag des Momentenvektors und seine Richtungskosinus folgen zu

$$|\mathbf{M}^{(0)}| = M^{(0)} = \sqrt{[M_x^{(0)}]^2 + [M_y^{(0)}]^2 + [M_z^{(0)}]^2}, \quad (3.22)$$

$$\cos \alpha = \frac{M_x^{(0)}}{M^{(0)}}, \quad \cos \beta = \frac{M_y^{(0)}}{M^{(0)}}, \quad \cos \gamma = \frac{M_z^{(0)}}{M^{(0)}}.$$

Der Momentenvektor  $\mathbf{M}^{(0)}$  kann formal auch durch das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.23)$$



**Abb. 3.26** Momentenvektor bei räumlichen Problemen

dargestellt werden. Dabei ist  $\mathbf{r}$  der *Ortsvektor*, d. h. die gerichtete Verbindungsstrecke zwischen dem Bezugspunkt 0 und dem Kraftangriffspunkt (beliebiger Punkt auf der Wirkungslinie!). Mit

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

und den Vektorprodukten (vgl. Anhang A.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x &= -\mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

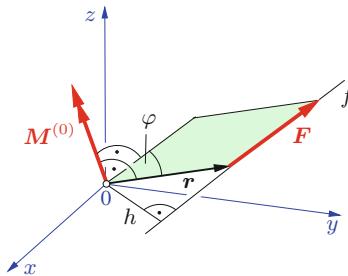
erhält man aus (3.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(0)} &= (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \times (F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) \\ &= (y F_z - z F_y) \mathbf{e}_x + (z F_x - x F_z) \mathbf{e}_y + (x F_y - y F_x) \mathbf{e}_z \\ &= M_x^{(0)} \mathbf{e}_x + M_y^{(0)} \mathbf{e}_y + M_z^{(0)} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Der Momentenvektor  $\mathbf{M}^{(0)}$  steht nach den Eigenschaften des Vektorproduktes senkrecht auf der Ebene, die durch  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannt wird (Abb. 3.27). Sein Betrag entspricht der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannten Parallelogrammfläche:

$$M^{(0)} = r F \sin \varphi = h F. \quad (3.25)$$

In anderen Worten: Moment = senkrechter Abstand (Hebelarm) mal Kraft.



**Abb. 3.27** Anschauliche Deutung des Momentenvektors

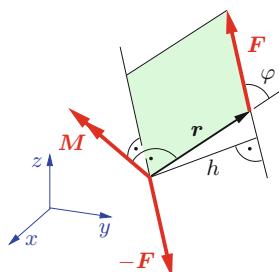
Das Moment eines Kräftepaars im Raum (Abb. 3.28) kann durch den gleichen Formalismus beschrieben werden. Es gilt wieder

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.26)$$

wobei  $\mathbf{r}$  jetzt von einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie von  $-\mathbf{F}$  zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie von  $\mathbf{F}$  gerichtet ist. Wie vorher steht der Momentenvektor  $\mathbf{M}$  senkrecht auf der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannten Ebene (Wirkungsebene des Kräftepaars). Sein Richtungssinn ergibt sich aus der Rechtschraube, und sein Betrag entspricht der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannten Parallelogrammfläche (Hebelarm mal Kraft):

$$\mathbf{M} = h \mathbf{F}. \quad (3.27)$$

Die Eigenschaften von Kräftepaaren bzw. Momenten im Raum entsprechen denen in der Ebene. Wie Kräftepaare in der Ebene beliebig verschoben werden



**Abb. 3.28** Moment eines Kräftepaars im Raum

können, so kann im Raum der Momentenvektor parallel zu seiner Wirkungslinie und entlang seiner Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass seine Wirkung geändert wird. Im Unterschied zum Kraftvektor, der an seine Wirkungslinie gebunden ist, ist der Momentenvektor ein *freier Vektor*.

Wirken auf einen Körper im Raum mehrere Momente  $\mathbf{M}_i$ , so erhält man das resultierende Moment  $\mathbf{M}_R$  aus der Vektorsumme

$$\mathbf{M}_R = \sum \mathbf{M}_i , \quad (3.28)$$

d. h. in Komponenten

$$M_{Rx} = \sum M_{ix} , \quad M_{Ry} = \sum M_{iy} , \quad M_{Rz} = \sum M_{iz} . \quad (3.29)$$

Ist die Summe der Momente Null, so verschwindet das resultierende Moment  $\mathbf{M}_R$  und damit die Drehwirkung auf den Körper: er befindet sich dann im Momentengleichgewicht. Die Momentengleichgewichtsbedingung lautet demnach in Vektorform

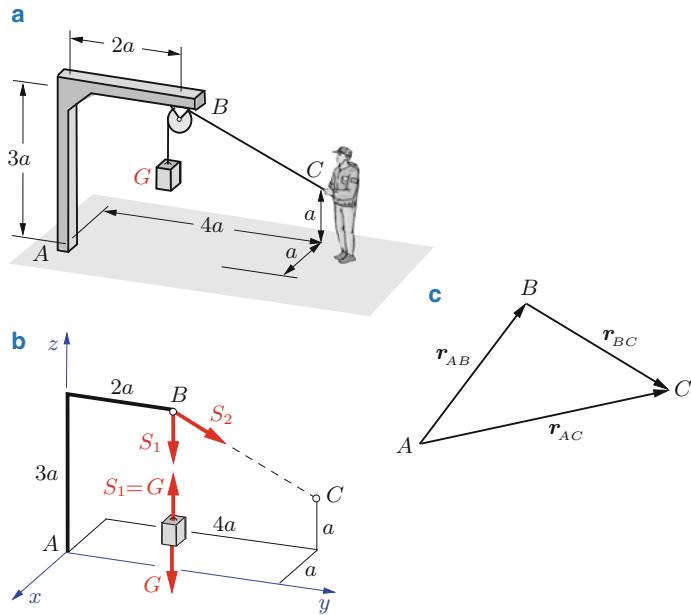
$$\mathbf{M}_R = \sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

oder in Komponenten

$$\sum M_{ix} = 0 , \quad \sum M_{iy} = 0 , \quad \sum M_{iz} = 0 . \quad (3.31)$$

► **Beispiel 3.8** Am Auslegerende  $B$  eines Lastenaufzugs hängt eine Kiste mit dem Gewicht  $G$  an einem Seil. Das Seil wird in  $B$  über eine Rolle (Radius vernachlässigbar) reibungsfrei umgelenkt und im Punkt  $C$  gehalten (Abb. 3.29a).

Man bestimme das resultierende Moment der auf den Ausleger wirkenden Seilkräfte bezüglich des Punktes  $A$ .



**Abb. 3.29** a Lastenaufzug, b Freikörperbild, c Richtungsvektor

**Lösung** Abb. 3.29b zeigt die auf den Ausleger wirkenden Seilkräfte. Da die Rolle reibungsfrei ist, sind beide Seilkräfte gleich groß:  $S_1 = S_2 = G$ .

Das Moment  $\mathbf{M}_1^{(A)}$  der Kraft  $S_1$  bezüglich des Punktes  $A$  hat im gewählten Koordinatensystem nur eine Komponente in  $x$ -Richtung:

$$\mathbf{M}_1^{(A)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} aG . \quad (\text{a})$$

Das Moment  $\mathbf{M}_2^{(A)}$  der Kraft  $S_2$  bestimmen wir gemäß (3.23) mit Hilfe des Kreuzprodukts

$$\mathbf{M}_2^{(A)} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{S}_2 . \quad (\text{b})$$

Darin ist der Vektor vom Bezugspunkt  $A$  zum Angriffspunkt  $B$  der Kraft  $\mathbf{S}_2$  gegeben durch

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a . \quad (\text{c})$$

Die Kraft  $\mathbf{S}_2 = S_2 \mathbf{e}_2$  können wir durch ihren Betrag  $S_2 = G$  und den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_2$  darstellen. Letzteren bestimmen wir zweckmäßig, indem wir zunächst den Richtungsvektor

$$\mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC} - \mathbf{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} a$$

von  $B$  nach  $C$  bilden (vgl. Abb. 3.29c) und diesen dann durch seinen Betrag  $|\mathbf{r}_{BC}|$  teilen:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_{BC}}{|\mathbf{r}_{BC}|} = \frac{1}{a\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Damit gilt

$$\mathbf{S}_2 = S_2 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} G . \quad (\text{d})$$

Mit (c) und (d) erhält man für das Vektorprodukt (b) (vgl. Anhang (A.31))

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2^{(A)} &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{S}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 2a & 3a \\ -G/3 & 2G/3 & -2G/3 \end{vmatrix} \\ &= (-4/3 - 2)aG \mathbf{e}_x - aG \mathbf{e}_y + (2/3)aG \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

oder in der Darstellung als Spaltenvektor

$$\mathbf{M}_2^{(A)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} aG . \quad (\text{e})$$

Das resultierende Moment  $\underline{\underline{M}}_R^{(A)}$  der Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  bezüglich des Punkts  $A$  folgt mit (a) und (e) zu (vgl. (3.32))

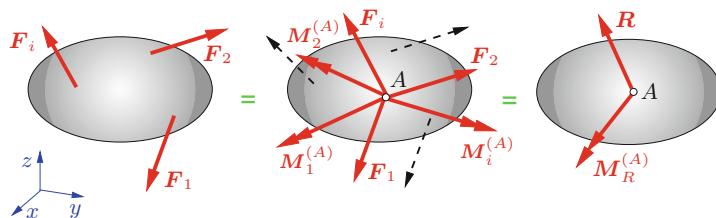
$$\underline{\underline{M}}_R^{(A)} = \underline{\underline{M}}_1^{(A)} + \underline{\underline{M}}_2^{(A)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} aG . \quad \blacksquare$$

### 3.2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Wir betrachten nun ein allgemeines Kraftsystem im Raum (Abb. 3.30) und fragen nach dem resultierenden Kraft- und dem resultierenden Momentenvektor, durch die das Kraftsystem äquivalent ersetzt werden kann. Die Antwort ergibt sich analog zum ebenen Problem (vgl. Abschn. 3.1.3). Wir wählen einen beliebigen Bezugspunkt  $A$  im Raum und verschieben die Kräfte  $F_i$  parallel zu sich selbst, bis ihre Wirkungslinien durch  $A$  gehen. Damit dabei die Wirkung der Kräfte nicht geändert wird, müssen die entsprechenden Momente  $M_i^{(A)}$  der Kräfte bezüglich des Punktes  $A$  berücksichtigt werden. Das dann vorhandene zentrale Kraftsystem und das System aus Momenten kann in bekannter Weise durch die resultierende Kraft  $R$  und durch das resultierende Moment  $M_R^{(A)}$  ersetzt werden (Reduktion):

$$R = \sum F_i , \quad M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)} . \quad (3.32)$$

Während  $R$  nicht von der Wahl des Bezugspunktes abhängt, ist  $M_R^{(A)}$  von der Wahl des Bezugspunktes  $A$  abhängig. Es gibt demnach beliebig viele Möglichkeiten, ein Kraftsystem auf einen Kraft- und einen Momentenvektor zu reduzieren.



**Abb. 3.30** Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems im Raum

Eine allgemeine Kräftegruppe befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die resultierende Kraft  $\mathbf{R}$  als auch das resultierende Moment  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $A$  verschwinden:

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum \mathbf{M}_i^{(A)} = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

In Komponenten lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, & \sum M_{ix}^{(A)} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, & \sum M_{iy}^{(A)} &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0, & \sum M_{iz}^{(A)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Anzahl der *sechs* skalaren Gleichgewichtsbedingungen entspricht der Anzahl der *sechs* Freiheitsgrade oder Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers im Raum: je eine Translation in  $x$ -, in  $y$ - und in  $z$ -Richtung und je eine Rotation um die  $x$ -, um die  $y$ - und um die  $z$ -Achse. Wie im ebenen Fall lässt sich zeigen, dass die Wahl des Bezugspunktes für die Momentengleichgewichtsbedingung beliebig ist.

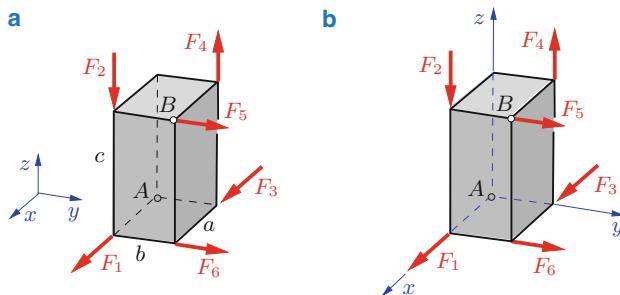
Haben alle Kräfte einer Kräftegruppe die gleiche Richtung, so reduziert sich die Zahl der Gleichungen. Wirken zum Beispiel alle Kräfte in  $z$ -Richtung ( $F_{ix} = 0$ ,  $F_{iy} = 0$ ), so bleiben nur

$$\sum F_{iz} = 0, \quad \sum M_{ix}^{(A)} = 0, \quad \sum M_{iy}^{(A)} = 0. \quad (3.35)$$

Sowohl die Kräftegleichgewichtsbedingungen in  $x$ - und in  $y$ -Richtung als auch die Momentenbedingung um die zu  $z$  parallele Achse durch  $A$  sind in diesem Fall identisch erfüllt.

► **Beispiel 3.9** Auf einen Quader (Abb. 3.31a) mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  wirken die Kräfte  $F_1$  bis  $F_6$ . Dabei sind  $F_1 = F_2 = F$ ,  $F_3 = F_4 = 2F$ ,  $F_5 = F_6 = 3F$ ,  $b = a$ ,  $c = 2a$ .

Es sind die Resultierende  $\mathbf{R}$ , die resultierenden Momente  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  und  $\mathbf{M}_R^{(B)}$  bezüglich der Punkte  $A$  und  $B$  sowie deren Beträge zu bestimmen.



**Abb. 3.31** Belasteter Quader

**Lösung** Die Vektoren sind durch ihre jeweiligen Komponenten bestimmt. Für die Resultierende erhält man

$$R_x = F_1 + F_3 = 3F, \quad R_y = F_5 + F_6 = 6F, \quad R_z = -F_2 + F_4 = F$$

und damit (vgl. Anhang A.1)

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} F, \quad \underline{R} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2} F = \underline{\sqrt{46} F}.$$

Um das Moment bezüglich  $A$  zu ermitteln, legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt  $A$  (Abb. 3.31b). Dann liest man ab:

$$\begin{aligned} M_{Rx}^{(A)} &= \sum M_{ix}^{(A)} = b F_4 - c F_5 = -4a F, \\ M_{Ry}^{(A)} &= \sum M_{iy}^{(A)} = a F_2 = a F, \\ M_{Rz}^{(A)} &= \sum M_{iz}^{(A)} = a F_5 + a F_6 - b F_3 = 4a F. \end{aligned}$$

Daraus folgen

$$\underline{M}_R^{(A)} = \begin{pmatrix} M_{Rx}^{(A)} \\ M_{Ry}^{(A)} \\ M_{Rz}^{(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} a F,$$

$$\underline{\underline{M}}_R^{(A)} = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} a F = \underline{\sqrt{33} a F}.$$

Analog erhält man für den Punkt  $B$

$$M_{Rx}^{(B)} = b F_2 + c F_6 = 7a F,$$

$$M_{Ry}^{(B)} = -c F_1 - c F_3 + a F_4 = -4a F,$$

$$M_{Rz}^{(B)} = b F_1 = a F$$

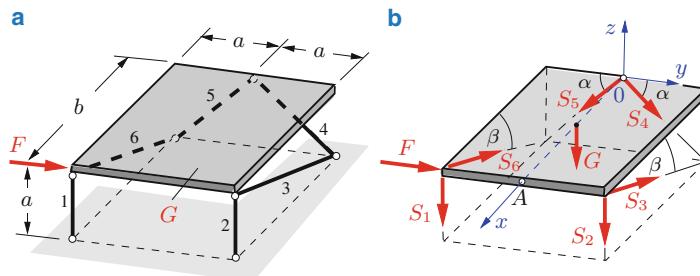
und

$$\underline{\underline{M}_R^{(B)}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} a F, \quad \underline{\underline{M}_R^{(B)}} = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2} a F = \underline{\underline{\sqrt{66} a F}}.$$

Die Momentenvektoren bezüglich  $A$  und  $B$  sind verschieden! ■

► **Beispiel 3.10** Eine homogene Platte vom Gewicht  $G$  wird durch sechs Stäbe in der waagrechten Lage gehalten und durch die Kraft  $F$  belastet (Abb. 3.32a).

Es sind die Stabkräfte zu bestimmen.



**Abb. 3.32** a Homogene Platte, b Freikörperbild

**Lösung** Im Freikörperbild bringen wir neben der Gewichtskraft  $G$  in Plattenmitte (vgl. Kapitel 4) und der Kraft  $F$  die unbekannten Stabkräfte  $S_1$  bis  $S_6$  als Zugkräfte an und führen die Hilfswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  ein (Abb. 3.32b). Das Koordinatensystem wählen wir so, dass mit dem Ursprung 0 als Bezugspunkt möglichst viele Momente

zu Null werden. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0: & -S_3 \cos \beta - S_6 \cos \beta &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0: & S_4 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha + F &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0: & -S_1 - S_2 - S_3 \sin \beta - S_6 \sin \beta - S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - G &= 0, \\ \sum M_{ix}^{(0)} &= 0: & a S_1 - a S_2 + a S_6 \sin \beta - a S_3 \sin \beta &= 0, \\ \sum M_{iy}^{(0)} &= 0: & \frac{b}{2} G + b S_1 + b S_2 + b S_6 \sin \beta + b S_3 \sin \beta &= 0, \\ \sum M_{iz}^{(0)} &= 0: & b F + a S_3 \cos \beta - a S_6 \cos \beta &= 0.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\cos \alpha = \sin \alpha &= \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

erhält man zunächst aus der 1. und der 6. Gleichung

$$\underline{\underline{S_3 = -S_6 = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2a} F.}}$$

Damit folgen aus der 4. und der 5. Gleichung

$$\underline{\underline{S_1 = -\frac{G}{4} - \frac{F}{2}, \quad S_2 = -\frac{G}{4} + \frac{F}{2}}}$$

und schließlich aus der 2. und der 3. Gleichung

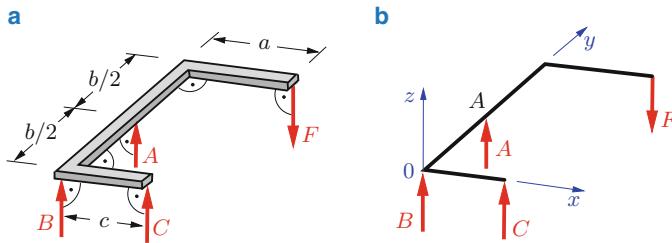
$$\underline{\underline{S_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{G}{2} + F \right), \quad S_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{G}{2} - F \right).}}$$

Zur Probe überzeugen wir uns noch, dass das Momentengleichgewicht um eine zu  $y$  parallele Achse durch den Punkt  $A$  erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\sum M_{iy}^{(A)} &= -\frac{b}{2} G - b S_4 \sin \alpha - b S_5 \sin \alpha \\ &= -b \left[ \frac{G}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{G}{2} + F \right) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{G}{2} - F \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

► **Beispiel 3.11** Ein Winkel mit vernachlässigbarem Eigengewicht befindet sich unter der Wirkung von vier Kräften, die senkrecht auf der vom Winkel aufgespannten Ebene stehen, im Gleichgewicht (Abb. 3.33a). Die Kraft  $F$  sei gegeben.

Wie groß sind die Kräfte  $A$ ,  $B$  und  $C$ ?



**Abb. 3.33** a Belasteter Winkel, b Freikörperbild

**Lösung** Mit dem Koordinatensystem  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und dem Koordinatenursprung als Bezugspunkt (Abb. 3.33b) lauten die Gleichgewichtsbedingungen (3.35)

$$\sum F_{iz} = 0: A + B + C - F = 0,$$

$$\sum M_{ix}^{(0)} = 0: \frac{b}{2} A - b F = 0,$$

$$\sum M_{iy}^{(0)} = 0: -c C + a F = 0.$$

Wir erhalten somit

$$\underline{\underline{A = 2F}}, \quad \underline{\underline{C = \frac{a}{c} F}}, \quad \underline{\underline{B = -\left(1 + \frac{a}{c}\right) F}}.$$

Man kann auch einen anderen Momentenbezugspunkt, wie zum Beispiel  $A$ , verwenden. Dann ändert sich nur die Momentengleichung:

$$\sum M_{ix}^{(A)} = 0: -\frac{b}{2} B - \frac{b}{2} C - \frac{b}{2} F = 0.$$

Das Ergebnis bleibt unverändert. ■

### 3.2.3 Dyname, Kraftschraube

Wir betrachten nun noch einmal ein allgemeines räumliches Kraftsystem. In Abschn. 3.2.2 wurde gezeigt, dass man ein solches System nach Wahl eines belie-

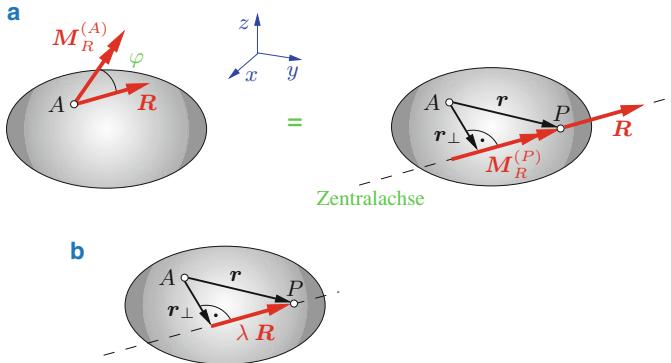


Abb. 3.34 Zentralachse

bigen Bezugspunktes (zum Beispiel  $A$ ) statisch äquivalent durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{R}$  mit der Wirkungslinie durch den Punkt  $A$  und durch ein resultierendes Moment  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  ersetzen kann (vgl. Abb. 3.30). Man bezeichnet dieses System  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(A)})$  aus einer Kraft und einem Moment als *Dyname* oder *Kraftwinder*. Dabei ist  $\mathbf{R}$  in Größe und Richtung unabhängig vom Bezugspunkt, während  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  von der Wahl dieses Punktes abhängt. Dementsprechend hängt auch der in Abb. 3.34a dargestellte Winkel  $\varphi$  zwischen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  von der Wahl des Bezugspunktes ab.

Wir wollen nun zeigen, dass es einen ausgezeichneten Bezugspunkt  $P$  gibt, bei dem der Winkel  $\varphi$  zwischen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}_R^{(P)}$  gerade Null ist, d. h.  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}_R^{(P)}$  gleichgerichtet sind (Abb. 3.34a). Die noch unbekannte Lage von  $P$  bezüglich  $A$  sei durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  gekennzeichnet. Da wir die Resultierende  $\mathbf{R}$  durch  $P$  entlang ihrer Wirkungslinie verschieben können, gibt es nicht nur einen einzigen Punkt  $P$ , sondern jeder Punkt auf dieser Wirkungslinie ist ein ausgezeichneter Bezugspunkt. Man bezeichnet diese ausgezeichnete Wirkungslinie als *Zentralachse* und die zugehörige Dyname  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(P)})$  als *Kraftschraube*. Die Lage der Zentralachse bezüglich  $A$  können wir dementsprechend nicht nur durch  $\mathbf{r}$  sondern zweckmäßig auch durch den senkrechten Abstandsvektor  $\mathbf{r}_\perp$  beschreiben, vgl. Abb. 3.34a.

Damit die beiden Dynamen  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(A)})$  mit dem beliebigen Bezugspunkt  $A$  und  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(P)})$  mit dem Bezugspunkt  $P$  auf der Zentralachse statisch gleichwertig sind, muss zwischen den Momenten bezüglich  $A$  und bezüglich  $P$  die Beziehung

$$\mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{M}_R^{(P)} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} \quad (3.36)$$

bestehen. Darin ist  $\mathbf{r} \times \mathbf{R}$  das Versatzmoment, das durch die Parallelverschiebung der Resultierenden von  $A$  nach  $P$  zustande kommt. Dieses können wir auch durch  $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R}$  ausdrücken, da  $\mathbf{R}$  ja entlang der Zentralachse beliebig verschoben werden kann.

Aus (3.36) lässt sich der Abstandsvektor  $\mathbf{r}_\perp$  und damit die Lage der Zentralachse bestimmen, indem wir formal das Vektorprodukt

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(P)} + \mathbf{R} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{R})$$

bilden, wobei wegen der vorausgesetzten gleichen Richtung von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}_R^{(P)}$  das Produkt  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(P)}$  verschwindet. Beachtet man, dass  $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R}$  gilt, dann lässt sich diese Gleichung auch in der Form

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{R} \times (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R}) \quad (3.37)$$

schreiben. Für die rechte Seite ergibt sich unter Verwendung der Beziehung  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$  für das doppelte Vektorprodukt (vgl. Anhang A.1, (A.33))

$$\mathbf{R} \times (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R}) = \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}_{=R^2} \mathbf{r}_\perp - \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_\perp)}_{=0} \mathbf{R} = R^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Setzt man dies in (3.37) ein, so erhält man für den gesuchten senkrechten Abstandsvektor

$$\mathbf{r}_\perp = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(A)}}{R^2}. \quad (3.38)$$

Damit lässt sich aus (3.36) unter Beachtung von  $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R}$  und der Beziehung  $(\mathbf{R} \times \mathbf{M}_R^{(A)}) \times \mathbf{R} = R^2 \mathbf{M}_R^{(A)} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_R^{(A)}) \mathbf{R}$  für das doppelte Vektorprodukt nach (A.33) auch das Moment bezüglich des Punktes  $P$  bzw. jedes beliebigen Punktes auf der Zentralachse bestimmen:

$$\mathbf{M}_R^{(P)} = \mathbf{M}_R^{(A)} - \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_R^{(A)}}{R^2} \mathbf{R}. \quad (3.39)$$

Mit dem bekannten Abstandsvektor  $\mathbf{r}_\perp$  und der Resultierenden  $\mathbf{R}$  können wir nun für die Zentralachse eine Gleichung in Parameterform angeben. Ein beliebiger Punkt  $P$  auf ihr wird bezüglich  $A$  durch den Vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \lambda \mathbf{R} \quad (3.40)$$

festgelegt (Abb. 3.34b). Dabei ist  $\lambda$  ein (dimensionsbehafteter) variabler Parameter.

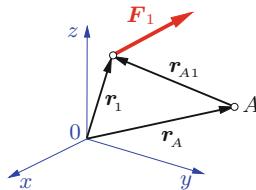
Wir wollen kurz noch Sonderfälle der Reduktion von Kraftsystemen diskutieren. Für  $\mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  ist das Kraftsystem alleine auf eine resultierende

Kraft (*Totalresultierende*) zurückgeführt. Die Reduktion auf eine Totalresultierende ist auch möglich, wenn  $\mathbf{M}_R^{(A)} \neq \mathbf{0}$  und orthogonal zu  $\mathbf{R}$  ist. Man hat  $\mathbf{R}$  in diesem Fall nur um  $\mathbf{r}_{\perp}$  in die Zentralachse zu verschieben. Nach (3.39) wird dann nämlich  $\mathbf{M}_R^{(P)} = \mathbf{0}$ . Im Sonderfall  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{M}_R^{(A)} \neq \mathbf{0}$  führt die Reduktion auf den freien Momentenvektor (Kräftepaar)  $\mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{M}_R^{(P)}$ . Im Fall  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{M}_R^{(A)} = \mathbf{0}$  ist das Kraftsystem schließlich im Gleichgewicht.

► **Beispiel 3.12** Auf einen Körper wirken die drei Kräfte  $\mathbf{F}_i$  mit den Angriffspunkten  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{F}_1 = F (-2, 3, 1)^T, \quad \mathbf{F}_2 = F (7, 1, -4)^T, \quad \mathbf{F}_3 = F (3, -1, -3)^T, \\ \mathbf{r}_1 = a (4, 3, 2)^T, \quad \mathbf{r}_2 = a (3, 2, 4)^T, \quad \mathbf{r}_3 = a (3, 5, 0)^T.$$

Man bestimme die Dyname  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(A)})$  bezüglich des Punktes  $A$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_A = a (3, 2, 1)^T$ .



**Abb. 3.35** Abstandsvektor

**Lösung** Die Resultierende  $\mathbf{R}$  ergibt sich aus der Vektorsumme der drei Kräfte:

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum \underline{\mathbf{F}_i} = \underline{F (8, 3, -6)^T}.$$

Zur Bestimmung des Moments bezüglich  $A$  werden die Abstandsvektoren von  $A$  zu den Kraftangriffspunkten benötigt. Für die Kraft  $\mathbf{F}_1$  ist der Abstandsvektor durch

$$\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A = a \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben (Abb. 3.35). Damit folgt das Moment von  $\mathbf{F}_1$  bezüglich  $A$  zu

$$\mathbf{M}_1^{(A)} = \mathbf{r}_{A1} \times \mathbf{F}_1 = a F \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a F \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Analog ergeben sich die beiden weiteren Momente:

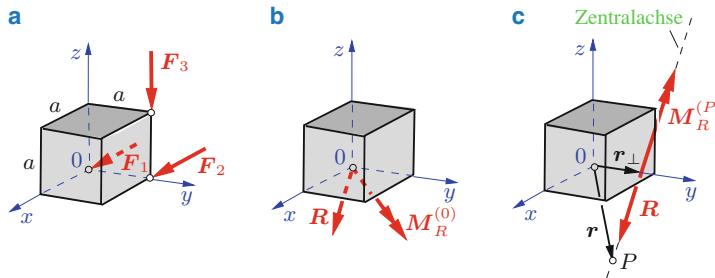
$$\underline{\boldsymbol{M}_2^{(A)}} = \underline{\boldsymbol{r}_{A2} \times \boldsymbol{F}_2} = aF \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{M}_3^{(A)}} = \underline{\boldsymbol{r}_{A3} \times \boldsymbol{F}_3} = aF \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Für das resultierende Moment erhält man damit

$$\underline{\boldsymbol{M}_R^{(A)}} = \sum \underline{\boldsymbol{M}_i^{(A)}} = \underline{aF (-15, 15, -4)^T}. \quad \blacksquare$$

► **Beispiel 3.13** An drei Eckpunkten eines Würfels mit der Kantenlänge  $a$  greifen die Kräfte  $\boldsymbol{F}_1 = F(1,0,0)^T$ ,  $\boldsymbol{F}_2 = F(3,0,0)^T$ ,  $\boldsymbol{F}_3 = F(0,0,-4)^T$  an (Abb. 3.36a).

Man bestimme die Kraftschraube und die Zentralachse des Kraftsystems.



**Abb. 3.36** a Belasteter Würfel, b Kraftschraube, c Zentralachse

**Lösung** Wir ermitteln zunächst die Dyname bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes. Dafür wählen wir zweckmäßig den Koordinatenursprung 0 (Abb. 3.36b). Zur Bestimmung der Momente der Kräfte bezüglich 0 benötigen wir die Ortsvektoren zu den Kraftgriffspunkten:

$$\boldsymbol{r}_1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{r}_2 = a(0,1,0)^T, \quad \boldsymbol{r}_3 = a(0,1,1)^T.$$

Für die Dyname  $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_R^{(0)})$  erhält man damit

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \sum \underline{\boldsymbol{F}_i} = \underline{F(4,0,-4)^T},$$

$$\underline{\boldsymbol{M}_R^{(0)}} = \sum \underline{\boldsymbol{M}_i^{(0)}} = \sum \underline{\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i} = aF(-4,0,-3)^T.$$

Es sei angemerkt, dass bei diesem Beispiel wegen der einfachen Geometrie das resultierende Moment auch aus der Anschauung (ohne Vektorrechnung) angegeben werden kann (vgl. Beispiel 3.9).

Das Moment  $\underline{\underline{M}}_R^{(P)}$  der Kraftschraube ( $\underline{\underline{R}}, \underline{\underline{M}}_R^{(P)}$ ) können wir aus (3.39) bestimmen. Mit  $R^2 = 32 F^2$  sowie  $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{M}}_R^{(0)} = -4aF^2$  ergibt sich

$$\underline{\underline{M}}_R^{(P)} = \frac{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{M}}_R^{(0)}}{R^2} \underline{\underline{R}} = \frac{1}{2} a F (-1, 0, 1)^T.$$

Die Kraftschraube ist in Abb. 3.36c skizziert. Die Zentralachse wird nach (3.40) und (3.38) durch

$$\underline{\underline{r}} = \frac{\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{M}}_R^{(0)}}{R^2} + \lambda \underline{\underline{R}}$$

beschrieben. Mit

$$\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{M}}_R^{(0)} = a F^2 \begin{vmatrix} \underline{\underline{e}}_x & \underline{\underline{e}}_y & \underline{\underline{e}}_z \\ 4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = a F^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Einsetzen von  $\underline{\underline{R}}$  erhält man

$$\underline{\underline{r}} = \frac{a}{8} (0, 7, 0)^T + \lambda F (4, 0, -4)^T.$$

Den dimensionsbehafteten Parameter  $\lambda$  können wir dabei noch zweckmäßig durch den dimensionslosen Parameter  $s = 4\lambda F/a$  ersetzen. Damit lautet die Parameterdarstellung der Zentralachse in Vektorform

$$\underline{\underline{r}} = \frac{a}{8} (0, 7, 0)^T + s a (1, 0, -1)^T$$

oder ausgeschrieben in skalarer Form

$$x = s a, \quad y = \frac{7}{8} a, \quad z = -s a.$$

Man erkennt, dass  $y$  konstant ist ( $y = 7a/8$ ), d. h. die Zentralachse ist parallel zur  $x, z$ -Ebene (Abb. 3.36c). ■

### 3.3 Zusammenfassung

- Ein Kräftepaar besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften auf parallelen Wirkungslinien.  
Die Wirkung des Kräftepaars ist durch sein Moment  $\mathbf{M}$  gegeben; es hat den Betrag  $M = h F$  und einen Drehsinn.  
Ein Kräftepaar (Moment) ist nicht an eine Wirkungslinie gebunden: es kann ohne Änderung seiner Wirkung an jeder beliebigen Stelle eines starren Körpers angreifen.
- Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes  $A$  ist durch  $\mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  definiert. Dabei ist  $\mathbf{r}$  der Vektor vom Bezugspunkt  $A$  zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie von  $\mathbf{F}$ . Das Moment  $\mathbf{M}^{(A)}$  hat den Betrag  $M^{(A)} = h F$  ( $h$  = Hebelarm) und einen Drehsinn.  
Im ebenen Fall hat das Moment einer Kraft nur die eine Komponente (normal zur Ebene)  $M^{(A)} = h F$  und einen Drehsinn um den Punkt  $A$ .
- Ein allgemeines räumliches Kraftsystem kann auf eine resultierende Kraft  $\mathbf{R}$  und ein resultierendes Moment  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $A$  reduziert werden.
- Gleichgewicht herrscht, wenn die resultierende Kraft  $\mathbf{R}$  und das resultierende Moment  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $A$  verschwinden:

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum \mathbf{M}_i^{(A)} = \mathbf{0}.$$

In Komponenten führt dies auf drei Kräfte- und drei Momentengleichgewichtsbedingungen.

Im ebenen Fall reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen auf

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i^{(A)} = 0.$$

---

# Schwerpunkt

4

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

4.1	Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte . . . . .	89
4.2	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers . . . . .	92
4.3	Flächenschwerpunkt . . . . .	97
4.4	Linienschwerpunkt . . . . .	107
4.5	Zusammenfassung . . . . .	109

- **Lernziele** In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die Schwerpunkte von Kräftegruppen, Körpern, Flächen und Linien definiert sind und wie man bei ihrer Berechnung vorgehen kann. Die Studierenden sollen dadurch in die Lage versetzt werden, die verschiedenen Vorgehensweisen bei der Ermittlung von Schwerpunkten in konkreten Fällen selbstständig anzuwenden.

## 4.1 Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte

Nach Abschn. 3.1.3 kann man eine ebene Kräftegruppe durch *eine einzige* Kraft, die Resultierende  $R$ , ersetzen, sofern kein Kräftepaar wirkt. Sind speziell alle Kräfte parallel, so stimmt die Richtung von  $R$  mit der Richtung der Kräfte überein. Die Lage von  $R$  folgt aus der Äquivalenz der Momente nach (3.11). Führt man mit  $H = -R$  eine Haltekraft  $H$  ein, deren Wirkungslinie mit der von  $R$  übereinstimmt, so kann man ein System von parallelen Kräften mit *einer einzigen* Kraft ins Gleichgewicht setzen.

Als Beispiel betrachten wir eine gewichtslose Stange, die nach Abb. 4.1a durch eine Gruppe paralleler Einzelkräfte  $G_i$  belastet wird und durch eine Kraft  $H$  im Gleichgewicht gehalten werden soll. Gesucht ist dabei die Stelle, an der die Haltekraft angreifen muss. Wir zählen die Koordinate  $x$  von einem beliebig gewählten Ursprung 0 und erhalten aus den Gleichgewichtsbedingungen nach (3.12)

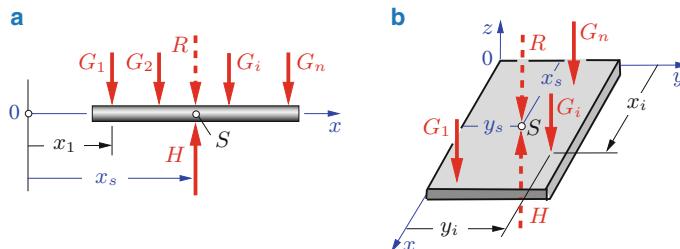
$$\uparrow: H - \sum G_i = 0, \quad \curvearrowright: x_s H - \sum x_i G_i = 0$$

den Abstand der Haltekraft (d. h. auch der Resultierenden) zu

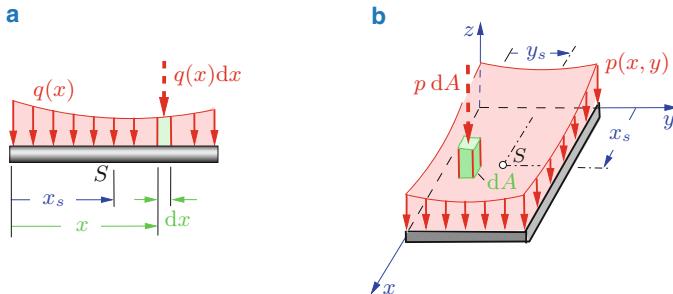
$$x_s = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}. \quad (4.1)$$

Der Punkt  $S$  (ein beliebiger Punkt auf der Wirkungslinie von  $H$ ) im Abstand  $x_s$  vom Koordinatenursprung, in dem die Stange unterstützt werden muss, heißt **Kräftemittelpunkt** oder **Schwerpunkt**. Die zweite Bezeichnung wird erst beim gewichtsbehafteten Körper in Abschn. 4.2 verständlich.

Das Ergebnis (4.1) lässt sich nach Abb. 4.1b auf eine räumliche Kräftegruppe erweitern, bei der alle Kräfte parallel zur  $z$ -Achse wirken. Die Gleichgewichts-



**Abb. 4.1** Kräftemittelpunkt bei Einzellasten



**Abb. 4.2** Kräftemittelpunkt bei Linien- und Flächenlasten

bedingungen (3.35) lauten dann (Momente werden positiv im Sinne der Rechts-schraube gezählt!)

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} &= 0: & H - \sum G_i &= 0, \\ \sum M_{ix}^{(0)} &= 0: & y_s H - \sum y_i G_i &= 0, \\ \sum M_{iy}^{(0)} &= 0: & -x_s H + \sum x_i G_i &= 0. \end{aligned}$$

Auflösung nach den gesuchten Koordinaten des Schwerpunktes ergibt

$$x_s = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}. \quad (4.2)$$

Die gleichen Überlegungen, die wir bisher für Gruppen von Einzelkräften ange stellt haben, lassen sich auch für kontinuierlich verteilte Linien- oder Flächenlasten anwenden. Zu diesem Zweck ersetzen wir die Linienlast  $q(x)$  (mit der Dimension Kraft/Länge) in Abb. 4.2a durch verteilte infinitesimale Einzelkräfte. So resultiert an einer beliebigen Stelle  $x$  aus der über die infinitesimale Länge  $dx$  wirkenden Streckenlast  $q(x)$  die Einzellast  $q(x) dx$ . Man beachte dabei, dass wegen  $dx \rightarrow 0$  (aber  $dx \neq 0!$ ) die Änderung von  $q$  über  $dx$  verschwindet und deshalb  $q$  über  $dx$  als konstant anzusehen ist. In (4.1) können wir somit  $G_i$  durch  $q(x) dx$  und  $x_i$  durch  $x$  ersetzen. Berücksichtigen wir noch, dass im Grenzübergang die Summen zu Integralen werden, so erhalten wir für den Abstand  $x_s$  des Schwerpunktes

$$x_s = \frac{\int x q(x) dx}{\int q(x) dx}. \quad (4.3)$$

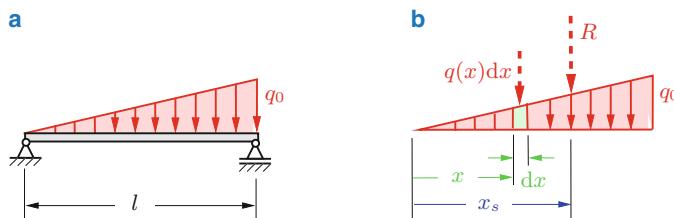
Die Integration hat dabei über die gesamte Länge  $l$  zu erfolgen, über die die Liniенlast  $q(x)$  wirkt.

Analog folgt die Lage des Schwerpunktes einer Flächenlast  $p(x, y)$  (Dimension: Kraft/Fläche) nach Abb. 4.2b aus (4.2) zu

$$x_s = \frac{\int x p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA}, \quad y_s = \frac{\int y p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA}. \quad (4.4)$$

Darin ist  $dA$  ein infinitesimales Flächenelement an der Stelle  $x, y$ . Es sei ausdrücklich vermerkt, dass in (4.4) über die gesamte Fläche  $A$  mit ihren zwei Koordinaten integriert werden muss. Wir wollen zur Schreibvereinfachung hier trotzdem die Bezeichnung mit dem einfachen Integralzeichen beibehalten und werden in den Beispielen 4.3 bis 4.5 erläutern, wie man diese Integration praktisch ausführen kann.

- **Beispiel 4.1** Ein Balken trägt nach Abb. 4.3a eine dreieckförmige Last. An welcher Stelle greift die Resultierende an und welchen Betrag hat sie?



**Abb. 4.3** Dreieckförmige Last

**Lösung** Wir zählen die Koordinate  $x$  vom linken Rand des Balkens (Abb. 4.3b). Die dreieckförmige Last wird durch die Geradengleichung

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$

beschrieben. Aus der Integration von  $q(x)$  ( $\hat{=}$  Summe der Kräfte  $q(x) dx$ ) folgt zunächst die Größe der Resultierenden:

$$\underline{R} = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = q_0 \frac{x^2}{2l} \Big|_0^l = \underline{\underline{\frac{1}{2} q_0 l}}.$$

Dies hätte man als Flächeninhalt des Lastdreiecks auch ohne Integration anschreiben können. Mit dem Zähler von (4.3)

$$\int_0^l x q(x) dx = \int_0^l x q_0 \frac{x}{l} dx = q_0 \frac{x^3}{3l} \Big|_0^l = \frac{1}{3} q_0 l^2$$

erhält man dann die Koordinate des Kräftemittelpunktes, d. h. den gesuchten Abstand der Resultierenden:

$$\underline{\underline{x_s}} = \frac{\int x q(x) dx}{\int q(x) dx} = \frac{\frac{1}{3} q_0 l^2}{\frac{1}{2} q_0 l} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} l.$$

Eine Einzellast der Größe  $R = q_0 l / 2$  im Abstand  $x_s = 2l/3$  vom linken Rand hat dieselbe statische Wirkung wie die gegebene Dreieckslast; in der Starrkörpermechanik kann die verteilte Belastung durch ihre Resultierende ersetzt werden. ■

## 4.2 Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers

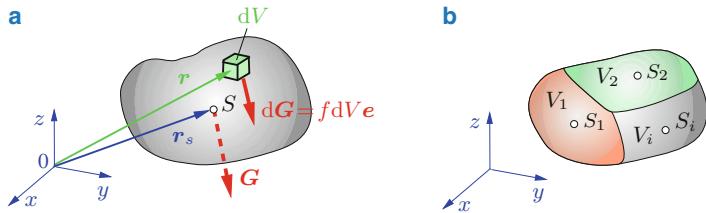
Wir wollen nun die Gleichungen (4.4) auf Körper erweitern, die durch verteilte parallele Volumenkräfte  $f(x, y, z)$  (mit der Dimension Kraft/Volumen) belastet werden (Abb. 4.4a). Die Richtung der Volumenkräfte sei dabei beliebig und durch den Einheitsvektor  $e$  gegeben. Wie zuvor ersetzen wir die verteilte Belastung durch infinitesimale Einzelkräfte. Auf ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  an einem Ort, der durch die Koordinaten  $x, y, z$  bzw. durch den Ortsvektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  gegeben ist, wirkt dann die Einzelkraft  $d\mathbf{G} = f(x, y, z) dV e$ . Unter Beachtung, dass die Richtung  $e$  für alle Kräfte gleich ist, erhält man für die Resultierende

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{G} = \left( \int f(x, y, z) dV \right) e = Ge$$

mit

$$G = \int f(x, y, z) dV.$$

Dabei ist über das gesamte Volumen  $V$  des Körpers mit den drei Raumkoordinaten zu integrieren.



**Abb. 4.4** a Schwerpunkt bei Volumenkräften, b zusammengesetzter Körper

Der Angriffspunkt  $S$  von  $\mathbf{G}$  ergibt sich aus der Bedingung, dass das Moment von  $\mathbf{G}$  bezüglich 0 gleich sein muss dem Moment aller verteilten Kräfte  $d\mathbf{G}$  bezüglich des gleichen Punktes:

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{G} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{G}.$$

Einsetzen von  $\mathbf{G}$  und  $d\mathbf{G}$  liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s \times G e &= \left( \int \mathbf{r} \times f(x, y, z) dV \right) e \\ &\rightarrow \left( \mathbf{r}_s G - \int \mathbf{r} f(x, y, z) dV \right) \times e = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Richtung von  $e$  kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn der Klammerausdruck verschwindet. Damit folgt für die Lage des Schwerpunkts

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r} f(x, y, z) dV}{\int f(x, y, z) dV} \quad (4.5a)$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\int x f(x, y, z) dV}{\int f(x, y, z) dV}, & y_s &= \frac{\int y f(x, y, z) dV}{\int f(x, y, z) dV}, \\ z_s &= \frac{\int z f(x, y, z) dV}{\int f(x, y, z) dV}. \end{aligned} \quad (4.5b)$$

Betrachten wir speziell Körper, die an der Erdoberfläche der Wirkung des Gravitationsfeldes unterworfen sind, so ist  $f(x, y, z) = \varrho(x, y, z) g$ . Hierin sind  $\varrho$  die

über den Körper im allgemeinen veränderliche Dichte und  $g$  die als konstant anzunehmende Erdbeschleunigung. Setzt man in (4.5b) ein, so hebt sich  $g$  aus Zähler und Nenner heraus, und wir erhalten für die Koordinaten des *Schwerpunktes*

$$x_s = \frac{\int x \varrho \mathrm{d}V}{\int \varrho \mathrm{d}V}, \quad y_s = \frac{\int y \varrho \mathrm{d}V}{\int \varrho \mathrm{d}V}, \quad z_s = \frac{\int z \varrho \mathrm{d}V}{\int \varrho \mathrm{d}V}. \quad (4.6)$$

Mit (4.6) wird nun auch der Name Schwerpunkt verständlich: der Schwerpunkt  $S$  eines Körpers ist derjenige Punkt, in dem man sich das in Wirklichkeit räumlich über den Körper verteilte Gewicht (d. h. seine ganze „Schwere“) konzentriert denken kann, ohne dass sich die statische Wirkung ändert.

Es sei angemerkt, dass die Annahme eines konstanten und parallelen Gravitationsfeldes in der Realität nicht exakt erfüllt ist. Die Richtung und Größe der Gravitationskräfte auf die Partikel eines Körpers sind geringfügig veränderlich, da die Kräfte zum Gravitationsmittelpunkt der Erde gerichtet sind und vom Abstand abhängen. Für hinreichend kleine Körper ist die getroffene Annahme allerdings für Ingenieuranwendungen ausreichend genau.

Führt man mit  $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V$  die Masse eines Volumenelementes und mit  $m = \int \varrho \mathrm{d}V = \int \mathrm{d}m$  die Gesamtmasse ein, so folgt aus (4.6)

$$x_s = \frac{1}{m} \int x \mathrm{d}m, \quad y_s = \frac{1}{m} \int y \mathrm{d}m, \quad z_s = \frac{1}{m} \int z \mathrm{d}m. \quad (4.7)$$

In der Kinetik (vgl. Band 3) wird durch diese Beziehungen die Lage des *Massenmittelpunktes* definiert. Für konstante Erdbeschleunigung  $g$  fallen somit der Schwerpunkt und der Massenmittelpunkt zusammen.

Bei einem *homogenen* Körper ist die Dichte  $\varrho$  konstant und kann aus (4.6) gekürzt werden. Mit dem Gesamtvolumen  $V = \int \mathrm{d}V$  bleibt dann

$$x_s = \frac{1}{V} \int x \mathrm{d}V, \quad y_s = \frac{1}{V} \int y \mathrm{d}V, \quad z_s = \frac{1}{V} \int z \mathrm{d}V. \quad (4.8)$$

Durch diese Beziehung wird der *Volumenmittelpunkt* definiert. Damit fallen für konstante Dichte und konstante Erdbeschleunigung der physikalische Schwerpunkt und der Volumenmittelpunkt zusammen. Da der Volumenmittelpunkt eine rein geometrische Größe ist, lässt sich in diesem Fall der Schwerpunkt aus rein geometrischen Beziehungen bestimmen.

Die Ermittlung des Schwerpunkts wird deutlich vereinfacht, wenn der Körper aus mehreren Teilkörpern mit den Volumina  $V_i$  besteht, deren Dichten  $\varrho_i$  jeweils konstant sind und deren Schwerpunktskoordinaten  $x_i, y_i, z_i$  bekannt sind (Abb. 4.4b). Für den Nenner in den Gleichungen (4.6) gilt dann

$$\begin{aligned}\int_V \varrho \, dV &= \int_{V_1} \varrho_1 \, dV + \int_{V_2} \varrho_2 \, dV + \dots = \varrho_1 \int_{V_1} \, dV + \varrho_2 \int_{V_2} \, dV + \dots \\ &= \varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2 + \dots = \sum \varrho_i V_i.\end{aligned}$$

Dabei deuten die Symbole  $V_i$  bei den Integralzeichen an, über welche Volumina jeweils zu integrieren ist.

Für die Zähler nutzen wir die Kenntnis der Schwerpunktslagen der Teilkörper. So folgt aus (4.8) für die  $x$ -Komponente

$$x_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} x \, dV \quad \rightarrow \quad \int_{V_i} x \, dV = x_i V_i.$$

Damit ergibt sich für den Zähler von  $x_s$  in (4.6)

$$\begin{aligned}\int_V x \varrho \, dV &= \varrho_1 \int_{V_1} x \, dV + \varrho_2 \int_{V_2} x \, dV + \dots \\ &= \varrho_1 x_1 V_1 + \varrho_2 x_2 V_2 + \dots = \sum x_i \varrho_i V_i.\end{aligned}$$

Analoges gilt für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente. Insgesamt erhalten wir dann

$$x_s = \frac{\sum x_i \varrho_i V_i}{\sum \varrho_i V_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \varrho_i V_i}{\sum \varrho_i V_i}, \quad z_s = \frac{\sum z_i \varrho_i V_i}{\sum \varrho_i V_i}. \quad (4.9)$$

In diesem Fall sind Integrationen nicht erforderlich, sondern die Lage des Schwerpunkts lässt sich durch Summationen ermitteln.

Falls die Dichte im gesamten Körper konstant ist ( $\varrho_i = \varrho$ ), vereinfacht sich (4.9) zu

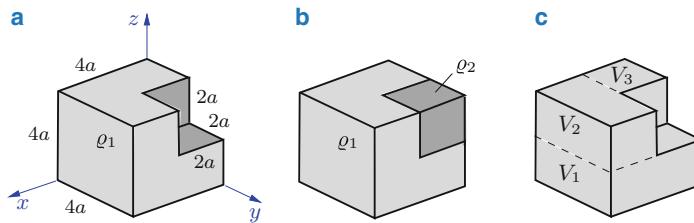
$$x_s = \frac{\sum x_i V_i}{V}, \quad y_s = \frac{\sum y_i V_i}{V}, \quad z_s = \frac{\sum z_i V_i}{V}. \quad (4.10)$$

Die Gleichungen (4.9) bzw. (4.10) können vorteilhaft auch bei Körpern mit Löchern oder Ausschnitten angewendet werden. Man fasst dabei den gegebenen Körper auf als zusammengesetzt aus dem Körper ohne Löcher und Teilkörpern mit „negativen“ Volumen. In (4.9) bzw. (4.10) werden dann die Volumen der Löcher mit negativen Vorzeichen eingesetzt.

Besitzt ein Körper eine Symmetrieebene, so liegt der Schwerpunkt auf dieser Ebene. Existieren zwei oder sogar drei Symmetrieebenen, so liegt der Schwerpunkt auf der Schnittlinie der zwei oder im Schnittpunkt der drei Ebenen.

► **Beispiel 4.2** Aus einem Würfel (Kantenlänge  $4a$ ) mit der Dichte  $\varrho_1$  ist nach Abb. 4.5a ein kleinerer Würfel (Kantenlänge  $2a$ ) herausgeschnitten.

- Wo liegt der Schwerpunkt des Körpers?
- Wo liegt der Schwerpunkt, wenn der herausgeschnittene Würfel durch ein Material mit der Dichte  $\varrho_2 = 2\varrho_1$  ersetzt wird (Abb. 4.5b)?



**Abb. 4.5** Schwerpunkt eines zusammengesetzten Würfels

**Lösung** In beiden Fällen können wir den Würfel als einen Körper auffassen, der aus Teilkörpern mit bekannten Schwerpunktslagen besteht. Im Fall a) ist der Körper homogen (konstante Dichte  $\varrho_1$ ), und seine Schwerpunktslage kann aus (4.10) bestimmt werden. Wir wählen die in Abb. 4.5c dargestellten Teilkörper und führen die Auswertung zweckmäßig in einer Tabelle durch:

$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$V_i$	$x_i V_i$	$y_i V_i$	$z_i V_i$
1	$2a$	$2a$	$a$	$32a^3$	$64a^4$	$64a^4$	$32a^4$
2	$3a$	$2a$	$3a$	$16a^3$	$48a^4$	$32a^4$	$48a^4$
3	$a$	$a$	$3a$	$8a^3$	$8a^4$	$8a^4$	$24a^4$
$\sum$				$56a^3$	$120a^4$	$104a^4$	$104a^4$
$\rightarrow \underline{\underline{x_s}} = \frac{120}{56}a = \frac{15}{7}a$					$\underline{\underline{y_s = z_s}} = \frac{104}{56}a = \frac{13}{7}a$		

Das gleiche Ergebnis kann man einfacher erhalten, wenn man als Teilkörper 1 den gesamten Würfel (Kantenlänge  $4a$ ) wählt, von dem dann als Teilkörper 2 der herausgeschnittene kleinere Würfel mit der Kantenlänge  $2a$  abgezogen wird:

$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$V_i$	$x_i V_i$	$y_i V_i$	$z_i V_i$
1	$2a$	$2a$	$2a$	$64a^3$	$128a^4$	$128a^4$	$128a^4$
2	$a$	$3a$	$3a$	$-8a^3$	$-8a^4$	$-24a^4$	$-24a^4$
$\sum$				$56a^3$	$120a^4$	$104a^4$	$104a^4$

Da im Fall b) die Teilkörper unterschiedliche Dichten haben, müssen wir zur Bestimmung der Schwerpunktslage die Gleichungen (4.9) anwenden. Dabei wählen wir als Teilkörper 1 den Körper nach Abb. 4.5a, dessen Schwerpunktslage ja nun bekannt ist. Teilkörper 2 ist der Würfel mit der Dichte  $\varrho_2 = 2\varrho_1$ :

$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$\varrho_i V_i$	$x_i \varrho_i V_i$	$y_i \varrho_i V_i$	$z_i \varrho_i V_i$
1	$\frac{15}{7}a$	$\frac{13}{7}a$	$\frac{13}{7}a$	$56\varrho_1 a^3$	$120\varrho_1 a^4$	$104\varrho_1 a^4$	$104\varrho_1 a^4$
2	$a$	$3a$	$3a$	$16\varrho_1 a^3$	$16\varrho_1 a^4$	$48\varrho_1 a^4$	$48\varrho_1 a^4$
$\sum$				$72\varrho_1 a^3$	$136\varrho_1 a^4$	$152\varrho_1 a^4$	$152\varrho_1 a^4$
$\rightarrow \underline{\underline{x_s}} = \frac{136}{72}a = \underline{\underline{\frac{17}{9}a}}, \quad \underline{\underline{y_s}} = \underline{\underline{z_s}} = \frac{152}{72}a = \underline{\underline{\frac{19}{9}a}}$ .							

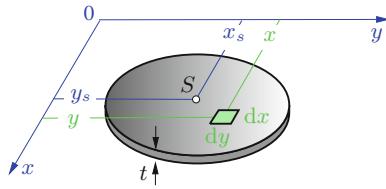
■

## 4.3 Flächenschwerpunkt

Häufig wird in der Mechanik der Schwerpunkt einer *ebenen* Fläche benötigt (z. B. Balkenbiegung, vgl. Band 2). Man erhält seine Koordinaten aus (4.8), wenn man als Körper eine dünne Scheibe konstanter Dicke  $t$  (mit  $t \rightarrow 0$ ) betrachtet (Abb. 4.6). Mit dem Flächenelement  $dA = dx dy$  an der Stelle  $x, y$ , der Fläche  $A = \int dA$ , dem Volumenelement  $dV = t dA$  und dem Volumen  $V = t A$  folgen aus (4.8) die Koordinaten des *Flächenschwerpunktes*

$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, dA, \quad y_s = \frac{1}{A} \int y \, dA. \quad (4.11)$$

Wegen  $t \rightarrow 0$  liefert die dritte Gleichung von (4.8) mit  $z \rightarrow 0$  den Wert  $z_s \rightarrow 0$ : der Schwerpunkt liegt *in* der Fläche.



**Abb. 4.6** Flächenschwerpunkt

Man nennt die in (4.11) auftretenden Integrale

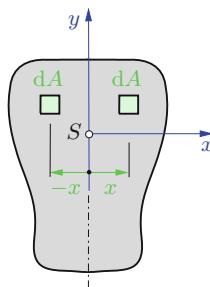
$$S_y = \int x \, dA, \quad S_x = \int y \, dA \quad (4.12)$$

*Flächenmomente erster Ordnung* oder *statische Momente*.

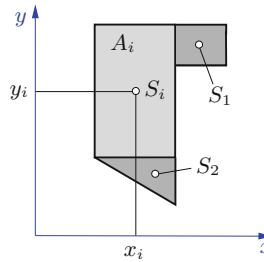
Legt man den Koordinatenursprung 0 in den Schwerpunkt  $S$ , so werden  $x_s$  und  $y_s$  in (4.11) gleich Null, und damit verschwinden auch die statischen Momente (4.12). Achsen durch den Schwerpunkt heißen *Schwerachsen*. Damit gilt der Satz:

Die Flächenmomente erster Ordnung in Bezug auf Schwerachsen sind Null.

Aus Abb. 4.7 kann man ablesen, dass das statische Moment bezüglich einer *Symmetriearchse* verschwinden muss, da neben jedem Flächenelement mit posi-



**Abb. 4.7** Fläche mit Symmetriearchse



**Abb. 4.8** Zusammengesetzte Fläche

vom Abstand  $x$  ein entsprechendes Element mit negativem Abstand existiert. Das Integral nach (4.12) über die gesamte Fläche ergibt daher Null. Unter Anwendung des oben formulierten Satzes über Schwerachsen gilt daher:

Symmetrieachsen sind Schwerachsen.

Diese Aussage erleichtert oft die Ermittlung von Schwerpunkten.

Häufig sind Querschnitte aus Teilflächen  $A_i$  zusammengesetzt, deren jeweilige Schwerpunktslage  $x_i$ ,  $y_i$  man kennt (Abb. 4.8). Die erste Gleichung von (4.11) kann man dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{A} \int x \, dA = \frac{1}{A} \left\{ \int_{A_1} x \, dA + \int_{A_2} x \, dA + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{A} \{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots\}. \end{aligned}$$

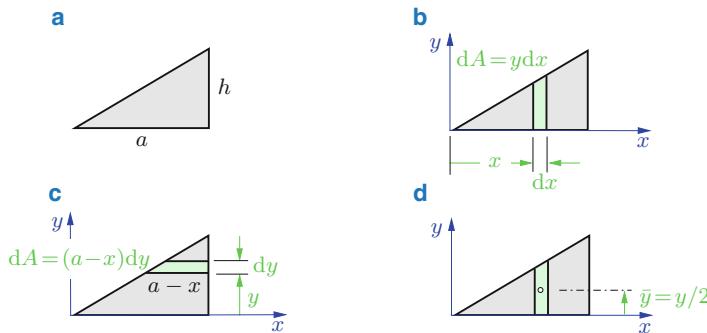
Damit entfallen alle Integrationen, und wir finden die Schwerpunktskoordinate  $x_s$  (und analog  $y_s$ ) der Gesamtfläche  $A = \sum A_i$  aus

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}. \quad (4.13)$$

Die Formel lässt sich auch bei Flächen mit Ausschnitten anwenden. Man muss dann nur diese Ausschnitte als „negative“ Flächen einführen (vgl. Beispiel 4.7).

Die Zerlegung der gesamten Fläche in Teilflächen mit bekannten Schwerpunktslagen lässt sich auch auf infinitesimale Teilflächen anwenden. Dementsprechend ist es nicht unbedingt erforderlich, in (4.11) ein Rechteckelement  $dA = dx dy$  mit zwei infinitesimalen Seitenlängen zu verwenden. Vielmehr ist es oft zweckmäßiger, z. B. Rechteckelemente oder Dreieckelemente  $dA$  zu wählen, bei denen eine Seitenlänge endlich ist ( $dA = adx$ ). Für die Abstände  $x$  und  $y$  in (4.11) sind dann die Schwerpunktskoordinaten dieses Elements zu verwenden (siehe auch Beispiele 4.3 bis 4.5).

► **Beispiel 4.3** Gesucht sind die Schwerpunktskoordinaten für das rechtwinklige Dreieck nach Abb. 4.9a mit der Grundseite  $a$  und der Höhe  $h$ .



**Abb. 4.9** Schwerpunkt eines Dreiecks

**Lösung** Nach (4.11) folgen die gesuchten Koordinaten des Schwerpunktes aus

$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, dA, \quad y_s = \frac{1}{A} \int y \, dA.$$

Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in die linke Ecke des Dreiecks (Abb. 4.9b). In der ersten Gleichung von (4.11) stellt  $x$  den Abstand des Flächenelements  $dA$  von der  $y$ -Achse dar. Zur Berechnung von  $x_s$  können wir statt eines infinitesimalen Rechtecks  $dA = dx dy$  zweckmäßig gleich den infinitesimalen Streifen mit der Höhe  $y(x)$  und der Breite  $dx$  nach Abb. 4.9b wählen, da hier alle Punkte denselben Abstand  $x$  von der  $y$ -Achse haben. Durch diese Wahl des Flächenelements kann das Flächenintegral durch ein Einfachintegral über  $x$  ersetzt werden (in  $dA$  steckt bereits die Integration über  $y$ ). Mit  $dA = y dx$  und

der Gleichung  $y(x) = h x/a$  für die Dreiecksseite folgt für das statische Moment

$$\int x \, dA = \int x \, y \, dx = \int_0^a x \frac{h}{a} x \, dx = \frac{h}{a} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3} h a^2.$$

Setzen wir noch den Flächeninhalt des Dreiecks  $A = a h/2$  in die Formel für die Schwerpunktskoordinate ein, so finden wir

$$\underline{\underline{x}_s} = \frac{1}{A} \int x \, dA = \frac{\frac{1}{3} h a^2}{\frac{1}{2} a h} = \frac{2}{3} a.$$

Zur Bestimmung der Schwerpunktskoordinate  $y_s$  wählen wir das Flächenelement  $dA = (a - x)dy$  nach Abb. 4.9c. Diesmal haben alle Teile des Elements den gleichen Abstand  $y$  von der  $x$ -Achse. Mit  $x(y) = a y/h$  finden wir

$$\begin{aligned} \int y \, dA &= \int y (a - x) \, dy = \int_0^h y \left( a - \frac{a}{h} y \right) dy \\ &= \left\{ \frac{y^2}{2} a - \frac{a}{h} \frac{y^3}{3} \right\} \Big|_0^h = \frac{a h^2}{6} \end{aligned}$$

und erhalten endgültig

$$\underline{\underline{y}_s} = \frac{1}{A} \int y \, dA = \frac{\frac{1}{6} a h^2}{\frac{1}{2} a h} = \frac{1}{3} h.$$

Man kann zur Ermittlung der Schwerpunktskoordinate  $y_s$  auch das Flächenelement  $dA$  nach Abb. 4.9b wählen. Da dann aber nicht alle Punkte des Elements den gleichen Abstand von der  $x$ -Achse haben, ist für den Abstand  $y$  in (4.11) die Schwerpunktskoordinate  $\bar{y} = y/2$  des Elements einzusetzen (Abb. 4.9d):

$$y_s = \frac{1}{A} \int \bar{y} \, dA = \frac{1}{A} \int \frac{y}{2} \, dA.$$

Mit  $dA = y \, dx$ ,  $y = h x/a$ ,  $A = ah/2$  und

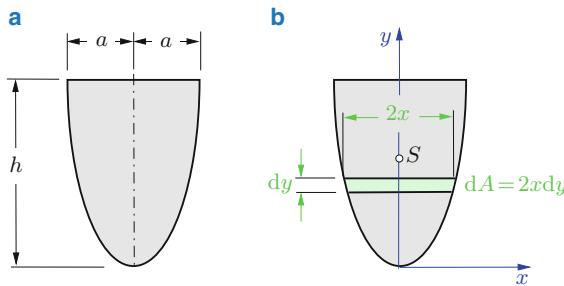
$$\int y \, dA = \int_0^a y^2 \, dx = \int_0^a \frac{h^2}{a^2} x^2 \, dx = \frac{1}{3} ah^2$$

erhalten wir wieder das bereits bekannte Ergebnis

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3} ah^2}{\frac{1}{2} ah} = \frac{1}{3} h.$$

Es sei erwähnt, dass man zur Ermittlung der Schwerpunktskoordinaten natürlich auch das Flächenelement  $dA = dx dy$  nach Abb. 4.6 wählen kann. Dann muss man sowohl über  $x$  als auch über  $y$  integrieren. Wir wollen darauf hier nicht eingehen. ■

► **Beispiel 4.4** Gesucht ist der Schwerpunkt der Fläche, die nach Abb. 4.10a von einer quadratischen Parabel begrenzt wird.



**Abb. 4.10** Durch Parabel begrenzte Fläche

**Lösung** Wir legen den Koordinatenursprung in den Scheitel der Parabel (Abb. 4.10b). Wegen der Symmetrie liegt der Schwerpunkt  $S$  auf der  $y$ -Achse. Wir wählen zur Ermittlung seiner Höhe

$$y_s = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

das gekennzeichnete Flächenelement  $dA = 2x dy$ ; alle Punkte dieses Flächenelements haben den gleichen Abstand  $y$  von der  $x$ -Achse. Mit der Parabelgleichung (für  $x = a$  muss  $y = h$  sein)

$$y = \frac{h}{a^2} x^2 \quad \text{bzw.} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 y}{h}}$$

werden

$$A = \int dA = \int 2x dy = 2 \int_0^h \sqrt{\frac{a^2 y}{h}} dy = 2 \sqrt{\frac{a^2}{h}} \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^h = \frac{4}{3} a h,$$

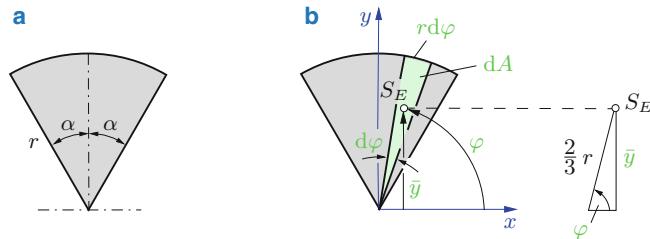
$$\int y dA = \int_0^h y 2\sqrt{\frac{a^2 y}{h}} dy = 2 \sqrt{\frac{a^2}{h}} \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_0^h = \frac{4}{5} a h^2$$

und daher

$$\underline{y_s} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\frac{4}{5} a h^2}{\frac{4}{3} a h} = \frac{3}{5} h.$$

Bemerkenswert am Ergebnis ist, dass die Schwerpunktshöhe  $y_s$  nicht von der Breite  $a$  der Parabel abhängt. ■

► **Beispiel 4.5** Gesucht ist die Schwerpunktslage für einen Kreisausschnitt nach Abb. 4.11a.



**Abb. 4.11** Schwerpunkt eines Kreisausschnitts

**Lösung** Zur Bestimmung von  $y_s$  (wegen Symmetrie gilt  $x_s = 0$ ) führen wir den Hilfswinkel  $\varphi$  ein und wählen als Flächenelement  $dA$  den gekennzeichneten Kreisausschnitt (Abb. 4.11b). Im Infinitesimalen darf der Kreisausschnitt durch ein Dreieck mit der Grundseite  $r d\varphi$  und der Höhe  $r$  ersetzt werden, dessen Schwerpunktskoordinate bei  $2/3$  der Höhe liegt. Der Schwerpunkt  $S_E$  des Elementes hat daher von der  $x$ -Achse den Abstand

$$\bar{y} = \frac{2}{3} r \sin \varphi.$$

Mit  $dA = \frac{1}{2}r d\varphi$   $r = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$  finden wir die Schwerpunktslage aus

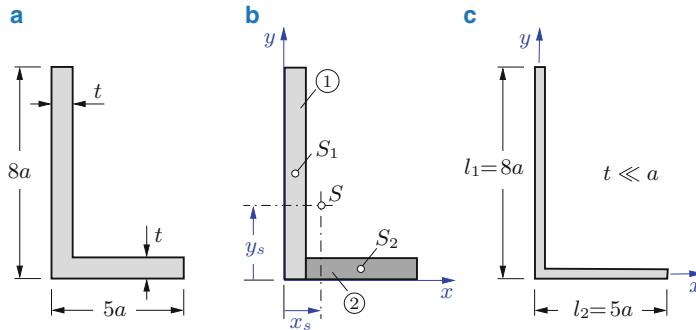
$$\begin{aligned}\underline{\underline{y_s}} &= \frac{\int \bar{y} dA}{\int dA} = \frac{\int_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha} \frac{2}{3} r \sin \varphi \frac{1}{2} r^2 d\varphi}{\int_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha} \frac{1}{2} r^2 d\varphi} \\ &= \frac{\frac{1}{3} r^3 (-\cos \varphi) \Big|_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha}}{\frac{1}{2} r^2 \varphi \Big|_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha}} \\ &= \frac{1}{3} r \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\alpha} = \underline{\underline{\frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}.\end{aligned}$$

Im Sonderfall einer *Halbkreisfläche* folgt hieraus für  $\alpha = \pi/2$  das Ergebnis

$$\underline{\underline{y_s}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

■

- **Beispiel 4.6** Wo liegt der Schwerpunkt bei dem L-Profil nach Abb. 4.12a?



**Abb. 4.12** Schwerpunkt eines L-Profil

**Lösung** Wir legen den Koordinatenursprung in die linke untere Ecke und zerlegen die Fläche in zwei Rechtecke (Abb. 4.12b) mit den Flächen

$$A_1 = 8a t, \quad A_2 = (5a - t)t$$

und den Schwerpunktskoordinaten

$$x_1 = \frac{t}{2}, \quad y_1 = 4a, \quad x_2 = \frac{5a - t}{2} + t = \frac{5a + t}{2}, \quad y_2 = \frac{t}{2}.$$

Aus (4.13) folgt damit

$$\underline{\underline{x_s}} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{t}{2} 8 a t + \frac{5 a + t}{2} (5 a - t) t}{8 a t + (5 a - t)t}$$

$$= \frac{4 a t^2 + \frac{25}{2} a^2 t - \frac{t^3}{2}}{8 a t + 5 a t - t^2} = \underline{\underline{\frac{25}{26} a \frac{1 + \frac{8}{25} \frac{t}{a} - \frac{1}{25} \left(\frac{t}{a}\right)^2}{1 - \frac{1}{13} \frac{t}{a}}}}.$$

Entsprechend findet man in der  $y$ -Richtung

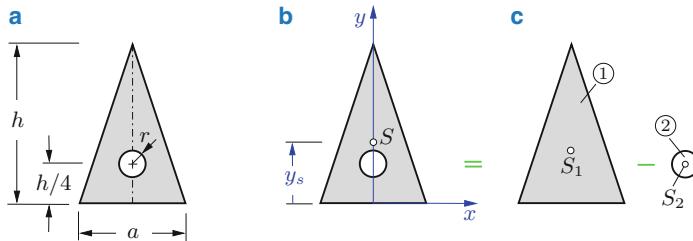
$$\underline{\underline{y_s}} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{4 a 8 a t + \frac{t}{2} (5 a - t) t}{13 a t - t^2} = \underline{\underline{\frac{32}{13} a \frac{1 + \frac{5}{64} \frac{t}{a} - \frac{1}{64} \left(\frac{t}{a}\right)^2}{1 - \frac{1}{13} \frac{t}{a}}}}.$$

Für ein dünnwandiges Profil  $t \ll a$  (Abb. 4.12c) können wir  $t/a$  und  $(t/a)^2$  als klein gegen 1 vernachlässigen und erhalten dann

$$x_s = \frac{25}{26} a, \quad y_s = \frac{32}{13} a.$$

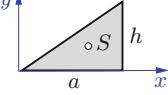
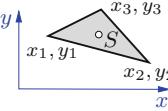
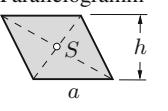
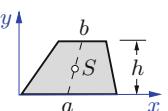
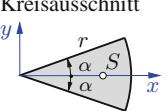
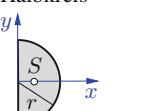
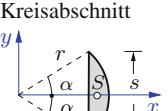
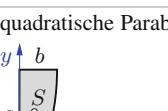
► **Beispiel 4.7** Aus dem gleichschenkligen Dreieck nach Abb. 4.13a ist ein Kreis ausgespart. Wo liegt der Schwerpunkt  $S$  der Fläche?



**Abb. 4.13** Schwerpunkt eines Dreiecks mit Kreisloch

**Lösung** Wegen der Symmetrie liegt  $S$  für das in Abb. 4.13b gewählte Koordinatensystem auf der  $y$ -Achse. Wenn aus einer Fläche Teile ausgespart sind, arbeitet man zweckmäßig mit „negativen“ Flächen: die gegebene Fläche wird als Differenz

**Tab. 4.1** Schwerpunktskoordinaten

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}ah$	$x_s = \frac{2}{3}a, \quad y_s = \frac{h}{3}$
beliebiges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ $y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$
Parallelogramm 	$A = ah$	$S$ liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez 	$A = \frac{h}{2}(a + b)$	$S$ liegt auf der Seitenhalbierenden $y_s = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$
Kreisausschnitt 	$A = \alpha r^2$	$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Halbkreis 	$A = \frac{\pi}{2} r^2$	$x_s = \frac{4r}{3\pi}$
Kreisabschnitt 	$A = \frac{1}{2} r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_s = \frac{s^3}{12A} = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$
quadratische Parabel 	$A = \frac{2}{3}ab$	$x_s = \frac{3}{8}b, \quad y_s = \frac{3}{5}a$

zweier Teilflächen mit bekannten Schwerpunktslagen aufgefasst. Im Beispiel muss daher vom Volldreieck ① der Kreis ② abgezogen werden (Abb. 4.13c). Mit

$$A_1 = \frac{1}{2} a h, \quad y_1 = \frac{h}{3}, \quad A_2 = \pi r^2, \quad y_2 = \frac{h}{4}$$

wird

$$\underline{\underline{y_s}} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{h}{3} \frac{1}{2} a h - \frac{h}{4} \pi r^2}{\frac{1}{2} a h - \pi r^2} = \frac{h}{3} \frac{1 - \frac{3}{2} \frac{\pi r^2}{a h}}{1 - \frac{2 \pi r^2}{a h}}.$$

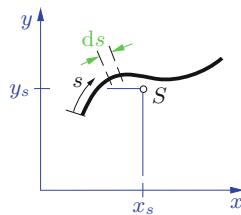
Für kleine Kreise  $\pi r^2 \ll a h / 2$  nähert sich der Gesamtschwerpunkt dem Dreiecksschwerpunkt bei  $h/3$ . ■

## 4.4 Linienschwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunktes  $S$  einer Linie in einer Ebene (Abb. 4.14) er-rechnen sich analog zu denen der Fläche. Ersetzt man in (4.11) das Flächenelement  $dA$  durch das Linienelement  $ds$  und die Fläche  $A$  durch die Länge  $l$  der Linie, so erhält man

$$x_s = \frac{1}{l} \int x \, ds, \quad y_s = \frac{1}{l} \int y \, ds. \quad (4.14)$$

Bei einer geraden Linie liegt der Schwerpunkt auf ihr in der Mitte; bei einer gekrümmten Linie liegt er im allgemeinen außerhalb. Die Gleichungen (4.14) können z. B. angewendet werden zur Berechnung des Schwerpunktes eines gebogenen homogenen Drahtes oder zur Ermittlung der Lage der Resultierenden von Kräften, die längs einer Linie gleichförmig verteilt sind.



**Abb. 4.14** Schwerpunkt einer ebenen Linie

Besteht die Linie aus Teilstücken bekannter Längen  $l_i$  mit bekannten Schwerpunktslagen  $x_i$  bzw.  $y_i$ , so folgt aus (4.14) analog zu (4.13) die Lage des Schwerpunktes aus

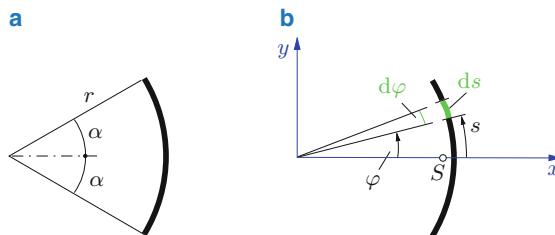
$$x_s = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}. \quad (4.15)$$

Wendet man diese Formeln z. B. zur Berechnung der Schwerpunktskoordinaten des linienförmigen Profils nach Abb. 4.12c an, so erhält man

$$x_s = \frac{0 \cdot 8a + \frac{5}{2}a \cdot 5a}{8a + 5a} = \frac{25}{26}a, \quad y_s = \frac{4a \cdot 8a + 0 \cdot 5a}{8a + 5a} = \frac{32}{13}a.$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis in Beispiel 4.6 für das dünnwandige Profil überein.

► **Beispiel 4.8** Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens (Abb. 4.15a) mit dem Öffnungswinkel  $2\alpha$ ?



**Abb. 4.15** Schwerpunkt eines Kreisbogens

**Lösung** Wegen der Symmetrie liegt  $S$  auf der  $x$ -Achse:  $y_s = 0$  (Abb. 4.15b). Wir zählen einen Winkel  $\varphi$  von der  $x$ -Achse und können wegen des konstanten Radius  $r$  die Bogenlänge  $ds$  durch  $r d\varphi$  ersetzen:  $ds = r d\varphi$ . Mit  $x = r \cos \varphi$  folgt dann aus (4.14)

$$\underline{\underline{x}_s} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos \varphi \, r \, d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r \, d\varphi} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{2r \alpha} = r \frac{\sin \alpha}{\underline{\underline{\alpha}}}.$$

Im Sonderfall des *Halbkreisbogens* folgt hieraus mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  die Lage

$$x_s = \frac{2r}{\pi}.$$

Der Schwerpunkt einer *Halbkreisfläche* ( $x_s = 4r/(3\pi)$ , vgl. Tab. 4.1) liegt wesentlich näher zum Kreismittelpunkt hin. ■

## 4.5 Zusammenfassung

- Der Schwerpunkt eines Körpers ist derjenige Punkt, in dem man sich das räumlich verteilte Gewicht konzentriert denken kann, ohne dass sich die statische Wirkung ändert. Seine Koordinaten ergeben sich aus

$$x_s = \frac{\int x \varrho \, dV}{\int \varrho \, dV}, \quad y_s = \frac{\int y \varrho \, dV}{\int \varrho \, dV}, \quad z_s = \frac{\int z \varrho \, dV}{\int \varrho \, dV}.$$

Analoge Definitionen gelten für den Massenmittelpunkt und den Volumenmittelpunkt.

- Achsen durch den Schwerpunkt heißen Schwerachsen. Symmetriearchsen sind Schwerachsen.
- Die Flächenmomente erster Ordnung sind definiert durch

$$S_y = \int x \, dA, \quad S_x = \int y \, dA.$$

- Die Flächenmomente erster Ordnung in Bezug auf die Schwerachsen sind Null.
- Die Koordinaten des Flächenschwerpunkts folgen aus

$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, dA, \quad y_s = \frac{1}{A} \int y \, dA.$$

- Wenn ein Körper (Fläche, Linie) aus Teilkörpern (Teilflächen, Linienelementen) besteht, deren Schwerpunktskoordinaten bekannt sind, so sind Integrierungen nicht erforderlich. Dann ergeben sich zum Beispiel die Koordinaten des Flächenschwerpunkts aus

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$

Analoges gilt für Körper und Linien.

- Bei Körpern (Flächen) mit Ausschnitten werden die Ausschnitte als „negative“ Volumina („negative“ Flächen) angesehen.

---

# Lagerreaktionen

5

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

5.1	Ebene Tragwerke . . . . .	113
5.1.1	Lager . . . . .	113
5.1.2	Statische Bestimmtheit . . . . .	116
5.1.3	Berechnung der Lagerreaktionen . . . . .	118
5.1.4	Superpositionsprinzip . . . . .	121
5.2	Räumliche Tragwerke . . . . .	123
5.3	Mehrteilige Tragwerke . . . . .	126
5.3.1	Statische Bestimmtheit . . . . .	126
5.3.2	Dreigelenkbogen . . . . .	131
5.3.3	Gelenkbalken . . . . .	134
5.3.4	Kinematische Bestimmtheit . . . . .	137
5.4	Zusammenfassung . . . . .	143

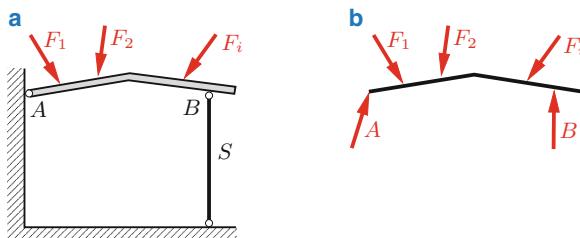
- **Lernziele** Die Studierenden sollen die wichtigsten Lagerungsarten von einteiligen Tragwerken sowie die verschiedenen Verbindungselemente mehrteiliger Tragwerke unterscheiden und nach ihrer Wertigkeit klassifizieren können. Sie sollen erkennen können, ob ein Tragwerk statisch und kinematisch bestimmt ist. Schließlich sollen sie in der Lage sein, die bei einem belasteten Tragwerk in den Lagern und Verbindungelementen auftretenden Kräfte und Momente zu bestimmen. Hierzu gehören als wichtigste Schritte die Skizze des Freikörperbildes sowie die sachgerechte Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

## 5.1 Ebene Tragwerke

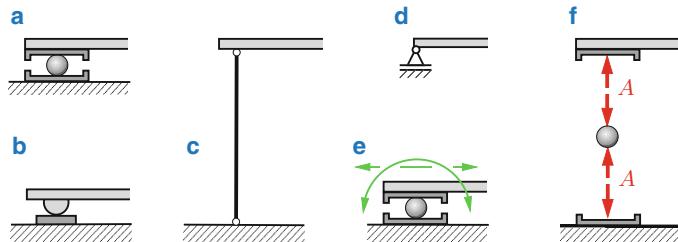
### 5.1.1 Lager

Tragwerke werden nach ihrer geometrischen Form und nach der Belastung in verschiedene Klassen eingeteilt. Ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Längsabmessung und das nur in Richtung seiner Achse (Zug oder Druck) beansprucht wird, heißt *Stab* (vgl. Abschn. 2.4). Beansprucht man ein solches Bauteil quer zu seiner Achse, so nennt man es einen *Balken*. Ein gekrümmter Balken heißt *Bogen*. Tragwerke, die aus abgewinkelten, starr miteinander verbundenen Balken zusammengesetzt sind, werden als *Rahmen* bezeichnet. Ebene Bauteile (Dicke klein gegen Längen der Seiten) heißen *Scheiben*, wenn sie in ihrer Ebene und *Platten*, wenn sie quer dazu belastet werden. Ein gekrümmtes Flächentragwerk nennt man *Schale*.

Tragwerke sind durch *Lager* mit ihrer Umgebung verbunden. Die Lager dienen einerseits dazu, eine gewünschte Lage des Tragwerkes im Raum zu erzeugen, andererseits übertragen sie Kräfte. Als Beispiel betrachten wir in Abb. 5.1a ein „Dach“, das im Punkt A mit einer lotrechten Wand gelenkig verbunden und im Punkt B über einen Stab S gegen den Boden abgestützt ist. Das Dach ist durch eingravierte Kräfte  $F_i$  belastet. Über die Lager A und B werden Kräfte in die Wand und in den Boden übertragen. Die gleichen Kräfte werden nach dem Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio) in entgegengesetzter Richtung von der Wand und vom Boden auf das Dach ausgeübt. Diese Kräfte von der Umgebung auf das Tragwerk sind Reaktionskräfte (vgl. Abschn. 1.4). Wir wollen sie als *Lagerreaktionen* bezeichnen. Sie werden im Freikörperbild (Abb. 5.1b) sichtbar gemacht. Man bezeichnet sie im allgemeinen wie die Lager selbst, d. h. im Beispiel mit A und B.



**Abb. 5.1** a Tragwerk, b Freikörperbild



**Abb. 5.2** Einwertige Lager

Im weiteren werden wir uns auf einteilige Tragwerke in der Ebene beschränken, die *in* ihrer Ebene belastet sind. Ein Körper, der *keiner* Bindung unterworfen ist, hat in der Ebene drei unabhängige Bewegungsmöglichkeiten oder Freiheitsgrade: je eine Translation in zwei Richtungen und eine Drehung um eine zur Ebene senkrechte Achse (vgl. Abschn. 3.1.4). Durch Lager (Bindungen) werden die Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt: jede Lagerreaktion übt einen Zwang auf den Körper aus (wirkt als Fessel). Ist  $r$  die Anzahl der Lagerreaktionen, so gilt für die Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene

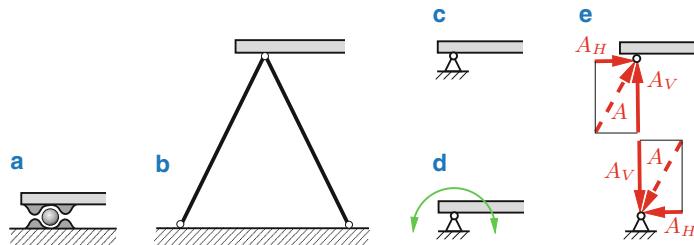
$$f = 3 - r \quad (5.1)$$

(Ausnahmefälle in Abschn. 5.1.2).

Wir wollen im folgenden verschiedene Arten der Lagerung betrachten und die Lagertypen nach der Anzahl der Reaktionen klassifizieren.

*Einwertige Lager* können nur eine einzige Reaktion übertragen ( $r = 1$ ). Beispiele für diesen Lagertyp sind Rollenlager, Gleitlager und Stützstab (Pendelstütze), vgl. Abb. 5.2a–c. Die Richtung der Lagerkraft ist jeweils bekannt (hier vertikal), unbekannt ist ihr Betrag.

Abb. 5.2f zeigt das Freikörperbild für das Rollenlager. Idealisieren wir die Berührungsflächen als glatt, so stehen alle Kontaktkräfte senkrecht zu den jeweiligen Berührungsebenen. Damit ist die Richtung der Lagerkraft  $A$  auf das Tragwerk gegeben. Abb. 5.2e deutet die durch das Lager *nicht* eingeschränkten Bewegungsmöglichkeiten an: eine waagerechte Verschiebung und eine Drehung. Eine Bewegung in vertikaler Richtung ist durch die Bindung ausgeschlossen. Falls die *Lagerkraft*  $A$  ihr Vorzeichen umkehrt, muss durch eine geeignete Konstruktion ein Abheben des Lagers verhindert werden. Einwertige Lager werden wir im weiteren durch das Symbol in Abb. 5.2d darstellen.

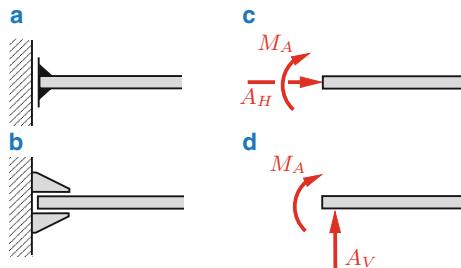
**Abb. 5.3** Zweiwertige Lager

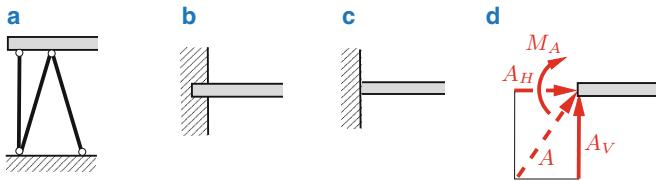
*Zweiwertige Lager* können zwei Reaktionen übertragen ( $r = 2$ ). Als Beispiele dafür betrachten wir das gelenkige Lager (Festlager) oder die Doppelstütze (Abb. 5.3a, b), die symbolisch durch Abb. 5.3c dargestellt werden.

Nach Abb. 5.3d lässt das gelenkige Lager nur eine Drehung, aber keinerlei Verschiebung zu. Es kann demnach eine Lagerkraft  $A$  beliebiger Größe und Richtung mit einer Horizontalkomponente  $A_H$  und einer Vertikalkomponente  $A_V$  aufnehmen (Abb. 5.3e).

Weitere Möglichkeiten eines zweiwertigen Lagers sind die Parallelführung und die Schiebehülse (Abb. 5.4a, b). Die Freikörperbilder (Abb. 5.4c, d) zeigen, dass in beiden Fällen je eine Kraftkomponente und ein Moment übertragen werden können. Eine Verschiebung der Lager in jeweils eine Richtung ist möglich, nicht jedoch eine Verschiebung in die andere Richtung oder eine Drehung.

Tritt zu einer Doppelstütze ein etwas versetzter dritter Stützstab hinzu (Abb. 5.5a), so geht der Freiheitsgrad der Drehung verloren: das Tragwerk wird unbeweglich. Das Lager kann zusätzlich zu den beiden Kraftkomponenten ein Kräftepaar (Moment) übertragen und ist daher ein *dreiwertiges Lager*:  $r = 3$ .

**Abb. 5.4** a Parallelführung, b Schiebehülse



**Abb. 5.5** Dreiwertige Lager

Gleiche Verhältnisse liegen bei der Einspannung nach Abb. 5.5b vor, die symbolisch in Abb. 5.5c dargestellt ist. Das Freikörperbild (Abb. 5.5d) zeigt, dass die Einspannung eine nach Größe und nach Richtung unbekannte Lagerkraft  $A$  (bzw.  $A_H$  und  $A_V$ ) und ein Einspannmoment  $M_A$  aufnehmen kann.

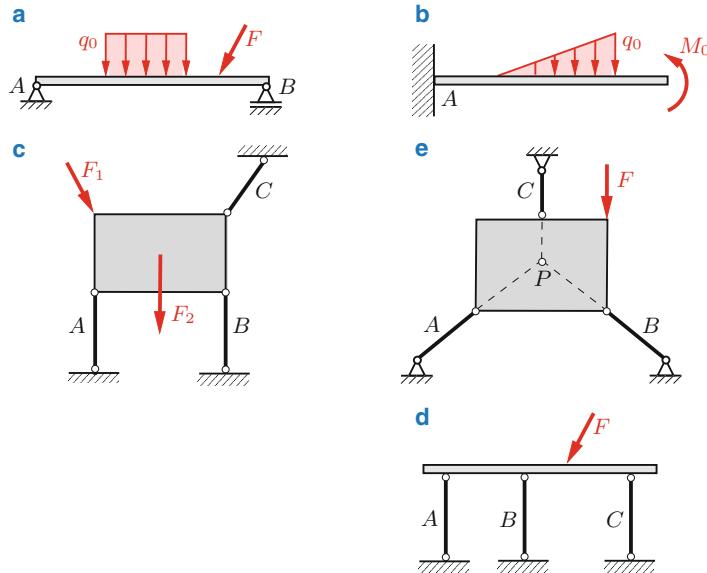
### 5.1.2 Statische Bestimmtheit

Ein Tragwerk heißt *statisch bestimmt* gelagert, wenn die Lagerreaktionen aus den *drei* Gleichgewichtsbedingungen (3.12) berechenbar sind. Da dann die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmen hat, müssen in den Lagern *drei* unbekannte Reaktionen (d. h. Moment oder Kräfte) auftreten:  $r = 3$ . Dass diese notwendige Bedingung nicht auch hinreichend für die Bestimmbarkeit der Lagerreaktionen ist, werden wir noch erläutern.

Der Balken nach Abb. 5.6a besitzt ein zweiwertiges Lager  $A$  und ein einwertiges Lager  $B$ . Es treten also drei unbekannte Lagerreaktionen  $A_H$ ,  $A_V$  und  $B$  auf. Mit  $r = 3$  folgt aus (5.1), dass der Balken keine Bewegungsmöglichkeit hat:  $f = 3 - r = 0$ . Er ist statisch bestimmt gelagert.

Der Balken nach Abb. 5.6b ist am linken Ende eingespannt. Die drei Lagerreaktionen bestehen aus den Kraftkomponenten  $A_H$  und  $A_V$  sowie dem Einspannmoment  $M_A$ . In Abb. 5.6c ist eine durch drei einwertige Pendelstützen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gelagerte Scheibe dargestellt. Mit  $r = 3$  und  $f = 0$  ist in beiden Fällen die Lagerung statisch bestimmt.

Abb. 5.6d zeigt dagegen einen Balken, der durch drei *parallele* Stützstäbe  $A$ ,  $B$  und  $C$  gelagert ist. Auch hier ist die Anzahl der unbekannten Lagerkräfte gleich der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen: die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist also erfüllt. Dennoch lassen sich die Lagerkräfte *nicht* aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Aus  $r = 3$  folgt hier nicht  $f = 0$  (Ausnahmefall!): der Balken ist in waagerechter Richtung verschieblich. Solche Ausnahmefälle müssen wir ausschließen. Ein Tragwerk, das endliche oder infini-



**Abb. 5.6** Zur statischen Bestimmtheit

tesimale Bewegungen ausführen kann, nennen wir *kinematisch unbestimmt* (vgl. auch Abschn. 5.3.4 und 6.1).

Auch die Scheibe nach Abb. 5.6e ist kinematisch unbestimmt. Die Wirkungslinien der Lagerkräfte schneiden sich im Punkt  $P$ ; die Lagerung erlaubt daher eine infinitesimale Drehung um diesen Punkt. Dass die Lagerungen in den Abb. 5.6d und e nicht statisch bestimmt sind, erkennt man sofort anschaulich: beim Balken ist die Gleichgewichtsbedingung für die Horizontalkomponenten der Kräfte nicht erfüllbar ( $\sum F_{iH} \neq 0$ ), bei der Scheibe kann das Momentengleichgewicht bezüglich  $P$  nicht erfüllt werden ( $\sum M_i^{(P)} \neq 0$ ).

Ein Tragwerk ist im ebenen Fall dann statisch und kinematisch bestimmt gelagert, wenn es unbeweglich ist und genau drei Lagerreaktionen auftreten. Diese können sein

- drei Kräfte, die nicht alle parallel und nicht zentral sind,
- zwei Kräfte und ein Moment, wobei die Kräfte nicht parallel sind.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die statische Bestimmtheit nur von der Lagerung und nicht von der Belastung eines Tragwerks abhängt.



**Abb. 5.7** Statisch unbestimmte Lagerungen

Bringen wir an einem statisch bestimmt gelagerten Tragwerk weitere Lager an, so treten mehr als drei Lagerreaktionen auf. Eine Berechnung der Reaktionen aus den drei Gleichgewichtsbedingungen allein ist dann nicht mehr möglich. Wir nennen ein solches Tragwerk *statisch unbestimmt* gelagert.

Wird zum Beispiel der einseitig eingespannte Balken in Abb. 5.6b durch ein zusätzliches einwertiges Lager *B* nach Abb. 5.7a unterstützt, so erhöht sich die Anzahl der unbekannten Reaktionen von drei auf vier: der Balken ist dann *einfach* statisch unbestimmt gelagert.

Allgemein heißt ein Tragwerk  $x$ -fach statisch unbestimmt gelagert, wenn die Anzahl der unbekannten Lagerreaktionen um  $x$  größer ist als die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen. Demnach ist der Balken in Abb. 5.7b wegen  $r = 2 + 3 \cdot 1 = 5$  zweifach statisch unbestimmt gelagert.

Die Lagerreaktionen statisch unbestimmt gelagerter Tragwerke können bestimmt werden, wenn die Tragwerke nicht als starr angesehen, sondern ihre Verformungen berücksichtigt werden. Die entsprechenden Verfahren werden in der Elastostatik (Band 2) behandelt.

### 5.1.3 Berechnung der Lagerreaktionen

Zur Ermittlung der Lagerreaktionen wenden wir das Schnittpunktprinzip (vgl. Abschn. 1.4) an: wir entfernen die Lager und ersetzen ihre Wirkung auf das Tragwerk durch die unbekannten Reaktionen.

Als Beispiel betrachten wir den in Abb. 5.8a dargestellten Balken, der mit einer Pendelstütze *A* und zwei Rollenlagern *B* und *C* gelagert ist. Die Lagerreaktionen machen wir im Freikörperbild (Abb. 5.8b) sichtbar. Ihre Richtungssinne können wir dabei beliebig wählen. Bei Pendelstützen halten wir uns allerdings an die Konvention für Stäbe: Zugkräfte positiv. Liefert die Rechnung einen positiven Zahlenwert, so war die entsprechende Annahme richtig, während bei einem negativen Vorzeichen die Reaktion in Wirklichkeit entgegengesetzt gerichtet ist.

Alle am freigeschnittenen Tragwerk angreifenden Kräfte (d. h. eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte) müssen als Gleichgewichtsgruppe die Gleichge-

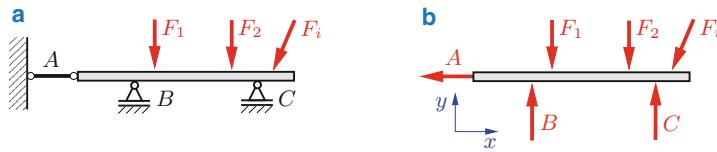


Abb. 5.8 a Tragwerk, b Freikörperbild

wichtsbedingungen (3.12) erfüllen:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i^{(P)} = 0. \quad (5.2)$$

Dabei ist  $P$  ein beliebiger Bezugspunkt. Aus (5.2) lassen sich die Lagerreaktionen berechnen.

► **Beispiel 5.1** Der in Abb. 5.9a dargestellte Balken ist durch eine Kraft  $F$  belastet, die unter dem Winkel  $\alpha$  angreift.

Gesucht sind die Lagerkräfte in  $A$  und  $B$ .

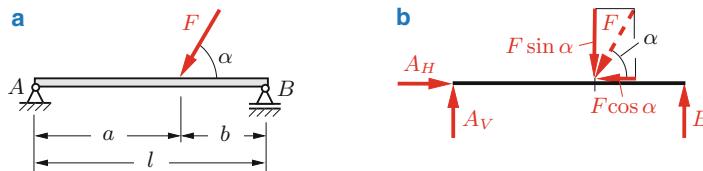


Abb. 5.9 a Balken auf zwei Stützen, b Freikörperbild

**Lösung** Der Balken ist unbeweglich gelagert; das Lager  $A$  ist zweiwertig, das Lager  $B$  einwertig. Es treten also die drei unbekannten Lagerreaktionen  $A_H$ ,  $A_V$  und  $B$  auf: der Balken ist statisch bestimmt gelagert. Wir entfernen die Lager und zeichnen die Reaktionskräfte in das Freikörperbild (Abb. 5.9b) ein, wobei wir den Richtungssinn jeweils frei wählen. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\uparrow: \quad A_V - F \sin \alpha + B = 0, \quad (a)$$

$$\rightarrow: \quad A_H - F \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_H = F \cos \alpha}},$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{A}: \quad -a F \sin \alpha + l B = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{B = \frac{a}{l} F \sin \alpha}}. \quad (b)$$

Mit der Kraft  $B$  nach (b) und  $a + b = l$  folgt aus (a)

$$\underline{\underline{A_V}} = F \sin \alpha - B = \left(1 - \frac{a}{l}\right) F \sin \alpha = \frac{b}{l} F \sin \alpha.$$

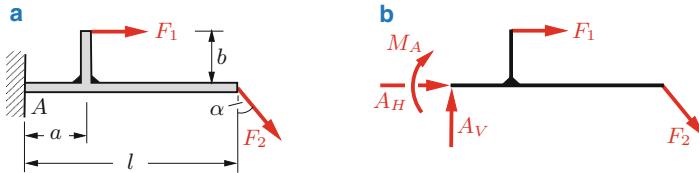
Als Probe können wir eine weitere Momentengleichung verwenden:

$$\widehat{B}: \quad -l A_V + b F \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A_V = \frac{b}{l} F \sin \alpha. \quad (\text{c})$$

Gleichung (c) liefert im Gegensatz zur Gleichung (a) direkt die Lagerkraft  $A_V$ . Die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (3.14) an Stelle von (3.12) wäre hier also zweckmäßiger gewesen. ■

► **Beispiel 5.2** Der einseitig eingespannte Balken nach Abb. 5.10a ist durch zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  belastet.

Gesucht sind die Lagerreaktionen.



**Abb. 5.10** a Einseitig eingespannter Balken, b Freikörperbild

**Lösung** Das Lager  $A$  ist dreiwertig. Als Lagerreaktionen treten daher die Kraftkomponenten  $A_H$  und  $A_V$  sowie das Einspannmoment  $M_A$  auf. Die Reaktionen sind im Freikörperbild (Abb. 5.10b) sichtbar gemacht, wobei die Richtungssinne beliebig angenommen wurden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (5.2) folgt:

$$\uparrow: \quad A_V - F_2 \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_V = F_2 \cos \alpha}},$$

$$\rightarrow: \quad A_H + F_1 + F_2 \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_H = -(F_1 + F_2 \sin \alpha)}},$$

$$\widehat{A}: \quad M_A + b F_1 + l F_2 \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_A = -(b F_1 + l F_2 \cos \alpha)}}.$$

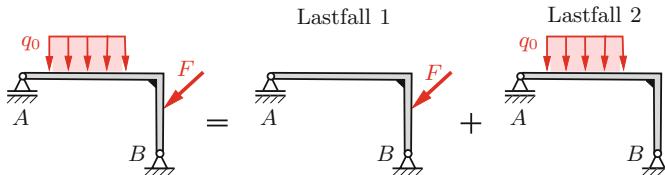
Die negativen Vorzeichen bei  $A_H$  und bei  $M_A$  zeigen, dass diese Reaktionen in Wirklichkeit entgegengesetzt zu den Richtungen wirken, die im Freikörperbild angenommen wurden. ■

### 5.1.4 Superpositionsprinzip

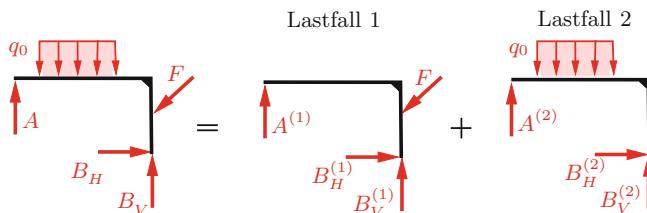
Ist ein statisch bestimmtes System durch mehrere eingeprägte Lasten belastet, dann kann es zweckmäßig sein, das *Superpositionsprinzip* anzuwenden. Bei ihm erfolgt die Bestimmung der Lagerreaktionen durch *Superposition*, d. h. durch Addition (Überlagerung) der Reaktionskräfte der einzelnen Lastfälle. Zur Erläuterung betrachten wir das Tragwerk in Abb. 5.11, auf das die zwei eingeprägten Lasten  $F$  und  $q_0$  wirken. So wie die Gesamtbelastung durch die Summe von Lastfall 1 (Kraft  $F$ ) und Lastfall 2 (Streckenlast  $q_0$ ) gegeben ist, so ergeben sich auch die Gesamtreaktionen durch die Summe (Superposition) der Lagerreaktionen von Lastfall 1 und Lastfall 2 (Abb. 5.12):

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad B_H = B_H^{(1)} + B_H^{(2)}, \quad B_V = B_V^{(1)} + B_V^{(2)}.$$

Das Superpositionsprinzip gilt für alle statisch bestimmten Systeme, d. h. auch für räumliche Tragwerke. Der Grund hierfür liegt in der Linearität der Gleichgewichtsbedingungen (siehe Anhang A.2). Bei ihnen ist die Lösung für die unbekannten Kräfte (hier die Reaktionskräfte) durch eine lineare Kombination der bekannten Kräfte (hier die eingeprägten Lasten) gegeben. Man kann zeigen, dass dieses Prinzip auch für statisch unbestimmte Systeme gilt, sofern die zugehörigen Grundgleichungen linear sind, vgl. Band 2.



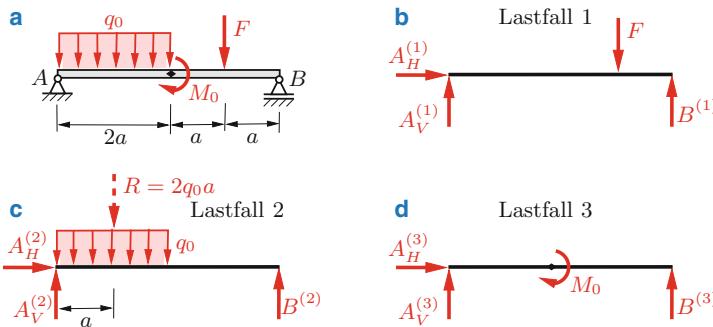
**Abb. 5.11** Superposition



**Abb. 5.12** Superposition: Freikörperbild

► **Beispiel 5.3** Der Balken nach Abb. 5.13a ist durch die Kraft  $F$ , die Streckenlast  $q_0$  und das Moment  $M_0$  belastet.

Man bestimme die Lagerreaktionen unter Verwendung des Superpositionsprinzips.



**Abb. 5.13** Beispiel zur Superposition

**Lösung** Der statisch bestimmte gelagerte Balken ist durch drei eingeprägte Lasten belastet. Betrachten wir jeden Lastfall getrennt, dann ergeben sich die in Abb. 5.13b-d dargestellten Freikörperbilder. Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{array}{lll} \text{Lastfall 1} & \text{Lastfall 2} & \text{Lastfall 3} \\ \rightarrow: & A_H^{(1)} = 0, & A_H^{(2)} = 0, \quad A_H^{(3)} = 0, \\ \uparrow: & A_V^{(1)} + B^{(1)} = F, & A_V^{(2)} + B^{(2)} = 2q_0a, \quad A_V^{(3)} + B^{(3)} = 0, \\ \curvearrowright: & 4aB^{(1)} - 3aF = 0, & 4aB^{(2)} - a2q_0a = 0, \quad 4aB^{(3)} - M_0 = 0 \end{array}$$

folgen hierfür die Lagerreaktionen

$$\text{Lastfall 1: } A_H^{(1)} = 0, \quad A_V^{(1)} = F/4, \quad B^{(1)} = 3F/4,$$

$$\text{Lastfall 2: } A_H^{(2)} = 0, \quad A_V^{(2)} = 3q_0a/2, \quad B^{(2)} = q_0a/2,$$

$$\text{Lastfall 3: } A_H^{(3)} = 0, \quad A_V^{(3)} = -M_0/4a, \quad B^{(3)} = M_0/4a.$$

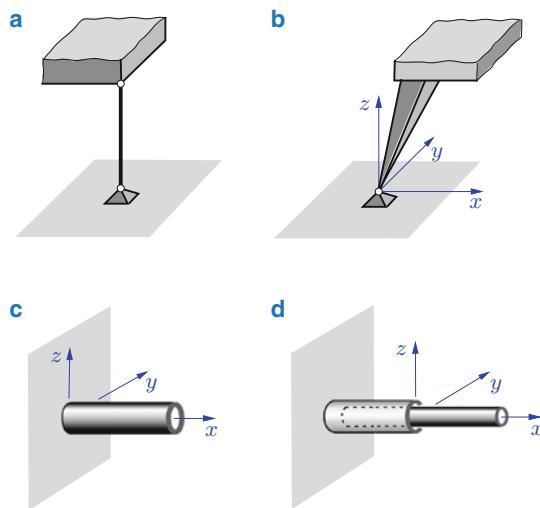
Damit ergeben sich durch Superposition die Lagerreaktionen für die Gesamtbelastung zu

$$\underline{\underline{A_H = 0}}, \quad \underline{\underline{A_V = \frac{1}{4} \left[ F + 6q_0a - \frac{M_0}{a} \right]}}, \quad \underline{\underline{B = \frac{1}{4} \left[ 3F + 2q_0a + \frac{M_0}{a} \right]}}. \quad \blacksquare$$

## 5.2 Räumliche Tragwerke

Ein Körper, der im Raum frei beweglich ist, hat sechs Freiheitsgrade: je eine Translation in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und je eine Drehung um jede der drei Achsen. Durch Lager werden die Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt. Wie in der Ebene werden dabei die verschiedenen Lagertypen nach der Anzahl der Reaktionen klassifiziert.

Die Pendelstütze nach Abb. 5.14a kann nur *eine* Kraft in Richtung ihrer Achse übertragen und ist daher auch im Raum ein einwertiges Lager ( $r = 1$ ). Dagegen überträgt das gelenkige Lager nach Abb. 5.14b im Raum *drei* Kraftkomponenten (in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung) und ist somit dreiwertig ( $r = 3$ ). Die Einspannung (Abb. 5.14c) ist im Raum ein sechswertiges Lager ( $r = 6$ ). Sie ist in der Lage, sowohl Kräfte in den drei Koordinatenrichtungen als auch Momente um die drei Achsen aufzunehmen. Eine Schiebehülse (Abb. 5.14d) kann zwei Momenten- und zwei Kraftkomponenten übertragen, wenn der Träger um seine Längsachse drehbar ist (Kreisquerschnitt). Sie stellt dann ein vierwertiges Lager dar. Wenn eine Drehung um die Längsachse nicht möglich ist (z. B. bei einem rechteckigen Querschnitt), dann können Momente um alle drei Achsen aufgenommen werden, und das Lager ist fünfwertig.

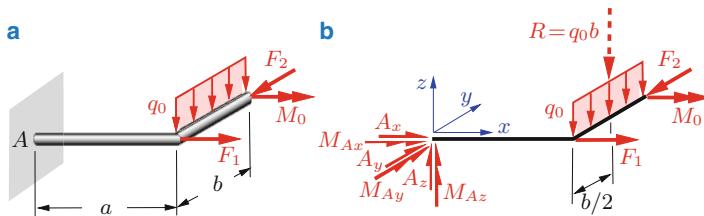


**Abb. 5.14** Räumliche Lager

Ein räumliches Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert, wenn es unbeweglich ist und die Lagerreaktionen aus den *sechs* Gleichgewichtsbedingungen (3.34) berechnet werden können, siehe auch Abschn. 5.3.4. Daher müssen in den Lagern *sechs* Reaktionen auftreten. Sie werden wie bei einem ebenen Tragwerk durch Freischneiden ermittelt.

► **Beispiel 5.4** Der in  $A$  eingespannte rechtwinklige Hebel (Abb. 5.15a) wird durch eine Streckenlast  $q_0$ , zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  sowie ein Moment  $M_0$  belastet.

Gesucht sind die Lagerreaktionen.



**Abb. 5.15** a Eingespannter Hebel, b Freikörperbild

**Lösung** Die Einspannung ist im Raum ein sechswertiges Lager. Als Lagerreaktionen treten die drei Kraftkomponenten  $A_x$ ,  $A_y$  und  $A_z$  sowie die Komponenten  $M_{Ax}$ ,  $M_{Ay}$  und  $M_{Az}$  des Einspannmomentes auf (Abb. 5.15b). Die Richtungssinne werden entsprechend den positiven Koordinatenrichtungen gewählt. Die Streckenlast ersetzen wir durch ihre Resultierende  $R = q_0 b$ . Aus den Gleichgewichtsbedingungen (3.34) folgt dann:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + F_1 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_x = -F_1}},$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_2 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_y = F_2}},$$

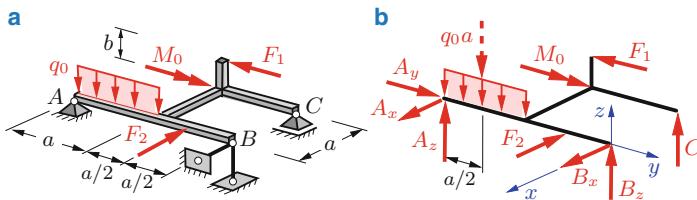
$$\sum F_{iz} = 0: \quad A_z - q_0 b = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_z = q_0 b}},$$

$$\sum M_{ix}^{(A)} = 0: \quad M_{Ax} + M_0 - \frac{b}{2}(q_0 b) = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_{Ax} = \frac{q_0 b^2}{2} - M_0}},$$

$$\sum M_{iy}^{(A)} = 0: \quad M_{Ay} + a(q_0 b) = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_{Ay} = -q_0 a b}},$$

$$\sum M_{iz}^{(A)} = 0: \quad M_{Az} - a F_2 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_{Az} = a F_2}}. \quad \blacksquare$$

► **Beispiel 5.5** Ein räumlicher Rahmen ist in  $A$ ,  $B$  und  $C$  gelagert (Abb. 5.16a). Er wird durch eine Streckenlast  $q_0$ , die Kräfte  $F_1$ ,  $F_2$  und ein Moment  $M_0$  belastet. Gesucht sind die Lagerreaktionen.



**Abb. 5.16** a Räumlicher Rahmen, b Freikörperbild

**Lösung** Das gelenkige Lager  $A$  überträgt die drei Kraftkomponenten  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  (Abb. 5.16b). Am Lager  $B$  wirken in Richtung der beiden Pendelstützen die Kräfte  $B_x$  und  $B_z$ , während am beweglichen Lager  $C$  nur eine Kraft  $C$  senkrecht zur Bewegungsebene, d. h. in Richtung der  $z$ -Achse, auftritt. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + B_x - F_2 = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_1 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_y = F_1}},$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad A_z + B_z + C - q_0 a = 0. \quad (b)$$

Beim Momentengleichgewicht wählen wir zweckmäßig Achsen durch den Punkt  $B$ :

$$\sum M_{ix}^{(B)} = 0: \quad -2a A_z + \frac{3}{2}a (q_0 a) + b F_1 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_z = \frac{3}{4}q_0 a + \frac{b}{2a} F_1}},$$

$$\sum M_{iy}^{(B)} = 0: \quad a C + M_0 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{C = -\frac{1}{a} M_0}},$$

$$\sum M_{iz}^{(B)} = 0: \quad 2a A_x + a F_1 - \frac{a}{2} F_2 = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{A_x = -\frac{1}{2} F_1 + \frac{1}{4} F_2}}.$$

Mit den Ergebnissen für  $A_x$ ,  $A_z$  und  $C$  erhält man aus (a) und (b)

$$\underline{\underline{B_x = -A_x + F_2 = \frac{1}{2} F_1 + \frac{3}{4} F_2}},$$

$$\underline{\underline{B_z = q_0 a - A_z - C = \frac{1}{4} q_0 a - \frac{b}{2a} F_1 + \frac{1}{a} M_0}}. \quad \blacksquare$$

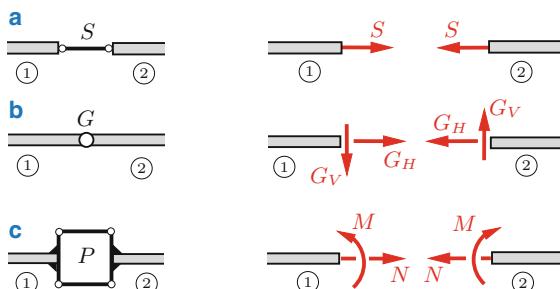
## 5.3 Mehrteilige Tragwerke

### 5.3.1 Statische Bestimmtheit

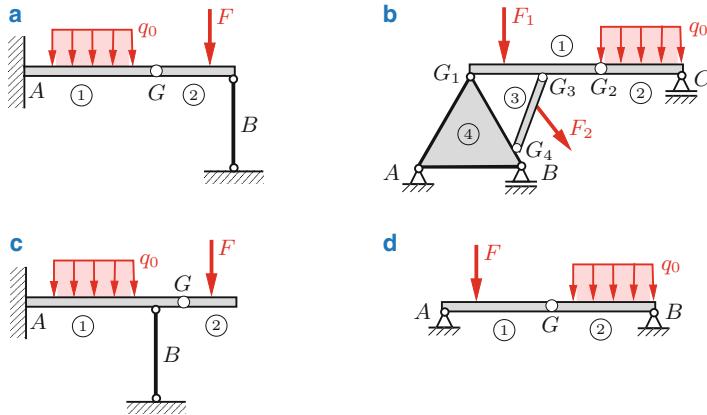
Tragwerke bestehen oft nicht nur aus einem einzigen, sondern aus einer Anzahl von starren Körpern, die in geeigneter Weise miteinander verbunden sind. Die Verbindungselemente übertragen Kräfte bzw. Momente, die man durch Schnitte sichtbar machen kann. Wir wollen uns hier auf *ebene* Tragwerke beschränken.

Die Verbindung zwischen je zwei starren Teilkörpern ① und ② kann zum Beispiel durch einen Pendelstab  $S$ , ein Gelenk  $G$  oder eine Parallelführung  $P$  erfolgen (Abb. 5.17a–c). Der *Pendelstab* überträgt nur eine Kraft  $S$  in seiner Längsrichtung. Die Zahl  $v$  der Verbindungsreaktionen ist in diesem Fall  $v = 1$ . Das *Gelenk* kann dagegen eine Kraft in beliebiger Richtung (d. h. die beiden Kraftkomponenten  $G_H$  und  $G_V$ ) übertragen. Da es als reibungsfrei angenommen wird, setzt es einer Drehung keinen Widerstand entgegen: die Übertragung eines Momentes ist daher nicht möglich. Die Zahl der Verbindungsreaktionen ist hier demnach  $v = 2$ . Die *Parallelführung* (Querkraftgelenk) verhindert eine gegenseitige Verdrehung der beiden angeschlossenen Teilkörper und eine Verschiebung aufeinander zu, nicht aber eine vertikale Verschiebung. Deshalb kann sie nur eine horizontale Kraft  $N$  und ein Moment  $M$  übertragen. Auch hier gilt  $v = 2$ . Die Verbindungsreaktionen wirken nach dem Prinzip *actio = reactio* entgegengesetzt auf die Teilkörper.

Zur Bestimmung der Lagerreaktionen und der in den Verbindungselementen übertragenen Kräfte bzw. Momente verwenden wir das Schnittpunktprinzip: wir trennen die einzelnen Teilkörper und entfernen die Lager. Die Wirkungen der Verbindungselemente und der Lager auf das Tragwerk ersetzen wir dabei durch die Verbindungs- und die Lagerreaktionen.



**Abb. 5.17** Verbindungselemente: **a** Pendelstab, **b** Gelenk, **c** Parallelführung



**Abb. 5.18** Zur statischen Bestimmtheit

Für jeden freigeschnittenen Teilkörper können wir drei Gleichgewichtsbedingungen anschreiben. Besteht das Tragwerk aus  $n$  Teilkörpern, so stehen insgesamt  $3n$  Gleichungen zur Verfügung. Die Anzahl der in den Lagern auftretenden Reaktionen sei  $r$ , in den Verbindungselementen werden  $v$  Reaktionen übertragen. Wir nennen das Tragwerk statisch bestimmt, wenn wir aus den  $3n$  Gleichgewichtsbedingungen die  $r$  Lagerreaktionen und die  $v$  Bindekräfte (und evtl. Bindemomente) berechnen können. Notwendig dafür ist, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt:

$$r + v = 3n . \quad (5.3)$$

Wenn darüber hinaus das Tragwerk unbeweglich ist, dann ist es statisch bestimmt. Mit  $n = 1$  und  $v = 0$  ist in (5.3) auch der Sonderfall des statisch bestimmt gelagerten einteiligen ebenen Tragwerks enthalten ( $r = 3$ , vgl. Abschn. 5.1.2).

Als Beispiele betrachten wir die in Abb. 5.18 dargestellten mehrteiligen Tragwerke. Das Tragwerk nach Abb. 5.18a besteht aus  $n = 2$  Balken ① und ②, die durch das Gelenk  $G$  miteinander verbunden sind. Das Gelenk kann  $v = 2$  Kräfte übertragen. Mit der Einspannung  $A$  und der Pendelstütze  $B$  sind  $r = 3 + 1 = 4$  Lagerreaktionen vorhanden. Daher ist wegen  $4 + 2 = 3 \cdot 2$  die notwendige Bedingung (5.3) für statische Bestimmtheit erfüllt. Für das Tragwerk in Abb. 5.18b aus den drei Balken ① bis ③ und der Scheibe ④ gilt  $n = 4$ . Die vier Gelenke  $G_1$  bis

$G_4$  übertragen  $v = 4 \cdot 2 = 8$  Verbindungsreaktionen. Das Lager  $A$  ist zweiwertig, die Läger  $B$  und  $C$  sind je einwertig; demnach wird  $r = 2 + 1 + 1 = 4$ . Einsetzen zeigt, dass die Bedingung (5.3) wieder erfüllt ist:  $4 + 8 = 3 \cdot 4$ . Da beide Tragwerke zudem unbeweglich sind, sind sie statisch bestimmt.

Wenn die Pendelstütze der Abb. 5.18a nicht am Balken ② sondern am Balken ① angebracht ist (Abb. 5.18c), dann ist die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit immer noch erfüllt. Das Tragwerk ist dann aber kinematisch unbestimmt (Balken ② beweglich) und somit unbrauchbar. Auch das System nach Abb. 5.18d ist kinematisch unbestimmt: das Gelenk  $G$  ist zwar nicht endlich aber doch noch infinitesimal nach oben bzw. nach unten verschieblich.

► **Beispiel 5.6** Das Tragwerk nach Abb. 5.19a besteht aus dem Balken ① und dem Winkel ②, die durch das Gelenk  $G$  verbunden sind. Der Winkel ist bei  $A$  eingespannt; der Balken ist durch das Lager  $B$  gestützt. Das System wird durch eine Kraft  $F$  belastet.

Gesucht sind die Lagerreaktionen und die Gelenkkraft.

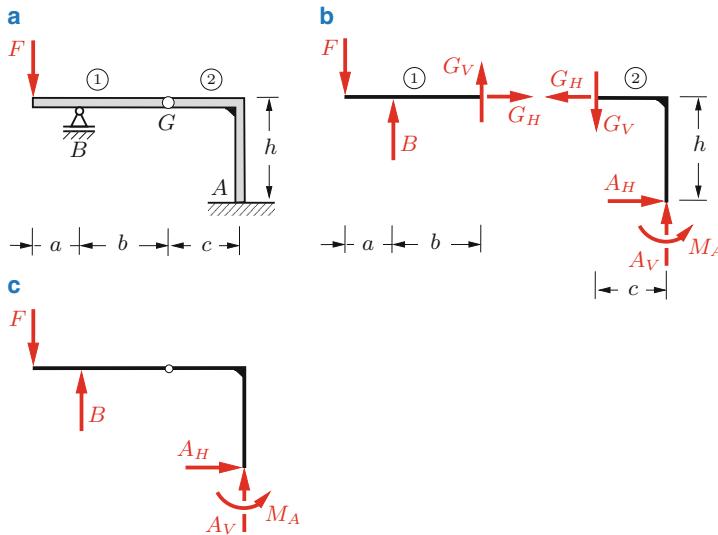


Abb. 5.19 **a** Tragwerk, **b** Freikörperbild

**Lösung** Es gilt  $r = 3 + 1 = 4$ ,  $v = 2$  und  $n = 2$ . Daher ist wegen  $4 + 2 = 3 \cdot 2$  die Bedingung (5.3) erfüllt. Das Tragwerk ist statisch bestimmt.

Wir trennen die Teilkörper ① und ②, entfernen die Lager und zeichnen das Freikörperbild (Abb. 5.19b). Dabei können wir an einem der beiden Teilkörper die Richtungssinne von  $G_H$  und  $G_V$  frei wählen. Am anderen Teilkörper liegen sie dann wegen  $\text{actio} = \text{reactio}$  fest. Gleichgewicht am Teilkörper ① liefert

$$\rightarrow: \quad \underline{\underline{G_H}} = 0,$$

$$\widehat{G}: \quad (a+b)F - bB = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B}} = \frac{a+b}{b} F,$$

$$\widehat{B}: \quad aF + bG_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{G_V}} = -\frac{a}{b} F.$$

Aus dem Gleichgewicht am Teilkörper ② und den Ergebnissen für  $G_H$  und  $G_V$  folgen

$$\uparrow: \quad -G_V + A_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_V}} = G_V = -\frac{a}{b} F,$$

$$\rightarrow: \quad -G_H + A_H = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_H}} = G_H = 0,$$

$$\widehat{A}: \quad M_A + hG_H + cG_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{M_A}} = -hG_H - cG_V = \frac{ac}{b} F.$$

Die negativen Vorzeichen bei  $G_V$  und  $A_V$  zeigen, dass diese Kräfte in Wirklichkeit entgegengesetzt zu den in den Freikörperbildern angenommenen Richtungen wirken.

Zur Probe können wir noch die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem (Abb. 5.19c) anwenden, wobei wir uns die gelenkige Verbindung als erstarrt vorstellen (Erstarrungsprinzip):

$$\uparrow: \quad -F + B + A_V = 0 \quad \rightarrow \quad -F + \frac{a+b}{b} F - \frac{a}{b} F = 0,$$

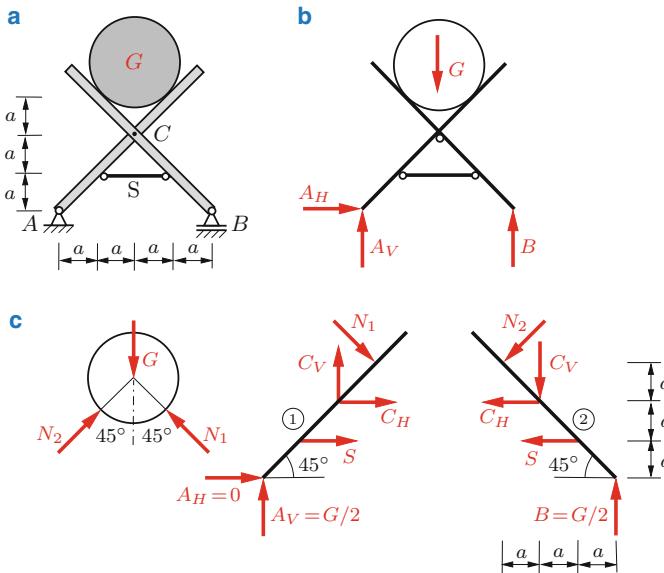
$$\rightarrow: \quad A_H = 0,$$

$$\widehat{B}: \quad aF + M_A + hA_H + (b+c)A_V = 0 \quad \rightarrow \quad aF + \frac{ac}{b} F - (b+c)\frac{a}{b} F = 0.$$

■

► **Beispiel 5.7** Der symmetrische Bock in Abb. 5.20a besteht aus zwei Balken, die in  $C$  drehbar miteinander verbunden sind und die durch ein Seil  $S$  gehalten werden. Er ist durch einen glatten Zylinder vom Gewicht  $G$  belastet.

Gesucht sind die Lagerreaktionen in  $A$  und  $B$  sowie die Seilkraft  $S$  und die Gelenkkraft in  $C$ . Das Gewicht des Bocks kann vernachlässigt werden.



**Abb. 5.20** a Symmetrischer Bock, b Freikörperbilder

**Lösung** Da nur drei Lagerreaktionen auftreten (Abb. 5.20b), können wir sie durch Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem ermitteln:

$$\rightarrow: \quad \underline{\underline{A_H = 0}},$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{A}: \quad -2aG + 4aB = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B = G/2}}, \quad (a)$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{B}: \quad -4aA_V + 2aG = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_V = G/2}}.$$

Zur Ermittlung der Seilkraft und der Gelenkkraft in  $C$  zerlegen wir das Tragwerk in die beiden Teilkörper ( $n = 2$ ). Im Gelenk  $C$  und im Seil  $S$  werden  $v = 2 + 1 = 3$  Kräfte übertragen (Abb. 5.20c). Mit  $r = 3$  ist die notwendige Bedingung (5.3) für statische Bestimmtheit erfüllt:  $3 + 3 = 3 \cdot 2$ .

Da die Oberfläche des Zylinders glatt ist, wirken die Kontaktkräfte  $N_1$  und  $N_2$  zwischen den Balken und dem Zylinder normal zu den Berührungsgebänen. Mit

$\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$  folgt aus dem Gleichgewicht am Zylinder:

$$\rightarrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 = 0 \quad \rightarrow N_1 = N_2, \quad (b)$$

$$\uparrow: \quad -G + \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 = 0 \quad \rightarrow N_1 = N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} G.$$

Gleichgewicht am Balken ② liefert mit (a) und (b):

$$\widehat{C}: \quad \sqrt{2} a N_2 - a S + 2 a B = 0 \quad \rightarrow \underline{S} = 2 B + \sqrt{2} N_2 = \underline{2G},$$

$$\uparrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} N_2 - C_V + B = 0 \quad \rightarrow \underline{C_V} = B - \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 = \underline{0},$$

$$\rightarrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} N_2 - C_H - S = 0 \quad \rightarrow \underline{C_H} = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_2 - S = -\frac{5}{2} G.$$

Gleichgewicht am Balken ① führt auf dieselben Ergebnisse. Aus Abb. 5.20c kann man durch Symmetriebetrachtungen ohne Rechnung erkennen:  $N_1 = N_2$  und  $C_V = 0$ . ■

### 5.3.2 Dreigelenkbogen

Der Träger nach Abb. 5.21a heißt Zweigelenkbogen, da er in den zwei Lagern  $A$  und  $B$  gelenkig gelagert ist. Bei einer technischen Konstruktion ist der Bogen  $AB$  nicht starr, sondern verformt sich unter dem Einfluss von Kräften. Wenn  $B$  ein Rollenlager ist, kann dies zu einer großen, in der Praxis meist nicht zulässigen Verschiebung des Lagers führen.

Diese Verschiebung wird verhindert, wenn man zwei zweiwertige gelenkige Lager  $A$  und  $B$  anbringt. Damit geht zunächst die statische Bestimmtheit des Trägers

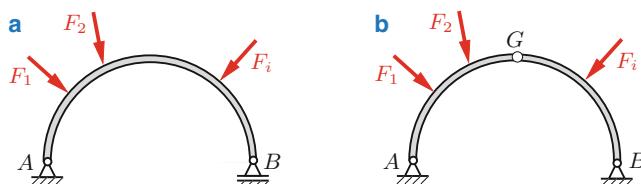
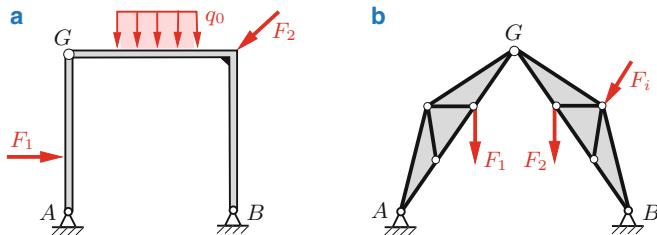


Abb. 5.21 a Zweigelenkbogen und b Dreigelenkbogen

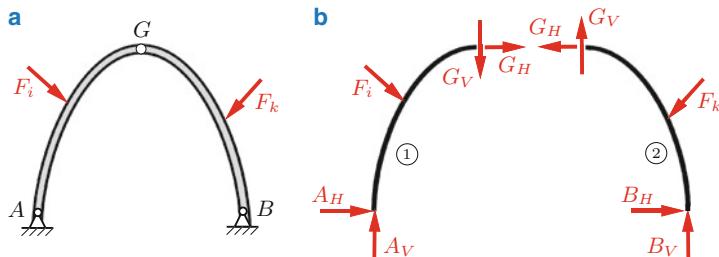


**Abb. 5.22** Dreigelenkbogen

verloren. Wir können sie wieder herstellen, wenn wir an einer beliebigen Stelle ein Gelenk  $G$  anbringen (Abb. 5.21b). Das so entstandene Tragwerk heißt *Dreigelenkbogen*. Es besteht aus  $n = 2$  Teilkörpern. Das Gelenk  $G$  kann  $v = 2$  Kräfte übertragen, und in den Lagern  $A$  und  $B$  treten  $r = 2 + 2 = 4$  Lagerkräfte auf. Wegen  $4 + 2 = 3 \cdot 2$  ist die Bedingung (5.3) erfüllt: der Dreigelenkbogen ist statisch bestimmt.

Die beiden Teilkörper eines Dreigelenkbogens müssen nicht unbedingt die Form von Bögen besitzen. Ein Tragwerk, das aus zwei Teilkörpern beliebiger Form besteht, die gelenkig miteinander verbunden sind (insgesamt: *drei* Gelenke), nennen wir ebenfalls Dreigelenkbogen. In Abb. 5.22 sind zwei Beispiele dargestellt: a) ein Rahmen und b) ein Fachwerk, das aus zwei in  $G$  verbundenen Teilstücken besteht.

Zur Ermittlung der Lager- und der Gelenkkräfte eines Dreigelenkbogens zerlegen wir ihn in die beiden Teilkörper ① und ② (vgl. Abb. 5.23a, b) und wenden auf jedes Teil die drei Gleichgewichtsbedingungen an. Aus den  $2 \cdot 3 = 6$  Gleichungen können die sechs Unbekannten  $A_H$ ,  $A_V$ ,  $B_H$ ,  $B_V$ ,  $G_H$  und  $G_V$  berechnet werden.

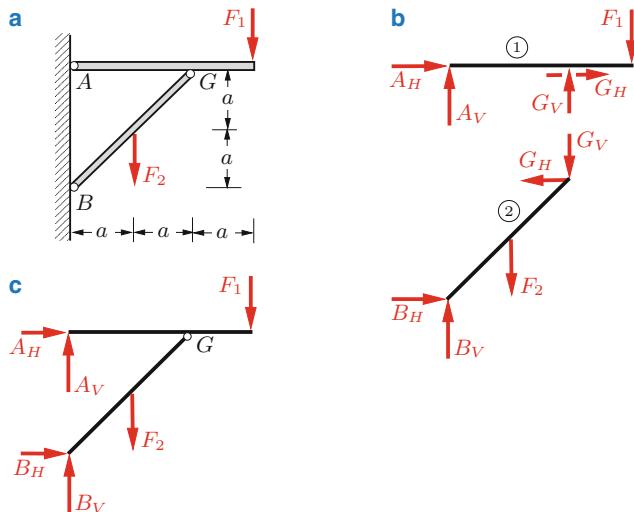


**Abb. 5.23** a Dreigelenkbogen, b Freikörperbild

werden. Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem (Erstarrungsprinzip) können als Rechenkontrollen dienen.

► **Beispiel 5.8** Das Tragwerk in Abb. 5.24a besteht aus zwei Balken, die in  $G$  gelenkig miteinander verbunden und in  $A$  und  $B$  gelenkig gelagert sind. Es wird durch die Kräfte  $F_1 = F$  und  $F_2 = 2F$  belastet.

Wie groß sind die Lager- und die Gelenkkräfte?



**Abb. 5.24** a Tragwerk, b Freikörperbilder

**Lösung** Das gegebene Tragwerk ist ein Dreigelenkbogen. Zur Ermittlung der gesuchten Lager- und Gelenkkräfte trennen wir die Teilkörper ① und ② und zeichnen das Freikörperbild (Abb. 5.24b). Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen am Balken ①

$$\text{A: } 2a G_V - 3a F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{G_V}} = \frac{3}{2} F_1 = \underline{\underline{\frac{3}{2} F}},$$

$$\text{G: } -2a A_V - a F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_V}} = -\frac{1}{2} F_1 = \underline{\underline{-\frac{1}{2} F}},$$

$$\rightarrow: \quad A_H + G_H = 0$$

und am Balken ②

$$\widehat{B}: -a F_2 - 2a G_V + 2a G_H = 0,$$

$$\widehat{G}: 2a B_H - 2a B_V + a F_2 = 0,$$

$$\rightarrow: B_H - G_H = 0.$$

Durch Auflösen erhält man

$$\underline{\underline{G}_H} = \frac{1}{2} F_2 + G_V = \frac{5}{2} F, \quad \underline{\underline{B}_H} = G_H = \frac{5}{2} F,$$

$$\underline{\underline{B}_V} = \frac{1}{2} F_2 + B_H = \frac{7}{2} F, \quad \underline{\underline{A}_H} = -G_H = -\frac{5}{2} F.$$

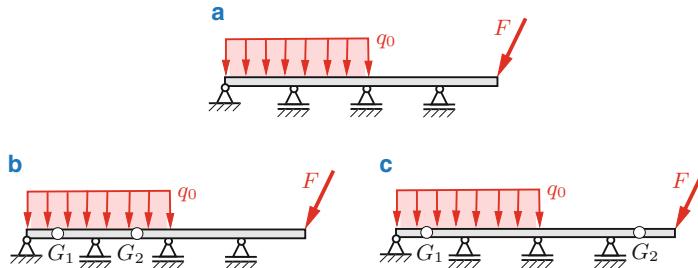
Zur Kontrolle bilden wir das Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem nach Abb. 5.24c:

$$\uparrow: A_V + B_V - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} F + \frac{7}{2} F - F - 2F = 0,$$

$$\rightarrow: A_H + B_H = 0 \rightarrow -\frac{5}{2} F + \frac{5}{2} F = 0. \quad \blacksquare$$

### 5.3.3 Gelenkbalken

Bei der Konstruktion von Tragwerken mit großer Spannweite ist es oft nötig, mehr als zwei Lager anzubringen. Als Beispiel diene der Träger in Abb. 5.25a. Er ist nach Abschn. 5.1.2 wegen  $r = 5$  zweifach statisch unbestimmt gelagert. Die Be-



**Abb. 5.25** Zum Gelenkbalken

rechnung der Lagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen allein ist also nicht möglich.

Wenn wir (ähnlich wie beim Dreigelenkbogen) den durchlaufenden Träger durch geeignetes Einfügen von Gelenken in mehrere Teilkörper zerlegen, erhalten wir ein aus Balken bestehendes mehrteiliges Tragwerk, das dann statisch bestimmt ist. Wir nennen dieses Tragwerk *Gelenkbalken* oder *Gerber-Träger* (nach Heinrich Gottfried Gerber, 1832–1912).

Ist die Anzahl der Gelenke  $g$ , so wird der Durchlaufträger in  $n = g + 1$  Teilkörper (Balken) zerlegt. Da jedes Gelenk zwei Kräfte übertragen kann, ist die Anzahl der Verbindungsreaktionen  $v = 2g$ . Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit folgt damit aus (5.3) zu

$$r + v = 3n \quad \rightarrow \quad r + 2g = 3(g + 1). \quad (5.4)$$

Daraus ergibt sich für die Anzahl der notwendigen Gelenke

$$g = r - 3. \quad (5.5)$$

Für den Träger in Abb. 5.25a gilt  $r = 5$ . Damit werden nach (5.5)  $g = 5 - 3 = 2$  Gelenke benötigt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Gelenke anzubringen; von ihrer Lage hängen die Lager- und die Gelenkkräfte ab. Eine mögliche Anordnung ist in Abb. 5.25b dargestellt. Dagegen zeigt Abb. 5.25c eine Anordnung der Gelenke, die auf ein bewegliches (kinematisch unbestimmtes) Tragwerk führt und daher unzulässig ist.

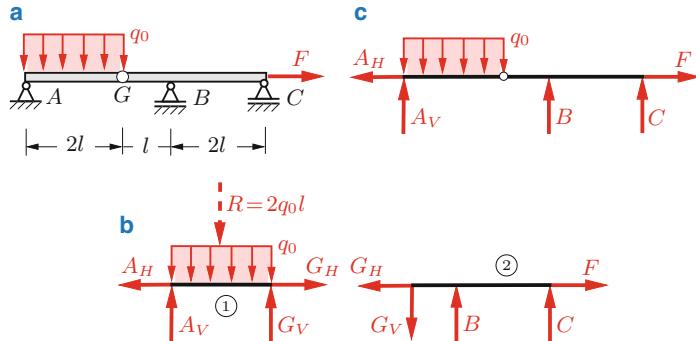
Zur Ermittlung der Lager- und der Gelenkkkräfte zerlegen wir den Gelenkbalken in seine Teilkörper und wenden auf jeden Balken die Gleichgewichtsbedingungen an.

► **Beispiel 5.9** Der in Abb. 5.26a dargestellte Gelenkbalken wird durch eine Einzelkraft  $F$  und eine Streckenlast  $q_0$  belastet.

Wie groß sind die Lager- und die Gelenkkkräfte?

**Lösung** Wir trennen die beiden Teilkörper und zeichnen das Freikörperbild (Abb. 5.26b). Die Streckenlast ersetzen wir durch die statisch äquivalente Einzelkraft  $R = 2q_0l$ , die in der Mitte des Balkens ① angreift.

Es ist meist zweckmäßig, Momentengleichungen um die Gelenke und um die Lager zu verwenden. Dann lassen sich der Reihe nach die Unbekannten aus jeweils einer Gleichung berechnen. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen



**Abb. 5.26** **a** Gelenkbalken, **b** Freikörperbilder

am Teilsystem ①

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: -l R + 2l G_V = 0 \rightarrow \underline{\underline{G_V}} = \frac{1}{2} R = \underline{\underline{q_0 l}},$$

$$\overset{\curvearrowleft}{G}: -2l A_V + l R = 0 \rightarrow \underline{\underline{A_V}} = \frac{1}{2} R = \underline{\underline{q_0 l}},$$

$$\rightarrow: -A_H + G_H = 0$$

und am Teilsystem ②

$$\overset{\curvearrowleft}{B}: l G_V + 2l C = 0,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{C}: 3l G_V - 2l B = 0,$$

$$\rightarrow: -G_H + F = 0 \rightarrow \underline{\underline{G_H}} = \underline{\underline{F}}.$$

Auflösen liefert

$$\underline{\underline{A_H}} = G_H = \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{3}{2} G_V = \frac{3}{2} \underline{\underline{q_0 l}},$$

$$\underline{\underline{C}} = -\frac{1}{2} G_V = -\frac{1}{2} \underline{\underline{q_0 l}}.$$

Zur Kontrolle bilden wir das Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem (Abb. 5.26c):

$$\rightarrow: \quad -A_H + F = 0 \quad \rightarrow -F + F = 0, \\ \uparrow: \quad A_V - 2q_0 l + B + C = 0 \quad \rightarrow q_0 l - 2q_0 l + \frac{3}{2}q_0 l - \frac{1}{2}q_0 l = 0. \quad \blacksquare$$

### 5.3.4 Kinematische Bestimmtheit

Wir wollen in diesem Abschnitt die Begriffe der statischen und kinematischen Bestimmtheit bzw. Unbestimmtheit etwas ausführlicher betrachten, als wir das in Abschn. 5.3.1 getan haben. Hierbei beschränken wir uns auf mehrteilige ebene Tragwerke.

Die Zahl  $f$  der Freiheitsgrade eines ebenen Systems aus  $n$  starren Körpern ohne Bindungen beträgt  $3n$  (3 Freiheitsgrade für jeden Körper). Sie wird durch die Zahl  $r$  der Bindungen durch Lager und die Zahl  $v$  der Verbindungen (Abb. 5.17) reduziert:

$$f = 3n - (r + v). \quad (5.6)$$

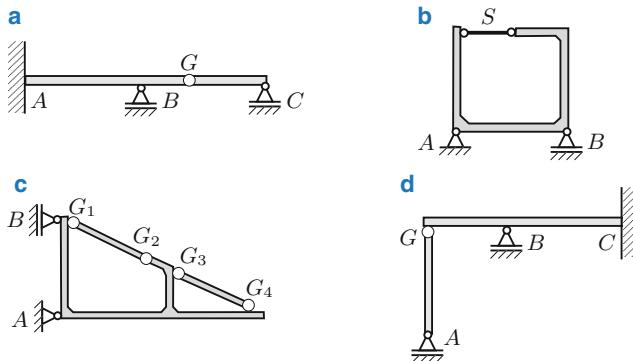
Jeder Bindung  $r$  bzw.  $v$  ist dabei eine Lager- bzw. Bindungsreaktion zugeordnet, und die Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen beträgt  $3n$  (3 für jeden Körper).

Für  $f > 0$  ist das System beweglich und stellt zum Beispiel ein Getriebe dar. Ist dagegen  $f < 0$ , dann übersteigt die Zahl  $r + v$  der unbekannten Lager- und Bindungsreaktionen die Zahl  $3n$  der Gleichgewichtsbedingungen um  $x$ . Das System ist dann statisch unbestimmt, wobei der Grad  $x$  der statischen Unbestimmtheit durch

$$x = -f = r + v - 3n \quad (5.7)$$

gegeben ist.

Obwohl es bei statisch unbestimmten Systemen unmöglich ist, *alle* Lager- und Verbindungsreaktionen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen, können manchmal einzelne Lager- oder Verbindungsreaktionen ermittelt werden. So ist zum Beispiel das System nach Abb. 5.27a mit  $n = 2$ ,  $r = 5$  und  $v = 2$  einfach statisch unbestimmt gelagert. Aus den drei Gleichgewichtsbedingungen für den rechten Balken lassen sich jedoch bei gegebener Belastung die Komponenten der Gelenkkraft in  $G$  und die Kraft im Lager  $C$  unmittelbar bestimmen.



**Abb. 5.27** Statisch unbestimmte Systeme

Zwei andere Beispiele für 1-fach bzw. 2-fach statisch unbestimmte Systeme sind in Abb. 5.27b, c dargestellt. Für beide Tragwerke können alle Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem bestimmt werden: die Systeme sind *äußerlich statisch bestimmt*. Die Verbindungsreaktionen (Kraft im Pendelstab, Gelenkkräfte) zwischen den Teilen der Systeme lassen sich jedoch nicht ermitteln, weshalb man die Systeme auch als *innerlich statisch unbestimmt* bezeichnet.

Statisch unbestimmte Systeme können im Ausnahmefall endlich oder infinitesimal beweglich, d. h. kinematisch unbestimmt sein. So ist zum Beispiel das System nach Abb. 5.27d mit  $n = 2$ ,  $r = 5$  und  $v = 2$  einfach statisch unbestimmt gelagert. Man erkennt, dass das System trotzdem nicht starr ist, sondern der lotrechte Balken eine infinitesimale Drehung um  $G$  ausführen kann. Ein solches System ist als Tragwerk nicht brauchbar.

Für  $f = 3n - (r + v) = 0$  ist schließlich die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllt (vgl. (5.3)). In diesem Fall können alle Lager- und Verbindungsreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden, sofern nicht wiederum der Ausnahmefall eines beweglichen Systems vorliegt.

Wir wollen nun die Frage beantworten, wie man erkennen kann, ob ein mehrteiliges Tragwerk beweglich ist, wobei wir zunächst nur Systeme betrachten, welche die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllen ( $f = 0$ ). Ob in diesem Fall eine Beweglichkeit vorliegt, lässt sich formal immer feststellen, indem man die Gleichgewichtsbedingungen in die Form eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.8)$$

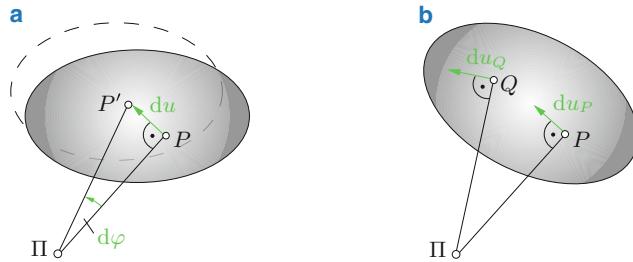


Abb. 5.28 Momentanpol

nach (A.36) bringt (vgl. Anhang A.2). Dabei stehen in  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{3n})^T$  die gegebenen Belastungen, in  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3n})^T$  die unbekannten Lager- und Verbindungsreaktionen und in der Matrix  $\mathbf{A}$  die Koeffizienten, welche nach Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen ebenfalls bekannt sind. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verschieden ist:

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \quad (5.9)$$

Dann ist das System für  $f = 0$  nicht nur statisch sondern auch kinematisch bestimmt. Diese Bedingung gilt ganz allgemein, d. h. sinngemäß auch bei einem beliebigen räumlichen System.

Man kann die Beweglichkeit eines mehrteiligen ebenen Systems auch auf grafischem Weg untersuchen. In Band 3 wird gezeigt, daß man die ebene Bewegung eines starren Körpers, der keinen Bindungen unterliegt, zu jedem Zeitpunkt auch als eine reine Drehung um einen augenblicklichen (momentanen) Drehpunkt  $\Pi$  auffassen kann (Band 3, Abschn. 3.1.4). Man bezeichnet diesen Drehpunkt als *Momentanpol*; er kann auch außerhalb des Körpers liegen. Bei einer infinitesimalen Drehung bewegt sich danach ein beliebiger Punkt  $P$  des Körpers auf einem Kreisbogen mit dem Mittelpunkt  $\Pi$  in eine neue Lage  $P'$  (Abb. 5.28a). Da der Drehwinkel  $d\varphi$  infinitesimal ist, kann der Unterschied zwischen dem Kreisbogen und seiner Tangente vernachlässigt werden. Der Kreisbogen kann dementsprechend durch die Gerade  $\overline{PP'}$  bzw.  $du$  ersetzt werden, welche senkrecht auf dem *Polstrahl*  $\overline{\Pi P}$  steht. Diese Tatsache kann zur Ermittlung des Momentanpols benutzt werden. Wenn zum Beispiel die Verschiebungsrichtungen  $du_P$  und  $du_Q$  von zwei

Punkten  $P$  und  $Q$  eines Körpers bekannt sind, errichtet man in beiden Punkten die zu den Verschiebungsrichtungen senkrechten Polstrahlen. Deren Schnittpunkt ist dann der Momentanpol  $\Pi$  (Abb. 5.28b).

Wenn sich ein ebenes System von gelenkig verbundenen Körpern bewegt, dann führt jeder einzelne Körper  $i$  eine Drehbewegung um seinen eigenen Momentanpol  $\Pi_i$  aus. Diesen nennt man auch *Hauptpol*. Dagegen heißt ein Punkt, an dem zwei Körper  $i$  und  $j$  miteinander verbunden sind, *Nebenpol*. Einen Nebenpol werden wir im weiteren mit  $(i.j)$  kennzeichnen. Ob ein System beweglich ist, kann man erkennen, indem man einen *Polplan* erstellt, d. h. die Lagen aller Haupt- und Nebenpole ermittelt. Dabei sind die folgenden Konstruktionsregeln nützlich:

1. Ein gelenkiges Festlager stellt den Hauptpol  $\Pi_i$  des angrenzenden Körpers  $i$  dar.
2. Ein einwertiges Lager  $A$  ermöglicht eine Verschiebung in *einer* Richtung. Dazu senkrecht steht der Polstrahl  $\overline{\Pi_i A}$ , auf dem sich der Momentanpol  $\Pi_i$  des angrenzenden Körpers  $i$  befindet.
3. Die Hauptpole  $\Pi_i$  und  $\Pi_j$  zweier benachbarter beweglicher Körper  $i$  und  $j$  sowie der gemeinsame Nebenpol  $(i.j)$  liegen auf einer Geraden.

Ein kinematisch unbestimmtes (d. h. bewegliches) System ist dadurch gekennzeichnet, dass sich der Polplan widerspruchlos zeichnen lässt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für kinematische Bestimmtheit ist somit

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \text{Widerspruch im Polplan.} \quad (5.10)$$

Stellt sich für ein System mit  $f \leq 0$  ein Widerspruch im Polplan heraus, dann ist es starr und demnach statisch brauchbar.

Als Beispiele betrachten wir die zweiteiligen Systeme nach Abb. 5.29, welche mit  $n = 2$ ,  $r = 4$  und  $v = 2$  die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllen. Beim System nach Abb. 5.29a ist das Festlager  $A$  der Hauptpol des Teilkörpers ① und das Gelenk  $G$  der Nebenpol (1.2). Den Hauptpol des Teilkörpers ② finden wir, indem wir senkrecht zu den möglichen Bewegungsrichtungen der Gleitlager  $B$  und  $C$  die beiden Polstrahlen  $\overline{\Pi_2 B}$  und  $\overline{\Pi_2 C}$  errichten; ihr Schnittpunkt ist  $\Pi_2$ . Da beide Hauptpole und der Nebenpol auf einer Geraden liegen, liegt kein Widerspruch im Polplan vor. Das System ist daher kinematisch unbestimmt, d. h. beweglich. Beim System nach Abb. 5.29b sind die beiden Festlager  $A$  und  $B$  die Hauptpole der beiden Teilkörper und  $G$  wiederum der Nebenpol. In diesem

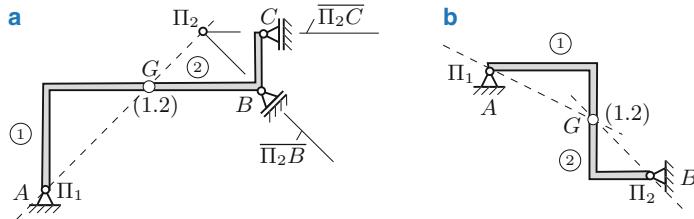


Abb. 5.29 Zur kinematischen Bestimmtheit

Fall liegen die beiden Hauptpole und der Nebenpol nicht auf einer gemeinsamen Geraden, d. h. es liegt ein Widerspruch im Polplan vor. Dementsprechend ist dieses Tragwerk sowohl statisch als auch kinematisch bestimmt.

► **Beispiel 5.10** Für den Träger nach Abb. 5.30a mit  $0 \leq \alpha \leq \pi$  gebe man die Gleichgewichtsbedingungen in der Form  $A x = b$  an und bestimme die Determinante der Koeffizientenmatrix  $A$ .

Ist das System für alle Winkel  $\alpha$  statisch brauchbar?

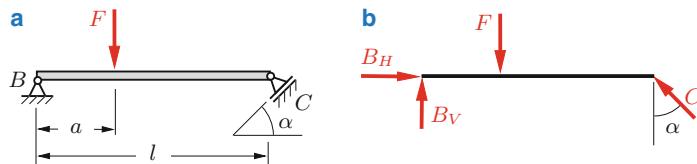


Abb. 5.30 a Balken, b Freikörperbild

**Lösung** Die Gleichgewichtsbedingungen lauten (vgl. Abb. 5.30b)

$$\rightarrow : \quad B_H - C \sin \alpha = 0,$$

$$\uparrow : \quad B_V + C \cos \alpha - F = 0,$$

$$\widehat{C} : \quad l B_V - (l - a) F = 0,$$

woraus sich die Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & \cos \alpha \\ 0 & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_H \\ B_V \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ (l - a) F \end{pmatrix}, \quad \text{d. h. } A x = b$$

ergibt. Die Determinante von  $A$  berechnen wir durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & \cos \alpha \\ 0 & l & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ l & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-l \cos \alpha}}.$$

Man erkennt:

$$\det A \begin{cases} \neq 0 & \text{für } \alpha \neq \pi/2, \\ = 0 & \text{für } \alpha = \pi/2. \end{cases}$$

Dementsprechend ist der Träger für  $\alpha \neq \pi/2$  kinematisch bestimmt (unbeweglich) und nur für  $\alpha = \pi/2$  kinematisch unbestimmt gelagert. Im zweiten Fall ist das Gleitlager  $C$  vertikal. Der Träger kann dann eine infinitesimale Drehung um das Lager  $B$  ausführen und ist demzufolge statisch unbrauchbar.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Träger für Winkel  $\alpha$  in der Nähe von  $\pi/2$  zwar formal brauchbar ist. Eine solche Anordnung ist aber technisch ungünstig, da dann sehr große Lagerkräfte auftreten. ■

## 5.4 Zusammenfassung

- Die Wertigkeit eines Lagers bzw. eines Verbindungselements ist durch die Anzahl der von ihm übertragenen Reaktionskräfte und Reaktionsmomente gegeben. Ein 1-wertiges Lager überträgt eine Lagerreaktion, ein 2-wertiges Lager überträgt zwei Lagerreaktionen usw. Analoges gilt für Verbindungselemente.
- Ein Tragwerk ist statisch bestimmt, wenn die Lager- und Verbindungsreaktionen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Anzahl der unbekannten Lager- und Verbindungsreaktionen gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist und das Tragwerk unbeweglich ist.
- Ein Tragwerk ist kinematisch bestimmt, wenn es unbeweglich ist. Ein Tragwerk, das endliche oder infinitesimale Bewegungen ausführen kann, ist kinematisch unbestimmt.
- Zur Bestimmung der Lager- und Verbindungsreaktionen sind in der Regel folgende Schritte erforderlich:
  - Freischneiden des Tragwerks von den Lagern und Trennen der einzelnen Teilkörper.
  - Freikörperbilder skizzieren; alle eingeprägten Kräfte und Momente sowie Schnittkräfte und -momente einzeichnen.
  - Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen. Im ebenen Fall sind dies für jeden Teilkörper 3 Gleichungen, z. B.

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i^{(A)} = 0,$$

wobei  $A$  ein beliebiger (geeignet gewählter) Bezugspunkt ist. Im räumlichen Fall gibt es 6 Gleichgewichtsbedingungen für jeden Körper.

- Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten. Beachte: die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen muss gleich der Zahl der Unbekannten sein!
- Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verschieden ist. Dann ist das Tragwerk statisch und kinematisch bestimmt.

---

# Fachwerke

6

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

6.1	Statische Bestimmtheit . . . . .	147
6.2	Aufbau eines Fachwerks . . . . .	149
6.3	Ermittlung der Stabkräfte . . . . .	151
6.3.1	Knotenpunktverfahren . . . . .	151
6.3.2	Cremona-Plan . . . . .	157
6.3.3	Rittersches Schnittverfahren . . . . .	161
6.4	Zusammenfassung . . . . .	165

- **Lernziele** Wir betrachten in diesem Kapitel Tragwerke, die nur aus Stäben bestehen. Solche Tragwerke bezeichnet man als Fachwerke. Die Studierenden sollen erkennen können, wann ein Fachwerk statisch und kinematisch bestimmt ist. Sie werden mit Verfahren zur systematischen Ermittlung der Stabkräfte vertraut gemacht, und sie sollen diese Verfahren sachgerecht anwenden können.

## 6.1 Statische Bestimmtheit

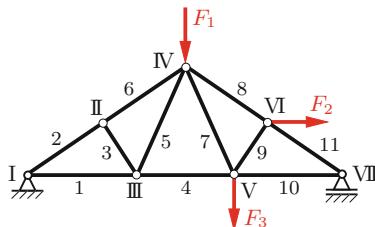
Ein Tragwerk, das nur aus (geraden) Stäben besteht, die in sogenannten Knoten miteinander verbunden sind, heißt Stabwerk oder *Fachwerk*. Um die in den Stäben auftretenden Kräfte berechnen zu können, machen wir folgende idealisierende Annahmen:

1. die Stäbe sind an den Knoten zentrisch und gelenkig miteinander verbunden (die Knoten sind reibungsfreie Gelenke),
2. die äußeren Kräfte greifen nur in den Knoten an.

Durch diese Voraussetzungen für das „ideale Fachwerk“ ist gewährleistet, dass alle Stäbe nur auf Zug oder Druck beansprucht werden.

In realen Konstruktionen sind diese Idealisierungen nur angenähert erfüllt. So sind zum Beispiel die Stabenden miteinander oder mit Knotenblechen verschweißt. Dadurch treten an den Knoten örtlich begrenzte Störeffekte auf, die allerdings keinen Einfluss auf das globale Tragverhalten haben. Zum anderen greifen im wirklichen Fachwerk auch längs der Stäbe verteilte Lasten (z. B. das Eigengewicht der Stäbe) an. Diese Kräfte werden im idealisierten Fachwerk entweder vernachlässigt oder ihre Resultierenden werden näherungsweise durch statisch gleichwertige Kräftegruppen an den benachbarten Knoten ersetzt.

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel im wesentlichen mit ebenen Fachwerken; räumliche Fachwerke behandeln wir nur am Rande. Als Beispiel betrachten wir in Abb. 6.1 ein Fachwerk aus 11 Stäben, die in 7 Knoten miteinander verbunden sind (Knoten, an denen Lagerkräfte angreifen, werden mitgezählt). Es ist üblich, die Stäbe mit arabischen Zahlen und die Knoten mit römischen Zahlen zu numerieren.



**Abb. 6.1** Fachwerk

Zur Ermittlung der Stabkräfte schneiden wir alle Knoten frei. Für die zentrale Kräftegruppe an jedem Knoten stehen zwei Kräftegleichgewichtsbedingungen zur Verfügung (vgl. Abschn. 2.3). Damit erhalten wir im Beispiel insgesamt  $7 \cdot 2 = 14$  Gleichungen zur Bestimmung der 14 Unbekannten (11 Stabkräfte und 3 Lagerkräfte).

Ein Fachwerk heißt *statisch bestimmt*, wenn die Lager- und die Stabkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (d. h. aus der Statik) bestimmbar sind. Allgemein erhält man bei einem *ebenen* Fachwerk mit  $k$  Knoten,  $s$  Stäben und  $r$  Lagerreaktionen  $2k$  Gleichungen für die  $s + r$  Unbekannten. Damit die Stab- und die Lagerkräfte ermittelt werden können, muss daher die *notwendige Bedingung*

$$2k = s + r \quad (6.1)$$

erfüllt sein.

Bei einem *räumlichen* Fachwerk stehen an jedem Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen, d. h. insgesamt  $3k$  Gleichungen zur Verfügung. Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit lautet dann

$$3k = s + r . \quad (6.2)$$

Bei dem Fachwerk nach Abb. 6.2a ist mit  $k = 7$ ,  $s = 10$  und  $r = 2 \cdot 2$  (zwei Festlager) wegen  $2 \cdot 7 = 10 + 4$  die notwendige Bedingung (6.1) erfüllt. Da es außerdem unbeweglich ist, ist es statisch bestimmt.

Ein Fachwerk heißt *kinematisch bestimmt*, wenn die Lage aller Knotenpunkte festliegt. Bewegliche Fachwerke sind kinematisch unbestimmt und müssen ausgeschlossen werden. Die Abb. 6.2b und c zeigen solche „Ausnahmefachwerke“. Auch hier ist jeweils mit  $k = 6$ ,  $s = 9$  und  $r = 3$  die notwendige Bedingung (6.1) für statische Bestimmtheit erfüllt. Dennoch lassen sich die Stabkräfte nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen: Gleichung (6.1) ist nicht hinreichend für statische Bestimmtheit. Die Stäbe 7 und 8 des Fachwerks nach Abb. 6.2b lassen sich um einen endlichen Winkel  $\varphi$  drehen (Gelenkviereck, Beweglichkeit im Großen), während sich die Stäbe 5 und 8 des Fachwerks in Abb. 6.2c um einen infinitesimalen Winkel  $d\varphi$  drehen können (Beweglichkeit im Kleinen).

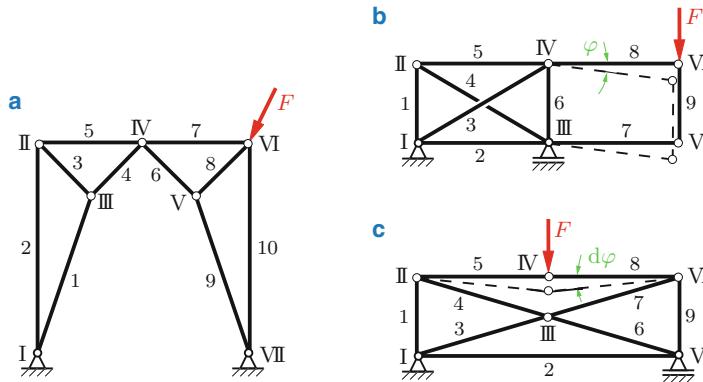


Abb. 6.2 Zur statischen Bestimmtheit

## 6.2 Aufbau eines Fachwerks

Im folgenden werden drei Möglichkeiten zum Aufbau von statisch und kinematisch bestimmten ebenen Fachwerken gegeben.

*1. Bildungsgesetz:* An einem Einzelstab werden zwei weitere Stäbe so angefügt, dass ein Dreieck entsteht. Dann schließt man an zwei beliebigen Knoten des Dreiecks je einen weiteren Stab an und verbindet diese Stäbe zu einem neuen Knoten. Dieses Verfahren ist in Abb. 6.3 illustriert und lässt sich beliebig fortsetzen.

Ein in dieser Form aufgebautes Fachwerk heißt *einfaches Fachwerk*. Die Lage der Knotenpunkte liegt eindeutig fest. Dabei muss allerdings vermieden werden, zwei Stäbe so anzuschließen, dass sie auf einer Geraden liegen (gestrichelte Stäbe in Abb. 6.3: Ausnahmefachwerk).

Für die Fachwerke in Abb. 6.3 gilt die Beziehung

$$2k = s + 3. \quad (6.3)$$

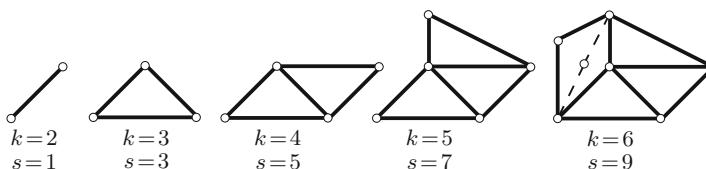
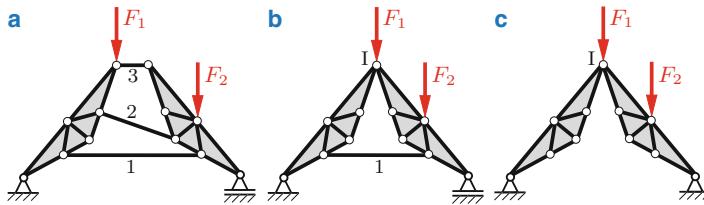


Abb. 6.3 Einfaches Fachwerk



**Abb. 6.4** Bildungsgesetz 2

Bei jedem weiteren Schritt erhöht sich die Anzahl der Stäbe um zwei und die Anzahl der Knoten um eins, so dass (6.3) gültig bleibt. Bei einem statisch bestimmt gelagerten einfachen Fachwerk treten  $r = 3$  Lagerreaktionen auf. Durch Vergleich mit (6.3) erkennt man, dass in diesem Fall die Bedingung (6.1) erfüllt ist.

**2. Bildungsgesetz:** Zwei nach dem ersten Bildungsgesetz konstruierte Fachwerke werden durch drei Stäbe verbunden (Abb. 6.4a), die nicht alle parallel und nicht zentral sein dürfen. An die Stelle von zwei Stäben kann auch ein beiden Teifachwerken gemeinsamer Knoten treten. So sind in Abb. 6.4b die beiden Stäbe 2 und 3 aus Abb. 6.4a durch den Knoten I ersetzt worden.

Verbinden wir zwei einfache Fachwerke *nur* in einem einzigen Knoten, so erhalten wir ein bewegliches Tragwerk. Die kinematische und die statische Bestimmtheit müssen dann durch eine zusätzliche Lagerung erzeugt werden. In Abb. 6.4c sind die beiden einfachen Teifachwerke nur im Knoten I zusammengeschlossen, d. h. der Stab 1 in Abb. 6.4b ist entfernt worden. Damit das so entstandene Fachwerk nicht beweglich ist, wird das einwertige Lager aus Abb. 6.4b jetzt durch ein zweiwertiges Lager ersetzt. Das Fachwerk ist dann ein Dreigelenkbogen.

Wie man durch Abzählen leicht nachprüfen kann, ist in allen Fällen nach Abb. 6.4 die Bedingung (6.1) für statische Bestimmtheit erfüllt.

**3. Bildungsgesetz:** Entfernen wir einen Stab aus einem Fachwerk, das nach dem ersten oder dem zweiten Bildungsgesetz aufgebaut ist, so wird es beweglich. Wir müssen daher einen neuen Stab an einer anderen Stelle des Fachwerks so einfügen, dass es wieder starr wird. Da sich dann weder die Anzahl der Stäbe noch die Anzahl der Knoten ändert, ist die Bedingung (6.1) auch für das neue Fachwerk erfüllt.

Ein Beispiel ist in Abb. 6.5 dargestellt. Entfernen wir aus dem einfachen Fachwerk in Abb. 6.5a den Stab 1, so wird das Fachwerk beweglich. Durch Einfügen

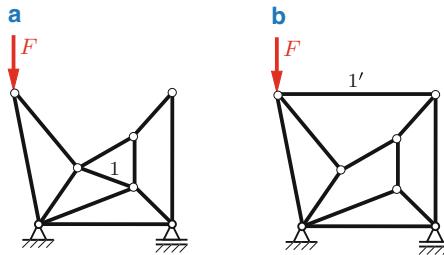


Abb. 6.5 Bildungsgesetz 3

des neuen Stabes  $1'$  erhalten wir dann das statisch und kinematisch bestimmte nichteinfache Fachwerk nach Abb. 6.5b.

## 6.3 Ermittlung der Stabkräfte

### 6.3.1 Knotenpunktverfahren

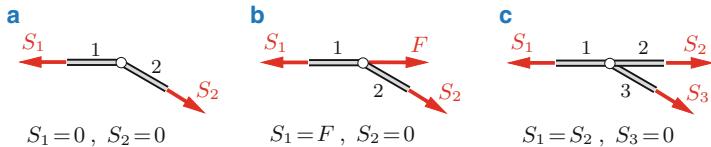
Ein Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte besteht darin, sämtliche Knoten freizuschneiden und an jedem Knoten die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Diese Methode heißt *Knotenpunktverfahren*. Es ist ein systematisches Verfahren, das bei statisch und kinematisch bestimmten Fachwerken immer zum Ziel führt.

Bei der praktischen Durchführung ist es zweckmäßig, zuerst nach Stäben mit der Stabkraft Null zu suchen. Wir nennen solche Stäbe *Nullstäbe*. Wenn Nullstäbe vor Beginn der Rechnung erkannt werden, reduziert sich die Anzahl der Unbekannten.

Die folgenden Regeln helfen beim Auffinden der Nullstäbe:

1. Sind an einem *unbelasteten* Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen („unbelasteter Zweischlag“), so sind beide Stäbe Nullstäbe (Abb. 6.6a).
2. Sind an einem *belasteten* Knoten zwei Stäbe angeschlossen und greift die äußere Kraft in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab (Abb. 6.6b).
3. Sind an einem *unbelasteten* Knoten drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab (Abb. 6.6c).

Diese drei Regeln folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten.



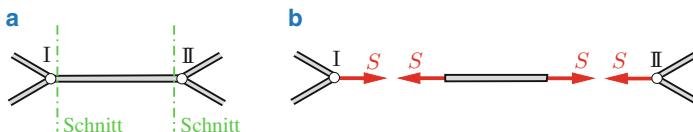
**Abb. 6.6** Ermittlung von Nullstäben

Führen wir nach Abb. 6.7a an den Knoten I und II Schnitte durch einen Stab, so müssen wir an den freigeschnittenen Stabenden jeweils die Stabkraft  $S$  anbringen (Abb. 6.7b). Wegen actio = reactio wirkt die Kraft  $S$  auch auf die Knoten I und II. Entsprechend der Vereinbarung, dass Zugkräfte positiv sind, wirken positive Stabkräfte von den Knoten weg (d. h. sie ziehen an den Knoten); negative Stabkräfte zeigen Druck an und wirken auf die Knoten zu.

Es ist nicht immer möglich anschaulich festzustellen, ob ein Stab ein Zug- oder ein Druckstab ist. Aus diesem Grund werden wir zunächst immer annehmen, dass alle Stäbe eines Fachwerkes unter Zug stehen. Ergibt dann die Berechnung eine negative Kraft für einen Stab, dann steht dieser in Wirklichkeit unter Druck.

Die  $s+r$  unbekannten Stab- und Lagerkräfte lassen sich beim ebenen Fachwerk aus den  $2k$  Gleichgewichtsbedingungen für die  $k$  Knoten bestimmen. Zusätzlich kann man noch die drei Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem verwenden. Da diese aber nicht unabhängig von den Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten sind, stellen sie nur eine Probe für die Richtigkeit der Analyse dar. Bei der praktischen Lösung von Aufgaben kann es zweckmäßig sein, zunächst die Lagerreaktionen aus dem Gleichgewicht für das Gesamtsystem zu bestimmen. In diesem Fall liefern drei andere Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten eine Probe für die Analyse.

Angemerkt sei, dass das Knotenpunktverfahren sowohl bei ebenen als auch bei räumlichen Fachwerken anwendbar ist. Bei Raumfachwerken hat man dann an jedem Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen.



**Abb. 6.7** actio = reactio

► **Beispiel 6.1** Das Fachwerk nach Abb. 6.8a wird durch die Kraft  $F$  belastet. Gesucht sind die Lager- und die Stabkräfte.

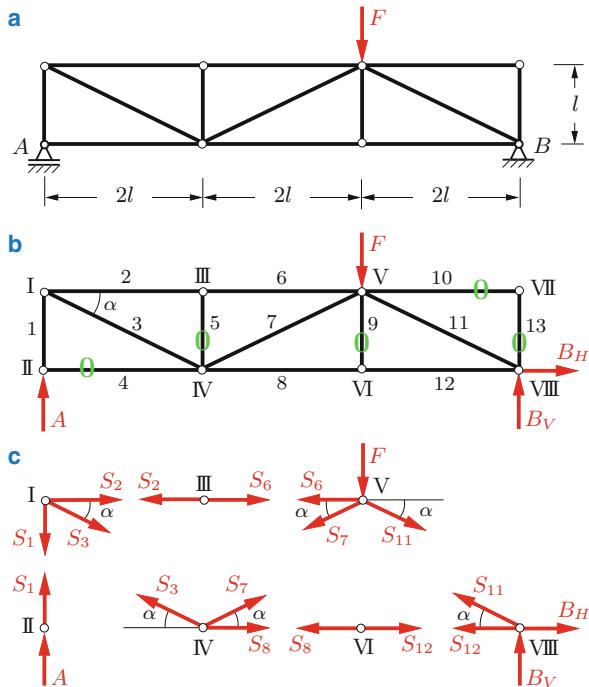


Abb. 6.8 a) Fachwerk, b, c) Freikörperbilder

**Lösung** Das Fachwerk ist nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut. Da drei Lagerkräfte auftreten, ist das Fachwerk nach Abschn. 6.2 statisch und kinematisch bestimmt.

Im Freikörperbild (Abb. 6.8b) numerieren wir Stäbe und Knoten. Nullstäbe kennzeichnen wir durch Nullen: Stab 4 (nach Regel 2), die Stäbe 5 und 9 (nach Regel 3) und die Stäbe 10 und 13 (nach Regel 1).

Um die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren, ist es zweckmäßig, die Lagerkräfte vorab zu berechnen. Aus dem Kräfte- und dem Momentengleichgewicht am

Gesamtsystem folgen

$$\rightarrow : \quad \underline{\underline{B_H = 0}},$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{A}: \quad -4lF + 6lB_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B_V = \frac{2}{3}F}},$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{B}: \quad -6lA + 2lF = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A = \frac{1}{3}F}}.$$

Abb. 6.8c zeigt die freigeschnittenen Knoten, wobei alle Stabkräfte als Zugkräfte angenommen werden. Die bereits erkannten Nullstäbe werden weggelassen. Aus diesem Grund braucht Knoten VII nicht mehr betrachtet zu werden. Kräftegleichgewicht an den Knoten liefert:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \rightarrow : \quad S_2 + S_3 \cos \alpha = 0, \\ & \downarrow : \quad S_1 + S_3 \sin \alpha = 0, \\ \text{II)} \quad & \uparrow : \quad S_1 + A = 0, \\ \text{III)} \quad & \rightarrow : \quad S_6 - S_2 = 0, \\ \text{IV)} \quad & \rightarrow : \quad S_8 + S_7 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha = 0, \\ & \uparrow : \quad S_7 \sin \alpha + S_3 \sin \alpha = 0, \\ \text{V)} \quad & \rightarrow : \quad S_{11} \cos \alpha - S_6 - S_7 \cos \alpha = 0, \\ & \downarrow : \quad S_7 \sin \alpha + S_{11} \sin \alpha + F = 0, \\ \text{VI)} \quad & \rightarrow : \quad S_{12} - S_8 = 0, \\ \text{VIII)} \quad & \rightarrow : \quad B_H - S_{11} \cos \alpha - S_{12} = 0, \\ & \uparrow : \quad B_V + S_{11} \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Dies sind elf Gleichungen zur Berechnung der acht noch unbekannten Stabkräfte und der drei Lagerkräfte. Da die Lagerkräfte aber bereits durch Gleichgewichtsüberlegungen am Gesamtsystem bestimmt wurden, vereinfacht sich die Auflösung des Gleichungssystems, und drei Gleichungen können als Probe verwendet werden. Man erhält mit  $\sin \alpha = l/\sqrt{5l^2} = 1/\sqrt{5}$ ,  $\cos \alpha = 2l/\sqrt{5l^2} = 2/\sqrt{5}$ :

$$\underline{\underline{S_1 = -\frac{1}{3}F}}, \quad \underline{\underline{S_2 = S_6 = -\frac{2}{3}F}}, \quad \underline{\underline{S_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}F}},$$

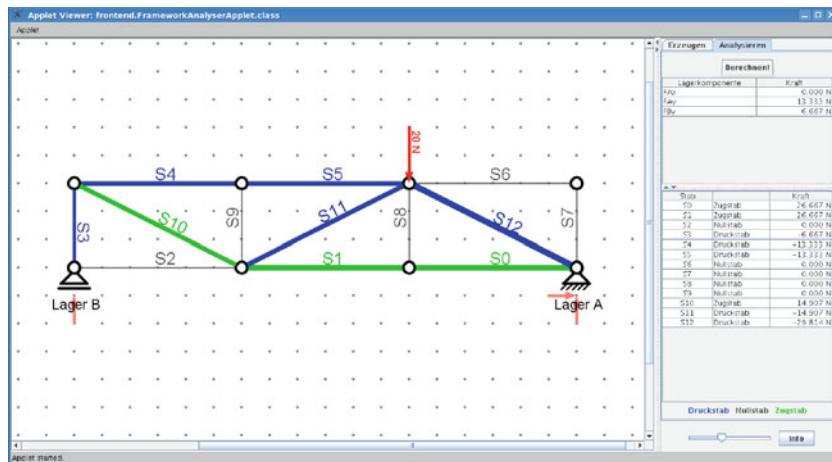
$$\underline{\underline{S_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3}F}}, \quad \underline{\underline{S_8 = S_{12} = \frac{4}{3}F}}, \quad \underline{\underline{S_{11} = -\frac{2}{3}\sqrt{5}F}}.$$

Es ist zweckmäßig, die Stabkräfte einschließlich der Vorzeichen in einer Stabkrafttabelle zusammenzustellen, wobei wir auf den gemeinsamen Faktor  $F$  beziehen. Die Minuszeichen bei den Stabkräften  $S_1, S_2, S_6, S_7$  und  $S_{11}$  zeigen an, dass diese Stäbe Druckstäbe sind.

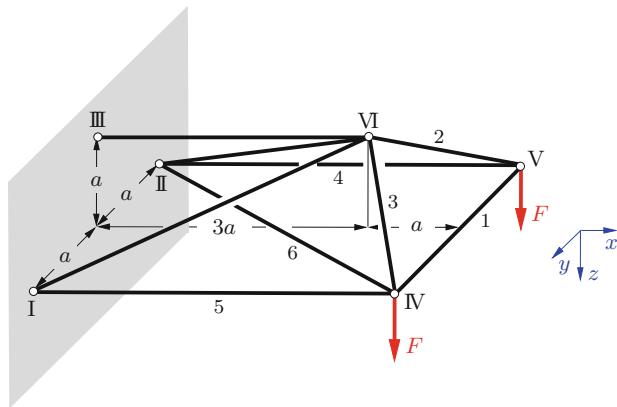
### Stabkrafttabelle

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{S_i}{F}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}\sqrt{5}$	$\frac{4}{3}$	0

Dieses Beispiel – und viele weitere Beispiele zur Ermittlung von Stabkräften in ebenen Fachwerken – können Sie auch mit dem TM-Tool „Fachwerksanalyse“ bearbeiten (siehe Screenshot). Es steht Ihnen zusammen mit einer Reihe weiterer TM-Tools frei zur Verfügung.



- **Beispiel 6.2** Das Raumfachwerk nach Abb. 6.9 wird in den Knoten IV und V jeweils durch eine Kraft  $F$  belastet. Es sind die Kräfte in den Stäben 1 bis 6 zu berechnen.



**Abb. 6.9** Räumliches Fachwerk

**Lösung** Wir schneiden die Knoten V und IV frei und bringen die Stabkräfte  $S_1 \dots S_6$  als Zugkräfte an. Die Gleichgewichtsbedingungen für diese Knoten lauten dann zunächst in Vektorform

$$\begin{aligned} \text{V: } & S_1 e_y + S_2 e_{V/VI} - S_4 e_x + F e_z = \mathbf{0}, \\ \text{IV: } & -S_1 e_y + S_3 e_{IV/VI} - S_5 e_x + S_6 e_{IV/II} + F e_z = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dabei lassen sich die zunächst noch unbekannten Einheitsvektoren aus den Verbindungsvektoren zwischen den Knoten ermitteln. So erhält man zum Beispiel für  $e_{V/VI}$

$$e_{V/VI} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt für die weiteren Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} e_{IV/VI} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & e_{IV/II} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_y &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_z &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Komponenten

$$\begin{array}{ll} \text{V: } -S_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - S_4 = 0, & \text{IV: } -S_3 \frac{1}{\sqrt{3}} - S_5 - S_6 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0, \\ S_1 + S_2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 0, & -S_1 - S_3 \frac{1}{\sqrt{3}} - S_6 \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \\ -S_2 \frac{1}{\sqrt{3}} + F = 0, & -S_3 \frac{1}{\sqrt{3}} + F = 0. \end{array}$$

Auflösen liefert der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} \underline{\underline{S_2 = \sqrt{3} F}}, & \underline{\underline{S_1 = -F}}, & \underline{\underline{S_4 = -F}}, \\ \underline{\underline{S_3 = \sqrt{3} F}}, & \underline{\underline{S_6 = 0}}, & \underline{\underline{S_5 = -F}}. \end{array} \quad \blacksquare$$

### 6.3.2 Cremona-Plan

Die Ermittlung der Stabkräfte kann auch zeichnerisch erfolgen. Dabei gehen wir davon aus, dass in einem ersten Schritt die Lagerkräfte bereits bestimmt wurden. Wir wollen das Vorgehen an Hand des Fachwerks in Abb. 6.10a erläutern.

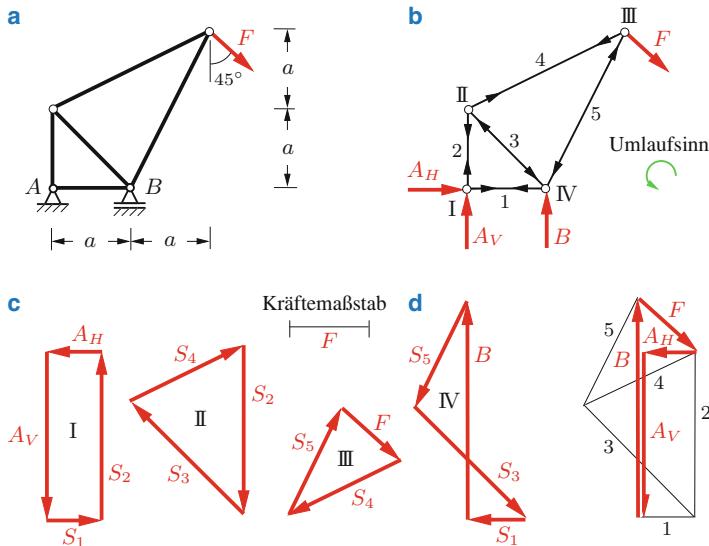
Aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem (Abb. 6.10b) finden wir zunächst

$$A_H = -\frac{1}{2}\sqrt{2} F, \quad A_V = -\frac{3}{2}\sqrt{2} F, \quad B = 2\sqrt{2} F.$$

Nach dem Numerieren der Stäbe und der Knoten denken wir uns zur Ermittlung der Stabkräfte wieder alle Knoten freigeschnitten. Bei der zeichnerischen Lösung verlangt das Kräftegleichgewicht an den Knoten jeweils ein geschlossenes Krafteck (vgl. Abschn. 2.3).

Wir beginnen am Knoten I. Um das Krafteck für diesen Knoten zu konstruieren, zeichnen wir zuerst die bereits berechneten Kraftkomponenten  $A_H$  und  $A_V$  maßstäblich nach ihrer Größe und in ihrem wirklichen Richtungssinn (Abb. 6.10c). Durch die Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$ , deren Richtungen bekannt sind, wird das Krafteck geschlossen.

Damit liegen die Richtungssinne von  $S_1$  und  $S_2$  am Knoten I fest. Wir kennzeichnen sie in Abb. 6.10b durch Pfeile. Jeweils gleichgroße Gegenkräfte wirken wegen actio = reactio an den gegenüberliegenden Knoten II und IV. Sie werden durch Gegenpfeile markiert.



**Abb. 6.10** Cremona-Plan

Entsprechend finden wir bei nun bekanntem  $S_2$  durch das geschlossene Krafteck am Knoten II die Stabkräfte  $S_3$  und  $S_4$ . Gleichgewicht am Knoten III liefert schließlich die Kraft  $S_5$ . Wir tragen die Kraftrichtungen von  $S_3$  bis  $S_5$  an den Knoten ebenfalls in das Fachwerk ein. Das Krafteck am Knoten IV dient abschließend als Kontrolle.

In Abb. 6.10c taucht jede Stabkraft in zwei Kraftecken auf. Man kann das Vorgehen systematisieren, indem man alle Kraftpläne so aneinander fügt, dass jede Stabkraft nur noch einmal gezeichnet werden muss. Der so entstehende Kräfteplan wird nach Luigi Cremona (1830–1903) benannt.

Folgende Schritte sind bei der Konstruktion eines Cremona-Plans durchzuführen:

1. Zeichnen des Freikörperbildes und Berechnung der Lagerkräfte.
2. Numerieren der Stäbe.
3. Ermittlung etwa vorhandener Nullstäbe. Kennzeichnen dieser Stäbe durch eine Null im Freikörperbild.
4. Festlegung eines Kräftemaßstabs und eines Umlaufsinns.

5. Zeichnen des geschlossenen Kraftecks aus den eingeprägten Kräften und den Lagerreaktionen. Dabei Kräfte in der Reihenfolge aneinanderfügen, wie sie beim Umlauf um das Fachwerk im gewählten Umlaufsinn auftreten.
6. Beginnend an einem Knoten mit höchstens *zwei* unbekannten Stabkräften für jeden Knoten das geschlossene Kräftepolygon zeichnen. Kräfte dabei ebenfalls in der Reihenfolge antragen, die durch den Umlaufsinn gegeben ist.
7. Da jede Stabkraft zweimal (mit entgegengesetzter Orientierung) auftritt, keine Pfeile in das Kräftepolygon einzeichnen (die Stabkraft im Polygon nur durch die entsprechende Stabnummer kennzeichnen). Einzeichnen der Pfeile und der Gegenpfeile an den Knoten.
8. Letzte Kraftecke als Kontrolle verwenden.
9. Angabe aller Stabkräfte mit Vorzeichen in einer Tabelle.

Um den Cremona-Plan für das Fachwerk in Abb. 6.10a zu konstruieren, wählen wir den Umlaufsinn entgegen dem Uhrzeiger. Anschließend zeichnen wir nach Punkt 5 das geschlossene Krafteck der äußeren Kräfte in der Reihenfolge  $A_H, A_V, B, F$  (Abb. 6.10d).

Die Ermittlung der Stabkräfte beginnen wir am Knoten I. Das Krafteck wird so konstruiert, dass es sich in der Reihenfolge  $A_H, A_V, S_1$  und  $S_2$  (Umlaufsinn!) schließt. Die Kraftrichtungen werden ins Freikörperbild eingetragen.

Anschließend gehen wir zum Knoten II weiter. Von den dort angreifenden Kräften  $S_2, S_3$  und  $S_4$  tritt  $S_2$  bereits im Cremona-Plan auf. Die Richtung von  $S_2$  folgt aus dem Pfeil am Knoten II. Das Krafteck wird nun mit  $S_3$  und  $S_4$  geschlossen, und die Kraftrichtungen werden wieder in das Fachwerk eingetragen. Am Knoten III sind schließlich  $F$  und  $S_4$  bereits im Cremona-Plan enthalten, so dass das Krafteck nur mit  $S_5$  geschlossen werden muss (Kontrolle: die Richtung von  $S_5$  muss mit der Richtung von Stab 5 übereinstimmen). Das Krafteck für den Knoten IV dient als weitere Kontrolle.

Aus dem Cremona-Plan können wir die Beträge der Stabkräfte im Rahmen der Zeichengenauigkeit ablesen; die Vorzeichen folgen aus den Pfeilrichtungen im Freikörperbild:

$i$	1	2	3	4	5
$S_i/F$	0,7	2,1	-2,0	1,6	-1,6

Der Cremona-Plan lässt sich in der geschilderten Form nur für *einfache* Fachwerke zeichnen, wobei äußere Kräfte nur an Außenknoten angreifen dürfen. Die Kräfte sind dabei stets außerhalb des Fachwerks zu zeichnen (Abb. 6.11a) und *nicht* innerhalb (Abb. 6.11b).

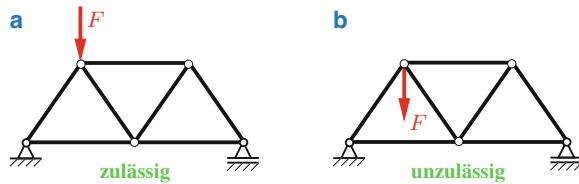


Abb. 6.11 Zum Cremona-Plan

► **Beispiel 6.3** Das Fachwerk nach Abb. 6.12a wird durch die beiden Kräfte  $F_1 = 2F$  und  $F_2 = F$  belastet.

Gesucht sind die Stabkräfte.

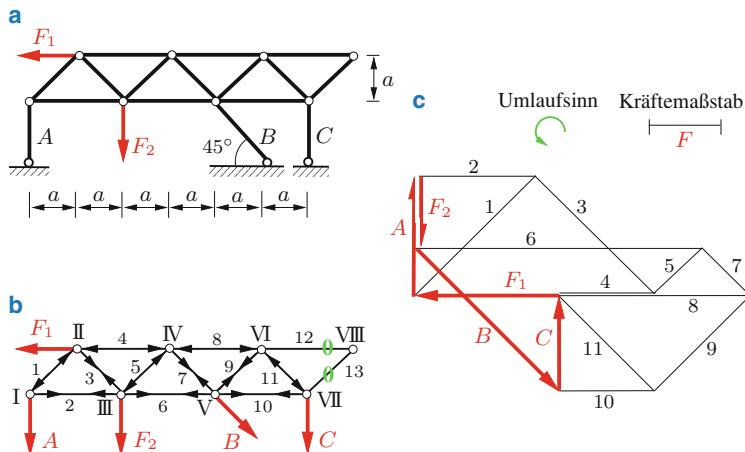


Abb. 6.12 Beispiel: Cremona-Plan

**Lösung** Durch Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen auf das Gesamtsystem (Abb. 6.12b) berechnen wir zuerst die Lagerkräfte:

$$\stackrel{\curvearrowleft}{\text{I}}: \quad a F_1 - 2a F_2 - 2\sqrt{2}a B - 6a C = 0,$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{\text{VII}}: \quad a F_1 + 6a A + 4a F_2 + \sqrt{2}a B = 0,$$

$$\rightarrow: \quad -F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0.$$

Auflösen liefert

$$A = -\frac{5}{3} F, \quad B = 2\sqrt{2} F, \quad C = -\frac{4}{3} F.$$

Die Pendelstützen  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind im Freikörperbild als Zugstäbe angenommen worden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Stäbe  $A$  und  $C$  in Wirklichkeit auf Druck beansprucht werden.

Wir numerieren die Stäbe und die Knoten und stellen fest, dass die Stäbe 12 und 13 Nullstäbe sind (vgl. Abschn. 6.3.1, Regel 1). Sie werden im Freikörperbild durch eine Null gekennzeichnet. Nach Wahl des Umlaufsinns (entgegen dem Uhrzeiger) und des Kräftemaßstabs zeichnen wir zunächst das geschlossene Krafteck der äußeren Kräfte in der Reihenfolge  $A, F_2, B, C, F_1$  (Abb. 6.12c). Dabei ist zu beachten, dass die Kräfte in den Pendelstützen jetzt im wirklichen Richtungssinn zu zeichnen sind.

Die Ermittlung der Stabkräfte beginnen wir am Knoten I: die bekannte Lagerkraft  $A$  und die unbekannten Stabkräfte  $S_2$  und  $S_1$  müssen in dieser Reihenfolge ein geschlossenes Krafteck bilden (Abb. 6.12c). Die entsprechenden Kraftrichtungen (Stab 1: Druck, Stab 2: Zug) werden in das Freikörperbild eingetragen.

Mit der nun bekannten Kraft  $S_1$  können wir am Knoten II in gleicher Weise durch das geschlossene Krafteck  $F_1, S_1, S_3, S_4$  die Stabkräfte  $S_3$  und  $S_4$  bestimmen. Durch Weiterschreiten zu den Knoten III bis VI lässt sich der Cremona-Plan vollständig konstruieren. Das Krafteck für den Knoten VII dient als Kontrolle.

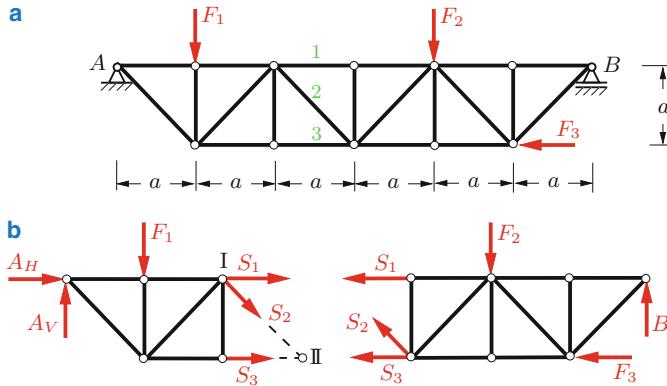
Aus dem Kräfteplan entnehmen wir die Beträge der Stabkräfte; die Vorzeichen folgen aus den Pfeilrichtungen im Freikörperbild:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$S_i/F$	-2,4	1,7	2,4	-1,3	-0,9	4,0	0,9	-2,7	1,9	1,3	-1,9	0	0



### 6.3.3 Rittersches Schnittverfahren

Sind nur *einzelne* Stabkräfte eines Fachwerks zu bestimmen, so ist es oft vorteilhaft, das *Schnittverfahren* nach August Ritter (1826–1908) anzuwenden. Bei diesem Verfahren zerlegen wir das Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Teile. Dabei müssen *drei* Stäbe geschnitten werden, die nicht alle zum gleichen Knoten gehören dürfen, oder der Schnitt ist durch *einen* Stab und *ein* Gelenk zu führen.



**Abb. 6.13** Rittersches Schnittverfahren

Zur Erläuterung der Methode betrachten wir das Fachwerk nach Abb. 6.13a, bei dem die Kräfte in den Stäben 1 bis 3 gesucht sind. Nach Ermittlung der Lagerreaktionen denken wir uns das Fachwerk mit einem Schnitt durch die drei Stäbe 1 bis 3 in zwei Teile zerlegt. An den freigeschnittenen Stäben werden jeweils die entsprechenden Stabkräfte eingezeichnet (Abb. 6.13b).

Sowohl der rechte als auch der linke Teilkörper müssen für sich im Gleichgewicht sein. Wir können daher durch Anwenden der drei Gleichgewichtsbedingungen auf einen der beiden Teilkörper die drei unbekannten Stabkräfte berechnen. Dabei ist es sinnvoll, möglichst Momentengleichungen um die Schnittpunkte von je zwei Stabkräften zu verwenden. Dann gehen diese Kräfte nicht in die entsprechende Momentengleichung ein, und wir erhalten damit jeweils *eine* Gleichung für *eine* Stabkraft. Gleichgewicht am linken Teilkörper liefert auf diese Weise:

$$\text{I: } -2a A_V + a F_1 + a S_3 = 0 \rightarrow S_3 = 2A_V - F_1,$$

$$\text{II: } -3a A_V - a A_H + 2a F_1 - a S_1 = 0 \rightarrow S_1 = 2F_1 - 3A_V - A_H,$$

$$\uparrow: \quad A_V - F_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} S_2 = 0 \rightarrow S_2 = \sqrt{2}(A_V - F_1).$$

Mit den bereits ermittelten Lagerkräften sind dann die Stabkräfte bekannt.

Das Schnittverfahren lässt sich oft auch anwenden, ohne dass die Lagerkräfte vorher berechnet werden müssen. So erhält man zum Beispiel die Stabkräfte \$S\_1\$ bis \$S\_3\$ des Fachwerks in Abb. 6.14a direkt nach Schneiden der entsprechenden Stäbe aus den Gleichgewichtsbedingungen für das rechte Teilsystem (Abb. 6.14b).

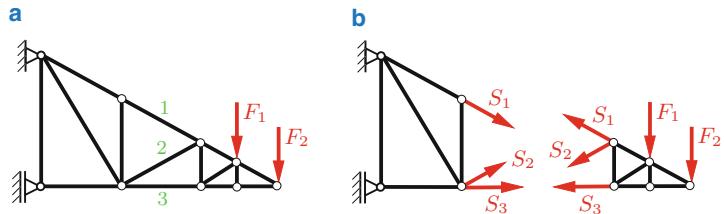


Abb. 6.14 Zum Ritterschen Schnittverfahren

Bei räumlichen Fachwerken kann das Schnittverfahren sinngemäß angewendet werden. Da für den starren Körper dann sechs Gleichgewichtsbedingungen vorliegen, muss man das Fachwerk durch einen Schnitt trennen, der durch sechs Stäbe oder durch drei Stäbe und einen Knoten geht.

► **Beispiel 6.4** Das Fachwerk nach Abb. 6.15a wird durch zwei Kräfte  $F_1 = 2F$  und  $F_2 = F$  belastet.

Wie groß ist die Kraft im Stab 4?

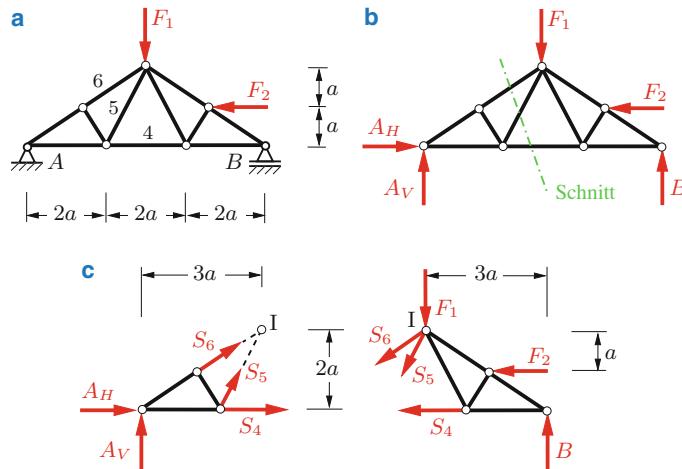


Abb. 6.15 a) Fachwerk, b) Schnitt, c) Freikörperbild

**Lösung** Zur Ermittlung der Lagerkräfte zeichnen wir das Freikörperbild (Abb. 6.15b) und wenden die Gleichgewichtsbedingungen an:

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{A}}: \quad -3a F_1 + a F_2 + 6a B = 0 &\rightarrow B = \frac{3F_1 - F_2}{6} = \frac{5}{6} F, \\ \textcircled{\text{B}}: \quad -6a A_V + 3a F_1 + a F_2 = 0 &\rightarrow A_V = \frac{3F_1 + F_2}{6} = \frac{7}{6} F, \\ \rightarrow: \quad A_H - F_2 = 0 &\rightarrow A_H = F_2 = F.\end{aligned}$$

Trennt man das Fachwerk mit einem Schnitt durch die Stäbe 4 bis 6 (Abb. 6.15c), so liefert das Momentengleichgewicht am linken Teil bezüglich I die gesuchte Kraft  $S_4$ :

$$\textcircled{\text{I}}: \quad 2a S_4 + 2a A_H - 3a A_V = 0 \rightarrow \underline{\underline{S_4}} = \frac{1}{2} (3A_V - 2A_H) = \underline{\underline{\frac{3}{4} F}}.$$

Zur Probe wenden wir die Momentenbedingung am rechten Teil bezüglich I an:

$$\textcircled{\text{I}}: \quad -2a S_4 + 3a B - a F_2 = 0 \rightarrow S_4 = \frac{1}{2} (3B - F_2) = \frac{3}{4} F. \quad \blacksquare$$

## 6.4 Zusammenfassung

- Ein Fachwerk besteht aus geraden Stäben, die in Gelenken miteinander verbunden sind.
- Ein Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn die Stab- und Lagerkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Zahl der unbekannten Lager- und Stabkräfte gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist und das Fachwerk unbeweglich ist.
- Ein Fachwerk ist kinematisch bestimmt, wenn es unbeweglich ist. Ein Fachwerk, das endliche oder infinitesimale Bewegungen ausführen kann, ist kinematisch unbestimmt.
- Die Stab- und Lagerkräfte können mit dem Knotenpunktverfahren ermittelt werden:
  - Freischneiden aller Knoten.
  - Freikörperbilder skizzieren; alle eingeprägten Kräfte sowie Stab- und Lagerkräfte einzeichnen. Dabei Vorzeichenkonvention für Stabkräfte beachten: alle Stabkräfte als Zugkräfte ansetzen.
  - Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an allen Knoten. Im ebenen Fall sind dies für jeden Knoten 2 Gleichungen, im räumlichen Fall für jeden Knoten 3 Gleichungen.
  - Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten.
  - Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist. Dann ist das Fachwerk statisch und kinematisch bestimmt.
- Die Stabkräfte können bei ebenen Fachwerken auch grafisch mit Hilfe des Cremona-Plans ermittelt werden.
- Sind nur einzelne Stabkräfte gesucht, so ist es meist zweckmäßig, das Rittersche Schnittverfahren anzuwenden.

---

# Balken, Rahmen, Bogen

7

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

7.1	Schnittgrößen . . . . .	169
7.2	Schnittgrößen am geraden Balken . . . . .	173
7.2.1	Balken unter Einzellasten . . . . .	173
7.2.2	Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen . . . . .	181
7.2.3	Integration und Randbedingungen . . . . .	183
7.2.4	Übergangsbedingungen bei mehreren Feldern . . . . .	187
7.2.5	Föppl-Symbol . . . . .	193
7.2.6	Punktweise Ermittlung der Schnittgrößen . . . . .	197
7.3	Schnittgrößen bei Rahmen und Bogen . . . . .	201
7.4	Schnittgrößen bei räumlichen Tragwerken . . . . .	207
7.5	Zusammenfassung . . . . .	211

- **Lernziele** Balkentragwerke gehören zu den wichtigsten Tragelementen im Ingenieurwesen. Wir wollen kennenlernen, wie man durch Schnitte die inneren Kräfte – die Schnittgrößen – im Balken freilegt und einer Berechnung zugänglich macht. Als Schnittgrößen werden die Normalkraft, die Querkraft und das Biegemoment eingeführt. Die Studierenden sollen befähigt werden, diese Größen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen. Sie sollen auch in der Lage sein, die differentiellen Beziehungen zwischen äußerer Belastung und Schnittgrößen sachgerecht anzuwenden.

## 7.1 Schnittgrößen

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit den inneren Kräften von Balkentragwerken befassen. Diese inneren Kräfte sind ein Maß für die Materialbeanspruchung im Balken. Ihre Kenntnis ist wichtig, wenn man die Tragfähigkeit von Tragwerken zu untersuchen oder Querschnitte zu dimensionieren hat (vgl. Band 2). Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf ebene Tragwerke, die durch Kräftegruppen in ihrer Ebene belastet sind (Abb. 7.1a).

Nach Abschn. 1.4 werden die inneren Kräfte durch Schneiden des Balkens freigelegt und somit der Berechnung zugänglich gemacht. Wir denken uns deshalb an der zu untersuchenden Stelle einen Schnitt senkrecht zur Balkenachse. An der Schnittstelle wirken dann die über die Querschnittsfläche verteilten inneren Kräfte  $p$  (Abb. 7.1b). Wie sie verteilt sind, werden wir in Band 2, Kapitel 4, untersuchen. Unabhängig von der Verteilung können wir dieses System der Flächenkräfte  $p$  nach Abschn. 3.1.3 durch seine Resultierende  $R$  und das resultierende Moment  $M^{(S)}$  ersetzen. Als Bezugspunkt für die Reduktion wählen wir den Schwerpunkt  $S$  der Querschnittsfläche. Eine Begründung für diese spezielle Wahl kann erst später gegeben werden (vgl. Band 2). Es ist üblich, den hochgestellten Index  $S$  bei  $M^{(S)}$ , der den Bezugspunkt kennzeichnet, wegzulassen: an Stelle von  $M^{(S)}$  schreiben wir nur noch  $M$ . Die Resultierende  $R$  wird in ihre Komponenten  $N$  (normal zur Schnittebene) und  $Q$  (in der Schnittebene, senkrecht zur Balkenachse) zerlegt. Wir nennen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  die *Schnittgrößen* des Balkens; es heißen

$N$  die *Normalkraft*,  $Q$  die *Querkraft* und  $M$  das *Biegemoment*.

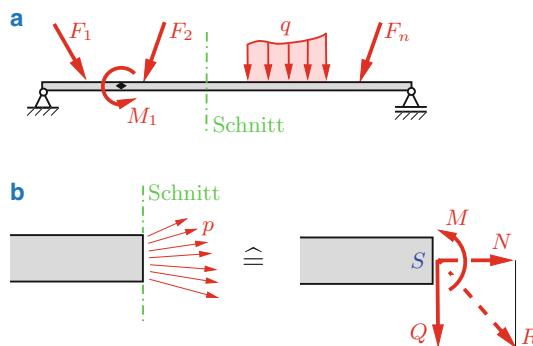
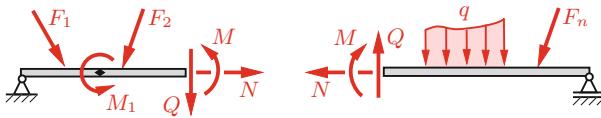


Abb. 7.1 Schnitt durch einen Balken

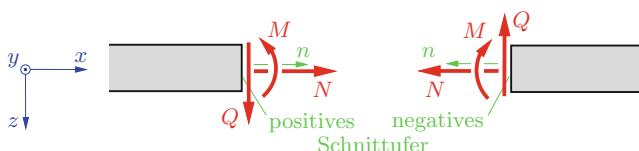


**Abb. 7.2** Schnittgrößen

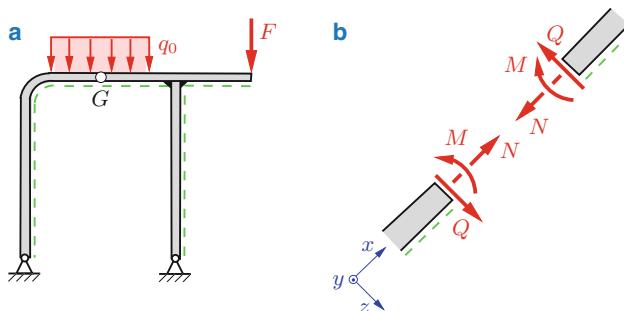
Nach dem Schnitt besteht der Balken aus zwei Teilen, an deren Schnittflächen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  angreifen. Wegen des Wechselwirkungsgesetzes sind die Schnittgrößen an beiden Teilen jeweils entgegengesetzt gerichtet (Abb. 7.2). Soll jeder Teilbalken auch nach dem Schnitt in Ruhe sein, dann müssen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  mit den am jeweiligen Teil wirkenden anderen Kräften eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Dementsprechend lassen sich die drei Schnittgrößen bei statisch bestimmten Systemen aus den drei Gleichgewichtsbedingungen für einen der beiden Teilbalken bestimmen.

Analog zu den Stabkräften hat sich bei den Schnittgrößen des Balkens eine Vorzeichenkonvention durchgesetzt. Zu ihrer Erklärung führen wir nach Abb. 7.3 ein Koordinatensystem ein, bei dem die  $x$ -Achse mit der Balkenlängsachse zusammenfällt und nach rechts zeigt, während  $z$  nach unten gerichtet ist; die  $y$ -Achse zeigt dann aus der Zeichenebene heraus (Rechtskoordinatensystem, vgl. Anhang A.1). Durch das Trennen des Balkens erhalten wir ein linkes und ein rechtes „Schnittufer“. Sie können durch je einen Normalenvektor  $n$  charakterisiert werden, der jeweils vom Körperinneren nach außen zeigt. Das Schnittufer, dessen Normalenvektor in positive (negative)  $x$ -Richtung zeigt, heißt positives (negatives) Schnittufer (Abb. 7.3). Die Vorzeichenfestlegung für die Schnittgrößen lautet nun:

*Positive Schnittgrößen zeigen am positiven (negativen) Schnittufer in positive (negative) Koordinatenrichtungen.*



**Abb. 7.3** Zur Vorzeichenkonvention



**Abb. 7.4** Gestrichelte Faser

Dabei ist das Biegemoment  $M$  als Momentenvektor in  $y$ -Richtung aufzufassen (positiv als Rechtsschraube). In Abb. 7.3 sind die Schnittgrößen mit ihren positiven Richtungen eingezeichnet. Bei der Berechnung der Schnittgrößen werden wir uns streng an diese Vorzeichenkonvention halten.

Bei horizontalen Balken gibt man oft nur die  $x$ -Koordinate an und verzichtet auf das Einzeichnen von  $y$  und  $z$ . Dabei wird stets angenommen, dass  $z$  nach unten zeigt. Es ist manchmal zweckmäßig, die  $x$ -Achse nicht wie in Abb. 7.3 nach rechts sondern nach links zeigen zu lassen;  $y$  ist in diesem Fall in die Zeichenebene hinein gerichtet. Dann ändert sich in Abb. 7.3 nur die positive Richtung von  $Q$ ; die positiven Richtungen von  $M$  und  $N$  bleiben ungeändert.

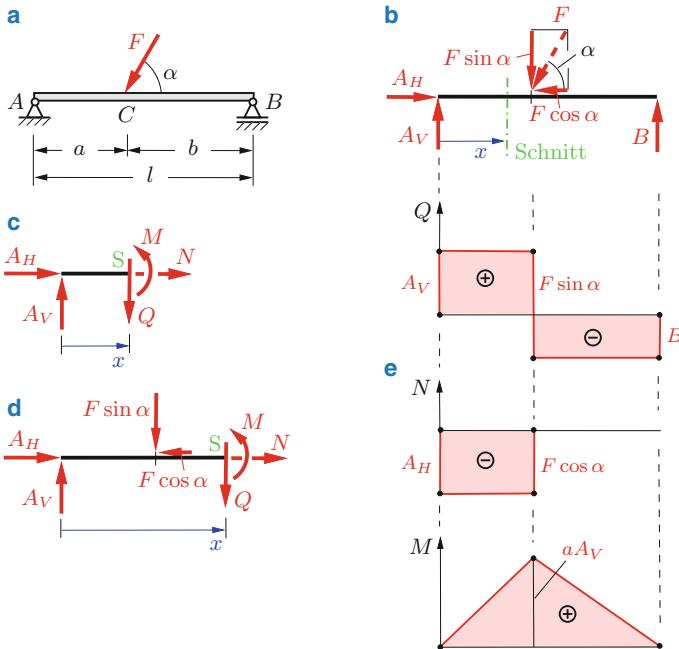
Bei Rahmen und Bögen wird nach Abb. 7.4a zur Festlegung der Vorzeichen der Schnittgrößen eine Seite jedes Tragwerksteils durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet („gestrichelte Faser“). Die gestrichelte Seite kann man dann als „Unterseite“ des entsprechenden Tragwerksteils auffassen und das Koordinatensystem entsprechend dem System beim horizontalen Balken einführen:  $x$ -Achse in Richtung der gestrichelten Faser,  $z$ -Achse zur gestrichelten Seite hin. Abb. 7.4b zeigt die Schnittgrößen mit ihren positiven Richtungen.

Am Beispiel des Balkens nach Abb. 7.5a wollen wir nun zeigen, wie man die Schnittgrößen bestimmen kann. Dazu ermitteln wir zunächst die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Balken (Abb. 7.5b). Mit  $F_V = F \sin \alpha$  und  $F_H = F \cos \alpha$  ergibt sich

$$\rightarrow : \quad A_H - F_H = 0 \quad \rightarrow \quad A_H = F_H ,$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{A} : \quad l B - a F_V = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{a}{l} F_V ,$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{B} : \quad -l A_V + b F_V = 0 \quad \rightarrow \quad A_V = \frac{b}{l} F_V .$$



**Abb. 7.5** Balken unter einer Einzelkraft

Nun wählen wir ein Koordinatensystem und schneiden den Balken an einer beliebigen Stelle  $x$  zwischen  $A$  und  $C$  ( $0 < x < a$ , Abb. 7.5b, c). An der Schnittstelle  $S$  bringen wir die Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  mit jeweils positivem Richtungssinn an und stellen die Gleichgewichtsbedingungen für den linken Balkenteil auf:

$$\rightarrow: \quad A_H + N = 0 \quad \rightarrow \quad N = -A_H = -F_H,$$

$$\uparrow: \quad A_V - Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q = A_V = \frac{b}{l} F_V,$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{S}: \quad x A_V - M = 0 \quad \rightarrow \quad M = x A_V = x \frac{b}{l} F_V.$$

Entsprechend erhalten wir bei einem Schnitt an einer beliebigen Stelle  $x$  im Bereich zwischen  $C$  und  $B$  ( $a < x < l$ , Abb. 7.5d):

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad A_H - F_H + N = 0 &\rightarrow N = F_H - A_H = 0, \\ \uparrow: \quad A_V - F_V - Q = 0 &\rightarrow Q = A_V - F_V = \frac{b-l}{l} F_V \\ &= -\frac{a}{l} F_V = -B, \\ \widehat{\rightarrow}: \quad x A_V - (x-a) F_V - M = 0 &\rightarrow M = x A_V - (x-a) F_V = \left(1 - \frac{x}{l}\right) a F_V. \end{aligned}$$

Auf die gleichen Ergebnisse wäre man durch Gleichgewichtsbetrachtungen am rechten Balkenteil gekommen.

Die Schnittgrößen sind in Abb. 7.5e grafisch dargestellt. An der Angriffsstelle  $C$  der Kraft  $F$  haben der Normalkraft- und der Querkraftverlauf jeweils einen Sprung, welcher gleich der Größe der Horizontalkomponente  $F_H$  bzw. der Vertikalkomponente  $F_V$  ist. Der Momentenverlauf hat einen Knick; das größte Biegemoment tritt an der Kraftangriffsstelle auf.

Das Beispiel zeigt, dass zur Ermittlung der Schnittgrößen der Balken an einer beliebigen Stelle  $x$  im Bereich zwischen Einzelkräften (eingeprägte Kräfte und Lagerreaktionen) geschnitten wird. Dabei müssen Schnitte für alle einzelnen Bereiche durchgeführt werden. Weil an den Kraftangriffsstellen Sprünge auftreten, sollten diese Stellen nicht für einen Schnitt gewählt werden.

## 7.2 Schnittgrößen am geraden Balken

Im folgenden konzentrieren wir uns auf Balken, bei denen die eingeprägte Belastung nur aus Momenten und aus Kräften (Streckenlasten bzw. Einzelkräften) senkrecht zur Längsachse besteht. Kraftkomponenten in Richtung der Längsachse bewirken Normalkräfte  $N$  wie beim Stab (Zug oder Druck), die wir mit den bereits bekannten Methoden bestimmen können.

### 7.2.1 Balken unter Einzellasten

Zur Bestimmung der Schnittgrößen  $Q$  und  $M$  wählen wir ein Koordinatensystem und schneiden den Balken an der zu untersuchenden Stelle. An der Schnittstelle werden  $Q$  und  $M$  mit jeweils positivem Richtungssinn eingezeichnet. Die

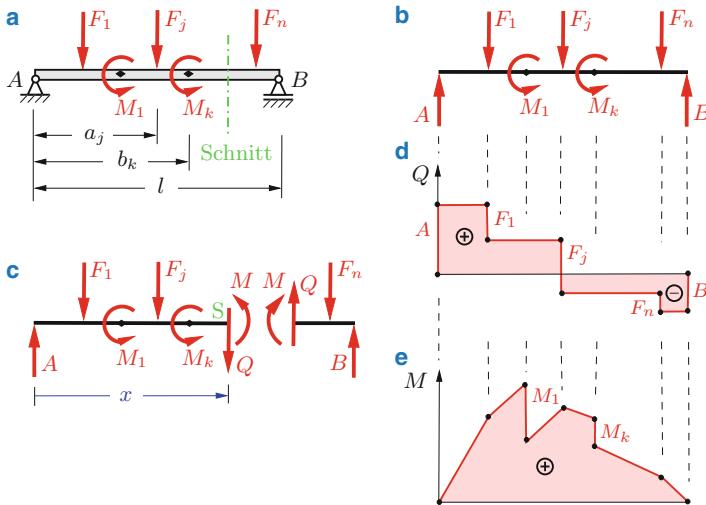


Abb. 7.6 Balken unter Einzelkräften und eingeprägten Momenten

Schnittgrößen folgen dann aus den Gleichgewichtsbedingungen an einem der beiden Teilbalken. Die Ergebnisse der Rechnung werden in der Regel in Diagrammen (Schnittkraftlinien) dargestellt.

Neben dieser elementaren Methode gibt es noch ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der Schnittgrößen, das auf dem Zusammenhang zwischen Last und Schnittgrößen beruht. Dieses Verfahren werden wir in den Abschn. 7.2.2–7.2.5 erläutern.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf Balken, an denen nur Einzelkräfte und eingeprägte Momente angreifen und betrachten als Beispiel einen beiderseits gelenkig gelagerten Balken nach Abb. 7.6a.

Die Lagerreaktionen folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Balken (Abb. 7.6b):

$$\text{a: } l B - \sum a_i F_i + \sum M_i = 0 \rightarrow B = \frac{1}{l} \left[ \sum a_i F_i - \sum M_i \right],$$

$$\text{b: } -l A + \sum (l - a_i) F_i + \sum M_i = 0 \rightarrow A = \frac{1}{l} \left[ \sum (l - a_i) F_i + \sum M_i \right].$$

Schneiden wir an einer beliebigen Stelle  $x$  (Abb. 7.6c), so ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen am linken Teilbalken

$$\uparrow: \quad A - \sum F_i - Q = 0,$$

$$\widehat{S}: \quad -x A + \sum (x - a_i) F_i + \sum M_i + M = 0$$

die Querkraft und das Biegemoment in diesem Beispiel zu

$$Q = A - \sum F_i, \quad (7.1)$$

$$M = x A - \sum (x - a_i) F_i - \sum M_i. \quad (7.2)$$

Die Summationen sind dabei nur über die Kräfte  $F_i$  und die Momente  $M_i$  zu erstrecken, die auf den linken Teilbalken wirken.

Zur Berechnung von Biegemoment und Querkraft können auch die Gleichgewichtsbedingungen für den rechten Balkenteil herangezogen werden. Bei konkreten Aufgaben verwendet man zweckmäßig denjenigen Balkenteil, an dem weniger Lasten angreifen.

Abb. 7.6d zeigt den Verlauf der Querkraft nach (7.1) über die Balkenachse. Wir erkennen, dass  $Q$  in diesem Beispiel stückweise konstant ist. An den Angriffspunkten der Kräfte  $F_i$  hat die Querkraftlinie Sprünge (Unstetigkeiten). Die Größe eines Sprungs ist gleich der dort wirkenden Kraft.

Der Verlauf des Biegemoments nach (7.2) ist in Abb. 7.6e dargestellt. Die Momentenlinie ist hier eine stückweise lineare Funktion von  $x$ . Sie hat Knicke an den Stellen der Angriffspunkte der Kräfte  $F_i$  und Sprünge der Größe  $M_i$  an den Angriffspunkten der Momente  $M_i$ . Auf die Balkenenden wirken nur die Lagerkräfte  $A$  und  $B$  (gelenkige Lager). Deshalb ist dort das Biegemoment gleich Null.

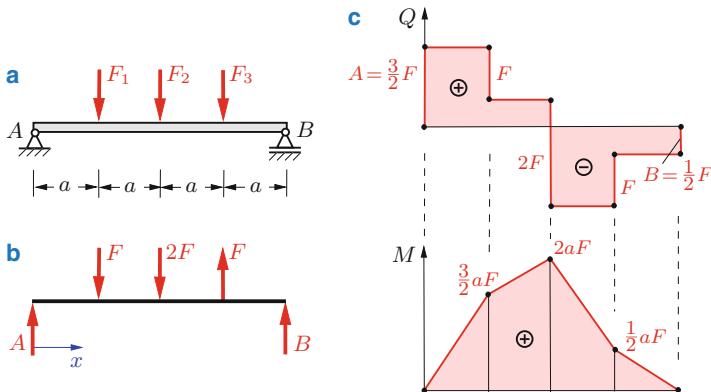
Zwischen Biegemoment und Querkraft besteht ein Zusammenhang. Differenziert man (7.2) nach  $x$ , so erhält man mit (7.1)

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum F_i = Q. \quad (7.3)$$

Die Steigungen der einzelnen Geraden in der Momentenlinie sind also durch die entsprechenden Werte der Querkraft gegeben.

► **Beispiel 7.1** Der Balken in Abb. 7.7a wird durch die drei Kräfte  $F_1 = F$ ,  $F_2 = 2F$ ,  $F_3 = -F$  belastet.

Gesucht sind die Querkraft- und die Momentenlinie.



**Abb. 7.7** Balken belastet durch drei Einzelkräfte

**Lösung** Zuerst berechnen wir die Lagerkräfte  $A$  und  $B$  aus den Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Abb. 7.7b):

$$\begin{aligned}\widehat{A}: \quad -a F - 2a 2 F + 3a F + 4a B &= 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{2} F, \\ \widehat{B}: \quad -4a A + 3a F + 2a 2 F - a F &= 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{2} F.\end{aligned}$$

Die Schnittgrößen folgen aus dem Gleichgewicht am geschnittenen Balken. Dazu führen wir gedachte Schnitte in jedem Bereich zwischen zwei Einzelkräften (die zugehörigen Freikörperbilder sind in Abb. 7.7 nicht dargestellt). Aus dem Kräftegleichgewicht an den jeweiligen linken Teilbalken erhalten wir die Querkraft in den einzelnen Bereichen:

$$\begin{aligned}Q &= A = 3F/2 && \text{für } 0 < x < a, \\ Q &= A - F = F/2 && \text{für } a < x < 2a, \\ Q &= A - F - 2F = -3F/2 && \text{für } 2a < x < 3a, \\ Q &= A - F - 2F + F = -F/2 && \text{für } 3a < x < 4a.\end{aligned}$$

Aus dem Momentengleichgewicht ergibt sich das Biegemoment zu

$$M = xA = \frac{3}{2}xF \qquad \text{für } 0 \leq x \leq a,$$

$$M = xA - (x - a)F = \left(a + \frac{1}{2}x\right)F \quad \text{für } a \leq x \leq 2a,$$

$$M = xA - (x-a)F - (x-2a)2F = \left(5a - \frac{3}{2}x\right)F \quad \text{für } 2a \leq x \leq 3a,$$

$$\begin{aligned} M &= xA - (x-a)F - (x-2a)2F + (x-3a)F \\ &= \left(2a - \frac{1}{2}x\right)F \end{aligned} \quad \text{für } 3a \leq x \leq 4a.$$

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen wäre es dabei für  $x > 2a$  zweckmäßiger gewesen, den rechten Teilbalken zu verwenden.

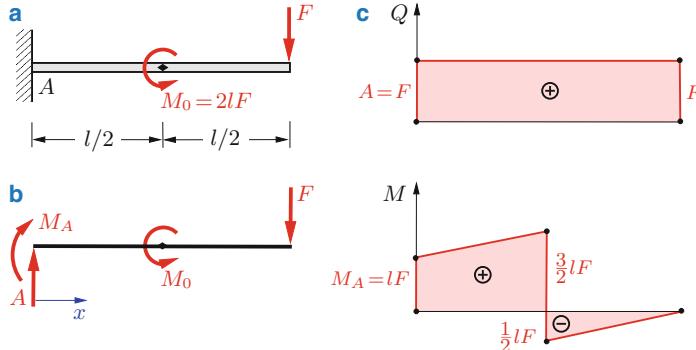
Die Querkraft- und die Momentenlinie sind in Abb. 7.7c dargestellt. In den Bereichen positiver (negativer) Querkraft hat die Momentenlinie einen positiven (negativen) Anstieg.

Als Kontrollen können wir die Werte am rechten Rand ( $x = 4a$ ) verwenden:

- die Querkraftlinie springt infolge der Lagerkraft  $B$  auf den Wert Null,
- die Momentenlinie hat den Wert Null (gelenkiges Lager  $B$  am Balkenende).

Die Beziehungen für  $Q$  und  $M$  können rein formal auch aus (7.1) und (7.2) abgelesen werden, da der Balken beiderseits gelenkig gelagert ist. ■

► **Beispiel 7.2** Man bestimme die Schnittkraftlinien für den Kragträger in Abb. 7.8a.



**Abb. 7.8** Kragträger

**Lösung** Mit Hilfe des Freikörperbildes Abb. 7.8b und Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen auf das Gesamtsystem bestimmen wir zuerst die Lagerreaktionen:

$$\begin{aligned}\uparrow: \quad A - F &= 0 \quad \rightarrow \quad A = F, \\ \curvearrowright: \quad -M_A + M_0 - l F &= 0 \quad \rightarrow \quad M_A = M_0 - l F = l F.\end{aligned}$$

Zur Ermittlung des Querkraftverlaufs schneiden wir den Balken an einer beliebigen Stelle  $x$ . Aus dem Kräftegleichgewicht für den rechten oder linken Teilbalken (hier nicht dargestellt) erhalten wir

$$\underline{Q} = A = \underline{F} \quad \text{für } 0 < x < l.$$

Wegen des Einzelmoments  $M_0$  in der Balkenmitte müssen wir zur Bestimmung des Momentenverlaufs zwei Bereiche betrachten. Dementsprechend führen wir je einen Schnitt in den Bereichen  $0 < x < l/2$  und  $l/2 < x < l$ . Momentengleichgewicht am Teilbalken liefert

$$\begin{aligned}\underline{M} &= M_A + x A = \underline{(l+x)F} \quad \text{für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \underline{M} &= M_A + x A - M_0 = \underline{(x-l)F} \quad \text{für } \frac{l}{2} < x \leq l.\end{aligned}$$

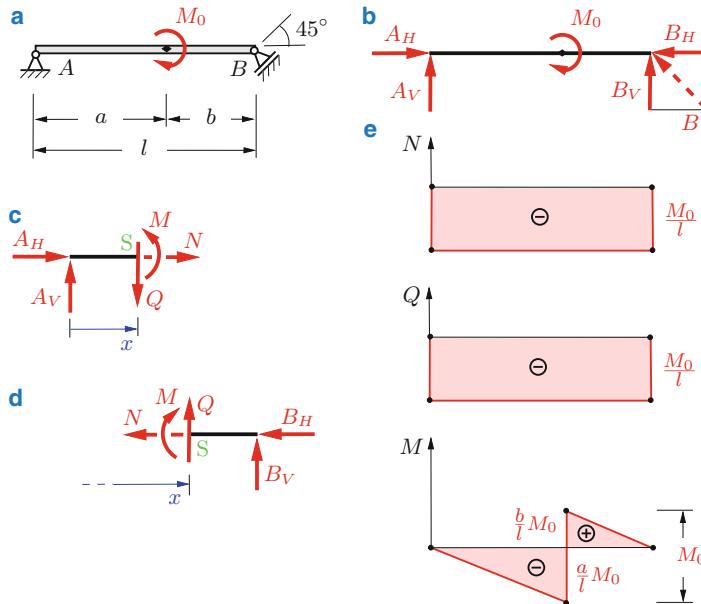
Querkraft- und Biegemomentenverlauf sind in Abb. 7.8c grafisch dargestellt. Die Querkraft ist im ganzen Balken konstant während das Biegemoment stückweise linear verläuft. Dabei ist die Steigung des Momentenverlaufs wegen der konstanten Querkraft in beiden Bereichen gleich. An der Angriffsstelle  $x = l/2$  des äußeren Moments hat der Momentenverlauf einen Sprung der Größe  $M_0 = 2lF$ .

Es sei noch darauf hingewiesen, dass in diesem Beispiel die Lagerreaktionen nicht vorab bestimmt werden müssen, wenn man nur an den Schnittgrößen interessiert ist. Wendet man nämlich die Gleichgewichtsbedingungen auf den Teilbalken rechts vom Schnitt an, dann erhält man Querkraft und Biegemoment unmittelbar.



► **Beispiel 7.3** Der beidseitig gelenkig gelagerte Balken nach Abb. 7.9a wird durch ein eingeprägtes Moment  $M_0$  belastet.

Man bestimme die Schnittgrößen.



**Abb. 7.9** Balken belastet durch ein eingeprägtes Moment

**Lösung** Wir ermitteln zuerst die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Balken (Abb. 7.9b). Mit  $B_H = B_V$  (Richtung der Lagerkraft B unter  $45^\circ$  zur Vertikalen) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{a: } M_0 - l B_V &= 0 \quad \rightarrow \quad B_V = B_H = \frac{M_0}{l}, \\ \text{b: } l A_V + M_0 &= 0 \quad \rightarrow \quad A_V = -\frac{M_0}{l}, \\ \rightarrow: \quad A_H - B_H &= 0 \quad \rightarrow \quad A_H = \frac{M_0}{l}. \end{aligned}$$

Die Kräfte A und B bilden ein Kräftepaar mit dem Moment  $M_0$ .

Nun schneiden wir den Balken an einer beliebigen Stelle links vom Angriffspunkt des eingeprägten Moments ( $x < a$ ) und betrachten den linken Teilbalken (Abb. 7.9c). Nach Einzeichnen der positiven Schnittgrößen liefert das Gleichgewicht

$$\rightarrow: \quad A_H + N = 0 \quad \rightarrow \underline{N} = -A_H = -\frac{M_0}{\underline{\underline{l}}},$$

$$\uparrow: \quad A_V - Q = 0 \quad \rightarrow \underline{Q} = A_V = -\frac{M_0}{\underline{\underline{l}}},$$

$$\widehat{S}: \quad -x A_V + M = 0 \quad \rightarrow \underline{M} = x A_V = -\frac{x}{\underline{\underline{l}}} M_0.$$

Um die Schnittgrößen rechts vom Angriffspunkt des eingeprägten Moments zu erhalten, schneiden wir den Balken an einer Stelle  $x > a$  und betrachten nun zweckmäßig den rechten Teilbalken nach Abb. 7.9d (beachte: negatives Schnittufer!). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern dann

$$\leftarrow: \quad N + B_H = 0 \quad \rightarrow \underline{N} = -B_H = -\frac{M_0}{\underline{\underline{l}}},$$

$$\uparrow: \quad Q + B_V = 0 \quad \rightarrow \underline{Q} = -B_V = -\frac{M_0}{\underline{\underline{l}}},$$

$$\widehat{S}: \quad M - (l - x)B_V = 0 \quad \rightarrow \underline{M} = (l - x)B_V = \frac{l - x}{\underline{\underline{l}}} M_0.$$

Die Schnittgrößen sind in Abb. 7.9e grafisch dargestellt. An der Stelle  $x = a$  (Angriffspunkt des eingeprägten Moments) hat die Momentenlinie einen Sprung der Größe  $M_0$ . Die beiden Geraden links bzw. rechts von  $x = a$  haben die gleiche Steigung, da die Querkraft in beiden Bereichen gleich groß ist (siehe (7.3)). Auch die Normalkraft (Druck) ist im gesamten Balken gleich.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Angriffspunkt des eingeprägten Moments bei der Ermittlung der Lagerreaktionen nicht in die Rechnung eingeht. Dagegen ist der Verlauf des Biegemoments vom Angriffspunkt abhängig. ■

## 7.2.2 Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen

Zwischen der Querkraft  $Q$  und dem Biegemoment  $M$  besteht ein Zusammenhang, den wir für Einzelkräfte mit (7.3) bereits hergeleitet haben. Wir wollen nun das Ergebnis auf Balken unter verteilten Lasten verallgemeinern. Dazu betrachten wir ein aus dem Balken (Abb. 7.10a) herausgeschnittenes Element der infinitesimalen Länge  $dx$  (Abb. 7.10b), bei dem wegen  $dx \rightarrow 0$  die Streckenlast  $q$  als konstant angesehen werden kann (vgl. Abschn. 4.1). Die am Balkenelement angreifende Streckenlast denken wir uns durch eine Einzellast vom Betrag  $dF = q dx$  ersetzt. An der Schnittstelle  $x$  wirken die Querkraft  $Q$  und das Biegemoment  $M$ . An der Schnittstelle  $x + dx$  haben sich die Schnittgrößen durch das Fortschreiten in Balkenlängsrichtung um die infinitesimalen Werte  $dQ$  und  $dM$  geändert. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen für das Balkenelement

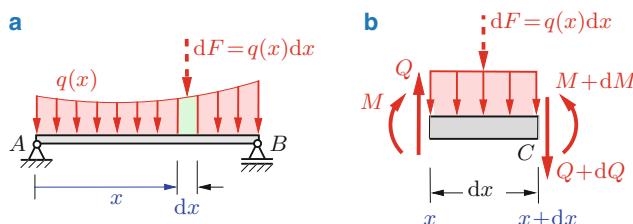
$$\uparrow: Q - q dx - (Q + dQ) = 0 \rightarrow q dx + dQ = 0, \quad (7.4)$$

$$\widehat{C}: -M - dx Q + \frac{dx}{2} q dx + M + dM = 0 \\ \rightarrow -Q dx + dM + \frac{1}{2} q dx \cdot dx = 0. \quad (7.5)$$

Aus (7.4) folgt

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (7.6)$$

Die Änderung der Querkraft ist demnach durch die negative Streckenlast gegeben.



**Abb. 7.10** a Balken unter Streckenlast, b Balkenelement

**Tab. 7.1** Zusammenhänge zwischen Belastung und Schnittgrößen

$q$	$Q$	$M$
0	konstant	linear
konstant	linear	quadratische Parabel
linear	quadratische Parabel	kubische Parabel

In (7.5) ist das Glied mit  $dx \cdot dx$  im Vergleich zu den Gliedern mit  $dx$  bzw.  $dM$  „klein von höherer Ordnung“ und kann daher vernachlässigt werden. Damit erhalten wir

$$\frac{dM}{dx} = Q . \quad (7.7)$$

Die Ableitung des Biegemoments nach der Koordinate  $x$  liefert somit die Querkraft. Den gleichen Zusammenhang haben wir mit (7.3) bereits für Einzelkräfte erhalten.

Differentiation von (7.7) und Einsetzen von (7.6) liefert ferner

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q . \quad (7.8)$$

Die differentiellen Beziehungen (7.6) und (7.7) lassen sich unter anderem zur qualitativen Bestimmung von Schnittgrößenverläufen und bei Kontrollen verwenden. Ist zum Beispiel  $q = \text{const}$ , so liefert (7.6) einen linearen Verlauf für  $Q$  (Ableitung einer linearen Funktion = Konstante!). Das Biegemoment verläuft dann wegen (7.7) quadratisch.

In Tab. 7.1 sind die Zusammenhänge zwischen Belastung und Schnittgrößen für verschiedene  $q$ -Verläufe zusammengestellt.

Nach (7.7) ist  $Q$  ein Maß für den Anstieg der  $M$ -Linie. Verschwindet an einer Stelle die Querkraft, so hat das Biegemoment dort ein Extremum, d. h. ein Maximum oder Minimum (Anstieg gleich Null). Dies ist von praktischer Bedeutung, da die wichtigste Größe bei der Auslegung eines Balkens in der Regel das maximale Biegemoment ist. Es sei aber darauf hingewiesen, dass das absolute Maximum des Biegemoments auch an einem Balkenende oder an einem Feldende auftreten kann, wo die Querkraft oder das Biegemoment einen Sprung haben.

### 7.2.3 Integration und Randbedingungen

Die Beziehungen (7.6) und (7.7) können wir auch zur Bestimmung der Schnittgrößen aus der Belastung  $q$  verwenden. Durch Integration folgt

$$Q = - \int q \, dx + C_1, \quad (7.9)$$

$$M = \int Q \, dx + C_2. \quad (7.10)$$

Die zwei Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  müssen aus zwei *Randbedingungen* berechnet werden. Diese Bedingungen machen eine Aussage über die Größe von  $M$  bzw.  $Q$  an den Rändern eines Balkens. Für die wichtigsten Lagerungsarten gilt:

Lager	$Q$	$M$	
gelenkiges Lager		$\neq 0$	<b>0</b>
Parallelführung		<b>0</b>	$\neq 0$
Schiebehülse		$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung		$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende		<b>0</b>	<b>0</b>

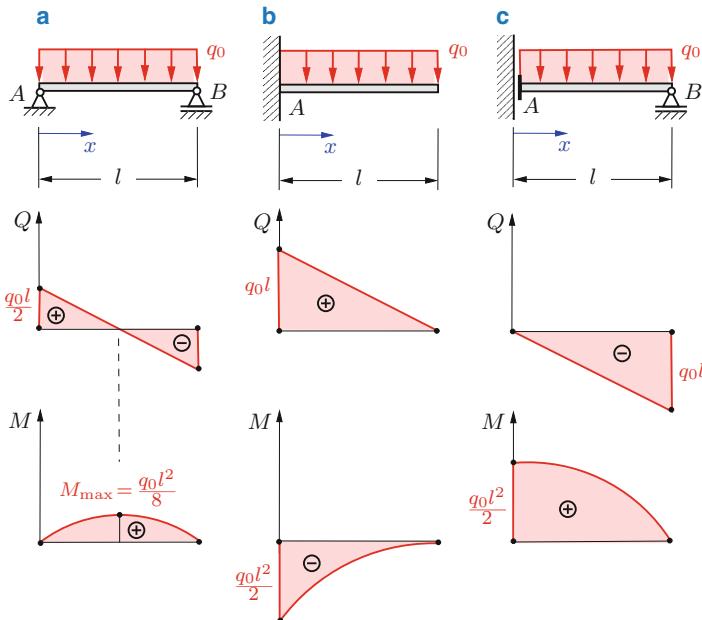
Aus dieser Tabelle kann bei gegebener Lagerung eines Balkens entnommen werden, welche Schnittgrößen dort Null sind. Aussagen  $Q \neq 0$  und/oder  $M \neq 0$  lassen sich als Randbedingungen nicht verwenden.

Im Gegensatz zum bisherigen Vorgehen (Gleichgewicht am geschnittenen Balken, Abschn. 7.2.1) müssen bei der Bestimmung von  $Q$  und  $M$  durch Integration die Lagerreaktionen *nicht* ermittelt werden. Sie können vielmehr aus den Ergebnissen abgelesen werden. Wenn die Lagerreaktionen allerdings vor der Ermittlung der Schnittgrößen schon bekannt sind, können sie auch zur Bestimmung der Integrationskonstanten verwendet werden.

Zur Illustration des Verfahrens betrachten wir in Abb. 7.11a–c drei gleiche Balken unter gleicher Last bei unterschiedlicher Lagerung. Mit  $q = q_0 = \text{const}$  ergibt sich aus (7.9) und (7.10) für alle drei Fälle

$$Q = -q_0 x + C_1,$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2.$$



**Abb. 7.11** Balken unter Gleichstreckenlast

Wegen der unterschiedlichen Lagerungen sind die Randbedingungen und damit auch die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  für die Fälle a) bis c) verschieden.

Aus den Randbedingungen

$$\begin{array}{lll} \text{a) } M(0) = 0, & \text{b) } Q(l) = 0, & \text{c) } Q(0) = 0, \\ \text{a) } M(l) = 0, & \text{b) } M(l) = 0, & \text{c) } M(l) = 0 \end{array}$$

folgen die Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 &= C_2, & \text{b) } 0 &= -q_0 l + C_1, & \text{c) } 0 &= C_1, \\ \text{a), b), c) } 0 &= -\frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 & & & & \\ \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} q_0 l, \\ C_2 = 0, \end{cases} & \quad \begin{cases} C_1 = q_0 l, \\ C_2 = -\frac{1}{2} q_0 l^2, \end{cases} & \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \frac{1}{2} q_0 l^2. \end{cases} & & & \end{aligned}$$

Damit erhält man die Schnittgrößen (Abb. 7.11a–c)

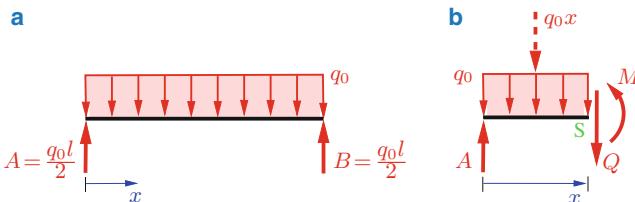
$$\begin{array}{ll} \text{a)} & Q = \frac{1}{2} q_0 l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right), \quad M = \frac{1}{2} q_0 l^2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \\ \text{b)} & Q = q_0 l \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \quad M = -\frac{1}{2} q_0 l^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2, \\ \text{c)} & Q = -q_0 x, \quad M = \frac{1}{2} q_0 l^2 \left[ 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]. \end{array}$$

Dabei haben wir die Ausdrücke in den Klammern so umgeformt, dass sie dimensionslos sind. Beim beiderseits gelenkig gelagerten Balken tritt das maximale Biegemoment  $M_{\max} = q_0 l^2 / 8$  in der Balkenmitte ( $Q = 0$ ) auf.

Aus  $Q$  und  $M$  an den Rändern kann man die Lagerreaktionen ablesen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A = Q(0) = \frac{1}{2} q_0 l, \quad B = -Q(l) = \frac{1}{2} q_0 l, \\ \text{b)} & A = Q(0) = q_0 l, \quad M_A = M(0) = -\frac{1}{2} q_0 l^2, \\ \text{c)} & M_A = M(0) = \frac{1}{2} q_0 l^2, \quad B = -Q(l) = q_0 l. \end{array}$$

Der Schnittkraftverlauf kann auch bei Streckenlasten elementar durch Gleichgewicht am geschnittenen Balken bestimmt werden. Um dies zu zeigen, betrachten wir in Abb. 7.12a noch einmal Fall a). Wir schneiden an einer beliebigen Stelle  $x$  (Abb. 7.12b) und fassen die auf den Teilbalken wirkende Streckenlast zu ihrer Resultierenden  $q_0 x$  zusammen (man beachte, dass die Streckenlast nicht vor dem Schnitt zu einer Resultierenden zusammengefasst werden darf). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern mit der bereits bekannten Lagerkraft  $A$  die Schnitt-



**Abb. 7.12** Gleichgewicht am geschnittenen Balken

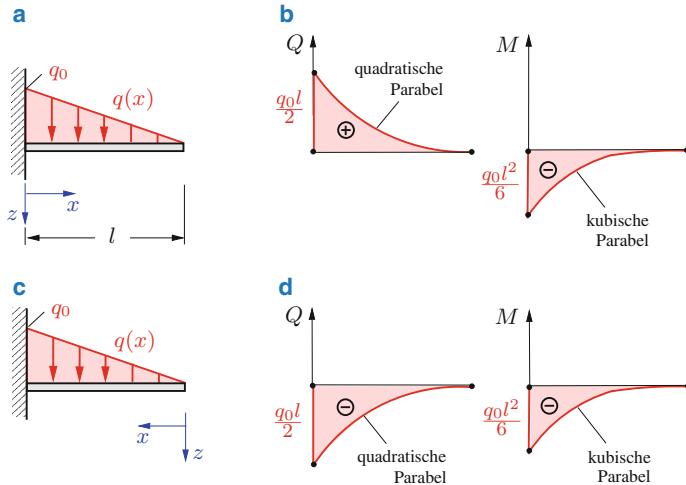
größen:

$$\begin{aligned} \uparrow: \quad A - q_0 x - Q = 0 &\rightarrow Q = A - q_0 x = \frac{1}{2} q_0 l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right), \\ \curvearrowleft: -x A + \frac{1}{2} x q_0 x + M = 0 &\rightarrow M = x A - \frac{1}{2} q_0 x^2 = \frac{1}{2} q_0 l^2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right). \end{aligned}$$

Diese Methode ist nur dann zweckmäßig, wenn die Resultierende der Streckenlast am Teilbalken sowie die Lage ihrer Wirkungslinie einfach angegeben werden können.

► **Beispiel 7.4** Der einseitig eingespannte Balken nach Abb. 7.13a trägt eine dreieckförmige Streckenlast.

Man bestimme die Schnittgrößen durch Integration.



**Abb. 7.13** Kragträger unter dreieckförmiger Belastung

**Lösung** Die dreieckförmige Streckenlast genügt der Geradengleichung  $q(x) = q_0(l - x)/l$ . Daraus erhalten wir durch Integration entsprechend (7.9) und (7.10)

$$Q(x) = \frac{q_0}{2l} (l - x)^2 + C_1, \quad M(x) = -\frac{q_0}{6l} (l - x)^3 + C_1 x + C_2.$$

Die Randbedingungen  $Q(l) = 0$  und  $M(l) = 0$  liefern die Integrationskonstanten  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 0$ . Damit werden die Schnittgrößen (Abb. 7.13b)

$$\underline{\underline{Q(x) = \frac{1}{2} q_0 l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}}, \quad \underline{\underline{M(x) = -\frac{1}{6} q_0 l^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3}}.$$

Die Querkraftlinie hat bei  $x = l$  die Steigung Null, weil dort die Streckenlast Null ist ( $Q'(l) = -q(l) = 0$ ). Entsprechend hat die Momentenlinie bei  $x = l$  die Steigung Null, weil dort die Querkraft Null ist ( $M'(l) = Q(l) = 0$ ).

In diesem Beispiel ist es zweckmäßig, die  $x$ -Achse nach links zeigen zu lassen (Abb. 7.13c). Dann gilt nämlich die einfachere Darstellung  $q(x) = q_0 x/l$ , und die Integration liefert mit den Randbedingungen  $Q(0) = 0$  und  $M(0) = 0$  die Schnittgrößen (Abb. 7.13d)

$$\underline{\underline{Q(x) = -\frac{1}{2} q_0 l \left(\frac{x}{l}\right)^2}}, \quad \underline{\underline{M(x) = -\frac{1}{6} q_0 l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^3}}.$$

Man erkennt, dass sich bei dieser Wahl des Koordinatensystems das Vorzeichen der Querkraft umkehrt (vgl. Abschn. 7.1).

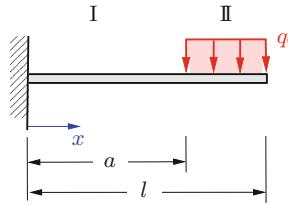
Es sei darauf hingewiesen, dass die Schnittgrößen auch sehr einfach durch Gleichgewicht am geschnittenen Balken bestimmt werden können. ■

## 7.2.4 Übergangsbedingungen bei mehreren Feldern

Häufig ist die Belastung  $q(x)$  nicht über den gesamten Balken durch eine einzige Funktion gegeben, sondern sie wird in Teilbereichen durch verschiedene Funktionen dargestellt. Dann muss der Balken in Felder unterteilt werden, und die Integration der differentiellen Beziehungen (7.6) und (7.7) hat bereichsweise zu erfolgen.

Zur Illustration betrachten wir den einseitig eingespannten Balken nach Abb. 7.14, dessen Belastung durch

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < a \\ q_0 & \text{für } a < x < l \end{cases}$$



**Abb. 7.14** Einteilung in zwei Bereiche

gegeben ist. Durch bereichsweise Integration in den Feldern I ( $0 \leq x < a$ ) und II ( $a < x < l$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{I: } q_{\text{I}} &= 0, & \text{II: } q_{\text{II}} &= q_0, \\ Q_{\text{I}} &= C_1, & Q_{\text{II}} &= -q_0 x + C_3, \\ M_{\text{I}} &= C_1 x + C_2, & M_{\text{II}} &= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die *zwei* Randbedingungen

$$Q_{\text{II}}(l) = 0, \quad M_{\text{II}}(l) = 0 \quad (7.13)$$

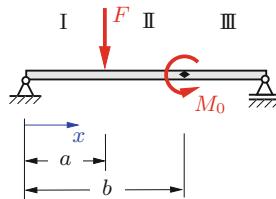
reichen zur Berechnung der *vier* Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  nicht aus. Wir müssen daher zusätzliche Gleichungen verwenden, die das Verhalten der Schnittgrößen an der Stelle  $x = a$  des Übergangs vom Bereich I zum Bereich II beschreiben. Diese Gleichungen heißen *Übergangsbedingungen*.

Da an der Stelle  $x = a$  weder eine Einzelkraft noch ein Moment angreift, sind die Schnittgrößen unmittelbar links und rechts von der Übergangsstelle gleich, und damit sind die Schnittkraftlinien dort stetig (wegen  $dQ/dx = -q$  hat  $Q$  bei unstetigem  $q$  einen Knick). Die Übergangsbedingungen lauten also

$$Q_{\text{I}}(a) = Q_{\text{II}}(a), \quad M_{\text{I}}(a) = M_{\text{II}}(a). \quad (7.14)$$

Einsetzen von (7.12) in die Rand- und die Übergangsbedingungen (7.13) und (7.14) liefert die Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= q_0(l - a), & C_2 &= -\frac{1}{2} q_0(l^2 - a^2), \\ C_3 &= q_0 l, & C_4 &= -\frac{1}{2} q_0 l^2. \end{aligned}$$

**Abb. 7.15** Einteilung in drei Bereiche

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Balken in Abb. 7.15, der durch eine Einzelkraft  $F$  an der Stelle  $x = a$  und ein Einzelmoment  $M_0$  an der Stelle  $x = b$  belastet ist. Auch hier muss eine Bereichseinteilung stattfinden. An der Stelle  $x = a$  hat in diesem Fall die Querkraftlinie einen Sprung der Größe  $F$ , während die Momentenlinie stetig ist. Die Übergangsbedingungen lauten dort

$$Q_{\text{II}}(a) = Q_{\text{I}}(a) - F, \quad M_{\text{II}}(a) = M_{\text{I}}(a). \quad (7.15)$$

Entsprechend bewirkt ein Moment  $M_0$  an der Stelle  $x = b$  einen Sprung der Größe  $M_0$  in der Momentenlinie während die Querkraft stetig ist. Daher gelten dort die Übergangsbedingungen

$$Q_{\text{III}}(b) = Q_{\text{II}}(b), \quad M_{\text{III}}(b) = M_{\text{II}}(b) - M_0. \quad (7.16)$$

Tab. 7.2 zeigt zusammenfassend, in welchen Fällen Sprünge oder Knicke in den Schnittkraftlinien infolge von Unstetigkeiten in der Belastung auftreten.

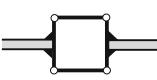
Müssen wir einen Balken bei der Bestimmung der Schnittgrößen in  $n$  Bereiche einteilen, so ergeben sich bei der Integration der differentiellen Beziehungen  $2n$

**Tab. 7.2** Sprünge oder Knicke in  $Q$ - und  $M$ -Linien

Last	$Q$	$M$
	Knick	—
	Sprung	Knick
	—	Sprung

Integrationskonstanten. Sie sind aus  $2n - 2$  Übergangsbedingungen und 2 Randbedingungen zu bestimmen.

Bei mehrteiligen Tragwerken verschwindet an einem Gelenk das Biegemoment:  $M = 0$ . Die Querkraft ist dort im allgemeinen ungleich Null. Dagegen sind bei einer Parallelführung (Querkraftgelenk)  $Q = 0$  und  $M \neq 0$ . Für die Schnittgrößen an den Verbindungselementen gelten also die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Aussagen.

Verbindungselement	$Q$	$M$	
	$\neq 0$	$\mathbf{0}$	
	$\mathbf{0}$	$\neq 0$	(7.17)

Bei der Bestimmung der Integrationskonstanten tritt dann *eine* Bedingung (Biegemoment oder Querkraft gleich Null) an die Stelle einer Übergangsbedingung.

Greifen an den Verbindungselementen keine Einzellasten an, so sind die Schnittkraftlinien stetig, und es ist dort keine zusätzliche Bereichseinteilung nötig. Entsprechendes gilt bei einer Streckenlast, die links und rechts von einem Verbindungselement durch die gleiche Funktion beschrieben wird.

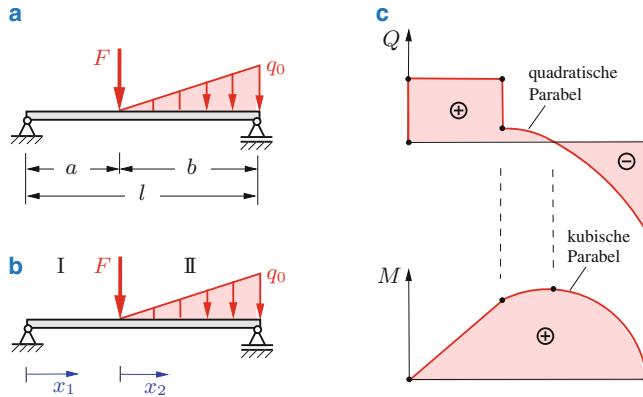
Bei vielen Feldern müssen zur Bestimmung der Integrationskonstanten Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten gelöst werden. Daher ist dieses Verfahren nur für Tragwerke mit wenigen Feldern zu empfehlen.

► **Beispiel 7.5** Ein beiderseits gelenkig gelagerter Balken wird durch eine Einzellast und durch eine dreieckförmige Streckenlast belastet (Abb. 7.16a).

Gesucht sind die Schnittgrößen.

**Lösung** Wegen der unstetigen Belastung teilen wir den Balken in zwei Felder I und II (Abb. 7.16b). Statt der Koordinate  $x$  für den gesamten Balken verwenden wir im Feld I die Koordinate  $x_1$  und im Feld II die Koordinate  $x_2$ . Dann erhalten wir durch bereichsweise Integration nach (7.9) und (7.10):

$$\begin{aligned} \text{I: } q_{\text{I}} &= 0, & \text{II: } q_{\text{II}} &= q_0 \frac{x_2}{b}, \\ Q_{\text{I}} &= C_1, & Q_{\text{II}} &= -q_0 \frac{x_2^2}{2b} + C_3, \\ M_{\text{I}} &= C_1 x_1 + C_2, & M_{\text{II}} &= -q_0 \frac{x_2^3}{6b} + C_3 x_2 + C_4. \end{aligned}$$



**Abb. 7.16** Gelenkig gelagerter Balken mit Bereichseinteilung

Die Rand- und die Übergangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} M_I(x_1 = 0) &= 0, & M_{II}(x_2 = b) &= 0, \\ Q_{II}(x_2 = 0) &= Q_I(x_1 = a) - F, & M_{II}(x_2 = 0) &= M_I(x_1 = a). \end{aligned}$$

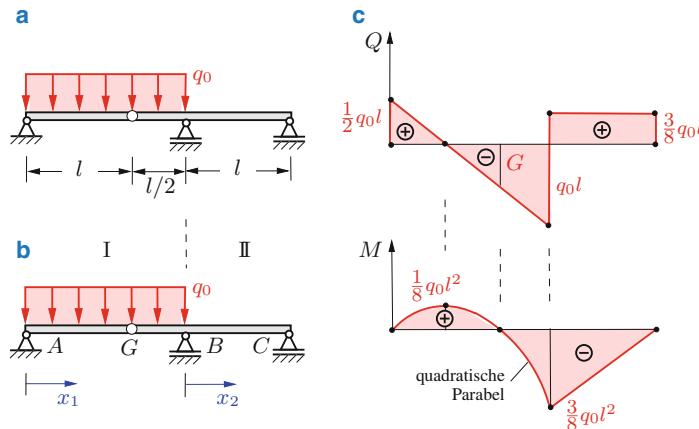
Einsetzen liefert nach Zwischenrechnung die Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( \frac{1}{6} q_0 b + F \right) \frac{b}{l}, & C_2 &= 0, \\ C_3 &= \left( \frac{1}{6} q_0 b - \frac{a}{b} F \right) \frac{b}{l}, & C_4 &= \left( \frac{1}{6} q_0 b + F \right) \frac{a b}{l} \end{aligned}$$

und damit die Schnittgrößen (Abb. 7.16c)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}}_I &= \left( \frac{1}{6} q_0 b + F \right) \frac{b}{l}, \\ \underline{\underline{Q}}_{II} &= -q_0 \frac{x_2^2}{2b} + \left( \frac{1}{6} q_0 b - \frac{a}{b} F \right) \frac{b}{l}, \\ \underline{\underline{M}}_I &= \left( \frac{1}{6} q_0 b + F \right) \frac{b}{l} x_1, \\ \underline{\underline{M}}_{II} &= -q_0 \frac{x_2^3}{6b} + \left( \frac{1}{6} q_0 b - \frac{a}{b} F \right) \frac{b}{l} x_2 + \left( \frac{1}{6} q_0 b + F \right) \frac{a b}{l}. \end{aligned}$$
■

► **Beispiel 7.6** Für den Gerberträger nach Abb. 7.17a bestimme man die Schnittkraftlinien.



**Abb. 7.17** Gerberträger mit Bereichseinteilung

**Lösung** An der Stelle des Lagers  $B$  muss eine Bereichseinteilung vorgenommen werden (Lagerkraft  $B$  und unstetiges  $q$ ). Eine Bereichsteilung am Gelenk ist dagegen nicht erforderlich, da links und rechts vom Gelenk die äußere Belastung durch ein und dieselbe Funktion  $q = q_0$  gegeben ist. In den beiden Feldern I und II verwenden wir die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  (Abb. 7.17b). Bereichsweise Integration liefert dann

$$\text{I: } q_I = q_0 ,$$

$$Q_I = -q_0 x_1 + C_1 ,$$

$$M_I = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 , \quad \text{II: } q_{\text{II}} = 0 ,$$

$$Q_{\text{II}} = C_3 ,$$

$$M_{\text{II}} = C_3 x_2 + C_4 .$$

Aus den vier Bedingungen

$$M_I(x_1 = 0) = 0 , \quad M_{\text{II}}(x_2 = l) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}) ,$$

$$M_I\left(x_1 = \frac{3}{2}l\right) = M_{\text{II}}(x_2 = 0) \quad (\text{Übergangsbedingung}) ,$$

$$M_I(x_1 = l) = 0 \quad (\text{Biegemoment am Gelenk gleich Null})$$

können die vier Integrationskonstanten berechnet werden:

$$C_1 = \frac{1}{2} q_0 l, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{3}{8} q_0 l, \quad C_4 = -\frac{3}{8} q_0 l^2.$$

Damit lauten die Schnittgrößen (Abb. 7.17c)

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{\text{I}} &= -q_0 x_1 + \frac{1}{2} q_0 l, & \underline{Q}_{\text{II}} &= \frac{3}{8} q_0 l, \\ \underline{M}_{\text{I}} &= -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + \frac{1}{2} q_0 l x_1, & \underline{M}_{\text{II}} &= \frac{3}{8} q_0 l(x_2 - l).\end{aligned}$$

Zur Kontrolle lesen wir aus der Querkraftlinie die Lagerkräfte ab:

$$\begin{aligned}A &= Q_{\text{I}}(x_1 = 0) = \frac{1}{2} q_0 l, \\ B &= Q_{\text{II}}(x_2 = 0) - Q_{\text{I}}\left(x_1 = \frac{3}{2} l\right) = \frac{11}{8} q_0 l, \\ C &= -Q_{\text{II}}(x_2 = l) = -\frac{3}{8} q_0 l.\end{aligned}$$

Ihre Summe hält der Gesamtbelastung  $3 q_0 l / 2$  das Gleichgewicht. ■

### 7.2.5 Föppl-Symbol

Die bereichsweise Integration nach Abschn. 7.2.4 ist schon bei zwei Feldern mit einem Aufwand verbunden. Die Arbeit lässt sich jedoch reduzieren, wenn man sich des *Klammer-Symbols* nach August Föppl (1854–1924) bedient (im angelsächsischen Sprachraum wird das Klammer-Symbol meist nach Macaulay benannt). Mit seiner Hilfe können Unstetigkeiten wie Sprünge oder Knicke einfach beschrieben werden. Das Föppl-Symbol, gekennzeichnet durch spitze Klammern, ist definiert durch

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ (x - a)^n & \text{für } x > a. \end{cases} \quad (7.18)$$

Insbesondere beschreibt

$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} \quad (7.19)$$

einen Sprung der Größe 1 an der Stelle  $x = a$ .

Bei der Differentiation und bei der Integration kann das Klammer-Symbol wie eine runde Klammer aufgefasst werden. Es gelten daher die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n &= n \langle x - a \rangle^{n-1}, \\ \int \langle x - a \rangle^n dx &= \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1} + C. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Eine konstante Streckenlast  $q_0$ , die an der Stelle  $x = a$  beginnt (Abb. 7.18a), kann somit nach (7.19) im gesamten Bereich durch die *eine* Funktion

$$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0 \quad (7.21)$$

beschrieben werden. Entsprechend stellt

$$q(x) = \frac{q_b}{b} \langle x - a \rangle^1 \quad (7.22)$$

nach (7.18) eine ab der Stelle  $x = a$  linear wachsende Streckenlast dar (Abb. 7.18b).

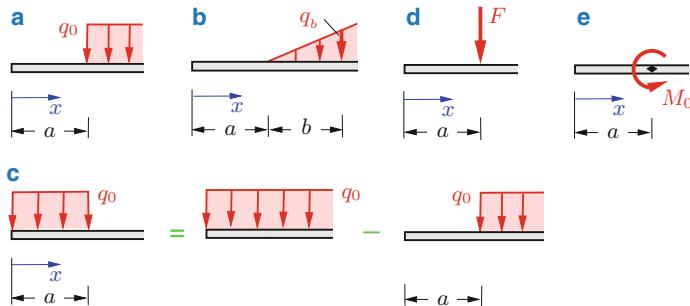


Abb. 7.18 Zum Föppl-Symbol

Eine konstante Streckenlast  $q_0$ , die an der Stelle  $x = 0$  beginnt und bei  $x = a$  endet, erhält man, wenn man zwei Lastfälle nach Abb. 7.18c überlagert (superponiert). Dementsprechend wird sie durch

$$q(x) = q_0 - q_0 (x - a)^0$$

dargestellt.

Wirken Einzelkräfte (Einzelmomente), dann treten im Querkraftverlauf (Momentenverlauf) Sprünge auf. Diese müssen bei der Integration der differentiellen Beziehungen mit dem Föppl-Symbol zusätzlich berücksichtigt werden. So verursacht eine Einzelkraft  $F$  an der Stelle  $x = a$  (Abb. 7.18d) einen Sprung der Größe  $F$  in der Querkraft, der sich als

$$Q(x) = -F (x - a)^0 \quad (7.23)$$

schreiben lässt. Ein Sprung im Biegemoment infolge eines Einzelmoments  $M_0$  an der Stelle  $x = a$  (Abb. 7.18e) wird schließlich durch

$$M(x) = -M_0 (x - a)^0 \quad (7.24)$$

erfasst.

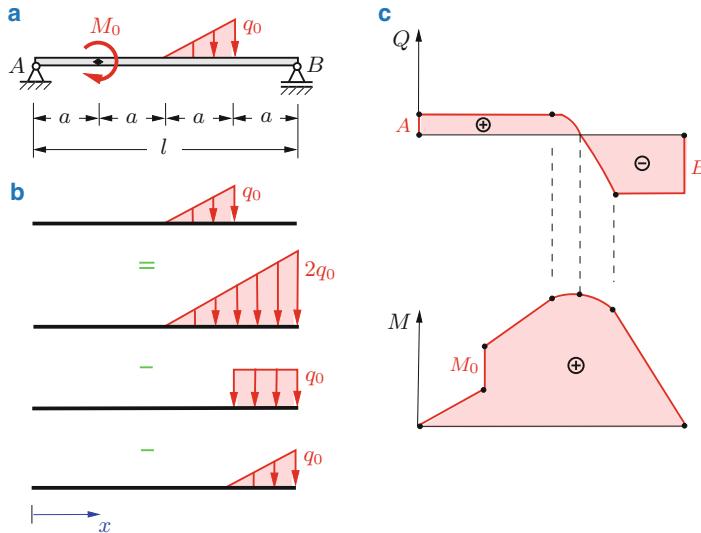
Der Vorteil der Verwendung des Föppl-Symbols besteht darin, dass keine Einteilung in mehrere Felder mehr vorgenommen werden muss. Nach Aufstellen der Belastungsfunktion  $q(x)$  kann die Integration formal nach (7.9) und (7.10) durchgeführt werden. Die zwei Integrationskonstanten werden aus zwei Randbedingungen bestimmt. Die Übergangsbedingungen an Unstetigkeitsstellen brauchen nicht berücksichtigt zu werden: sie sind automatisch erfüllt.

► **Beispiel 7.7** Der Balken nach Abb. 7.19a wird durch ein Einzelmoment und eine Dreieckslast belastet. Es sind die Schnittgrößen zu bestimmen.

**Lösung** Zuerst stellen wir die Streckenlast mit Hilfe des Föppl-Symbols dar. Eine ab der Stelle  $x = 2a$  linear anwachsende Last wird analog zu (7.22) durch

$$q(x) = \frac{q_0}{a} (x - 2a)^1$$

beschrieben. Diese Gleichung liefert auch eine Belastung im Bereich  $x > 3a$ . Da am Balken dort jedoch keine Belastung wirkt, müssen wir in diesem Bereich einen



**Abb. 7.19** Beispiel zur Anwendung des Föppl-Symbols

konstanten Anteil  $q_0(x - 3a)^0$  und einen linearen Anteil  $q_0(x - 3a)^1/a$  abziehen (Abb. 7.19b) und erhalten somit

$$q(x) = \frac{q_0}{a}(x - 2a)^1 - q_0(x - 3a)^0 - \frac{q_0}{a}(x - 3a)^1.$$

Wir überzeugen uns davon, dass diese Darstellung im Bereich  $x > 3a$  tatsächlich die Streckenlast  $q = 0$  liefert:

$$q(x) = \frac{q_0}{a}(x - 2a) - q_0 - \frac{q_0}{a}(x - 3a) = 0 \quad \text{für } x > 3a.$$

Unter Berücksichtigung des Sprunges im Momentenverlauf infolge  $M_0$  (Drehrichtung beachten) an der Stelle  $x = a$  liefert die Integration nach (7.9) und (7.10)

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{q_0}{2a}(x - 2a)^2 + q_0(x - 3a)^1 + \frac{q_0}{2a}(x - 3a)^2 + C_1, \\ M(x) &= -\frac{q_0}{6a}(x - 2a)^3 + \frac{q_0}{2}(x - 3a)^2 + \frac{q_0}{6a}(x - 3a)^3 + C_1 x + C_2 \\ &\quad + M_0(x - a)^0. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen wir aus den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} M(0) = 0 &\rightarrow C_2 = 0, \\ M(l) = 0 &\rightarrow -\frac{q_0}{6a}(l-2a)^3 + \frac{q_0}{2}(l-3a)^2 + \frac{q_0}{6a}(l-3a)^3 + C_1 l + M_0 = 0 \\ &\rightarrow C_1 = \frac{q_0 l}{24} - \frac{M_0}{l}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittgrößen (Abb. 7.19c)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q(x)}} &= -\frac{q_0}{2a}(x-2a)^2 + q_0(x-3a)^1 + \frac{q_0}{2a}(x-3a)^2 + \frac{q_0 l}{24} - \frac{M_0}{l}, \\ \underline{\underline{M(x)}} &= -\frac{q_0}{6a}(x-2a)^3 + \frac{q_0}{2}(x-3a)^2 + \frac{q_0}{6a}(x-3a)^3 + \left(\frac{q_0 l}{24} - \frac{M_0}{l}\right)x \\ &\quad + M_0(x-a)^0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## 7.2.6 Punktweise Ermittlung der Schnittgrößen

In vielen Fällen ist es nicht erforderlich, die Schnittgrößenverläufe in analytischer Form zu ermitteln. Es ist dann hinreichend, die Schnittgrößen nur an ausgezeichneten Stellen des Balkens zu berechnen. Die berechneten Punkte der Schnittkraftlinien werden anschließend durch die der jeweiligen Belastung entsprechenden Verläufe verbunden.

Zur Erläuterung des Verfahrens betrachten wir den Balken in Abb. 7.20a. Zuerst werden die Lagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Balken berechnet (Abb. 7.20b):

$$\begin{aligned} \widehat{B}: -6aA + 5aF + 3a2q_0a + M_0 &= 0 \rightarrow A = \frac{1}{6} \left( 5F + 6q_0a + \frac{M_0}{a} \right), \\ \widehat{A}: -aF - 3a2q_0a + M_0 + 6aB &= 0 \rightarrow B = \frac{1}{6} \left( F + 6q_0a - \frac{M_0}{a} \right). \end{aligned}$$

An den Stellen  $x = a, 2a, 4a$  und  $5a$  treten Knicke oder Sprünge in den Schnittkraftlinien auf. Dort bestimmen wir nun die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen für den jeweils freigeschnittenen Balkenteil. So erhalten wir durch

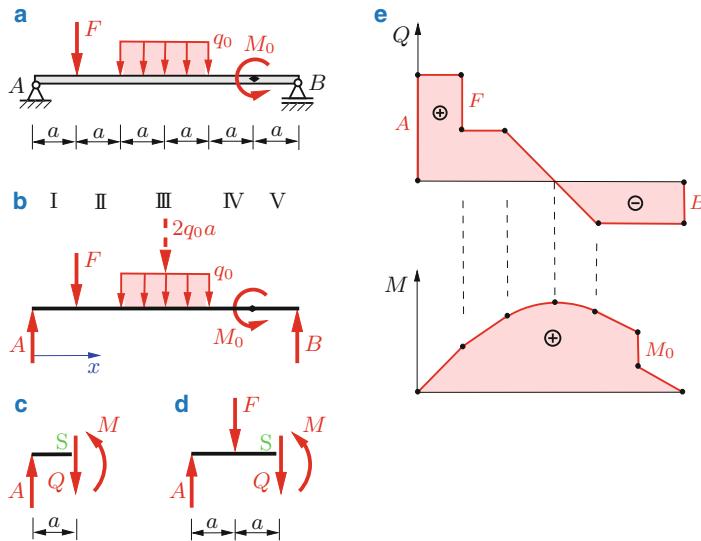


Abb. 7.20 Punktweise Ermittlung der Schnittgrößen

Schneiden bei  $x = a$  unmittelbar vor dem Angriffspunkt der Kraft  $F$  (Abb. 7.20c):

$$\uparrow: \quad A - Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q(a) = A = \frac{1}{6} \left( 5F + 6q_0a + \frac{M_0}{a} \right)$$

links neben der Kraft  $F$ ,

$$\overbrace{S}: \quad -aA + M = 0 \quad \rightarrow \quad M(a) = aA = \frac{1}{6}(5aF + 6q_0a^2 + M_0).$$

Entsprechend liefert ein Schnitt bei  $x = 2a$  (Abb. 7.20d):

$$\uparrow: \quad A - F - Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q(2a) = \frac{1}{6} \left( -F + 6q_0a + \frac{M_0}{a} \right),$$

$$\overbrace{S}: \quad -2aA + aF + M = 0 \quad \rightarrow \quad M(2a) = \frac{1}{3}(2aF + 6q_0a^2 + M_0).$$

In gleicher Weise finden wir

$$\begin{aligned} Q(4a) &= \frac{1}{6} \left( -F - 6q_0 a + \frac{M_0}{a} \right), \\ M(4a) &= \frac{1}{3} (aF + 6q_0 a^2 + 2M_0), \\ Q(5a) &= Q(4a), \\ M(5a) &= \frac{1}{6} (aF + 6q_0 a^2 - M_0) \quad \text{rechts neben dem Moment } M_0. \end{aligned}$$

In den Bereichen I, II, IV und V ist die Streckenlast Null. Daher ist dort die Querkraft jeweils konstant. Wegen  $q = q_0 = \text{const}$  ist  $Q$  im Bereich III linear veränderlich. An der Stelle  $x = a$  tritt infolge der Einzelkraft  $F$  ein Sprung im Querkraftverlauf auf.

Entsprechend ist das Biegemoment in den Bereichen I, II, IV und V linear veränderlich, hat einen Knick bei  $x = a$  und verläuft im Bereich III nach einer quadratischen Parabel (vgl. auch Tabelle in Abschn. 7.2.2). Da der Querkraftverlauf an den Stellen  $x = 2a$  und  $x = 4a$  stetig ist, hat der Momentenverlauf wegen  $Q = dM/dx$  an diesen Stellen keine Knicke. Bei  $x = 5a$  bewirkt das Moment  $M_0$  einen Sprung in der Momentenlinie.

Abb. 7.20e zeigt die Schnittkraftlinien. Das maximale Biegemoment tritt dort auf, wo die Querkraft verschwindet.

► **Beispiel 7.8** Für das Tragwerk nach Abb. 7.21a ( $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $q_0 = 60 \text{ kN/m}$ ,  $F = 80 \text{ kN}$ ,  $M_0 = 10 \text{ kN m}$ ) bestimme man die Schnittkraftlinien.

**Lösung** Zuerst ermitteln wir die Lagerreaktionen und die Gelenkkraft (alle Horizontalalkomponenten sind Null) aus dem Gleichgewicht an den freigeschnittenen Teilbalken (Abb. 7.21b):

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \widehat{A}: \quad & \frac{2}{3} a q_0 a + M_0 - a 2 q_0 a - 2 a G = 0 \\ & \rightarrow G = -\frac{2}{3} q_0 a + \frac{M_0}{2a} = -10 \text{ kN}, \\ \widehat{G}: \quad & \frac{8}{3} a q_0 a + M_0 - 2 a A + a 2 q_0 a = 0 \\ & \rightarrow A = \frac{7}{3} q_0 a + \frac{M_0}{2a} = 80 \text{ kN}, \end{aligned}$$

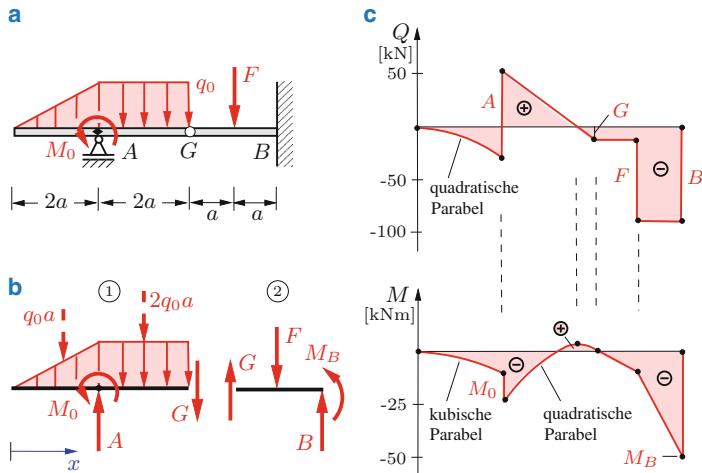


Abb. 7.21 Beispiel zur punktweisen Ermittlung der Schnittgrößen

$$\textcircled{2} \quad \overset{\curvearrowleft}{B}: -2aG + aF + M_B = 0$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{4}{3}q_0 a^2 + M_0 - aF = -50 \text{ kN m},$$

$$\uparrow: G - F + B = 0$$

$$\rightarrow B = \frac{2}{3}q_0 a - \frac{M_0}{2a} + F = 90 \text{ kN}.$$

Durch geeignete Schnitte berechnen wir anschließend folgende Schnittgrößen:

$$Q(2a) = \begin{cases} -q_0 a = -30 \text{ kN} & \text{links neben Lager } A, \\ -q_0 a + A = 50 \text{ kN} & \text{rechts neben Lager } A, \end{cases}$$

$$Q(4a) = -q_0 a + A - 2q_0 a = -10 \text{ kN},$$

$$Q(5a) = \begin{cases} G = -10 \text{ kN} & \text{links neben Kraft } F, \\ G - F = -90 \text{ kN} & \text{rechts neben Kraft } F, \end{cases}$$

$$Q(6a) = -B = -90 \text{ kN},$$

$$M(2a) = \begin{cases} -\frac{2}{3}a q_0 a = -10 \text{ kN m} & \text{links neben Lager } A, \\ -\frac{2}{3}a q_0 a - M_0 = -20 \text{ kN m} & \text{rechts neben Lager } A, \end{cases}$$

$$M(5a) = a G = -5 \text{ kN m},$$

$$M(6a) = M_B = -50 \text{ kN m}.$$

Mit  $Q(0) = 0$ ,  $M(0) = 0$  und  $M(4a) = 0$  können wir nun durch Verbinden dieser Punkte mit den zutreffenden Geraden bzw. Parabeln die Schnittkraftlinien zeichnen (Abb. 7.21c). Dabei sind die differentiellen Beziehungen zu beachten:

- an der Stelle  $x = 0$  haben wegen  $q = 0$  bzw.  $Q = 0$  die quadratische Parabel für  $Q$  bzw. die kubische Parabel für  $M$  jeweils eine horizontale Tangente,
- an der Stelle  $x = 4a$  geht beim Momentenverlauf die quadratische Parabel ohne Knick in die Gerade über (Querkraftlinie ist dort stetig). ■

### 7.3 Schnittgrößen bei Rahmen und Bogen

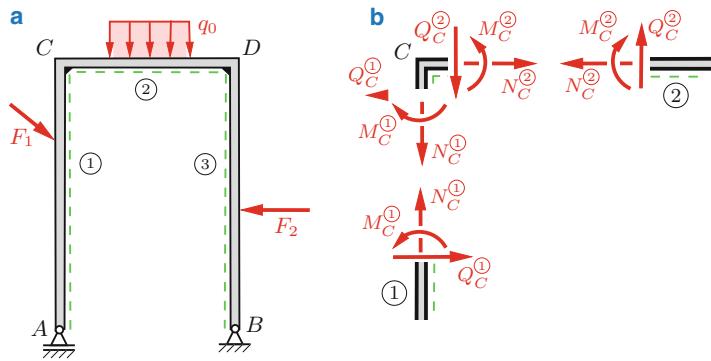
Die Überlegungen zur Bestimmung der Schnittgrößen an Balken lassen sich auf Rahmen und Bögen verallgemeinern. Die differentiellen Beziehungen nach Abschn. 7.2.2 gelten dabei allerdings nur für gerade Rahmenteile (*nicht für Bögen*).

Wir wollen uns hier vorzugsweise mit der punktweisen Ermittlung der Schnittgrößen beschäftigen. Entsprechend dem Vorgehen in Abschn. 7.2.6 werden die Schnittgrößen an ausgezeichneten Punkten des Rahmens oder Bogens aus dem Gleichgewicht am geschnittenen Rahmen- oder Bogenteil berechnet. Die Vorzeichen werden dabei nach Abschn. 7.1 über die gestrichelte Faser festgelegt. Da bei Rahmen in der Regel auch bei reiner Querbelastung der Rahmenteile Normalkräfte auftreten, berechnen wir hier stets alle drei Schnittgrößen.

Bei Rahmen ist der Übergang der Schnittgrößen an den Ecken besonders zu betrachten. Wir untersuchen dies an der unbelasteten rechtwinkligen Ecke  $C$  des Rahmens in Abb. 7.22a. Aus dem Gleichgewicht an der freigeschnittenen Ecke (Abb. 7.22b) folgt

$$N_C^{\circledcirc} = -Q_C^{\circledcirc}, \quad Q_C^{\circledcirc} = N_C^{\circledcirc}, \quad M_C^{\circledcirc} = M_C^{\circledcirc}. \quad (7.25)$$

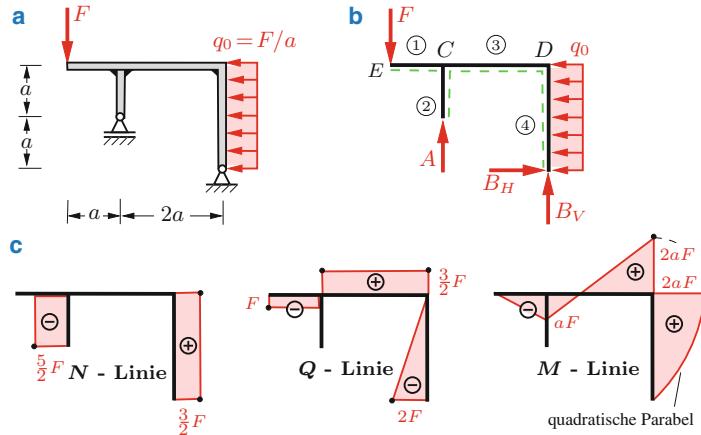
Während das Biegemoment ohne Änderung übertragen wird, gehen die Querkraft in die Normalkraft und die Normalkraft in die Querkraft über. Tritt an einer Rah-



**Abb. 7.22** Schnittgrößen bei Rahmen

menecke ein schiefer Winkel auf, so muss man die zu übertragenden Schnittkräfte nach den jeweiligen Richtungen zerlegen.

► **Beispiel 7.9** Für den Rahmen nach Abb. 7.23a bestimme man die Schnittgrößen.



**Abb. 7.23** Schnittgrößen bei Rahmen: Beispiel

**Lösung** Aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Rahmen (Abb. 7.23b) erhält man die Lagerkräfte zu

$$A = \frac{5}{2} F, \quad B_V = -\frac{3}{2} F, \quad B_H = 2 F.$$

Zur Festlegung der Vorzeichen der Schnittgrößen führen wir die gestrichelte Faser ein. Die Schnittkraftlinien werden durch punktweise Ermittlung konstruiert. Durch geeignete Schnitte berechnen wir folgende Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} N_C^{\circledcirc} &= 0, & Q_C^{\circledcirc} &= -F, & M_C^{\circledcirc} &= -aF, \\ N_C^{\circledast} &= -A = -\frac{5}{2} F, & Q_C^{\circledast} &= 0, & M_C^{\circledast} &= 0, \\ N_D^{\circledast} &= 0, & Q_D^{\circledast} &= -F + A = \frac{3}{2} F, & M_D^{\circledast} &= -3aF + 2aA = 2aF. \end{aligned}$$

Beim Übergang vom Bereich ③ zum Bereich ④ gilt analog zu (7.25)

$$N_D^{\circledcirc} = Q_D^{\circledcirc} = \frac{3}{2} F, \quad Q_D^{\circledcirc} = -N_D^{\circledast} = 0, \quad M_D^{\circledcirc} = M_D^{\circledast} = 2aF.$$

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} N_E^{\circledcirc} &= 0, & Q_E^{\circledcirc} &= -F, & M_E^{\circledcirc} &= 0, \\ N_A^{\circledast} &= -A = -\frac{5}{2} F, & Q_A^{\circledast} &= 0, & M_A^{\circledast} &= 0, \\ N_B^{\circledast} &= -B_V = \frac{3}{2} F, & Q_B^{\circledast} &= -B_H = -2F, & M_B^{\circledast} &= 0 \end{aligned}$$

erhält man die in Abb. 7.23c dargestellten Schnittkraftlinien.

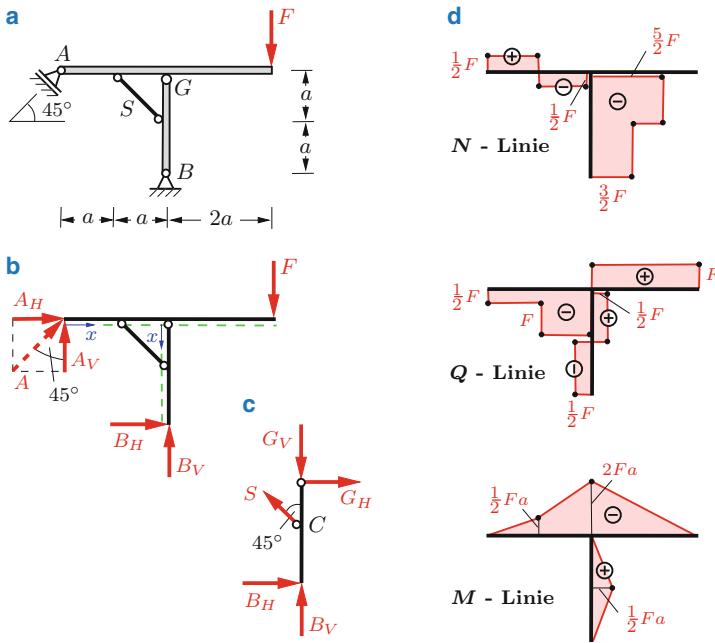
Zur Probe kann man die Gleichgewichtsbedingungen für den freigeschnittenen Verzweigungspunkt C des Rahmens verwenden.

Das Beispiel der Schnittgrößen in vertikaler Richtung zeigt, dass die entsprechende Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist:

$$V_C^{\circledcirc} - V_C^{\circledast} - N_C^{\circledast} = 0 \quad \rightarrow \quad -F - \frac{3}{2} F + \frac{5}{2} F = 0.$$

■

► **Beispiel 7.10** Man bestimme die Schnittkraftlinien für die Balken des in Abb. 7.24a dargestellten Tragwerks.



**Abb. 7.24** Schnittgrößen bei Rahmen: Beispiel

**Lösung** Wir ermitteln zuerst die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Tragwerk (Abb. 7.24b). Mit  $A_V = A_H$  erhalten wir

$$\stackrel{\curvearrowleft}{B}: \quad 2a A_V + 2a A_H + 2a F = 0 \quad \rightarrow \quad A_V = A_H = -\frac{F}{2},$$

$$\rightarrow: \quad A_H + B_H = 0 \quad \rightarrow \quad B_H = \frac{F}{2},$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{A}: \quad 2a B_V + 2a B_H - 4a F = 0 \quad \rightarrow \quad B_V = \frac{3}{2} F.$$

Anschließend berechnen wir die Stabkraft und die Gelenkkraft aus den Gleichgewichtsbedingungen für den vertikalen Balken (Abb. 7.24c):

$$\begin{aligned} \textcircled{C}: \quad a G_H - a B_H &= 0 \quad \rightarrow \quad G_H = \frac{F}{2}, \\ \textcircled{G}: \quad 2a B_H - a \frac{\sqrt{2}}{2} S &= 0 \quad \rightarrow \quad S = \sqrt{2} F, \\ \uparrow: \quad B_V + \frac{\sqrt{2}}{2} S - G_V &= 0 \quad \rightarrow \quad G_V = \frac{5}{2} F. \end{aligned}$$

Zur Festlegung der Vorzeichen der Schnittgrößen führen wir die gestrichelten Fasern nach Abb. 7.24b ein. Beachtet man, dass es infolge der Horizontal- und der Vertikalkomponente der Stabkraft  $S$  und der Gelenkkraft ( $G_H, G_V$ ) zu Sprüngen bei Normalkraft und bei Querkraft kommt, dann können diese Schnittkraftlinien ohne weitere Rechnung skizziert werden. Für die Momentenlinie bietet sich eine punktweise Ermittlung an (Abb. 7.24d). ■

► **Beispiel 7.11** Der Kreisbogenträger nach Abb. 7.25a wird durch eine Einzelkraft  $F$  belastet.

Gesucht sind die Schnittgrößen.

**Lösung** Die Lagerkräfte folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Bogen (Abb. 7.25b) zu

$$B = \frac{1}{4} F, \quad A_V = -B = -\frac{1}{4} F, \quad A_H = F.$$

Nach Einführen der gestrichelten Faser werden die Schnittgrößen durch Gleichgewichtsbetrachtungen an freigeschnittenen Bogenteilen bestimmt. Zunächst führen wir einen Schnitt an einer beliebigen Stelle  $\varphi$  im Bereich I ( $0 < \varphi < 30^\circ$ ). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern hier nach Abb. 7.25c

$$\begin{aligned} \nearrow: \quad N + A_V \cos \varphi - A_H \sin \varphi &= 0 \quad \rightarrow \quad \underline{N} = \left( \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos \varphi \right) F, \\ \searrow: \quad Q - A_V \sin \varphi - A_H \cos \varphi &= 0 \quad \rightarrow \quad \underline{Q} = \left( \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right) F, \\ \curvearrowleft: \quad M - r \sin \varphi A_H - r(1 - \cos \varphi) A_V &= 0 \quad \rightarrow \quad \underline{M} = \left( \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \right) r F. \end{aligned}$$

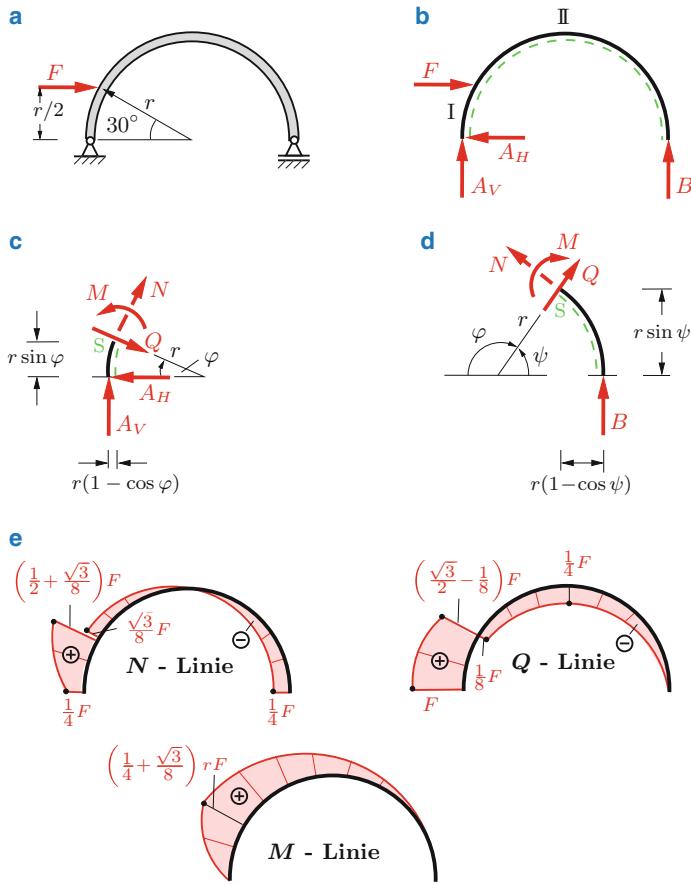


Abb. 7.25 Kreisbogenträger

Da der Winkel  $\varphi$  beliebig ist, erhält man somit den Verlauf der Schnittgrößen im gesamten Bereich I. Entsprechend findet man mit dem Hilfswinkel  $\psi = \pi - \varphi$  im Bereich II ( $30^\circ < \varphi < 180^\circ$ ) nach Abb. 7.25d

$$\nwarrow: N + B \cos \psi = 0 \rightarrow \underline{N} = -\frac{1}{4} F \cos \psi = \frac{1}{4} F \cos \varphi,$$

$$\nearrow: Q + B \sin \psi = 0 \rightarrow \underline{Q} = -\frac{1}{4} F \sin \psi = -\frac{1}{4} F \sin \varphi,$$

$$\curvearrowleft: -M + r(1 - \cos \psi)B = 0 \rightarrow \underline{M} = \frac{1}{4} (1 - \cos \psi)r F = \frac{1}{4} (1 + \cos \varphi)r F.$$

Die Schnittgrößen sind in Abb. 7.25e senkrecht zum Bogen aufgetragen. Die Sprünge  $\Delta N = F/2$  in der Normalkraft und  $\Delta Q = \sqrt{3} F/2$  in der Querkraft bei  $\varphi = 30^\circ$  entsprechen den Komponenten von  $F$  normal und tangential zum Bogen.



## 7.4 Schnittgrößen bei räumlichen Tragwerken

Wir haben uns bisher bei der Ermittlung der Schnittgrößen der Einfachheit halber auf ebene Tragwerke beschränkt, die durch Kräftegruppen in ihrer Ebene belastet sind. Nun wollen wir auch *räumlich belastete ebene* Tragwerke sowie *räumliche* Tragwerke untersuchen.

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen einseitig eingespannten Balken, der durch beliebig gerichtete Kräfte  $\mathbf{F}_j$  und Momente  $\mathbf{M}_j$  belastet wird (Abb. 7.26a). Wie in Abschn. 7.1 legen wir die inneren Kräfte durch einen Schnitt senkrecht zur Balkenachse frei. Die über die Querschnittsfläche verteilten Kräfte können wieder durch ihre Resultierende  $\mathbf{R}$  und ihr resultierendes Moment  $\mathbf{M}$  (bezüglich des Schwerpunkts  $S$  der Querschnittsfläche) ersetzt werden (Abb. 7.26b). Dabei besitzen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}$  nun im allgemeinen Komponenten in allen *drei* Koordinatenrichtungen:

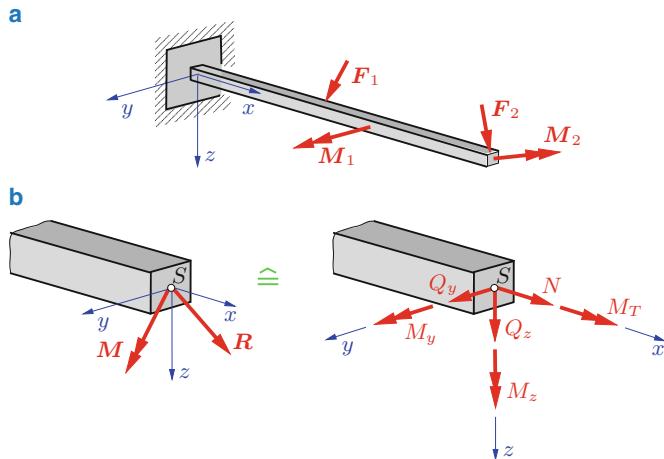
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_T \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Die Kraftkomponente in  $x$ -Richtung (*normal* zur Schnittebene) ist wie in Abschn. 7.1 die Normalkraft  $N$ . Die Schnittkräfte in  $y$ - und in  $z$ -Richtung (*senkrecht* zur Balkenachse) sind die Querkräfte  $Q_y$  und  $Q_z$ .

Die Komponente des Momentes um die  $x$ -Achse heißt *Torsionsmoment*  $M_T$ ; sie führt beim *elastischen* Balken (vgl. Band 2) zu einer Verdrehung. Daneben treten im Querschnitt noch die beiden Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  auf.

Die Vorzeichenkonvention der Schnittgrößen lautet wie in Abschn. 7.1: Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtungen. In Abb. 7.26b sind alle Schnittgrößen mit ihrem positiven Richtungssinn eingezzeichnet. Bei abgewinkelten Tragwerken verwendet man zweckmäßigerweise ein eigenes Koordinatensystem für jeden Teilbereich.

Die Schnittgrößen werden wie bisher aus den Gleichgewichtsbedingungen am geschnittenen System bestimmt.



**Abb. 7.26** Schnittgrößen bei räumlichen Tragwerken

► **Beispiel 7.12** Das räumliche Tragwerk nach Abb. 7.27a wird durch eine Kraft  $F$  belastet.

Gesucht sind die Schnittgrößen.

**Lösung** Bei einem Schnitt an einer beliebigen Stelle durch das Tragwerk greifen am abgeschnittenen Teilsystem keine Lagerreaktionen an. Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Schnittgrößen für dieses Teilsystem aufstellt, dann ist es nicht nötig, die Lagerreaktionen vorab zu bestimmen.

Zur Festlegung der Vorzeichen der Schnittgrößen in den drei Bereichen ① bis ③ verwenden wir drei Koordinatensysteme (Abb. 7.27a). Zunächst führen wir einen Schnitt an einer beliebigen Stelle  $x$  im Bereich ①. An der Schnittstelle werden die Schnittgrößen mit positivem Richtungssinn (negatives Schnittufer!) eingezeichnet, vgl. Abb. 7.27b. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (3.34) folgt:

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F - Q_y = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{Q_y = F}},$$

$$\sum M_{iz} = 0: \quad (c - x)F - M_z = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_z = (c - x)F}}.$$

Alle anderen Schnittgrößen sind im Bereich ① gleich Null.

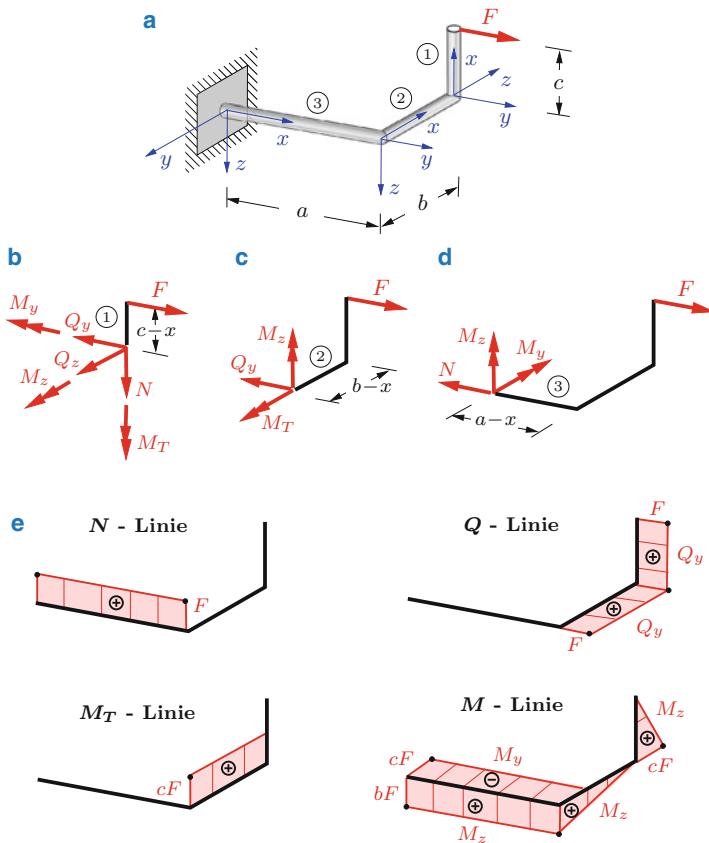


Abb. 7.27 Räumliches Tragwerk

Entsprechend erhält man bei einem Schnitt an einer Stelle  $x$  im Bereich ②, vgl. Abb. 7.27c (die Schnittgrößen, die Null sind, sind dabei der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden),

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F - Q_y = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{Q_y = F}},$$

$$\sum M_{ix} = 0: \quad cF - M_T = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_T = cF}},$$

$$\sum M_{iz} = 0: \quad (b-x)F - M_z = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_z = (b-x)F}},$$

bzw. im Bereich ③, vgl. Abb. 7.27d,

$$\sum F_{ix} = 0: \quad F - N = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{N = F}},$$

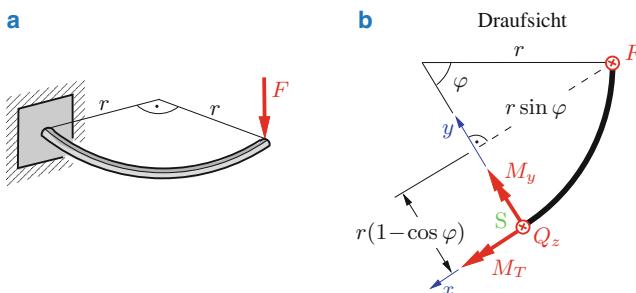
$$\sum M_{iy} = 0: \quad -c F - M_y = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_y = -c F}},$$

$$\sum M_{iz} = 0: \quad b F - M_z = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_z = b F}}.$$

Die Schnittkraftlinien sind in Abb. 7.27e zusammengestellt. Aus den Schnittgrößen an der Einspannstelle kann man die Lagerreaktionen ablesen. ■

► **Beispiel 7.13** Der eingespannte Viertelkreisbogen nach Abb. 7.28a wird durch eine Kraft belastet, die senkrecht auf der Bogebene steht.

Man ermittle die Schnittgrößen.



**Abb. 7.28** Kreisbogenträger: räumliches Problem

**Lösung** Wir schneiden den Bogen an einer beliebigen Stelle  $\varphi$  und betrachten den rechten Teilbogen (Abb. 7.28b). Zur Festlegung der Vorzeichen der Schnittgrößen verwenden wir ein lokales  $x, y, z$ -Koordinatensystem. An der Schnittstelle  $S$  (positives Schnittufer) werden die Querkraft  $Q_z$ , das Torsionsmoment  $M_T$  sowie das Biegemoment  $M_y$  mit ihren positiven Richtungen in das Freikörperbild eingezeichnet. Die anderen Schnittgrößen sind Null und werden der Übersichtlichkeit halber im Freikörperbild weggelassen. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern dann

$$\sum F_{iz} = 0: \quad Q_z + F = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{Q_z = -F}},$$

$$\sum M_{ix}^{(S)} = 0: \quad M_T + F r(1 - \cos \varphi) = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_T = -F r(1 - \cos \varphi)}},$$

$$\sum M_{iy}^{(S)} = 0: \quad M_y + F r \sin \varphi = 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{M_y = -F r \sin \varphi}}. \quad ■$$

## 7.5 Zusammenfassung

- Die Schnittgrößen beim Balken, Rahmen, Bogen sind im ebenen Fall die Normalkraft  $N$ , die Querkraft  $Q$  und das Biegemoment  $M$ .
- Vorzeichenkonvention für Schnittgrößen: positive Schnittgrößen zeigen am positiven (negativen) Schnittufer in positive (negative) Koordinatenrichtung.
- Die Schnittgrößen können mit Hilfe des Schnitteinprinzips wie folgt bestimmt werden:
  - Schnitt durch den Balken (Rahmen, Bogen).
  - Festlegung eines Koordinatensystems.
  - Skizzieren des Freikörperbildes für den betrachteten Teilkörper; alle äußeren Lasten sowie die Schnittgrößen (mit positivem Richtungssinn) einzeichnen.
  - Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen für den Teilkörper. Im ebenen Fall sind dies 3 Gleichungen, im räumlichen Fall 6 Gleichungen.
  - Auflösen der Gleichungen nach den unbekannten Schnittgrößen.
  - Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn das Tragwerk (äußerlich und innerlich) statisch bestimmt ist.
- Bei Balken und geraden Rahmenteilen gelten im ebenen Fall die differentiellen Beziehungen (die lokalen Gleichgewichtsbedingungen)

$$Q' = -q, \quad M' = Q.$$

Bei bekannter äußerer Belastung  $q$  erlauben sie die Ermittlung der Schnittgrößen durch Integration. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen bzw. aus den Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt.

- Oft ist es ausreichend, die Schnittgrößen nur an ausgezeichneten Stellen des Tragwerks zu berechnen. Die Schnittkraftlinien zwischen den ausgezeichneten Stellen sind dann durch die Belastung im jeweiligen Bereich festgelegt; Beziehungen zwischen  $q$ ,  $Q$  und  $M$  beachten!

---

# Arbeit

# 8

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

8.1	Arbeitsbegriff und Potential . . . . .	215
8.2	Der Arbeitssatz . . . . .	221
8.3	Gleichgewichtslagen und Kräfte bei beweglichen Systemen . . . . .	223
8.4	Ermittlung von Reaktions- und Schnittkräften . . . . .	228
8.5	Stabilität einer Gleichgewichtslage . . . . .	233
8.6	Zusammenfassung . . . . .	244

- **Lernziele** Die Leserin und der Leser werden mit den Begriffen Arbeit, konservative Kraft und Potential vertraut gemacht. Darüber hinaus lernen sie das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Arbeitssatz der Statik) kennen. Sie sollen in die Lage versetzt werden, dieses Prinzip zur Bestimmung von Gleichgewichtslagen sowie von Reaktions- und Schnittkräften sachgerecht anzuwenden. Schließlich wird gezeigt, wie man bei konservativen Systemen mit einem Freiheitsgrad aus Energieberechnungen Aussagen zur Stabilität von Gleichgewichtslagen gewinnt.

## 8.1 Arbeitsbegriff und Potential

Der Arbeitsbegriff ist mit Verschiebungen verknüpft und gehört daher eigentlich in die Kinetik (vgl. Band 3), da in der Statik ja gerade keine Bewegungen auftreten sollen. Trotzdem kann man auch in der Statik Aufgaben mit Hilfe des Arbeitsbegriffes lösen, wie wir in Abschn. 8.2 zeigen werden. Hierzu müssen wir zunächst die mechanische Größe „Arbeit“ einführen.

Wir betrachten einen Körper nach Abb. 8.1, der durch eine konstante Kraft  $F$  um eine Strecke  $s$  in Richtung von  $F$  verschoben wird. Als *Arbeit* der Kraft  $F$  definieren wir das Produkt aus  $F$  und der Verschiebung  $s$  des Kraftangriffspunkts  $P$ :

$$W = F s .$$

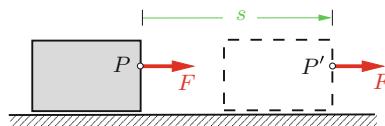
Diese Definition kann mit Hilfe der Vektorrechnung verallgemeinert werden. In Abb. 8.2a bewegt sich der Angriffspunkt  $P$  einer Kraft  $\mathbf{F}$  längs einer beliebigen Bahn. Bei einer infinitesimalen Verschiebung  $d\mathbf{r}$  von der durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  gekennzeichneten augenblicklichen Lage zu einer Nachbarlage verrichtet die Kraft  $\mathbf{F}$  eine Arbeit  $dW$ , die definiert ist durch das Skalarprodukt

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (8.1)$$

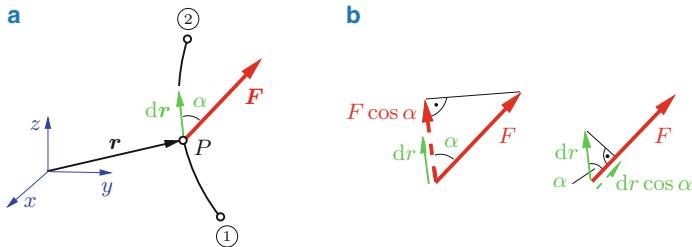
Dieses Produkt aus den Vektoren  $\mathbf{F}$  und  $d\mathbf{r}$  ist nach (A.19) ein Skalar der Größe

$$dW = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \alpha = (F \cos \alpha) dr = F(dr \cos \alpha) . \quad (8.2)$$

Die Arbeit ist dementsprechend das Produkt aus der Kraftkomponente ( $F \cos \alpha$ ) in Richtung des Weges mal dem Weg  $dr$  bzw. das Produkt aus der Kraft  $F$  mal der Komponente des Weges ( $dr \cos \alpha$ ) in Richtung der Kraft (Abb. 8.2b). Wenn Kraft und Wegelement senkrecht aufeinander stehen ( $\alpha = \pi/2$ ), wird keine Arbeit verrichtet:  $dW = 0$ .



**Abb. 8.1** Zum Begriff der Arbeit einer Kraft



**Abb. 8.2** Definition der Arbeit

Die Arbeit über einen endlichen Weg (Abb. 8.2a) vom Punkt ① bis zum Punkt ② ergibt sich aus dem Wegintegral

$$W = \int dW = \int_{①}^{②} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.3)$$

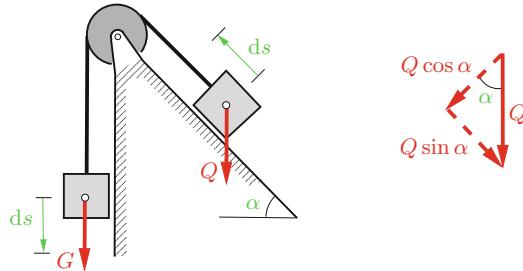
Die Arbeit hat die Dimension  $[F l]$ ; sie wird in der nach dem Physiker James Prescott Joule (1818–1889) benannten Einheit

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$$

angegeben.

In (8.3) kann  $\mathbf{F}(r)$  eine Kraft sein, deren Größe und deren Richtung vom Ort  $\mathbf{r}$  abhängen. Die Ausdrucksweise „Arbeit = Kraft  $\times$  Weg“ gilt daher nur, wenn die beiden Vektoren  $\mathbf{F}$  und  $d\mathbf{r}$  ständig dieselbe Richtung haben ( $\alpha = 0$ ) und der Betrag von  $\mathbf{F}$  konstant ist.

Als Anwendung betrachten wir ein System von zwei Körpern mit den Gewichten  $G$  und  $Q$ , die durch ein undehnbares Seil verbunden sind (Abb. 8.3). Wenn der linke Körper eine Verschiebung um die Strecke  $ds$  nach unten erfährt, wird der rechte Körper um die gleiche Strecke entlang der schiefen Ebene nach oben gezogen. Die Arbeit der Gewichtskraft  $G$  ist dann durch  $dW_G = G ds$  gegeben, da hier Kraft- und Wegrichtung übereinstimmen. Bei der Arbeit von  $Q$  geht nur die Komponente  $Q \sin \alpha$  in Richtung der Verschiebung in den Ausdruck für die Arbeit ein. Weil diese Kraftkomponente gegen die Wegrichtung zeigt, gilt  $dW_Q = -Q \sin \alpha ds$ .

**Abb. 8.3** Anwendungsbeispiel

Als weiteres Beispiel betrachten wir den beidseitigen Hebel nach Abb. 8.4a, an dem die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  angreifen. Bei einer infinitesimalen Drehung  $d\varphi$  um den Lagerpunkt  $A$  verrichtet die Kraft  $F_1$  die Arbeit (Abb. 8.4b)

$$dW = F_1 \, ds_1 = F_1 \, a \, d\varphi.$$

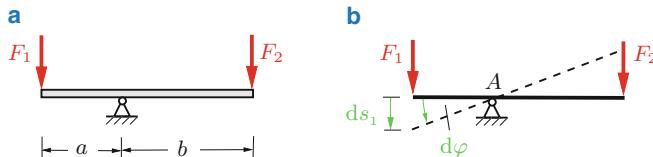
Das Produkt aus Kraft  $F_1$  und senkrechtem Abstand  $a$  ist nach (3.5) das Moment  $M_1$  der Kraft  $F_1$  um  $A$ , so dass die Arbeit auch durch

$$dW = M_1 \, d\varphi$$

ausgedrückt werden kann.

Führt man in Verallgemeinerung einen Drehvektor  $d\varphi$  ein, dessen Richtung mit der Drehachse übereinstimmt und dessen Betrag der Winkel  $d\varphi$  ist, so verrichtet ein Momentenvektor  $\mathbf{M}$  bei einer infinitesimalen Drehung eine Arbeit

$$dW = \mathbf{M} \cdot d\varphi. \quad (8.4)$$

**Abb. 8.4** Beidseitiger Hebel

Durch Integration erhält man analog zu (8.3) für eine endliche Drehung

$$W = \int dW = \int \mathbf{M} \cdot d\varphi. \quad (8.5)$$

Sind  $\mathbf{M}$  und  $d\varphi$  parallel, so folgt aus (8.4)  $dW = M d\varphi$ . Ist außerdem  $M$  bei einer endlichen Drehung  $\varphi$  konstant, so ergibt sich aus (8.5)  $W = M \varphi$ .

Da ein Winkel dimensionslos ist, haben Moment und Arbeit – obwohl sie physikalisch verschiedene Größen sind – dieselbe Dimension [ $F l$ ].

Betrachten wir nun als Sonderfall einer Kraft das konstante Gewicht eines Körpers (Totlast) in der Umgebung der Erdoberfläche (Abb. 8.5). Zeigt  $z$  von der Erdoberfläche senkrecht nach außen, so lautet der Kraftvektor

$$\mathbf{G} = -G \mathbf{e}_z.$$

Mit der Änderung des Ortsvektors

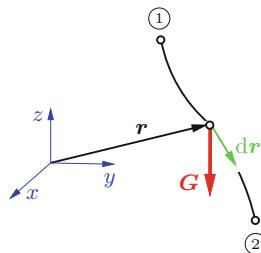
$$dr = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$$

und

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (\text{vgl. (A.22)})$$

folgt aus (8.1)

$$dW = \mathbf{G} \cdot dr = -G \mathbf{e}_z \cdot (dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z) = -G dz.$$



**Abb. 8.5** Arbeit der Gewichtskraft

Damit wird nach (8.3) die Arbeit des Gewichts längs der Bahn von ① nach ②

$$W = \int dW = - \int_{z_1}^{z_2} G dz = G (z_1 - z_2). \quad (8.6)$$

Sie hängt nur von der Lage der Endpunkte ab. Das Gewicht verrichtet dieselbe Arbeit, wenn sich sein Angriffspunkt auf einer beliebigen anderen Bahn zwischen denselben Endpunkten ① und ② bewegt: die Arbeit ist *wegunabhängig*.

Kräfte, deren Arbeit nicht von der Bahn abhängt, heißen *konservative Kräfte* oder *Potentialkräfte*. Diese Kräfte, und nur sie, lassen sich aus einem *Potential  $\Pi$*  ableiten, das definiert ist als

$$\Pi = -W = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.7)$$

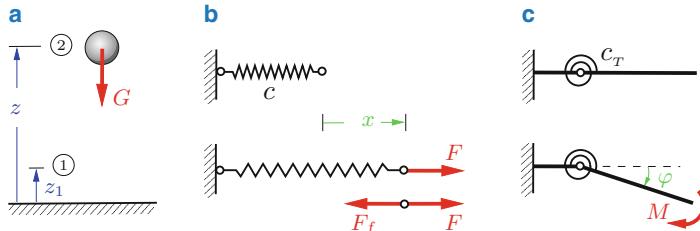
Man nennt  $\Pi$  auch die *potentielle Energie*. Wie man im allgemeinen Fall eine konservative Kraft  $\mathbf{F}$  aus ihrem Potential  $\Pi$  ableitet, wird in Band 3 gezeigt.

Als erstes Beispiel betrachten wir wieder die Gewichtskraft  $G$  (Abb. 8.6a). Nach (8.6) gilt hier mit  $z_2 = z$

$$\Pi(z) = -W = G (z - z_1) = G z - G z_1. \quad (8.8a)$$

In diesem Fall erhalten wir die Gewichtskraft  $G$  aus dem Potential, indem wir die negative Ableitung des Potentials nach der Ortskoordinate  $z$  bestimmen:

$$-\frac{d\Pi}{dz} = -G. \quad (8.8b)$$



**Abb. 8.6** Potentiale von **a** Gewicht, **b** Federkraft und **c** Drehfedermoment

Das Minuszeichen bei  $G$  deutet an, dass das Gewicht in negative  $z$ -Richtung wirkt.

Nach (8.8a) hängt das Potential von der Wahl des Koordinatensystems (Lage des Ursprungs) ab; es ist bis auf eine Konstante (hier  $Gz_1$ ) bestimmt. Diese Konstante geht jedoch bei der Berechnung der Kraft  $G$  nach (8.8b) nicht ein. Sie hat auch keinen Einfluss auf die Arbeit, die ja nur von der Höhendifferenz  $z - z_1$  abhängt. Man kann daher die Lage des Koordinatensystems beliebig wählen. Oft ist es zweckmäßig, den Nullpunkt der  $z$ -Koordinate so festzulegen, dass das Potential für  $z = 0$  gerade Null wird:  $\Pi(0) = 0$  (Nullniveau).

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Potential einer Federkraft. Die Feder nach Abb. 8.6b werde aus ihrer entspannten Lage durch eine äußere Kraft  $F$  um eine Strecke  $x$  verlängert. Aus Messungen ist bekannt, dass zwischen der Kraft  $F$  und dem Federweg  $x$  der lineare Zusammenhang  $F = c x$  besteht, sofern die Federverlängerung hinreichend klein bleibt. Dabei ist  $c$  die *Federkonstante*; sie hat die Dimension Kraft durch Länge und damit z. B. die Einheit  $\text{N cm}^{-1}$ . Die Federkraft  $F_f$  ist als Reaktionskraft zu  $F$  gegen den Weg gerichtet und verrichtet daher bei der Auslenkung eine Arbeit

$$W = - \int_0^x F_f d\bar{x} = - \int_0^x c \bar{x} d\bar{x} = -\frac{1}{2} c x^2.$$

Damit wird nach (8.7) das Potential der Federkraft

$$\Pi(x) = \frac{1}{2} c x^2. \quad (8.9)$$

Es stellt die bei der Federverlängerung in der Feder gespeicherte Energie dar. Die Federkraft  $F_f$  folgt wieder aus der negativen Ableitung von  $\Pi$  nach der Koordinate:

$$F_f = -\frac{d\Pi}{dx} = -c x.$$

Bei einer linearen Drehfeder nach Abb. 8.6c gilt analog zu  $F = c x$  der Zusammenhang  $M = c_T \varphi$  zwischen dem Moment  $M$  und dem Verdrehwinkel  $\varphi$ . Die *Drehfederkonstante*  $c_T$  hat die Dimension  $[Fl]$ . In Analogie zu (8.9) erhält man nach Ersetzen von  $c$  durch  $c_T$  und von  $x$  durch  $\varphi$  das Potential der Drehfeder zu

$$\Pi = \frac{1}{2} c_T \varphi^2. \quad (8.10)$$

## 8.2 Der Arbeitssatz

Bisher haben wir die Arbeit für den Fall berechnet, dass sich der Angriffspunkt einer Kraft längs eines Weges wirklich verschiebt. Man kann sich den Arbeitsbegriff aber auch in der Statik, bei der ja *keine* Verschiebungen auftreten, zunutze machen, indem man die *wirklichen* Verschiebungen durch *gedachte* Verschiebungen ersetzt. Man nennt sie *virtuelle Verrückungen* und versteht hierunter Verschiebungen (oder Drehungen), die

- a) gedacht, d. h. in Wirklichkeit gar nicht vorhanden,
- b) infinitesimal klein,
- c) geometrisch (kinematisch) möglich, d. h. mit den Bindungen des Systems verträglich

sind.

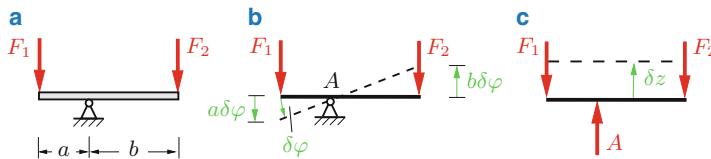
Zur Unterscheidung von wirklichen Verschiebungen  $dr$  kennzeichnen wir die virtuellen Verschiebungen  $\delta r$  mit dem der Variationsrechnung entnommenen  $\delta$ -Symbol. Damit wird die von Kräften bzw. Momenten bei einer virtuellen Verrückung verrichtete *virtuelle Arbeit*

$$\text{nach (8.1)} \quad \delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$$

$$\text{bzw. nach (8.4)} \quad \delta W = \mathbf{M} \cdot \delta \varphi.$$

Wir betrachten nun wieder den beidseitigen Hebel (Abb. 8.7a) und berechnen die bei einer virtuellen Verrückung verrichtete Arbeit. Eine virtuelle Verrückung, d. h. eine Auslenkung, welche mit den Bindungen verträglich ist, ist nach Abb. 8.7b eine Drehung um das Lager A mit dem Winkel  $\delta\varphi$ . Dabei verrichten die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  insgesamt die virtuelle Arbeit

$$\delta W = F_1 a \delta\varphi - F_2 b \delta\varphi = (F_1 a - F_2 b) \delta\varphi.$$



**Abb. 8.7** Zum Arbeitssatz

Das Minuszeichen im zweiten Glied berücksichtigt, dass die Kraft  $F_2$  gegen den nach oben gerichteten Weg  $b \delta\varphi$  zeigt. In der Gleichgewichtslage verschwindet wegen der Momentengleichgewichtsbedingung  $F_2 b = F_1 a$  (Hebelgesetz von Archimedes) der Ausdruck in der Klammer. Damit folgt für dieses Beispiel, dass im Gleichgewichtsfall die virtuelle Arbeit verschwindet:  $\delta W = 0$ . Wesentlich ist dabei, dass nur die *eingeprägten* Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  (vgl. Abschn. 1.4) in die virtuelle Arbeit eingehen, während die Lagerkraft in  $A$  keinen Anteil liefert.

Das Ergebnis am Hebel lässt sich verallgemeinern. Als Axiom fordern wir, dass bei einem beliebigen System, das unter der Wirkung von beliebig vielen eingeprägten Kräften  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  und Momenten  $\mathbf{M}_i^{(e)}$  steht, für die Gleichgewichtslage die gesamte virtuelle Arbeit verschwindet:

$$\delta W = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum \mathbf{M}_i^{(e)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i = 0. \quad (8.11)$$

Da dieses Gleichgewichtsaxiom eine Aussage über die Arbeit bei virtuellen Verrückungen macht, bezeichnen wir es als *Arbeitssatz* der Statik. Er lautet in Worten:

Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Arbeit der eingeprägten Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung aus dieser Lage verschwindet.

Häufig wird die Aussage  $\delta W = 0$  auch *Prinzip der virtuellen Verrückungen* oder *Prinzip der virtuellen Arbeiten* genannt. In der Mechanik deformierbarer Körper hat dieses Prinzip in erweiterter Form eine besondere Bedeutung (vgl. Band 2).

Man kann allgemein aus dem Arbeitssatz die Gleichgewichtsbedingungen und umgekehrt aus den Gleichgewichtsbedingungen, die ja selbst auch axiomatischen Charakter haben, den Arbeitssatz ableiten. Die gesamte Statik lässt sich daher entweder auf den Gleichgewichtsbedingungen oder auf dem Arbeitssatz aufbauen. Für die praktische Anwendung hat der Arbeitssatz den großen Vorteil, dass man durch geschickte Wahl der virtuellen Verrückungen die Anzahl der Unbekannten in einer Gleichung häufig reduzieren kann. Der Nachteil ist dabei, dass man unter Umständen dafür komplizierte kinematische Bedingungen aufstellen muss.

Mit dem Arbeitssatz kann man nicht nur Systeme behandeln, die eine Bewegungsmöglichkeit haben, sondern auch Systeme, die starr gelagert sind. Im zweiten

Fall muss man jedoch einzelne Bindungen lösen und die Bindungskräfte im Arbeitssatz dann wie eingeprägte Kräfte berücksichtigen. So können wir beim Hebel nach Abb. 8.7c das Lager  $A$  entfernen, die Lagerkraft  $A$  wie eine eingeprägte Kraft betrachten und erhalten dann bei einer virtuellen Verschiebung  $\delta z$ , die jetzt auch der Angriffspunkt der Lagerkraft erfährt, aus dem Arbeitssatz

$$\delta W = A \delta z - F_1 \delta z - F_2 \delta z = (A - F_1 - F_2) \delta z = 0.$$

Da die virtuelle Verrückung  $\delta z$  selbst ungleich Null ist, muss die Klammer verschwinden. Hieraus folgt die Lagerkraft  $A = F_1 + F_2$ .

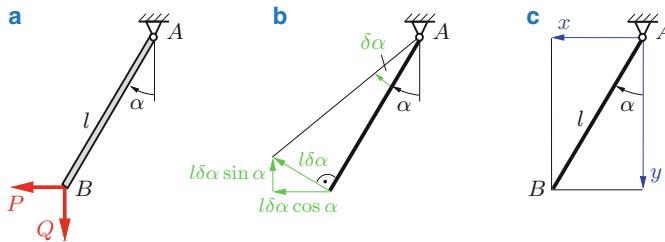
### 8.3 Gleichgewichtslagen und Kräfte bei beweglichen Systemen

Bei Systemen von starren Körpern, deren geometrische Bindungen eine Beweglichkeit zulassen, können mit dem Arbeitssatz bei gegebenen Kräften Gleichgewichtslagen oder bei einer gegebenen Gleichgewichtslage die hierzu notwendigen Kräfte berechnet werden. Dabei bieten sich zur Aufstellung der Arbeitsbilanz zwei Wege an:

- a) Man skizziert das System in Ausgangs- und Nachbarlage, liest anschaulich ab, welche Größen und Richtungen die jeder Kraft zugeordneten Verrückungen haben und setzt diese mit ihren wirklichen Vorzeichen in den Arbeitssatz ein.
- b) Man beschreibt die Lage des Angriffspunktes jeder Kraft in einem gewählten Koordinatensystem und findet dann die Verrückungen rein formal als infinitesimale Änderungen der Lagekoordinaten. Dabei nutzt man aus, dass das  $\delta$ -Symbol wie ein Differential behandelt werden kann. Ist z. B.  $\mathbf{r}$  eine Funktion einer Koordinate  $\alpha$ , d. h.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha)$ , so gilt  $\delta \mathbf{r} = (\mathbf{dr}/d\alpha)\delta\alpha$ . Das richtige Vorzeichen von  $\delta \mathbf{r}$  fällt dabei automatisch an.

Wir wollen beide Methoden an einem einfachen Beispiel darstellen. Nach Abb. 8.8a trägt eine gewichtslose, um  $A$  drehbar gelagerte Stange der Länge  $l$  an ihrem Ende  $B$  zwei Lasten  $P$  und  $Q$ . Gesucht ist der Winkel  $\alpha$ , der sich in der Gleichgewichtslage einstellt.

Bei der anschaulichen Methode denken wir uns die Stange aus einer beliebigen (noch unbekannten) Lage  $\alpha$  um  $\delta\alpha$  ausgelenkt (Abb. 8.8b). Dann verschiebt sich der Kraftangriffspunkt um  $l \delta\alpha \sin \alpha$  nach oben und um  $l \delta\alpha \cos \alpha$  nach links. Nach



**Abb. 8.8** Bewegliches System

dem Arbeitssatz

$$\delta W = P l \delta \alpha \cos \alpha - Q l \delta \alpha \sin \alpha = (P \cos \alpha - Q \sin \alpha) l \delta \alpha = 0$$

ergibt sich daher wegen  $\delta \alpha \neq 0$  der gesuchte Winkel für die Gleichgewichtslage aus

$$P \cos \alpha - Q \sin \alpha = 0 \quad \text{zu} \quad \tan \alpha = \frac{P}{Q}.$$

Bei der formalen Vorgehensweise beschreiben wir die Lage des Kraftangriffspunktes  $B$  durch den vom *festen* Lager gezählten Ortsvektor  $r$  bzw. durch seine Koordinaten  $x = l \sin \alpha$  und  $y = l \cos \alpha$  (Abb. 8.8c). Die Verrückungen folgen durch Differentiation zu

$$\delta x = \frac{dx}{d\alpha} \delta \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha, \quad \delta y = \frac{dy}{d\alpha} \delta \alpha = -l \sin \alpha \delta \alpha.$$

Einsetzen in den jetzt ebenfalls formal anzuschreibenden Arbeitssatz (beide Kräfte zeigen *in* Richtung der Koordinaten)

$$\begin{aligned} \delta W &= P \delta x + Q \delta y = P l \cos \alpha \delta \alpha - Q l \sin \alpha \delta \alpha \\ &= (P \cos \alpha - Q \sin \alpha) l \delta \alpha = 0 \end{aligned}$$

führt auf das gleiche Ergebnis wie vorher.

Man erkennt den Vorteil der formalen Methode: während man sich beim ersten Lösungsweg die Vorzeichen der Verrückungen genau überlegen muss, ergibt sich bei der formalen Methode aus der Rechnung von selbst, dass für  $\delta \alpha > 0$  die Verrückung  $\delta y < 0$  ist. Der formale Weg ist bei komplizierter Kinematik

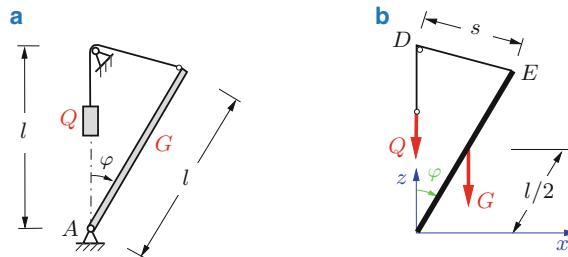
(Geometrie) stets vorzuziehen, da man sich dort nicht immer auf die Anschauung verlassen kann. Es sei angemerkt, dass man diese Aufgabe natürlich auch durch Aufstellen des Momentengleichgewichts bezüglich  $A$  lösen kann:  $\hat{A}: P l \cos \alpha - Q l \sin \alpha = 0$ .

Hat ein System mehrere unabhängige Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade), so muss man die Lage  $\mathbf{r}(\alpha, \beta, \dots)$  eines Kraftangriffspunktes durch mehrere unabhängige Koordinaten  $\alpha, \beta, \dots$  beschreiben. Die Verrückungen findet man dann analog zum totalen Differential einer Funktion von mehreren Veränderlichen:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \delta \beta + \dots . \quad (8.12)$$

► **Beispiel 8.1** Eine Zugbrücke vom Gewicht  $G$  kann nach Abb. 8.9a über ein gewichtsloses Seil durch ein Gegengewicht  $Q$  angehoben werden.

Man ermittle die Gleichgewichtslagen.



**Abb. 8.9** Gleichgewichtslagen einer Zugbrücke

**Lösung** Da der Winkel  $\varphi$  eindeutig die Lage beschreibt, hat das System einen Freiheitsgrad.

Bei einer Winkeländerung  $\delta\varphi$  verschieben sich die Angriffspunkte der Kräfte  $G$  und  $Q$ . Zur Berechnung der virtuellen Arbeit von  $G$  benötigen wir nur die Änderung der Höhe von  $G$ , da das Gewicht bei einer waagerechten Verschiebung keine Arbeit verrichtet. Aus der vom festen Lager gezählten Koordinate folgt

$$z_G = \frac{l}{2} \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \delta z_G = \frac{dz_G}{d\varphi} \delta\varphi = -\frac{l}{2} \sin \varphi \delta\varphi .$$

Schwieriger ist die Berechnung der Verrückung von  $Q$ . Dazu führen wir nach Abb. 8.9b als Hilfsgröße die vom festen Punkt  $D$  gezählte Länge

$$s = 2l \sin \frac{\varphi}{2}$$

ein. Bei einer virtuellen Winkeländerung  $\delta\varphi$  entspricht die Verrückung von  $Q$  wegen des undehnbaren Seils der Längenänderung  $\delta s$  von  $s$ . Es gilt daher

$$\delta z_Q = \delta s = \frac{ds}{d\varphi} \delta\varphi = l \cos \frac{\varphi}{2} \delta\varphi.$$

Unter Beachtung, dass beide Kräfte *gegen* die positive  $z$ -Richtung wirken, lautet der Arbeitssatz

$$\delta W = -G \delta z_G - Q \delta z_Q = \left( G \frac{l}{2} \sin \varphi - Q l \cos \frac{\varphi}{2} \right) \delta\varphi = 0.$$

Mit  $\sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$  ergibt sich wegen  $\delta\varphi \neq 0$

$$\cos \frac{\varphi}{2} \left( G \sin \frac{\varphi}{2} - Q \right) = 0.$$

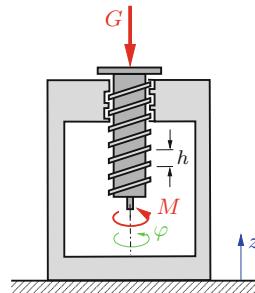
Die erste Lösung  $\cos(\varphi/2) = 0$  führt auf  $\varphi = \pi$ . Daher bleibt als Lösung nur

$$\underline{\underline{\sin \frac{\varphi}{2}}} = \underline{\underline{\frac{Q}{G}}}.$$

Damit  $\varphi$  im technisch interessierenden Bereich  $0 < \varphi < \pi/2$  liegt, muss  $\sin(\varphi/2) < \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$  sein. Daraus folgt als Bedingung für die Last  $Q$ :

$$\frac{Q}{G} < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

► **Beispiel 8.2** Welches Moment  $M$  muss an dem in Abb. 8.10 schematisch dargestellten Wagenheber angreifen, damit dem Gewicht  $G$  das Gleichgewicht gehalten wird? Die Spindel der Ganghöhe  $h$  laufe reibungslos in ihrem Gewinde.



**Abb. 8.10** Wagenheber

**Lösung** Nach dem Arbeitssatz herrscht Gleichgewicht, wenn die bei einer virtuellen Verrückung von Kraft  $G$  und Moment  $M$  verrichtete Arbeit insgesamt verschwindet:

$$\delta W = M \delta\varphi - G \delta z = 0.$$

Dabei wurden  $\varphi$  in Richtung des Momentes und  $z$  senkrecht nach oben, d. h. gegen die Kraft  $G$  gezählt. Die Verrückungen  $\delta\varphi$  und  $\delta z$  sind nicht unabhängig voneinander. Bei einer Drehung um  $\Delta\varphi = 2\pi$  wird die Spindel um die Ganghöhe  $\Delta z = h$  gehoben. Für eine Drehung um  $\delta\varphi$  folgt daher die Verrückung  $\delta z = (h/2\pi)\delta\varphi$ . Damit ergibt sich aus dem Arbeitssatz

$$\delta W = \left( M - \frac{h}{2\pi} G \right) \delta\varphi = 0$$

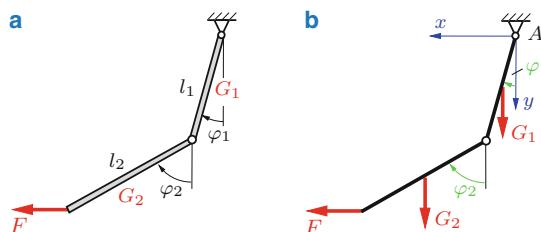
das zum Anheben notwendige Moment

$$\underline{\underline{M = \frac{h}{2\pi} G}}.$$

Man erkennt am Ergebnis, dass man bei einem von außen aufgebrachten Moment  $M = lK$  für  $l \gg h$  mit einer kleinen Kraft  $K$  ein großes Gewicht  $G$  anheben kann. ■

► **Beispiel 8.3** Zwei nach Abb. 8.11a gelenkig verbundene Stangen mit den Gewichten  $G_1$  und  $G_2$  werden durch eine waagerechte Kraft  $F$  ausgelenkt.

Unter welchen Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ist das System im Gleichgewicht?



**Abb. 8.11** Gleichgewichtslage von zwei verbundenen Stangen

**Lösung** Die Lage des Systems ist durch die zwei Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  eindeutig festgelegt. Daher hat das System *zwei* Freiheitsgrade. Zählen wir die Koordinaten der Kraftangriffspunkte vom festen Lager A (Abb. 8.11b) aus, so gilt

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2, \\x_F &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Mit (8.12) folgen die virtuellen Verrückungen

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= -\frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 \delta \varphi_1, \quad \delta y_2 = -l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \delta \varphi_2, \\ \delta x_F &= l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2,\end{aligned}$$

und damit lautet der Arbeitssatz

$$\begin{aligned}\delta W &= G_1 \delta y_1 + G_2 \delta y_2 + F \delta x_F \\&= G_1 \left( -\frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 \right) + G_2 \left( -l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 \right) \\&\quad + F(l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2) \\&= \left( F l_1 \cos \varphi_1 - G_1 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 - G_2 l_1 \sin \varphi_1 \right) \delta \varphi_1 \\&\quad + \left( F l_2 \cos \varphi_2 - G_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \right) \delta \varphi_2 = 0.\end{aligned}$$

Entsprechend den zwei Freiheitsgraden des Systems treten nun auch zwei Verrückungen  $\delta \varphi_1$  und  $\delta \varphi_2$  auf. Da diese aber unabhängig voneinander und beide ungleich Null sind, wird die virtuelle Arbeit  $\delta W$  nur dann Null, wenn beide Klammern *einzel*n verschwinden. Man findet daher

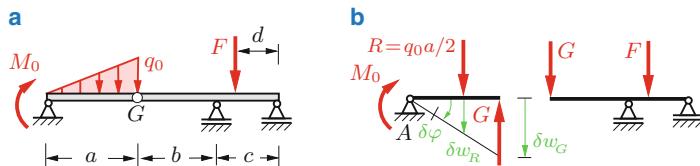
$$\begin{aligned}F l_1 \cos \varphi_1 - G_1 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 - G_2 l_1 \sin \varphi_1 &= 0 \quad \rightarrow \underline{\tan \varphi_1 = \frac{2 F}{G_1 + 2 G_2}}, \\F l_2 \cos \varphi_2 - G_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 &= 0 \quad \rightarrow \underline{\tan \varphi_2 = \frac{2 F}{G_2}}.\end{aligned}$$
■

## 8.4 Ermittlung von Reaktions- und Schnittkräften

Tragwerke, wie Balken, Rahmen oder Fachwerke, sind unverschieblich gelagert. Um mit Hilfe des Arbeitssatzes eine Reaktionskraft berechnen zu können, muss man die zugehörige Bindung lösen und durch die dort wirkende Kraft ersetzen.

Damit wird der Angriffspunkt der Lagerkraft verschieblich, und die Lagerkraft geht wie eine eingeprägte Kraft in den Arbeitssatz ein. Ähnlich kann man durch geeignetes Schneiden sowohl von Gelenken als auch von Bauteilen selbst die im Schnitt übertragenen inneren Gelenk- oder Schnittkräfte wie eingeprägte Kräfte behandeln. Durch den Schnitt entsteht eine Bewegungsmöglichkeit des Systems, und die Schnittkraft leistet bei der zugehörigen virtuellen Verrückung einen Anteil zur virtuellen Arbeit. Nachstehende Beispiele sollen die Vorgehensweise erläutern.

► **Beispiel 8.4** Gesucht ist die Gelenkkraft für den Gerberbalken nach Abb. 8.12a.



**Abb. 8.12** Ermittlung einer Gelenkkraft

**Lösung** Um die Gelenkkraft  $G$  berechnen zu können, müssen wir den Balken mit einem Schnitt durch das Gelenk in zwei Teile zerlegen (Horizontalkomponente der Gelenkkraft ist Null). Der linke Teil kann dann eine Drehung um das Lager  $A$  ausführen, während der rechte Teil vertikal unbeweglich bleibt (Abb. 8.12b). Wir ersetzen die Dreieckschnittlast durch ihre Resultierende  $R = q_0 a / 2$  im Abstand  $2a/3$  von  $A$ . Mit den virtuellen Verrückungen

$$\delta w_R = \frac{2}{3} a \delta\varphi, \quad \delta w_G = a \delta\varphi$$

errechnet sich aus dem Arbeitssatz

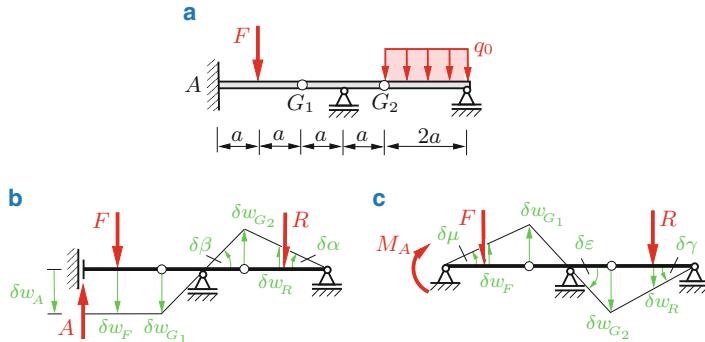
$$\begin{aligned} \delta W &= R \delta w_R + M_0 \delta\varphi - G \delta w_G = \frac{q_0 a}{2} \frac{2}{3} a \delta\varphi + M_0 \delta\varphi - G a \delta\varphi \\ &= \left( q_0 \frac{a^2}{3} + M_0 - G a \right) \delta\varphi = 0 \end{aligned}$$

die gesuchte Gelenkkraft wegen  $\delta\varphi \neq 0$  zu

$$G = \underline{\underline{\frac{q_0 a}{3}}} + \underline{\underline{\frac{M_0}{a}}}.$$

Die Last  $F$  am rechten Teil hat keinen Einfluss auf die Gelenkkraft. ■

► **Beispiel 8.5** Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen für den Gerberträger mit zwei Gelenken nach Abb. 8.13a die Lagerreaktionen bei A. Gegeben sind  $a$ ,  $F$  und  $q_0 = F/3a$ .



**Abb. 8.13** Ermittlung von Lagerreaktionen

**Lösung** Wenn an der Einspannung die vertikale Lagerkraft ermittelt werden soll, müssen wir dort ein Querkraftgelenk anbringen. Dann wird das Lager vertikal verschieblich, und die Lagerkraft  $A$  geht in den Arbeitssatz ein. Da am Lager keine Drehung erfolgt, bleibt das Einspannmoment bei dieser Verschiebung eine Reaktionsgröße und verrichtet daher keine Arbeit. Aus Abb. 8.13b kann man folgenden Zusammenhang zwischen den Verrückungen ablesen:

$$\delta w_A = \delta w_F = \delta w_{G_1} = a \delta \beta, \quad \delta w_R = a \delta \alpha.$$

Die Winkel  $\delta \alpha$  und  $\delta \beta$  sind nicht unabhängig voneinander. Aus der Verschiebung des Gelenkes  $G_2$  folgt die Beziehung

$$\delta w_{G_2} = 2a \delta \alpha = a \delta \beta \quad \rightarrow \quad \delta \alpha = \frac{1}{2} \delta \beta.$$

Aus dem Arbeitssatz

$$\begin{aligned} \delta W &= -A \delta w_A + F \delta w_F - R \delta w_R = -A a \delta \beta + F a \delta \beta - \frac{2}{3} F a \delta \alpha \\ &= \left( -A + F - \frac{2}{3} F \frac{1}{2} \right) a \delta \beta = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir wegen  $\delta\beta \neq 0$  die gesuchte Lagerkraft

$$A = \underline{\underline{\frac{2}{3} F}}.$$

Um das Einspannmoment zu berechnen, ersetzt man die Einspannung durch ein gelenkiges Lager. Dann kann sich der linke Balkenteil um  $A$  drehen, und das Einspannmoment  $M_A$  geht wie eine eingeprägte Last in den Arbeitssatz ein. Da sich das Lager nicht verschiebt, bleibt die Lagerkraft jetzt Reaktionskraft und verrichtet daher keine Arbeit. Die drei Winkel der Verrückungsfigur (Abb. 8.13c) sind über die Verschiebungen der Gelenke gekoppelt. Man erhält

$$\begin{aligned}\delta w_{G_1} &= 2a\delta\mu = a\delta\varepsilon, \quad \delta w_{G_2} = a\delta\varepsilon = 2a\delta\gamma \\ \rightarrow \quad \delta\varepsilon &= 2\delta\mu \quad \text{und} \quad \delta\gamma = \delta\mu.\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Vorzeichen ( $M_A$  dreht gegen  $\delta\mu$ ) liefert der Arbeitssatz:

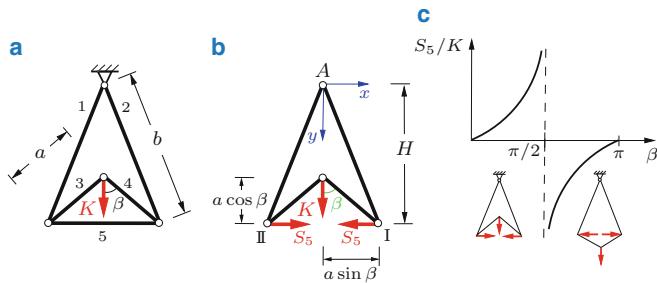
$$\begin{aligned}\delta W &= -M_A\delta\mu - F\delta w_F + R\delta w_R \\ &= -M_A\delta\mu - Fa\delta\mu + \frac{F}{3a}2aa\delta\gamma \\ &= \left(-M_A - Fa + \frac{2}{3}Fa\right)\delta\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{M_A = -\frac{1}{3}Fa}}.\end{aligned}$$

Man erkennt bei beiden Rechnungen den Vorteil des Arbeitssatzes: die Gelenkkkräfte und die restlichen Lagerkräfte, die bei der klassischen Rechnung (vgl. Abschn. 5.3.3) auftreten, verrichten keine Arbeit und müssen daher bei Anwendung des Arbeitssatzes nicht berücksichtigt werden. ■

► **Beispiel 8.6** Für das Fachwerk in Abb. 8.14a (Stablängen  $a$  und  $b$ ) ist die Kraft im Stab 5 in Abhängigkeit vom Winkel  $\beta$  gesucht.

**Lösung** Wir schneiden den Stab 5 und bringen die inneren Kräfte  $S_5$  als eingeprägte Kräfte an (Abb. 8.14b). Zur Bestimmung der Lagen der Kraftangriffspunkte führen wir die Koordinaten  $x, y$  ein, die wir vom festen Lagerpunkt  $A$  aus zählen. Der Angriffspunkt der Kraft  $K$  hat dann die  $y$ -Koordinate

$$y_K = H - a \cos \beta = \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta} - a \cos \beta.$$



**Abb. 8.14** Ermittlung einer Stabkraft

Der Knoten I, an dem  $S_5$  angreift, hat die  $x$ -Koordinate

$$x_I = a \sin \beta.$$

Bei einer virtuellen Verrückung (= kleine Änderung des Winkels  $\beta$ ) werden

$$\begin{aligned} \delta y_K &= \frac{dy_K}{d\beta} \delta \beta = \left( \frac{-a^2 2 \sin \beta \cos \beta}{2 \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}} + a \sin \beta \right) \delta \beta, \\ \delta x_I &= \frac{dx_I}{d\beta} \delta \beta = a \cos \beta \delta \beta. \end{aligned}$$

Da der Knoten II wegen der Symmetrie des Systems eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Verrückung wie der Knoten I erfährt, verrichten die Kräfte insgesamt eine Arbeit

$$\begin{aligned} \delta W &= K \delta y_K - 2 S_5 \delta x_I \\ &= \left[ K a \sin \beta \left( 1 - \frac{a \cos \beta}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}} \right) - 2 S_5 a \cos \beta \right] \delta \beta. \end{aligned}$$

Wegen  $\delta W = 0$  und  $\delta \beta \neq 0$  wird

$$\underline{\underline{S_5 = \frac{1}{2} K \tan \beta \left( 1 - \frac{a \cos \beta}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}} \right)}}.$$

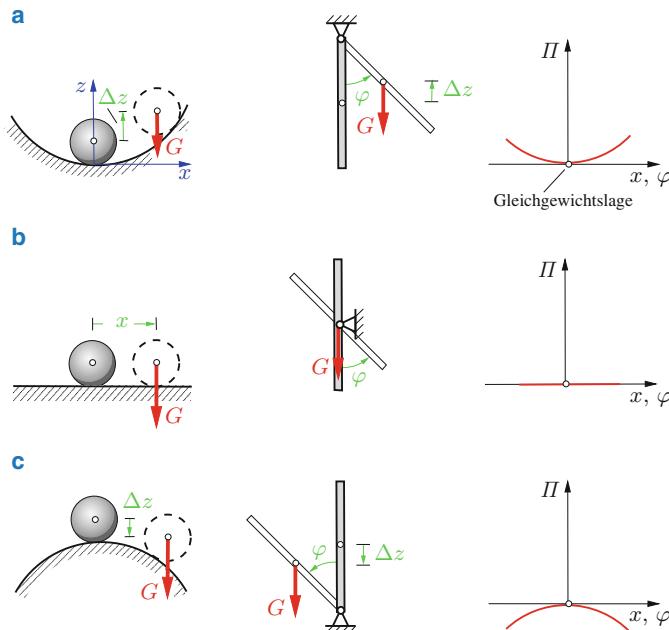
In Abb. 8.14c ist das Verhältnis  $S_5/K$  über  $\beta$  qualitativ aufgetragen. Wegen  $b > a$  ist  $S_5$  für  $0 \leq \beta < \pi/2$  positiv und für  $\pi/2 < \beta \leq \pi$  negativ. Dies kann man sich auch anschaulich überlegen. ■

## 8.5 Stabilität einer Gleichgewichtslage

In Abschn. 8.3 haben wir mit Hilfe des Arbeitssatzes  $\delta W = 0$  Gleichgewichtslagen ermittelt. Nun lehrt aber die Erfahrung, dass es unterschiedliche „Arten“ von Gleichgewicht gibt. Zu ihrer Charakterisierung führt man den Begriff der *Stabilität* ein, den wir in diesem Abschnitt näher erläutern wollen. Dabei beschränken wir alle folgenden Untersuchungen auf konservative Kräfte und auf Systeme mit *einem* Freiheitsgrad. Dann hängt das Potential  $\Pi$  nur von *einer* Lagekoordinate ab. Abb. 8.15 soll die Problemstellung an zwei Beispielen aufzeigen, bei denen jeweils als einzige eingeprägte Kraft das Gewicht wirkt. In Abb. 8.15a befindet sich eine Kugel vom Gewicht  $G$  im tiefsten Punkt einer konkaven Fläche in der Gleichgewichtslage. Bei einer Störung durch eine kleine Auslenkung  $x$  nimmt das Potential um

$$\Delta\Pi = G\Delta z > 0$$

zu. Ähnlich wird bei dem am oberen Ende aufgehängten Stab bei einer Auslenkung um einen kleinen Winkel  $\varphi$  der Angriffspunkt der resultierenden Gewichtskraft  $G$



**Abb. 8.15** Zur Stabilität einer Gleichgewichtslage

angehoben und damit das Potential vergrößert. In beiden Fällen bewegt sich der Körper wieder auf seine Gleichgewichtslage zu, wenn er sich selbst überlassen wird. Man nennt solche Gleichgewichtslagen *stabil*.

Liegt dagegen die Kugel nach Abb. 8.15b auf einer horizontalen Ebene oder ist der Stab in seinem Schwerpunkt gelagert, so ändern sich die Höhe des Gewichts und damit auch sein Potential bei einer Auslenkung  $x$  bzw.  $\varphi$  aus der Gleichgewichtslage nicht:

$$\Delta\Pi = G \Delta z = 0.$$

In diesem Fall sind die ausgelenkten Lagen ebenfalls Gleichgewichtslagen. Der Körper bleibt in Ruhe, wenn er sich selbst überlassen wird. Diese Gleichgewichtslagen heißen *indifferent*.

Wenn die Kugel im höchsten Punkt einer konvex gekrümmten Fläche im Gleichgewicht liegt (Abb. 8.15c) oder der Stab am unteren Ende gelenkig gelagert ist, nimmt das Potential bei einer Auslenkung ab:

$$\Delta\Pi = G \Delta z < 0.$$

Werden Kugel oder Stab in der ausgelenkten Lage sich selbst überlassen, so entfernen sie sich weiter von der Gleichgewichtslage. Solche Gleichgewichtslagen bezeichnet man als *instabil*.

Im rechten Teil von Abb. 8.15 ist der Verlauf des Potentials in Abhängigkeit von  $x$  (für die Kugel) bzw.  $\varphi$  (für den Stab) für alle drei Fälle qualitativ aufgetragen. Man erkennt zunächst aus den Diagrammen, dass das Potential in der Gleichgewichtslage jeweils ein Extremum annimmt. Dies entspricht genau der Aussage des Arbeitssatzes nach (8.11):

$$\delta\Pi = -\delta W = 0.$$

Hängt das Potential nur von einer einzigen Koordinate, z. B.  $x$ , ab, d. h.  $\Pi = \Pi(x)$ , so führt

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{dx} \delta x = 0$$

wegen  $\delta x \neq 0$  auf die Bedingung

$$\frac{d\Pi}{dx} = \Pi' = 0 \quad (8.13)$$

für eine Gleichgewichtslage. Die Potentialkurve hat an der Stelle, die einer Gleichgewichtslage zugeordnet ist, eine waagerechte Tangente.

Das *Stabilitätskriterium* folgt aus dem Verlauf der Potentialkurve in der Umgebung der betrachteten Gleichgewichtslage. Im Fall a) nimmt das Potential bei einer Auslenkung  $x$  bzw.  $\varphi$  zu, im Fall c) ab. Unter Beachtung der zuvor eingeführten Begriffe gilt daher:

$$\Delta\bar{\Pi} \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & \text{stabiles} \\ \equiv 0 & \text{indifferentes} \\ < 0 & \text{instabiles} \end{array} \right\} \text{Gleichgewicht.} \quad (8.14)$$

Dementsprechend hat das Potential in einer stabilen Gleichgewichtslage ein Minimum und in einer instabilen Gleichgewichtslage ein Maximum. Wir können das Stabilitätskriterium (8.14) daher auch durch die für Maximum bzw. Minimum maßgebenden zweiten Ableitungen der Potentialfunktion  $\Pi(x)$  formulieren:

$$\begin{aligned} \Pi''(x_0) > 0 &\rightarrow \text{Minimum} \rightarrow \text{stabil}, \\ \Pi''(x_0) < 0 &\rightarrow \text{Maximum} \rightarrow \text{instabil}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Darin kennzeichnet  $x_0$  die Gleichgewichtslage.

Für  $\Pi''(x_0) = 0$  sind weitere Untersuchungen notwendig. Bezeichnet man das Potential in der Gleichgewichtslage  $x_0$  mit  $\Pi(x_0) = \Pi_0$ , so lässt sich das Potential in einer benachbarten Lage  $x_0 + \delta x$  mit Hilfe der Taylor-Reihe ausdrücken:

$$\Pi(x_0 + \delta x) = \Pi_0 + \Pi'(x_0) \delta x + \frac{1}{2} \Pi''(x_0) (\delta x)^2 + \frac{1}{6} \Pi'''(x_0) (\delta x)^3 + \dots$$

Damit wird die Potentialänderung

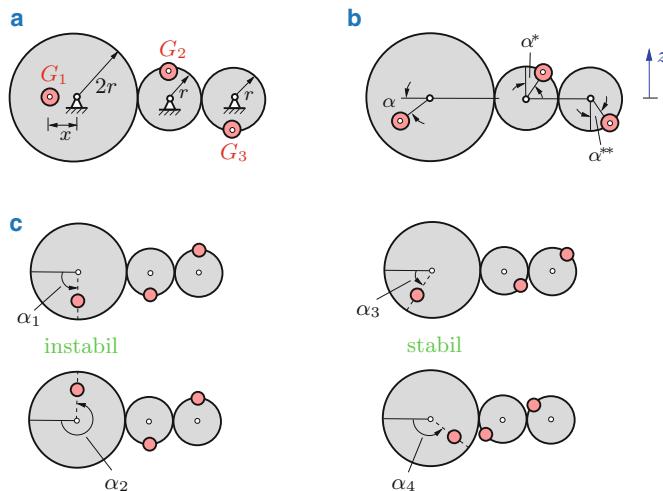
$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \Pi(x_0 + \delta x) - \Pi_0 \\ &= \Pi'(x_0) \delta x + \frac{1}{2} \Pi''(x_0) (\delta x)^2 + \frac{1}{6} \Pi'''(x_0) (\delta x)^3 + \dots \end{aligned} \quad (8.16)$$

Nach (8.13) verschwindet in der Gleichgewichtslage die erste Ableitung:  $\Pi'(x_0) = 0$ . Damit entscheidet das Vorzeichen der zweiten Ableitung  $\Pi''(x_0)$ , ob  $\Delta\Pi$  größer oder kleiner als Null und damit das Gleichgewicht stabil oder instabil ist. Verschwinden  $\Pi''(x_0)$  und alle höheren Ableitungen, so ist nach (8.16)  $\Delta\Pi \equiv 0$ ,

und damit liegt eine *indifferente* Gleichgewichtslage vor. Ist dagegen  $\Pi''(x_0) = 0$ , während höhere Ableitungen ungleich Null sind, so entscheidet das Vorzeichen der nächsten von Null verschiedenen höheren Ableitung in (8.16) über die Art des vorliegenden Gleichgewichtes.

► **Beispiel 8.7** Drei in ihren Mittelpunkten reibungsfrei gelagerte Zahnräder haben die durch Gewichte  $G_1$  bis  $G_3$  dargestellten Unwuchten. Sie werden so montiert, wie Abb. 8.16a zeigt.

Man ermittle für  $G_1 = G_3 = 2G$ ,  $G_2 = G$  und  $x = \sqrt{3}r$  die möglichen Gleichgewichtslagen und untersuche deren Stabilität.



**Abb. 8.16** Gleichgewichtslagen von Zahnrädern

**Lösung** Zur Aufstellung des Potentials führen wir eine Koordinate  $z$  ein, die von den festen Lagerpunkten positiv nach oben zählt. Wir denken uns das große Zahnrad aus dem Montagezustand um einen beliebigen Winkel  $\alpha$  gedreht (Abb. 8.16b). Wegen der Zahnverbindung drehen sich die beiden anderen Räder mit. Der abgerollte Bogen muss auf jedem Rand jeweils gleich sein. Mit den gegebenen Radien wird daher

$$2r\alpha = r\alpha^* = r\alpha^{**} \quad \rightarrow \quad \alpha^* = \alpha^{**} = 2\alpha .$$

Mit den Koordinaten von  $G_1$  bis  $G_3$

$$\begin{aligned} z_1 &= -x \sin \alpha, \quad z_2 = r \cos \alpha^* = r \cos 2\alpha, \\ z_3 &= -r \cos \alpha^{**} = -r \cos 2\alpha \end{aligned}$$

und den gegebenen Gewichten folgt für das Gesamtpotential

$$\begin{aligned} \Pi &= G_1 z_1 + G_2 z_2 + G_3 z_3 \\ &= 2G(-x \sin \alpha) + G r \cos 2\alpha + 2G(-r \cos 2\alpha) \\ &= -G r(2\sqrt{3} \sin \alpha + \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Nach (8.13) ergeben sich die Gleichgewichtslagen aus

$$\begin{aligned} \Pi' &= \frac{d\Pi}{d\alpha} = -G r(2\sqrt{3} \cos \alpha - 2 \sin 2\alpha) \\ &= -2G r \cos \alpha(\sqrt{3} - 2 \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Eine erste Lösung ergibt sich durch Nullsetzen des ersten Faktors:

$$\cos \alpha = 0.$$

Hierzu gehören die Gleichgewichtslagen

$$\underline{\alpha_1 = \pi/2}, \quad \underline{\alpha_2 = 3\pi/2}.$$

Eine zweite Lösung folgt bei Verschwinden der Klammer aus

$$\sqrt{3} - 2 \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \sqrt{3}/2.$$

Hierzu gehören die Gleichgewichtslagen

$$\underline{\alpha_3 = \pi/3}, \quad \underline{\alpha_4 = 2\pi/3}.$$

Auskunft über die Art des Gleichgewichts in diesen vier verschiedenen möglichen Lagen erhält man nach (8.15) aus der zweiten Ableitung des Potentials

$$\begin{aligned} \Pi'' &= \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = -G r(-2\sqrt{3} \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha) \\ &= 2G r(\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Wir setzen die Lösungen  $\alpha_i$  ein und finden:

$$\Pi''(\alpha_1) = \Pi''\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2Gr(\sqrt{3} - 2) < 0 \quad \rightarrow \text{instabile Lage},$$

$$\Pi''(\alpha_2) = \Pi''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2Gr(-\sqrt{3} - 2) < 0 \quad \rightarrow \text{instabile Lage},$$

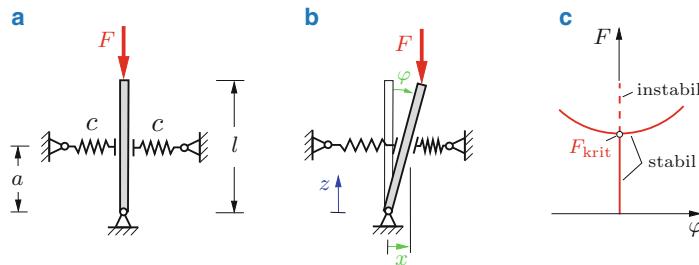
$$\Pi''(\alpha_3) = \Pi''\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2Gr\left[\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = Gr > 0 \rightarrow \text{stabile Lage},$$

$$\Pi''(\alpha_4) = \Pi''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2Gr\left[\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = Gr > 0 \rightarrow \text{stabile Lage}.$$

In Abb. 8.16c sind die vier Gleichgewichtslagen dargestellt. ■

**Beispiel 8.8** Ein gewichtsloser Stab wird nach Abb. 8.17a durch eine Vertikalkraft  $F$  belastet und seitlich durch zwei Federn (Federkonstante jeweils  $c$ ) gehalten. Durch eine geeignete Führung bleiben die Federn bei einer Auslenkung des Stabes horizontal und im Abstand  $a$  vom Boden.

Man untersuche die Gleichgewichtslagen auf ihre Stabilität.



**Abb. 8.17** Gleichgewichtslagen eines Stabes

**Lösung** Um die Potentiale für die Kraft  $F$  bzw. die Federkräfte anzugeben, führen wir die Koordinaten  $z$  bzw.  $x$  ein und betrachten eine beliebige ausgelenkte Lage (Abb. 8.17b). Für die Kraft  $F$  (Totlast, vgl. Abschn. 8.1) wählen wir das Nullniveau in der Höhe des Lagers, d. h. bei  $z = 0$ . Dann gilt für ihr Potential

$$\Pi_F = F z_F .$$

Das Potential einer Feder mit der Federkonstanten  $c$  lautet bei einer Federverlängerung (oder -verkürzung) um  $x$  nach (8.9)

$$\Pi_f = \frac{1}{2} c x^2.$$

Da das System nur einen Freiheitsgrad hat, hängt das Gesamtpotential von einer einzigen Koordinate ab. Es ist zweckmäßig, dafür den Winkel  $\varphi$  (Abb. 8.17b) zu wählen. Mit den geometrischen Beziehungen

$$z_F = l \cos \varphi, \quad x = a \tan \varphi$$

sowie bei Berücksichtigung der *zwei* Federn erhalten wir das Gesamtpotential zu

$$\Pi(\varphi) = F l \cos \varphi + 2 \frac{1}{2} c (a \tan \varphi)^2.$$

Die möglichen Gleichgewichtslagen finden wir mit (8.13) aus

$$\begin{aligned} \Pi' &= \frac{d\Pi}{d\varphi} = -F l \sin \varphi + 2 c a^2 \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0 \\ &\rightarrow \sin \varphi \left( -F l + 2 c a^2 \frac{1}{\cos^3 \varphi} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nullsetzen des ersten Faktors liefert die erste Gleichgewichtslage:

$$\sin \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_1 = 0}}.$$

Weitere Gleichgewichtslagen ergeben sich aus dem Nullsetzen der Klammer:

$$\begin{aligned} -F l + 2 c a^2 \frac{1}{\cos^3 \varphi} &= 0 \quad \rightarrow \quad \cos^3 \varphi_2 = \frac{2 c a^2}{F l} \\ &\rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_2 = \arccos \sqrt[3]{\frac{2 c a^2}{F l}}}}. \end{aligned} \tag{a}$$

Sie existieren nur für  $F l > 2 c a^2$ .

Zur Untersuchung der Stabilität bilden wir die zweite Ableitung des Gesamtpotentials:

$$\begin{aligned}\Pi'' &= \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + 2 c a^2 \frac{\cos^2 \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \tan \varphi \cdot 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \\ &= -F l \cos \varphi + 2 c a^2 \frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \\ &= -F l \cos \varphi + 2 c a^2 \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi}. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Wir setzen zunächst die erste Lösung  $\varphi_1 = 0$  ein:

$$\Pi''(\varphi_1) = (-F l + 2 c a^2) = 2 c a^2 \left(1 - \frac{F l}{2 c a^2}\right). \quad (\text{c})$$

Das Vorzeichen von  $\Pi''$  und damit die Stabilität dieser Gleichgewichtslage hängt vom Verhältnis der in der Klammer auftretenden Parameter ab. Aus (c) folgt daher

$$\begin{aligned}\Pi''(\varphi_1) &> 0 \text{ für } \frac{F l}{2 c a^2} < 1 \quad \rightarrow \quad \text{stabile Lage}, \\ \Pi''(\varphi_1) &< 0 \text{ für } \frac{F l}{2 c a^2} > 1 \quad \rightarrow \quad \text{instabile Lage}. \end{aligned}$$

Der Sonderfall

$$\frac{F l}{2 c a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad F = 2 \frac{c a^2}{l} = F_{\text{krit}}(\text{d})$$

kennzeichnet die „kritische Last“, weil an dieser Stelle bei einer Laststeigerung die für  $F < F_{\text{krit}}$  stabile Lage  $\varphi = 0$  in eine für  $F > F_{\text{krit}}$  instabile Lage übergeht. Die zweite Ableitung  $\Pi''(\varphi_1)$  nimmt für  $F = F_{\text{krit}}$  den Wert Null an. Um die Stabilität an dieser ausgezeichneten Stelle zu untersuchen, müssten wir weitere Ableitungen von  $\Pi$  bilden. Darauf wollen wir hier verzichten.

Setzen wir den Winkel  $\varphi_2$  der zweiten Gleichgewichtslage mit  $2 c a^2 = F l \cos^3 \varphi_2$  in (b) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\Pi''(\varphi_2) &= -F l \cos \varphi_2 \left(1 - \cos^2 \varphi_2 \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi_2}{\cos^4 \varphi_2}\right) \\ &= -F l \cos \varphi_2 \left(1 - \frac{3}{\cos^2 \varphi_2} + 2\right) \\ &= 3 F l \cos \varphi_2 \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi_2} - 1\right). \end{aligned}$$

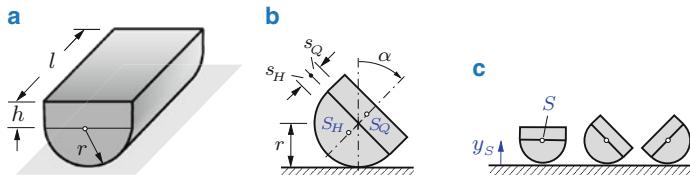
Für  $0 < \varphi_2 < \pi/2$  ist  $\cos \varphi_2 < 1$ . Daraus folgt  $\Pi''(\varphi_2) > 0$ , d. h. die Gleichgewichtslage  $\varphi = \varphi_2$  ist stabil (da  $\cos \varphi$  eine gerade Funktion ist, existiert neben  $\varphi_2$  gleichberechtigt eine Lösung  $\varphi_2^* = -\varphi_2$ ). Dann ist nach (a) der Ausdruck  $2c a^2 / F l < 1$  und damit nach (d)  $F > F_{\text{krit}}$ . Im Sonderfall  $\varphi_2 = 0$  werden  $\Pi''(\varphi_2) = 0$  und  $F = F_{\text{krit}}$ .

In Abb. 8.17c ist das Ergebnis aufgetragen: für  $F < F_{\text{krit}}$  gibt es nur eine Gleichgewichtslage bei  $\varphi = 0$ ; sie ist stabil. Für  $F > F_{\text{krit}}$  wird diese Lage instabil. Gleichzeitig treten zwei neue stabile Gleichgewichtslagen  $\pm \varphi_2$  auf. Damit gibt es in diesem Bereich drei verschiedene Gleichgewichtslagen.

Da für die kritische Last  $F = F_{\text{krit}}$  eine Verzweigung der Lösung auftritt, nennt man diesen ausgezeichneten Wert in Last-Verformungs-Diagrammen einen „Verzweigungspunkt“. Die kritische Last und die Verzweigung einer Lösung spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens *elastischer* Körper (vgl. Bände 2 und 4). ■

► **Beispiel 8.9** Gegeben ist ein homogener Körper (Dichte  $\varrho$ ), der aus einem Halbzylinder (Radius  $r$ ) mit aufgesetztem Quader (Höhe  $h$ ) besteht (Abb. 8.18a).

Für welches  $h$  ist der Körper für beliebige Lagen im indifferenten Gleichgewicht?



**Abb. 8.18** Indifferentes Gleichgewicht

**Lösung** Der Quader hat das Gewicht  $G_Q = 2rhl\varrho g$  und den Schwerpunktsabstand  $s_Q = h/2$  von der Trennfläche der beiden Teilkörper (Abb. 8.18b). Für den Halbkreiszylinder gilt  $G_H = \frac{1}{2}\pi r^2 l \varrho g$  und  $s_H = \frac{4}{3}\pi r$  (vgl. Tab. 4.1).

Wählen wir die Grundfläche als Bezugsniveau, so folgt das Potential  $\Pi$  für eine beliebige Lage  $\alpha$  zu

$$\Pi = \varrho g l \left[ \frac{\pi r^2}{2} \left( r - \frac{4r}{3\pi} \cos \alpha \right) + 2r h \left( r + \frac{h}{2} \cos \alpha \right) \right].$$

Die Gleichgewichtslagen erhalten wir aus

$$\Pi' = \frac{d\Pi}{d\alpha} = \varrho g l \sin \alpha \left[ \frac{2}{3} r^3 - rh^2 \right] = 0.$$

Eine erste Gleichgewichtslage folgt aus dem Verschwinden des ersten Faktors:

$$\sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0.$$

Die senkrechte Ausgangslage, bei der die Schwerpunkte  $S_Q$  und  $S_H$  übereinander liegen, ist daher eine Gleichgewichtslage. Die Ableitung  $\Pi'$  wird aber auch Null, wenn die Klammer verschwindet:

$$\frac{2}{3} r^3 - rh^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}} r}}.$$

Nur für dieses spezielle Abmessungsverhältnis gibt es Gleichgewichtslagen im ausgelenkten Zustand, wobei  $\alpha$  dann beliebig sein kann.

Zur Anwendung des Stabilitätskriteriums bilden wir die zweite Ableitung

$$\Pi'' = \varrho g l \cos \alpha \left[ \frac{2}{3} r^3 - rh^2 \right].$$

Für beliebige  $\alpha$  und  $h = \sqrt{2/3} r$  werden  $\Pi''$  und alle höheren Ableitungen gleich Null: diese Gleichgewichtslagen sind daher indifferent. Der Körper ist dann in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht, wie dies in Abb. 8.18c angedeutet ist.

Man kann die Aufgabe auch anschaulich (ohne Aufstellen eines Potentials und Differenzieren) lösen. Eine Gleichgewichtslage ist indifferent, wenn der Schwerpunkt bei einer Auslenkung seine Höhe beibehält ( $\Delta\Pi \equiv 0$ ). In der Aufgabe bedeutet dies, dass der Gesamtschwerpunkt  $S$  in jeder Lage den konstanten Abstand  $r$  von der Grundebene haben muss. Mit (4.13) hat der gemeinsame Schwerpunkt den Abstand

$$y_s = \frac{\frac{\pi r^2}{2} \left( r - \frac{4r}{3\pi} \right) + 2rh \left( r + \frac{h}{2} \right)}{\frac{\pi r^2}{2} + 2rh}.$$

Aus der Bedingung  $y_s = r$  folgt nach Auflösen der bereits vorher ermittelte Wert für  $h$ . ■

► **Beispiel 8.10** Für das Beispiel 8.1 ist die Stabilität der Gleichgewichtslage zu untersuchen.

**Lösung** Wir wählen das Nullniveau für die Kraft  $G$  in der Höhe des Lagers  $A$  (Abb. 8.9a) und das Nullniveau für die Kraft  $Q$  in der Höhe, in der sich das Gengewicht bei hochgezogener Brücke ( $\varphi = 0$ ) befindet. Mit  $s = 2l \sin(\varphi/2)$  lautet dann das Gesamtpotential in Abhängigkeit von der Koordinate  $\varphi$

$$\Pi(\varphi) = \frac{G l}{2} \cos \varphi + Q s = \frac{G l}{2} \cos \varphi + 2Q l \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Die Ableitungen folgen mit  $\sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$  zu

$$\begin{aligned}\Pi' &= -\frac{G l}{2} \sin \varphi + Q l \cos \frac{\varphi}{2} = \left(-G \sin \frac{\varphi}{2} + Q\right) l \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \Pi'' &= -\frac{G l}{2} \cos \varphi - \frac{Q l}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Aus  $\Pi' = 0$  erhalten wir wieder die Gleichgewichtslage  $\sin(\varphi/2) = Q/G$ . Man sieht ohne weitere Rechnung, dass  $\Pi''$  für Winkel  $\varphi < \pi/2$  negativ ist. Daher ist die in Beispiel 8.1 ermittelte Gleichgewichtslage instabil. ■

## 8.6 Zusammenfassung

- Die Arbeit einer Kraft  $\mathbf{F}$  bei einer infinitesimalen Verschiebung  $d\mathbf{r}$  des Kraftangriffspunkts ist  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Für die Arbeit bei einer endlichen Verschiebung gilt

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Beachte: nur wenn Kraft und Verschiebung gleichgerichtet sind, und die Kraft konstant ist gilt „Arbeit = Kraft  $\times$  Weg“.

- Bei einer konservativen Kraft hängt die Arbeit  $W$  nicht vom Weg des Kraftangriffspunktes zwischen zwei Wegpunkten ab. Dann existiert ein Potential (potentielle Energie)  $\Pi = -W$ , aus dem die Kraft abgeleitet werden kann.
- Potentiale von Gewichtskraft, Federkraft und Drehfedermoment:

$$\Pi = G z, \quad \Pi = \frac{1}{2} c x^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_T \varphi^2.$$

- Virtuelle Verrückungen  $\delta\mathbf{r}$  bzw. Verdrehungen  $\delta\varphi$  sind infinitesimal, gedacht und kinematisch möglich. Die virtuelle Arbeit einer Kraft  $\mathbf{F}$  ist gegeben durch  $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}$ , die eines Moments  $\mathbf{M}$  durch  $\delta W = \mathbf{M} \cdot \delta\varphi$ .
- Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Arbeit der eingeprägten Kräfte bei einer virtuellen Verrückung aus dieser Lage verschwindet:

$$\delta W = 0.$$

- Bei einem konservativen System nimmt das Gesamtpotential in einer Gleichgewichtslage einen Extremwert an. Für ein System mit einem Freiheitsgrad gilt in der Gleichgewichtslage  $x_0$ :

$$\Pi'(x_0) = 0.$$

- Die Gleichgewichtslage ist stabil (instabil), wenn das Gesamtpotential bei ihr ein Minimum (Maximum) annimmt:

$$\Pi''(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{stabil}, \quad \Pi''(x_0) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{instabil}.$$

---

# Haftung und Reibung

9

Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und  
Wolfgang A. Wall

## Inhaltsverzeichnis

9.1 Grundlagen . . . . .	247
9.2 Die Coulombschen Reibungsgesetze . . . . .	249
9.3 Seilhaftung und Seilreibung . . . . .	259
9.4 Zusammenfassung . . . . .	263

- **Lernziele** Körper die sich berühren üben eine Kontaktkraft aufeinander aus. Diese ist normal zur Berührungsfläche, wenn die Oberflächen ideal glatt sind. Bei rauen Oberflächen tritt dagegen auch eine Tangentialkomponente auf. Die Studierenden sollen erkennen, dass diese Komponente eine Reaktionskraft ist, wenn die Körper aneinander haften. Im Unterschied dazu liegt eine eingeprägte Kraft vor, wenn die Körper aneinander gleiten (reiben). Die Leser sollen in die Lage versetzt werden, das Coulombsche Haftungs- bzw. Reibungsgesetz richtig anzuwenden und mit seiner Hilfe die Kräfte in Systemen mit Berührungskontakt sachgerecht zu ermitteln.

## 9.1 Grundlagen

Bisher wurde angenommen, dass alle betrachteten Körper eine *glatte* Oberfläche haben. Zwischen zwei solchen Körpern können nach Abschn. 2.4 nur Kräfte *normal* zur Berührebene übertragen werden. Diese Idealisierung beschreibt das mechanische Verhalten dann richtig, wenn die in Wirklichkeit infolge der *Rauigkeit* der Oberfläche auftretenden Tangentialkräfte vernachlässigt werden können. Mit den Eigenschaften der tangentialen Kräfte soll sich dieses Kapitel beschäftigen. Hierzu betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel.

Eine Kiste vom Gewicht  $G$  steht nach Abb. 9.1a auf einer rauen Unterlage. Bringt man zusätzlich eine horizontale Kraft  $F$  an, so zeigt die Erfahrung, dass für kleine Werte von  $F$  die Kiste in Ruhe bleibt. Infolge der rauen Oberfläche kann zwischen Kiste und Boden eine tangentiale Kraft übertragen werden, welche eine Bewegung der Kiste verhindert. Da die Kiste dann am Boden „haftet“, nennt man diese tangentiale Kraft häufig *Haftriebungskraft*  $H$ .

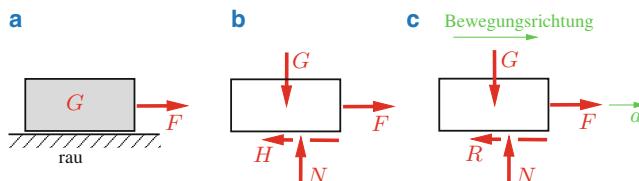
Mit dem Freikörperbild (Abb. 9.1b) folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\uparrow : N = G, \quad \rightarrow : H = F. \quad (9.1)$$

Das Momentengleichgewicht liefert die Lage von  $N$ , die wir jedoch hier nicht benötigen.

Wenn die Kraft  $F$  einen gewissen Grenzwert überschreitet, tritt Bewegung ein (Abb. 9.1c). Infolge der Rauigkeit wird auch bei der Bewegung eine tangentiale Kraft vom Boden auf die Kiste übertragen. Da die Kiste beim Gleiten gegenüber dem Boden „reibt“, nennt man diese Kraft oft *Gleitreibungskraft*  $R$ . Sie sucht die Bewegung zu verhindern und wirkt daher entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung. Zählt man die Beschleunigung  $a$  positiv nach rechts, so tritt jetzt an die Stelle der zweiten Gleichgewichtsbedingung (9.1) die Grundgleichung der Kinetik (vgl. Band 3)

$$\text{Masse mal Beschleunigung} = \sum \text{Kräfte},$$



**Abb. 9.1** a Kiste auf Unterlage, b Freikörperbilder

d. h. im Beispiel

$$m a = F - R . \quad (9.2)$$

Dabei ist die Reibungskraft  $R$  zunächst noch unbekannt.

Wenn auch Haftreibung und Gleitreibung beide ihre Ursachen in der Rauigkeit der Oberfläche haben, so sind sie doch ihrem Wesen nach grundsätzlich verschieden. Die Haftreibungskraft  $H$  ist eine *Reaktionskraft*, die sich bei statisch bestimmten Problemen aus Gleichgewichtsbedingungen ohne zusätzliche physikalische Aussagen berechnen lässt. Dagegen ist die Gleitreibungskraft  $R$  eine *eingravierte Kraft*, die von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper abhängt. Um diesen wesentlichen Unterschied stets gegenwärtig zu behalten, wollen wir von nun an die Reibung in der Ruhelage (=Haftreibung) mit *Haftung*, die Reibung bei der Bewegung (=Gleitreibung) mit *Reibung* bezeichnen. Entsprechend nennen wir  $H$  die *Haftungskraft* und  $R$  die *Reibungskraft*.

Die Reibungserscheinungen verändern sich stark, wenn zwischen die Körper andere Stoffe gebracht werden. Jeder Auto- oder Radfahrer kennt die Unterschiede, ob er auf trockener, nasser oder gar vereister Straße fährt. Durch Schmiermittel kann man die Reibung bei sich gegeneinander bewegenden Maschinenteilen erheblich herabsetzen. Wir werden uns mit den diesen Erscheinungen zugrundeliegenden „Flüssigkeitsreibung“ nicht beschäftigen, da wir die Hydromechanik im Rahmen dieser Einführung nicht behandeln.

Alle folgenden Untersuchungen beschränken sich auf die sogenannte *trockene* Reibung, wie sie infolge der Rauigkeit an der Oberfläche jedes festen Körpers auftritt.

Haftung und Reibung haben große praktische Bedeutung: nur durch Haftung ist überhaupt eine Fortbewegung auf festem Boden möglich. Auch die Antriebsräder eines Fahrzeuges haften in der momentanen Berührfläche an der Fahrbahn, und an der Berührstelle wird die zum Beschleunigen oder Abbremsen notwendige Kraft übertragen. Falls diese Haftkraft, z. B. bei Glatteis, nicht aufgebracht werden kann, rutschen die Räder, und der gewünschte Bewegungszustand wird nicht erreicht. Jede Schraube und jeder Nagel erfüllen ihre Aufgabe nur dadurch, dass sie infolge Rauigkeit haften. Durch künstliche Vergrößerung der Unebenheiten der Oberflächen wird beim Dübel dieser Effekt verstärkt.

Auf der anderen Seite ist die Reibung häufig unerwünscht, da sie mit Energieverlusten verbunden ist. An der Berührfläche tritt Erwärmung auf, d. h. mechanische Energie wird in thermische Energie umgewandelt. Während man die Haftung z. B. auf glatter Straße durch Streuen von Sand zu erhöhen sucht, vermindert man umgekehrt bei rotierenden Maschinenteilen die Reibung durch die schon erwähnten Schmiermittel. Man erkennt auch hieran wieder, dass man Haftung und Reibung sorgfältig getrennt betrachten muss.

## 9.2 Die Coulombschen Reibungsgesetze

Wir betrachten zunächst die Haftung und greifen hierzu nochmals auf das Problem in Abb. 9.1b zurück. Solange  $F$  unterhalb eines Grenzwertes  $F_0$  bleibt, ist  $H = F$ . Bei der Grenzlast  $F_0$  nimmt  $H$  seinen maximalen Wert  $H_0$  an. Durch Experimente wurde von Charles Augustine de Coulomb (1736–1806) gezeigt, dass dieser Grenzwert in erster Näherung proportional zur Normalkraft  $N$  ist:

$$H_0 = \mu_0 N . \quad (9.3)$$

Den Proportionalitätsfaktor  $\mu_0$  nennt man *Haftungskoeffizient*. Er hängt nur von der Rauigkeit der sich berührenden Flächen und nicht von ihrer Größe ab. Die Tab. 9.1 gibt einige Zahlenwerte an. Dabei muss beachtet werden, dass die aus Versuchen ermittelten Zahlenwerte nur in gewissen Toleranzgrenzen angegeben werden können; so kann z. B. der Wert für „Holz auf Holz“ noch stark nach Holzart und Verarbeitung der Oberflächen schwanken. An dieser Stelle sei auch deutlich darauf hingewiesen, dass (9.3) eine Beziehung zwischen Haft- und Normalkraft darstellt, die nur im Fall der Grenzhaftung gültig ist.

Ein Körper haftet, solange die *Haftbedingung*

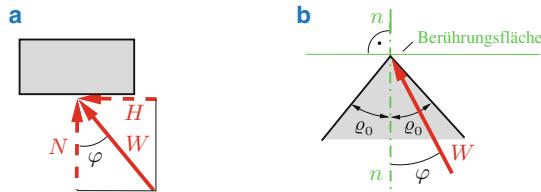
$$H \leq H_0 = \mu_0 N \quad (9.4a)$$

erfüllt ist. Der Richtungssinn von  $H$  ist stets so, dass die Bewegung verhindert wird. Bei komplizierten Aufgaben kann man manchmal diese Richtung nicht sofort erkennen und muss sie deshalb beliebig annehmen; die Rechnung wird zeigen, ob die Annahme richtig war (Vorzeichen). Es gilt daher allgemein

$$|H| \leq H_0 = \mu_0 N . \quad (9.4b)$$

**Tab. 9.1** Haftungs- und Reibungskoeffizienten

	Haftungskoeffizient $\mu_0$	Reibungskoeffizient $\mu$
Stahl auf Eis	0,03	0,015
Stahl auf Stahl	0,15 ... 0,5	0,1 ... 0,4
Stahl auf Teflon	0,04	0,04
Leder auf Metall	0,4	0,3
Holz auf Holz	0,5	0,3
Autoreifen auf Straße	0,7 ... 0,9	0,5 ... 0,8
Ski auf Schnee	0,1 ... 0,3	0,04 ... 0,2



**Abb. 9.2** Zum Haftungskeil

Die Normalkraft  $N$  und die Haftungskraft  $H$  kann man nach Abb. 9.2a zu einer resultierenden Kraft  $W$  zusammensetzen. Ihre Richtung ist durch den Winkel  $\varphi$  gegeben, der sich aus

$$\tan \varphi = \frac{H}{N}$$

bestimmen lässt.

Bezeichnen wir im Grenzfall  $H = H_0$  den Grenzwinkel  $\varphi_G$  mit  $\varrho_0$ , so wird

$$\tan \varphi_G = \tan \varrho_0 = \frac{H_0}{N} = \frac{\mu_0 N}{N} = \mu_0 .$$

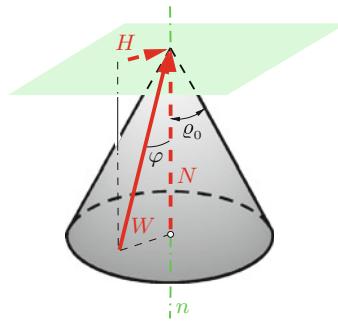
Den Winkel  $\varrho_0$  nennt man auch „Haftungswinkel“; er ist ein Maß für den Haftungskoeffizienten:

$$\tan \varrho_0 = \mu_0 . \quad (9.5)$$

Trägt man beim ebenen Problem den Haftungswinkel  $\varrho_0$  nach beiden Seiten der Normalen  $n$  auf, so entsteht ein „Haftungskeil“ (Abb. 9.2b). Solange  $W$  innerhalb des Keiles liegt, ist  $H < H_0$ , und der Körper bleibt damit in Ruhe.

Der Haftungswinkel  $\varrho_0$  hat auch im Raum eine anschauliche Bedeutung. Wird ein Körper einer beliebig gerichteten Belastung unterworfen, so bleibt er in Ruhe, solange die Reaktionskraft  $W$  an der Berührfläche innerhalb des sogenannten „Haftungskegels“ wirkt. Dieser Rotationskegel um die Normale  $n$  der Berührflächen hat den Öffnungswinkel  $2\varrho_0$ . Liegt  $W$  innerhalb des Kegels, so ist  $\varphi < \varrho_0$  und damit  $|H| < H_0$  (Abb. 9.3).

Falls  $W$  außerhalb des Kegels fällt, ist kein Gleichgewicht mehr möglich: der Körper wird sich bewegen. Die hierbei auftretenden Reibungserscheinungen wol-



**Abb. 9.3** Haftungskegel

len wir jetzt beschreiben. Für die bei der Bewegung auftretende Reibungskraft  $R$  hat ebenfalls Coulomb durch Versuche gefunden, dass sie in guter Näherung

- proportional zur Normalkraft  $N$  (Proportionalitätsfaktor  $\mu$ ) und
- unabhängig von der Geschwindigkeit und ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

Somit lautet das *Reibungsgesetz*

$$R = \mu N . \quad (9.6)$$

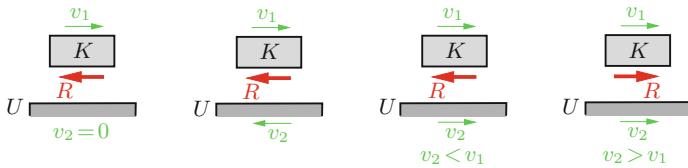
Den Faktor  $\mu$  nennt man *Reibungskoeffizient*; er ist meistens etwas kleiner als  $\mu_0$  (vgl. Tab. 9.1).

Will man die Richtung von  $R$  formelmäßig mit erfassen, so führt man einen Einheitsvektor  $v/|v|$  in Richtung der Geschwindigkeit  $v$  ein. Das Coulombsche Reibungsgesetz lautet dann

$$R = -\mu N \frac{v}{|v|} ,$$

wobei das Minuszeichen kennzeichnet, dass die Reibkraft entgegen der Geschwindigkeit wirkt. Ihr Richtungssinn kann also nicht wie bei der Haftungskraft beliebig angenommen werden.

Wenn sich der Körper  $K$  und seine Unterlage  $U$  bewegen (z. B. Schüttgut rutscht auf einem Förderband), so hängt das Vorzeichen der Reibungskraft von



**Abb. 9.4** Relativbewegung zwischen Klotz und Unterlage

der Relativgeschwindigkeit, d. h. von der Differenz der Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  (vgl. Band 3) ab. Abb. 9.4 zeigt, welche Richtung die Reibungskraft auf den Körper jeweils annimmt.

Zusammenfassend müssen folgende drei Fälle unterschieden werden:

a) „Haftung“  $H < \mu_0 N$

Der Körper bleibt in Ruhe; die Haftungskraft  $H$  folgt aus Gleichgewichtsbedingungen.

b) „Grenzhaftung“  $H = \mu_0 N$

Der Körper bleibt gerade noch in Ruhe. Wenn man ihn anstößt, wird er sich jedoch wegen  $\mu < \mu_0$  in Bewegung setzen.

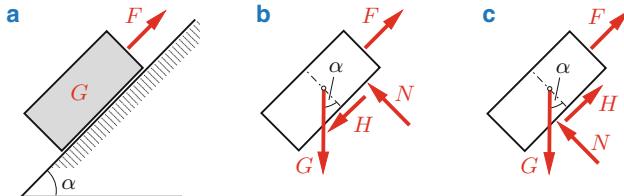
c) „Reibung“  $R = \mu N$

Rutscht ein Körper, so wirkt die Reibungskraft  $R$  als eingeprägte Kraft.

Bei der Behandlung von Haftungsaufgaben muss zwischen statisch bestimmten und statisch unbestimmten Problemen unterschieden werden. Bei statisch bestimmten Problemen kann man in einem ersten Schritt die Reaktionskräfte  $H$  und  $N$  aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Anschließend lässt sich in einem zweiten Schritt überprüfen, ob die Haftbedingung (9.4b) erfüllt ist oder nicht. Bei statisch unbestimmten Problemen ist die Bestimmung der Reaktionskräfte  $H$  und  $N$  nicht möglich. Man kann in diesem Fall nur die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen sowie die Haftbedingungen an den Stellen, an denen Haftung auftritt, formulieren. Anschließend muss man dieses System von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen behandeln. Es ist dann allerdings oft einfacher, nur den Haftgrenzfall zu untersuchen.

► **Beispiel 9.1** Auf einer rauen schießen Ebene (Neigungswinkel  $\alpha$ , Haftungskoeffizient  $\mu_0$ ) nach Abb. 9.5a ruht ein Klotz vom Gewicht  $G$ , an dem zusätzlich eine Kraft  $F$  angreift.

Zwischen welchen Grenzen muss  $F$  liegen, damit der Klotz in Ruhe bleibt?



**Abb. 9.5** Klotz auf schiefer Ebene

**Lösung** Für eine große positive Kraft  $F$  würde sich der Klotz ohne Haftung nach oben bewegen. Die Haftungskraft  $H$  zeigt in diesem Fall nach unten (Abb. 9.5b). Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow : F - G \sin \alpha - H = 0, \quad \nwarrow : N - G \cos \alpha = 0$$

berechnen wir die Haftungskraft und die Normalkraft:

$$H = F - G \sin \alpha, \quad N = G \cos \alpha.$$

Um festzustellen, wann die Haftbedingung erfüllt ist, setzen wir in (9.4a) ein:

$$F - G \sin \alpha \leq \mu_0 G \cos \alpha \quad \rightarrow \quad F \leq G(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha).$$

Mit dem Haftungswinkel  $\varrho_0$  nach (9.5) lässt sich dies umschreiben zu

$$F \leq G (\sin \alpha + \tan \varrho_0 \cos \alpha) = G \frac{\sin(\alpha + \varrho_0)}{\cos \varrho_0}. \quad (\text{a})$$

Wird  $F$  zu klein, so würde der Klotz ohne Haftung infolge seines Gewichtes nach unten rutschen. Die Haftungskraft, die dies verhindert, muss dann nach Abb. 9.5c nach oben zeigen. Wir erhalten in diesem Fall aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow : F - G \sin \alpha + H = 0, \quad \nwarrow : N - G \cos \alpha = 0$$

und der Haftbedingung

$$H \leq \mu_0 N$$

die Ungleichung

$$G \sin \alpha - F \leq \mu_0 G \cos \alpha$$

oder

$$F \geq G (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) = G \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0}. \quad (\text{b})$$

Zusammenfassung der Ergebnisse nach (a) und (b) zeigt, dass die Kraft  $F$  im Bereich

$$\underline{G \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0} \leq F \leq G \frac{\sin(\alpha + \varrho_0)}{\cos \varrho_0}}$$
(c)

liegen muss. Entnehmen wir zum Beispiel für den Fall „Stahl auf Stahl“ Tab. 9.1 den Zahlenwert  $\mu_0 = 0,15$ , so ist  $\varrho_0 = \arctan 0,15 = 0,149$ . Wählen wir außerdem  $\alpha = 10^\circ \hat{=} 0,175 \text{ rad}$ , so folgt aus (c)

$$G \frac{\sin(0,175 - 0,149)}{\cos 0,149} \leq F \leq G \frac{\sin(0,175 + 0,149)}{\cos 0,149}$$

oder

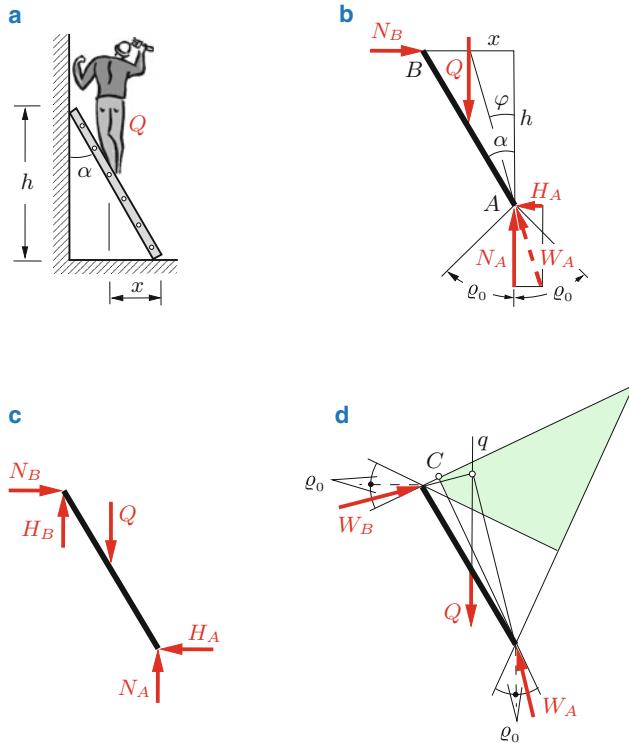
$$0,026 G \leq F \leq 0,32 G.$$

In diesem Zahlenbeispiel darf  $F$  die Werte zwischen rund 3 % und 30 % von  $G$  annehmen, ohne dass sich der Klotz bewegt. Für  $\alpha < \varrho_0$  kann nach (c) die Kraft  $F$  auch negative Werte annehmen.

Für  $\alpha = \varrho_0$  wird der untere Grenzwert von  $F$  gerade Null. Die Neigung der schiefen Ebene ist dann unmittelbar ein Maß für den Haftungskoeffizienten. Ein Körper bleibt unter der Wirkung seines Eigengewichtes, d. h. im Sonderfall  $F = 0$ , auf einer schiefen Ebene in Ruhe, solange  $\alpha \leq \varrho_0$  ist. ■

► **Beispiel 9.2** Auf einer Leiter in der in Abb. 9.6a dargestellten Lage steht ein Mann vom Gewicht  $Q$ .

Bis zu welcher Stelle  $x$  kann er steigen, wenn a) nur der Boden und b) Boden und Wand rau sind? Die Haftungskoeffizienten sind jeweils  $\mu_0$ .



**Abb. 9.6** Leiter an glatter/rauer Wand

**Lösung** a) Ist die Wand glatt, so wirken nach Abb. 9.6b in  $B$  nur die Normalkraft  $N_B$  und in  $A$  die Normalkraft  $N_A$  und die Haftkraft  $H_A$  (entgegen der Bewegung, die ohne Haftung eintreten würde). Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: \quad N_B - H_A = 0, \quad \uparrow: \quad N_A - Q = 0, \quad \widehat{A}: \quad x Q - h N_B = 0$$

berechnen wir die Haftungskraft und die Normalkraft bei  $A$ :

$$H_A = \frac{x}{h} Q, \quad N_A = Q.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$H_A \leq \mu_0 N_A$$

liefert die Lösung

$$\frac{x}{h} Q \leq \mu_0 Q \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x}} \leq \underline{\underline{\mu_0 h}}.$$

Man kann dieses Ergebnis auch auf anderem Wege gewinnen: im Gleichgewicht müssen die drei Kräfte  $Q$ ,  $N_B$  und  $W_A$  (Resultierende aus  $N_A$  und  $H_A$ ) durch *einen* Punkt gehen (Abb. 9.6b). Es gilt daher

$$\tan \varphi = \frac{H_A}{N_A} = \frac{x}{h}.$$

Da die Wirkungslinie der Reaktionskraft  $W_A$  innerhalb des Haftungskeiles liegen muss ( $\varphi \leq \varrho_0$ ), bleibt die Leiter für

$$\frac{x}{h} = \tan \varphi \leq \tan \varrho_0 = \mu_0 \quad \rightarrow \quad x \leq \mu_0 h$$

in Ruhe. Für  $\alpha \leq \varrho_0$  ist wegen  $x \leq h \tan \alpha$  die Standsicherheit der Leiter für alle  $x$  gewährleistet.

b) Wenn auch die *Wand rau* ist, treten nach Abb. 9.6c vier unbekannte Reaktionskräfte auf, die aus den drei Gleichgewichtsbedingungen nicht eindeutig ermittelt werden können: das Problem ist *statisch unbestimmt*. Trotzdem kann man dann aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: \quad N_B = H_A, \quad \uparrow: \quad N_A + H_B = Q,$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{A}: \quad x Q = h N_B + (h \tan \alpha) H_B$$

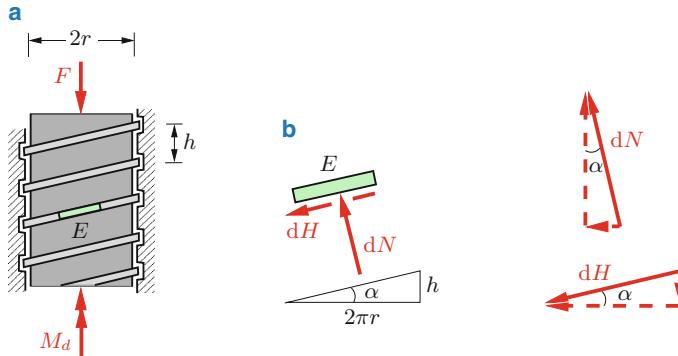
und den Haftbedingungen

$$H_B \leq \mu_0 N_B, \quad H_A \leq \mu_0 N_A$$

den zulässigen Bereich von  $x$  berechnen. Da jedoch die Auflösung wegen der Ungleichungen nicht ganz einfach ist, bevorzugen wir hier die grafische Lösung nach Abb. 9.6d. Dazu zeichnet man an beiden Berührpunkten die Haftungskeile. Solange die Wirkungslinie  $q$  der Last innerhalb des grün markierten Gebietes liegt, in dem sich beide Haftungskeile überdecken, gibt es eine Vielzahl möglicher Reaktionskräfte, von denen *eine* Kombination eingezeichnet ist. Erst wenn  $q$  im Bild links von  $C$  liegt, tritt Rutschen ein, weil dann die erforderliche Haftungskraft vom Boden nicht mehr aufgebracht werden kann. Man kann sich leicht überlegen, dass die Rutschgefahr durch steileres Aufstellen der Leiter verringert bzw. verhindert werden kann. ■

► **Beispiel 9.3** An einer Schraube mit Flachgewinde (Haftungskoeffizient  $\mu_0$ , Ganghöhe  $h$ , Radius  $r$ ) nach Abb. 9.7a greifen eine vertikale Kraft  $F$  und ein Moment  $M_d$  an.

Unter welcher Bedingung herrscht Gleichgewicht, wenn Normalkräfte und Haftungskräfte gleichmäßig über das gesamte Schraubengewinde verteilt sind?



**Abb. 9.7** a Schraube mit Flachgewinde, b Element des Gewindeganges

**Lösung** Die an einem Element  $E$  des Gewindeganges angreifenden Normalkraft  $dN$  und Haftungskraft  $dH$  zerlegen wir nach Abb. 9.7b in ihre vertikale und horizontale Komponenten (aus der Ganghöhe  $h$  und dem abgewickelten Umfang  $2\pi r$  lässt sich der Winkel  $\alpha$  berechnen:  $\tan \alpha = h/2\pi r$ ). Das Integral über die vertikalen Komponenten muss der Last  $F$  das Gleichgewicht halten:

$$F = \int dN \cos \alpha - \int dH \sin \alpha = \cos \alpha \int dN - \sin \alpha \int dH . \quad (\text{a})$$

Das Moment  $M_d$  muss mit dem aus den horizontalen Komponenten folgenden Moment im Gleichgewicht sein:

$$M_d = \int r dN \sin \alpha + \int r dH \cos \alpha = r \sin \alpha \int dN + r \cos \alpha \int dH .$$

Mit (a) folgt daraus

$$\int dN = F \cos \alpha + \frac{M_d}{r} \sin \alpha , \quad \int dH = \frac{M_d}{r} \cos \alpha - F \sin \alpha .$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$|dH| \leq \mu_0 dN \quad \text{bzw.} \quad \int |dH| \leq \mu_0 \int dN$$

liefert

$$\left| \frac{M_d}{r} \cos \alpha - F \sin \alpha \right| \leq \mu_0 \left( F \cos \alpha + \frac{M_d}{r} \sin \alpha \right).$$

Ist  $M_d/r > F \tan \alpha$ , so folgt aus dieser Ungleichung

$$\left| \frac{M_d}{r} - F \tan \alpha \right| = \frac{M_d}{r} - F \tan \alpha \leq \mu_0 \left( F + \frac{M_d}{r} \tan \alpha \right)$$

oder mit (9.5) und dem Additionstheorem für die Tangensfunktion

$$\frac{M_d}{r} \leq F \frac{\tan \alpha + \mu_0}{1 - \tan \alpha \mu_0} = F \frac{\tan \alpha + \tan \varrho_0}{1 - \tan \alpha \tan \varrho_0} = F \tan(\alpha + \varrho_0).$$

Analog findet man für  $M_d/r < F \tan \alpha$  aus

$$\left| \frac{M_d}{r} - F \tan \alpha \right| = F \tan \alpha - \frac{M_d}{r} \leq \mu_0 \left( F + \frac{M_d}{r} \tan \alpha \right)$$

die Beziehung

$$\frac{M_d}{r} \geq F \tan(\alpha - \varrho_0).$$

Die Schraube ist daher im Gleichgewicht, solange die Bedingung

$$\underline{\underline{F \tan(\alpha - \varrho_0) \leq \frac{M_d}{r} \leq F \tan(\alpha + \varrho_0)}}$$

erfüllt ist. Wenn speziell  $\alpha \leq \varrho_0$  (d. h.  $\tan \alpha \leq \mu_0$ ) ist, so ist Gleichgewicht ohne ein äußeres Moment ( $M_d = 0$ ) möglich. Die Haftungs Kräfte allein „halten“ dann die Last  $F$ : die Schraube ist „selbsthemmend“. ■

### 9.3 Seilhaftung und Seilreibung

Schlingt man ein Seil, an dessen einem Ende eine große Kraft angreift, um einen rauen Pfosten, so kann man mit einer kleinen Kraft am anderen Ende ein Rutschen des Seiles verhindern. In Abb. 9.8a umschlingt das Seil den Pfosten mit einem Winkel  $\alpha$ . Wir setzen voraus, dass die Kraft  $S_2$  am linken Seilende größer ist als die Kraft  $S_1$  am rechten Ende. Um den Zusammenhang zwischen diesen Seilkräften zu berechnen, schneiden wir nach Abb. 9.8b ein Element der Länge  $ds$  aus dem Seil und stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf. Dabei berücksichtigen wir, dass sich die Seilkraft längs  $ds$  um den infinitesimalen Betrag  $dS$  ändert. Wegen  $S_2 > S_1$  würde das Seil *ohne Haftung* nach links rutschen: die Haftungskraft  $dH$  zeigt daher nach rechts. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann:

$$\rightarrow: \quad S \cos \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} + dH = 0,$$

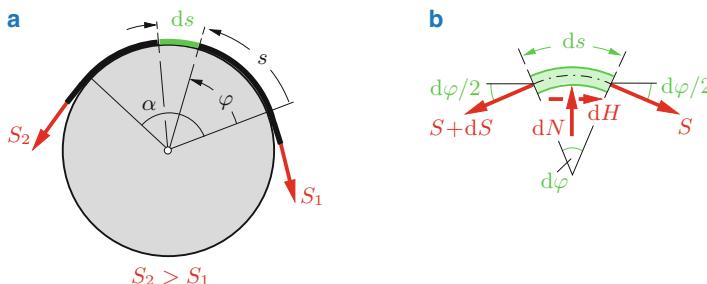
$$\uparrow: \quad dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Da  $d\varphi$  infinitesimal ist, wird  $\cos(d\varphi/2) \approx 1$ ,  $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ ; außerdem ist  $dS(d\varphi/2)$  „von höherer Ordnung klein“. Es bleiben daher

$$dH = dS, \quad dN = S d\varphi. \quad (9.7)$$

Aus diesen zwei Gleichungen kann man die drei Unbekannten  $H$ ,  $N$ ,  $S$  nicht ermitteln: das System ist statisch unbestimmt. Wir betrachten deshalb nur den Fall der Grenzhaftung, bei der Rutschen gerade noch verhindert wird. Dann ist nämlich nach (9.5)

$$dH = dH_0 = \mu_0 dN,$$



**Abb. 9.8** Seilhaftung

und mit (9.7) folgt

$$dH = \mu_0 S d\varphi = dS \quad \rightarrow \quad \mu_0 d\varphi = \frac{dS}{S}.$$

Integration über den Bereich, der vom Seil umschlungen wird, liefert

$$\mu_0 \int_0^\alpha d\varphi = \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} \quad \rightarrow \quad \mu_0 \alpha = \ln \frac{S_2}{S_1}$$

oder

$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \alpha}. \quad (9.8)$$

Diese Formel für die Seilhaftung wird nach Leonhard Euler (1707–1783) oder Johann Albert Eytelwein (1764–1848) benannt.

Wenn  $S_1 > S_2$  ist, muss man nur die Kräfte umbenennen und erhält

$$S_1 = S_2 e^{\mu_0 \alpha} \quad \text{bzw.} \quad S_2 = S_1 e^{-\mu_0 \alpha}. \quad (9.9)$$

Für fest vorgegebenes  $S_1$  besteht daher Gleichgewicht, solange  $S_2$  in den Grenzen nach (9.8) und (9.9) bleibt:

$$S_1 e^{-\mu_0 \alpha} \leq S_2 \leq S_1 e^{\mu_0 \alpha}. \quad (9.10)$$

Für  $S_2 < S_1 e^{-\mu_0 \alpha}$  tritt Rutschen nach rechts, für  $S_2 > S_1 e^{\mu_0 \alpha}$  tritt Rutschen nach links auf.

Um ein Gefühl für das Verhältnis der auftretenden Kräfte zu bekommen, nehmen wir für eine Zahlenrechnung eine  $n$ -fache Umschlingung (d. h.  $\alpha = 2\pi n$ ) und einen Haftungskoeffizienten  $\mu_0 = 0,3 \approx 1/\pi$  an. Dann wird

$$e^{\mu_0 2n\pi} \approx e^{2n} \approx (7,5)^n \quad \text{und} \quad S_1 = \frac{S_2}{e^{\mu_0 \alpha}} = \frac{S_2}{(7,5)^n}.$$

So kann man z. B. beim Anlegen eines Schiffes durch mehrmaliges Umschlingen des Taus mit einer kleinen Kraft  $S_1$  einer großen Abtriebskraft  $S_2$  das „Gleichgewicht“ halten.

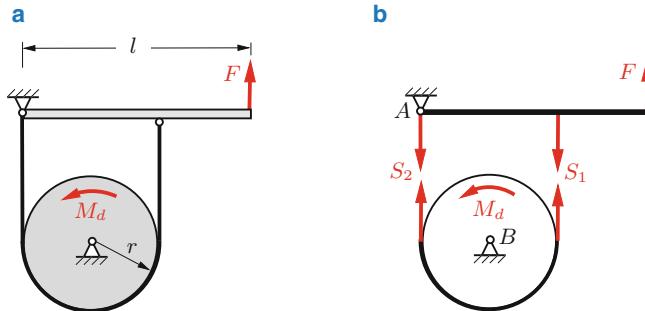
Die Euler-Eytelweinsche Formel kann man vom Fall der Seilhaftung auf den Fall der Seilreibung übertragen, indem man den Haftungskoeffizienten  $\mu_0$  durch

den Reibungskoeffizienten  $\mu$  ersetzt. Dabei kann das Seil gegenüber einer festgehaltenen Rolle rutschen oder die Rolle rotiert gegen das ruhende Seil. Die Richtung von  $R$  findet man dann durch Überlegungen analog zu Abb. 9.4. Wenn man die Richtung von  $R$  ermittelt hat, weiß man auch, welche Seilkraft größer ist, und man erhält

$$\begin{aligned} \text{für } S_2 > S_1: \quad S_2 &= S_1 e^{\mu\alpha}, \\ \text{für } S_2 < S_1: \quad S_2 &= S_1 e^{-\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

► **Beispiel 9.4** Auf die zylindrische Walze in Abb. 9.9a wirkt ein Drehmoment  $M_d$ . Um die Walze ist ein raues Band (Haftungskoeffizient  $\mu_0$ ) geschlungen, das mit einem Hebel verbunden ist.

Wie groß muss  $F$  mindestens sein, damit die Walze in Ruhe bleibt (Bandbremse)?



**Abb. 9.9** Bandbremse

**Lösung** Wir schneiden nach Abb. 9.9b das Band und tragen die Schnittkräfte ein. Momentengleichgewicht für den Hebel und für die Walze liefert:

$$\begin{aligned} \hat{A}: \quad l F - 2r S_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{l}{2r} F, \\ \hat{B}: \quad M_d + (S_1 - S_2)r &= 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = S_2 - \frac{M_d}{r}. \end{aligned}$$

Da  $M_d$  links herum dreht, muss für Gleichgewicht  $S_2 > S_1$  gelten. Mit dem Umschlingungswinkel  $\alpha = \pi$  folgt dann aus (9.8) die Haftgrenzbedingung

$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \pi}.$$

Damit ergibt sich

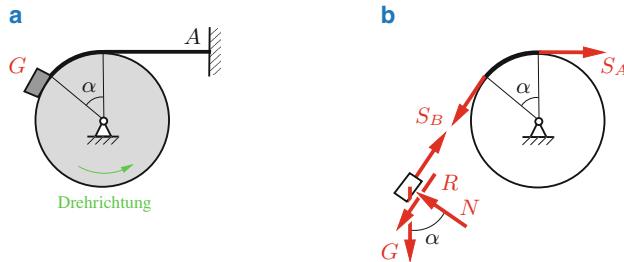
$$S_1 = S_1 e^{\mu_0 \pi} - \frac{M_d}{r} \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{M_d}{r(e^{\mu_0 \pi} - 1)},$$

und die Mindestkraft wird

$$\underline{\underline{F}} = \frac{2r}{l} S_1 = 2 \frac{M_d}{l} \frac{1}{e^{\mu_0 \pi} - 1}. \quad \blacksquare$$

► **Beispiel 9.5** Auf einer rotierenden Walze liegt nach Abb. 9.10a ein Klotz vom Gewicht  $G$ , der durch ein Seil gehalten wird.

Wie groß ist die Seilkraft bei  $A$ , wenn zwischen Klotz bzw. Seil und Walze Reibung herrscht (Reibungskoeffizient  $\mu$ )?



**Abb. 9.10** Rotierende Walze

**Lösung** Wir trennen die Körper. Infolge der Bewegung der Walze wirkt die Reibungskraft auf den Klotz in der gezeichneten Richtung (Abb. 9.10b), und es ist  $S_A > S_B$ . Gleichgewicht am Klotz liefert

$$\nearrow: \quad S_B = G \sin \alpha + R, \quad \nwarrow: \quad N = G \cos \alpha.$$

Mit den Reibungsgesetzen (9.11) und (9.6) für Seil und Klotz

$$S_A = S_B e^{\mu \alpha}, \quad R = \mu N$$

finden wir durch Einsetzen

$$\underline{\underline{S_A}} = (G \sin \alpha + R) e^{\mu \alpha} = \underline{\underline{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) e^{\mu \alpha}}}.$$

## 9.4 Zusammenfassung

- Die Haftungskraft  $H$  ist eine Reaktionskraft. Sie kann bei statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden (Beachte: der Richtungssinn von  $H$  kann im Freikörperbild beliebig angenommen werden).
- Der Betrag der Haftkraft  $H$  kann eine Grenzhaftkraft  $H_0$  nicht überschreiten. Ein Körper haftet an einem anderen, wenn die Haftbedingung

$$|H| \leq H_0 = \mu_0 N$$

erfüllt ist.

- Die Reibungskraft  $R$  ist eine eingeprägte Kraft. Ihre Größe ist durch das Coulombsche Reibungsgesetz

$$R = \mu N$$

gegeben. Sie ist entgegen der (relativen) Geschwindigkeit gerichtet.

- Bei Seilhaftung wird der Haftgrenzfall durch die Formel nach Euler-Eytelwein beschrieben:

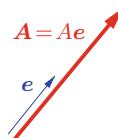
$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \alpha} .$$

- Bei Seilreibung sind die Seilkräfte ebenfalls durch die Euler-Eytelweinsche Formel miteinander verknüpft, wobei nur der Haftungskoeffizient  $\mu_0$  durch den Reibungskoeffizienten  $\mu$  ersetzt werden muss.

# A Vektoren, Gleichungssysteme

## A.1 Elemente der Vektorrechnung

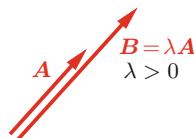
Physikalische Größen, die durch ihren Betrag und ihre Richtung festgelegt sind, heißen *Vektoren*. Geometrisch wird ein Vektor durch einen Pfeil dargestellt, dessen Länge ein Maß für den Betrag ist (Abb. A.1). Als Symbole für Vektoren verwenden wir fette Buchstaben, zum Beispiel  $\mathbf{A}$ . Der *Betrag* des Vektors  $\mathbf{A}$  wird durch  $|\mathbf{A}|$  oder kurz durch  $A$  angegeben. Ein Vektor mit dem Betrag Eins heißt Einheitsvektor  $e$ .



**Abb. A.1** Geometrische Darstellung eines Vektors

Multipliziert man einen Vektor  $\mathbf{A}$  mit einer skalaren Größe  $\lambda$ , so erhält man den Vektor  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$  (Abb. A.2) mit  $|\mathbf{B}| = |\lambda| |\mathbf{A}|$ . Demnach lässt sich jeder Vektor als Produkt aus seinem Betrag und einem gleichgerichteten Einheitsvektor schreiben (Abb. A.1):

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}. \quad (\text{A.1})$$

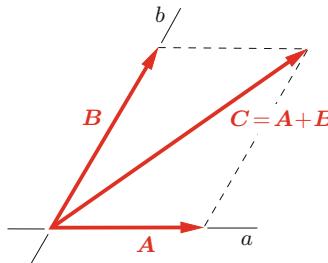


**Abb. A.2** Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Addition zweier Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ergibt den Summenvektor

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (\text{A.2})$$

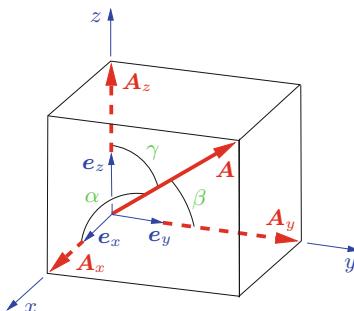
Er kann zeichnerisch durch Bilden eines Parallelogramms ermittelt werden (Abb. A.3).



**Abb. A.3** Addition von Vektoren

Dieses Parallelogramm kann auch folgendermaßen gedeutet werden: ein gegebener Vektor  $C$  wird in zwei Vektoren  $A$  und  $B$  mit den vorgegebenen Wirkungslinien  $a$  und  $b$  zerlegt. Die Vektoren  $A$  und  $B$  heißen dann *Komponenten* des Vektors  $C$  bezüglich der Richtungen  $a$  und  $b$ . In der Ebene ist die Zerlegung eines Vektors nach *zwei* verschiedenen Richtungen mit Hilfe des Parallelogramms eindeutig möglich. Entsprechend lässt sich im Raum die Zerlegung nach *drei* nicht in einer Ebene liegenden Richtungen eindeutig durchführen.

Des bequemeren Rechnens wegen stellen wir Vektoren häufig in einem kartesischen Koordinatensystem dar (Abb. A.4). Die jeweils aufeinander senkrecht stehenden Achsrichtungen (orthogonale Achsen)  $x$ ,  $y$  und  $z$  des Koordinatensystems werden durch die Einheitsvektoren  $e_x$ ,  $e_y$  und  $e_z$  gekennzeichnet. Die Vektoren  $e_x$ ,  $e_y$  und  $e_z$  bilden dabei in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (man kann Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand in dieser Reihenfolge mit den Richtungen von  $e_x$ ,  $e_y$  und  $e_z$  zur Deckung bringen).



**Abb. A.4** Darstellung eines Vektors in kartesischen Koordinaten

Der Vektor  $\mathbf{A}$  kann in seine Komponenten  $A_x$ ,  $A_y$  und  $A_z$  bezüglich der drei Achsrichtungen zerlegt werden:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.3})$$

Nach (A.1) gilt für die Komponenten

$$A_x = A_x \mathbf{e}_x , \quad A_y = A_y \mathbf{e}_y , \quad A_z = A_z \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.4})$$

Damit wird aus (A.3)

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.5})$$

Die Maßzahlen  $A_x$ ,  $A_y$  und  $A_z$  heißen *Koordinaten* des Vektors  $\mathbf{A}$ . Sie werden oft auch Komponenten des Vektors genannt, obwohl die Komponenten ja die Vektoren  $\mathbf{A}_j$  ( $j = x, y, z$ ) sind. Ordnet man die Koordinaten in einer Spalte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

an, so nennt man diese Darstellung von  $\mathbf{A}$  einen Spaltenvektor. Häufig ist es zweckmäßiger, die Koordinaten in einer Zeile statt in einer Spalte anzugeben. Diese Darstellung von  $\mathbf{A}$  nennt man einen Zeilenvektor. Das Vertauschen von Zeilen und Spalten wird als *Transponieren* bezeichnet und durch ein hochgestelltes „ $T$ “ gekennzeichnet. Damit schreibt man den Vektor  $\mathbf{A}$  in der Form

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)^T . \quad (\text{A.7})$$

Durch die Angabe seiner drei Koordinaten ist ein Vektor eindeutig bestimmt.

Der Betrag des Vektors folgt aus dem Satz des Pythagoras zu

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} . \quad (\text{A.8})$$

Die Richtung von  $\mathbf{A}$  wird durch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  charakterisiert (Abb. A.4). Wir lesen ab:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} , \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A} , \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A} . \quad (\text{A.9})$$

Mit (A.8) ist

$$\frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = 1, \quad (\text{A.10})$$

und es gilt daher

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (\text{A.11})$$

Die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  sind also nicht unabhängig voneinander.

Die Vektorgleichung

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{A.12})$$

ist gleichwertig mit den drei skalaren Gleichungen

$$A_x = B_x, \quad A_y = B_y, \quad A_z = B_z. \quad (\text{A.13})$$

Zwei Vektoren sind somit gleich, wenn sie in den drei Koordinaten übereinstimmen.

Im folgenden werden einige Rechenregeln unter Verwendung der Komponentenschreibweise zusammengestellt.

### A.1.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors  $\mathbf{A}$  mit einem Skalar  $\lambda$  (Abb. A.2) liefert mit (A.3) und (A.4) den Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda = \lambda(A_x + A_y + A_z) \\ &= \lambda A_x \mathbf{e}_x + \lambda A_y \mathbf{e}_y + \lambda A_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ein Vektor wird demnach mit einer Zahl multipliziert, indem jede Koordinate des Vektors mit dieser Zahl multipliziert wird. Für  $\lambda > 0$  bleibt dabei der Richtungssinn erhalten, während er sich für  $\lambda < 0$  umkehrt. Im Sonderfall  $\lambda = -1$  erhält man den Vektor  $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ , der aus dem Vektor  $\mathbf{A}$  unter Beibehaltung des Betrages durch Umkehr des Richtungssinns entsteht. Für  $\lambda = 0$  erhält man den Nullvektor  $\mathbf{0}$ .

### A.1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Für die Summe zweier Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) + (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_x + B_x) \mathbf{e}_x + (A_y + B_y) \mathbf{e}_y + (A_z + B_z) \mathbf{e}_z \\ &= C_x \mathbf{e}_x + C_y \mathbf{e}_y + C_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Daraus folgt

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z. \quad (\text{A.16})$$

Zwei Vektoren werden also addiert, indem man jeweils die entsprechenden Koordinaten addiert.

Bei der Subtraktion zweier Vektoren folgt mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (\text{A.17})$$

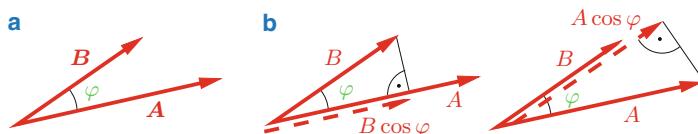
für die Koordinaten

$$C_x = A_x - B_x, \quad C_y = A_y - B_y, \quad C_z = A_z - B_z. \quad (\text{A.18})$$

### A.1.3 Skalarprodukt

Das *skalare Produkt (inneres Produkt)* zweier Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , die nach Abb. A.5a den Winkel  $\varphi$  einschließen, ist definiert durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \varphi. \quad (\text{A.19})$$



**Abb. A.5** Zum Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar (kein Vektor!). Das skalare Produkt lässt sich auf verschiedene Weise deuten (Abb. A.5b):

- Betrag von  $\mathbf{A}$  mal Betrag von  $\mathbf{B}$  mal Kosinus des eingeschlossenen Winkels,
- Betrag von  $\mathbf{A}$  mal senkrechter Projektion von  $\mathbf{B}$  auf  $\mathbf{A}$ ,
- Betrag von  $\mathbf{B}$  mal senkrechter Projektion von  $\mathbf{A}$  auf  $\mathbf{B}$ .

Das Skalarprodukt ist positiv, wenn die beiden Vektoren einen spitzen Winkel einschließen, während es bei einem stumpfen Winkel negativ ist. Im Sonderfall orthogonaler Vektoren ( $\varphi = \pi/2$ ) ist das Skalarprodukt Null.

Aus der Definition (A.19) folgt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{A.20})$$

Die Reihenfolge der Vektoren darf beim skalaren Produkt vertauscht werden (Kommutativgesetz).

In Komponentendarstellung wird das Skalarprodukt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \cdot (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z). \quad (\text{A.21})$$

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

finden wir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A.23})$$

Für den Sonderfall  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$  erhalten wir wegen  $\varphi = 0$  aus (A.19)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad \text{oder} \quad A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \quad (\text{A.24})$$

#### A.1.4 Vektorprodukt

Beim *Vektorprodukt* (*äußeres Produkt* oder *Kreuzprodukt*) zweier Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  verwenden wir ein „ $\times$ “ als Multiplikationszeichen:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.25})$$

Das Produkt ist folgendermaßen definiert:

- Der Vektor  $\mathbf{C}$  steht auf  $\mathbf{A}$  und auf  $\mathbf{B}$  senkrecht (Abb. A.6).
- Der Betrag von  $\mathbf{C}$  ist gleich der von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  aufgespannten Fläche:

$$|\mathbf{C}| = C = A B \sin \varphi. \quad (\text{A.26})$$

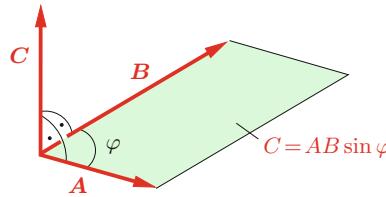
Dabei ist  $\varphi$  der von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  eingeschlossene Winkel.

- Die Vektoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Daraus folgt

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.27})$$

Das Kommutativgesetz gilt für das Vektorprodukt nicht.



**Abb. A.6** Anschauliche Deutung des Vektorprodukts

Sind zwei Vektoren parallel ( $\varphi = 0$ ), so verschwindet nach b) ihr Vektorprodukt.

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x &= -\mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

wird

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Damit folgen die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{C}$  zu

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Man erkennt, dass man bei Kenntnis einer Koordinate die beiden anderen durch *zyklische Vertauschung* ermitteln kann. Dabei werden die Indizes  $x, y, z$  im Uhrzeigersinn durch die jeweils nächstfolgenden Indizes ersetzt, d. h.  $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ .

Das Vektorprodukt kann auch in Form der Determinante

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.31})$$

geschrieben werden. In der ersten Zeile stehen dabei die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ , während die Koordinaten der Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die zweite und die dritte Zeile bilden. Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile liefert (vgl. (A.29))

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Das doppelte Vektorprodukt  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  ist ein Vektor, der in der Ebene liegt, die von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  aufgespannt wird. Es errechnet sich nach der Beziehung

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (\text{A.33})$$

die sich durch Anwendung von (A.30) bestätigen lässt.

## A.2 Lineare Gleichungssysteme

Bei der Behandlung von Problemen aus der Mechanik und aus anderen Fachgebieten wird man häufig auf Systeme von linearen Gleichungen geführt. Beispiele aus der Statik sind die Ermittlung von Lagerreaktionen bei einem statisch bestimmten gelagerten Tragwerk oder die Berechnung der Stabkräfte in einem statisch bestimmten Fachwerk. So liefern die Gleichgewichtsbedingungen für einen Balken beim ebenen Problem drei Gleichungen für die drei unbekannten Lagerreaktionen. Bei einem räumlichen Fachwerk mit  $k$  Knoten führen sie dagegen auf  $3k = s + r$  Gleichungen für die unbekannten  $s$  Stabkräfte und  $r$  Lagerreaktionen.

Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \tag{A.34}$$

von  $n$  linearen inhomogenen Gleichungen für die  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (z. B. die Lagerreaktionen und/oder die Stabkräfte). Die Koeffizienten  $a_{jk}$  sowie die „rechten Seiten“  $b_k$  seien bekannt. Unter Verwendung der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{A.35}$$

lässt sich (A.34) auch kurz in der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{A.36}$$

schreiben. Wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  von Null verschieden ist, d. h. wenn gilt

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{A.37}$$

dann sind die  $n$  Gleichungen (A.34) linear unabhängig, und das System hat die eindeutige Lösung

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \tag{A.38}$$

Man nennt  $A^{-1}$  die *inverse Matrix* zur Koeffizientenmatrix  $A$ . Sie ist durch  $A^{-1} A = \mathbf{1}$  definiert, wobei

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

die Einheitsmatrix ist. Da die Bestimmung der Inversen durch Handrechnung meist aufwendig ist, gehen wir hierauf nicht ein. Sie lässt sich allerdings mit Hilfe von Programmen wie MATLAB oder MATHEMATICA immer leicht ermitteln.

Die praktische Bestimmung der Unbekannten kann mit dem *Gaußschen Algorithmus* (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) oder mit der *Cramerschen Regel* (Gabriel Cramer, 1704–1752) erfolgen. Beim Gaußschen Algorithmus wird das Gleichungssystem (A.34) durch systematisches Eliminieren von Unbekannten in das äquivalente System

$$\begin{aligned} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1n} x_n &= b'_1, \\ a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n &= b'_2, \\ &\vdots \\ a'_{nn} x_n &= b'_n \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

übergeführt. Hieraus lassen sich – beginnend mit der letzten Gleichung – die Unbekannten der Reihe nach ermitteln.

Als Beispiel hierzu betrachten wir das System

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 16x_2 + 22x_3 + 13x_4 &= 9, \\ 4x_1 + 14x_2 + 28x_3 + 10x_4 &= 4, \\ 10x_1 + 23x_2 + 84x_3 + 25x_4 &= 22 \end{aligned}$$

von vier Gleichungen für vier Unbekannte. Nun wird die erste Gleichung (Zeile) mit  $-3$  multipliziert und zur zweiten addiert sowie die erste Zeile mit  $-2$  multipliziert und zur dritten addiert usw. Auf diese Weise wird die Unbekannte  $x_1$  aus der

zweiten bis vierten Gleichung eliminiert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 3, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_2 + 12x_3 + 2x_4 &= -2, \\ -2x_2 + 44x_3 + 5x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise gehen wir anschließend bei der Elimination von  $x_2$  und  $x_3$  vor. Es bietet sich dabei an, den Algorithmus nach folgendem Schema durchzuführen, bei dem nur die Koeffizienten der Gleichungen angeschrieben werden:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
2	5	8	4	3	(a)
6	16	22	13	9	
4	14	28	10	4	
10	23	84	25	22	
0	1	-2	1	0	(b)
0	4	12	2	-2	
0	-2	44	5	7	
0	0	20	-2	-2	(c)
0	0	40	7	7	
0	0	0	11	11	(d)

Mit den Koeffizienten aus (a) bis (d) ergibt sich dann das „gestaffelte System“ nach (A.40):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 3, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 20x_3 - 2x_4 &= -2, \\ 11x_4 &= 11. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man schrittweise – beginnend mit der letzten Zeile:

$$x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 2.$$

Nach der Cramerschen Regel folgen die Unbekannten aus

$$x_k = \frac{\det(\mathbf{A}_k)}{\det \mathbf{A}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.41})$$

Dabei ergibt sich die Determinante  $\det(\mathbf{A}_k)$  aus der Determinante der Matrix  $\mathbf{A}$ , indem man die  $k$ -te Spalte durch  $\mathbf{b}$  ersetzt. Danach erhält man zum Beispiel beim Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

die beiden Unbekannten zu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass sich die Cramersche Regel für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und höchstens noch für drei Gleichungen mit drei Unbekannten eignet. Insbesondere bei höherer Gleichungszahl wird jedoch der Gaußsche Algorithmus bevorzugt. Hingewiesen sei auch darauf, dass bei längeren Rechnungen durch Abrunden größere Genauigkeitsverluste auftreten können. Wie man diese Rundungsfehler klein hält, soll hier nicht erläutert werden.

# Englische Fachausdrücke

Englisch	Deutsch
A	
active force	eingeprägte Kraft
arch	Bogen
area force	Flächenkraft
B	
bar	Stab, Pendelstütze
beam	Balken
belt friction	Seilreibung
bending moment	Biegemoment
bound vector	gebundener Vektor
boundary condition	Randbedingung
branching point	Verzweigungspunkt
C	
cantilever beam	einseitig eingespannter Balken
center of forces	Kräftemittelpunkt
center of gravity	Schwerpunkt
center of mass	Massenmittelpunkt
center (centroid) of an area	Flächenmittelpunkt, Flächenschwerpunkt
center (centroid) of a line	Linienschwerpunkt
center (centroid) of a volume	Volumenschwerpunkt
clamped	eingespannt
clockwise	im Uhrzeigersinn
coefficient of kinetic friction	Reibungskoeffizient
coefficient of static friction	Haftungskoeffizient
component	Komponente
compression	Druck
concentrated force	Einzelkraft
concurrent forces	zentrale Kräftegruppe
conservative force	konservative Kraft
coordinate	Koordinate
coplanar forces	ebene Kräftegruppe
counterclockwise	entgegen dem Uhrzeigersinn
couple	Kräftepaar
critical load	kritische Last

<b>Englisch</b>	<b>Deutsch</b>
cross product	Vektorprodukt
cross section	Querschnitt
curved beam	Bogen
cyclic permutation	zyklische Vertauschung
D	
decomposition of a force	Zerlegung einer Kraft
degree of freedom	Freiheitsgrad
distributed force	verteilte Belastung
dot product	Skalarprodukt
E	
energy	Energie
equilibrium	Gleichgewicht
equilibrium condition	Gleichgewichtsbedingung
equilibrium position	Gleichgewichtslage
external force	äußere Kraft
F	
first moment of an area	Flächenmoment erster Ordnung, statisches Moment
fixed vector	gebundener Vektor
force	Kraft
frame	Rahmen
free body diagram	Freikörperbild
free vector	freier Vektor
friction	Reibung
friction law	Reibungsgesetz
G	
gravitiy	Schwerkraft
H	
hinge	Gelenk, gelenkiges Lager
homogeneous	homogen
I	
inclined plane	schiefe Ebene
J	
joint	Gelenk
K	
kinematically determinate	kinematisch bestimmt
kinematically indeterminate	kinematisch unbestimmt
kinetic friction	Reibung

Englisch	Deutsch
L	
law of action and reaction	Wechselwirkungsgesetz
law of friction	Reibungsgesetz
lever arm	Hebelarm
limiting friction	Grenzhaftung
line of action	Wirkungslinie
line load	Streckenlast
load	Last
M	
Macaulay brackets	Klammer-Symbol
matching condition	Übergangsbedingung
Maxwell (-Cremona) diagram	Cremona-Plan
method of joints	Knotenpunktverfahren
method of sections	Rittersches Schnittverfahren
moment	Moment
moment of a couple	Moment eines Kräftepaars
moment of a force	Moment einer Kraft
N	
Newton's law	Newton'sches Axiom
normal force	Normalkraft
O	
overhanging beam	Kragträger
P	
parallelogram of forces	Kräfteparallelogramm
pin	Knoten
plate	Platte
point mass	Massenpunkt
polygon of forces	Krafteck
position vector	Ortsvektor
potential	Potential
potential energy	potentielle Energie
pressure	Druck
principle of the lever	Hebelgesetz
principle of virtual displacements	Prinzip der virtuellen Verrückungen
principle of virtual work	Prinzip der virtuellen Arbeit
R	
reaction force	Reaktionskraft
reference point	Bezugspunkt
resolution of a force	Zerlegung einer Kraft

<b>Englisch</b>	<b>Deutsch</b>
restraint	Bindung
resultant	Resultierende
rigid body	starrer Körper
roller (bearing)	Rollenlager
rope	Seil
S	
scalar product	Skalarprodukt
shear(ing) force	Querkraft
shell	Schale
sign convention	Vorzeichenkonvention
simple beam	beidseitig gelenkig gelagerter Balken
single force	Einzelkraft
sliding vector	linienflüchtiger Vektor
spring	Feder
spring constant	Federkonstante
stability	Stabilität
stable	stabil
static friction	Haftung
statical moment of an area	statisches Moment, Flächenmoment erster Ordnung
statically determinate	statisch bestimmt
statically indeterminate	statisch unbestimmt
statics	Statik
string	Seil
structure	Tragwerk
superposition	Überlagerung
support	Lager
symmetry	Symmetrie
T	
tension	Zug
tensile force	Zugkraft
three-hinged arch	Dreigelenkbogen
torsion	Torsion
truss	Fachwerk
twisting moment	Torsionsmoment
U	
uniform	gleichförmig
unstable	instabil

<b>Englisch</b>	<b>Deutsch</b>
V	
vector product	Vektorprodukt
virtual displacement	virtuelle Verrückung
virtual work	virtuelle Arbeit
volume force	Volumenkraft
W	
weight	Gewicht
work	Arbeit

<b>Deutsch</b>	<b>Englisch</b>
A	
Arbeit	work
äußere Kraft	external force
B	
Balken	beam
beidseitig gelenkig gelagerter Balken	simple beam
Bezugspunkt	reference point
Biegemoment	bending moment
Bindung	restraint
Bogen	curved beam, arch
C	
Cremona-Plan	Maxwell(-Cremona) diagram
D	
Driegelenkbogen	three-hinged arch
Druck	compression, pressure
E	
ebene Kräftegruppen	coplanar forces
eingeprägte Kraft	active force
eingespannt	clamped
einseitig eingespannter Balken	cantilever beam
Einzelkraft	concentrated force, single force
Energie	energy
entgegen dem Uhrzeigersinn	counterclockwise
F	
Fachwerk	truss
Feder	spring
Federkonstante	spring constant
Flächenkraft	area force

<b>Deutsch</b>	<b>Englisch</b>
Flächenmittelpunkt	centroid (center) of an area
Flächenmoment erster Ordnung	first moment of an area, statical moment of an area
Flächenschwerpunkt	centroid (center) of an area
freier Vektor	free vector
Freiheitsgrad	degree of freedom
Freikörperbild	free body diagram
G	
gebundener Vektor	bound vector, fixed vector
Gelenk	hinge, joint
Gewicht	weight
gleichförmig	uniform
Gleichgewicht	equilibrium
Gleichgewichtsbedingung	equilibrium condition
Gleichgewichtslage	equilibrium position
Grenzhaftung	limiting friction
H	
Haftung	static friction
Haftungskoeffizient	coefficient of static friction
Haftungskraft	static frictional force
Hebelarm	lever arm
Hebelgesetz	principle of the lever
homogen	homogeneous
I	
im Uhrzeigersinn	clockwise
instabil	unstable
K	
kinematisch bestimmt	kinematically determinate
kinematisch unbestimmt	kinematically indeterminate
Klammer-Symbol	Macaulay brackets
Knoten	pin
Knotenpunktverfahren	method of joints
Komponente	component
konservative Kraft	conservative force
Koordinate	coordinate
Kraft	force
Kräftemittelpunkt	center of forces
Kräftepaar	couple
Kräfteparallelogramm	parallelogram of forces

<b>Deutsch</b>	<b>Englisch</b>
Krafteck	polygon of forces
Kragträger	overhanging beam
kritische Last	critical load
L	
Lager	support
Last	load
linienflüchtiger Vektor	sliding vector
Linienkraft	line load
Linienschwerpunkt	centroid of a line
M	
Massenmittelpunkt	center of mass
Massenpunkt	point mass
Moment	moment
Moment einer Kraft	moment of a force
Moment eines Kräftepaars	moment of a couple
N	
Newton'sches Axiom	Newton's law
Normalkraft	normal force
O	
Ortsvektor	position vector
P	
Parallelogramm der Kräfte	parallelogram of forces
Platte	plate
Potential	potential
potentielle Energie	potential energy
Prinzip der virtuellen Arbeit	principle of virtual work
Prinzip der virtuellen Verrückungen	principle of virtual displacements
Q	
Querkraft	shear(ing) force
Querschnitt	cross section
R	
Rahmen	frame
Randbedingung	boundary condition
Reaktionskraft	reaction force
Reibung	kinetic friction
Reibungsgesetz	law of friction, friction law
Reibungskoeffizient	coefficient of kinetic friction
Reibungskraft	frictional force, friction
Resultierende	resultant

<b>Deutsch</b>	<b>Englisch</b>
Rittersches Schnittverfahren	method of sections
Rollenlager	roller (bearing)
S	
Schale	shell
schiefe Ebene	inclined plane
Schwerkraft	gravity
Schwerpunkt	center of gravity
Seil	rope, string
Seilreibung	belt friction
Skalarprodukt	scalar product, dot product
Stab	bar
stabil	stable
Stabilität	stability
starrer Körper	rigid body
Statik	statics
statisches Moment	first moment of an area, statical moment of an area
statisch bestimmt	statically determinate
statisch unbestimmt	statically indeterminate
Streckenlast	line load
Superposition	superposition
Symmetrie	symmetry
T	
Torsion	torsion
Torsionsmoment	twisting moment
Tragwerk	structure
U	
Übergangsbedingung	matching condition
Überlagerung	superposition
V	
Vektorprodukt	vector product, cross product
Verzweigungspunkt	branching point
virtuelle Arbeit	virtual work
virtuelle Verrückung	virtual displacement
Volumenkraft	volume force
Volumenmittelpunkt	centroid of a volume
Vorzeichenkonvention	sign convention

<b>Deutsch</b>	<b>Englisch</b>
W	law of action and reaction
Wechselwirkungsgesetz	line of action
Wirkungslinie	
Z	concurrent forces
zentrale Kräftegruppe	resolution (decomposition) of a force
Zerlegung einer Kraft	tension
Zug	tensile force
Zugkraft	cyclic permutation
zyklische Vertauschung	

# Glossar

## Kapitel 1

**Äußere Kraft** Eine *äußere Kraft* wirkt von außen auf einen Körper oder ein System. Ob eine Kraft eine äußere oder eine innere Kraft ist, hängt von der räumlichen Abgrenzung des Systems ab.

**Eingeprägte Kraft** Eine *eingeprägte Kraft* ist durch eine physikalische Gesetzmäßigkeit vorgegeben.

**Einzelkraft** Eine *Einzelkraft* wird durch Größe, Richtung und Angriffspunkt charakterisiert. Sie ist als gebundener Vektor darstellbar. Kräfte an einem starren Körper sind linienflüchtige Vektoren: sie dürfen entlang ihrer Wirkungslinien beliebig verschoben werden. Einzelkräfte werden in der Einheit Newton (N) angegeben. Es gilt:  $1\text{ N} = 1\text{ kg m/s}^2$ . Die Einzelkraft ist eine Idealisierung (Modell!). Sie existiert nur gedanklich, nicht aber in realen Systemen.

**Erstarrungsprinzip** Ein mechanisches System, das sich im Gleichgewicht befindet, bleibt im Gleichgewicht, auch wenn Teile des Systems erstarren.

**Flächenkraft** *Flächenkräfte* treten in der Berührungsfläche zweier Körper auf. Ein Beispiel ist der Wasserdruk. Sie haben die Dimension Kraft/Fläche und werden zum Beispiel in Vielfachen der Einheit  $\text{N/m}^2$  angegeben.

**Freier Vektor** Ein *freier Vektor* ist nicht an eine Wirkungslinie gebunden: er darf im Raum beliebig parallel verschoben werden.

**Freikörperbild** Das *Freikörperbild* zeigt das mechanische System (Körper, Bau teil) losgelöst von seinen Bindungen (Lagern) unter der Wirkung aller wirkenden Kräfte (eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte). Ein richtiges Freikörper bild ist der Schlüssel zur Lösung vieler mechanischer Probleme.

**Freimachen, Freischneiden** Durch gedankliches Schneiden (*Freischneiden*) können Reaktionskräfte und innere Kräfte freigelegt und damit einer Analyse zugänglich gemacht werden.

**Innere Kraft** *Innere Kräfte* wirken zwischen Teilen eines Körpers oder Systems. Sie können durch gedankliche Schnitte freigelegt und damit einer Analyse zugänglich gemacht werden. Die Einteilung innere/äußere Kräfte hängt von der räumlichen Abgrenzung des Systems ab.

**Kraft** *Kräfte* sind physikalische Größen, die Formänderungen von Körpern bzw. Änderungen des Bewegungszustands von beweglichen mechanischen Systemen auslösen.

men verursachen. Man kann Kräfte nicht beobachten, sondern nur an ihren Wirkungen erkennen.

**Linienkraft** Linienkräfte (Streckenlasten) sind entlang einer Linie verteilt. Sie haben die Dimension Kraft/Länge und zum Beispiel die Einheit N/m. Die Linienkraft ist eine Idealisierung; sie existiert nicht in realen Systemen.

**Reaktionskraft** *Reaktionskräfte (Zwangskräfte)* entstehen durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheit eines Systems. Beispiele dafür sind die Lagerreaktionen. Reaktionskräfte können bei statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

**Schnittprinzip** Wenn sich ein mechanisches System im Gleichgewicht befindet, dann ist auch jedes freigeschnittene Teilsystem im Gleichgewicht. Dabei wirken am Teilsystem die freigelegten inneren Kräfte anstelle der Bindungen.

**Starrer Körper** In der Mechanik werden nicht reale Körper oder reale Systeme betrachtet, sondern es werden Modelle untersucht. Die Modelle müssen die wesentlichen Eigenschaften der realen Körper oder Systeme besitzen. Ein solches Modell (Idealisierung!) ist der starre Körper. Ein *starrer Körper* erfährt unter der Wirkung von Kräften keine Deformation. Dies bedeutet, dass sich die gegenseitigen Abstände beliebiger Körperpunkte bei einer Belastung des Körpers nicht ändern. Obwohl reale Körper immer in gewissem Maße deformierbar sind, können sie dann als starr aufgefasst werden, wenn die auftretenden Deformationen keine wesentliche Rolle bei der Beschreibung eines mechanischen Vorgangs spielen.

**Volumenkraft** Eine *Volumenkraft* ist über das Volumen eines Körpers verteilt. Beispiele sind die Gewichtskraft sowie magnetische und elektrische Kräfte. Volumenkräfte haben die Dimension Kraft/Volumen und werden zum Beispiel in Vielfachen der Einheit N/m<sup>3</sup> angegeben.

**Wechselwirkungsgesetz** Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie: *actio = reactio*. Das Wechselwirkungsgesetz stellt das dritte Newtonsche Axiom dar.

## Kapitel 2

**Gleichgewicht** Ein Körper befindet sich im *Gleichgewicht*, wenn er in Ruhe ist und das an ihm angreifende Kräftesystem auf den Nullvektor reduziert werden kann.

**Gleichgewichtsgruppe** Ein System von Kräften, das die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, wird als *Gleichgewichtsgruppe* bezeichnet.

**Komponenten** Eine Kraft in der Ebene kann man in zwei, eine Kraft im Raum in drei Kräfte mit vorgegebenen Richtungen zerlegen. Diese Kräfte werden als *Komponenten* der ursprünglichen Kraft bezüglich der gegebenen Richtungen bezeichnet.

**Koordinaten** In einem kartesischen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  kann ein Vektor, wie z. B. die Kraft  $\mathbf{F}$  in der Form  $\mathbf{F} = F_x e_x + F_y e_y + F_z e_z$  geschrieben werden. Die Größen  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  sind die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{F}$ . Beachte:  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  werden häufig auch als Komponenten des Vektors bezeichnet. Da die Komponenten eines Vektors aber selbst Vektoren sind (siehe Komponenten), ist diese Bezeichnungsweise zwar üblich, aber nicht ganz korrekt.

**Kräftedreieck** Bei der grafischen Addition von zwei Kräften mit einem gemeinsamen Angriffspunkt genügt es, statt des Parallelogramms nur ein Kräftedreieck zu zeichnen. Dies hat den Vorteil, dass die grafische Addition übersichtlich auf beliebig viele Kräfte verallgemeinert werden kann.

**Kräfteplan** Im *Kräfteplan* werden die Kraftvektoren unter Verwendung eines Kräftemaßstabs aneinandergefügt.

**Kräftepolygon, Krafteck** In einem em Kräftepolygon (Krafteck) wird die grafische Addition beliebig vieler Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt durchgeführt.

**Lageplan** Der *Lageplan* bei der grafischen Lösung eines Problems enthält die Geometrie des zu untersuchenden Systems und die Wirkungslinien der angreifenden Kräfte. Zum Zeichnen des Lageplans muss im allgemeinen ein Längenmaßstab gewählt werden. Im Sonderfall einer zentralen Kräftegruppe enthält der Lageplan nur die Wirkungslinien der Kräfte.

**Normalkraft, Tangentialkraft** Eine Kraft, die in einem Punkt einer Fläche (Schnittfläche) wirkt, lässt sich in ihre Komponenten, die *Normalkraft*  $N$  (normal zur Fläche) und die *Tangentialkraft*  $T$  (in der Fläche) zerlegen.

**Parallelogramm der Kräfte, Resultierende** Das Axiom vom *Parallelogramm der Kräfte* besagt, dass zwei Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt statisch gleichwertig durch eine einzige Kraft ersetzt werden können, die sich grafisch als Diagonale des von den beiden Kräften gebildeten Parallelogramms ergibt. Sie hat denselben Angriffspunkt und wird als *Resultierende* der beiden Kräfte bezeichnet.

**Reduktion** Das Ersetzen einer Gruppe von Kräften durch ein einfacheres, statisch gleichwertiges Kräftesystem (zum Beispiel durch eine Einzelkraft) wird als *Reduktion* bezeichnet.

**Seil** Als idealisiertes *Seil* bezeichnet man einen Körper, dessen Abmessungen des Querschnitts klein im Vergleich zur Länge sind, und der nur Zugkräfte in

Richtung seiner Längsachse aufnehmen kann. Ein Seil setzt einer Verbiegung keinen Widerstand entgegen; es verhält sich wie ein Faden.

**Stab** Ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Länge und das nur in Richtung seiner Achse beansprucht wird, heißt *Stab*. Ein Stab kann sowohl auf Zug als auch auf Druck beansprucht werden.

## Kapitel 3

**Bezugspunkt** Das Moment einer Kraft wird bezüglich eines beliebig gewählten Punkts, des Bezugspunkts, gebildet.

**Drehsinn** Ein Kräftepaar (Moment  $\mathbf{M}$ ) hat einen *Drehsinn*. Ein positives Kräftepaar (Moment) versucht einen Körper im Sinne einer 'Rechtsschraube' zu drehen.

**Dyname, Kraftwinder** Das Paar  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_R^{(A)})$ , das aus einem Kraftvektor  $\mathbf{R}$  und dem Momentenvektor  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  der Kraft  $\mathbf{R}$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $A$  besteht, wird Dyname oder Kraftwinder genannt.

**Gleichgewichtsbedingungen** Ein Körper unter der Wirkung einer allgemeinen Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende  $\mathbf{R}$  und ihr resultierendes Moment  $\mathbf{M}_R^{(A)}$  bezogen auf einen beliebigen Bezugspunkt  $A$  Null sind:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (\text{Kräftegleichgewichtsbedingung}),$$

$$\mathbf{M}_R^{(A)} = \sum \mathbf{r}_i^{(A)} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (\text{Momentengleichgewichtsbedingung}).$$

Bei einer zentralen Kräftegruppe ist die Momentengleichgewichtsbedingung identisch erfüllt.

**Hebelarm** Als *Hebelarm* (einer Kraft) bezeichnet man den Abstand des Bezugspunkts von der Wirkungslinie der Kraft.

**Kräftepaar** Ein Kräftepaar besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften  $\mathbf{F}$  auf parallelen Wirkungslinien. Ein Kräftepaar kann nicht auf eine Einzelkraft reduziert werden. Seine Wirkung wird durch sein Moment (Momentenvektor)  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  beschrieben. Darin zeigt  $\mathbf{r}$  von einem beliebigen Punkt der einen zu einem beliebigen Punkt der anderen Wirkungslinie. Der Betrag des Momentes ist durch  $M = hF$  gegeben, wobei  $h$  der senkrechte Abstand der Wirkungslinien ist.

**Kraftschraube** Eine Dyname, bei der der Momentenvektor die gleiche Richtung wie der Kraftvektor hat, heißt *Kraftschraube*.

**Moment** Die Wirkung eines Kräfepaars ist durch sein *Moment*  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  gegeben (siehe Kräfepaar). Das *Moment einer Kraft*  $\mathbf{F}$  bezogen auf einen Bezugspunkt  $A$  wird durch  $\mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r}^{(A)} \times \mathbf{F}$  beschrieben, wobei  $\mathbf{r}^{(A)}$  vom Punkt  $A$  zu einem beliebigen Punkt der Wirkungslinie von  $\mathbf{F}$  zeigt. Der Betrag des Momentes einer Kraft ist durch  $M^{(A)} = hF$  gegeben, wobei  $h$  (Hebelarm) der senkrechte Abstand des Bezugspunktes  $A$  von der Wirkungslinie von  $F$  ist.

**Momentenvektor** Das *Moment einer Kraft*  $\mathbf{F}$  bezüglich eines Bezugspunkts  $A$  ist durch den Vektor

$$\mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r}^{(A)} \times \mathbf{F}$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{r}^{(A)}$  der Vektor vom Punkt  $A$  zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie von  $\mathbf{F}$  ist.

**Ortsvektor** Der Vektor vom Koordinatenursprung 0 zu einem beliebigen Punkt heißt *Ortsvektor*.

**Rechtsschraube** Ein positives Moment dreht beim Blick in die positive Richtung einer Achse im Uhrzeigersinn. Eine Schraube mit Rechtsgewinde würde sich bei einer solchen Drehung in die positive Richtung der Achse verschieben.

**Seileck, Seilpolygon** Die Konstruktion des *Seilecks* (*Seilpolygons*) ermöglicht in Verbindung mit dem Krafteck (siehe Krafteck) die grafisches Zusammensetzen (Reduktion) von beliebig vielen Kräften in der Ebene.

**Zentralachse** Die gemeinsame Wirkungslinie des Kraftvektors und des Momentenvektors einer Kraftschraube wird als *Zentralachse* bezeichnet.

## Kapitel 4

**Flächenmomente erster Ordnung, statische Momente** Die Flächenmomente erster Ordnung (statischen Momente) sind definiert durch die Integrale

$$S_x = \int y dA, \quad S_y = \int x dA.$$

Sie sind rein geometrische Größen.

**Flächenschwerpunkt** Die Koordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Fläche sind definiert durch

$$x_s = 1/A \int x dA, \quad y_s = 1/A \int y dA.$$

**homogen** Bei einem *homogenen* Körper ist die Dichte konstant.

**Kräftemittelpunkt** Der *Kräftemittelpunkt* ist ein beliebiger Punkt auf der Wirkungslinie der Resultierenden von mehreren parallelen Einzelkräften bzw. parallelen verteilten Kräften.

**Massenmittelpunkt** Der *Massenmittelpunkt* ist definiert durch

$$x_s = 1/m \int x dm, \quad y_s = 1/m \int y dm, \quad z_s = 1/m \int z dm.$$

**Schwerpunkt** Der *Schwerpunkt* eines Körpers ist derjenige Punkt, in dem man sich das räumlich verteilte Gewicht konzentriert denken kann, ohne dass sich die statische Wirkung ändert. Er ist definiert durch

$$x_s = \frac{\int \rho g x dV}{\int \rho g dV}, \quad y_s = \frac{\int \rho g y dV}{\int \rho g dV}, \quad z_s = \frac{\int \rho g z dV}{\int \rho g dV}.$$

**Schwerachsen** Achsen, die durch den Schwerpunkt eines Körpers gehen, werden *Schwerachsen* genannt.

**Volumenmittelpunkt** Der Volumenmittelpunkt ist definiert durch

$$x_s = 1/V \int x dV, \quad y_s = 1/V \int y dV, \quad z_s = 1/V \int z dV.$$

Er ist eine rein geometrische Größe. Bei konstanter Dichte und konstanter Erdbeschleunigung fallen der (physikalische) Schwerpunkt und der (geometrische) Volumenmittelpunkt zusammen.

## Kapitel 5

**Äußerlich statisch bestimmt** Ein Tragwerk ist *äußerlich statisch bestimmt* gelagert, wenn die Lagerreaktionen allein mit den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

**Balken** Als *Balken* bezeichnet man ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Längsabmessung und das quer zu seiner Achse beansprucht ist.

**Dreigelenkbogen** Ein *Dreigelenkbogen* ist ein statisch bestimmtes Tragwerk aus zwei gelenkig miteinander verbundenen Teilkörpern, welches durch zwei (einwertige) gelenkige Lager gelagert ist.

**Dreiwertiges Lager** Ein *dreiwertiges Lager* kann drei Lagerreaktionen übertragen.

**Einwertiges Lager** Einwertige Lager können nur eine einzige Lagerreaktion übertragen.

**Freiheitsgrade** Die *Freiheitsgrade* eines Körpers (Systems) bezeichnen die Anzahl der voneinander unabhängigen Koordinaten, die benötigt werden, um die Lage des Körpers (Systems) eindeutig festzulegen.

**Gelenkbalken, Gerber-Träger** Ein statisch und kinematisch bestimmter gelagerter Balken mit eingefügten Gelenken wird als *Gelenkbalken oder Gerber-Träger* bezeichnet.

**Hauptpol** Bei einem ebenen System von gelenkig verbundenen Körpern werden die Momentanpole der einzelnen Körper als *Hauptpole* bezeichnet.

**Innerlich statisch unbestimmt** Ein Tragwerk ist innerlich statisch unbestimmt, wenn die inneren Kräfte (z. B. die Verbindungsreaktionen oder die Stabkräfte eines Fachwerks) nicht allein mit den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können.

**Kinematisch unbestimmt** Ein Tragwerk, das so gelagert ist, dass es eine endliche oder infinitesimale Beweglichkeit besitzt, ist *kinematisch unbestimmt*.

**Lager** Durch *Lager* wird die gewünschte Lage eines Tragwerks im Raum festgelegt. Lager übertragen Kräfte zwischen der Umgebung und dem Tragwerk.

**Lagerkraft** Kraft, die am Lager zwischen Umgebung und Tragwerk übertragen wird.

**Lagerreaktionen** Lager übertragen Kräfte und/oder Momente zwischen Tragwerk und der Umgebung. Sie werden als *Lagerreaktionen* bezeichnet.

**Momentanpol** Die ebene Bewegung eines starren Körpers, der keinen Bindungen unterworfen ist, kann zu jedem Zeitpunkt als eine reine Drehung um einen augenblicklichen (momentanen) Drehpunkt aufgefasst werden. Dieser Punkt heißt *Momentanpol*.

**Nebenpol** Die Punkte, an denen jeweils zwei Körper eines ebenen Systems von gelenkig verbundenen Körpern miteinander verbunden sind, heißen *Nebenpole*.

**Polplan** Ein *Polplan* enthält alle Hauptpole und Nebenpole eines ebenen Systems von gelenkig verbundenen Körpern.

**Polstrahl** Die Gerade vom Momentanpol zu einem beliebigen Punkt eines Körpers heißt *Polstrahl*.

**Statisch bestimmt** Ein Problem heißt *statisch bestimmt*, wenn die unbekannten Kraftgrößen (Kräfte, Momente) allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

**Statisch unbestimmt** Ein Problem heißt *statisch unbestimmt*, wenn die unbekannten Kraftgrößen (Kräfte, Momente) nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

**Superpositionsprinzip** Die Gleichgewichtsbedingungen sind lineare Beziehungen zwischen den Kräften. Dementsprechend gilt das *Superpositionsprinzip*. Danach kann man das Problem eines durch mehrere Kräfte belasteten Systems in mehrere Teilprobleme (Lastfälle) aufspalten. Die Lösung des Gesamtproblems erhält man dann durch Addition (Superposition) der Lösungen der Teilprobleme.

**Zweiwertiges Lager** Ein *zweiwertiges Lager* kann zwei Lagerreaktionen übertragen.

## Kapitel 6

**Einfaches Fachwerk** Ein einfaches (ebenes) Fachwerk wird, ausgehend von einem Dreieck aus drei Stäben, durch Hinzufügen und Verbinden von jeweils zwei weiteren Stäben aufgebaut.

**Fachwerk** Ein *Fachwerk* besteht aus (geraden) Stäben, die in Knoten gelenkig miteinander verbunden sind. Äußere Kräfte greifen nur in den Knoten an.

**Knotenpunktverfahren** Beim *Knotenpunktverfahren* werden alle Knoten eines Fachwerks freigeschnitten und die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Knoten aufgestellt. Auflösen der Gleichungen liefert alle Stab- und Lagerkräfte.

**Nullstab** Stäbe in denen die Stabkraft Null ist, heißen *Nullstäbe*.

**Schnittverfahren nach Ritter** Beim *Schnittverfahren* wird ein ebenes Fachwerk mit einem Schnitt durch drei Stäbe in zwei Teile zerlegt. Gleichgewicht an einem Teil liefert dann die Kräfte in den drei Stäben.

## Kapitel 7

**Klammer-Symbol** Das *Klammer-Symbol* (*Föppl-Symbol*) ist definiert durch  $\langle x - a \rangle^n = 0$  für  $x < a$  und  $\langle x - a \rangle^n = (x - a)^n$  für  $x > a$ .

**Randbedingungen** Eine *Randbedingung* ist eine Gleichung, die eine Aussage über den Wert einer Größe am Rand eines Bereichs macht.

**Schnittgrößen** Die *Schnittgrößen* für Balken, Rahmen, Bogen bei einem ebenen Problem sind die Normalkraft, die Querkraft und das Biegemoment.

**Torsionsmoment** Die über eine Balkenquerschnittsfläche verteilten Kräfte können durch ihre Resultierende und ihr resultierendes Moment ersetzt werden. Das *Torsionsmoment* ist die Komponente des resultierenden Moments in Richtung der Längsachse des Balkens.

**Übergangsbedingung** Eine *Übergangsbedingung* ist eine Gleichung, die eine Aussage über das Verhalten einer Größe beim Übergang von einem Bereich in einen anderen Bereich macht.

## Kapitel 8

**Arbeit** Die Arbeit  $W$  einer Kraft  $\mathbf{F}$  bei einer endlichen Verschiebung des Kraftangriffspunkts ist definiert durch das Wegintegral

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Nur im Sonderfall einer Kraft, die konstant ist und in Richtung der Verschiebung zeigt, gilt Arbeit ist Kraft  $\times$  Weg.

**Arbeitssatz der Statik** Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Arbeit der eingeprägten Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung aus dieser Lage verschwindet (siehe Prinzip der virtuellen Verrückungen).

**Indifferentes Gleichgewicht** Eine Gleichgewichtslage heißt *indifferent*, wenn alle benachbarten Lagen ebenfalls Gleichgewichtslagen sind.

**Instabiles Gleichgewicht** Eine Gleichgewichtslage ist instabil, wenn sich das System nach einer kleinen Störung (Auslenkung) weiter von der Gleichgewichtslage entfernt.

**Konservative Kraft** Eine *konservative Kraft* kann man aus einem Potential ableiten. Ihre Arbeit ist wegunabhängig und hängt nur von Anfangs- und Endpunkt der Bahn ab.

**Potential, Potentielle Energie** Unter einem *Potential (potentielle Energie)* versteht man das ‚Arbeitsvermögen‘ einer Kraft. Es existiert nur für konservative Kräfte. Diese können durch Differentiation aus dem Potential abgeleitet werden.

**Prinzip der virtuellen Verrückungen, Prinzip der virtuellen Arbeiten** Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Arbeit der eingeprägten Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung aus dieser Lage verschwindet.

**Stabiles Gleichgewicht** Eine Gleichgewichtslage ist *stabil*, wenn das System nach einer kleinen Störung (Auslenkung) wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehrt.

**Stabilität** Eine Gleichgewichtslage kann stabil, instabil (labil) oder indifferent sein.

**Stabilitätskriterium** Eine Gleichgewichtslage eines konservativen Systems ist stabil/labil, wenn das Gesamtpotential in der Gleichgewichtslage ein Minimum/ein Maximum hat. Sie ist indifferent, wenn das Potential in der Umgebung der Gleichgewichtslage konstant ist.

**Virtuelle Arbeit** Die von Kräften bzw. Momenten bei einer virtuellen Verrückung verrichtete Arbeit heißt *virtuelle Arbeit*.

**Virtuelle Verrückung** *Virtuelle Verrückungen* sind ‚gedachte‘, kinematisch mögliche, infinitesimale Verschiebungen oder Drehungen; sie treten in Wirklichkeit nicht auf.

## Kapitel 9

**Haftung** Von *Haftung* spricht man beim Kontakt zweier Körper, wenn durch eine hinreichend große Rauigkeit eine relative Bewegung der Berührungspunkte der beiden Körper in der Berührungsfläche (Rutschen) verhindert ist. Hierzu müssen die Komponenten der Kontaktkraft (Tangentialkraft und Normalkraft) die Haftbedingung erfüllen. Die Tangentialkraft nennt man auch Haftungskraft.

**Haftbedingung** Damit zwei Körper beim Kontakt an der Berührungsstelle haften, müssen die Komponenten der Kontaktkraft (Haftungskraft  $H$ , Normalkraft  $N$ ) die *Haftbedingung*  $|H| < H_0$  mit  $H_0 = \mu_0 N$  erfüllen. Darin ist  $\mu_0$  der Haftungskoeffizient.

**Haftungskoeffizient** Die Haftungskraft  $H$  kann einen Maximalwert  $H_0$  nicht überschreiten. Experimente zeigen, dass diese Grenzhaftkraft  $H_0$  in erster Näherung proportional zur Normalkraft  $N$  im Berührungsrand ist:  $H_0 = \mu_0 N$ . Der Proportionalitätsfaktor  $\mu_0$  heißt *Haftungskoeffizient*; er hängt von den Materialien der sich berührenden Körper und der Beschaffenheit von deren Oberflächen ab.

**Haftungskraft** Haften zwei rauere Körper beim Kontakt in ihrem Berührungsrand, dann bezeichnet man die tangentiale Komponente der Kontaktkraft (in der Berührungsfläche) als *Haftungskraft* oder *Haftkraft*. Die Haftungskraft ist eine Reaktionskraft und kann bei statisch bestimmten Problemen aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

**Reibung** Von *Reibung* spricht man beim Kontakt zweier rauerer Körper, wenn die Berührungspunkte der beiden Körper sich relativ zueinander in der Berührungsfläche bewegen. Die Komponenten der Kontaktkraft (Normalkraft und Tangentialkraft) sind dann durch das Reibungsgesetz miteinander verbunden. Die Tangentialkraft nennt man auch Reibungskraft.

**Reibungsgesetz** Experimente zeigen, dass die beim Gleiten zweier nicht geschmierter Oberflächen auftretende Reibungskraft  $R$  näherungsweise proportional zur Normalkraft  $N$  im Berührpunkt ist:  $R = \mu N$ . Diesen Zusammenhang nennt man *Reibungsgesetz*. Der Proportionalitätsfaktor  $\mu$  heißt Reibungskoeffizient.

**Reibungskraft** Reibung tritt auf, wenn sich die Berührungspunkte zweier rauer Körper beim Kontakt relativ zueinander bewegen. Die tangentiale Komponente der dabei wirkenden Kontaktkraft nennt man *Reibungskraft* oder *Reibkraft*. Die Reibungskraft ist durch das Reibgesetz bestimmt und dementsprechend eine eingeprägte Kraft.

# Stichwortverzeichnis

## A

- Arbeit, [214, 215](#)
- Arbeit, virtuelle, [221, 222](#)
- Arbeitssatz, [221](#)
- Archimedes, [46](#)
- äußerlich statisch bestimmt, [138](#)
- Axiom, [XIII](#)
- Axiom –, Newtonsches, [10](#)

## B

- Balken, [113, 173](#)
- Balkenachse, [169](#)
- Berührungsebene, [27](#)
- Bezugspunkt, [50](#)
- Biegemoment, [169, 207](#)
- Bindung, [114](#)
- Bogen, [113, 171, 201](#)

## C

- Coulombsche Reibungsgesetze, [249](#)
- Cramersche Regel, [274, 276](#)
- Cremona-Plan, [157](#)

## D

- Drehfederkonstante, [220](#)
- Dreigelenkbogen, [131](#)
- Durchlaufträger, [135](#)
- Dyname, [80](#)
- Dynamik, [XIV](#)

## E

- Einheitsvektor, [5](#)
- Einspannung, [116, 123](#)
- Energie, potentielle, [219](#)
- Erstarrungsprinzip, [8, 129, 133](#)
- Euler, [260](#)
- Eytelwein, [260](#)

## F

- Fachwerk, [146](#)
- Fachwerk, einfaches, [149](#)
- Faser, gestrichelte, [171](#)
- Federkonstante, [220](#)
- Federkonstante, Dreh-, [220](#)
- Flächenmoment, [98](#)
- Flächenschwerpunkt, [97](#)
- Föppl-Symbol, [193](#)
- Freiheitsgrad, [54, 75, 114, 123, 137, 225, 228](#)
- Freikörperbild, [8, 26](#)
- Freischneiden, [7](#)

## G

- Gaußscher Algorithmus, [274](#)
- Gelenk, [126](#)
- Gelenk -balken, [134](#)
- Gelenk -kraft, [126](#)
- Gerber-Träger, [135, 229, 230](#)
- gestrichelte Faser, [201](#)
- Gleichgewicht, [24, 36, 57](#)
- Gleichgewicht, indifferentes, [234](#)
- Gleichgewichts -bedingungen, [25](#)
- Gleichgewichts -gruppe, [25](#)
- Gleichgewichtsbedingungen, [36, 49, 54, 74, 222](#)
- Gleichgewichtslage, [223](#)
- Gleichgewichtslage, instabile, [234](#)
- Gleichgewichtslage, Stabilität einer, [233](#)
- Gleitreibung, [248](#)
- Grafoanalytische Lösung, [28, 32](#)

## H

- Haftbedingung, [249](#)
- Haftung, [246–248](#)
- Haftungs -kegel, [250](#)
- Haftungs -keil, [250](#)
- Haftungs -koeffizient, [249](#)

- Haftungs -kraft, 248  
Haftungs -winkel, 250  
Hauptpol, 140  
Hebelarm, 50  
Hebelgesetz, 46, 222  
homogener Körper, 94
- I**  
innerlich statisch unbestimmt, 138
- J**  
Joule, 216
- K**  
Kinematik, XIV, 225  
kinematisch unbestimmt, 128  
Kinematische Bestimmtheit, 117, 137, 148  
Kinetik, XIV  
Klammer-Symbol, 193  
Knoten, 147  
Knotenpunktverfahren, 151  
Kraft, 3  
Kraft –, Angriffspunkt einer, 4  
Kraft –, äußere, 8  
Kraft –, Betrag einer, 3  
Kraft –, eingeprägte, 7  
Kraft –, Einzel-, 6  
Kraft –, Flächen-, 7  
Kraft –, innere, 8  
Kraft –, Linien-, 7  
Kraft –, Reaktions-, 7  
Kraft –, Richtung einer, 3  
Kraft –, Volumen-, 7  
Kraft –, Zwangs-, 7  
Kraft -eck, 18  
Kraft -komponenten, 21  
Kraft -systeme, ebene, 52  
Kraft -systeme, zentrale, 16  
Kraft -vektor, 5  
Kraft -winder, 80  
Kraft, Feder-, 220  
Kraft, Flächen-, 169  
Kraft, Gelenk-, 126
- Kraft, Gewichts-, 219  
Kraft, Haftungs-, 248  
Kraft, konservative, 219  
Kraft, Normal-, 169, 207  
Kraft, Potential-, 219  
Kraft, Quer-, 169, 207  
Kraft, Reaktions-, 228, 248  
Kraft, Reibungs-, 248  
Kraft, Schnitt-, 228  
Kraft, Stab-, 148  
Kräfte –, parallele, 45, 63  
Kräfte -dreieck, 18  
Kräfte -gruppe, ebene, 16  
Kräfte -gruppen, räumliche, 33, 67  
Kräfte -gruppen, zentrale, 16, 33  
Kräfte -paar, 46  
Kräfte -plan, 18, 64  
Kräfte -polygon, 18  
Kräfte -zerlegung, 21  
Kräfte -zusammensetzung, 17, 33  
Kräftemittelpunkt, 89  
Kräftepaar, 57  
Kraftschraube, 80  
Kragträger, 177  
Kritische Last, 240
- L**  
Lageplan, 18  
Lager, 113  
Lager –, dreiwertige, 115  
Lager –, einwertige, 114  
Lager –, fünfwertiges, 123  
Lager –, sechswertiges, 123  
Lager –, vierwertiges, 123  
Lager –, zweiwertige, 115  
Lager -kraft, 114  
Lager -reaktionen, 112, 113  
Lager, Fest-, 115  
Lager, gelenkiges, 115, 123  
Lager, Gleit-, 114  
Lager, Rollen-, 114  
Linienschwerpunkt, 107

**M**

- Macaulay, 193  
Massenmittelpunkt, 92, 94  
Massenpunkt, XIII  
Moment, 47  
Moment – einer Kraft, 49  
Moment, Betrag, 47  
Moment, Biege-, 169, 207  
Moment, Drehsinn, 47  
Moment, Torsions-, 207  
Momentanpol, 139, 140  
Momenten -gleichgewichtsbedingung, 71  
Momenten -linie, 175  
Momenten -vektor, 67

**N**

- Nebenpol, 140  
Newton, 3, 10  
Normalkraft, 27, 169, 207  
Nullstab, 151

**O**

- Ortsvektor, 69, 215

**P**

- Parallel -führung, 115, 126  
Parallelführung, 183, 190  
Parallelogramm der Kräfte, 17  
Pendel -stab, 126  
Pendel -stütze, 123  
Pendelstütze, 114  
Pol des Kraftecks, 65  
Pol -plan, 140  
Pol -strahl, 139  
Pol -strahlen, 65  
Polstrahl, 140  
Potential, 215  
Potential der Drehfeder, 220  
Potential der Federkraft, 220  
Potential des Gewichts, 219  
Prinzip der virtuellen Verrückungen, 222

**Q**

- Querkraft, 169, 207  
Querkraft -gelenk, 190  
Querkraft -linie, 175  
Querkraftgelenk, 126

**R**

- Rahmen, 113, 171, 201  
Randbedingungen, 183  
Reaktionskraft, 248  
Rechtsschraube, 68  
Reduktion, 18, 52  
Reibung, 246–248  
Reibungs -gesetz, 251  
Reibungs -koeffizient, 249, 251  
Reibungs -kraft, 248  
Resultierende, 17, 52, 57  
Rittersches Schnittverfahren, 161

**S**

- Schale, 113  
Scheibe, 113  
Schiebehülse, 115, 123, 183  
Schnitt -kraftlinien, 174  
Schnitt -prinzip, 118, 126, 169, 207  
Schnitt -ufer, 170  
Schnitt, Rittersches, 161  
Schnittrößen, 169  
Schnittprinzip, 9  
Schwerachsen, 98  
Schwerkraft, 3  
Schwerpunkt, 88, 94  
Seil, 27  
Seil -eck, 63  
Seil -haftung, 259  
Seil -polygon, 64  
Seil -reibung, 259  
Seil -strahlen, 65  
Skalarprodukt, 269  
Stab, 27, 113  
Stab -kraft, 148  
Stab -werk, 147  
Stab, Null-, 151  
Stabilität, 233, 234

- Stabilitätskriterium, 235  
starrer Körper, **XIII**, 5  
Statik, **XIV**  
statisch unbestimmt, 118, 137  
statisch unbestimmt, innerlich, 138  
Statische Bestimmtheit, 26, 116, 124, 126, 135, 147  
Statisches Moment, 98  
Streckenlast, 7  
Superposition, 195  
Superpositionsprinzip, 121
- T**  
Tagwerke, ebene, 113  
Tangentialkraft, 27  
Torsionsmoment, 207  
Totalresultierende, 82  
Tragwerke –, mehrteilige, 126  
Tragwerke –, räumliche, 123  
Tragwerke, ebene, 126  
Tragwerke, räumliche, 207
- U**  
Übergangsbedingungen, 187
- V**  
Vektor, 4
- Vektor –, freier, 4, 71  
Vektor –, gebundener, 4  
Vektor –, linienflüchtiger, 6  
Vektor -addition, 265, 269  
Vektor -komponenten, 266  
Vektor -koordinaten, 267  
Vektor -produkt, 68, 270  
Vektor, Betrag, 265, 267  
Vektor, Einheits-, 265  
Vektoren, 265  
Verbindungslemente, 126  
Verzweigungspunkt, 241  
virtuelle Arbeit, 221  
virtuelle Verrückung, 221  
Volumenmittelpunkt, 94  
Vorzeichenkonvention – für Stabkräfte, 33  
Vorzeichenkonvention für Schnittgrößen, 170, 201, 207  
Vorzeichenkonvention für Stabkräfte, 152
- W**  
Wechselwirkungsgesetz, 9, 113, 126, 170  
Wirkungslinie, 4
- Z**  
Zentralachse, 80, 81  
Zweigelenkbogen, 131  
Zyklische Vertauschung, 272