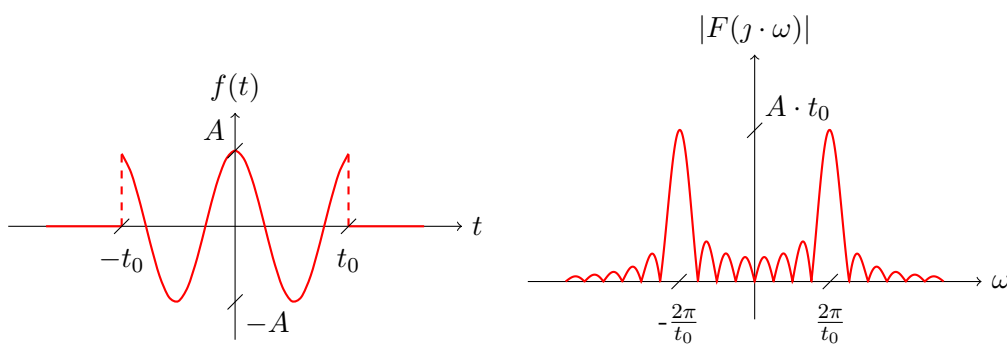


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

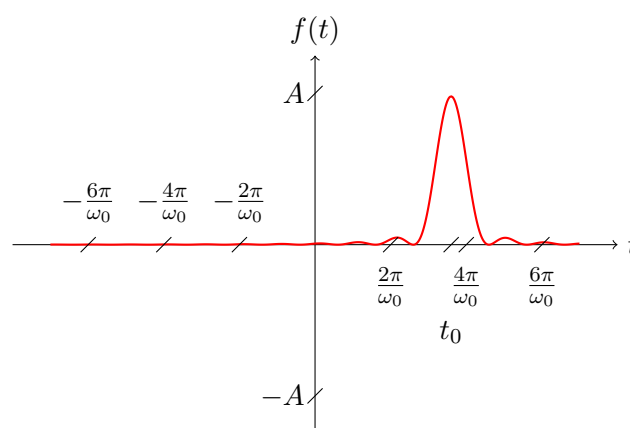
3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3.1)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.2)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot \frac{e^{j\omega_0 \cdot t} + e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \right) = \\
&= \begin{cases} f_1(t) &= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \end{cases} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_1(t) + f_2(t))
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) &= g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\
g(t) &= H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)
\end{aligned}$$

Tak więc zacznijmy od transformaty sygnału trójkątnego $h(t) = \Lambda(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa^2 .

$$\begin{aligned}
h(t) &= \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
g_1(t) &= H(t) = Sa^2 \left(\frac{t}{2} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(-\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega)
\end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned}
g(t) &= Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) = \\
&= \left\{ k(t) = Sa^2 \left(\frac{t}{T} \right) \right\} = \\
&= k(t-t_0)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $k(t)$ możemy z łatwością wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ za pomocą twierdzenia o przesunięciu w czasie

$$k(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega)$$

$$g(t) = k(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = K(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $k(t)$.

$$\begin{aligned} k(t) &= Sa^2 \left(\frac{t}{T} \right) = \\ &= Sa^2 \left(\frac{2 \cdot t}{2 \cdot T} \right) = \\ &= Sa^2 \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{t}{2} \right) = \\ &= \left\{ a = \frac{2}{T} \right\} = \\ &= Sa^2 \left(a \cdot \frac{t}{2} \right) = \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $k(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega)$$

$$k(t) = g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{ \alpha = \frac{2}{T} \right\} = \\ &= \frac{1}{\left| \frac{2}{T} \right|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\frac{2}{T}}) = \\ &= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \right\} = \\ &= \frac{1}{\frac{2}{T}} \cdot 2\pi \cdot \Lambda \left(\frac{\omega}{\frac{2}{T}} \right) = \\ &= \pi \cdot T \cdot \Lambda \left(\frac{\omega \cdot T}{2} \right) \end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $k(t) = Sa^2 \left(\frac{t}{T} \right)$ jest równa $K(j\omega) = \pi \cdot T \cdot \Lambda \left(\frac{\omega \cdot T}{2} \right)$

Podstawiając do wzoru na transformatę sygnału $g(t) = Sa^2 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) = k(t-t_0)$ otrzymamy $G(j\omega) = K(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \pi \cdot T \cdot \Lambda \left(\frac{\omega \cdot T}{2} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$f_1(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t}$$

$$f_2(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f_1(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

otrzymujemy:

$$F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0)) =$$

$$= \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0}$$

$$F_2(j\omega) = G(j(\omega + \omega_0)) =$$

$$= \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega)$$

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)$$

otrzymujemy:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot (F_1(j\omega) + F_2(j\omega)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0} + \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0} \right)$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0} + \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0} \right)$$

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

