Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

29 maja 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

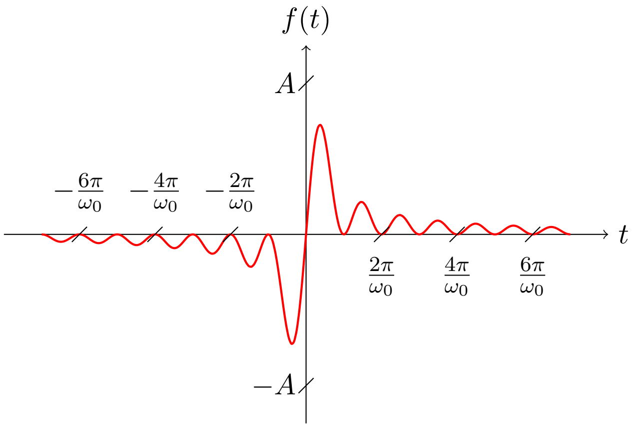
www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest rowna $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \tag{1}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{2}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \right) \\
&= \begin{Bmatrix} f_1(t) & = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) & = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot (f_1(t) - f_2(t))
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = G(\jmath\,(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$
$$g(t) = H(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa

$$h(t) = \Pi(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t) = H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = \pi \cdot \Pi\left(-\omega\right) = 2\pi \cdot \Pi\left(\omega\right)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \\
&= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) \\
&= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \\
&= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) \\
&= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} \\
&= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) \\
&= g_1(a \cdot t)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(\jmath\omega)$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a}) \\
&= \Big\{a = 2 \cdot \omega_0\Big\} \\
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}) \\
&= \Big\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot \Pi\left(\omega\right)\Big\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$
g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)
$$

$$
f_1(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))
$$

otrzymujemy wprost

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega - \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega + \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) \\ &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$