SBL - Notizen aus Mathematik 3: Einführung in die Integralrechnung

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben des Aufgabenpools zu bearbeiten.

Die wichtigsten Integrationsregeln im Überblick

Integrationsregeln

für $\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$$\begin{array}{c|c}
f(x) = 1 & F(x) = x \\
f(x) = x^n & F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\
f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} & F(x) = ln(|x|) \\
f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
\hline
f(x) = sin(x) & F(x) = -cos(x) \\
f(x) = cos(x) & F(x) = sin(x) \\
\hline
f(x) = exp(x) = e^x & F(x) = exp(x) = e^x \\
f(x) = ln(x) & F(x) = x \cdot ln(x) - x \\
f(x) = log_b(x) & F(x) = \frac{1}{ln(b)}(x \cdot ln(x) - x) \\
f(x) = a^x & F(x) = \frac{1}{ln(a)}a^x
\end{array}$$

Seite 92 - Beispiel

Beispiel I

Beispiel: $f(x) = x^4$

Lösung:

Stammfunktion:

$F(x) = \frac{x^5}{5} + c$

Als unbestimmtes Integral dargestellt:

$\int f(x)\ dx = \frac{x^5}{5} + c$

Beispiel II

Beispiel: $g(x) = \sqrt[3]{x^5}$

Lösung:

Stammfunktion:

$G(x) = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = \frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8} + c$

Als unbestimmtes Integral dargestellt:

$\int g(x)\ dx = \frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8} + c$

Beispiel III

Beispiel: $h(x) = \frac{1}{x^4}$

Lösung:

Stammfunktion:

$H(x) = -\frac{x^{-3}}{3} = -\frac{1}{3x^3} + c$

Als unbestimmtes Integral dargestellt:

$\int h(x)\ dx = -\frac{1}{3x^3} + c$

Beispiel IV

Beispiel: $p(x) = \frac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 6x + 12$

Lösung:

Stammfunktion:

$$P(x) = \frac{2 \cdot x^4}{5 \cdot 4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 12x + c = \frac{x^4}{10} + x^3 - 3x^2 + 12x + c$$

Als unbestimmtes Integral dargestellt:

$$\int p(x)\, dx = \frac{x^4}{10} + x^3 - 3x^2 + 12x + c$$

Seite 94 - Bestimme die unbestimmten Integrale

Beispiel I

Beispiel: $\int x \cdot e^x dx$

Lösung:

$$\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x = x \cdot e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

Beispiel II

Beispiel: $\int ln(x) dx$

Lösung:

Hinweis: Schreibe $ln(x)$ als $ln(x) \cdot 1$

$$\int ln(x)\, dx = \int (ln(x) \cdot 1) dx = ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x = x \cdot ln(x) - x + c$$

Beispiel III

Beispiel: $\int sin^2(x)dx$

Hinweis: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, woraus folgt, dass $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$.

Lösung:

$\int sin^2(x)\ dx = \int sin(x) \cdot sin(x)dx = sin(x) \cdot -cos(x) - \int cos(x) \cdot -cos(x)\ dx$

$sin(x) \cdot -cos(x) + \int cos^2(x)dx = sin(x) \cdot -cos(x) + \int 1 - sin^2(x)\ dx$

$sin(x) \cdot -cos(x) + x - \int sin^2(x)\ dx$

Daraus folgt:

$2 \int sin^2(x)\ dx = sin(x) \cdot -cos(x) + x + c$

$\int sin^2(x)\ dx = \frac{x - sin(x) \cdot cos(x)}{2} + c$

Seite 95 - Bestimme die Integrale

Beispiel I

Beispiel: $\int \sqrt{x+1}\,dx$

Lösung:

Schritt 1: Zu substituierenden Term bestimmen

$\int \sqrt{x+1}\,dx$

$\int \sqrt{u}\,dx$

$u = x+1$

Schritt 2: Integrationsvariable ersetzen & nach dx auflösen

$\frac{du}{dx} = 1$

$dx = 1\,du$

Schritt 3: Subsitution & Integration

$\int \sqrt{u} \cdot 1 \cdot du = \int \sqrt{u}\,du$

$\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

Schritt 4: Rücksubstitution

$u = x+1$

$\int \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$

Beispiel II

Beispiel: $\int sin^2(x) \cdot cos(x)\ dx$

Lösung:

Schritt 1: Zu substituierenden Term bestimmen

$\int sin^2(x) \cdot cos(x)\ dx$

$\int u^2 \cdot cos(x)\ dx$

$u = sin(x)$

Schritt 2: Integrationsvariable ersetzen & nach dx auflöse

$\frac{du}{dx} = cos(x)$

$dx = \frac{1}{cos(x)}\ du$

Schritt 3: Subsitution & Integration

$\int u^2 \cdot cos(x) \frac{1}{cos(x)} du = \int u^2\ du$

$\int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + c$

Schritt 4: Rücksubstitution

$u = sin(x)$

$\int sin^2(x) \cdot cos(x)\ dx = \frac{sin^3(x)}{3} + c$

Beispiel III

Beispiel: $\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx$

Lösung:

Schritt 1: Zu substituierenden Term bestimmen

$\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx$

$\int_2^3 \frac{1}{u}\ dx$

$u = 3x - 5$

Schritt 2: Integrationsvariable ersetzen & nach dx auflösen

$\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{1}{3}\ du$

Schritt 3: Subsitution & Integration

Hinweis: Die Integrationsgrenzen müssen hier ebenso angepasst werden mittels Einsetzen der Genzen in $3x - 5$, also für $x = 2$ folgt $3 \cdot 2 - 5 = 1$ und für $x = 3$ folgt $3 \cdot 3 - 5 = 4$.

$\int_1^4 \frac{1}{u} \frac{1}{3}\ du =$

$\frac{1}{3} \int_1^4 \frac{1}{u}\ du = [\frac{ln(|u|)}{3}]_1^4 = \frac{ln(4)}{3} - \frac{ln(1)}{3} \approx 0.46$

Schritt 4: ***Alternative -*** Rücksubstitution und Berechnung mit originalen Grenzen 2 & 3

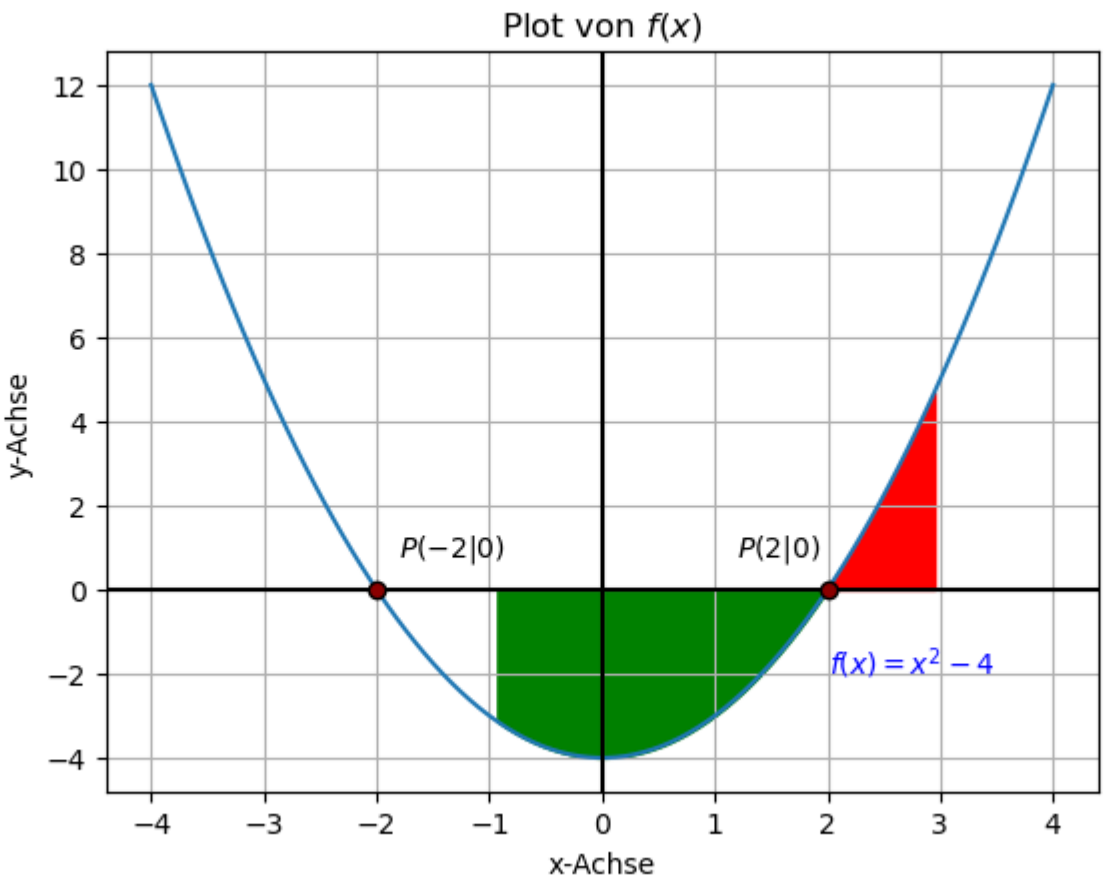
$u = 3x - 5$

$\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx = [\frac{ln(|3x-5|)}{3}]_2^3 = \frac{ln(|3 \cdot 3-5|)}{3} - \frac{ln(|3 \cdot 2-5|)}{3} \approx 0.46$

Seite 98 - Beispiel

Beispiel: Berechnen Sie den Flächeninhalt im Interval $[-1; 3]$ zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

Graph:



Lösung:

Schritt 1: Nullstellen berechnen

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{1,2} = \pm 2$$

Schritt 2: Stammfunktion bestimmen

$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + c$

Schritt 3: Flächen der Teilstücke bestimmen (rote & grüne Flächen im Graph, vgl. Teilintervallgrenzen $[-1; 2]$ & $[2; 3]$)

$A_{gruen} = A_1 = |[\frac{x^3}{3} - 4x]_{-1}^{2}| = |F(2) - F(-1)| = 9$

$A_{rot} = A_2 = [\frac{x^3}{3} - 4x]_2^3 = |F(3) - F(2)| = \frac{7}{3}$

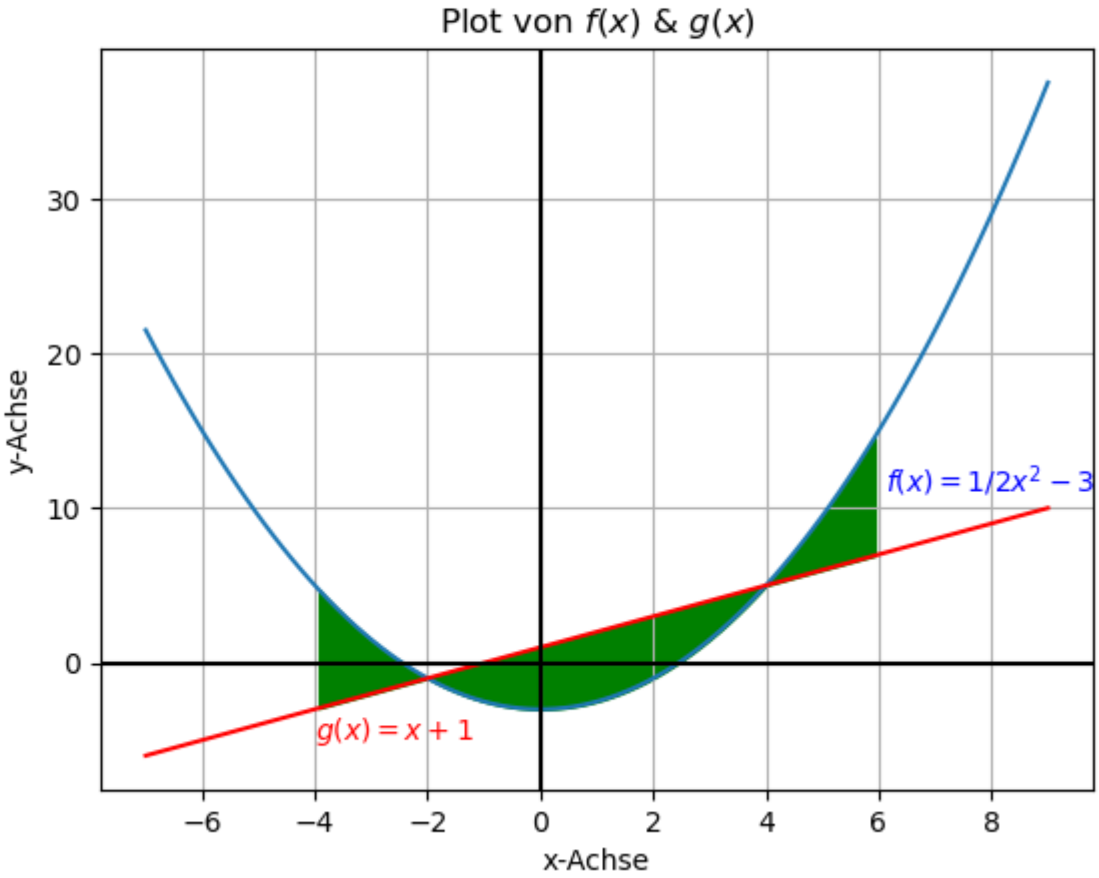
Schritt 4: Flächen aufsummieren

$A_{gesamt} = A_1 + A_2 = 11 + \frac{1}{3} \approx 11.3$

Seite 100 - Beispiel

Beispiel: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ und $g(x) = x + 1$ im Intervall $[-4; 6]$

Graph:

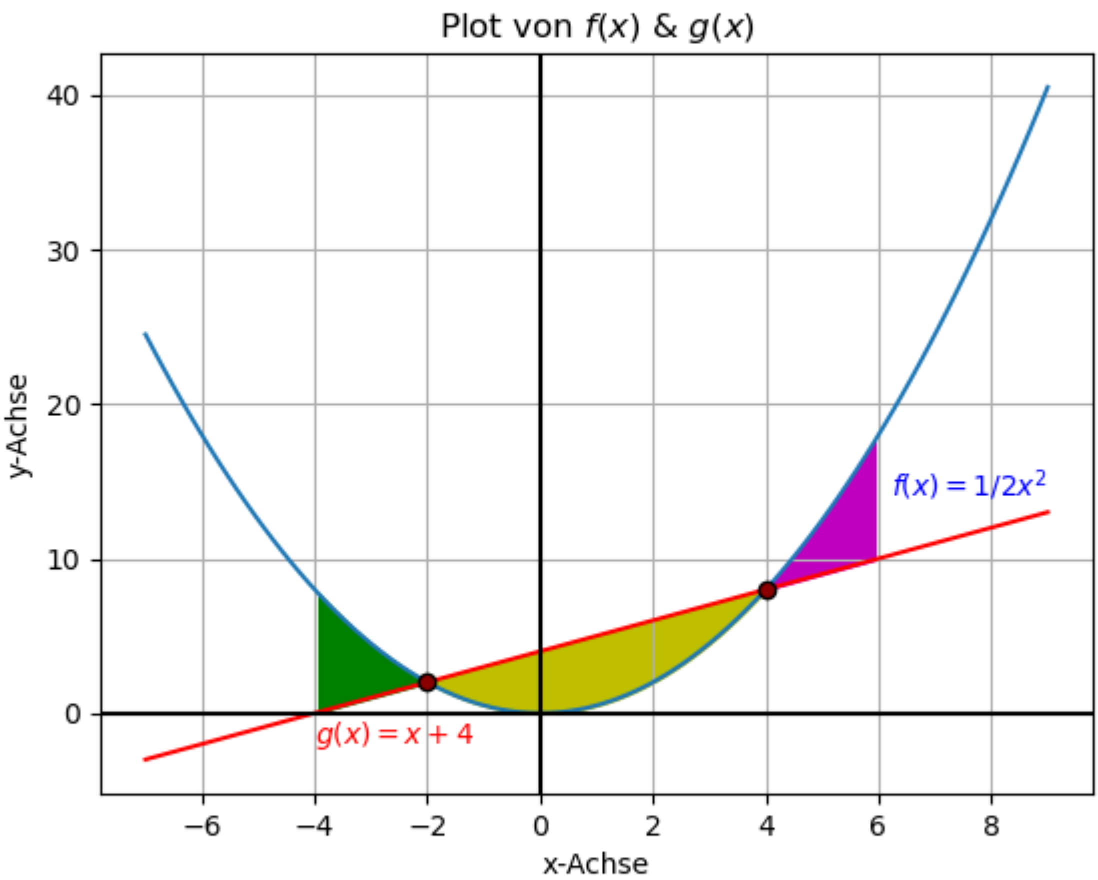


Hinweis: Obgleich mit der Berechnungsmethode im Beispiel unten nicht zwingend erforderlich, kann es manchmal hilfreich sein, die Graphen in den positiven Bereich der x-Achse zu verschieben. Bei der Verschiebung ist es wichtig, dass sich die Flächen nicht ändern (*hier*: beide Graphen müssen gleich verschoben werden).

Beispielhafte Verschiebung:
Zuerst verschieben wir den Graphen um drei Einheiten nach oben und die zu berechnende Fläche somit in den positiven Bereich der x-Achse.

Wir erhalten:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = x + 4$.



Plot von $f(x)$ & $g(x)$
40
30
20
10
0
y-Achse
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
x-Achse
$f(x) = 1/2x^2$
$g(x) = x + 4$

Lösung:

Schritt 1: Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmen

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{1}{2}x^2 = x + 4$$
$$0 = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$
$$0 = x^2 - 2x - 8$$
$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} + 8}$$
$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{9}$$
$$x_{1,2} = 1 \pm 3$$
$$x_{1,2} = \{-2, 4\}$$

Schritt 2: Differenz der beiden Funktion bestimmen

$$f(x) - g(x)$$
$$\frac{1}{2}x^2 - (x + 4) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

Schritt 3: Integral bestimmen, Teilflächen berechnen (grüne, gelbe & magenta Flächen im Graph, vgl. Teilintervallgrenzen $[-4; -2]$, $[-2; 4]$ & $[4, 6]$)

$\int \frac{1}{2}x^2 - x - 4\ dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - 4x + c = \frac{x^3-3x^2-24x}{6} + c$, folgend als $F(x) + c$.

$A_{gruen} = A_1 = [F(x)]_{-4}^{-2} = |[\frac{x^3-3x^2-24x}{6}]_{-4}^{-2}| = |F(-2) - F(-4)| = \frac{22}{3}$

$A_{gelb} = A_2 = [F(x)]^4{}_{-2} = |[\frac{x^3-3x^2-24x}{6}]^4{}_{-2}| = |F(4) - F(-2)| = 18$

$A_{magenta} = A_3 = [F(x)]_4^6 = |[\frac{x^3-3x^2-24x}{6}]_4^6| = |F(4) - F(6)| = \frac{22}{3}$

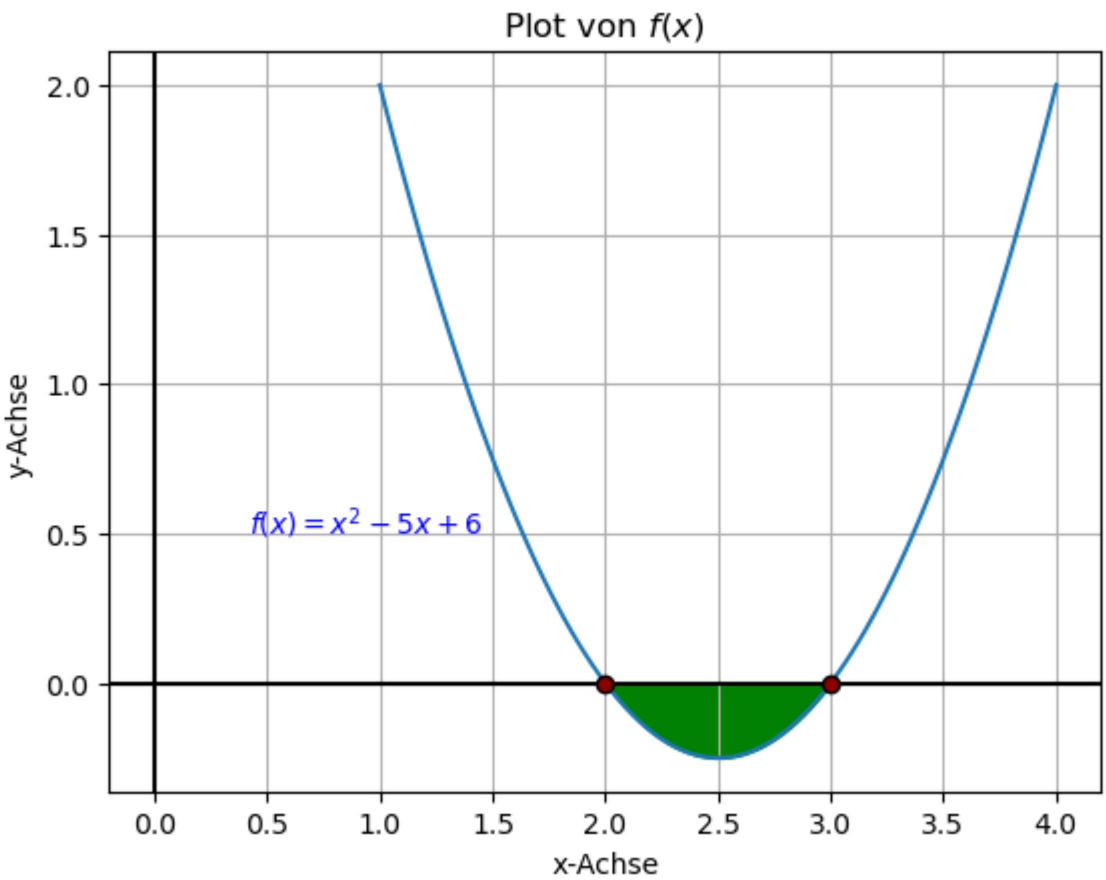
Schritt 4: Flächen aufsummieren

$A_{gesamt} = A_1 + A_2 + A_3 = 18 + \frac{44}{3} = \frac{98}{3} \approx 32.7$

Seite 102 - Beispiel

Beispiel: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ und der x-Achse begrenzt wird.

Graph:



Schritt 1: Nullstellen berechnen

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$0 = x^2 - 5x + 6$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_{1,2} = \{2, 3\}$$

Schritt 2: Stammfunktion bestimmen

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + c = \frac{2x^3 - 15x^2 + 36x}{6} + c$

Schritt 3: Flächen der Teilstücke bestimmen (hier nur grüne Fläche, vgl. Intervallgrenze $[2; 3]$)

$A_{gruen} = A_1 = |[\frac{2x^3 - 15x^2 + 36x}{6}]_2^3| = |F(3) - F(2)| = \frac{1}{6}$

Schritt 4: Flächen aufsummieren / angeben

$A_{gesamt} = A_1 = \frac{1}{6}$

Seite 103 - Übungsaufgaben

A1: die Stammfunktion zu $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$. (Probe durch Ableiten!)

Lösung: $\int 4x^3 + 2x - 1\ dx = F(x) = x^4 + x^2 - x + c$

Probe durch Ableitung:

$F(x)' = 4x^3 + 2x - 1$

A2: die Stammfunktion zu $f(x) = \frac{2-x-x^2}{\sqrt{x}}$.

Lösung: $F(x) = -\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\sqrt{x} + c = -\frac{2\sqrt{x}(3x^2+5x-30)}{15} + c$

A3: das bestimmte Integral $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}\ dx$.

Lösung: $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}\ dx = \int_1^3 x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}}\ dx = [2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}]_1^3 = -3^{\frac{4}{3}} + 2\sqrt{3} + 1 \approx 0.1376$

A4: das unbestimmte Integral $\int x^2 \cdot sin(x)\ dx$.

Lösung: $\int x^2 \cdot sin(x)\ dx = 2x \cdot sin(x) - x^2 cos(x) + 2 \cdot cos(x) + c$

A5: das unbestimmte Integral $\int e^x \cdot sin(x)\ dx$.

Lösung: $\int e^x \cdot sin(x)\ dx = \frac{1}{2} e^x (sin(x) - cos(x)) + c$

A6: das unbestimmte Integral $\int (5x-3)^7\ dx$.

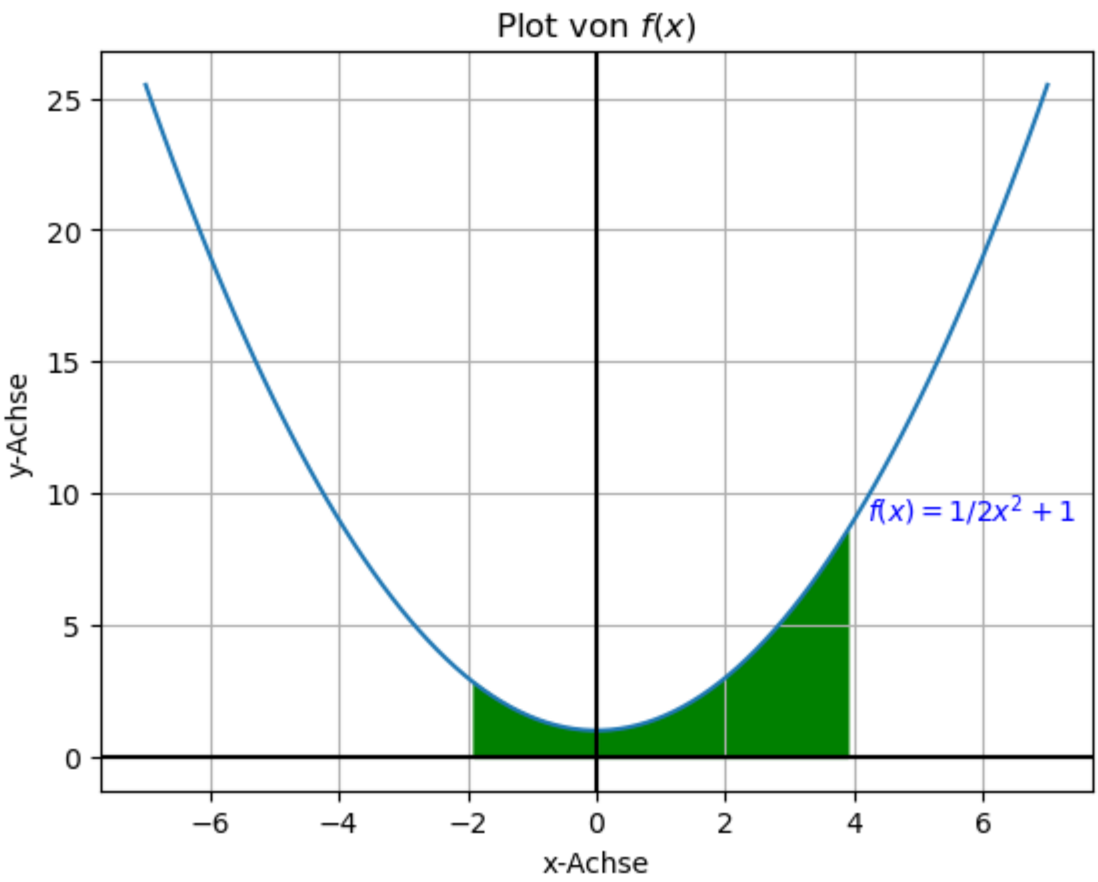
Lösung: $\int (5x-3)^7\ dx = \frac{(5x-3)^8}{40} + c$

A7: das unbestimmte Integral $\int sin(3x)\ dx$.

Lösung: $\int sin(3x)\ dx = -\frac{1}{3} cos(x) + c$

A8: Berechne den Flächeninhalt der von der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall $[-2; 4]$ eingeschlossen wird.

Graph:

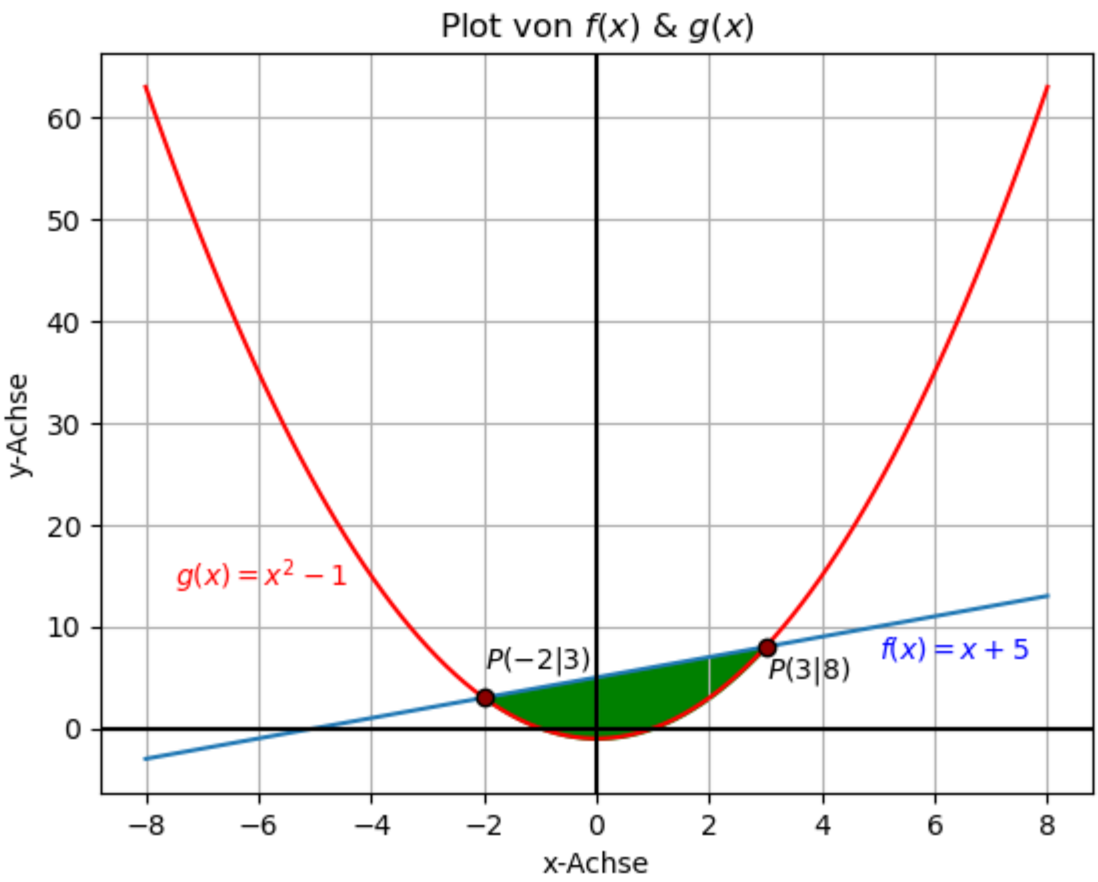


Lösung:

$\int_{-2}^{4} \frac{1}{2}x^2 + 1 \; dx = |[\frac{x^3}{6} + x]_{-2}^{4}| = 18$

A9: Berechne den Flächeninhalt der von den Funktion $f(x) = x + 5$ und $g(x) = x^2 - 1$ und dem Intervall $[-2; 3]$ begrenzt wird.

Graph:



Lösung:

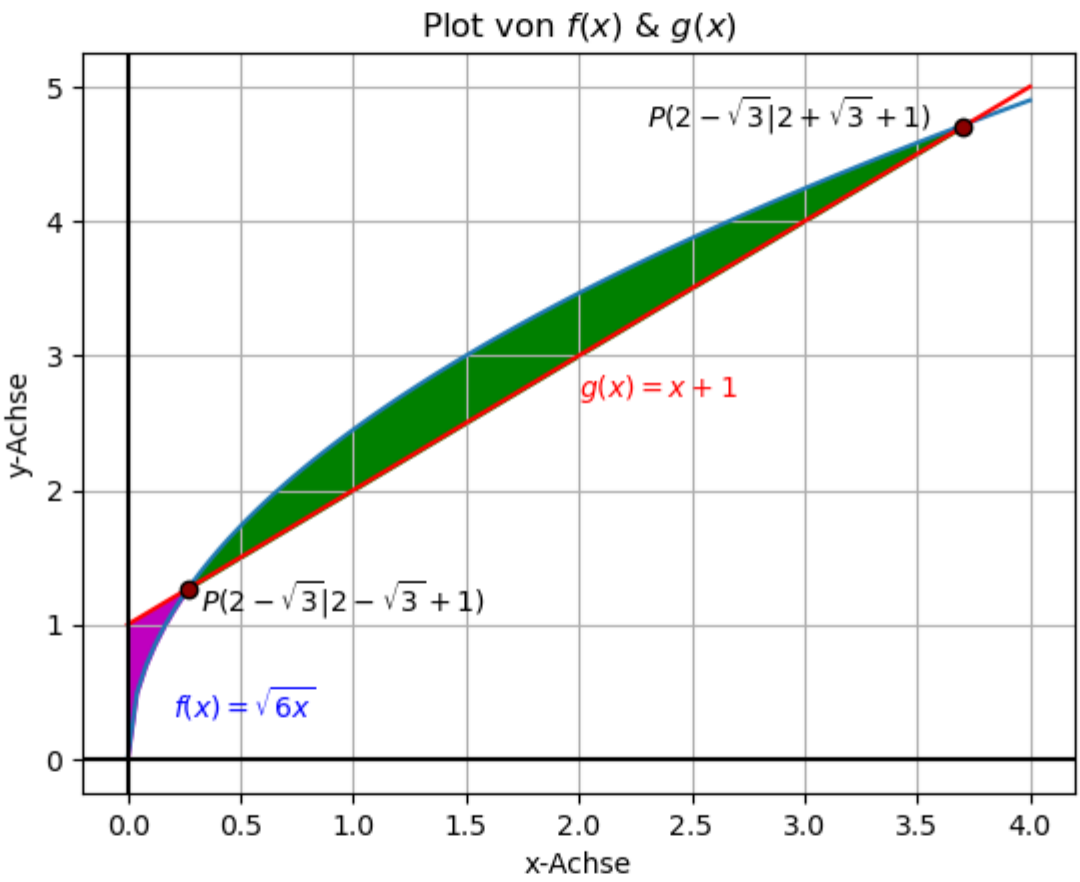
Bevor der Flächenbestimmung: prüfe, wo die Schnittstellen der Funktionen liegen (z.B. über Gleichstellen von $f(x) = g(x)$, Schnittpunkte liegen dann bei $x_{1,2} = \{-2; 3\}$). Diese liegen somit im gewünschten Integrationsintervall $[-2; 3]$.

$\int_{-2}^{3} g(x) - f(x)\ dx = \int_{-2}^{3} x^2 - 1 - x - 5\ dx$

$\int_{-2}^{3} x^2 - x - 6\ dx = |[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x]_{-2}^{3}| \approx 20.83$

A10: Berechne den Flächeninhalt der von den Funktion $f(x) = \sqrt{6x}$ und $g(x) = x + 1$ und eingeschlossen wird.

Graph:



Lösung:

Schnittpunkt von $f(x) = g(x)$:

$$\sqrt{6x} = x + 1$$
$$6x = x^2 + 2x + 1$$
$$0 = x^2 - 4x + 1$$
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Teilflächen & Gesamtfläche berechnen:

$A_{magenta} = \int_0^{2-\sqrt{3}} x + 1 - \sqrt{6x}\; dx = |[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}x^{\frac{2}{3}} + x]_0^{2-\sqrt{3}}| \approx 0.08$

$A_{gruen} = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} x + 1 - \sqrt{6x}\; dx = |[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}x^{\frac{2}{3}} + x]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}| \approx 1.15$

$A = A_{magenta} + A_{gruen} \approx 1.23$