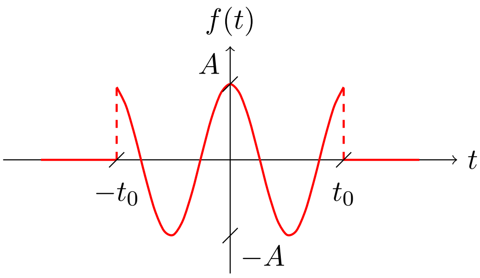
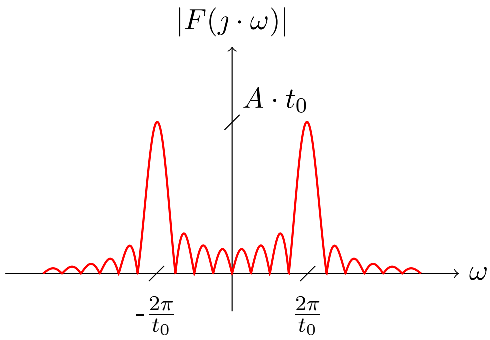
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ - Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

9 grudnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

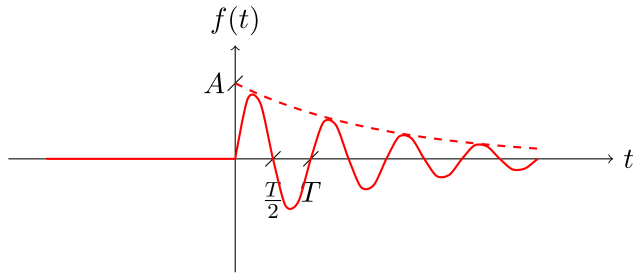
1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

[debug]

1.1.1 Wartość średnia

Zadanie 1.

Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku :



Wartość średnią sygnału wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \tag{1.1}$$

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} lu = sin(\frac{2\pi}{T}\cdot t) & dv = e^{-a\cdot t}\cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T}\cdot cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t)\cdot dt & v = -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-a\cdot t}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} lu = cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t) & dv = e^{-a\cdot t}\cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T}\cdot sin(\frac{2\pi}{T}\cdot t)\cdot dt & v = -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(-\frac{2\pi}{T}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right)\right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot 1\cdot 0\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + 0\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot 1\cdot 1\right) + \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \right.$$

$$- \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi} +$$

$$\left. - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \\ -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi} + \\ -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi} = \\ = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi} = \\ = \left(1 + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)} = \\ = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)} \right) =$$

$$= 0$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0.

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

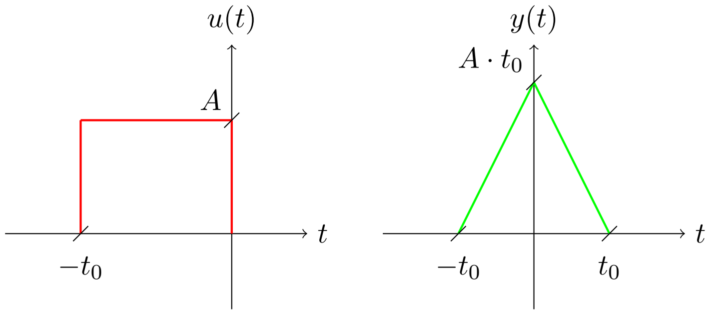
Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

Zadanie 1.

Wyznacz odpowiedź implusową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wygladają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$. W związku z tym $H(\jmath\omega) = \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(\jmath\omega)$.

Aby wyznaczyć transmitancję $H(\jmath\omega)$ trzeba obliczyć sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$u(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \qquad y(t) = A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(\jmath\omega) \qquad y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\jmath\omega)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \qquad \Lambda\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t+\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \qquad A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

$$A \cdot \Pi\left(\frac{t+\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}$$

Skoro zanmy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyc transmitancję układu, czyli $H(\jmath\omega)$.

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)} = \\ &= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}} = \\ &= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \end{aligned}$$

Teraz możemy wyznaczć odpowiedź implusową układu $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\ ? &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\ \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \end{aligned}$$

Odpowiedź implusowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

ISBN 978-83-939620-1-3