Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

30 maja 2019

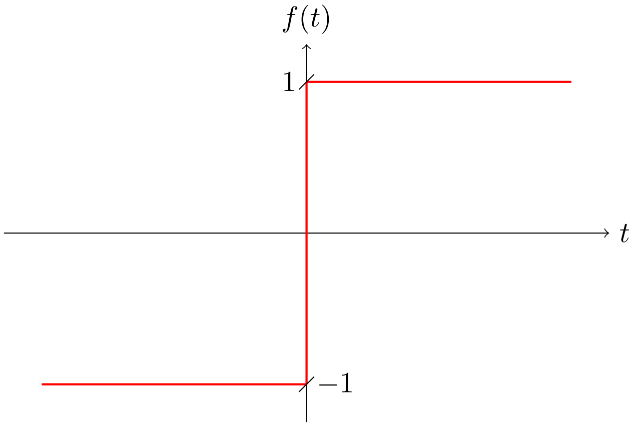
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = sgn(t)$ za pomocą twierdzeń.

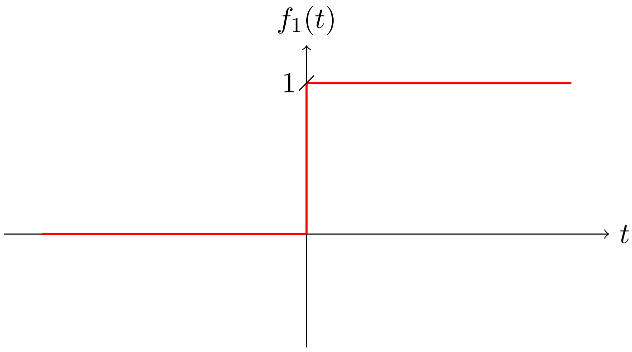


Sygnał $f(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} f(t) &= sgn(t) \\ &= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) \\ &= f_1(t) - f_2(t) \end{aligned}$$

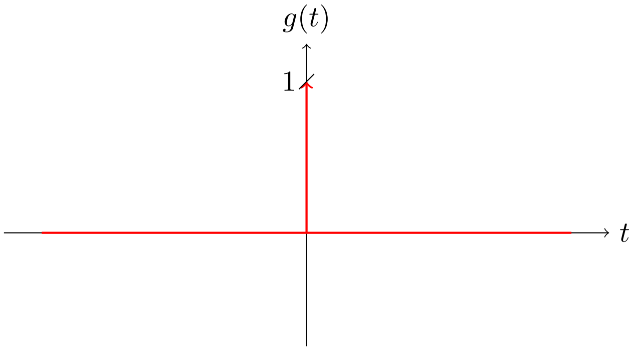
Wyrażnie widac iż funkcja jest złożeniem dwóch skoków jednostkowych

$$f_1(t) = \mathbb{1}(t) f_2(t) \qquad\qquad = \mathbb{1}(-t)$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



dla której w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\ &= e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(\jmath\omega) = 1$
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Tak wiec mamy

$$\begin{aligned} F_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \end{aligned}$$

A wiec transformata skoku jednostkowego jest $F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) \\ &= \mathbb{1}(-1 \cdot t) \end{aligned}$$

$$= f_1(-1 \cdot t)$$

A wiec transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = f_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

$$\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a}) \\
&= \left\{a = -1\right\} \\
&= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta(\frac{\omega}{-1}) \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) \\
&= -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A więc transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(\jmath\omega) - \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \left(-\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\right) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \\
&= \frac{2}{\jmath \cdot \omega}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath\cdot\omega}$.