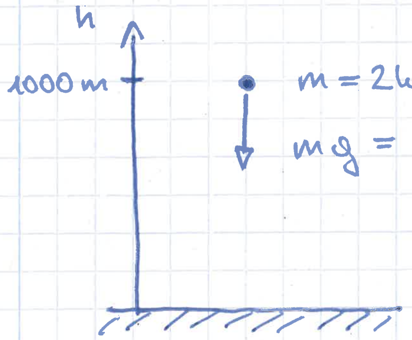
▷ Linearer Luftwiderstand 2



$m = 2\,kg$

$mg = 2 \cdot (-10) = -20$

$h(0) = 1000\,m$

$v(0) = \dot{h}(0) = -4\,m/s$

$g = -10\,m/s^2$

$v_\infty = -40\,m/s$

DGL: Newtons Bewegungsgleichung $\quad m\,a = F$

$$m\,\dot{v} = -k\,v + mg \quad , k > 0 \qquad | : m$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m} v + g$$

steady state v_∞ bei $\dot{v} = 0$:

$$0 = -\frac{k}{m} v_\infty + g$$

$$\frac{k}{m} v_\infty = g$$

$$\frac{k}{2}(-40) = -10$$

$$\underline{k = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{4}}$$

DGL: $\quad \dot{v} = -\frac{1}{4} v - 10$

$$\dot{v} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{=a} v = \underbrace{-10}_{=b}$$

für Vgl. $\dot{y} + a y = b$ aus der Vorlesung

$$v(t) = \left(v(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$\underline{v(t)} = (-4 + 40)\, e^{-t/4} - 40 = \underline{36 e^{-t/4} - 40}.$$

$$h(t) = \int v(t)\,dt = \int 36 e^{-t/4} - 40\,dt =$$

$$= 36 e^{-t/4} \cdot (-4) - 40t + C = -144 e^{-t/4} - 40t + C$$

$$h(0) = 1000 = -144 e^0 - 0 + C \;, \; C = 1144$$

$$\underline{h(t) = -144 e^{-t/4} - 40t + 1144.}$$

▷ Lineare DGL 1. Ordg. mit variablen Koeffizienten 2

Anfangswertproblem: $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} y = \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{g(x)}$ und $y(1) = 1$, $x > 0$ d.h. $|x| = x$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) = \ln(x) \text{ weil } |x| = x \text{ weil } x > 0.$$

$$-\int f(x)\,dx = -\ln(x)$$

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\ln(x)} = x, \quad e^{-\int f(x)dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx = \int \frac{\ln(x)}{x} \cdot x\, dx = \int \ln(x)\, dx =$$

$$= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\, dx = \underbrace{x \cdot \ln(x)}_{u \cdot v} \underbrace{- \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx}_{-\int u \cdot v'} = x \cdot \ln(x) - x$$

$$y(x) = \left[\int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx + C\right] e^{-\int f(x)dx} =$$

$$y(x) = \left[x \cdot \ln(x) - x + C\right] \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + \frac{C}{x}$$

Anfangsbedingung: $y(1) = \ln(1) - 1 + \frac{C}{1} \overset{!}{=} 1$

$$0 - 1 + C = 1$$

$$\underline{C = 2}$$

Lösung: $\underline{y(x) = \ln(x) - 1 + \frac{2}{x}}$.

▷ Newtonsches Abkühlgesetz 2: $T_u = 30°C$, $T(10) = 0°C$, $T(20) = 15°C$

$\dot{T} = -k\,[T - 30]$ mit $k > 0$.

$\underline{\dot{T} + kT = k \cdot 30}$ → Lsg. $T(t) = 30 + (T_0 - 30)\, e^{-kt}$

$$t = 10: \quad 0 = 30 + (T_0 - 30)\, e^{-k \cdot 10}$$

$$t = 20: \quad 15 = 30 + (T_0 - 30)\, e^{-k \cdot 20}$$

$$-30 = (T_0 - 30)\, e^{-10k}$$

$$-15 = (T_0 - 30)\, e^{-20k} \quad \Big] :$$

$$2 = e^{-10k + 20k} = e^{10k} \quad | \ln(\,)$$

$$\ln(2) = 10k, \quad k = \frac{\ln(2)}{10}$$

$$0 = 30 + (T_0 - 30)\, e^{-\frac{\ln(2)}{10} \cdot 10}$$

$$-30 = (T_0 - 30) \cdot \underbrace{e^{-\ln(2)}}_{1/2} \Rightarrow -60 = T_0 - 30 \Rightarrow \underline{T_0} = -60 + 30 = \underline{-30°C}.$$

▷ <u>Lineare DGL 2. Ordg. 1</u>: $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ und $y(0) = 2, \dot{y}(0) = -3$

Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0 \mid : e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$\underline{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2}.$$

Fundamentallösungen: $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^{-2t}$

Allg. Lsg.: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$$\underline{\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}}$$

Anfangsbedg.: $y(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 2$

$\underline{\dot{y}(0) = -c_1 - 2c_2 \overset{!}{=} -3}$]+

$-c_2 = -1$, d.h. $\underline{c_2 = 1}$

Einsetzen in $c_1 + c_2 = 2$ ergibt: $c_1 + 1 = 2$, $\underline{c_1 = 1}$

Partikuläre Lösung = Lsg. des Anfangswertproblems:

$$\underline{y(t) = e^{-t} + e^{-2t}}.$$

▷ <u>Lineare DGL 2. Ordg. 3</u>: $y_p(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$, DGL: $y'' - 2y' + y = e^{3x}$

Einsetzen von y_p und $y_p'(x) = \frac{3}{4}e^{3x}$ und $y_p''(x) = \frac{9}{4}e^{3x}$ in die DGL:

$\left(\frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{3x} = \frac{9-6+1}{4} e^{3x} = e^{3x}$ ✓.

Allg. Lsg $y = y_h + y_p$. homogene DGL: $y'' - 2y' + y = 0$. Ansatz $e^{\lambda x}$

liefert $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$ ... doppelte Nullstelle

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$\underline{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4}e^{3x}}.$$

D Lineare DGL 2. Ordg. 4

1.) $y'' + 6y' + 9y = 0$ und $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$ doppelte Nullst.

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

$$y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + C_2 \left[e^{-3x} - 3x e^{-3x} \right]$$

$$y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \cdot 1 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{C_1 = 1}.$$

$$y'(0) = -3 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 [1 - 0] \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow -3 + C_2 = 2, \underline{C_2 = 5}.$$

$$\underline{y(x) = e^{-3x} + 5x e^{-3x}}. \quad \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 + \lim_{x \to \infty} 5 \cdot \frac{x}{e^{3x}} = \lim_{x \to \infty} 5 \cdot \frac{1}{3e^x} = \underline{0}.$$

2.) $y'' + 8y' + 20y = 0$ und $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$. Ansatz $e^{\lambda x}$ liefert

$\lambda^2 + 8\lambda + 20 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 20} = -4 \pm \sqrt{-4} = -4 \pm 2j$$

$$y(x) = C_1 e^{-4x} \cos(2x) + C_2 e^{-4x} \sin(2x)$$

$$y'(x) = C_1 \left[-4e^{-4x} \cos(2x) + e^{-4x} (-\sin(2x)) \cdot 2 \right]$$
$$+ C_2 \left[-4e^{-4x} \sin(2x) + e^{-4x} \cos(2x) \cdot 2 \right]$$

$$y(0) = C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 0 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{C_1 = 1}$$

$$y'(0) = 1 \cdot [-4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2]$$
$$+ C_2 [-4 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2] \stackrel{!}{=} 6$$

$$-4 + 2C_2 = 6$$

$$2C_2 = 10, \ \underline{C_2 = 5}$$

$$\underline{y(x) = e^{-4x} \cos(2x) + 5e^{-4x} \sin(2x).}$$

Für $x \to \infty$ geht e^{-4x} gegen Null. Sinus und Kosinus sind immer zwischen -1 und 1. Daher geht $y(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null.