

Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

7 czerwca 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1.

Oblicz, jaka część energii sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (1)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = ? \quad (3)$$

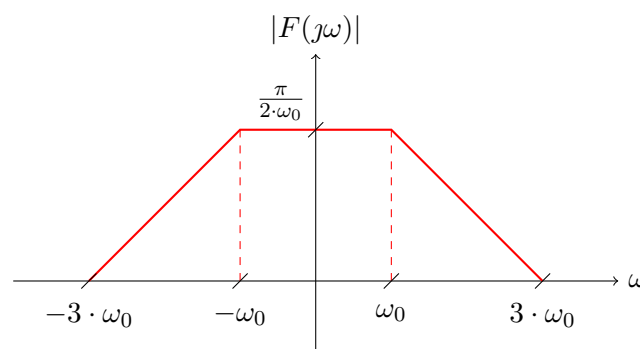
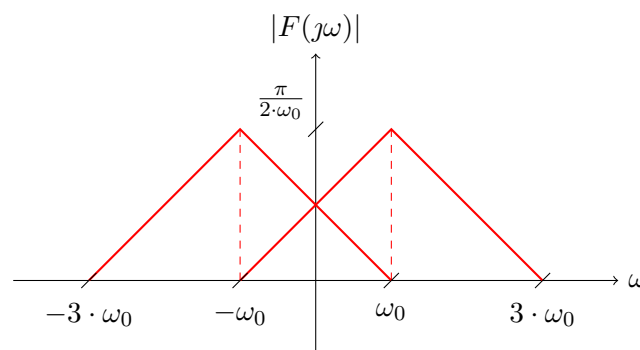
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (4)$$

W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3 \cdot \omega_0) \\ \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (-3 \cdot \omega_0; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (3 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_{-\infty}^{-3 \cdot \omega_0} |0|^2 \cdot d\omega + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left| \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left| -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{3 \cdot \omega_0}^{\infty} |0|^2 \cdot d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[0 + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left(\left(\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left(\left(-\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + 0 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega^2 \cdot d\omega + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega^2 \cdot d\omega - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(-\frac{\omega_0^3}{3} - \left(-\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} \right) \right) + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-3 \cdot \omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{\omega_0^3}{3} \right) - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (3 \cdot \omega_0 - \omega_0) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(-\frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{36 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} + \frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{18 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{36}{8} + 1 + \frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} \right] \\ &= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - \frac{96}{16} + \frac{54}{8} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - 6 + \frac{162}{24} + 1 \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{214}{24} - 5 \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{214}{24} - \frac{140}{24} \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{74}{24} \right] \\
&= \frac{37 \cdot \pi}{48 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (5)$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega| < \omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \right) \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

© 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

