▷ Rechnen im Vektorraum

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

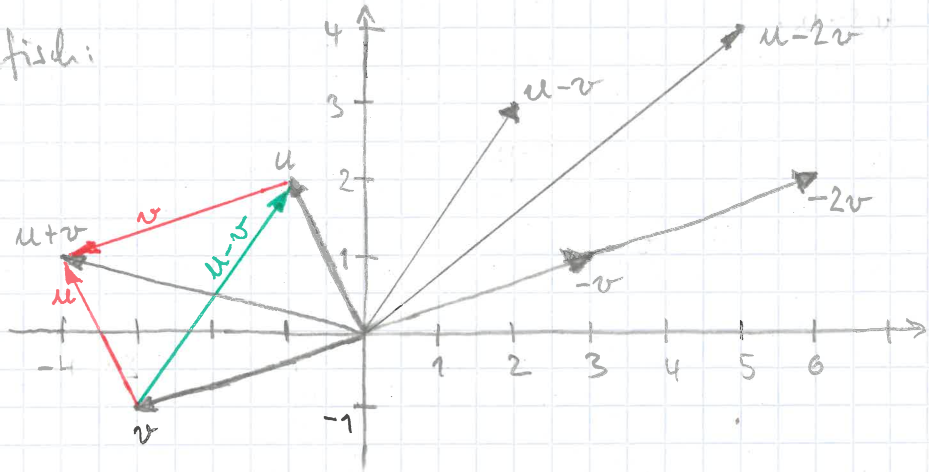
$-v = -\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -2v = -2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-3) \\ (-2)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$

$u + v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+(-3) \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$

$u - v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-(-3) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$u - 2v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2\cdot(-3) \\ 2-2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$

grafisch:



▷ Vektorgleichung und lineares Gleichungssystem

$x\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x\cdot 6 + y\cdot(-3) \\ x\cdot(-1) + y\cdot 4 \\ x\cdot 5 + y\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$ elementweise Gleichheit liefert

das lineare Gleichungssystem

$6x - 3y = 1$

$-x + 4y = -7 \qquad \Rightarrow -(-1) + 4y = -7$

$5x = -5 \Rightarrow \underline{x = -1} \qquad 4y = -8$

$\underline{y = -2}$

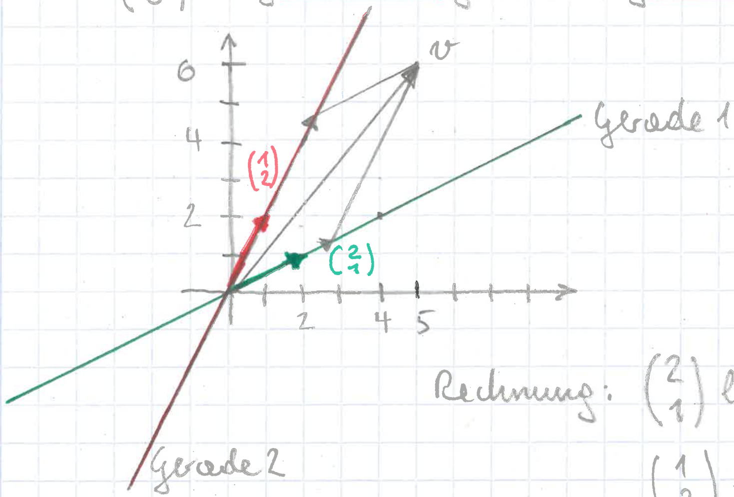
Einsetzen von $x = -1$ und $y = -2$ liefert

$6(-1) - 3(-2) = 1$

$0 = 1$ falsche Aussage $\Rightarrow L = \{\}$, d.h. keine Lösung.

D Linearkombination

$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, Gerade 1 : $y = \frac{x}{2}$, Gerade 2 : $y = 2x$



Rechnung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt auf Gerade 1,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt auf Gerade 2.

Gesucht sind α_1 und α_2 mit

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{... Vektorgleichung}$$

äquivalentes lineares Gleichungssystem:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \quad | -2 \cdot \text{zweite Glg.}$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6$$
$$0 \quad -3\alpha_2 = 5 - 12$$
$$-3\alpha_2 = -7$$
$$\alpha_2 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

Einsetzen von α_2 liefert $\alpha_1 + 2 \cdot \frac{7}{3} = 6$

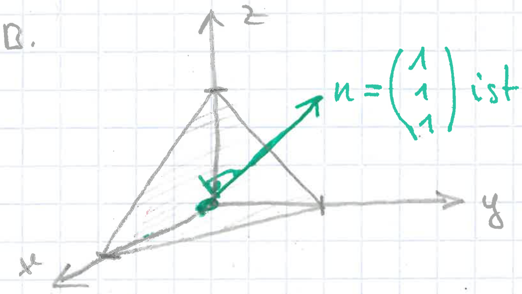
$$\alpha_1 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18-14}{3} = \frac{4}{3}$$

Insgesamt: $\underline{\alpha_1 = \frac{4}{3}}$ und $\underline{\alpha_2 = \frac{7}{3}}$. Vergleich mit Grafik ist OK.

▷ Ebenengleichung

Ebene, die alle 3 Koordinatenachsen im selben Abstand schneidet und durch $P = (3, -4, 7)$ geht.

z.B.



$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein möglicher Normalvektor.

Ebenengleichung: $n \cdot X = n \cdot P$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 3 - 4 + 7 = 6$$

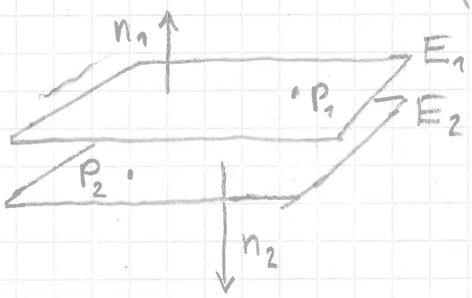
$$\underline{\underline{x + y + z = 6}}.$$

▷ Abstand zweier Ebenen

$E_1: \; P_1 = (3, 5, 6), \; n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E_2: \; P_2 = (1, 5, -2), \; n_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

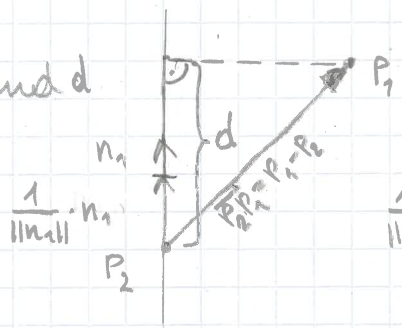
Zeige, dass E_1 und E_2 parallel sind, und berechne ihren Abstand.



Die Ebenen sind parallel, weil ihre Normalvektoren kollinear sind: $n_2 = -3 n_1$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand d



n_1 auf Länge 1 skalieren:

$$\frac{1}{\|n_1\|} n_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| \frac{1}{\|n_1\|} n_1 \cdot \overrightarrow{P_2P_1} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 5 - 5 \\ 6 - (-2) \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{14}} (1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 8) \right| = \left| \frac{-14}{\sqrt{14}} \right| = \sqrt{14} \approx \underline{\underline{3{,}74}}.$$

▷ Normalvektor und Ebene

Ein Normalvektor n schließt mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 60°$ und mit der y-Achse den Winkel $\beta = 70°$ ein. Der Winkel γ mit der z-Achse liegt zw. $0°$ und $90°$.

Berechnen Sie den Normalvektor und jene Ebene mit diesem Normalvektor, die den Punkt $P = (1,1,1)$ enthält.

Wir verwenden einen Normalvektor $n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ der Länge 1.

$$\underbrace{\cos(\alpha) = \cos(60°)}_{= \frac{1}{2} = n_x.} = \frac{n \cdot e_x}{\|n\| \cdot \|e_x\|} = n \cdot e_x = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n_x \text{, d.h.}$$

$$\underbrace{\cos(\beta) = \cos(70°)}_{= 0{,}342 = n_y.} = \frac{n \cdot e_y}{\|n\| \cdot \|e_y\|} = n \cdot e_y = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n_y \text{, d.h.}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{n \cdot e_z}{\|n\| \cdot \|e_z\|} = n \cdot e_z = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = n_z.$$

Zudem gilt: $\|n\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$

$$\sqrt{\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2} = 1 \quad |^2$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$\cos^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta)$$

Da $\gamma \in [0°, 90°]$ ist $\cos(\gamma) \geq 0$ und somit

$$\underline{\cos(\gamma)} = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta)}$$

$$= \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2})^2 - \cos^2(70°)} \cong \underline{0{,}79563}$$

$$\underline{\gamma \cong 37{,}29°}$$

$$\underline{\underline{n \cong \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0{,}342 \\ 0{,}796 \end{pmatrix}}}.$$

Die Ebene hat die Gleichung $n \cdot X = n \cdot P$

$$n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\underline{\underline{\frac{1}{2}x + 0{,}342y + 0{,}796z = 1{,}637.}}$