

Prüfungsbedingung:

- 100 Punkte insgesamt
- 20 Punkte können während des Semesters durch Abgabe von Übungsbeispielen erworben werden (jeweils vor den Seminarterminen am 11.11., 13.01.)
- 80 Punkte für Theorie und Beispiele bei der zweistündigen schriftlichen Prüfung am 27.01.2025
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Beispiele für den 13.01.:

1, 5, 6, 8, 11, 12, 20, 23, 27, 34

Beispiele

Statistische Mechanik

- 1 Berechne die root-mean-square Geschwindigkeit der Atome eines einatomigen Gases aus der Maxwell-Boltzmann'schen Geschwindigkeitsverteilung, $(v_{rms})^2 := \int_0^\infty v^2 f(v) dv$. Verwende dazu die erzeugende Funktion der Gauss'schen Integrale, $E(\alpha) := \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha v^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.
- 2 Wie groß ist die mittlere kinetische Energie eines Moleküls in einem idealen Gas bei 37° C? Welche Geschwindigkeit braucht ein Stein mit Masse 1kg, um die gleiche kinetische Energie wie ein Mol eines idealen Gases bei 37°C zu erreichen?
- 3 Wie hängt die Wurzel der mittleren Geschwindigkeitsquadrate, v_{rms} , vom Druck p und der Dichte ρ eines Gases ab? Wie lautet v_{rms} für Luft bei $p = 1\text{atm}$ ($\rho = 1.29\text{kg/m}^3$)?
- 4 2mol Sauerstoff bei $T = 20^\circ\text{C}$ befinden sich in einem kubischen Volumen mit Kantenlänge 1m. Wie oft pro Sekunde prallt ein Molekül dieses Gases gegen eine der 6 Wände?
- 5 Bei der Glühemission von einer Wolframkathode müssen die Elektronen die Austrittsarbeit $W_a = 4.5\text{eV}$ überwinden ($1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J}$). Die Elektronen im Metall verhalten sich in der klassischen Vorstellung wie ein ideales Gas, auf das die Maxwell-Boltzmann-Verteilung anwendbar ist.
 - a) Welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 entspricht die Aktivierungsenergie W_a ($m_e = 9.01 \times 10^{-31}\text{kg}$)?
 - b) Wie gross ist bei Raumtemperatur ($T = 300\text{K}$) bzw. bei der Glühtemperatur ($T = 1500\text{K}$) der Bruchteil der Elektronen schneller v_0 ?Hinweis: für $v_0 \gg \langle v \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ gilt

$$x(v > x_0) = \int_{v_0}^\infty f(v) dv \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{mv_0^2}{2kT}} \exp\left[-\frac{mv_0^2}{2kT}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{W_a}{kT}} \exp\left[-\frac{W_a}{kT}\right] \quad (1)$$

- 6 Beim idealen Gas wurde angenommen, dass der mittlere Abstand zwischen den Molekülen viel größer sei als der Moleküldurchmesser (und daher das Eigenvolumen vernachlässigt werden kann). Ist diese Annahme zulässig?
 - a) Welches Volumen steht bei Normalbedingungen jedem Molekül zu?
 - b) Wie verhält sich dieses Volumen zum Moleküldurchmesser $d \approx 0.2\text{nm}$?
 - c) Wie groß wäre der Abstand, wenn Moleküle die Größe von Tischtennisbällen (4cm) hätten?
- 7 Am absoluten 0-Punkt liegt die Fermi-Energie eines Halbleiters und eines Isolators gerade in der Mitte der Bandlücke zwischen Valenzband (Maximalenergie gebundener Elektronen) und

Leitungsband (Minimalenergie freier Elektronen). Betrachte einen Festkörper mit $N = 10^{21}$ Elektronen bei Raumtemperatur $T = 300\text{K}$. Verwende die Fermi-Dirac Verteilung, um die zu erwartende Anzahl Elektronen im Leitungsband abzuschätzen.

a) Wieviele Leitungselektronen ergeben sich für einen Halbleiter mit einer Bandlücke $E_g \approx 1.1\text{eV}$ ($1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J}$)?

b) Wieviele Leitungselektronen ergeben sich für einen Isolator mit einer Bandlücke $E_g \approx 5\text{eV}$?

- 8 Die Leitfähigkeit eines bestimmten Halbleiters steigt stark an, sobald Licht der Wellenlänge $\lambda = 345\text{nm}$ oder kürzer einfällt. Die entsprechende Frequenz ν ergibt sich aus der Lichtgeschwindigkeit $c = \lambda\nu$, mit $c = 3 \times 10^8\text{m/s}$. Offensichtlich reicht die einfallende Energie eines Photons, um ein Elektron vom Valenzband in das Leitungsband zu heben.

Wie groß ist die Bandlücke, also die Energielücke zwischen Valenzband und Leitungsband ($h = 6.626 \times 10^{-34}\text{Js} = 4.136 \times 10^{-15}\text{eVs}$)?

- 9 Auf dem Tisch liegen 4 Münzen, die alle "Zahl" zeigen.

a) Wie groß ist die Entropieänderung zu einem neuen Zustand mit 2 "Kopf" und 2 "Zahl"?

b) Wie groß ist die Entropieänderung bei 100 Münzen auf "Zahl", wenn 50 auf "Kopf" gedreht werden?

- 10 Die Uranisotope ^{245}U und ^{238}U (die Hochzahlen beziehen sich auf das Atomgewicht in der atomaren Masseneinheit $1u$) können durch Diffusion voneinander getrennt werden. Dazu reagiert das Uran mit Fluor ($m = 19u$) zu UF_6 (Uranhexafluorid).

Wie verhalten sich die v_{rms} Geschwindigkeiten der UF_6 -Gase beider Uranisotope?

- 11 Betrachte ein Volumen mit $N = 10^6$ Heliumatomen ($m = 4u$) bei $T = 300\text{K}$.

a) Wie groß ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_P ?

b) Wieviele der Atome befinden sich approximativ im Intervall $v \in [v_P, v_P + 40\text{m/s}]$?

c) Wieviele der Heliumatome sind approximativ im Intervall $v \in [10v_P, 10v_P + 40\text{m/s}]$?

- 12 Wie lautet die Entropieänderung für eine Volumsreduktion von V_1 auf V_2 eines abgeschlossenen Systems von N Teilchen. Die Volumsreduktion erfolge langsam, sodass die mittlere Energie der Teilchen gleich bleibt. Welcher thermodynamischen Zustandsänderung entspricht das?

- 13 Die Gewichtskraft einer Luftsäule mit Querschnitt A und Höhe Δh ist gegeben durch die Massendichte ρ und die Erdbeschleunigung g , $\Delta F = \rho g A \Delta h$. Leite daraus eine Formel für die Druckzunahme über die Höhe her (bei konstanter Temperatur) und vergleiche mit der barometrischen Höhenformel.

- 14 Warum steigt die elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern mit steigender Temperatur?

- 15 In einem Raum mit der Höhe $h = 2.5\text{m}$ und der Grundfläche $A = 20\text{m}^2$ befindet sich Luft unter dem Druck von $p = 1000\text{hPa}$ bei einer Temperatur $T = 300\text{K}$. Betrachte die Luft als ein ideales Gas, das zu 100% aus Stickstoff besteht.

a) Berechne die mittlere kinetische Energie eines Stickstoffmoleküls.

b) Berechne die Masse und die gesamte kinetische Energie der Luft ($m_{\text{N}_2} = 28u$).

c) Welche Geschwindigkeit müßte ein Formel 1-Rennwagen ($m = 600\text{kg}$) haben, um die gleiche kinetische Energie zu besitzen (rotierende Teile vernachlässigt)?

d) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stickstoffmolekül eine Geschwindigkeit im

Intervall $900\text{m/s} \leq v \leq 1000\text{m/s}$ besitzt?

e) Wie viele Moleküle befinden sich in diesem Geschwindigkeitsintervall ?

16 Die molare Masse von gasförmigem Sauerstoff (O_2) beträgt 32g/mol und die von Wasserstoff (H_2) 2g/mol .

a) Wie lautet die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der (O_2) Moleküle bei $T = 300\text{K}$?

b) Wie lautet die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der (H_2) Moleküle bei $T = 300\text{K}$?

17 Reduziert sich das Planck'sche Strahlungsgesetz für niedrigere Frequenzen $\nu \rightarrow 0$ auf das Resultat der klassischen Thermodynamik, $u(\nu) = \rho(\nu)kT$? Verwende dazu die Näherung:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^\epsilon = 1 + \epsilon \quad (2)$$

18 Wasserstoff und Helium sind die häufigsten Elemente im Universum. In der Erdatmosphäre ist ihr Anteil verschwindend klein, warum? Um das Schwerefeld der Erde zu verlassen, braucht ein Teilchen senkrecht nach oben eine Mindestgeschwindigkeit von $v_0 = 11200\text{m/s}$ (Fluchtgeschwindigkeit). Die Wahrscheinlichkeit eines Teilchens der Masse m die Fluchtgeschwindigkeit v_0 zu haben ist $f(v_0)$.

a) Wie verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Teilchen mit Massen m_1 und m_2 bei $T = 300\text{K}$ die Fluchtgeschwindigkeit v_0 zu haben?

b) Wie lautet dieses Verhältnis zwischen molekularem Wasserstoff und molekularem Stickstoff? ($m_{\text{N}_2} = 28u$, $m_{\text{H}_2} = 2u$)

c) Was bedeutet das für das Vorhandensein molekularen Wasserstoffes in der Atmosphäre?

19 Ein Mol Stickstoff und zwei Mol Argon befinden sich in getrennten, isolierten Behältern bei gleicher Temperatur, wobei der Behälter mit Argon doppelt so groß ist wie der Behälter mit Stickstoff. Die beiden werden verbunden, sodass sich die Gase vermischen. Verwende die statistische Mechanik zur Beantwortung folgender Fragen:

a) Wie groß ist die Entropieänderung jedes Gases?

b) Wie groß ist die Entropieänderung der Umgebung?

c) Wie groß ist die Entropieänderung wenn beide Behälter gleich groß sind?

19 Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 5 unterscheidbaren Teilchen, 3 Teilchen auszuwählen und auf 2 Plätze zu verteilen?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, 3 ununterscheidbare Teilchen auf 5 Plätze zu verteilen?

20 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Würfeln mit 2 Würfeln in Summe 7, 11 bzw. 5 zu erhalten?

21 Die Gleichgewichtsverteilung der leitenden Elektronen im Metall folgt der Fermi-Dirac Verteilung. Geben sei eine Elektronendichte $n = N/V$. Betrachte die Leitungselektronen als freie Teilchen.

a) Berechne die maximal besetzte Energie (die Fermienergie) am absoluten 0-Punkt.

b) Wie sieht die Zustandsdichte (die Elektronendichte pro Energie, $dn(E)/dE$) aus?

Transportphänomene

- 22 In einem Haus liegen drei gleiche Wohnungen übereinander, getrennt durch baugleiche Zwischendecken (Dicke $d = 16\text{cm}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0.5\text{W/Km}$). Die Kellertemperatur beträgt $T = 10^\circ\text{C}$, die Temperatur in den Wohnungen am Boden 19°C und an der Decke 21°C . Am Dachboden herrschen 5°C . Es soll im folgenden nur Wärmeleitung durch Decken bzw. Fußböden berücksichtigt werden.
- a) Wie groß sind die Wärmestromdichten durch die verschiedenen Decken, ausgehend von der Kellerdecke?
 - b) Welche Heizleistung in W/m^2 muß ebenerdig, im 1. und im 2. Stock aufgebracht werden?
 - c) Heizöl hat einen Energieinhalt von etwa $4.2 \times 10^7\text{J/kg}$ und eine Dichte von $\rho = 830\text{kg/m}^3$. Wieviel Liter Heizöl werden in der unteren Wohnung mit 100m^2 während einer 50-tägigen Heizperiode nur durch die Verluste an Decken und Böden verbraucht?
- 23 Ein "Luftmolekül" (d.h. der Mittelwert von O_2 und N_2 Molekülen) habe einen Durchmesser $d \approx 3 \times 10^{-10}\text{m}$.
- a) Wie groß ist die mittlere freie Weglänge bei $T = 0^\circ\text{C}$ und $p = 1.01 \times 10^5\text{Pa}$?
 - b) Welche mittlere Stoßzeit folgt bei einer mittleren "Luftmolekülmasse" von $m = 29u$?
- 24 Erfüllt die Beziehung $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ die Relaxationsgleichung? Wie groß ist der Anfangsimpuls (bei $t = 0\text{s}$), wie groß der asymptotische Impuls?
Was passiert mit dem Impuls, wenn der Bewegung der Teilchen eine konstante externe Kraft \vec{F}_{ext} überlagert ist?
Wie würde sich der Impuls der Teilchen mit externer Kraft ändern, wenn keine Kollisionen stattfinden?
- 25 Bei welchem Druck ist die mittlere freie Weglänge von Luftmolekülen
- a) gleich 1m ?
 - b) gleich dem Durchmesser der "Luftmoleküle" $d \approx 3 \times 10^{-10}\text{m}$?
- 26 Die Dichte von Atomen im interstellaren Raum (zumeist Wasserstoff) beträgt ungefähr 1 Atom pro cm^3 .
Wie groß ist die mittlere freie Weglänge im interstellaren Raum unter der Annahme eines Atomdurchmessers $d \approx 10^{-10}\text{m}$?
- 27 Der Stern Beteigeuze emittiert die 10^4 -fache Strahlungsleistung der Sonne, wobei die Oberfläche mit 2900K in etwa der halben Sonnentemperatur entspricht. Wie groß ist Beteigeuze (Sonnenradius $R_\odot = 7 \times 10^8\text{m}$)? (Vergleiche mit dem Erdbahnradius von $r = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$.)
- 28 Eine nackte Person $A = 1.4\text{m}^2$ mit Oberflächentemperatur $T = 33^\circ\text{C}$ befinde sich in einem Raum mit $T = 20^\circ\text{C}$. Welche Netto-Leistung wird abgestrahlt? (Betrachte Raum und Person als schwarze Strahler.)
- 29 Warum gilt ein 'Ohm'sches Gesetz' für die Aneinanderreihung von Wärmewiderständen? Was gilt bei nebeneinander angeordneten Materialien?
- 30 Die eindimensionale Wärmeleitgleichung kann mit dem Ansatz $T(x, t) = T(\eta)$ gelöst werden, wobei $\eta := \frac{x}{2\sqrt{at}}$, warum? $T(\eta) = T_0 + (T_i - T_0)\text{erf}(\eta)$ ist der Temperaturverlauf einer unendlich

dicken Wand mit Oberflächentemperatur $T(0, t) = T_0$ und Anfangstemperatur $T(x > 0, 0) = T_i$. Skizziere den zeitlichen Verlauf. ($\text{erf}(\eta) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du$)

- 31 Gegeben sei ein Sauerstoffmolekül bei 300K und Atmosphärendruck $p = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$. Die Masse des O_2 Moleküls betrage $m = 5.3 \times 10^{-26} \text{kg}$ der "Moleküldurchmesser" wird mit 0.29nm angenommen.
 - a) Wie groß ist die mittlere freie Weglänge des Sauerstoffmoleküls?
 - b) Wieviel Zeit vergeht im Schnitt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kollisionen (mittlere Geschwindigkeit)?
- 32 Die Leistungsaufnahme eines Mikrochips betrage 14W und muß als Wärme über die Oberfläche ($A = 2 \times 10^{-3} \text{m}^2$) mit einem Gebläse abgeführt werden. Der resultierende Wärmeübergangskoeffizient betrage $\alpha = 123 \text{W/m}^2 \text{K}$. Die Temperatur des Mikrochips sollte aus Zuverlässigkeitsgründen immer unter 100°C betragen.
 - a) Bis zu welcher Raumtemperatur kann dies gewährleistet werden?
 - b) Was bringen Kühlrippen?
- 33 Die Diffusionskonstante von Ammoniak betrage $D \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$.
 - a) Wie lange braucht Ammoniak um eine Distanz von 10cm, bzw. 1m zu diffundieren?
 - b) Wie hängt die Diffusionszeit allgemein von der Distanz ab?
- 34 Zwei kubische Räume mit einer Seitenlänge von je 4m sind durch eine 15cm dicke Ziegelwand ($\lambda = 0.84 \text{W/mK}$) voneinander getrennt. Aufgrund einiger 100W Glühlampen in dem einen Raum beträgt die Lufttemperatur darin 30°C , während im anderen Raum 10°C herrschen (statischer Zustand).
 - a) Wie groß ist die Wärmeverlustleistung durch die Trennwand?
 - b) Wieviele 100W Glühlampen sind erforderlich um diese Temperaturdifferenz durch die Ziegelwand aufrecht zu erhalten?
- 35 Wie groß ist die mittlere Stoßzeit eines Sauerstoffmoleküls bei 300K und einem Druck von $p = 1 \text{atm} = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$? Der Moleküldurchmesser sei $d = 290 \text{pm}$, die mittlere Geschwindigkeit der Sauerstoffmoleküle betrage $v = 450 \text{m/s}$. Mit welcher Rate erfolgen die Stöße?
- 36 Eine Hauswand der Gesamtfläche A_W bestehe aus Ziegeln der Dicke 50cm mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0.09 \text{W/mK}$ und Fenstern mit U-Wert $U_F = 0.8 \text{W/m}^2 \text{K}$.
 - a) Wie hängt der mittlere U-Wert der gesamten Wand vom relativen Flächenanteil der Fenster A_F/A_W ab?
 - b) Wie groß darf der Fensteranteil maximal gewählt werden, wenn maximal die Hälfte der Wärme über die Fenster verloren werden soll?
- 37 Eine 3cm dicke Eisplatte wird von der Sonne geschmolzen:
 - a) Die Leistungsdichte der Sonnenstrahlen beträgt $I = 800 \text{W/m}^2$, der Einfallswinkel betrage konstant 30° zum Lot. Welche solare Leistungsdichte führt zum Schmelzen des Eises? Der Emissionsgrad des Eises (d.h. Anteil der absorbierten Leistung) betrage $\epsilon = 0.05$.
 - b) Wie lange dauert es, die Eisplatte bei $T = 0^\circ \text{C} = \text{const}$ zu schmelzen? ($\rho_{\text{Wasser}} = 917 \text{kg/m}^3$, $L_F = 3.33 \times 10^5 \text{J/kg}$)
- 38 Wie groß ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von He -Atomen ($m = 4u$) an der Oberfläche der Sonne, $T \approx 6000 \text{K}$?