Lehrgang zur Studienbefähigung 2024

Mathematik 1

Martin Dobler, MSc BSc

Fachhochschule Vorarlberg,
Forschungszentrum Business Informatics,
Raum: V6 07, Hochschulstraße 1, Dornbirn.
E-Mail: martin.dobler@fhv.at

Inhaltsverzeichnis

Inhalt und Literatur

Kursaufteilung

Mathematik 1

- ✓ Symbole, Zahlenmengen und Rechenoperationen
- ✓ Bruchrechnung
- ✓ Dreisatz und Prozentrechnung
- ✓ Potenzen, Wurzeln und Logarithmen
- ✓ Algebraische Grundregeln
- ✓ Gleichungen
- ✓ lineare Gleichungssysteme
- ✓ lineare Funktionen

Mathematik 3

- ✓ Funktionen (Polynome und spezielle Funktionen)
- ✓ Differentialrechnung
- ✓ Integralrechnung
- ✓ Vektorrechnung

Literaturempfehlung

- **Brückenkurs Mathematik - für Studieneinsteiger aller Disziplinen**
  Walz, Zeilfelder, Rießinger, Spektrum Akad. Verlag, Springer, 2007.

- **Mathematik zum Studienbeginn**
  Kemnitz, Vieweg+Teubner, 2007.

- **Aufgabenpool zur Prüfungsvorbereitung (Schwerpunkt: Mathematik 3)**
  Unterrichtsaufgaben zur Unterstützung der Vorbereitung auf die SRP-Mathematik AHS, BMBWF, 2018.

- YouTube Channels (Beispiel, u.v.m.)

Symbole

Symbole

Überblick und Erklärung häufig verwendeter Symbole

Symbol	Name	Beispiel
$=$	gleich	$3 = 3$
$\neq$	ungleich	$3 \neq 4$
$>$	größer	$5 > 3$
$\geq$	größer oder gleich	$4 \geq 3$ oder auch $3 \geq 3$
$<$	kleiner	$1 < 4$
$\leq$	kleiner oder gleich	$2 \leq 3$ oder auch $2 \leq 2$
$\{\dots\}$	Mengenklammern	$M = \{-1; 3; 5; 13\}$
$\in$	enthalten in	$3 \in M$
$\notin$	nicht enthalten in	$6 \notin M$
$\setminus$	ohne	$M \setminus \{13\} = \{-1; 3; 5\}$
:	es gilt	
$\forall$	für alle	
$\wedge$	logische “und”	
$\vee$	logisches “oder”	
$\exists$	es gibt / existiert	

Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen

Definition

Die **natürlichen Zahlen** sind die beim Zählen oder zur Festlegung einer Reihenfolge verwendeten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, usw.

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 100002, 100003, \ldots\}$

Eigenschaften der natürlichen Zahlen $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$:

- Die Zahl **1** ist die kleinste natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl **n** besitzt einen Nachfolger, nämlich die um **EINS** größere Zahl $\mathbf{n} + \mathbf{1}$.
- Zwischen einer natürlichen Zahl **n** und $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ liegt keine weitere natürliche Zahl.
- Es gibt keine größte natürliche Zahl.
- Für alle natürlichen Zahlen $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ in $\mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} \in \mathbb{N} \qquad \text{sowie} \qquad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

ACHTUNG: Dies gilt **nicht** für Subtraktion und Division!

Die ganzen Zahlen

Definition

Die **ganzen Zahlen** entstehen aus den natürlichen Zahlen durch Hinzunahme der negativen ganzen Zahlen und der Null.

Notation: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -35, -34, \ldots, -3, -2, -1, \mathbf{0}, +1, +2, +3, \ldots, 51, 52, \ldots\}$

Eigenschaften der ganzen Zahlen $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$:

- Jede ganze Zahl $\mathbf{z}$ besitzt genau einen Vorgänger $\mathbf{z} - \mathbf{1}$ und einen Nachfolger $\mathbf{z} + \mathbf{1}$.
- Es gibt in $\mathbb{Z}$ weder eine größte noch eine kleinste Zahl.
- Zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen liegt keine weitere ganze Zahl.
- Zusätzlich zu Addition und Multiplikation ist auch die Subtraktion für $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert:

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \qquad \text{sowie} \qquad \mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathbb{Z}$$

Frage: Wie verhält es sich mit der Division?
Das Ergebnis einer Division ganzer Zahlen muss nicht in $\mathbb{Z}$ liegen (z.B. $5:3$)!

Die rationalen Zahlen

Definition

Die **rationalen Zahlen** entstehen durch Erweiterung der ganzen Zahlen um die Menge aller möglichen Brüche a/b.

Notation: $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ für die gilt: } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Eigenschaften der rationalen Zahlen a $\in \mathbb{Q}$:

- Die Menge der natürlichen Zahlen ist in der Menge der ganzen Zahlen enthalten.
  Diese ist wiederum eine Teilmenge der rationalen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
  (Jede ganze Zahl **a** lässt sich als Bruchzahl $\mathbf{a}/\mathbf{1} \in \mathbb{Q}$ auffassen.)
- Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen **a**, **b** gibt es stets weitere rationale Zahlen (z.B. $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{2}}$).
- In $\mathbb{Q}$ sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch Null) unbeschränkt ausführbar. D.h. für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{Q}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{Q}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} : \mathbf{b} \in \mathbb{Q} \quad (\leftarrow b \neq 0)$$

Die reellen Zahlen

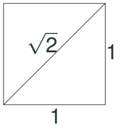
Motivation

Zwischen je zwei rationalen Zahlen **a**, **b** liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
Zahlengerade bedeutet dies:
Zwischen zwei rationalen Zahlen lassen sich unendlich viele rationale Zahlen einzeichnen.

Aber: Ist jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine rationale Zahl zuzuordnen?
NEIN!

Es zeigt sich nämlich, dass immer "Lücken" auf dem Zahlenstrahl frei bleiben, denen keine rationale Zahl entspricht. Obwohl zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen, wird der Zahlenstrahl doch nicht vollständig ausgefüllt!

Eine besonders berühmte "Lücke" auf dem Zahlenstrahl ist $\sqrt{2}$, die Länge der Diagonale eines Quadrats mit Kantenlänge $a = 1$.



Weitere berühmte Beispiele der sog. **irrationaler Zahlen** sind $\sqrt{5}$ oder π.

Die reellen Zahlen

Die Menge der **reellen Zahlen** besteht aus den **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ und den **irrationalen Zahlen** $\mathbb{I}$.

Notation: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Eigenschaften der reeller Zahlen a $\in \mathbb{R}$:

- Zahlen, deren Dezimaldarstellung abbricht (z.B. $5/2 = 2,5$) oder periodisch ist (z.B. $1/3 = 0,333\ldots$), sind **rational**.
  Zahlen, deren Dezimaldarstellung weder abbricht, noch periodisch ist, sind **irrational**.
- Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt.
- In $\mathbb{R}$ sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch Null) ebenfalls unbeschränkt ausführbar. Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a} : \mathbf{b} \in \mathbb{R}$$

Innerhalb der reelen Zahlen werden **Teilbereiche**, z.B. alle Zahlen zwischen -3 und 2, als **Intervalle** dargestellt.

Intervallschreibweise

Sind a und b reelle Zahlen ($\in \mathbb{R}$) und gilt ebenfalls $a \leq b$, so heißt die Menge aller reellen Zahlen, die zwischen a und b liegen, das **Intervall mit den Grenzen a und b**.

- Gehören a und b **ebenfalls** zur Menge, so heißt das Intervall **geschlossenes Intervall**:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x \leq b\}$$
- Gehören a und b **nicht** zur Menge, so heißt das Intervall **offenes Intervall**:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x < b\}$$
- Die Mischformen nennt man **halboffene Intervalle**:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x < b\}$$

Elementare Rechenoperationen

Grundrechenarten

Addition

1. Summand + 2. Summand = Summe

Subtraktion

Minuend - Subtrahend = Differenz

Multiplikation

1. Faktor · 2. Faktor = Produkt

Division

Dividend : Divisor = Quotient

Achtung! Wir werden feststellen, dass

- die Subtraktion ebenfalls als Addition (Subtrahend mit umgekehrtem Vorzeichen) aufgefasst werden kann. $3 - 2 = 3 + (-2)$
- die Division ebenfalls als Multiplikation (mit dem Kehrwert des Divisors) aufgefasst werden kann. $6 : 2 = 6 \cdot \frac{1}{2}$

Rechenregeln für Addition “$+$“ und Multiplikation “$\cdot$“

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Beispiele:

$$3 + 5 = 5 + 3$$
$$13 + 4 + 5 = 5 + 13 + 4$$ mehrfache Ausführung
$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$
$$6 \cdot 5 \cdot (-2) = (-2) \cdot 5 \cdot 6$$ mehrfache Ausführung

Assoziativgesetz:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{und} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Beispiele:

$$13 + (4 + 5) = (13 + 4) + 5$$
$$6 \cdot (5 \cdot (-1)) = (6 \cdot 5) \cdot (-1)$$

Rechenregeln für Addition “$+$“ und Multiplikation “$\cdot$“

Vorsicht: Subtraktion und Division sind weder kommutativ noch assoziativ.

$\hookrightarrow$ Gegenbeispiele:

$$6 - 3 \neq 3 - 6 \quad \text{und} \quad 8 : 2 \neq 2 : 8$$
$$13 - (7 - 1) \neq (13 - 7) - 1 \quad \text{und} \quad 16 : (4 : 2) \neq (16 : 4) : 2$$

Distributivgesetz:[1]

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Beispiele:

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$
$$(-3) \cdot (1 + 2) = (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2$$

Von ”rechts nach links“ gelesen: Gleiche Faktoren, die in allen Summanden einer Summe vorkommen, dürfen **ausgeklammert** werden.

$$5 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = (5 + 7) \cdot 4 = 12 \cdot 4$$

[1] Gilt ebenfalls bei Subtraktion.

Rechnen mit negativen Zahlen

Bekanntlich gilt:

Minus ”mal“ Plus ist gleich Minus

$$(-3) \cdot 5 = -15$$

Minus ”mal“ Minus ist gleich Plus

$$(-4) \cdot (-3) = +12$$

Für das Rechnen mit negativen Zahlen gilt weiter:

$$b - a = b + (-a) = (-a) + b = -a + b$$

und

$$(-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = a \cdot (-1) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

und

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b = a \cdot b$$

Beispiele:

$$3 + (-6) - 2 + (-3) + 5 = ?$$

$$-(8 \cdot 3) \cdot (-2) \cdot 5 = ?$$

$$-(9 - 3 - 4) - (3 - 1 - 7) \cdot (-2 + 1) = ?$$

Rechnen mit Klammern

Klammerregeln

- **Klammerregel 1:**
  Geklammerte Rechenoperationen sind stets zuerst auszuführen!
- **Klammerregel 2:**
  Sind Klammern geschachtelt, so ist zuerst die innerste Klammer aufzulösen.

Regel: **“Klammer“ vor “Punkt” vor “Strich“**

Beispiele:

$$3 \cdot (4 - 7)$$
$$=$$

$$[((2 - 3) \cdot 4) - 2] \cdot (-2)$$
$$=$$

$$(8 - 3) \cdot ((3 + 5) \cdot (2 - 6) + 35)$$
$$=$$

$$2 - ((1 - 4) \cdot (3 - 2) + 4)$$
$$=$$

Bruchrechnung

Bruchrechnung

Bruchrechnung behandelt die Rechenoperationen innerhalb der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{für die gilt: } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Brüche sind andere Schreibweise für “nicht durchgeführte“ Divisionen:

$$a : b = \frac{a}{b} \quad \leftarrow \quad \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

- Die Zahl a über dem Bruchstrich heißt **Zähler**.
- Die Zahl b unter dem Bruchstrich heißt **Nenner**.
- Einen Bruch der Form $1/b$ nennt man **Stammbruch**.

Jeder Bruch lässt sich durch ausführen der Division in eine Dezimalzahl umwandeln:

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{1}{4} = 0,25 \qquad \frac{3}{7} = 0,428571\,428571\ldots$$

Erweitern von Brüchen

Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruches mit der gleichen Zahl, so ändert sich sein Wert nicht.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \qquad \text{für alle } c \neq 0$$

Beispiel: $\frac{1}{3} =$

Kürzen von Brüchen

Enthalten Zähler und Nenner eines Bruchs den gleichen Faktor ($\neq 0$), so kann man beide durch diesen Faktor dividieren, ohne den Wert des bruchs zu verändern.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \qquad \text{für alle } c \neq 0$$

Beispiel: $\frac{27}{45} =$

✓ Die Kunst ist es, die gemeinsamen Faktoren zu finden! $\frac{208}{304} = ?$

Im Zusammenhang mit Brüchen lernen wir nun zwei weitere Begriffe kennen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Das kleinste gemeinsame Vielfache **kgV**(a_1; a_2) zweier Zahlen a_1 und a_2 ist die kleinste Zahl, die sowohl Vielfaches von a_1 als auch von a_2 ist.

Beispiele:

$kgV(4;3) =$ $\qquad$ $kgV(6;8) =$ $\qquad$ $kgV(4;12) =$

Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Der größte gemeinsame Teiler **ggT**(a_1; a_2) zweier Zahlen a_1 und a_2 ist die größte Zahl, die sowohl a_1 als auch a_2 teilt.

Beispiele:

$ggT(4;3) =$ $\qquad$ $ggT(6;8) =$ $\qquad$ $ggT(4;12) =$

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen muss man dafür sorgen, dass beide Brüche den gleichen Nenner haben!

Summe und Differenz zweier Brüche mit gleichem Nenner

$$\frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 \pm a_2}{b}$$

Beispiele:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = ?$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = ?$$

Rechenregeln für Brüche

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen muss man dafür sorgen, dass beide Brüche den gleichen Nenner haben!

Summe und Differenz zweier Brüche mit ungleichem Nenner

- Multipliziere Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit dem Nenner des Zweiten (und umgekehrt!):
$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} \pm \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1}$$
- Wegen der Kommutativität der Multiplikation haben nun beide Brüche den gleichen Nenner, nämlich $b_1 \cdot b_2$, und es folgt:
$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

Beispiel: $\frac{3}{6} + \frac{1}{8} = ?$ und $\frac{3}{6} - \frac{1}{8} = ?$

Um das Kürzen im Ergebnis des letzten Beispiels zu vermeiden, kann man die Brüche auch mit dem **kgV** der beiden Nenner erweitern!

Dann ergibt sich die Formel:

Summe zweier Brüche mit ungleichem Nenner

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot \frac{kgV(b_1;b_2)}{b_1} \pm a_2 \cdot \frac{kgV(b_1;b_2)}{b_2}}{kgV(b_1;b_2)}$$

Beispiele:

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{8} \overset{[kgV(6;8)=?]}{=} ?$$

$$\frac{3}{9} - \frac{1}{6} \overset{[kgV(9;6)=?]}{=} ?$$

Rechenregeln für Brüche

Die Multiplikation von Brüchen erfolgt zähler- und nennerweise!

Produkt zweier Brüche

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

$\hookrightarrow$ **Beachte das jede ganze Zahl c als Bruch $\frac{c}{1}$ geschrieben werden kann!**
Es gilt also:

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{c \cdot a}{b}$$

Beispiele:

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3} = ?$$

$$\frac{1}{125} \cdot 5 = ?$$

Die Division durch einen Bruch erfolgt durch Multiplikation mit seinem Kehrwert!

Division zweier Brüche

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

Beispiele:

$$\frac{12}{27} : \frac{5}{6} = ?$$

$$\frac{15}{6} : 5 = ?$$

Dreisatz (Schlussrechnung)

Der Dreisatz (Die Schlussrechnung)

Der Dreisatz setzt eine unbekannte Größe ins Verhältnis zu einer Gesamtheit. Dieses Verhältnis wird mit einem bekannten Verhältnis gleichgesetzt.

- mathematisches Verfahren, um aus drei bekannten Werten eines Verhältnisses einen **unbekannten vierten Wert** zu berechnen

Größe A	Größe B
a	b
x=?	c

- zwei Formen:

einfacher Dreisatz
direkt proportionales Verhältnis
"Je mehr A, desto mehr B"

Ansatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

Lösung:

$$x = \frac{a \cdot c}{b}$$

umgekehrter Dreisatz
indirekt proportionales Verhältnis
"Je weniger A, desto mehr B"

Ansatz:

$$a \cdot b = x \cdot c$$

Lösung:

$$x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Veranschaulichung anhand eines Beispiels:

"Ein Mann kauft 5 Äpfel und zahlt dafür $3,00$ Euro. Am nächsten Tag kauft er 12 Äpfel zum gleichen Stückpreis. Wie viel kosten diese 12 Äpfel? "

1) Eigentlich würde man zuerst den Preis eine Apfels berechnen

$$\frac{3 \text{ Euro}}{5 \text{ Äpfel}} = 0,60 \text{ Euro/Apfel}$$

und den Preis der 12 Äpfel durch Multiplikation bestimmen:

$$0,6 \text{ Euro/Apfel} \cdot 12 \text{ Äpfel} = 7,20 \text{ Euro}.$$

2) Diese Rechnung lässt sich beschleunigen indem wir den Dreisatz benutzen und die Verhältnisse betrachten:

$$\frac{x \text{ Euro}}{12 \text{ Äpfel}} = \frac{3 \text{ Euro}}{5 \text{ Äpfel}}$$

Auflösen nach x ergibt:

$$x \text{ Euro} = 3 \text{ Euro} \cdot \frac{12 \text{ Äpfel}}{5 \text{ Äpfel}} = \frac{36}{5} \text{ Euro} = 7,20 \text{ Euro}.$$

Der Dreisatz

A1: “Eine Gruppe von 15 Arbeitern benötigt zum Aufbau eines Baugerüsts 9 Stunden.
Wie lange hätten 6 Arbeiter gebraucht? “
(**Vorsicht:** indirekt proportionales Verhältnis)

A2: “Zur Herstellung von 3 Kuchen benötigt man 750 Gramm Teig.
Wieviel Teig benötigt man für 17 Kuchen? “

Prozentrechnung

Ein Prozent ist nichts anderes als ein Hundertstel.

$$\left(1\% = \frac{1}{100}\right)$$

- $\mapsto$ Um herauszubekommen, wie viel ein Prozent von einer Zahl ist, muss man die Zahl also einfach nur durch 100 teilen.
- $\mapsto$ Will man eine andere Anzahl (p Prozent) haben, so teilt man die Zahl durch 100 und multipliziert dann mit p. $\left(p\% = \frac{p}{100}\right)$

Beispiel: Ein Land hat 513700 Einwohner.

Ein Prozent (1%) seiner Einwohner sind also $\dfrac{513700}{100} = 5137$ Einwohner.

Drei Prozent (3%) seiner Einwohner sind $3 \cdot \dfrac{513700}{100} = 15411$ Einwohner.

Vergleich mit Dreisatz:

$$\frac{x \text{ Einwohner}}{513700 \text{ Einwohner}} = \frac{3 \text{ Prozent}}{100 \text{ Prozent}}$$

$$x \text{ Einwohner} = 513700 \text{ Einwohner} \cdot \frac{3 \text{ Prozent}}{100 \text{ Prozent}} = 15411 \text{ Einwohner}$$

Ein Prozent ist nichts anderes als ein Hundertstel.

$$\left(1\% = \frac{1}{100}\right)$$

$\mapsto$ Um herauszufinden, wie viel ein Prozent von einer Zahl ist,
muss man die Zahl also einfach nur durch 100 teilen.

$\mapsto$ Will man eine andere Anzahl (p Prozent) haben, so teilt man die Zahl durch 100 und multipliziert dann mit p. $\left(p\% = \frac{p}{100}\right)$

Umwandeln einer Prozentangabe in eine Dezimalzahl: **Division mit 100**

$$33,3\% \mapsto \frac{33,3}{100} = 0,333$$

Umwandeln einer Dezimalzahl in eine Prozentangabe: **Multiplikation mit 100**

$$0,5 \mapsto 0,5 \cdot 100 = 50\%$$

Prozentrechnung

Prozentwertangaben beschreiben Anteile an einem Ganzen.

Dazu kann man folgende Formel benuzten:

$$W = \frac{p \cdot G}{100} \quad (= p\% \cdot G)$$

Dabei steht

- G für den Grundwert
- p für die Prozentzahl
- $p\%$ für den Prozentsatz ($p\% = p/100$)
- W für den Prozentwert

Je nach Fragestellung kann die obige Formel nach p oder G aufgelöst werden:

$$p = \frac{100W}{G} \qquad \text{und} \qquad G = \frac{100W}{p}$$

Prozentrechnung

Beispiele:

* Es wurde ein Bus gemietet um eine Gruppe von 50 Personen ins Theater zu fahren. Von diesen 50 Personen haben jedoch erst 30% die Fahrt bezahlt. Wie viele Personen haben bereits bezahlt?

$$G = 50;\ p\% = 30\%,\ W = ? \qquad \Rightarrow \qquad W = 30\% \cdot 50 = \frac{30}{100} \cdot 50 = \frac{1500}{100} = 15$$

* Ein Autohändler kauft ein Auto für 10000 Euro. Zwei Monate später schafft er es dieses für 12000 Euro wieder zu verkaufen. Wie viel Prozent Gewinn hat er damit erwirtschaftet?

$$G = 10000;\ p\% = ?,\ W = 12000 - 10000 = 2000$$

$$\Rightarrow\ 2000 = \frac{p}{100} \cdot 10000 \Leftrightarrow p = \frac{2000}{10000} \cdot 100 = 20$$

Ein Betrag von 2500 **Euro wird für** 2 **Jahre zu** 3 **Prozent Zinsen pro Jahr festgelegt.**
Berechne den Zinswert und den neuen Kontostand nach dem ersten Jahr, sowie nach dem zweiten Jahr.

Jahr 1: $G_0 = 2500,\ p = 3,\ W_1 =?$

$$W_1 = \frac{pG_0}{100} = \frac{3 \cdot 2500}{100} = \frac{7500}{100} = 75$$

Der Zinswert beträgt also am Ende des ersten Jahres 75 Euro. Als neuer Kontostand ergibt sich: $G_0 + W_1 = 2500 + 75 = 2575$ Euro. Der neue Konotstand kann auch durch

$$G_1 = G_0 + W_1 = G_0 + \frac{p}{100}G_0 = (1 + \frac{p}{100})G_0$$
$$= (1 + 0,03) \cdot 2500 = 1,03 \cdot 2500 = 2575$$

berechnet werden.

Neuer Grundwert für das zweite Jahr: $G_1 = G_0 + W_1 = 2575$

Jahr 2: $G_1 = 2575,\ p = 3,\ W_2 = ?$

$$W_2 = \frac{pG_1}{100} = \frac{3 \cdot 2575}{100} = \frac{7725}{100} = 77,25$$

Der Zinswert beträgt also am Ende des zweiten Jahres $77,25$ Euro. Als neuer Kontostand ergibt sich: $G_1 + W_2 = 2575 + 77,25 = 2652,25$ Euro. Oder:

$$\begin{aligned} G_2 &= G_1 + W_1 = G_1 + \frac{p}{100}G_1 = (1 + \frac{p}{100})G_1 \\ &= (1 + 0,03) \cdot 2575 = 1,03 \cdot 2575 = 2652,25 \end{aligned}$$

Um direkt den Kontostand am Ende der zwei Jahre zu berechen kann man auch den Ausgangsbetrag mit $(1,03)^2 = 1,0609$ multiplizieren.

$$G_2 = (1,03)^2 G_0 = 1,0609 \cdot 2500 = 2652,25$$

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Berechne den Flächeninhalt A eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 2 Metern.

$$A = 2m \cdot 2m = 4m^2$$

Berechne das Volumen eines Würfels mit Seitenlänge von 3 Zentimetern.

$$V = 3cm \cdot 3cm \cdot 3cm = 27cm^3$$

Eine “kürzere“ Schreibweise für die mehrfache Multiplikation gleicher Zahlen bietet die **Potenzschreibweise**.

Potenzieren mit natürlichen Zahlen

Ist a eine beliebige Zahl und n eine natürliche Zahl ($\in \mathbb{N}$), so ist a^n definiert als das n-fache Produkt von a mit sich selbst: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}$.

Die Zahl a heißt **Basis**
n heißt **Exponent**
Den Term a^n bezeichnet man als die **n-te Potenz** von a

Beispiele:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$$

Ist a eine beliebige Zahl und n eine natürliche Zahl ($\in \mathbb{N}$), so ist a^n definiert als das n-fache Produkt von a mit sich selbst: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}$.

! BEACHTE: **Für alle Zahlen a $\neq$ 0 definiert man $\mathbf{a^0 = 1}$!**

Potenzgesetze

Für alle Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n gelten die Potenzgesetze:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P1)} & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
\text{(P2)} & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
\text{(P3)} & (a^m)^n = a^{m \cdot n}
\end{array}
$$

Beispiele:

$$3^2 \cdot 3^3 = \cdots$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 12^3 = \cdots$$

$$\left(2^3\right)^3 = \cdots$$

Was wenn der Exponent negativ wird?

Beispiel: a^{-1}

Wegen Regel (P1) sollte dann gelten, das $a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$ ist!

Definition:

Für alle ganzen Zahlen n gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Die Potenzgesetze (P1), (P2) und (P3) gelten auch für negative Exponenten m und n!

Beispiele:

$$3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 3^5 = \cdots$$

$$\frac{(6^3)^{-5}}{6^3 \cdot 6^{-2}} = \cdots$$

$$\left(3 \cdot 2^{-3} \cdot 5^2\right)^{-3} \cdot 3^2 \cdot 2^{12} = \cdots$$

BEMERKUNG:
Die **Potenzrechengesetze** (P1) und (P2) gelten ebenfalls für die Division von Potenzen:

$$\text{(P1)} \qquad a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$
$$\text{(P2)} \qquad a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Beispiele:

$$3^5 : 3^3 = \cdots$$
$$36^3 : 12^3 = \cdots$$

Nun betrachten wir rationale Exponenten, also Brüche, wie z.B. $\frac{13}{15}$.

Beispiel: $a^{\frac{13}{15}}$

Wie ist dieser Ausdruck zu verstehen?

Um diese Frage zu klären beginnen wir mit dem einfachsten Bruch $\frac{1}{2}$.

Was ist also beispielsweise $3^{\frac{1}{2}}$?

Wegen Regel (P3) muss das Ergebnis eine Zahl sein, für die gilt:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3$$

Diese Zahl selbst lässt sich allerdings nicht als Bruch schreiben.
Es handelt sich um eine irrationale Zahl.

Quadratwurzel

Für jede positive Zahl a ist $a^{\frac{1}{2}}$ definiert als diejenige positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.
Man bezeichnet $a^{\frac{1}{2}}$ als **(Quadrat-) Wurzel** aus a und schreibt $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

$\hookrightarrow$ Die (Quadrat-) Wurzel einer Quadratzahl

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, \dots\}$$

ist selbst wieder eine natürliche Zahl.

$\hookrightarrow$ In den meisten Fällen aber eine irrationale, reelle Zahl ($\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Beispiele:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = \dots$$
$$\sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} = \dots$$

Allgemeiner gilt für alle Stammbrüche:

Die n-te Wurzel

Für jede positive Zahl a und jeden Stammbruch $\frac{1}{n}$ ist

$$a^{\frac{1}{n}}$$

definiert als diejenige positive Zahl, die n mal mit sich selbst multipliziert a ergibt.
Man bezeichnet $a^{\frac{1}{n}}$ als **n-te Wurzel** aus a und schreibt

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Beispiele:

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = \dots$$
$$\sqrt[3]{a^6} = (a^6)^{\frac{1}{3}} = \dots$$

Potenzieren mit beliebigen rationalen Zahlen

Potenzieren mit $\frac{m}{n}$:

- Für eine beliebige positive Zahl a bezeichnet der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ **die m-te Potenz der n-ten Wurzel** aus a:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

- Wegen den Potenzgesetzen (P1) bis (P3) gelten die folgenden Identitäten:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Beispiele:

$$8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4 \quad \text{oder} \quad 8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

Übungsaufgaben: $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = \dots$

$120^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{900} = \dots$

$\sqrt{0,16} = \dots$

Logarithmen

Zur Motivation betrachten wir die Potenz:

$$\mathbf{a^n = b}$$

(Im Folgenden bezeichnet x immer den unbekannten, gesuchten Wert):

- **Potenzrechnung:** Der Potenzwert ist gesucht $a^n = x$
  Gesucht ist die **n-te Potenz** von a!
- **Wurzelrechnung:** Die Basis ist gesucht $x^n = b$
  Die Basis einer Potenz ist gesucht, die **n-te Wurzel** aus b, also $x = \sqrt{b}$!

Logarithmenrechnung:

- Statt dem Potenzwert b oder der Basis a kann auch der Exponent gesucht sein.

$$a^x = b$$

- Man nennt den **unbekannten** Exponenten dann
  den **Logarithmus von b zur Basis a**.
- Um die Gleichung $a^x = b$ nach x umzustellen, führen wir an dieser Stelle ein neues Zeichen “$\log_a$“ ein!

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

Logarithmus von b zur Basis a

Unter dem Logarithmus $x = \log_a b$ versteht man den Exponenten x in der Gleichung $a^x = b$.

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

- Beispiele: $\log_2 8 = \ldots$ und $\log_{10} 1000000 = \ldots$
- **besondere Logarithmen:**
  - Den Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 kürzt man durch *lg* ab:
  $$\log_{10} b = \lg b.$$
  - Den Logarithmus zur Basis e nennt man den **natürlichen Logarithmus**, Schreibweise:
  $$\log_e b = \ln b.$$
  Die Zahl e heißt **eulersche Zahl**.
  e ist, so wie π oder $\sqrt{2}$, irrational (nicht als Bruch darstellbar).
  $$e \approx 2.71828182845\ldots$$
  $$\ln 20 = x \Leftrightarrow e^x = 20 = e^{\ln 20} \Rightarrow \ln 20 = \text{"nicht so einfach"}$$

Basis-Umrechnung:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

- Folglich kann jeder Logarithmus auf die besonderen Logarithmen zurückgeführt werden:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

- Beispiele:

$$\log_{1000} 100 = \frac{\lg 100}{\lg 1000} = \frac{2}{3}$$

$$\log_7 137 = \frac{\lg 137}{\lg 7} = \frac{\ln 137}{\ln 7} \qquad \rightsquigarrow \textit{Taschenrechner :)}$$

Rechenregeln für Logarithmen

Logarithmus von b zur Basis a

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

Rechenregeln am Beispiel des *natürlichen Logarithmus*:

$$e^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \ln(b) = x$$

Für Zahlen $b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{lrl} \text{(L1)} & \ln(b^d) = & d \cdot \ln b \\ \text{(L2)} & \ln(b \cdot c) = & \ln b + \ln c \\ \text{(L3)} & \ln(\frac{b}{c}) = & \ln b - \ln c \end{array}$$

Elementare Algebra

Im Alltag wird Algebra oft als das ”Rechnen mit Buchstaben in Gleichungen“ bezeichnet.
Zu den Zahlen und den Grundrechenarten kommen nun die sog. **Variablen** und **Terme** hinzu:

Variablen

- $\hookrightarrow$ Buchstaben dienen als Platzhalter in einem mathematischen Ausdruck
- $\hookrightarrow$ allgemeine Gesetzmäßigkeiten können präzise und übersichtlich formuliert werden
- $\hookrightarrow$ es gelten die Rechenregeln der reellen Zahlen, z.B. das **Kommutativgesetz**, das **Assoziativgesetz** oder das **Distributivgesetz**.

Terme sind mathematische Ausdrücke die Variablen enthalten.

- $\hookrightarrow$ einfaches Beispiel: $2 \cdot (a + b)$
  (Umfang eines allgemeinen Rechtecks mit Seitenlängen a und b.)
- $\hookrightarrow$ das **Distributivgesetz** gilt ebenfalls für Terme: $6c \cdot \left(b + \frac{1}{2}a\right) = 6bc + 3ac$

Für das Rechnen mit Termen lernen wir nun einige Regeln kennen.

Ausmultiplizieren von Klammern:

Für alle reellen Zahlen a, b, x und y gilt:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(x+y) &= (a+b)\cdot x + (a+b)\cdot y \\ &= ax + bx + ay + by\end{aligned}$$

↪ zweimaliges Anwenden des Distributivgesetzes

↪ **WICHTIG:** Vorzeichen der Variablen müssen beachtet werden:

$$(a-b)\cdot(x+y) = ax + ay - bx - by$$

↪ Beispiele: $(2x-5y)\cdot(-b+4c) = \ldots$

$(b+3c)\cdot(-3a)\cdot(2x-y) = \ldots$

↪ **Übersichtlichkeit:** alphabetische Reihenfolge üblich! (Kommutativität der Multiplikation)

In speziellen Fällen kann man das Ausmultiplizieren abkürzen:

Die binomischen Formeln:

Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(B1)} & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{(B2)} & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{(B3)} & (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

↪ Die zweite Formel gilt z.B. wegen:
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 \underbrace{-ab - ab}_{=-2ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

↪ Beispiel:

$$(3a+5b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(5b) + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$$

Probe durch Einsetzen von z.B. $a = 2$ und $b = 1$ ...

Die folgende Konvention haben wir bereits angewandt:

Zusammenfassen gleichnamiger Terme:
Nach dem Ausmultiplizieren von Klammern sollten gleichnamige Terme (also solche, die dieselben Variablen enthalten) zusammengefasst werden.

$\hookrightarrow$ Beispiele:

$$(2x - 5) \cdot (-xy + 4y) = \ldots$$

$$(a + 3) \cdot (1 - 3a) \cdot (2a - 4) = \ldots$$

Beim Umgang mit **geschachtelte Klammern** gilt weiterhin:

Klammern werden von innen nach außen aufgelöst!

$$(a + bc) \cdot (3a \cdot (2a - 3b)) = \ldots$$

Manchmal ist es sinnvoll aus einer Summe von Termen gemeinsame Faktoren auszuklammern!

Ausklammern eines Faktors:

Die Umformung einer Summe der Form

$$ax + ay$$

in die Form

$$a \cdot (x + y)$$

nennt man **Ausklammern des Faktors a** aus der Summe.

- $\hookrightarrow$ Rückgängigmachen des Ausmultiplizierens!
- $\hookrightarrow$ Im obigen Beispiel haben alle vier Summanden den gemeinsamen Faktor a. Wir können also a ausklammern:

$$\begin{aligned} &6a^3 - 9a^2b + 6a^2bc - 9ab^2c \\ &= a \cdot \left(6a^2 - 9ab + 6abc - 9b^2c\right) = \ldots \end{aligned}$$

Eine wichtige Anwendung des Ausklammerns gemeinsamer Faktoren aus Summen ist das **Kürzen von Bruchtermen**:

- Kürzen ist bei Termen nicht anders als in Zahlenbrüchen!
- Dazu müssen gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner gefunden werden.

Beispiel 1:

$$\frac{4ax - 2ay}{ay} = \dots$$

Beispiel 2:

$$\frac{12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab}{4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx}$$

Zuerst ein Blick auf den Zähler:

$$12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab = \dots$$

Nun betrachten wir den Nenner:

$$4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx = \dots$$

Insgesamt folgt also:

$$\frac{12abx^2 - 4a^2x + 2ax - 8ab}{4axy^2 - 16ax^2 + 10a^2bx} = \dots = \frac{(6bx^2 - 2ax + x - 4b)}{x(2y^2 - 8x + 5ab)}$$

Eine wichtige Anwendung des Ausklammerns gemeinsamer Faktoren aus Summen ist das **Kürzen in Bruchtermen**:

- Kürzen ist bei Termen nicht anders als in Zahlenbrüchen!
- Dazu müssen gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner gefunden werden.

Beispiel:

$$\frac{15a+5b}{25ab} = \frac{5\cdot(3a+b)}{25ab} = \frac{3a+b}{5ab}$$

$$\frac{18a^2x^2-9a^2xy}{81ax^2y} = \frac{9a^2x\cdot(2x-y)}{81ax^2y} = \frac{a\cdot(2x-y)}{9xy}$$

Gleichungen

Was ist eine Gleichung?

$$2 + 4 = 6$$

Wir sprechen im Folgenden aber über Gleichungen mit mindestens einer Unbekannten!

$$\frac{3x}{(\sqrt{x})^4} - 7(3 - x)^2 = \frac{(\sqrt{27x})^2}{5}$$

Gleichung

Eine **Gleichung** besteht aus zwei mathematischen Ausdrücken (Termen), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

$\hookrightarrow$ enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so suchen wir nach **den Lösungen der Gleichung**

$\hookrightarrow$ Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$.

Um die Lösungen von Gleichungen zu bestimmen, lernen wir nun einige Lösungsverfahren für spezielle Gleichungen kennen!

Äquivalenzumformungen

Die folgenden Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht und werden **erlaubte Umformungen** oder **Äquivalenzumformungen** genannt:

- ↪ Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl (oder Term) auf beiden Seiten der Gleichung
- ↪ Multiplikation oder Division beider Seiten mit derselben **von Null verschiedenen Zahl** (oder Term!)

Beispiel:

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= -4 \qquad && \mid -2 \\ -2x &= -6 \qquad && \mid : (-2) \\ x &= 3 \qquad && \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\} \end{aligned}$$

Die einfachste Art von Gleichungen stellen die *linearen Gleichungen* dar.
Sie enthalten genau eine Unbekannte x.

Lineare Gleichungen

Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man die Gleichung der Form

$$\mathbf{ax + b = 0}$$

eine **lineare Gleichung (in Normalform)**.

- $\hookrightarrow$ Die Variable x kommt nur als einfache Potenz vor!
- $\hookrightarrow$ Die Zahlen a, b heißen **Koeffizienten**!
- $\hookrightarrow$ Eine solche Gleichung hat genau die Lösung: $\mathbf{x = \frac{-b}{a}}$
  (nachrechnen!)

Übung 1:

- “Das zehnfache einer Zahl vermindert um 10 ist gleich dem sechsfachen der Zahl vermehrt um 2. Wie heißt die Zahl?”
- “Ein Vater ist 38 Jahre alt, sein Sohn 11 Jahre. Nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt wie der Sohn?”

Übung 2:
Bestime die Lösung der linearen Gleichung

$$2x - 3(5 - x) = 3(2x - 5) + 9$$

Lineare Gleichungen

- Die Art einer Gleichung ist unter Umständen erst nach Umformungen zu identifizieren:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{-2x}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-3)(x+3)}_{x^2-9} = -8x$$

  Im obigen Fall ist die Gleichung wegen x^2 also **NICHT** linear!

- ACHTUNG: Bei der Umformung haben wir beide Seiten mit dem Term $x+3$ multipliziert. Wie können wir sicher sein, dass der Term ungleich Null ist?

  Erst einmal wissen wir das tatsächlich nicht!

  Nach dem Berechnen der “vorläufigen“ Lösung muss überprüft werden, ob man bei den Umformungen mit Null multipliziert oder dividiert hat.

  $\hookrightarrow$ War dies <u>nicht der Fall</u> so ist die ”vorläufige” Lösung tatsächlich die Lösung der Gleichung!

  $\hookrightarrow$ Andernfalls besitzt die Gleichung **keine** Lösung!

Lineare Gleichungen

Beispiel:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x$$

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{x^2-1}{x-1} & = & x & \mid \cdot (x-1) \\ \Leftrightarrow & x^2-1 & = & x^2-x & \mid -x^2 \\ \Leftrightarrow & -1 & = & -x & \mid : (-1) \\ \Leftrightarrow & x & = & 1 & \text{ABER: } (1-1)=0 \end{array}$$

keine Lösung!

Gleichungen in denen die 2-te Potenz der Variable auftaucht heißen **quadratische Gleichungen**.

quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

mit beliebigen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung**.

Eine Gleichung der Form

$$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$$

mit beliebigen Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$ nennt man **quadratische Gleichung in Normalform**.

$\hookrightarrow$ In Normalform hat der Term x^2 den Koeffizienten 1.

$\hookrightarrow$ Aus der oberen Gleichung erhält man die Normalform durch Division der Gleichung durch a.

In Normalform kann eine quadratische Gleichung folgendermaßen gelöst werden.

Lösung quadratischer Gleichungen (p-q-Formel)

Um die Gleichung

$$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$$

zu lösen berechnet man die beiden Zahlen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(nachrechnen!)

- $\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel **negativ**, d.h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$,
  so besitzt die quadratische Gleichung **keine Lösung**. $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$
- $\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel **gleich Null**, d.h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$,
  so gilt $x_1 = x_2$ und Gleichung hat **genau eine Lösung**. $\mathbb{L} = \{x_1\}$
- $\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel **positiv** , d.h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$,
  so gilt $x_1 \neq x_2$ und Gleichung hat **genau zwei Lösungen**. $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$

Übung 1:
Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$\mathbf{x^2 + 6x + 5 = 0}$$

Anwenden der p-q-Formel mit $p =$ und $q =$ liefert:

Übung 2:
Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$\mathbf{-3x^2 + 12x - 12 = 0}$$

Biquadratische Gleichungen

- Gleichungen mit höheren Exponenten als 2 sind sehr viel schwerer zu lösen.
- Eine Ausnahme sind die sog. **biquadratischen Gleichungen**:

biquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

mit beliebigen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **biquadratische Gleichung**.

$\hookrightarrow$ Sie ist durch **Substitution** (Ersetzen) des Terms x^2 durch y zu lösen.

$\hookrightarrow$ Ersetzt man

$$x^2 = y$$

in obiger Gleichung, so ergibt sich eine **quadratische** Gleichung in y:

$$\mathbf{ay^2 + by + c = 0}$$

Biquadratische Gleichungen

Lösung biquadratischer Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

mit beliebigen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **biquadratische Gleichung**.

$\hookrightarrow$ Ersetzen wir $x^2 = y$ in obiger Gleichung, so ergibt sich eine quadratische Gleichung in y:

$$\mathbf{ay^2 + by + c = 0}$$

Diese besitzt die Lösungen y_1 und y_2.

$\hookrightarrow$ Wegen $x^2 = y$ erhalten wir die Lösungen aus der ursprünglichen Gleichung durch "Wurzel ziehen":

$$x_1 = \sqrt{y_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\sqrt{y_1}$$

und

$$x_3 = \sqrt{y_2} \qquad \text{und} \qquad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

$\hookrightarrow$ Die Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 sind Lösungen der biquadratischen Gleichung. (**Probe!**)

$\hookrightarrow$ **BEACHTE:** Die Lösungen y_1 und y_2 der quadratischen Gleichung dürfen nicht negativ sein! (Wurzel)

Wurzelgleichungen

Eine Gleichung bei der mindestens eine Variable unter einer Wurzel steht, heißt **Wurzelgleichung**.

Beispiel:

$$\sqrt{x-1} = 3$$

Lösung von Wurzelgleichungen

Um eine Wurzelgleichung zu lösen, potenziert man sie (evtl. mehrfach) bis alle Wurzeln eleminiert sind.

- $\hookrightarrow$ Dann löst man die entstandene Gleichung **und**
- $\hookrightarrow$ setzt die Lösungen **zur Probe** in die ursprüngliche Wurzelgleichung ein!
  Eine Probe ist hier unerlässlich, da das Potenzieren keine Äquivalenzumformung darstellt und dabei ggf. die Lösungsmenge vergrößert wird!

Übungen:

$a)\ \sqrt{x-1} = -1 \qquad b)\ \sqrt{x+2\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \qquad c)\ \sqrt{x-2} = \sqrt{x} + \sqrt{6}$

Eine Gleichung bei der eine Variable im Exponenten auftritt, heißt **Exponentialgleichung**.

Beispiel:

$$3^x = 27$$

Lösung von Exponentialgleichungen

Um eine Exponentialgleichung zu lösen, formt man sie durch Anwenden des Logarithmus um.

$\hookrightarrow$ Dann löst man die entstandene Gleichung mit Hilfe der Logarithmen- und Potenzgesetze

Übungen:

a) $2 \cdot 5^x = 50$ *b*) $3^x + 3^{x+1} - 135 = 0$ *c*) $2^{x-1} = 3^{x+1}$

Von Gleichungen zu Ungleichungen

Von Ungleichungen sprechen wir, wenn wir das Gleichheitszeichen ($=$) in einer Gleichung durch ein Ungleichheitszeichen ($<, \leq, >, \geq$) ersetzen.

Eine Ungleichung hat also zum Beispiel die Form

$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ “**a** ist kleiner als **b**″, oder

$\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ “**a** ist größer oder gleich **b**″.

Ungleichung

Eine Ungleichung besteht aus zwei mathematischen Termen, die durch ein Ungleichheitszeichen verbunden sind.

- Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so suchen wir die **Lösungen der Ungleichung**.
- Die Menge der Lösungen bezeichnen wir als **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$.
- Beispiel:

$$x + 1 < 2$$

Durch Subtraktion von 1 erhält man: $x < 1$.
Lösungen dieser Ungleichung sind also alle Zahlen x, die kleiner als 1 sind.
Man schreibt:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$$

Ungleichungen

Wie im Fall der Gleichungen so beruht die Lösung von Ungleichungen ebenfalls auf **Äquivalenzumformungen**, also auf Umformungen, die die Lösungsmenge der Ungleichung **nicht** verändern!

Umformungen von Ungleichungen

Die folgenden Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht und werden **erlaubte Umformungen** genannt:

- $\hookrightarrow$ Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl (oder Term) auf beiden Seiten der Ungleichung
- $\hookrightarrow$ Multiplikation oder Division beider Seiten mit einer positiven Zahl (oder Term)

WICHTIG!

Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl

Die Multiplikation (oder Division) einer Ungleichung mit einer negativen Zahl ändert die Lösungsmenge nicht, **wenn man gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umkehrt**.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &< 1 && \mid -4 \\ 3x &< -3 && \mid : 3 \\ x &< -1 && \Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \end{aligned}$$

ABER:

$$\begin{aligned} -2x + 4 &< 2 && \mid -4 \\ -2x &< -2 && \mid : (-2) \\ x &> 1 && \Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \end{aligned}$$

Übung 1:

$$x^2 - 2x + 3 < (x-1)(x+2)$$

Übung 2:

$$\frac{x-1}{2x+1} < 1$$

Hier ist das Vorzeichen des Nenners **unbekannt**.

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung notwendig!

Lineare Gleichungssysteme

Einzelne lineare Gleichungen mit zwei Variablen

- Bis jetzt haben wir nur lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (x) betrachtet:

$$3x - 4 = 2$$

- Eine Gleichung kann aber auch zwei unbekannte Variablen haben, z.B. x und y:

$$6x - 3y = 9$$

$\hookrightarrow$ Lösung dieser Gleichung sind alle Zahlenpaare (x, y), die beim Einsetzen in die Gleichung die Gleichung zu einer wahren Aussage machen.

$\hookrightarrow$ Beispielsweise entsteht eine wahre Aussage, wenn man das Zahlenpaar $(2, 1)$ in die 2.te Gleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} \text{Gleichung: } & 6x - 3y = 9 \\ \text{Einsetzen von } (2,1): & 6 \cdot \mathbf{2} - 3 \cdot \mathbf{1} = 9 \\ \text{wahre Aussage: } & 12 - 3 = 9 \end{aligned}$$

- Weitere Lösungspaare sind: $(x = 0, y = -3)$, $\quad (x = 1, y = -1)$, usw. ...

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

- Nun betrachten wir ein System aus zwei linearen Gleichung mit jeweils zwei Variablen x und y:

$$
\begin{aligned}
6x - 3y &= 9 \\
2x - 5y &= 15
\end{aligned}
$$

  $\hookrightarrow$ Lösung dieses Gleichungssystems sind alle Zahlenpaare (x, y), die beim Einsetzen beide Gleichungen **gleichzeitig** zu einer wahren Aussage machen.
  $\hookrightarrow$ Es entstehen zwei wahre Aussagen, wenn man das Zahlenpaar $(0, -3)$ in die 2.te Gleichung einsetzt!

- Ein solches lineares Gleichungssystem (**kurz: LGS**) kann

  $\hookrightarrow$ **keine** Lösung,
  $\hookrightarrow$ **genau eine** Lösung, oder
  $\hookrightarrow$ **unendlich viele** Lösungen haben!

- Die **Lösungsmenge** eines LGS bezeichnen wir mit $\mathbb{L}$!
- Um ein LGS zu lösen, lernen wir nun mehrere Lösungsverfahren kennen!

Einsetzverfahren

- Ausgangspunkt ist wieder das LGS:

$$6x - 3y = 9$$
$$2x - 5y = 15$$

Schritt 1: Auflösen einer Gleichungen nach einer Variablen mit Koeffizient 1 (diesmal z.B. nach x):

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y$$
$$2x - 5y = 15$$

Schritt 2: Einsetzen der umgeformten Gleichung in die andere Gleichung:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y$$
$$2 \cdot \left(\mathbf{\frac{3}{2}} + \mathbf{\frac{1}{2}y}\right) - 5y = 15$$

Schritt 3: Lösen der entstandenen Gleichung (in y):

$$3 + y - 5y = 15$$
$$\Leftrightarrow \quad -4y = 12 \qquad \Rightarrow \quad y = -3$$

Schritt 4: Einsetzen der Lösung für y in die nach x umgeformten Gleichung:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{-3} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{(0, -3)\}$$

Additionsverfahren

$$\text{Ausgangspunkt}: \quad \left|\begin{array}{ll} 6x - 3y & = 9 \\ 2x - 5y & = 15 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{array}$$

Schritt 1: Umformen der Koeffizienten vor einer Variablen, so dass dieser Koeffizient einmal **positiv** und einmal **negativ** vor der Variablen auftritt (z.B. vor y):

$$\left|\begin{array}{ll} 30x - 15y & = 45 \\ -6x + 15y & = -45 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Lsh \\ \oplus \end{array}$$

Schritt 2: **Addieren** der ersten und der zweiten Gleichung liefert dann:

$$24x - \mathbf{0} \cdot y = 0$$

$$-6x + 15y = -45 \qquad \text{Eine der Ausgangsgleichungen wird üblicherweise übernommen!}$$

Schritt 3: Die erste Gleichung vereinfacht sich in diesem Fall durch Herausfallen von y. Lösen der entstandenen Gleichung (in x) liefert:

$$x = 0$$

$$-6x + 15y = -45$$

Schritt 4: Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Gleichung ergibt:

$$x = 0$$

$$y = -\frac{6}{15} \cdot \mathbf{0} - \frac{45}{15} = -3$$

weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} -2x - 5y &= 10 \\ 3x + 6y &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 8 \\ 2x - 4y &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - y &= 5 \\ 12x - 3y &= 15 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme mit mehr als 2 Variablen

Zur Lösung von LGS mit mehr als zwei Variablen verwendet man eine Verallgemeinerung des Additionsverfahrens:

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

- Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen auf Dreiecksform bringen (**Vorwärtselimination**)
- Umformungen:
  - ✓ Addition von (Vielfachen der) Zeilen
  - ✓ Vertauschung von Spalten und Zeilen
- Auflösen durch zeilenweises ermitteln der Unbekannten (**Rückwärtssubstitution**)

Löse das LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & - & 3z & = & 3 \end{array}$$

Vorwärtselimination:
Elimination von x in Zeile 2 und 3:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & - & 5y & + & 7z & = & -4 \\ & + & 3y & - & 6z & = & 6 \end{array}$$

Tausch von Zeile 2 und 3; Elimination von y in der neuen Zeile 3;
und Division der dritten Zeile durch 3:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & + & y & - & 2z & = & 2 \\ & & & + & \mathbf{z} & = & -\mathbf{2} \end{array}$$

Die Variable z kann also abgelesen werden:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & + & y & - & 2z & = & 2 \\ & & & + & \mathbf{z} & = & -\mathbf{2} \end{array}$$

Rückwärtssubstitution:
Einsetzen von z in die zweite Gleichung liefert y:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & + & y & - & 2 \cdot (-\mathbf{2}) & = & 2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

Einsetzen von y und z in die erste Gleichung liefert x:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2 \cdot (-\mathbf{2}) & - & 3 \cdot (-\mathbf{2}) & = & 3 \\ & & \mathbf{y} & & & = & -\mathbf{2} \\ & & & & \mathbf{z} & = & -\mathbf{2} \end{array}$$

Lösung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{1}, \; \mathbf{y} = -\mathbf{2}, \; \mathbf{z} = -\mathbf{2}$$

Funktionen - Mathematik 1

Was sind Funktionen?

- Funktionen sind eine Zuordnungsvorschrift für die Elemente zweier Mengen
- dienen zur Beschreibung von wirtschaftlichen oder physikalischen Zusammenhängen

Beispiel:

Man stelle sich vor ein Fahrrad fährt über sehr lange Zeit konstant mit einer Geschwindigkeit von $20 km/h$.

Dann können wir den zurückgelegten Weg folgendermaßen berechnen:

$$s = 20 \cdot t$$

Jeder (positiven) Stundenzahl t wird also ein Wert für den Weg s zugeordnet.

Zeit	0	1	2	3	4	5	6
Weg	0	20	40	60	80	100	120

Funktionen

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element x einer Menge D **genau** einen Wert $y = f(x)$ in einer Menge W zuordnet.

$$\begin{aligned} f : & D \to W \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- $y = f(y)$ heißt **Funktionswert** von x
- D heißt **Definitionsbereich** von f
- W heißt **Wertebereich** von f

Beispiel:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{3x} - \mathbf{1}$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-7	-4	-1	2	5	8	11

Bemerkungen:

- **Der Wertebereich W einer Funktion muss nicht ausgeschöpft werden!**
  - $\hookrightarrow$ Der Wertebereich enthält die Menge aller **potenziellen** Funktionswerte.
  - $\hookrightarrow$ Die Menge aller **tatsächlich angenommenen** Funktionswerte heißt **Bildmenge**.

  - Im Beispiel stimmen Wertebereich und Bildmenge von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = 3x - 1$$

    überein; wie verhält sich dies bei der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = x^2 + 1?$$

- Eine Funktion deren Definitions- und Wertebereich in den reellen Zahlen liegen, nennt man **reelle Funtion**.

- Der Definitionsbereich einer Funktion ist oft ein sogenanntes **Intervall**.
- Die Intervallschreibweise erlaubt eine kurze Darstellung des Definitionsbereichs.

Funktionsgraph

Zeichnen des Funktionsgraphen einer reellen Funktion:

- Zeichnen eines Kordinatensystems

  $\hookrightarrow$ Zeichne zwei Achsen die sich im Nullpunkt schneiden.

  $\hookrightarrow$ Die horizontale Achse nennt man üblicherweise die **x-Achse**.

  $\hookrightarrow$ Die vertikale Achse heißt dann **y-Achse**.

- Ein Bild der Funktion entsteht, wenn man nun jedes Zahlenpaar $(x, y) = (x, f(x))$ als Koordinate eines Punktes interpretiert.

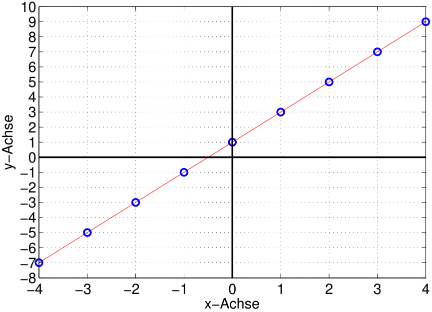
  $\hookrightarrow$ Einzeichnen einiger Zahlenpaare aus einer Wertetabelle vermitteln einen ersten Eindruck des Graphen.

  $\hookrightarrow$ Je mehr dicht beieinander liegende Zahlenpaare man einzeichnet, desto klarer wird der Funktionsverlauf.

Beispiel:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f(x)} = \mathbf{2x} + \mathbf{1}$$

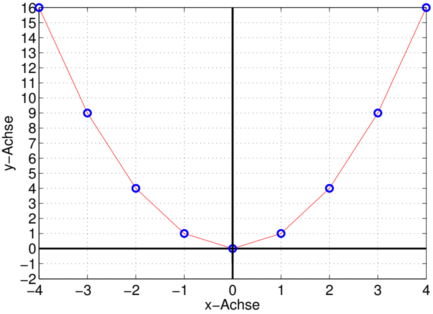
x	$f(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Beispiel:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

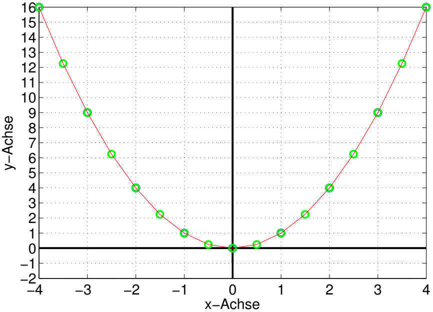
x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



Beispiel:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ **heißt Normalparabel**

Funktionen

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element x einer Menge D **genau** einen Wert $y = f(x)$ in einer Menge W zuordnet.

$$
\begin{aligned}
f : & D \to W \\
& x \mapsto y = f(x)
\end{aligned}
$$

- Eine reelle Zahl $\hat{x}$ heißt **Nullstelle** einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$f(\hat{x}) = 0.$$

$\hookrightarrow$ Die **Nullstellen** einer Funktion f ist die Stellen im Koordinatensystem, an welchen der Funktionsgraph von f die x-Achse schneidet.

$\hookrightarrow$ Diese Definition einer Nullstelle gilt für alle Funktionen!

$\hookrightarrow$ Zur Berechnung macht man den **Ansatz**:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

setzt die Funktionsvorschrift von $f(x)$ ein und löst die entstandene Gleichung nach x auf.

Lineare Funktionen

Lineare Funktion

Für reelle Zahlen m und b heißt eine Funktion der Form

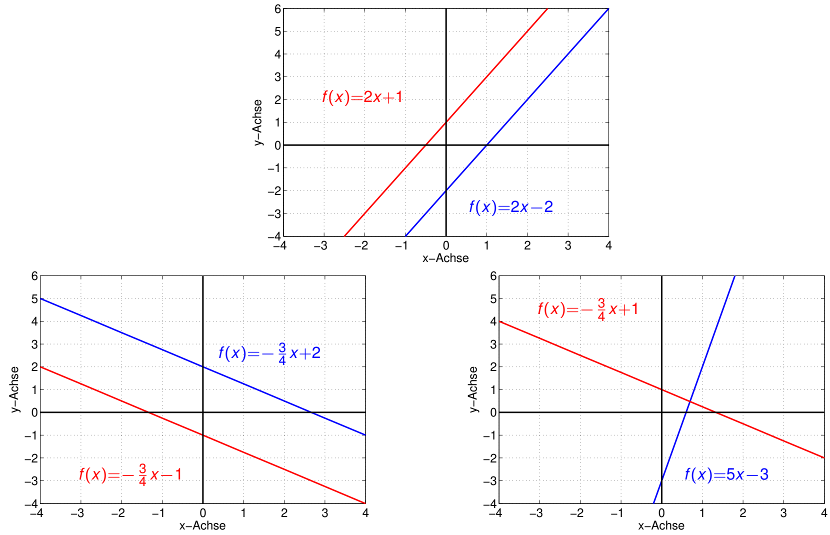
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = m \cdot x + b$$

lineare Funktion.

- Die linearen Funktionen bilden das einfachste Modell zur Beschreibung wirtschaftl. Zusammenhänge.
- Der Funktionsgraph einer linearen Funktion beschreibt **eine Gerade** im Koordinatensystem.
- Die Zahl **m** beschreibt die **Steigung** der Geraden.
- Die Zahl **b** gibt den **y-Achsenabschnitt** (den Schnittpunkt mit der y-Achse) des Funktionsgraphen an.

! Anstelle von $f(x)$ schreibt man oft $\mathbf{y} = \mathbf{mx} + \mathbf{b}$.
($y = f(x)$ entspricht dem Funktionswerten)

Lineare Funktionen



Lineare Funktion

Für reelle Zahlen m und b hat eine **lineare Funktion** die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b.$$

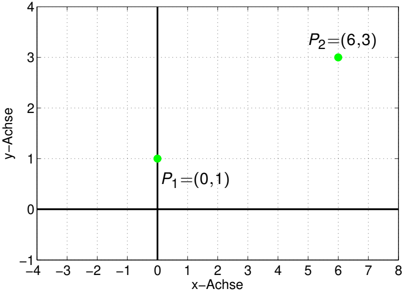
- Eine lineare Funktion (Gerade) lässt sich durch **zwei Punkte** $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ des Koordinatensystems eindeutig bestimmen.
- Aus den Punkten bestimmt man diejenige Gerade, die beide Punkte schneidet, auf folgene Weise:
  - $\hookrightarrow$ Für die **Steigung** m gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

  - $\hookrightarrow$ Für den **y-Achsenabschnitt** b gilt:

$$b = y_1 - m \cdot x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

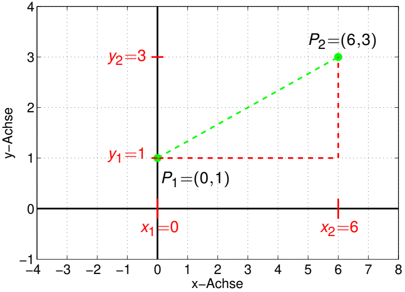
Lineare Funktionen



$$m = ?$$

$$b = ?$$

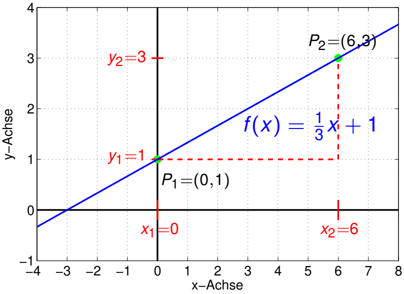
Lineare Funktionen



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b = ?$$

Lineare Funktionen



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1$$

Angebots- und Nachfragefunktionen:

(a) Bei einem Preis von $p_n = 15$ Euro setzt ein Unternehmen eine Stückzahl von $x = 3000$ Einheiten eines Produktes ab. Bei einer Preissteigerung um 2 Euro verringert sich der Absatz um 300 Stück. **Geben Sie die linearen Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion) $p(x)$ an.** Geben Sie ebenfalls die Form $p_n(x)$ an.

(b) Wie hoch ist die maximale Absatzmenge?
(Hinweis: In diesem Fall würden Sie das Produkt verschenken! Wieso ist dies so?)

(c) Bei welchem Preis würde das Produkt nicht mehr nachgefragt werden?

(a) Aus dem Ansatz $x = m \cdot p + b$ folgt laut Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} 3000 &= 15m + b \\ 2700 &= 17m + b \end{aligned}$$

Umstellen und einsetzen: $b = 3000 - 15m$ und $2700 = 17m + 3000 - 15m$
Es folgt: $m = -150$ und $b = 5250$
Insgesamt also: $\mathbf{x(p_n) = -150p_n + 5250}$ und $\mathbf{p_n(x) = -\frac{x}{150} + 35}$.

(b) Die maximale Absatzmenge liegt in $p_n = 0$ vor: $x(0) = 5250$.

(c) Wenn keine Nachfrage existiert, muss $x = 0$ gelten: $p_n(0) = 35$.