

Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

6 czerwca 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

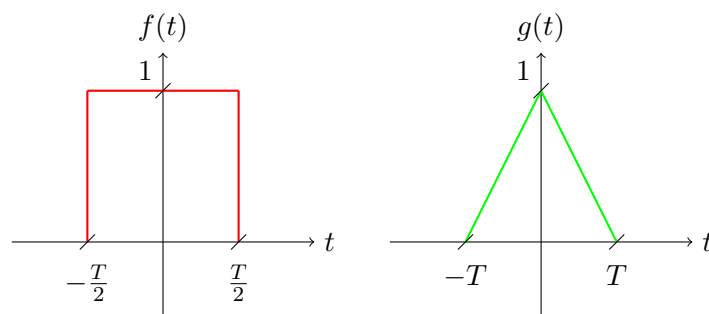
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz spłot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$



Wzór na spłot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (1)$$

Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$g(t - \tau) = \Lambda\left(\frac{t - \tau}{T}\right)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; -\frac{T}{2}) \\ A & \tau \in (-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}) \\ 0 & \tau \in (\frac{T}{2}; \infty) \end{cases}$$

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T); \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t - T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t + T) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty); \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy

Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t - \tau)$.

Przedział 1 .

Dla wartości t spełniających warunek $t + T < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned}t + T &< -\frac{T}{2} \\t &< -\frac{T}{2} - T \\t &< -\frac{3}{2} \cdot T\end{aligned}$$

w wyniku mnożenia otrzymamy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\&= 0\end{aligned}$$

Przedział 2 .

Dla wartości t spełniających warunki $t + T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll} t + T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{T}{2} - T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{3}{2} \cdot T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \end{array}$$

a więc $t \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T, -\frac{T}{2}\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t + T\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t + T\right) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{1}{T} \cdot \tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{t+T}{T} \cdot d\tau + 0 \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \tau \cdot d\tau + \frac{t+T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T} \cdot (\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T + \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t + \frac{3}{2} \cdot T \right) \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{T} \cdot \left(t^2 + \frac{3}{2} \cdot t \cdot T + t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{5}{2} \cdot t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 + 2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 3 \cdot t \cdot T + 2 \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T
\end{aligned}$$

Przedział 3 .

Dla wartości t spełniających warunki $t \geq -\frac{T}{2}$ i $t < \frac{T}{2}$

$$t \geq -\frac{T}{2} \quad \wedge \quad t < \frac{T}{2}$$

a więc $t \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T, \frac{1}{2} \cdot T \right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t \in \left(-\frac{T}{2}, t \right)$ oraz $t \in \left(t, \frac{T}{2} \right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2} \right) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t \right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(t; \frac{T}{2} \right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty \right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^t \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{t - T}{T} \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau \right) \cdot d\tau - \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{-t - T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t \tau \cdot d\tau - \frac{t - T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t d\tau - \frac{1}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau + \frac{t + T}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{t - T}{T} \cdot \tau \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_t^{\frac{T}{2}} + \frac{t + T}{T} \cdot \tau \Big|_t^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 - \left(-\frac{T}{2} \right)^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t - \left(-\frac{T}{2} \right) \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} \right)^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t - T) \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t + T) \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t \cdot T - \frac{1}{2} \cdot T^2 \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t \cdot T - 2 \cdot t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 - 2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 + t \cdot T - 2 \cdot t^2 + T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 + 2 \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(-t^2 + T^2 \right) \\
&= -\frac{1}{T} \cdot t^2 + T
\end{aligned}$$

Przedział 4 .

Dla wartości t spełniających warunki $t - T \geq -\frac{T}{2}$ i $t - T < \frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll}
t - T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t - T < \frac{T}{2} \\
t \geq -\frac{T}{2} + T & \wedge & t < \frac{T}{2} + T \\
t \geq \frac{1}{2} \cdot T & \wedge & t < \frac{3}{2} \cdot T
\end{array}$$

a więc $t \in \left(\frac{1}{2} \cdot T, \frac{3}{2} \cdot T\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t - T, \frac{T}{2}\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(t - T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t-T} 0 \cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t-T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau - \frac{t-T}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t-T}{T} \cdot \tau \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - (t-T)^2 \right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - (t-T) \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - (t^2 - 2 \cdot t \cdot T + T^2) \right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t + T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - T^2 \right) - \frac{1}{T} \cdot (t-T) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot T - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t \cdot T - t^2 - \frac{3}{2} \cdot T^2 + t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot t \cdot T - 2 \cdot t^2 - \frac{6}{2} \cdot T^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - \frac{6}{2} \cdot t \cdot T + 2 \cdot t^2 + \frac{6}{2} \cdot T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot T^2 - 3 \cdot t \cdot T + t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 \\
&= \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2
\end{aligned}$$

Przedział 5

Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned}t - T &\geq \frac{T}{2} \\t &\geq \frac{T}{2} + T \\t &\geq \frac{3}{2} \cdot T\end{aligned}$$

a więc $t \in \left(\frac{3}{2} \cdot T, \infty\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = 0$$

a więc wartość spłotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\&= 0\end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik spłotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases}$$