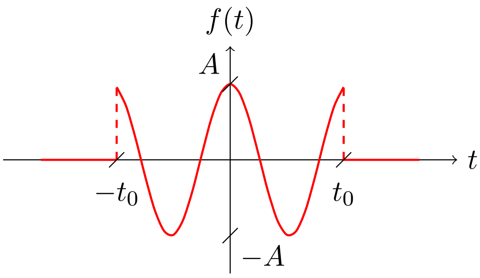
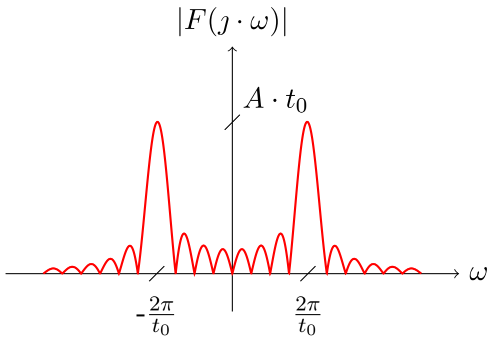
# Teoria Sygnałów w zadaniach




$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$


Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner



4 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone
ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

# Rozdział 1

# Podstawowe własności sygnałów

## 1.1 Podstawowe własności sygnałów

### 1.1.1 Wartość średnia

### 1.1.2 Energia sygnału

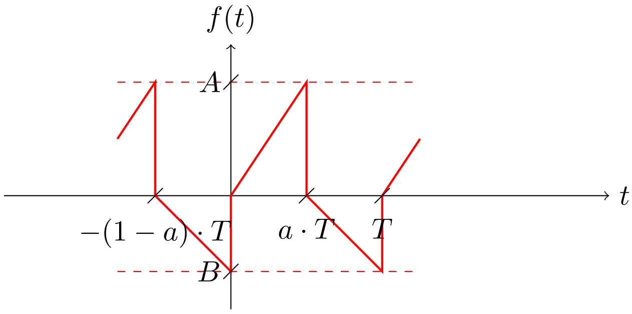
### 1.1.3 Moc sygnału

# Rozdział 2

# Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

## 2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

**Zadanie 1.** Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.




W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{2.1}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry $m$ i $b$:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry $m$ i $b$:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1 - a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1 - a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T \cdot (1 - a)} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T \cdot (1 - a)} \cdot t + \frac{B}{1 - a} \cdot a$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Współczynnik $a_0$ wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left( \int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \left( -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot dt + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{a \cdot T} - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_{a \cdot T}^{T} + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot t|_{a \cdot T}^{T} \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( \frac{(a \cdot T)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( \frac{T^2}{2} - \frac{(a \cdot T)^2}{2} \right) + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot (T - a \cdot T) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( \frac{a^2 \cdot T^2}{2} - \frac{0}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( \frac{T^2}{2} - \frac{a^2 \cdot T^2}{2} \right) + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot T \cdot (1-a) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( \frac{a^2 \cdot T^2}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot T^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( A \cdot \left( \frac{a \cdot T}{2} \right) - \frac{B}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - a^2 \right) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( A \cdot \frac{a \cdot T}{2} - \frac{B}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-a) \cdot (1+a) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+a) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot a + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left( A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} + B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) = \\
&= A \cdot a \cdot \frac{1}{2} - B \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \\
&= A \cdot a \cdot \frac{1}{2} - B \cdot \frac{1}{2} (1-a) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot A \cdot a - \frac{1}{2} \cdot B \cdot (1-a)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika $a_0$ wynosi $\frac{1}{2} \cdot A \cdot a - \frac{1}{2} \cdot B \cdot (1-a)$.

Współczynnik $a_k$ wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.3}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{a\cdot T}\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T}\left(-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot t + \frac{B}{1-a}\cdot a\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{a\cdot T}\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T}-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \int_{a\cdot T}^{T}\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\int_{a\cdot T}^{T} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{l} z = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} = dt \end{array}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\int_{a\cdot T}^{T} cos\,(z)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_{a\cdot T}^{T} cos\,(z)\cdot dz\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\,sin\,(z)|_{a\cdot T}^{T}\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{a\cdot T}^{T}\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left. + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)\right)\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = t & dv = cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du = dt & v = \frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \end{array}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} - \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$
$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} - \int_{a \cdot T}^{T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$
$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$
$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$
$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\right) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \right.$$
$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) +$$
$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( sin\,(k \cdot 2\pi) - sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right)\right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( \left( a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot -\right)\right) + \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\,(z) \cdot dz \right) +$$
$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( \left( T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right) + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\,(z) \cdot dz \right) +$$
$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( 0 - sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right)\right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( \left( a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) - 0\right) + \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(-cos\,(z)\right)\Big|_0^{a \cdot T} \right) +$$
$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( \left( T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi) - a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(-cos\,(z)\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} \right) +$$

$$+\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\left(-sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\Bigg)=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right.\right.+$$

$$\left.-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)\Bigg|_0^{a\cdot T}\right)+$$

$$-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot 0-a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right.+$$

$$\left.-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)\Bigg|_{a\cdot T}^{T}\right)+$$

$$\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right.\right.+$$

$$\left.-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)+cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)+$$

$$-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(0-a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right.+$$

$$\left.-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)+cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)\right)\right)+$$

$$\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+cos\left(0\right)\right)\right)\right.+$$

$$-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(-a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\right)+cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)+$$

$$\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot T^2\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+1\right)\right)\right.+$$

$$-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot T^2\left(-a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-1+cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)+$$

$$\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a}\cdot T\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)\right.+$$

$$+\frac{B}{1-a}\cdot T\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)+$$

$$\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)=$$

$$=\frac{2\cdot A}{a}\left(\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{2\cdot B}{1-a}\left(\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)+$$

$$-\frac{2\cdot B}{1-a}\cdot\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)=$$

$$= \frac{2 \cdot A}{a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \frac{2 \cdot A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) +$$
$$+ \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) +$$
$$- \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) =$$
$$= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) +$$
$$- \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) +$$
$$- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)$$
$$= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) +$$
$$- \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) +$$
$$- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)$$
$$= \left\{ \ \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(x\right)\right) = sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \ \right\} =$$
$$= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) +$$
$$- \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right) +$$
$$- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right)$$
$$= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right)$$

Wartość współczynnika $a_k$ wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right)$.

Współczynnik $b_k$ wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt +\right.$$
$$\left. + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt +\right.$$
$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot dz \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \, cos\left(z\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \, cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( -t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{a \cdot T} + \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( -t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( -t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{a \cdot T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( -t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left( cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(-t\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^{a\cdot T}+\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_0^{a\cdot T}cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\right)+\right.\\
&-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(-t\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{a\cdot T}^{T}+\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\right)+\\
&\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right)-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)=\\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(\left(-a\cdot T\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)+0\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)+\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\int_0^{a\cdot T}cos\left(z\right)\cdot dz\right)+\\
&-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\left(-T\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)+a\cdot T\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}cos\left(z\right)\cdot dz\right)+\\
&\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)=\\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(\left(-a\cdot T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+0\right)+\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{k^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\left(sin\left(z\right)\right)\Big|_0^{a\cdot T}\right)+\\
&-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\left(-T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)+a\cdot T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{k^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\left(sin\left(z\right)\right)\Big|_{a\cdot T}^{T}\right)+\\
&\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)=\\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(-a\cdot T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{k^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)\Bigg|_0^{a\cdot T}\right)+\\
&-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\left(-T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot 1+a\cdot T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{k^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)\Bigg|_{a\cdot T}^{T}\right)+\\
&\left.-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(1-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right)=\\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(-a\cdot T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{k^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)-sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)+\\
&-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-1+a\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)+\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left( sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\Bigg) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \Bigg( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \Bigg( -a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \\
&+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - sin\left(0\right)\right)\Bigg) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \Bigg( \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-1 + a \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(sin\left(k \cdot 2\pi\right) - sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \Bigg( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \Bigg( -a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \\
&+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - 0\right)\Bigg) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \Bigg( \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-1 + a \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(0 - sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \Bigg( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \left( -a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left( \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-1 + a \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \Bigg( \frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left( -a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \left(-1 + a \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left( -a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \left(-1 + a \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot \left( -a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{B}{1-a}\cdot\left(\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(-1+a\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a))-\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)\right)+\\
&-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(1-cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a))=\\
&=-\frac{A}{a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\frac{A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&-\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(-1+a\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a))+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(1-cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a))=\\
&=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\frac{A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}-\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot a\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}+\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)=\\
&=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\frac{A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}=\\
&=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\\
&+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(1-a)=\\
&=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\frac{B}{k\cdot\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika $b_k$ wynosi $\frac{B}{k\cdot\pi}-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2}\cdot A\cdot a-\frac{1}{2}\cdot B\cdot(1-a)\\
a_k&=\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot\pi^2}\cdot sin^2\,(k\cdot\pi\cdot a)\\
b_k&=\frac{B}{k\cdot\pi}-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\,(k\cdot 2\pi\cdot a)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\,(k\cdot 2\pi\cdot a)
\end{aligned}
$$

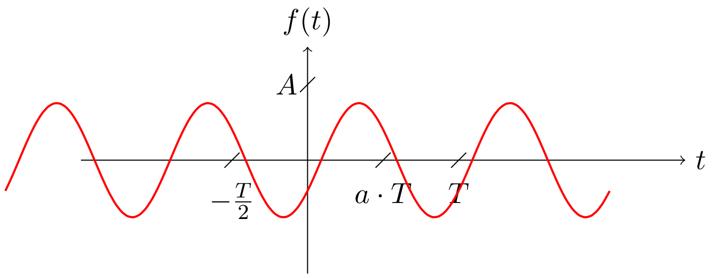
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników $a_k$ i $b_k$:

| $k$ | $a_k$ | $b_k$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{A}{\pi} \cdot sin\left(2\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot sin^2\left(\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{\pi} - \frac{A}{\pi} \cdot cos\left(2\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{2\pi^2} \cdot sin\left(2\pi \cdot a\right)$ |
| 2 | $\frac{A}{2\pi} \cdot sin\left(4\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot sin^2\left(2\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{2\pi} - \frac{A}{2\pi} \cdot cos\left(4\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{8\pi^2} \cdot sin\left(4\pi \cdot a\right)$ |
| 3 | $\frac{A}{3\pi} \cdot sin\left(6\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{9\pi^2} \cdot sin^2\left(3\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{3\pi} - \frac{A}{3\pi} \cdot cos\left(6\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{18\pi^2} \cdot sin\left(6\pi \cdot a\right)$ |
| 4 | $\frac{A}{4\pi} \cdot sin\left(8\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{16\pi^2} \cdot sin^2\left(4\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{4\pi} - \frac{A}{4\pi} \cdot cos\left(8\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{32\pi^2} \cdot sin\left(8\pi \cdot a\right)$ |
| 5 | $\frac{A}{5\pi} \cdot sin\left(10\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{25\pi^2} \cdot sin^2\left(5\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{5\pi} - \frac{A}{5\pi} \cdot cos\left(10\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{50\pi^2} \cdot sin\left(10\pi \cdot a\right)$ |
| 6 | $\frac{A}{6\pi} \cdot sin\left(12\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{36\pi^2} \cdot sin^2\left(6\pi \cdot a\right)$ | $\frac{B}{6\pi} - \frac{A}{6\pi} \cdot cos\left(12\pi \cdot a\right) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{72\pi^2} \cdot sin\left(12\pi \cdot a\right)$ |

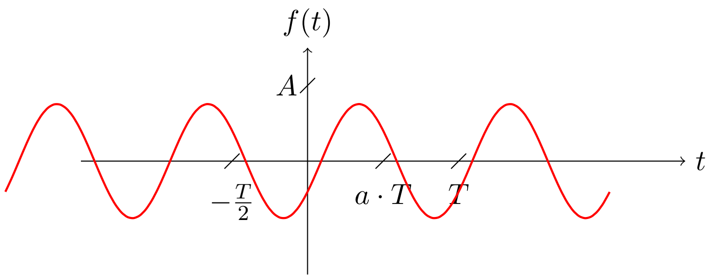
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{2.5}$$

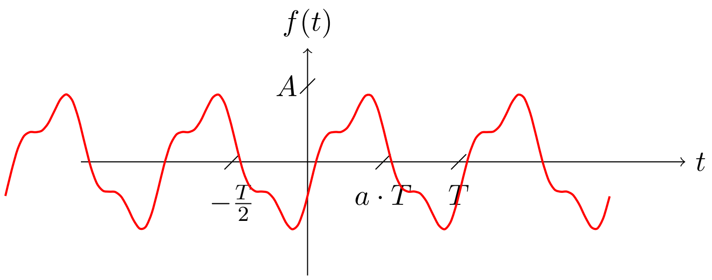
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



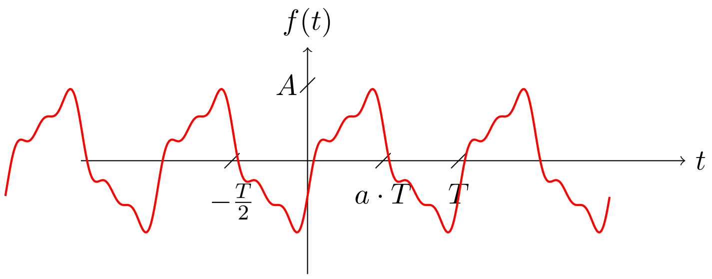

W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



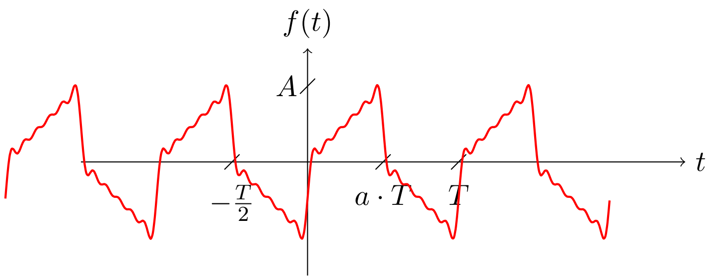

W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



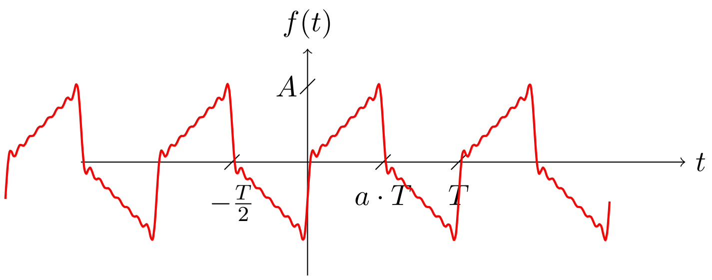

W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:




W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:




W przypadku sumowania do $k_{max} = 16$ otrzymujemy:




W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

## 2.2 Zespolony szerego Fouriera

## 2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

# Rozdział 3

# Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

## 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

## 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

## 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

# Rozdział 4

# Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

## 4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

## 4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3