# Lineare Algebra - Übungen 6

Klaus Rheinberger, FH Vorarlberg

1. April 2025

**Abgabe in ILIAS**

- Alle PYTHON-Aufgaben gesamthaft in einem lauffähigen Jupyter Notebook, siehe Vorlage in ILIAS.
- Alle PAPIER-Aufgaben gesamthaft in einer PDF-Datei inkl. Name auf den gescannten Seiten.

## 1 Lesen, Studieren und Fragen Notieren (0 Punkte)

Lesen und studieren Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf der LV-Homepage die Abschnitte Methoden und Beispiele zur Matrizenrechnung. Notieren Sie sich Fragen und Unklarheiten, die Sie in der Übung besprechen möchten.

## 2 Darstellung in einer Basis (3 + 2 = 5 Punkte)

Gegeben ist der Vektor $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Basis $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit den Basisvektoren in den Spalten.

1. PAPIER: Zeichnen Sie die Basisvektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass $B$ eine Basis ist. Stellen Sie $v$ in der Basis $B$ dar, indem Sie ein entsprechendes LGS lösen.
2. PYTHON: Zeigen Sie, dass $B$ eine Basis ist. Stellen Sie $v$ in der Basis $B$ dar, indem Sie ein entsprechendes LGS lösen.

**Endergebnis**

Die Basisvektoren sind linear unabhängig und spannen den $\mathbb{R}^2$ auf. $v = Bc = 2 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2$

## 3 Koordinatentransformation (2 + 1 = 3 Punkte)

Gegeben sind die Basen $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit den jeweiligen Basisvektoren in den Spalten.

1. PYTHON: Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sowohl in der Basis $B$ als auch in der Basis $D$ dar, indem Sie die entsprechenden LGS lösen.
2. PYTHON: Wie lautet die Transformationsmatrix $T$, die Koordinaten bzgl. $B$ in Koordinaten bzgl. $D$ umwandelt? Überprüfen Sie, ob $T$ die Transformation am vorherigen Beispiel korrekt durchführt, indem Sie die Koordinaten von $v$ bzgl. $B$ mit $T$ multiplizieren und das Ergebnis mit den Koordinaten von $v$ bzgl. $D$ vergleichen.

**Endergebnis**

$v = 3b_1 - b_2, v = -11d_1 + 5d_2$, $T = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

## 4 Orthogonale Matrizen (2 + 2 = 4 Punkte)

1. PAPIER: Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal ist, d. h. dass $A^T = A^{-1}$.
2. PYTHON: Überprüfen Sie, dass $A^T = A^{-1}$, $A^T A = I$ und $AA^T = I$ gelten.

**Endergebnis**

$A^T = A^{-1}$, denn $A^T A$ und $AA^T$ ergeben jeweils die Einheitsmatrix. Alternativ: $A^{-1}$ berechnen und mit $A^T$ vergleichen.

## 5 Eigenwerte und -vektoren (3 + 2 = 5 Punkte)

1. PAPIER: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0.25 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. PYTHON: Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit der Funktion `np.linalg.eig()`.

**Endergebnis**

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3.5$ und $\lambda_2 = 2.5$. Die Eigenvektoren sind z. B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

## 6 Eigenwerte und -vektoren, Invertierbarkeit, Eindeutigkeit der Lösung (3 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. PAPIER: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$. Ist die Matrix $A$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. PYTHON: Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit der Funktion `np.linalg.eig()`. Ist die Matrix $A$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. PAPIER: Besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung für alle $b$? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

**Endergebnis**

Eigenwerte von $A$: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Zugehörigen Eigenvektoren sind z. B. $v_1 = (1, 0, 0)^T, v_2 = (1, 0, 1)^T, v_3 = (-2, 1, -1)^T$. $A$ ist invertierbar, und $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung für alle $b$.