SBL - Notizen aus Mathematik 3: Einführung in die Vektorrechnung

In diesem Dokument finden Sie alle Rechenaufgaben, die in der Lehrveranstaltung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede Rechenaufgabe dient dazu, das Prinzip, welches auf der Folie beschrieben ist, anschaulich zu erklären. Versuchen Sie bitte die Einzelschritte nachzuvollziehen und jeweils mit den beschriebenen Rechenregeln zu vergleichen.

Bei Fragen benutzen Sie bitte das Forum, welches Sie im Ilias finden oder kontaktieren Sie mich direkt – bevorzugt via E-Mail.

Nachdem Sie das Kapitel in den Folien und mit den Notizen durchgearbeitet haben, empfiehlt es sich die Übungsaufgaben des Aufgabenpools zu bearbeiten.

Seite 109 - Beispiele

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(a) Berechne Summe und Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Summe

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Differenz

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Berechne die Vektoren $-5\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{b}$ und $\sqrt{2}\vec{c}$.

$\vec{v} = -5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 2 \\ -5 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot -1 \\ \frac{3}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot 2 \\ \sqrt{2} \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ \sqrt{2} \cdot -3 \end{pmatrix}$

(c) Welche Verschiebung entspricht $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{v}$?

Von der Hälfte des Vektors $\vec{a}$ verschiebe in entgegengesetzte Richtung des Vektors $\vec{b}$. Von dort verschiebe dreimal in die Richtung des Vektors $\vec{v}$.

Seite 110 - Beispiel

Beispiel: Berechne den zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörenden Einheitsvektor.

$\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Seite 111 - Beispiel

Beispiel: Stelle den Vektor der Verschiebung $P_1(2|1|-2)$ zu $P_2(6|-3|2)$ durch seine Basisvektoren dar.

Zuerst bestimmen wir den Vektor:

$$\vec{a} = \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Darstellung als Basisvektoren:

$$\vec{a} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + -4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seite 112 - Beispiel

Beispiel I: Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

linear unabhängig sind.

Lösung: Man überlege sich bspw. beliebige Vielfache der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$, welche als Summe $\vec{a}$ ergeben, z.B. $-7 \cdot \vec{b}$ und $-2 \cdot \vec{c}$. Die Vektoren sind somit linear abhängig.

Alternative, formale Lösung:

Überprüfe, ob eine Lösung für t_1, t_2, t_3 existiert (abgesehen von der offensichtlichen Lösung $t_1, t_2, t_3 = 0$) für:

$t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Darstellung als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I &: 2t_1 + 0t_2 - t_3 = 0 \\ II &: t_1 - t_2 + 3t_3 = 0 \end{aligned}$$

Aus I folgt: $t_3 = 2t_1$

Eingesetzt in II: $t_1 - t_2 + 6t_1 = 0$ und somit $t_2 = 7t_1$ und $t_1 = \frac{1}{7}t_2$.

Die Vektoren sind linear abhängig für $t_1 = \frac{1}{7}t_2$, $t_2 = 7t_1$ und $t_3 = 2t_1$.

Beispielhaft, wenn $t_1 = 1$ dann sind:

$t_2 = 7$

$t_3 = 2$

Seite 112 - Beispiel

Beispiel I: Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

linear unabhängig sind.

Lösung:

Überprüfe, ob eine Lösung für t_1, t_2, t_3 existiert (abgesehen von der offensichtlichen Lösung $t_1, t_2, t_3 = 0$) für:

$t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Darstellung als lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{gathered}
I : 2t_1 + 0t_2 - t_3 = 0 \\
II : 1t_1 + 0t_2 + 3t_3 = 0 \\
III : -t_1 - t_2 + 0t_3 = 0
\end{gathered}
$$

Aus I folgt: $t_3 = 2t_1$, eingesetzt in II ergibt $1t_1 + 0t_2 + 2t_1 = 0$

Aus I in II folgt: $t_1 = 0$

Daraus folgt, dass t_2 und t_3 ebenso 0 sind.

Die Vektoren sind somit linear unabhängig.

Seite 117 - Überprüfen?

Der Ergebnisvektor des Kreuzproduktes $\vec{c}$ steht normal (senkrecht) auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!

Überprüfen?

Ansatz:

Überprüfen können wird das, indem wir prüfen, ob das Skalarprodukt des Kreuzproduktes $\vec{c}$ mit einem der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ gleich 0 ist (vgl. S. 114f).

Beispielsweise:

Ist $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$?

$$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y \cdot -(a_x b_z - a_z b_x) + a_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

Das Resultat des Skalarproduktes ausmultipliziert:

$$\begin{gathered} a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y \cdot -(a_x b_z - a_z b_x) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \\ a_x a_y b_z - a_x a_z b_y - a_x a_y b_z + a_y a_z b_x + a_x a_z b_y - a_y a_z b_x = \\ 0 - a_x a_z b_y - 0 + a_y a_z b_x + a_x a_z b_y - a_y a_z b_x = \\ 0 - 0 - 0 + a_y a_z b_x + 0 - a_y a_z b_x = \\ 0 - 0 - 0 + 0 + 0 - 0 = \\ 0 \end{gathered}$$

Seite 123 - Beispiele

Beispiel 1: Erstellen Sie die Geradengleichung durch $P(-5|-1)$ und $Q(-1|9)$.

Eine Gerade ist darstellbar als $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Bestimme zuerst einen Ortsvektor, z.B. $\vec{p} = \vec{OP}$ (O ist der Ursprung - vgl. auch: Nullvektor).

Folgend bestimme den Richtungsvektor $\vec{a} = Q - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

Somit folgt die Geradengleichung:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Machen Sie die Geradengleichung

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

parameterfrei.

(**Als Ergebnis erhält man die Gerade in analytischer Schreibweise $g : y = k \cdot x + d$ mit Steigung k und y-Achsenabschnitt d.**)

Lösung:

Schritt 1: Aufspaltung der Parameterform in x und y

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 7 + 4t \end{aligned}$$

Schritt 2: Elimination des Parameters t (vgl. Lineare Gleichungssysteme (LGS))

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} I : x &= 3 + 2t \\ II : y &= 7 + 4t \end{aligned}$$

Ermitteln von t, z.B. aus I: $t = \frac{x-3}{2}$

Einsetzen in II ergibt:

$$y = 7 + 4\frac{x-3}{2} = 2x + 1$$

Somit erhalten wir als Lösung $y = 2x + 1$, welche der Form $g : y = k \cdot x + d$ mit $k = 2$ und $d = 1$ entspricht.

Hinweis: Alternativ kann das LGS auch mit dem Additionsverfahren gelöst werden, z.B. indem die Zeile I mal (-2) genommen wird und zur zweiten Zeil addiert wird.

Beispiel 2: Berechnen Sie den Schnittpunkt der Gerade g und h.

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

Der Schnittpunkt ergibt sich aus:

$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Als LGS dargestellt:

$$\begin{aligned} I &: 4 + 7t = -5 + 2s \\ II &: -2 - 6t = -1 + 5s \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} I &: 9 = 2s - 7t \\ II &: -1 = 5s + 6t \end{aligned}$$

Aus I: $s = \frac{9+7t}{2}$

In II eingesetzt, ergibt sich $-1 = 5\frac{9+7t}{2} + 6t$ und es folgt $t = -1$ und somit dann $s = 1$.

Einsetzen von entweder t oder s in die jeweilige Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt S, z.B. t in g:

$S = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Als Probe können wir auch s in h rechnen:

$S = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Seite 127 - Beispiele

Beispiel 1: Erstellen Sie die Ebenengleichung durch die Punkte $P(1|-1|0)$, $Q(2|-7|4)$ und $R(6|-3|-1)$.

Lösung:

Die Parameterdarstellung der Ebene ergibt sich aus:

$\epsilon : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Wir ermitteln die drei Vektoren $\vec{p}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{p} = \vec{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung ergibt sich somit als:

$$\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Machen Sie die Ebenengleichung

$$\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

parameterfrei!

Lösung:

Schritt 1: Ermittle das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-6) \cdot (-1) - 4 \cdot -2 \\ -(1 \cdot (-1) - 4 \cdot 5) \\ 1 \cdot (-2) - (-6) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Die parameterfreie Darstellung hat die Form $\epsilon : ax + by + cz = d$. Die Faktoren a, b und c können wir aus dem Normalvektor ablesen. Daraus folgt:

$$\epsilon : 14x + 21y + 28z = d$$

Schritt 2: Bestimme d über Einsetzen des Punktes (d.h. $(1| -1|0)$) der obigen Parameterdarstellung

$$\epsilon : 14x + 21y + 28z = 14 \cdot 1 + 21 \cdot (-1) + 28 \cdot 0 = -7$$

Daraus folgt nun die parameterfreie Darstellung:

$$\epsilon : 14x + 21y + 28z = -7$$

Hinweis: Ein alternativer Lösungsweg erfolgt über die Lösung eines LGS, z.B. in diesem Beispiel löse das LGS:

$$\begin{aligned} I &: x = 1 + t + 5s \\ II &: y = -1 - 6t - 2s \\ III &: z = 0 + 4t - s \end{aligned}$$

Beispiel 3: Bestimmen Sie die Normaldarstellung der obigen Ebene!

Die Normaldarstellung können wir nun aus den obigen Darstellungen der Ebene ablesen.

$\epsilon : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ oder $\epsilon : \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$$\epsilon : \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \epsilon : \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Seite 128 - Beispiel

Scheiden Sie die Ebenen $\epsilon_1 : 2x + 3y + 4z = -1$ und $\epsilon_2 : x - 6y - 13z = 7$.

Lösung:

Ziel ist es also eine Geradengleichung der Form

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

(mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Richtungsvektor $\vec{a}$) aufzustellen.

Schritt 1: Stelle ein LGS aus den beiden Gleichungen auf

$$\begin{aligned} I &: 2x + 3y + 4z = -1 \\ II &: x - 6y - 13z = 7 \end{aligned}$$

Schritt 2: Eliminiere eine Variable, z.B. $I + (-2) \cdot II$

$$I + (-2) \cdot II : +15y + 30z = -15$$

Schritt 3: Stelle diese Gleichung nach einer Variablen um, hier z.B. nach y

$y = -1 - 2z$

Schritt 4: Ersetze eine Variable durch eine neue Variable, hier z.B. z durch t ($t \in \mathbb{R}$)

$z = t$

$y = -1 - 2t$

Schritt 5: Stelle die übriggebliebene Variable durch den Paramter t dar, hier x aus II umgeformt

$x - 6y - 13z = 7$
$x = 6y + 13z + 7$

y und z aus oben eingesetzt ergibt:

$x = 6(-1 - 2t) + 13t + 7 = 1 + t$

Schritt 6: Aufstellen der Geradengleichung

Aus den Schritten oben haben wir Darstellungen von x, y und z in Abhängigkeit des Parameters t erhalten:

$x = 1 + t$

$y = -1 - 2t$

$z = t$

Als Gerade dargestellt:

Als Gerade dargestellt:

$$g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\-1-2t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Seite 129 - Beispiel

Scheiden Sie die Gerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$$

mit der Ebene $\epsilon: 2x+3y+4z=-1$.

Lösung:

Aus der Geradengleichung g erhalten wir:

$x=1-2t$

$y=3t$

$z=-2$

Nun setzen wir das in die Ebene ϵ ein:

$\epsilon: 2(1-2t)+3\cdot 3t+4\cdot -2=-1$

Die entstandene Gleichung vereinfachen wir und lösen diese nach t:

$$\begin{aligned}-1&=2(1-2t)+3\cdot 3t+4\cdot -2\\-1&=2-4t+9t-8\\-1&=-6+5t\\t&=1\end{aligned}$$

Abschließend setzen wir noch den errechneten Parameter t in die Geradengleichung ein und erhalten somit den Schnittpunkt S:

$$S=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Seite 130 - Beispiel

Beispiel: Berechne den Abstand des Punktes $Q(10|-5|2)$ von der Ebene $\epsilon: 3x - 4y + z = 15.$

Lösung:

Wir nutzen die Formel für den Normalabstand Punkt-Ebene:

$$d_\epsilon = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{n}|}$$

($\vec{q}$ ist der Ortsvektors von Q, $\vec{p}$ ein Ortsvektor eines Punktes von der Ebene ϵ und $\vec{n}$ ein Normalvektor der Ebene.)

Zuerst bestimmen wir die Vektoren $\vec{q}$ (Ablesen aus Punkt) und $\vec{n}$ (Ablesen aus Faktoren von x, y und z der Ebenengleichung).

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\vec{p}$ wählen wir einen beliebigen Punkt der Ebene (Probieren durch Einsetzen in die Ebenengleichung), z.B.:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$\vec{p} - \vec{q}$ berechnen:

$$\vec{p} - \vec{q} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir:

$$d_\epsilon = \frac{|3 \cdot -10 + (-4) \cdot 5 + 1 \cdot 13|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|-37|}{\sqrt{26}} = \frac{37}{\sqrt{26}}$$

Seite 131 - Beispiel

Beispiel: Berechne den Abstand des Punktes $Q(-1|3|-2)$ von der Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir nutzen die Formel für den Normalabstand Punkt-Gerade:

$$d_g = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Zuerst bestimmen wir die Vektoren $\vec{p}$ (Ortsvektor aus der Geradengleichung), $\vec{q}$ (Ortsvektor von Q) und $\vec{a}$ (Richtungsvektor aus der Geradengleichung).

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Formel ergibt:

$$\vec{p} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$d_g = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (-39)^2 + (-13^2)}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} \approx 3.1623$$