▷ Winkel

1.) $a = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \; \cos(\varphi) = \dfrac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$

$$a \cdot b = 10 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) + 10 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 30 + 5 - 5 = 30$$

$$\|a\| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$\|b\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 0{,}25} = \sqrt{10{,}25} \cong 3{,}202$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{30}{15 \cdot \sqrt{10{,}25}} = \frac{2}{\sqrt{10{,}25}} \cong 0{,}625$$

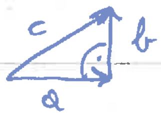
$$\varphi = \arccos(0{,}624\ldots) \cong 0{,}896 \text{ rad} \cong \underline{\underline{51{,}34°}}$$

2.) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass a, b und c ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Welche Vektoren sind Katheten, und welcher Vektor ist die Hypothenuse?

$a \cdot b = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = -2 + 8 - 6 = 0 \iff a \perp b$.

Also sind a und b die Katheten.

$a + b = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4+2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = c \iff$



Der Vektor c ist die Hypothenuse.

▷ Orthonormiertes System

$$a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$a \cdot b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0. \Leftrightarrow a \perp b.$$

$$a \cdot c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow a \perp c.$$

$$b \cdot c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow b \perp c.$$

$$\|a\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|c\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

▷ Lineare Abhängigkeit

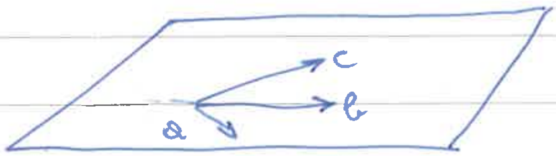
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \\ -(1 \cdot 3 - 5 \cdot (-1)) \\ 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 16 \cdot 5 + (-8) \cdot 10 + 0 \cdot 10 =$$

$$= 80 - 80 + 0 = 0.$$

D.h. $[a, b, c] = 0$. Die drei Vektoren a, b und c spannen also kein Volumen auf, d.h. sie liegen in einer Ebene, d.h. sie sind linear abhängig.



▷ Volumen: $a=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}$

Volumen $V=\left|[a,b,c]\right|$, $[a,b,c]=(a\times b)\cdot c$

$$a\times b=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 7-(-1)\cdot 4\\-((-1)\cdot 7-(-1)\cdot 3)\\(-1)\cdot 4-1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\4\\-7\end{pmatrix}$$

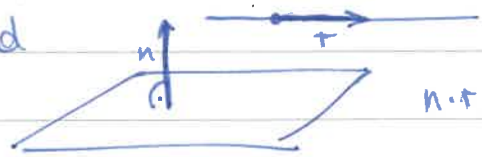
$$(a\times b)\cdot c=\begin{pmatrix}11\\4\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}=11\cdot 1+4\cdot 2+(-7)\cdot(-8)=$$
$$=11+8+56=75$$

Somit ist $V=|75|=\underline{\underline{75}}$.

▷ Gerade und Ebene: Ebene enthält $P=(2,1,8)$ und hat den Normalvektor $n=\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}$.

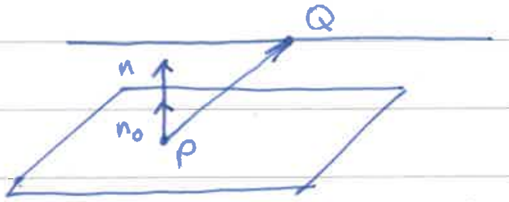
1.) Zeige, dass die Gerade $g: X=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ zur Ebene parallel ist. Wir zeigen, dass der Richtungsvektor $r=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ der Geraden normal (= rechtwinklig, = orthogonal) zum Normalvektor n der Ebene ist.

Bild



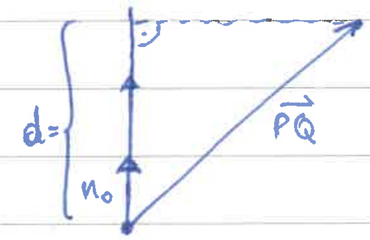
$$n\cdot r=\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}=2\cdot 4+(-6)\cdot 1+1\cdot(-2)$$
$$=8-6-2=0. \checkmark$$

2.) Wie groß ist der Abstand zw. Gerade und Ebene?



$Q=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ ein Punkt der Ebene

n_0 hat Länge 1.



$$\pm d=n_0\cdot\vec{PQ}=\frac{1}{\|n\|}\cdot n\cdot\vec{PQ}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+1^2}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5-2\\3-1\\1-8\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{41}}\left(2\cdot 3+(-6)\cdot 2+1\cdot(-7)\right)=-\frac{13}{\sqrt{41}}.$$

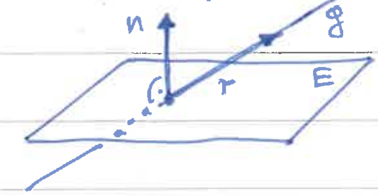
$$d=\left|-\frac{13}{\sqrt{41}}\right|=\frac{13}{\sqrt{41}}\approx\underline{\underline{2{,}03}}.$$

D) Gerade und Ebene

$$g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad 2x + y + z = 1$$

1.) Zeige, ohne den Schnittpkt. zu berechnen, dass sich g und E schneiden.



$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wenn der Normalvektor der Ebene und Richtungsvektor der Geraden nicht rechtwinklig sind, dann schneiden sich Gerade und Ebene.

$$n \cdot r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 2 + 2 - 3 = 1 \neq 0.$$

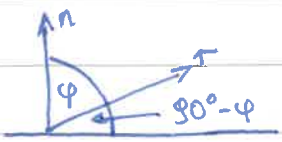
2.) Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 2+2\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix}$$ in E einsetzen ergibt

$$2(3+\lambda) + (2+2\lambda) + (-3\lambda) = 1$$
$$6 + 2\lambda + 2 + 2\lambda - 3\lambda = 1$$
$$\lambda + 8 = 1$$
$$\lambda = 1 - 8 = -7.$$

Schnittpkt. $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(-7) \cdot 1 \\ 2+(-7) \cdot 2 \\ 0+(-7) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix}.$

Schnittwinkel: $\cos(\varphi) = \dfrac{n \cdot r}{\|n\| \cdot \|r\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} =$



$$= \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} \approx \cancel{1,4645}\ 0,1091$$

$$\varphi \approx 83,74°$$

Schnittwinkel $= 90° - \varphi \approx \underline{\underline{6,26°}}.$