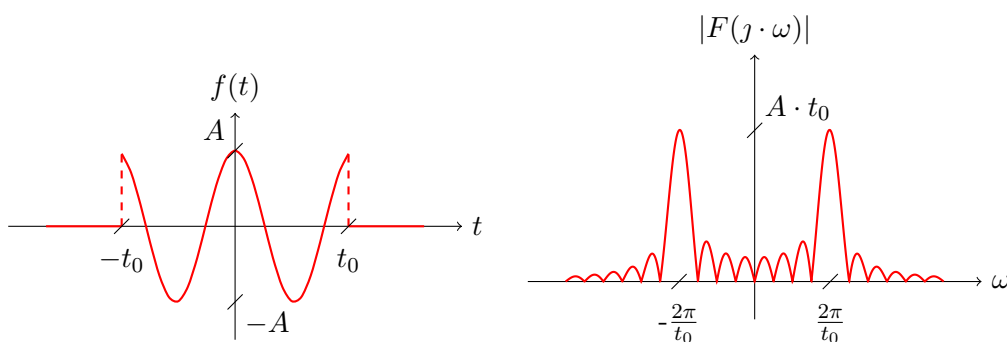


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

14 czerwca 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

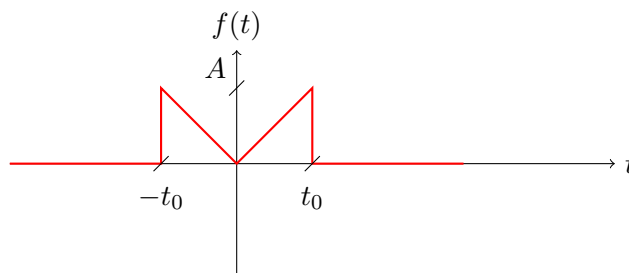
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci funkcji $f(t)$. Funkcja ta jest określona za pomocą równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (2)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases} \quad \begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases} \quad \begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0; 0)$ oraz $(t_0; A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &\quad + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) \\ &\quad + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^0 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \\
&= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2} \right) \\
&= \begin{cases} \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \\ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \end{cases} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot (2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0)) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \right) \\
&= \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 \\
&= \left\{Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}\right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$

© 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

