MDA_ 7.3.25

Partielle Ableitung (1. Ordnung) von $\overbrace{f(x,y)}^{\text{Woran?}}$ an der Stelle $\underbrace{(x_0, y_0)}_{\text{Wo?}}$ $\underbrace{\text{nach } x}_{\text{in welche Richtung}}$

Die unbekannte, die nicht Abgeleitet wird, wird als konstant angenommen.

> es muss in n-Dimensionen abgeleitet werden.
> z.B. $f(x,y) \rightarrow$ in x und y ableiten separat

Schreibweisen:

! nicht mehr f' !

$\frac{d}{dx} f(x,y)$ — Abgeleitete Funktion; Richtung; an Stelle (x_0, y_0)

oder $\frac{df}{dx}(x_0, y_0)$ oder $f_x(x_0, y_0)$ — Richtung

Beispiele

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$\downarrow$ part. Abl. an Stelle $(x_0, y_0) = (2, -1)$

a) nach x unter Konstanthalten von $y_0 = -1$

$f(x, y_0) = x^2 + (y_0)^2 = x^2 + 1$

$\frac{df}{dx}(x, y_0) = 2x$

b) nach y $\rightarrow$ $x_0 = 2$ Konstant halten

$f(x_0, y) = (x_0)^2 + y^2 = 4 + y^2$

$\frac{df}{dy}(x_0, y) = 2y$

② $f(x,y) = 2x \cdot y^2$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (-3, 1)$

a) in x-Richtung: (y als konstant ansehen)

$f(x,y) = 2 \cdot x \cdot y^2 = (2y^2) \cdot x$

$\frac{df}{dx}(x,y) = 2y^2 \cdot 1 \rightarrow$ an (x_0, y_0) $\frac{df}{dx}(-3,1) = 2 \cdot (1)^2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

Steigung in x-Richtung

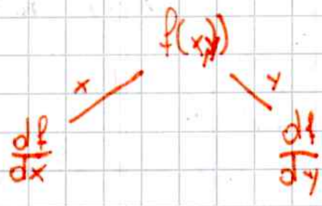
b) in y-Richtung

$f(x,y) = 2x \cdot y^2$

$\frac{df}{dx}(x,y) = 4 \cdot x \cdot y \longrightarrow$ an (x_0, y_0) $= 4 \cdot -3 \cdot 1 = \underline{\underline{-12}}$

Steigung in y-Richtung

③ $f(x,y) = \sin(x) \cdot y^2 + x \cdot y$



a) in x-Richtung

$\frac{df}{dx}(x,y) = \underline{\cos(x) \cdot y^2 + y}$

b) $\frac{df}{dx}(x,y) = \underline{2 \cdot \sin(x) \cdot y + x}$

Bemerkungen:

1. Verallgemeinerung der Ableitung auf höhere Dimensionen

$$\left.\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{x} &\to z = f(\vec{x}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} &\to z = f(x_1, x_2, \dots) \end{aligned}\right\}$$

Dieses Skalarfeld besitzt n part. Ableitungen

↳ $\frac{df}{dx_n}(x_1, x_2, \dots)$

2. Der Vektor aller part. Ableitungen (1. Ordnung) eines Skalarfeldes $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Gradient des Skalarfeldes und lautet:

$$\boxed{\nabla f(x_1, x_n) = \operatorname{grad} f(x_1, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2, \dots) \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}}$$

Nabla-Operator

Eigenschaften später!

Bsp.: $f(x,y)\ 3x\,y^3$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y^3 \\ 9x\,y^2 \end{pmatrix}$$

z.B an Stelle $(2, -\frac{1}{2})$

$$\nabla f(2, -\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

3. Beim partiellen Ableiten gelten alle Ableitungsregeln der 1-dim. Differentialrechnung.
(Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)

4. Für mehrfache partielle Ableitungen:
Die part. Abl. 2. Ordnung entspricht der Partiellen Abl. von $\frac{d}{dx} f(x,y)$ $[i = 1, \dots, n]$

für $n=2$ gilt:

Anzahl an Inputs

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & f(x,y) \arrow[dl, "dx"'] \arrow[dr, "dy"] & & \\
i^1 & f_x(x,y) \arrow[dl, "dx"'] \arrow[d, "dy"] & & f_y(x,y) \arrow[d, "dx"'] \arrow[dr, "dy"] & \\
i^2\ \frac{d^2}{dx^2} f(x,y) = \boxed{f_{xx}(x,y)} & \boxed{f_{xy}(x,y)} & = & f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

$\frac{d^2}{dx\,dy} f(x,y)$

Gleichheit, sofern die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz geg. sind d.h. wenn $f(x,y)$ stetig differenzierbar (oft genug)

Beispiele:

$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

part. Abl. 1. Ord.: $f_x(x,y) = \dfrac{2x+}{(x^2+y^2)}$

$f_y(x,y) = \dfrac{2y+}{(x^2+y^2)}$

part. Abl. 2. Ord.: $f_{xx}(x,y) = \dfrac{2\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{0\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)}$

5. Ableiten anderer mehrdimensionale Funktionen

Skalarfelder $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Kurven $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ z.B. $f \to \begin{pmatrix} x(f) \\ y(f) \end{pmatrix}$? – Outputkomponente sind 1-dim Fkt von f und können nach f abgeleitet werden!

Ableitung nach Inputparameter f

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

6. Vektorfelder

$$\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ z_n(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix}$$

jede Komponente des Outputs entspricht einem Skalarfeld

$z_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$z_i(x_1 \dots x_n)$

Ableitung von $\vec{v}$

$$D\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dx_1} & \dots & \frac{dz_1}{dx_n} \\ \vdots & & \\ \frac{dz_n}{dx_1} & \dots & \frac{dz_n}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi - Matrix von $\vec{v}$

und kann nach allen Inputs $x_1 \dots x_n$ partiell abgeleitet werden!

MDA_Ü2

13.03.25

Totales Differential

$df = f' \cdot dx$

$y = y_0 + f' \cdot (x - x_0)$

Gradient

$z(x,y) = 3x \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \cos(x y^2 - \pi \cdot x)$ $\qquad P(1,0)$

$z(x,y) = 3x \cdot \ln\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \cos(x y^2 - \pi \cdot x)$

$z_x = 3 \cdot \ln\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] + 3 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \sin(x y^2 - \pi \cdot x) \cdot (y^2 - \pi)$

$z_y = 3x \cdot \frac{y}{x^2+y^2} + 2xy \cdot \sin(xy^2 - \pi \cdot x)$

$z_x = 3{,}1721$

$z_y = 0$

Partielle Ableitung höherer Ordnung

$z(x,y) = 3xy - \cos(x-y) + x^3 y^5$

a) $z_x = 3y + \sin(x-y) + 3x^2 \cdot y^5$

$z_y = 3x - \sin(x-y) + 5 \cdot x^3 y^4$

$z_{xy} = 3 - \cos(x-y) + 3x^2 \cdot 5y^4 = 3 - \cos(x-y) + 15\, x^2 y^4$ ✓

$z_{yx} = 3 - \cos(x-y) + 5y^4 \cdot 3x^2 = 3 - \cos(x-y) + 15\, x^2 y^4$

b) $z(x,y) = 3xy - \cos(x-y) + x^3 y^5$

$z_x = 3y + \sin(x-y) + 3x^2 y^5$

$z_y = 3x - \sin(x-y) + 5x^3 y^4$

$z_{xx} = y - \cos(x-y) + 6x y^5$

$z_{xy} = 3 - \cos(x-y) + 15 x^2 y^4$

$z_{yx} = 3 - \cos(x-y) + 15 x^2 y^4$

$z_{xxy} = -\sin(x-y) + 30 x y^4$

$z_{xyx} = -\sin(x-y) + 30 x y^4$

$z_{yxx} = -\sin(x-y) + 30 x y^4$

<u>Partielle Ableitungen</u>

$$u(x,y,z) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + b$$

$$u(x,y,z) = a \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_x = a \cdot -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = a \cdot -x \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_{xx} = a \cdot -1 \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + a \cdot -x \cdot -\frac{3}{2} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$u_{xx} = a \cdot \left[-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$u_{yy} = a \cdot \left[-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3y^2 \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$u_{zz} = a \cdot \left[-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

Totales Differential

$$z(x,y) = \frac{y^2 + x}{2y - 4x}$$

$$z_x = \frac{y^2 \cdot (2y - 4x)}{(2y-4x)^2} - \frac{(y^2+x) \cdot -8y}{(2y-4x)^2}$$

$$z_y = \frac{2xy \cdot (2y - 4x)}{(2y-4x)^2} - \frac{(y^2+x) \cdot -8x}{(2y-4x)^2}$$

MDA 6.3.25

Mehrdinensionale Funktionen

a) $z = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ $\quad x \neq y \quad y \neq x$

$x + y \geq 0 \quad y \geq -x$

b) $z = \sqrt{(x^2-1) \cdot (9-y^2)}$

$z = \sqrt{(x^2-1)} \cdot \sqrt{(9-y^2)} \quad 1 \geq x \leq -1$

$-3 \leq y \leq 3$

c) $z = \log_{10}(x^2 - y^2)$

$(x-y) \cdot (x+y) > 0$ $\quad x > y \quad x > -y$

$x < y \quad x < -y$

Skalarfelder

a) $z = x^2 + y^2 - 2y$ für $z = \{0,4\}$

$0 = x^2 + y^2 - 2y$

$0 = x^2 + (y-1)^2 - 1 \quad |+1$

$1 = x^2 + (y-1)^2 \longrightarrow$ Kreis Position $(0,1)$ + Radius $\sqrt{1}$

$4 = x^2 + y^2 - 2y$

$4 = x^2 + (y-1)^2 - 1 \quad |+1$

$5 = x^2 + (y-1)^2 \rightarrow$ Kreis Position $(0,1)$ + Radius $\sqrt{5}$

b) $w = 3u + 6v$ für $w = \{-4, 0, 4\}$

$-4 = 3u + 6v \quad | +4 - 6v$

$-6v = 3u + 4 \quad | :6$

$-v = \frac{3u+4}{6} \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{v = -\frac{3u+4}{6}}}$

$0 = 3u + 6v \quad | -6v$

$-6v = 3u \quad | : -6$

$\underline{\underline{v = -\frac{3u}{6}}}$

$4 = 3u + 6v \quad | -4 - 6v$

$-6v = 3u - 4 \quad | : -6$

$\underline{\underline{v = -\frac{3u-4}{6}}}$

c) $z = \sqrt{y - x^2}$ für $z = \{0, 1, \sqrt{2}\}$

$0 = \sqrt{y - x^2}$

$0 = y - x^2$

$\underline{\underline{y = x^2}}$

$1 = \sqrt{y - x^2}$

$1 = y - x^2$

$\underline{\underline{y = x^2 + 1}}$

$\sqrt{2} = \sqrt{y - x^2}$

$2 = y - x^2$

$\underline{\underline{y = x^2 + 2}}$

<u>Partielle Ableitungen</u>

a) $w(u,v) = \ln\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$

$w'(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2u$

$\underline{\underline{w'(u) = \frac{u}{u^2 + v^2}}}$

$w'(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2v$

$\underline{\underline{w'(v) = \frac{v}{u^2 + v^2}}}$

b) $z(r, \varphi) = 3r \cdot e^{r \cdot \varphi}$

$\underline{\underline{z'(r) = 3 \cdot e^{r\varphi} + 3r \cdot e^{r\varphi} \cdot \varphi}}$

$\underline{\underline{z'(\varphi) = 3r^2 \cdot e^{r \cdot \varphi}}}$

c) $f(x,y) = k \cdot x^y$

$\underline{\underline{f'(x) = k \cdot y \cdot x^{y-1}}}$ | $\underline{\underline{f'(y) = k \cdot x^y \cdot \ln(y)}}$

MDA 20.3.25

a) $r(x,y,z) = r + \frac{dr}{dx}(x_P, y_P, z_P) \cdot (x - x_0) + \frac{dr}{dy}(P) \cdot (y - y_0) + \frac{dr}{dz}(P) \cdot (z - z_0)$

$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$r(x,y,z) = \sqrt{5} + \frac{x-1}{\sqrt{5}} + \frac{2\cancel{y}-4}{\sqrt{5}} +$

$f(x,y) = \sin(\pi \cdot x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot y)$ $\qquad P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

$f_x = \pi \cdot \cos(\pi \cdot x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot y) -$

$f_y = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin(\pi \cdot x) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot y)$

$f(x,y) = 0{,}0137 + 3{,}14100 \cdot (x - \frac{1}{4})$

b) $x^2 + xy + y^2 = 4$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4$

$f_x = 2x + y$

$f_y = 2y + x$

$y' = -\frac{f_y}{f_x} = \frac{-2x - y}{2y + x}$

nach y auflösen und hier einsetzen

MDA

$f(x,y) = x^2 - 3xy + xy^3 + 1$

$f_x = 2x - 3y + y^3 \overset{?}{=} 0$

$f_y = x^2 - 3x + 3y^2 x \overset{?}{=} 0$

$3x(-1 + y^2) = 0$

$x = 0 \quad || \quad y^2 - 1 = 0$

b) $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$

$f_x = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + y^2) \cdot e^{-x} \rightarrow 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + 0^2) \cdot e^{-x} = 0$

$(2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0$

$x = 0 \ ; \ x = 2$

$f_y = 2y \cdot e^{-x}$

$y = 0$

$f_{xx} = 2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$
$= e^{-x} \cdot (2 - 2x - 2x + x^2 + y^2)$
$= e^{-x} \cdot (2 - 4x + x^2 + y^2)$

$f_{xy} = -2y \cdot e^{-x}$

$f_{yy} = 2e^{-x}$

$$H = \begin{pmatrix} e^{-x} \cdot (2 - 4x + x^2 + y^2) & ; -2y \cdot e^{-x} \\ -2y \cdot e^{-x} & ; 2e^{-x} \end{pmatrix} \xrightarrow{(0,0)} \begin{pmatrix} 2 & ; 0 \\ 0 & ; 2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow (2,0)$

$$\begin{pmatrix} (-2)e^{-2} & ; 0 \\ 0 & ; 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx} > 0$
$D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 > 0$ Minimum
$D = (-2)e^{-2} \cdot 2e^{-2} - 0 \cdot 0 < 0$ Sattelpunkt

Extremwerte mit Nebenbedingungen

$z = x + y$

$x^2 + y^2 = 1$

$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(1 - x^2 - y^2)$

$L_x = 1 - 2x \cdot \lambda \qquad \lambda = -\frac{1}{2x}$

$L_y = 1 - 2y \cdot \lambda \qquad \lambda = -\frac{1}{2y}$

$L_\lambda = 1 - x^2 - y^2$

$-\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y}$