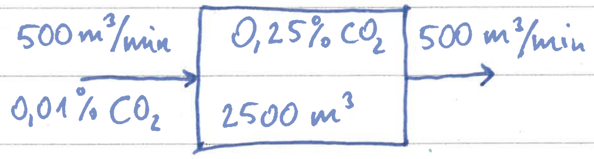
▷ Menge an CO_2 in einem Raum

1.)



$y(t)$ … Volumen an CO_2 in m^3 im Raum zum Zeitpunkt t in min.

Anfangswert: $\frac{y(0)}{2500} = \frac{0{,}25}{100} \Rightarrow y(0) = \frac{0{,}25}{100} \cdot 2500 = 6{,}25$

CO_2 Input in den Raum: $500 \frac{m^3}{min} \cdot \frac{0{,}01}{100} = 0{,}05 \frac{m^3}{min}$

CO_2 Output aus dem Raum: $500 \frac{m^3}{min} \cdot \frac{y(t)}{2500} = \frac{1}{5} y(t) = 0{,}2\, y(t)$

CO_2-Bilanz: $\dot{y}(t) = 0{,}05 - 0{,}2\, y(t)$, $y(0) = 6{,}25$

steady state mit $\dot{y}(t) = 0$: $y(t) = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$.

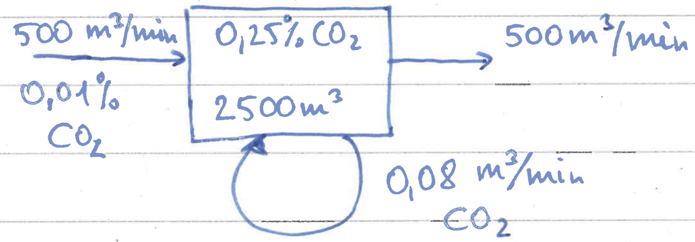
Lösung des Anfangswertproblems: $\dot{y} + 0{,}2y = 0{,}05$

siehe Formel: $y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$ für $\dot{y} + a y = b$

$$y(t) = (6{,}25 - 0{,}25)\, e^{-0{,}2t} + 0{,}25$$

$$\underline{y(t) = 6 \cdot e^{-0{,}2t} + 0{,}25.}$$

2.)



$$\dot{y}(t) = 0{,}05 - 0{,}2\, y(t) + 0{,}08 = 0{,}13 - 0{,}2\, y(t)$$

$$\dot{y}(t) + 0{,}2\, y(t) = 0{,}13.$$

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = b$$

$$y(t) = \left(6{,}25 - \frac{0{,}13}{0{,}2}\right) e^{-0{,}2t} + \frac{0{,}13}{0{,}2}$$

$$y(t) = (6{,}25 - 0{,}65)\, e^{-0{,}2t} + 0{,}65$$

$$\underline{y(t) = 5{,}6\, e^{-0{,}2t} + 0{,}65.}$$

Plots siehe Code.

▷ **RL Schaltung:** $L\dot{I} + RI = U$ mit $U = 5V, R = 50\,\Omega, L = 1H$ und $I(0) = 0$.

$$1 \cdot \dot{I} + 50 \cdot I = 5$$

vgl. $\dot{y} + a \cdot y = b$ hat die Lsg. $y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$

d.h. $I(t) = \left(0 - \frac{5}{50}\right)e^{-50t} + \frac{5}{50}$

$\underline{I(t) = -0{,}1e^{-50t} + 0{,}1.}$ Plot siehe Code

▷ **Lineare DGL 1. Ordg. mit variablen Koeffizienten 1**

$$\dot{y}(t) + t \cdot y(t) = 4t$$

vgl. $\dot{y}(t) + f(t) \cdot y(t) = g(t)$

$$\int f(t)\,dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}, \quad e^{\int f(t)dt} = e^{t^2/2}, \quad e^{-\int f(t)dt} = e^{-t^2/2}$$

$$\int g(t) \cdot e^{\int f(t)dt}\,dt = \int 4t\,e^{t^2/2}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int 4e^u\,du = 4e^u = 4e^{t^2/2}$$

Subst. $u = t^2/2$, $du = t\,dt$

$$y(t) = \left[\int g(t) \cdot e^{\int f(t)dt}\,dt + C\right] e^{-\int f(t)dt} =$$

$$\underline{y(t)} = \left[4e^{t^2/2} + C\right]e^{-t^2/2} = \underline{4 + Ce^{-t^2/2}}$$

7) <u>Newtonsches Abkühlgesetz 1</u>

$$\dot{T}_p(t) = -k\left[T_p(t) - T_0(t)\right] \quad , k = 0{,}1 \ \tfrac{1}{min} \ , T_0(t) = 20 + 30t$$

$$T_p(0) = 4 \ °C$$

$$\Rightarrow \dot{T}_p(t) = -0{,}1\left[T_p(t) - (20+30t)\right]$$

$$\dot{T}_p(t) = -0{,}1\, T_p(t) + 2 + 3t$$

$$\dot{T}_p(t) + \underbrace{0{,}1}_{f(t)} \cdot T_p(t) = \underbrace{2+3t}_{g(t)} \qquad \int f(t)\,dt = \int 0{,}1\,dt = 0{,}1t$$

$$\int g(t)\, e^{\int f(t)dt} dt = \int (2+3t)\, e^{0{,}1t} dt = \int 2e^{0{,}1t} dt + 3\int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^{0{,}1t}}_{v'} dt$$

$$= 2e^{0{,}1t} \cdot \frac{1}{0{,}1} + 3\left[\underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^{0{,}1t} \cdot \frac{1}{0{,}1}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{0{,}1t}\frac{1}{0{,}1}}_{v} dt\right] =$$

$$= 20e^{0{,}1t} + 30t\,e^{0{,}1t} - 30\,e^{0{,}1t} \cdot \frac{1}{0{,}1} =$$

$$= 30t\,e^{0{,}1t} - 280\,e^{0{,}1t}.$$

$$T_p(t) = \left[\int g(t)\, e^{\int f(t)dt} dt + C\right] e^{-\int f(t)dt} =$$

$$= \left[30t\,e^{0{,}1t} - 280\,e^{0{,}1t} + C\right] e^{-0{,}1t} =$$

$$= 30t - 280 + C \cdot e^{-0{,}1t}.$$

$$T_p(0) = 4 = 30 \cdot 0 - 280 + C \cdot 1$$

$$4 = -280 + C$$

$$C = 284.$$

$$\underline{T_p(t) = 30t - 280 + 284 \cdot e^{-0{,}1t}.} \qquad \text{Plot siehe Code.}$$

▷ Mischung

$y(t)$ ... Menge Salz in kg im Tank zum Zeitpunkt t

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{4} \cdot 12 - \frac{y(t)}{200} \cdot 12$$

$$\dot{y}(t) = 3 - 0{,}06 \cdot y(t)$$

$$\dot{y} + \underbrace{0{,}06}_{a} \cdot y = \underbrace{3}_{b}$$

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$y(t) = \left(0 - \frac{3}{0{,}06}\right) e^{-0{,}06t} + \frac{3}{0{,}06}$$

$$y(t) = 50\, e^{-0{,}06t} + 50 = 50\left(1 - e^{-0{,}06t}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 50.$$

Skizze siehe Code.

▷ Aufladen eines Kondensators

$$RC\, \dot{u}_c(t) + u_c(t) = u(t)$$

mit $u(t) = u_0$ konstant und $u_c(0) = 0$.

$$RC\, \dot{u}_c + u_c = u_0 \quad | : (RC)$$

$$\dot{u}_c + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{a} u_c = \underbrace{\frac{u_0}{RC}}_{b}$$

$$u_c(t) = \left(u_c(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$u_c(t) = \left(0 - \frac{u_0/RC}{1/RC}\right) e^{-t/RC} + \frac{u_0/RC}{1/RC}$$

$$u_c(t) = -u_0 e^{-t/RC} + u_0$$

$$u_c(t) = u_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Skizze: