▷ Umgekehrte Kurvendiskussion

$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

① geht durch den Koordinatenursprung

② hat im Punkt $P=(1,-2)$ einen Wendepunkt

③ Die Wendetangente schneidet die x-Achse an der Stelle $x=2$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

① $y(0) = 0$

$a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow \underline{d=0}. : y(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$

② $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y''(x) = 6ax + 2b$

Wendepkt. bei $x=1$; $y''(1) = 0$

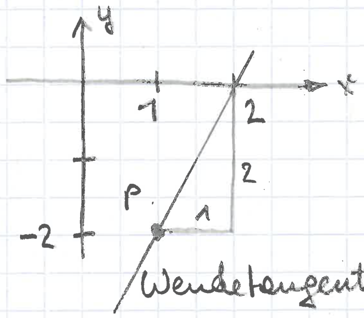
$6a\cdot 1 + 2b = 0 \mid :2$

$\underline{3a + b = 0}.$

Punkt $P=(1,-2)$: $y(1) = -2$

$a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 = -2$

$\underline{a + b + c = -2}.$

③ 

Wendetangente hat Steigung 2!!

$y'(1) = 2$

$3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 2$

$\underline{3a + 2b + c = 2}.$

I: $3a + b = 0$

II: $a + b + c = -2$

III: $3a + 2b + c = 2 \mid -\text{II} \Rightarrow 2a + b = 4$

$3a + b = 0$

$2a + b = 4 \mid \cdot(-1)$ $\Big]+$ ergibt $\underline{a = -4}$

Aus I folgt $3\cdot(-4) + b = 0$, d.h. $\underline{b = 12}$.

Aus II folgt $-4 + 12 + c = -2$, d.h. $\underline{c} = -2 + 4 - 12 = \underline{-10}$.

Insgesamt: $\underline{\underline{y(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x.}}$

▷ Maximale Bremskraft

$$K(v) = \frac{a^2 v}{v^2+b^2} \quad \text{, wobei } v>0,\ a>0,\ b>0$$

Skizze : $K(0) = 0$

$K(v \to \infty) = 0$

zwischen $v=0$ und $v \to \infty$ ist $K(v) > 0$

$$K'(v) = a^2 \frac{1 \cdot (v^2+b^2) - v \cdot 2v}{(v^2+b^2)^2} = a^2 \frac{b^2 - v^2}{(v^2+b^2)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$b^2 - v^2 = 0$$

$$v^2 = b^2$$

$$\underline{v = b}\text{, weil } v>0,\ b>0.$$

$$K''(v) = a^2 \frac{-2v(v^2+b^2)^{\cancel{2}} - (b^2-v^2)\,2\cancel{(v^2+b^2)}\cdot 2v}{(v^2+b^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= a^2 \frac{-2v(v^2+b^2) - 4v(b^2-v^2)}{(v^2+b^2)^3} = \frac{-2v^3 - 2vb^2 - 4vb^2 + 4v^3}{(v^2+b^2)^3} =$$

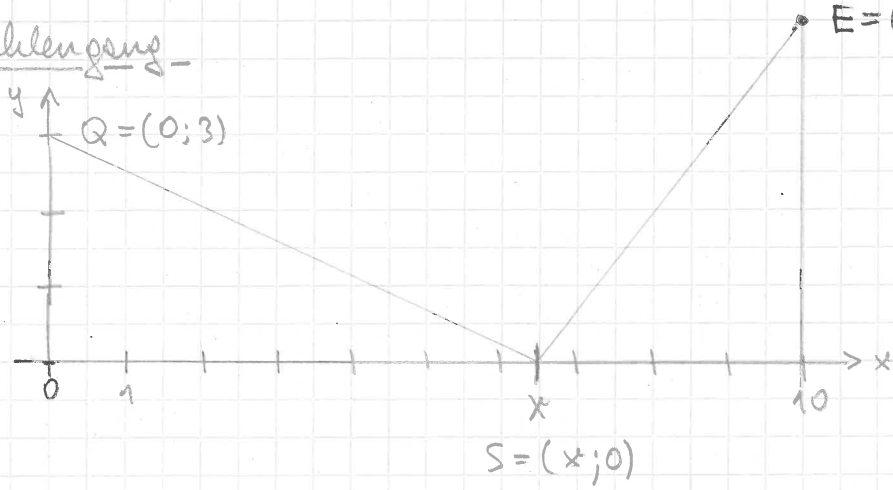
$$= a^2 \frac{2v^3 - 6vb^2}{(v^2+b^2)^3} = 2a^3 v \frac{v^2 - 3b^2}{(v^2+b^2)^3}.$$

$$K''(v=b) = 2a^3 b \frac{b^2 - 3b^2}{(b^2+b^2)^3} = 2a^3 b \frac{-2b^2}{(2b^2)^3} < 0$$

$\Rightarrow$ <u>K hat bei $v=b$ ein relatives Maximum.</u>

$$K(v=b) = \frac{a^2 b}{b^2+b^2} = \frac{a^2 \cancel{b}}{2b^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{2b}}}.$$

D Strahlengang



Weg von Q nach E über S : $\|\overrightarrow{QS}\| + \|\overrightarrow{SE}\| =$

$$= \left\| \begin{pmatrix} x-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 10-x \\ 4,5-0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(10-x)^2+4,5^2} =: f(x)$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}} + \frac{\cancel{2}\cdot(10-x)\cdot(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(10-x)^2+4,5^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{10-x}{\sqrt{(10-x)^2+4,5^2}}$$

$$x\sqrt{(10-x)^2+4,5^2} = (10-x)\sqrt{x^2+9} \quad \Big|^2$$

$$x^2\left[(10-x)^2+4,5^2\right] = (10-x)^2(x^2+9)$$

$$x^2(10-x)^2 + 4,5^2x^2 - (10-x)^2\cdot(x^2+9) = 0$$

$$(10-x)^2\left[x^2-x^2-9\right] + 4,5^2x^2 = 0$$

$$-9(10-x)^2 = -4,5^2x^2$$

$$(10-x)^2 = \underbrace{\frac{4,5\cdot\cancel{4,5}}{\cancel{9}\,2}}_{=2,25=1,5^2} x^2 = (1,5x)^2 \quad \Big| \pm\sqrt{}$$

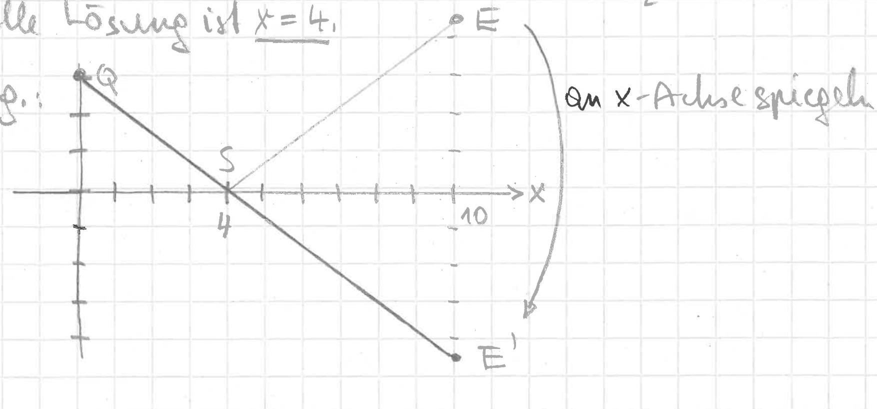
$$10-x = \pm 1,5x$$

$$x \pm 1,5x = 10$$

$$x(1 \pm 1,5) = 10, \quad x = \frac{10}{1 \pm 1,5} \begin{cases} \xrightarrow{+} \underline{x_1 = 4}. \\ \xrightarrow{-} x_2 = -20 \end{cases}$$

Einzige sinnvolle Lösung ist $\underline{x = 4}$.

Geometrische Lsg.:



▷ Taylor-Reihe des Kehrwerts

$f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordg. entwickeln.

$f'(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f(1) = 1, \; f'(1) = -1, \; f''(1) = 2.$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + \ldots \\ &= 1 + (-1)\cdot(x-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(x-1)^2 + \ldots \\ &= 1 - (x-1) + 1\cdot(x-1)^2 + \ldots \\ &= 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1 + \ldots \\ &= \underline{\underline{3 - 3x + x^2}} + \ldots \end{aligned}$$