8. Übungsblatt SoSe 2025

Koordinatensysteme

1. Ein vom konstanten Strom I durchflossener linearer Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein ringförmiges Magnetfeld, das in einer Schnittebene senkrecht zur Leiterachse durch das ebene Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)}\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$$

beschrieben wird. Wie lautet die Darstellung von $\vec{\mathbf{H}}$ in Polarkoordinaten?

2. Stelle den Ortsvektor der Mantelfläche eines Zylinders (Radius $r=5$, Höhe $h=2$) im kartesischen Koordinatensystem dar.

3. Stellen Sie das Vektorfeld

$$x\vec{\mathbf{e}}_x - z\vec{\mathbf{e}}_y + y\vec{\mathbf{e}}_z$$

in Kugelkoordinaten dar.

4. Die Bahnkurve eines Masseteilchens besitzt den folgenden Ortsvektor $\vec{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\cos(t)\\ \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\\ 2t\end{bmatrix}$. Wie lautet der zugehörige Geschwindigkeitsvektor dargestellt im Zylinderkoordinatensystem?

Polarkoordinaten

Polarkoordinaten $\rightarrow$ Kartesische Koordinaten: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$
Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten $\rightarrow$ Kartesische Koordinaten: $x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$
Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Kugelkoordinaten: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arccos(\frac{z}{r}), \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Gradient	$\mathrm{grad}\phi = \begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}$	$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$	$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$	$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
Divergenz	$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$	$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot F_r) + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot F_\theta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right]$
Rotation	$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix}$	$[\mathrm{rot}\vec{F}]_z = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\varphi) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}$	$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$	$\mathrm{rot}\vec{F} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$
dV (dA)	$dV = dxdydz$	$dA = rdrd\varphi$	$dV = rdrd\varphi dz$	$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

Lösungen

1. $\vec{\mathbf{H}}_{\text{polar}} = \frac{I}{2\pi r}\vec{\mathbf{e}}_\varphi$
2. $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{KK}} = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin\varphi \\ \beta \end{pmatrix}$, mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \beta \leq 2$.
3. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{sphärisch}} = \begin{pmatrix} r\sin^2\theta\cos^2\varphi \\ r\left(\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta - \sin\varphi\right) \\ -r\cos\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\right) \end{pmatrix}$
4. $\vec{\mathbf{v}}_{ZK} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2 \end{pmatrix}$

In [ ]: