SBL - Notizen aus Mathematik 3: Funktionen

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben des Aufgabenpools zu bearbeiten.

Seite 27 - Polynom durch vorgegebene Punkte

Aufgabe: Bestimme das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, welches durch die Punkte $P_1(-1,6)$, $P_2(2,-3)$ und $P_3(4,1)$ verläuft.

Schritt I: Stelle das Gleichungssystem auf

$$\left| \begin{array}{c} a - b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 16a + 4b + c = 1 \end{array} \right|$$

Schritt II: Löse das Gleichungssystem, z.B. mittels des Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & -3 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Schritt II.1: Addiere das minus vierfache der ersten Zeile mit der zweiten Zeile

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & 6b & - & 3c & = & -27 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Schritt II.3: Addiere das minus 16-fache der ersten Zeile mit der dritten Zeile

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & 6b & - & 3c & = & -27 \\ & & 20b & - & 15c & = & -95 \end{array}$$

Schritt II.4: Addiere das minus 5-fache der zweiten Zeile mit der dritten Zeile

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & 6b & - & 3c & = & -27 \\ & - & 10b & & & = & 40 \end{array}$$

Schritt II.5: Löse die dritte Zeile nach b

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & 6b & - & 3c & = & -27 \\ & & b & & & = & -4 \end{array}$$

Schritt II.6: Rückwärtssubstitution von b

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & 6 \cdot (-4) & - & 3c & = & -27 \\ & & b & & & = & -4 \end{array}$$

Schritt II.7: Lösen die zweite Zeile nach c

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 6 \\ & & & & c & = & 1 \\ & & b & & & = & -4 \end{array}$$

$$b \qquad = \quad -4$$

Schritt II.8: Rückwärtssubstitution b und c

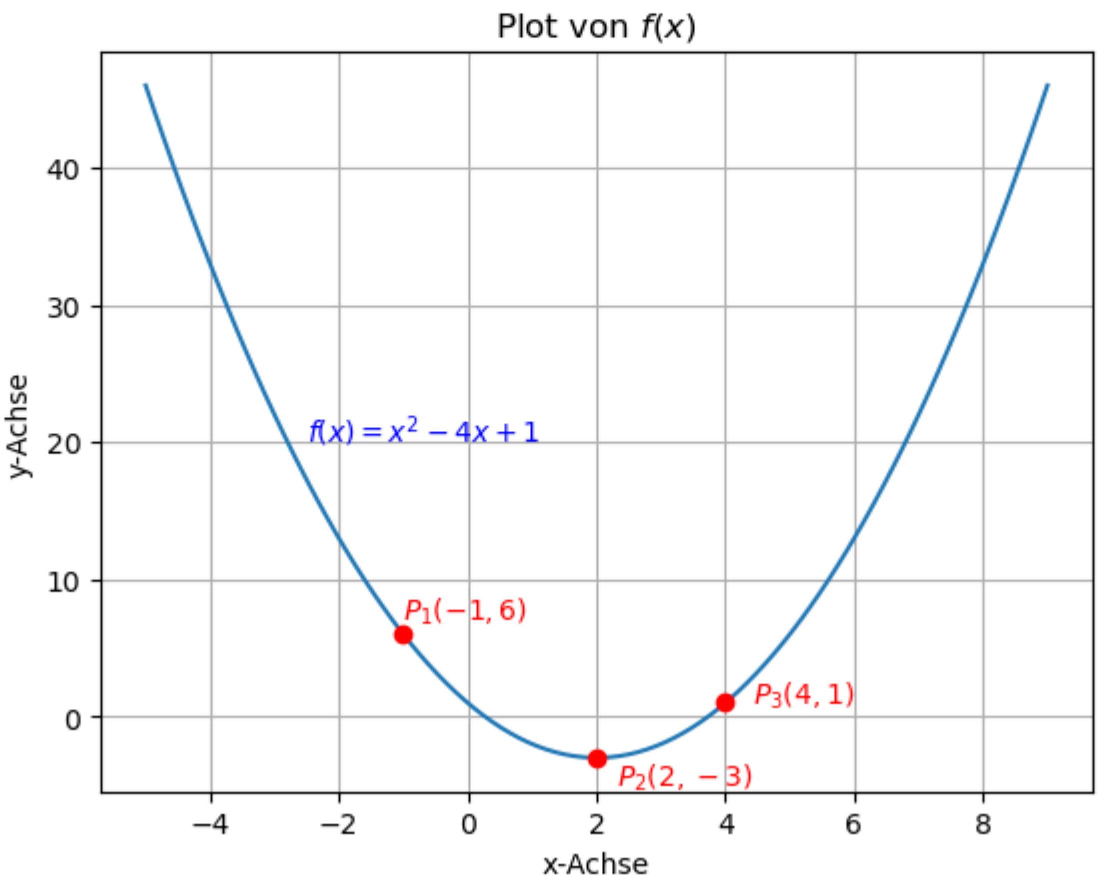
$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & (-4) & + & 1 & = & 6 \\ & & b & & & = & -4 \\ & & & & c & = & 1 \end{array}$$

Schritt II.9: Lösen die erste Zeile nach a

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 1 \\ & & b & & & = & -4 \\ & & & & c & = & 1 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystemes lautet somit: $a = 1$, $b = -4$ und $c = 1$.

Die gesuchte Funktion des Polynoms lautet somit: $f(x) = x^2 - 4x + 1$



Seite 28 - Schnittpunkt von Polynom und Gerade

Aufgabe: Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = -2x + 1$ und des Polynoms $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Lösung:

Schritt I: Gleichstellen der Funktion, sodass $g(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= x^2 - 4x + 1 \\ 0 &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

Schritt II: Lösen mittels p-q Formel

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2}} \\ x_{1,2} &= 1 \pm 1 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Schritt III: Ermitteln der Schnittpunkte mittels Einsetzen von x_1 und x_2 in $g(x)$ oder $f(x)$, hier in $g(x)$

Für $x_1 = 2$:

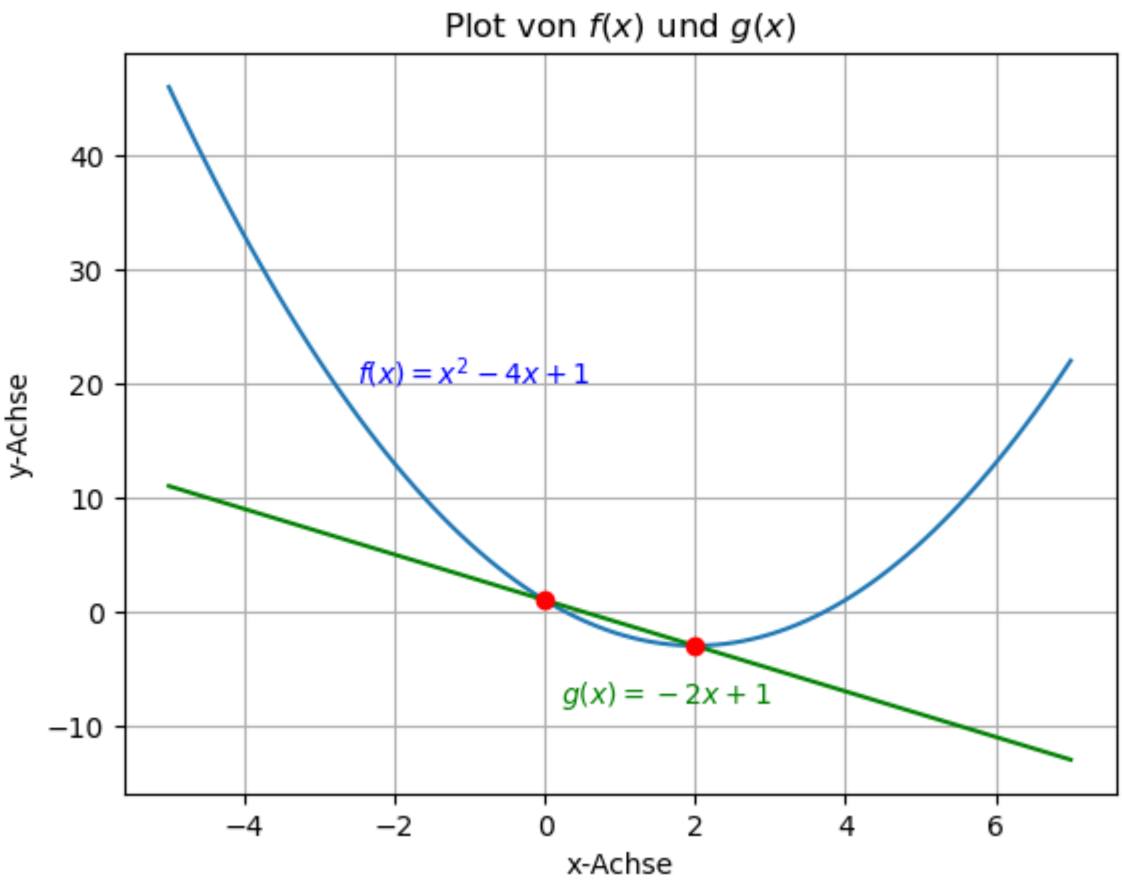
$$g(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$$

Für $x_2 = 0$:

$$g(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Schritt IV: Darstellen des Ergebnisses

Schnittpunkt S_1 liegt bei: $S_1(2, -3)$; Schnittpunkt S_2 liegt bei: $S_2(0, 1)$



Seite 36 - Polynomdivision

Übung 1

Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Schritt I: Raten der Nullstelle, hier $x_0 = -1$; Probe (!) ergibt $f(-1) = 0$

Schritt II: Durchführen der Polynomdivision durch $(x + 1)$

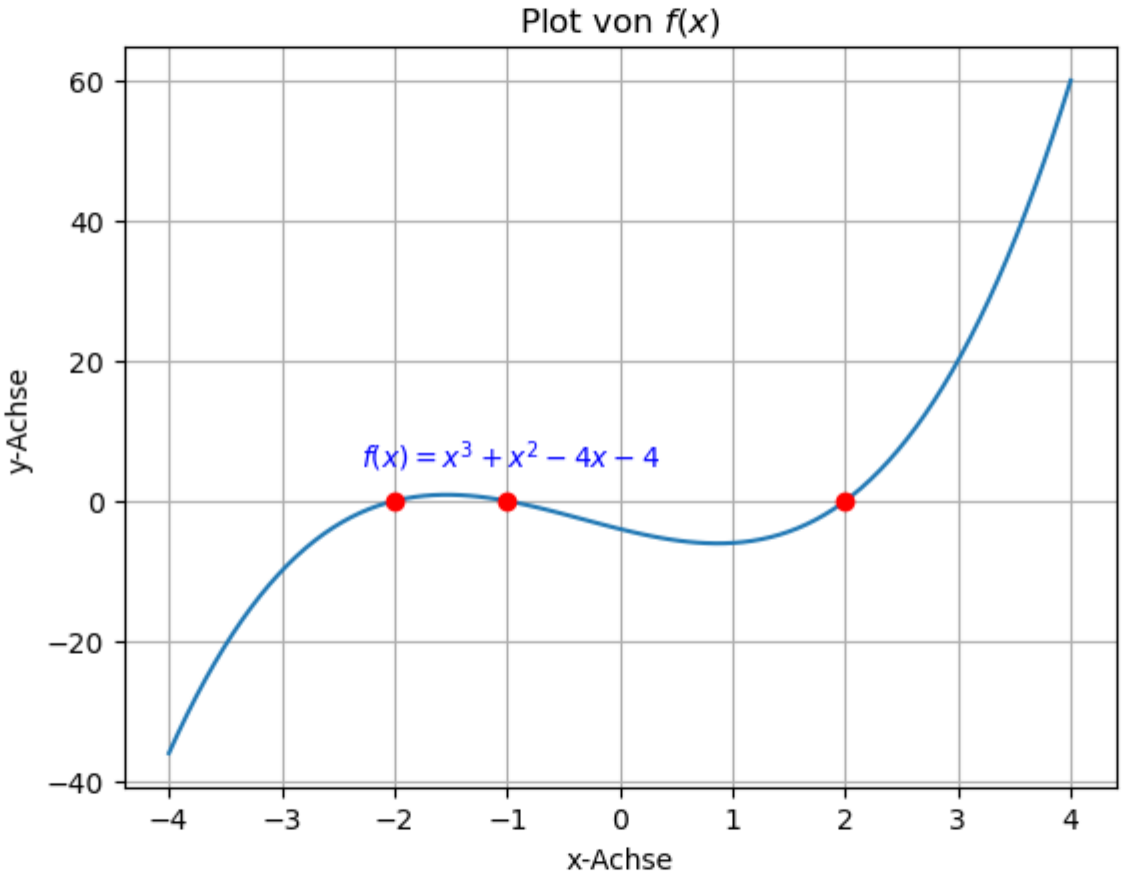
$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 4x - 4) : (x + 1) = x^2 - 4 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad\quad 0 - 4x \\
\qquad\quad \underline{-(-4x - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Schritt III: Lösen von $x^2 - 4 = 0$ nach x:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 &= 0 \\
x^2 &= 4 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

Schritt IV: Festlegen der Lösung / Nullstellen

Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ hat Nullstellen bei $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.



Plot von $f(x)$
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
y-Achse
x-Achse
60
40
20
0
−20
−40
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Übung 2

Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12$.

Schritt I: Raten der Nullstelle, hier vorgegeben in der Aufgabestellung: $x_0 = 3$; Probe ergibt $f(3) = 0$

Schritt II: Durchführen der Polynomdivision durch $(x-3)$

$$
\begin{aligned}
&(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
&\underline{-(3x^3 - 9x^2)} \\
&\quad -(-x^2 + 7x) \\
&\quad \underline{-(-x^2 + 3x)} \\
&\qquad\qquad 4x - 12 \\
&\qquad\qquad \underline{-(4x - 12)} \\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

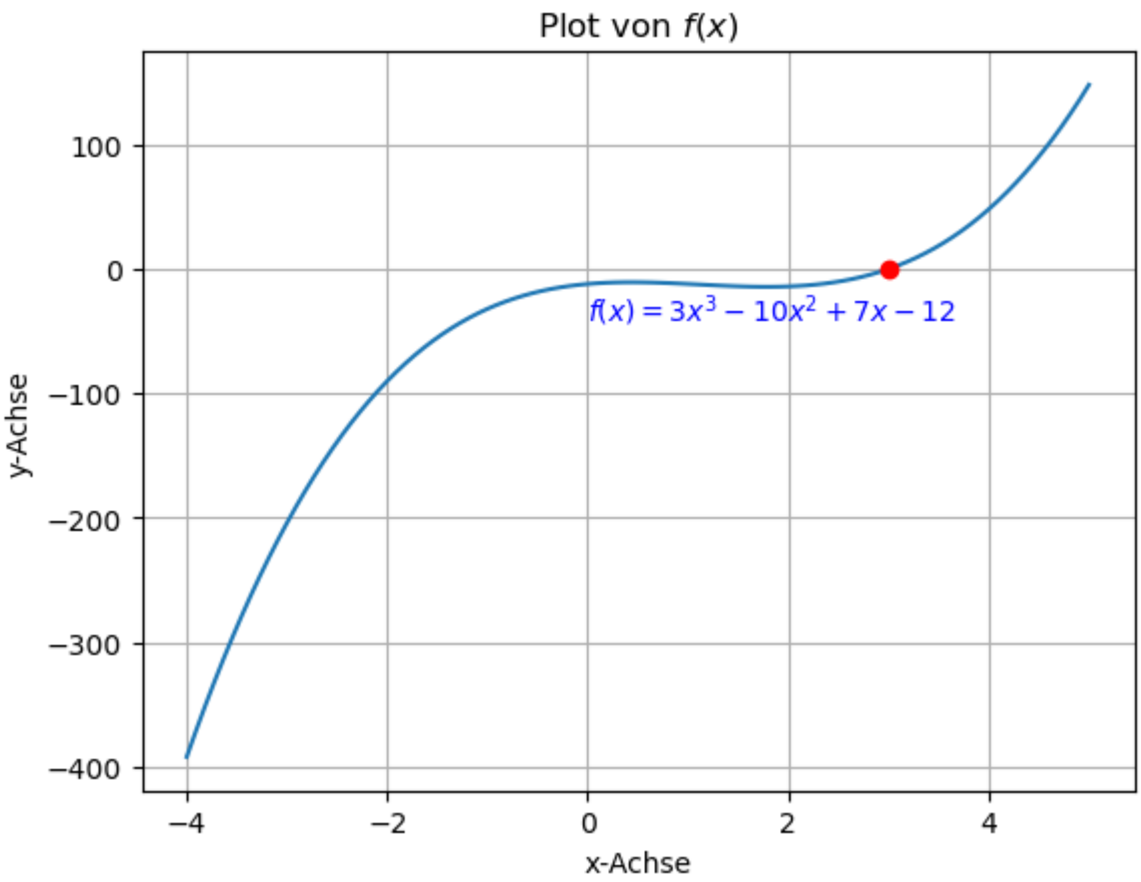
Schritt III: Lösen von $3x^2 - x + 4 = 0$ nach x, lösen mittels p-q Formel :

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-\frac{1}{3}}{2} \pm \sqrt{(\frac{-\frac{1}{3}}{2})^2 - \frac{4}{3}} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{48}{36}} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{6} \pm \sqrt{-\frac{47}{36}} \\
\mathbb{L} &= \{\} = \emptyset
\end{aligned}
$$

Da $-\frac{47}{36} < 0$, hat $3x^2 - x + 4 = 0$ keine Lösung!

Schritt IV: Festlegen der Lösung / Nullstellen

Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 3$.



Plot von $f(x)$
100
0
−100
−200
−300
−400
−4
−2
0
2
4
y-Achse
x-Achse
$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12$

Übung 3

Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Schritt I: Raten der Nullstelle, hier vorgegeben in der Aufgabestellung: $x_0 = 1$; Probe ergibt $q(1) = 0$

Schritt II: Durchführen der Polynomdivision durch $(x - 1)$

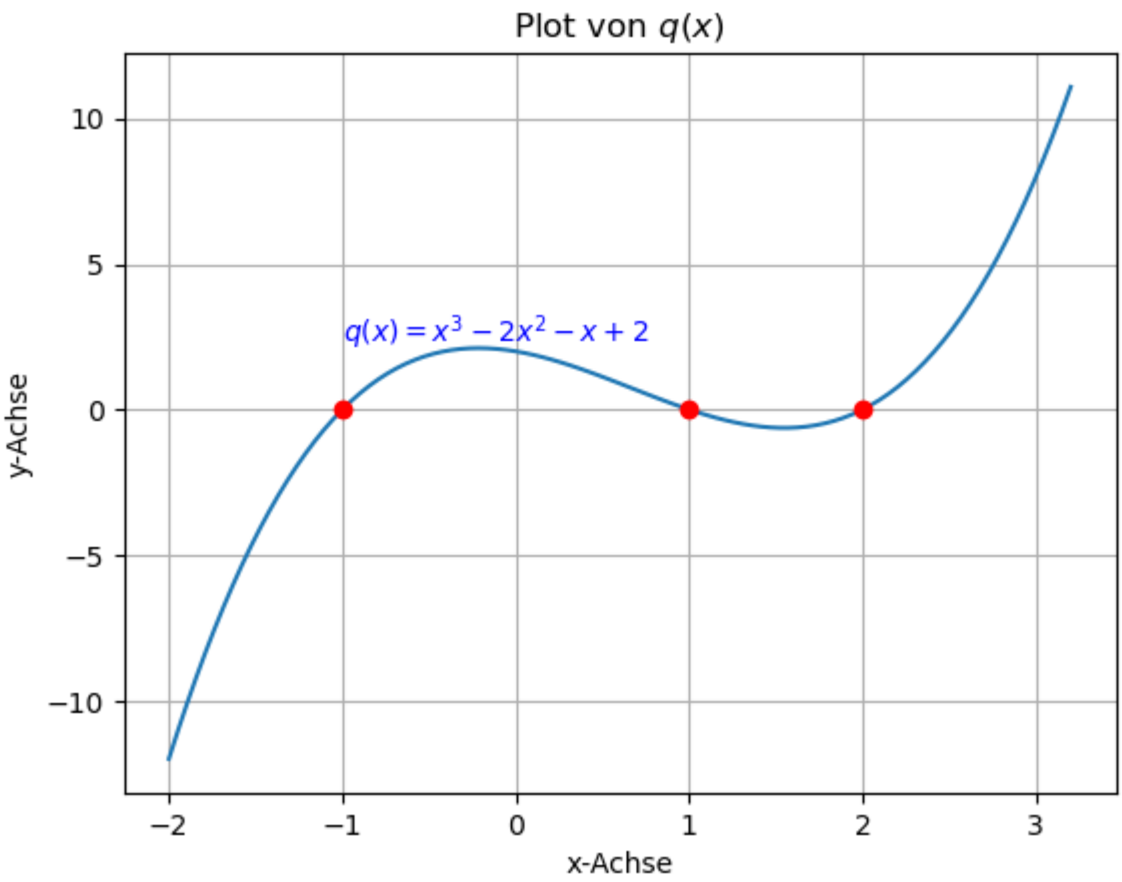
$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - x + 2) \colon (x - 1) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad - x^2 - x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad - 2x + 2 \\
\qquad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Schritt III: Lösen von $x^2 - x - 2 = 0$ nach x, lösen mittels p-q Formel :

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 + 2} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Schritt IV: Festlegen der Lösung / Nullstellen

Die Funktion $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ hat Nullstelle bei $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.


Plot von $q(x)$
$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
10
5
0
−5
−10
y-Achse
−2
−1
0
1
2
3
x-Achse