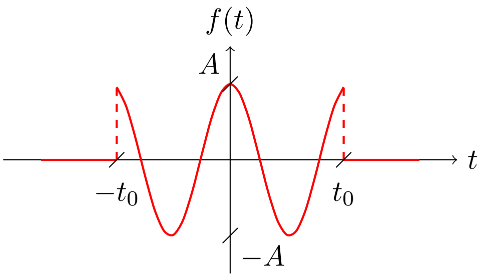
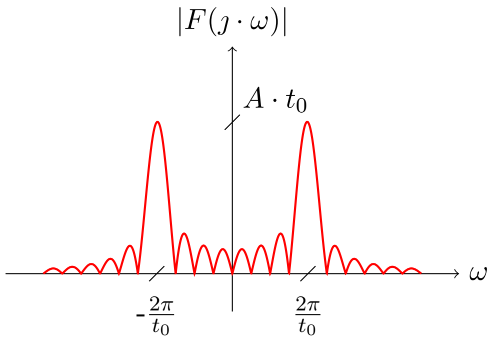
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

15 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

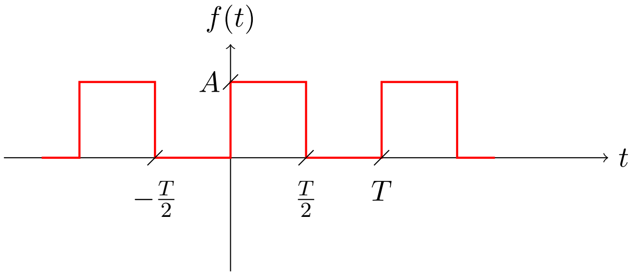
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t\big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t\big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt
\tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^z\big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^0\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{\jmath \cdot k \cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

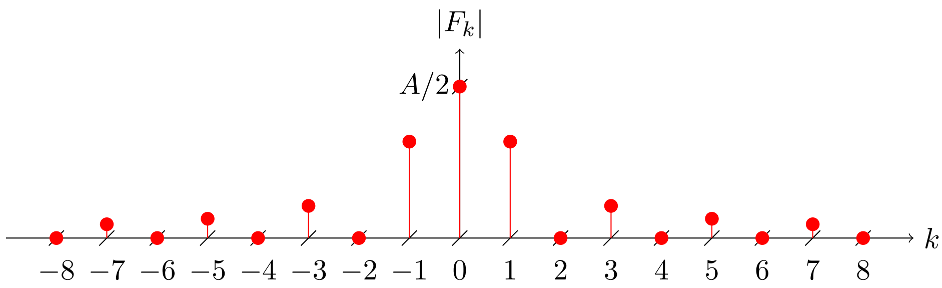
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

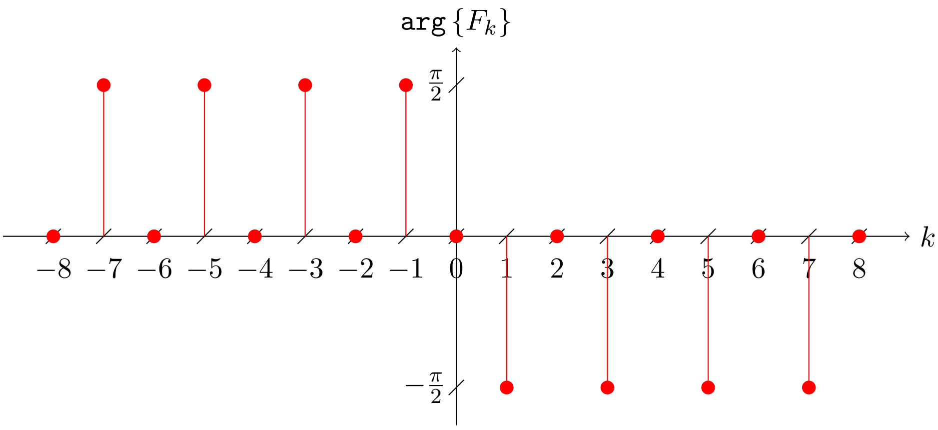
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$
$\|F_k\|$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



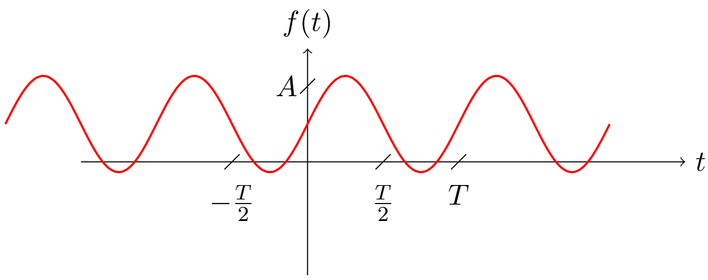
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe `arg` $\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

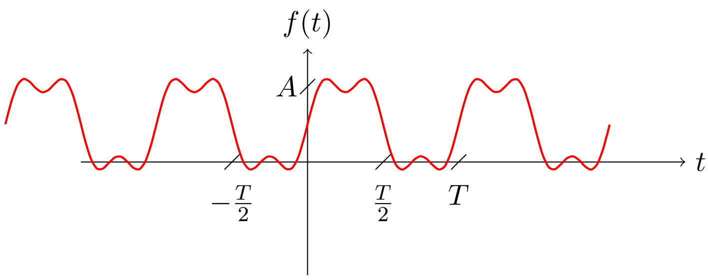


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

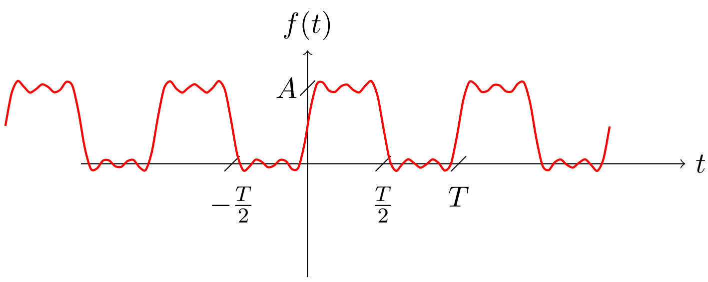
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



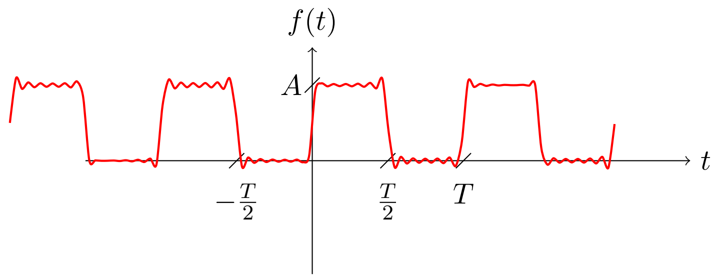
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



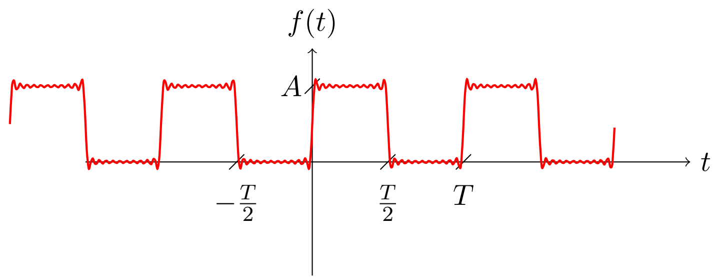
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

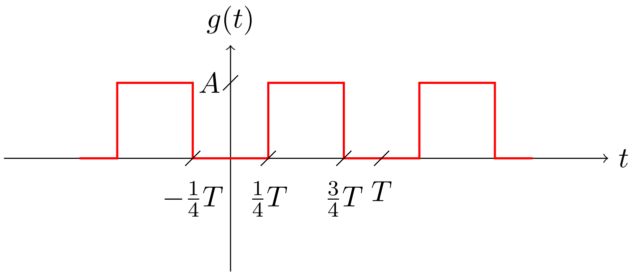


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{1}{4}T + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(\frac{1}{4}T + k \cdot T; \frac{3}{4}T + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{3}{4}T + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.6}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest przesuniętą o $\frac{1}{4}T$ w czasie wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$g(t) = f\left(t - \frac{1}{4}T\right)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ przesunętego w czasie o t_0 jako:

$$g(t) = f(t - t_0)$$
$$G_k = F_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_k &= F_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} = \\ &= \left\{ \; t_0 = \tfrac{1}{4}T \; \right\} = \\ &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{1}{4}T} \\ &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \jmath \cdot \frac{A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \end{aligned}$$

Podobnie dla G_0 podstawiając F_0 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
G_0 &= F_0 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t_0} = \\
&= F_0 \cdot e^0 = \\
&= F_0 \cdot 1 = \\
&= F_0 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika jak $k = 0$ nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia sygnału w czasie $G_0 = F_0$. Warto zauważyć iż wartość współczynnika dla $k = 0$ jest utożsamiana z wartością średnią sygnału, a ta nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia w dziedzinie czasu.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \frac{A}{2} \\
G_k &= \jmath \cdot \frac{A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3