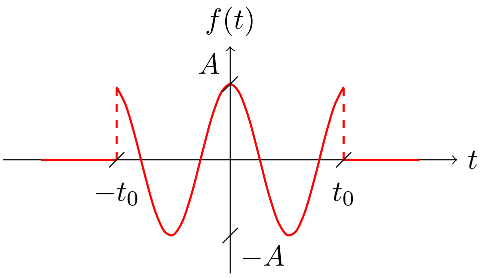
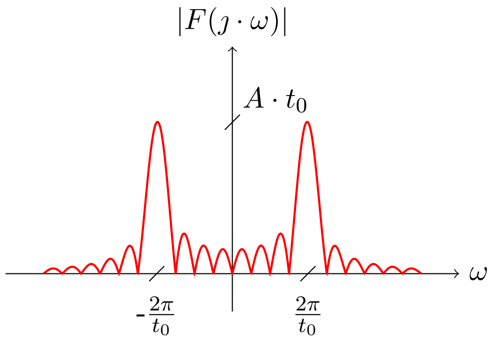
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

10 czerwca 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

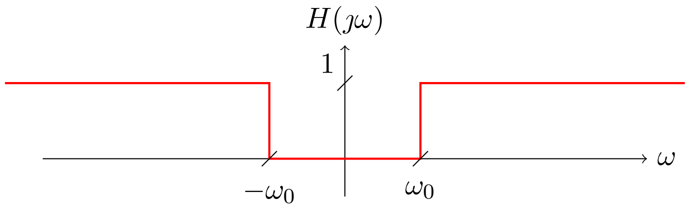
pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1.

Na układ LTI o transmitancji podanej poniżej, podano sygnał $u(t) = A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$. Wyznacz odpowiedź układu $y(t)$ wiedząc, że $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



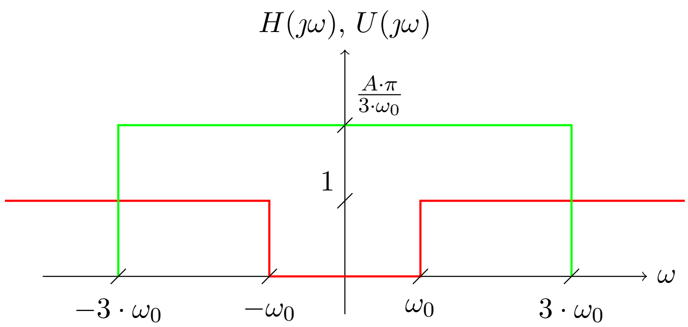
Wiemy, że odpowiedź układu LTI można obliczyć z zależności $y(t) = u(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ jest odpowiedzią impulsową układu. Wiemy także, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$.

Ponieważ wyznaczenie splotu liniowego sygnałów jest bardziej skomplikowane niż operacja mnożenia, dlatego spróbujemy skorzystać z tej drugie zależności, czyli mnożenia transformat. W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$, czyli $U(\jmath\omega)$.

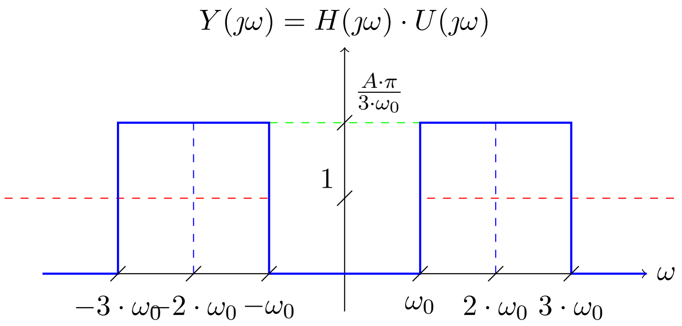
$$\begin{aligned}
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\
Sa\left(6 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|6 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right) \\
A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału wejściowego $u(t)$ to $U(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$.

Transformatę sygnału wyjściowego, czyli $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ wyznaczymy graficznie, W tym celu na wykresie transmitancji $H(\jmath\omega)$ dodamy transformatę $U(\jmath\omega)$:



Teraz dokonujmy operacji mnożenia transformat $U(\jmath\omega)$ przez $H(\jmath\omega)$



$$Y(\jmath\omega) = \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) \tag{1}$$

Skoro zanmy transformatę sygnału wyjściowego, to spróbujmy wyznaczyć sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu wykorzystując wcześniejsze obliczenia. Transformata $Y(\jmath\omega)$ to suma dwóch przeskalowanych prostokątów, przesuniętych na osi pulsacji. W takim razie można wnioskować, że sygnał w dziedzinie czasiu to będzie suma dwóch zmodulowanych i przeskalowanych funkcji $Sa(t)$.

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\cdot\Pi(-\omega)\\
Sa\left(2\cdot\omega_0\cdot\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-(-2\cdot\omega_0)}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

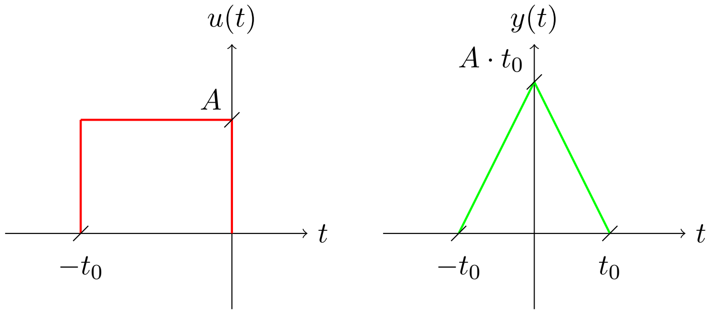
Podsumowując sygnał wyjściowy $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) + \frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\\
&= \frac{A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot\left(e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)} + e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\right)\\
&\left\{cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}\\
&= \frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\,(2\cdot\omega_0\cdot t))
\end{aligned}$$

Odpowiedź układu to $y(t) = \frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\,(2\cdot\omega_0\cdot t))$.

Zadanie 2.

Wyznacz odpowiedź implusową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wygladają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$. W związku z tym $H(\jmath\omega) = \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(\jmath\omega)$.

W pierwszym kroku wyznaczmy transformaty sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \\
U(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{u(t)\} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \\
Y(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
\Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Lambda\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Skoro zanmy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyc transmitancję układu, czyli $H(\jmath\omega)$.

$$
\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)} \\
&= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}} \\
&= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

Teraz możemy wyznaczć odpowiedź implusową układu $h(t)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\
? &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Pi\left(\frac{1}{t_0}\cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}$$

Odpowiedź implusowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

ISBN 978-83-939620-1-3