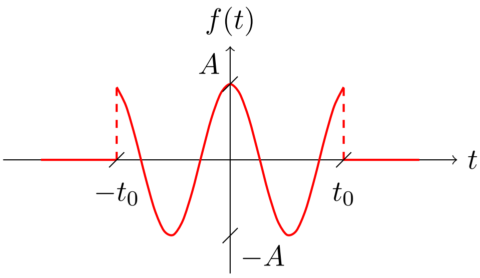
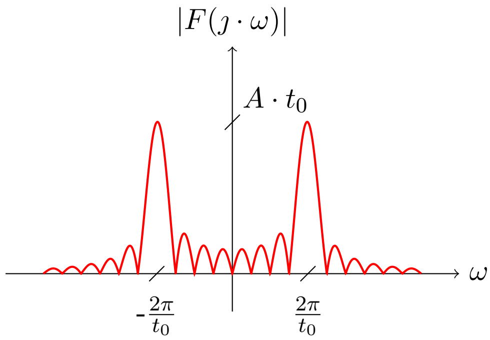
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left[\; Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)\right]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

15 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

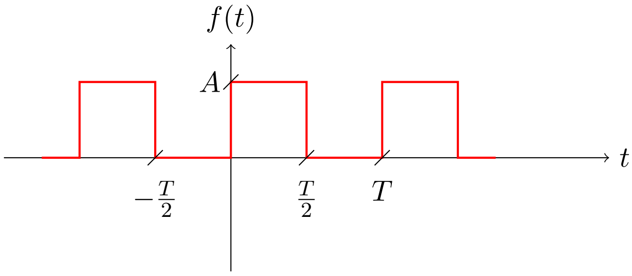
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.
Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^{0}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{\jmath \cdot k \cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

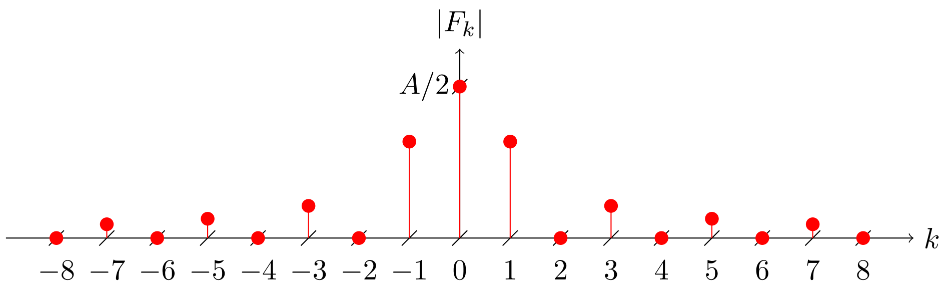
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

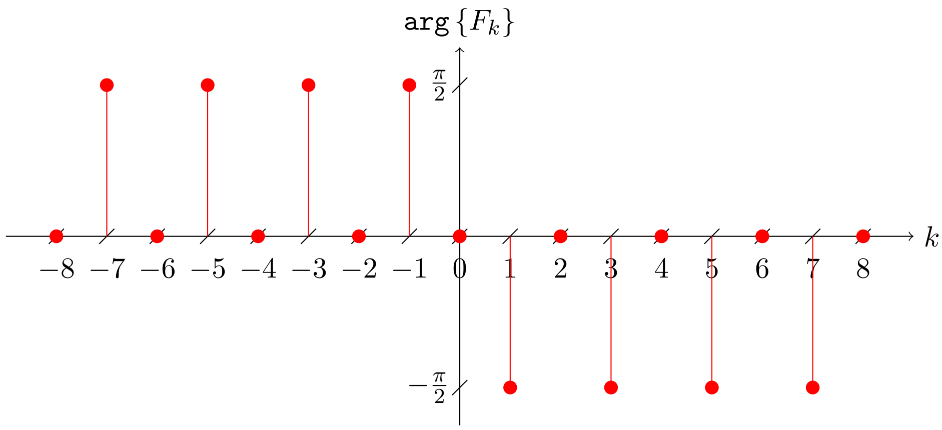
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



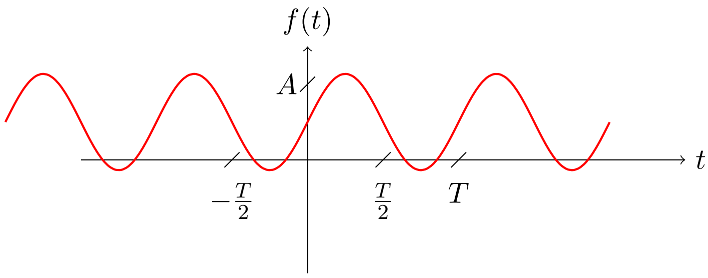
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe `arg` $\left\{F_k\right\}$ sygnału $f(t)$.

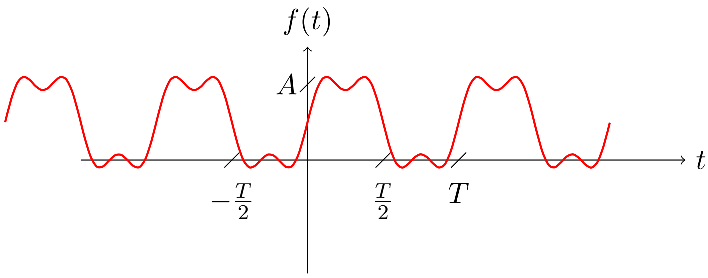


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

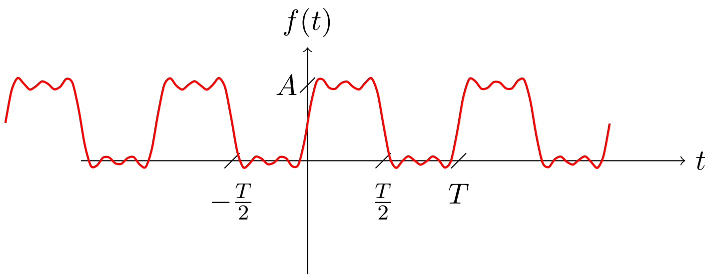
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



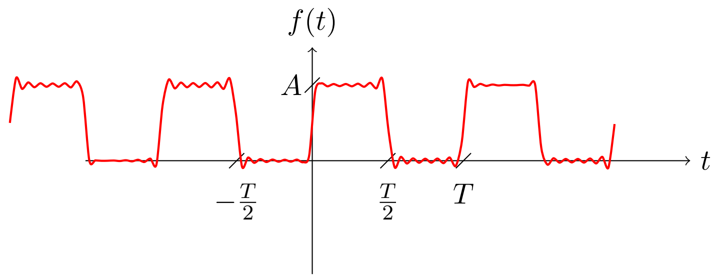
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



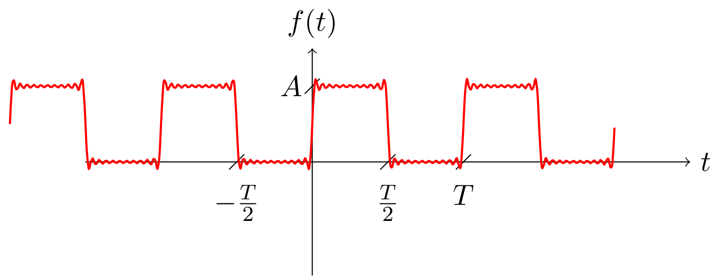
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

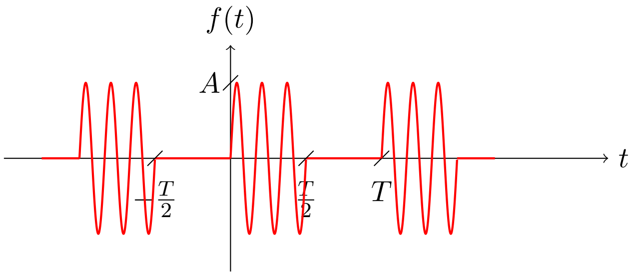


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 2



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.6}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 2

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \; sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \; \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 2 wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g^1(t) &= f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\ G_k^1 &= F_{k-k_0} \end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\ g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\ G_k &= G_k^1 - G_k^2 \end{aligned}$$

$$G_k = \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right)$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$\begin{aligned} e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} &= e^{\jmath \cdot \frac{2\ cdot 6\pi}{T} \cdot t} \\ &= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} &= e^{-\jmath \cdot \frac{2\ cdot 6\pi}{T} \cdot t} \\ &= e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t} \\ &= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-6) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -6 \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-k_0^1) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-k_0^1} - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k-k_0^2) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-k_0^2} - 1\right)\right) = \\ &= \left\{\ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6\ \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-6} - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k-(-6)) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-(-6)} - 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-6} - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k+6} - 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} \cdot (-1)^{-6} - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} \cdot (-1)^{6} - 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} \cdot 1 - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} \cdot 1 - 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) - \jmath \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k} - 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(\jmath \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} - \jmath \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \jmath \cdot \frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{k-6} - \frac{1}{k+6}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \\ &= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6}{(k-6) \cdot (k+6)} - \frac{k-6}{(k-6) \cdot (k+6)}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \\ &= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6-k+6}{(k-6) \cdot (k+6)}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \\ &= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{12}{k^2-36}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \\ &= \frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{k^2-36}\right) \cdot \left((-1)^{k} - 1\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2-36)} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)$, dla $k \neq 6 \wedge k \neq -6$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 6$ i $k = -6$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_6

$$\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{6-k_0^1} - F_{6-k_0^2}\Big) = \\
&= \Big\{ \; k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \; \Big\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{6-6} - F_{6-(-6)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_0 - F_{6+6}\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_0 - F_{12}\right)
\end{aligned}$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_{12}

$$\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_0 - F_{12)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\frac{A}{2} - \jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^{12} - 1\Big)\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{A}{2} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^{12} - 1\Big) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (1 - 1) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (0) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot 0 = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - 0 = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath}
\end{aligned}$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-6}

$$\begin{aligned}
G_{-6} &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{-6-k_0^1} - F_{-6-k_0^2}\Big) = \\
&= \Big\{ \; k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \; \Big\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{-6-6} - F_{-6-(-6)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{-12} - F_{-6+6}\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{-12} - F_0\right)
\end{aligned}$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-12} oraz F_0

$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{-12} - F_{0)} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{-12 \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{-12} - 1 \right) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (1 - 1) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (0) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(0 - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(-\frac{A}{2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{A}{2} = \\
&= -\frac{A}{4 \cdot \jmath}
\end{aligned}
$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_{-6} &= -\frac{A}{4 \cdot \jmath} \\
G_6 &= \frac{A}{4 \cdot \jmath} \\
G_k &= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)
\end{aligned}
$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3