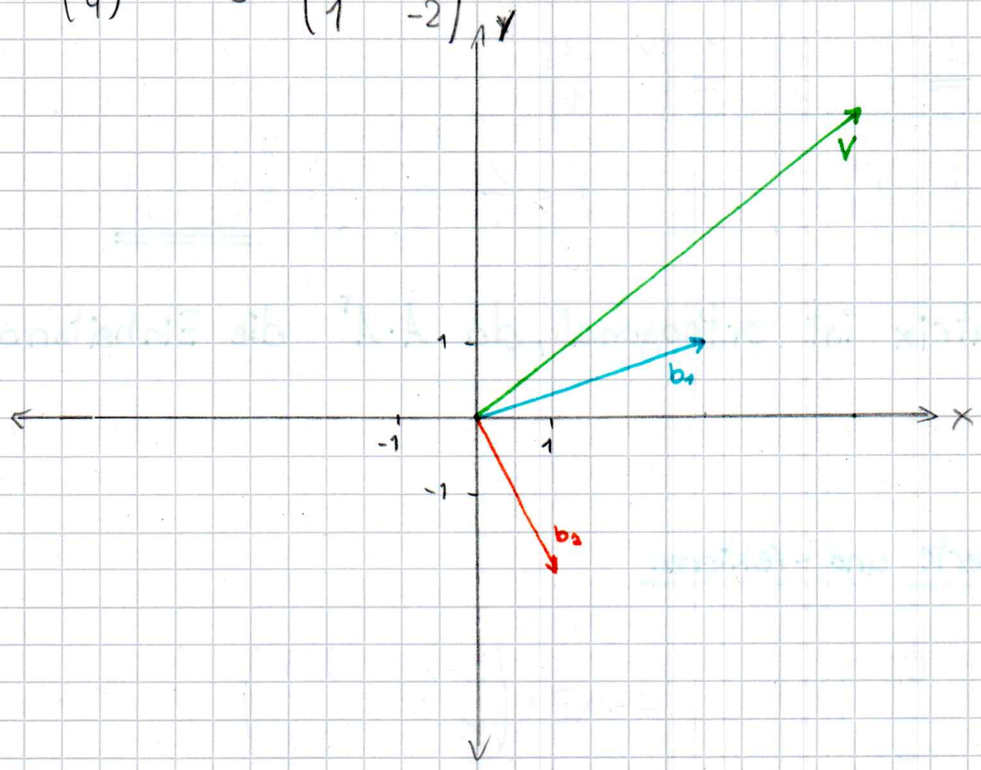
Lineare Algebra_Üb

2.4.25

2. Darstellung einer Basis

$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$



$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (3 \cdot -2) - (1 \cdot 1) = -7 \neq 0$

$v = x \cdot b_1 + y \cdot b_2$

$3x + y = 5$

$x - 2y = 4$

$x = 4 + 2y$

$x = 4 + 2 \cdot -1$

$\underline{x = 2}$

$3 \cdot (4 + 2y) + y = 5$

$12 + 7y = 5$

$\underline{y = -1}$

$\underline{v = 2 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2}$

$v = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Orthogonale Matrizen

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Die Matrix ist orthogonal, da $A \cdot A^T$ die Einheitsmatrix ergibt.

5. Eigenwerte und -vektoren

Eigenwerte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}25 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0{,}25 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda) \circ (3-\lambda) - 0{,}25 \cdot 1$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8{,}75$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8{,}75}}{2} \qquad \underline{\underline{\lambda_1 = 3{,}5}} \qquad \underline{\underline{\lambda_2 = 2{,}5}}$$

5.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 3,5$

$\lambda_2 = 2,5$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3,5 & 0,25 \\ 1 & 3-3,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-0,5 v_1 + 0,25 v_2 = 0$$

$$v_1 - 0,5 v_2 = 0$$

$$v_1 = 0,5 v_2$$

z.B. $v_2 = 2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2,5 & 0,25 \\ 1 & 3-2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0,5 v_1 + 0,25 v_2 = 0$$

$$v_1 + 0,5 v_2 = 0$$

$$v_1 = -0,5 v_2$$

z.B. $v_2 = 2$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Eigenwerte und -vektoren, Invertierbarkeit, Eindeutigkeit der Lösung

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 0\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot(3-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1$$

$$= (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$$

$$= (2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)\cdot(3-\lambda)$$

$$= 6 - 3\lambda - 6\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3$$

$$= 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$

$$(A \cdot \lambda_1 I)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} v_1 + 0 + 2v_3 &= 0 \\ 2v_2 &= 0 \\ v_2 + 3v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_3 = 0,\ v_2 = 0,\ v_1 = 1$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot \lambda_2 I)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2\cdot 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 2v_1 + 2v_3 &= 0 \\ 4v_2 &= 0 \\ 1v_2 + 6v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_1 = 2v_3,\ v_2 = -v_3$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_3 I)\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 0 & 2\\0 & 2-3 & 0\\0 & 1 & 3-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$$

$$3v_1 + 2v_3 = 0$$

$$6v_2 = 0$$

$$v_2 + 9v_3 = 0$$

$$v_1 = v_3,\ v_2 = 0 \qquad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist invertierbar, da alle Eigenwerte ungleich null sind.

Da A invertierbar ist, hat das System für jedes b genau eine Lösung.