▷ Lösungsmengen

- $x - \sqrt{3-x} = 1$

$$-\sqrt{3-x} = 1 - x \quad |^2$$ Achtung: keine Äquivalenzumformung!

$$3 - x = (1-x)^2$$ vgl. binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$3 - x = 1 - 2x + x^2 \quad |+x \quad |-3$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$ vgl. quadr. Glg. $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$ hat Lsgn $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Probe: ◦ Einsetzen von $x_1 = 2$ in $x - \sqrt{3-x} = 1$ liefert:

$$2 - \sqrt{3-2} = 1$$

$$2 - 1 = 1$$ wahre Aussage $\Rightarrow x_1 = 2$ ist eine Lsg.

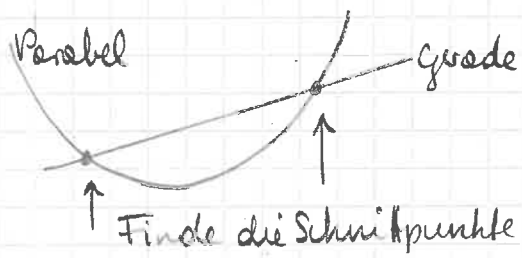
◦ Einsetzen von $x_2 = -1$:

$$-1 - \sqrt{3+1} = 1$$

$$-1 - 2 = 1$$ falsche Aussage $\Rightarrow x_2 = -1$ ist keine Lsg.

Lösungsmenge $L = \{2\}$.

- $(x-1)^2 - 6 \geq 2x$ Graphen der rechten und linken Seite: Skizze



Schnittpunkte:

$$(x-1)^2 - 6 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 - 6 = 2x$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 5$

Lösungsmenge

$$L = (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$$

$$= \mathbb{R} \setminus (-1, 5).$$

D **Falsche Rechnung**

Finden Sie die Probleme in der folgenden Rechnung:

$$a = -b \quad | \text{ Quadrieren}$$

$$a^2 = (-b)^2 = b^2 \quad | \text{ „Wurzel ziehen"}$$

$$a = b$$

Lösung:

1.) Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!

Es gilt $a = -b \implies a^2 = b^2$

Aber: $\qquad \not\Longleftarrow$

2.) Denn aus $a^2 = b^2$ folgt nicht $a = b$, sondern $a = b$ oder $a = -b$:

$$a^2 = b^2 \iff (a = b \text{ oder } a = -b)$$

$$\iff |a| = |b|$$

Erinnerung: Die **Wurzel** $\sqrt{z}$ einer Zahl $z \geq 0$ ist jene eindeutige, **positive (oder Null) Zahl**, deren Quadrat z ergibt. Es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ und nicht $\sqrt{x^2} = x$!

$$\text{Bsp. } \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(-3)^2} \neq -3$$

Nur falls $x \geq 0$, gilt $\sqrt{x^2} = x$!

Hinweis: Die Umformung Quadrieren vergrößert die Lösungsmenge. Daher ist eine Probe notwendig.

Bsp.: $\quad x = 3 \quad | \text{ Quadrieren}$

$x^2 = 3$ hat Lösungsmenge $= \{3, -3\}$

Probe: nur $x = 3$ ist Lösung.

▷ Lösungsmengen

- $\sqrt{x+\sqrt{2x}} = 2 \quad |^2$

$$x+\sqrt{2x} = 4$$
$$\sqrt{2x} = 4-x \quad |^2$$
$$2x = (4-x)^2$$
$$2x = 16-8x+x^2$$
$$0 = x^2-10x+16$$
$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm 3 \to x_1 = 8,\; x_2 = 2$$

Probe: $x_1=8$ einsetzen: $\sqrt{8+\underbrace{\sqrt{2\cdot 8}}_{4}} = 2$

$$\sqrt{16} = 2$$
$$4 = 2$$ falsche Aussage, keine Lsg.

$x_2=2$ einsetzen: $\sqrt{2+\sqrt{2\cdot 2}} = 2$

$$\sqrt{4} = 2$$
$$2 = 2$$ wahre Aussage, Lsg.

Lösungsmenge $L = \{2\}$.

- $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 1$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1 \quad |^2$$
$$x+5 = 2x+3+2\sqrt{2x+3}+1$$
$$-x+1 = 2\sqrt{2x+3} \quad |^2$$
$$x^2-2x+1 = 4(2x+3)$$
$$x^2-2x+1 = 8x+12$$
$$x^2-10x-11=0$$
$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+11} = 5 \pm 6$$
$$x_1 = 11,\; x_2 = -1$$

Probe: $x_1 = 11$ einsetzen:

$$\sqrt{11+5} - \sqrt{22+3} = 1$$
$4-5=1$, falsche Aussage

keine Lsg.

$x_2 = -1$ einsetzen:

$$\sqrt{-1+5} - \sqrt{2(-1)+3} = 1$$
$2-1=1$, wahre Aussage

Lösung.

Lösungsmenge $L = \{-1\}$.

D. Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}$$

1.) Definitionsmenge: keine Wurzel von negativen Zahlen, d.h.

$$x+7 \geq 0$$

$$\text{nur } x \geq -7$$

Und keine Division durch Null: $x^2-1=0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1 \text{ nicht erlaubt.}$$

Definitionsmenge $D = [-7, \infty) \setminus \{-1, +1\}$.

2.) Nullstellen: Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ = Null, wenn Zähler = Null.

D.h. $\sqrt{x+7} = 0 \quad |^2$

$$x+7 = 0$$

$$x = -7, \text{ Probe: } \sqrt{-7+7} = 0 \text{ ok.}$$

Nullstellen $N = \{-7\}$.

3.) Polstellen: Nenner = Null während Zähler nicht Null, d.h.

$x^2-1=0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ An diesen Stellen ist der Zähler nicht Null.

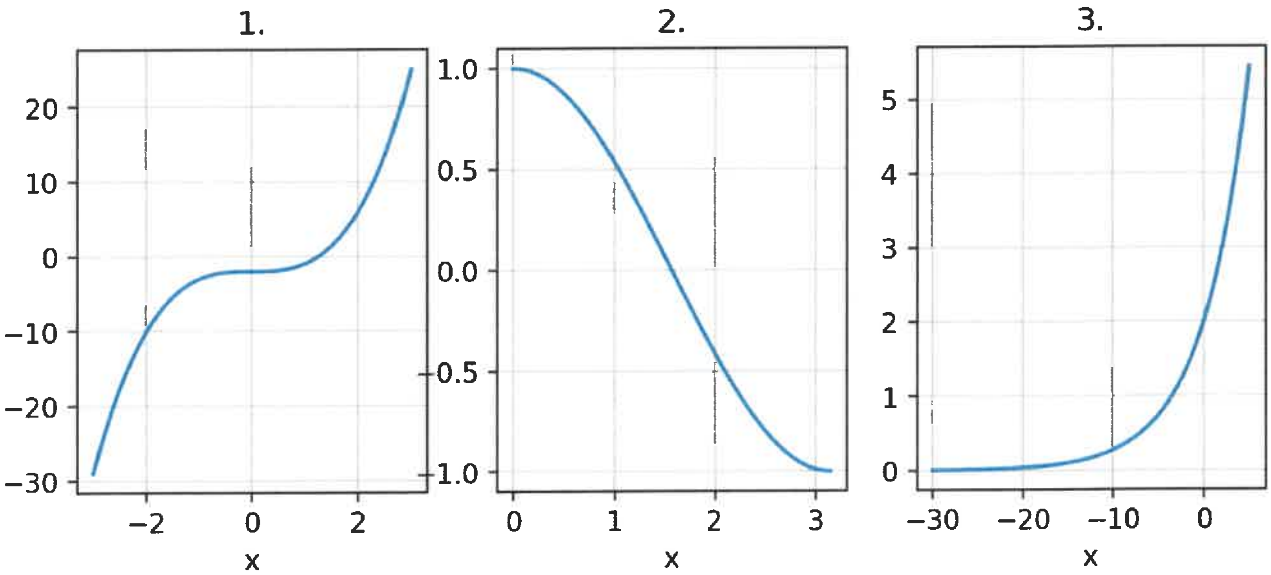
Polstellen $P = \{-1, +1\}$.

▷ Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

1.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x^3 - 2$ ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.

2.) $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}: f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv, somit auch nicht bijektiv.

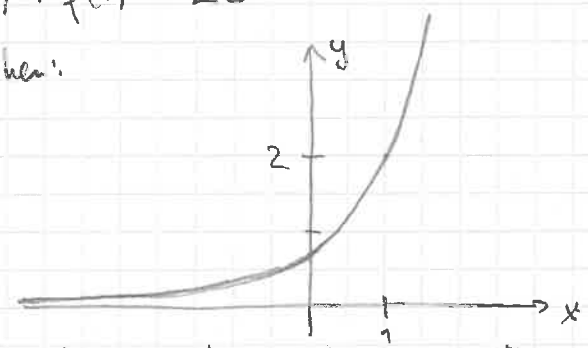
3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = 2e^{x/5}$ ist injektiv aber nicht surjektiv, somit auch nicht bijektiv.



▷ Umkehrfunktion

$f: \mathbb{R} \to (0,\infty) : f(x) = 2e^{x-1}$

Skizze des Graphen:



Funktion f ist injektiv und surjektiv, somit bijektiv und daher umkehrbar.

Umkehrfunktion: $y = 2e^{x-1}$ umformen bis $x = \dots$

$$\frac{y}{2} = e^{x-1} \quad | \ln()$$

$$\ln(y/2) = \ln(e^{x-1})$$

$$\ln(y/2) = x-1$$

$$\ln(y/2)+1 = x$$

$$x = \ln(y/2)+1$$

$f^{-1}: (0,\infty) \to \mathbb{R} : f^{-1}(y) = \ln(\frac{y}{2})+1.$