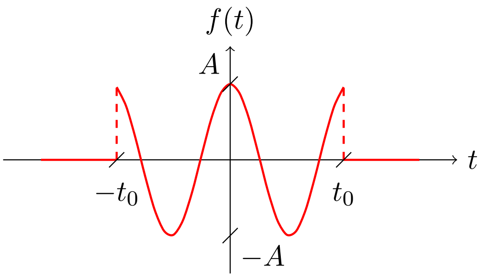
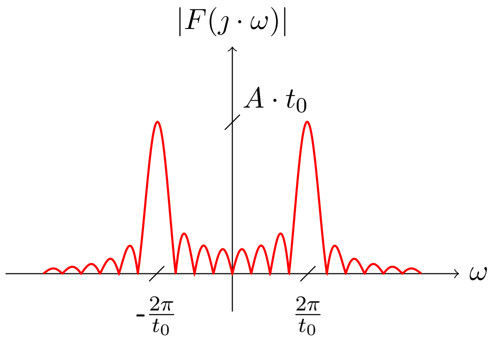
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\; Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ -Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

31 lipca 2021

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

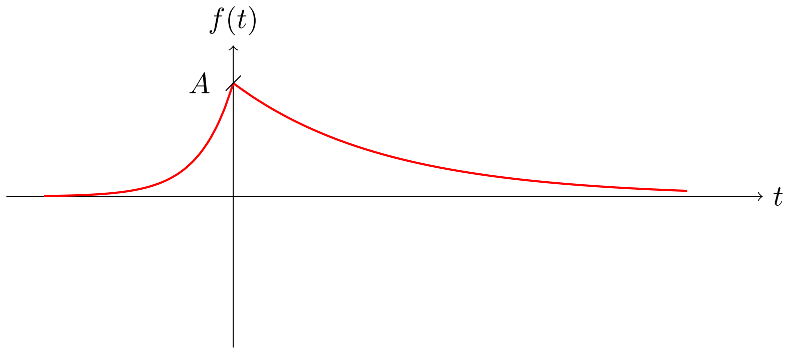
2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot e^{\alpha \cdot t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-\beta \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.2}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \end{aligned}$$

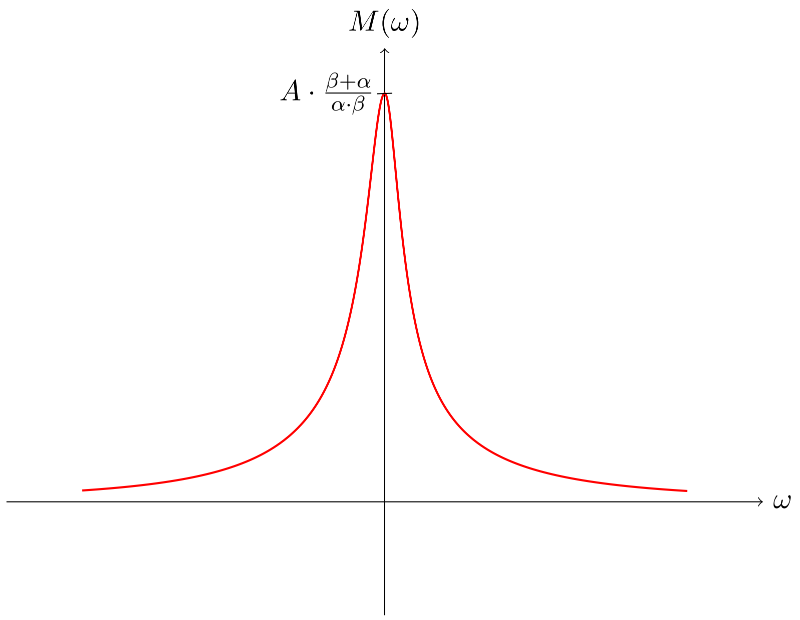
$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} A \cdot e^{\alpha \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-\beta \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{\infty} e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = (\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot t & z_2 & = (-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot t \\ dz_1 & = (\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot dt & dz_2 & = (-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} & dt & = \frac{dz_2}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \end{array} \right\} = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + A \cdot \int_{0}^{\infty} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\beta - \jmath \cdot \omega} = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{z_1} \cdot dz_1 + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{z_2} \cdot dz_2 = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\tau}^{0} e^{z_1} \cdot dz_1 + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{z_2} \cdot dz_2 = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z_1}|_{-\tau}^{0} + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z_2}|_{0}^{\tau} = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot t}\Big|_{-\tau}^{0} + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot t}\Big|_{0}^{\tau} = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot 0} - e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (-\tau)} \right) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot 0} \right) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{0} - e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (-\tau)} \right) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{0} \right) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(1 - e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (-\tau)} \right) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot \left(1 - \lim_{\tau \to \infty} e^{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (-\tau)} \right) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot \left(\lim_{\tau \to \infty} e^{(-\beta - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot (1 - 0) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot (0 - 1) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} \cdot (1) + A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} \cdot (-1) = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} - A \cdot \frac{1}{-\beta - \jmath \cdot \omega} = \\
&= A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + A \cdot \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega} =
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + A \cdot \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega}$.

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \left| A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + A \cdot \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega} \right| = \\
&= \left| A \cdot \left(\frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega} \right) \right| = \\
&= \left| A \cdot \left(\frac{\beta + \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} + \frac{\alpha - \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} \right) \right| = \\
&= \left| A \cdot \frac{\beta + \jmath \cdot \omega + \alpha - \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} \right| =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| A \cdot \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot \alpha \cdot \omega - \jmath \cdot \beta \cdot \omega - \jmath \cdot \omega \cdot \jmath \cdot \omega} \right| = \\
&= \left| A \cdot \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega + \omega^2} \right| = \\
&= |A| \cdot \left| \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega + \omega^2} \right| = \\
&= |A| \cdot \frac{|\beta + \alpha|}{|\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega + \omega^2|} = \\
&= A \cdot \frac{\beta + \alpha}{|\alpha \cdot \beta + \omega^2 + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega|} = \\
&= A \cdot \frac{\beta + \alpha}{\sqrt{(\alpha \cdot \beta + \omega^2)^2 + ((\alpha - \beta) \cdot \omega)^2}} =
\end{aligned}
$$

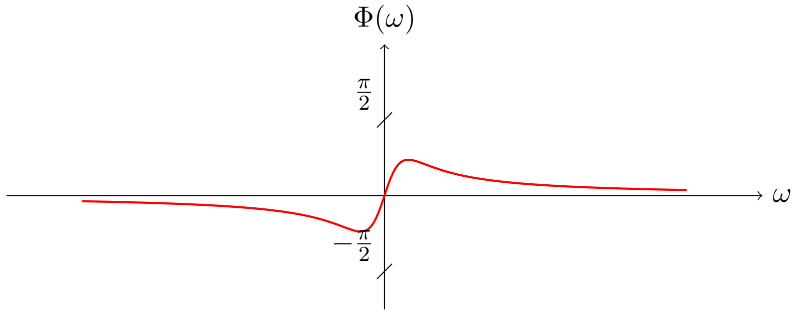


Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(A \cdot \frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + A \cdot \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega} \right) = \\
&= arg\left(A \cdot \left(\frac{1}{\alpha - \jmath \cdot \omega} + \frac{1}{\beta + \jmath \cdot \omega} \right) \right) = \\
&= arg\left(A \cdot \left(\frac{\beta + \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} + \frac{\alpha - \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} \right) \right) = \\
&= arg\left(A \cdot \frac{\beta + \jmath \cdot \omega + \alpha - \jmath \cdot \omega}{(\alpha - \jmath \cdot \omega) \cdot (\beta + \jmath \cdot \omega)} \right) = \\
&= arg\left(A \cdot \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot \alpha \cdot \omega - \jmath \cdot \beta \cdot \omega - \jmath \cdot \omega \cdot \jmath \cdot \omega} \right) = \\
&= arg\left(A \cdot \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega + \omega^2} \right) =
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right) \right\} =$$
$$= arg\left(A \cdot (\beta + \alpha)\right) - arg\left(\alpha \cdot \beta + \jmath \cdot (\alpha - \beta) \cdot \omega + \omega^2\right) =$$
$$= \left\{ arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg(\tfrac{b}{a}) \right\} =$$
$$= arctg\left(\frac{0}{A \cdot (\beta + \alpha)}\right) - arctg\left(\frac{(\alpha - \beta) \cdot \omega}{\alpha \cdot \beta + \omega^2}\right) =$$
$$= 0 - arctg\left(\frac{(\alpha - \beta) \cdot \omega}{\alpha \cdot \beta + \omega^2}\right) =$$
$$= -arctg\left(\frac{(\alpha - \beta) \cdot \omega}{\alpha \cdot \beta + \omega^2}\right)$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3