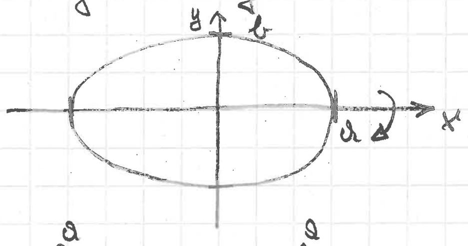
▷ Rotationsvolumen

Ellipsengleichung : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$



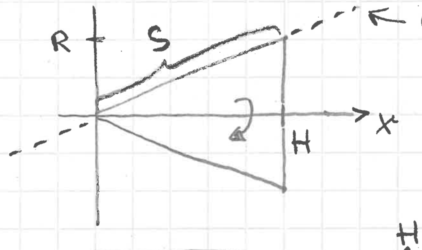
$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \int_{0}^{a} 1 - \frac{x^2}{a^2}\,dx =$$

$$= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]\Big|_0^a = 2\pi b^2 \left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] =$$

$$= 2\pi b^2 \left[a - \frac{a}{3}\right] = \underline{\underline{\frac{4\pi a b^2}{3}}}.$$

Vergleiche das Volumen der Kugel mit Radius r : $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

▷ Mantelfläche



← Gerade $f(x) = \frac{R}{H} x$

$f'(x) = \frac{R}{H}$

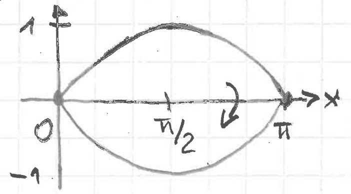
$$M = 2\pi \int_0^H f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_0^H \frac{R}{H} x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \frac{R}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} \int_0^H x\,dx = 2\pi \frac{R}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2}\, \frac{H^2}{2} =$$

$$= \pi R H \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2} = \underline{\pi R S}.$$

▷ Rotationsvolumen und Mantelfläche

$f(x) = \sin(x)$ rotiert um x-Achse zwischen $x=0$ und $x=\pi$



- Rotationsvolumen $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \, dx =$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}(\pi - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}.$$

- Mantelfläche (= Oberfläche in diesem Fall): $f'(x) = \cos(x)$

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \, dx = 2\pi \int_0^\pi \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)} \, dx$$

Substitution $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$, $x=0 \to u=1$, $x=\pi \to u=-1$

$$M = 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1+u^2} \, du = 2\pi \int_{-1}^1 \underbrace{\sqrt{1+u^2}}_{\text{gerade Fkt.}} \, du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2} \, du =$$

siehe Hinweis

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(u) + \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left[\underbrace{\operatorname{arsinh}(1)}_{\text{siehe Hinweis}} + \sqrt{2} - (\underbrace{\operatorname{arsinh}(0)}_{=0} + 0)\right] =$$

$$= 2\pi\left[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right] \cong \underline{\underline{14{,}4236.}}$$

D **Lineare DGL 1. Ordg. mit variablen Koeffizienten 4**

Zur Abwechslung verwenden wir die Methode der „Variation der Konstanten“ mit dem Ansatz $C(x)$, anstatt die Lösungsformel zu verwenden!

1.) Anfangswertproblem $y'(x) - y(x) = e^x$, $y(1) = 0$

a) Löse die homogene DGL $y' - y = 0$: $y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow$

(alternativ mit Lösungsformel für lin. Dgl. 1. Ordg. mit konst. K.)

$$\frac{1}{y}\,dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\ln(|y|) = x + K$$

$$|y| = e^{x+K}, \quad y(x) = \pm e^K \cdot e^x, \quad y(x) = 0 \text{ ist auch Lsg.}$$

d.h. $y_{hom}(x) = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{R}$

b) Zum Auffinden einer partikulären Lsg. verwenden wir den Ansatz $y_{part}(x) = C(x)\,e^x$. Einsetzen in die inhom. DGL:

$$y'_{part}(x) = C'e^x + Ce^x$$

$$C'e^x + Ce^x - Ce^x = e^x$$

$$C'e^x = e^x$$

$$C' = 1 \Rightarrow C(x) = x, \quad y_{part} = xe^x$$

c) allg. Lsg. der inhom. DGL: $y(x) = y_{hom}(x) + y_{part.}(x)$

$$y(x) = C \cdot e^x + xe^x.$$

Fixieren der Integrationskonstanten C durch $y(1) = 0$:

$$0 = C \cdot e^1 + 1 \cdot e^1 \Rightarrow 0 = Ce + e$$

$$Ce = -e \quad | : e$$

$$C = -1.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = -e^x + xe^x.$$

2.) $\underbrace{y' - \frac{2}{x}}_{f(x)} y = \underbrace{x^2 e^x}_{g(x)}$ $\qquad \int f(x)\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln(x)$

$-\int f(x)\,dx = \ldots \qquad = 2\ln(x)$

$$y(x) = \left[\int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\,dx + C\right] e^{-\int f(x)dx} =$$

$$= \left[\int x^2 e^x \underbrace{e^{-2\ln(x)}}_{(e^{-\ln(x)})^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}} dx + C\right] e^{2\ln(x)}\,dx =$$

$$= \left[\int e^x\,dx + C\right] x^2 = \underline{\underline{(e^x + C)x^2}}.$$

3.) $y'(x) + \underbrace{\tan(x)}_{f(x)} \cdot y = \underbrace{2x\cos(x)}_{g(x)}$, $y(0) = -1$

Subst. $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)\,dx$

$$\int f(x)dx = \int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(u) =$$

$= -\ln(\cos(x))$ ohne Betrag, da Lsg. bei $x=0$ gesucht und dort ist $\cos(x)$ positiv.

$$e^{\int f(x)dx} = e^{-\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}, \quad e^{-\int f(x)dx} = e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x).$$

$$y(x) = \left[\int 2x\cos(x)\frac{1}{\cos(x)}\,dx + C\right]\cos(x) =$$

$$= \left[\int 2x\,dx + C\right]\cos(x) = (x^2 + C)\cos(x).$$

$y(0) = -1$:

$-1 = (0^2 + C)\cdot\cos(0)$

$-1 = C \cdot 1$

$C = -1$

Lösung: $\underline{\underline{y(x) = (x^2-1)\cos(x).}}$

4.) $y' + \underbrace{\cot(x)}_{f(x)} y = \underbrace{5e^{\cos(x)}}_{g(x)}$

Subst. $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$

$$\int f(x)dx = \int \cot(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) = \ln(\sin(x))$$

Annahme: $u > 0$

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\ln(\sin(x))} = \sin(x).$$

$$e^{-\int f(x)dx} = e^{-\ln(\sin(x))} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

$$y(x) = \left[\int 5e^{\cos(x)}\sin(x)dx + C\right]\frac{1}{\sin(x)}$$

Subst. $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$

Nebenrechnung: $\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)dx =$

$$= -\int e^u du = -e^u = -e^{\cos(x)}$$

$$y(x) = \left(-5e^{\cos(x)} + C\right)\frac{1}{\sin(x)} =$$

$$\underline{\underline{y(x) = \left(C - 5e^{\cos(x)}\right)\frac{1}{\sin(x)}.}}$$

D $\underline{\text{Lin. DGL 1. Ordg. mit var. Koeff. 6}}$: $e^y y' = k(x + e^y) - 1$ ist nicht linear.

Trafo: $u = e^y$, $u' = e^y \cdot y'$ Einsetzen: $u' = k(x+u) - 1$

Lineare DGL $\underline{u' \underbrace{-ku}_{f(x)} = \underbrace{kx - 1}_{g(x)}}$. $\int f(x)dx = -kx$, $e^{\int f(x)dx} = e^{-kx}$

$e^{-\int f(x)dx} = e^{kx}$

$$u = \left[\int (kx - 1) \cdot e^{-kx}dx + C\right]e^{kx}$$

Nebenrechnung: $\int \underbrace{kx \cdot e^{-kx}}_{f \cdot g'} dx = kx \cdot \frac{e^{-kx}}{-k} - \int k \cdot \frac{e^{-kx}}{-k}dx =$

$$= -xe^{-kx} - \frac{1}{k}e^{-kx}.$$

$$u = \left[-xe^{-kx} - \frac{1}{k}e^{-kx} + \frac{1}{k}e^{-kx} + C\right]e^{kx} = -x + Ce^{kx}.$$

$\underline{\underline{y}} = \ln(u) = \underline{\underline{\ln(Ce^{-kx} - x)}}.$