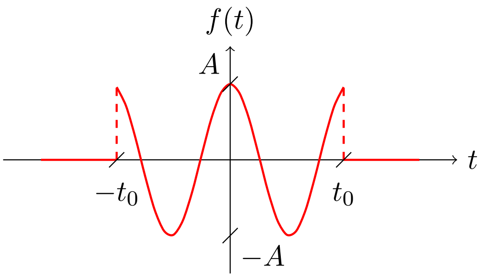
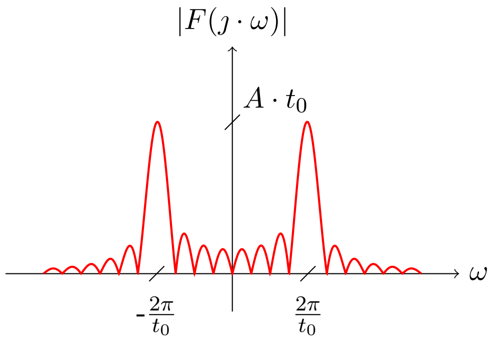
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) \\ -Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

7 czerwca 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1.

Oblicz, jaka część energi sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \tag{1}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} =? \tag{3}$$

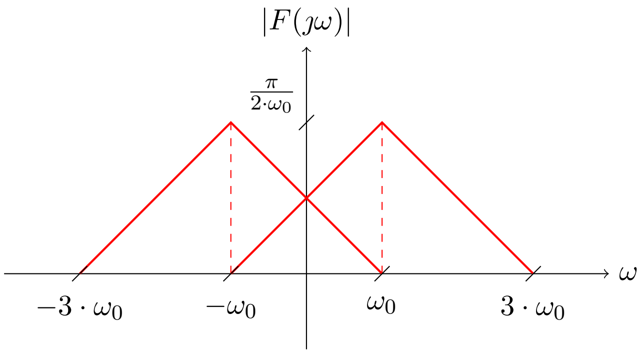
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala:

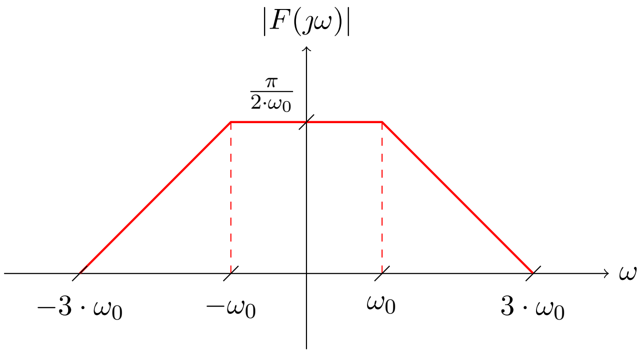
$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{4}$$

W tym celu musimy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.





$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3\cdot\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (-3\cdot\omega_0; -\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{2\cdot\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0\rangle \\ -\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3\cdot\omega_0\rangle \\ 0 & \omega \in (3\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\int_{-\infty}^{-3\cdot\omega_0}|0|^2\cdot d\omega + \int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left|\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega+\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega\right. \\
&\left.+\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left|-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega+\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{3\cdot\omega_0}^{\infty}|0|^2\cdot d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[0+\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left(\left(\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2+2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega+\left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega+\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega\right. \\
&\left.+\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left(\left(-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2-2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega+\left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega+0\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega^2\cdot d\omega+\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega\cdot d\omega+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}d\omega+\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0}\right. \\
&\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega^2\cdot d\omega-\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega\cdot d\omega+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}+\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}+\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0-(-\omega_0))\right. \\
&\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}-\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(-\frac{\omega_0^3}{3}-\left(-\frac{27\cdot\omega_0^3}{3}\right)\right)+\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{\omega_0^2}{2}-\frac{9\cdot\omega_0^2}{2}\right)+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(-\omega_0-(-3\cdot\omega_0))\right. \\
&\left.+\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot2\cdot\omega_0+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(\frac{27\cdot\omega_0^3}{3}-\frac{\omega_0^3}{3}\right)-\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{9\cdot\omega_0^2}{2}-\frac{\omega_0^2}{2}\right)+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(3\cdot\omega_0-\omega_0)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3}+\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(-\frac{8\cdot\omega_0^2}{2}\right)+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot2\cdot\omega_0+\frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0}\right. \\
&\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3}-\frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\frac{8\cdot\omega_0^2}{2}+\frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot2\cdot\omega_0\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0}-\frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0}+\frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0}+\frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0}+\frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0}-\frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0}+\frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{26}{24}-\frac{48}{16}+\frac{18}{8}+1+\frac{26}{24}-\frac{48}{16}+\frac{18}{8}\right] \\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24}-\frac{96}{16}+\frac{36}{8}+1\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24}-6+\frac{108}{24}+1\right]\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-5\right]\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-\frac{120}{24}\right]\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{40}{24}\right]\\
&= \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując, całkowita energia sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0\cdot t)\cdot cos(\omega_0\cdot t)$ to $E = \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega \tag{5}$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega|<\omega_0} &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\right)\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0}\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0-(-\omega_0))\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(2\cdot\omega_0)\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = ? \tag{6}$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = \frac{\frac{\pi}{4\cdot\omega_0}}{\frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\frac{12\cdot\omega_0}{5\cdot\pi} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 60\%$$

Dla pulsacji z zakresu $|\omega| < \omega_0$ przypada 60% energi sygnału.

ISBN 978-83-939620-1-3