Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

30 maja 2019

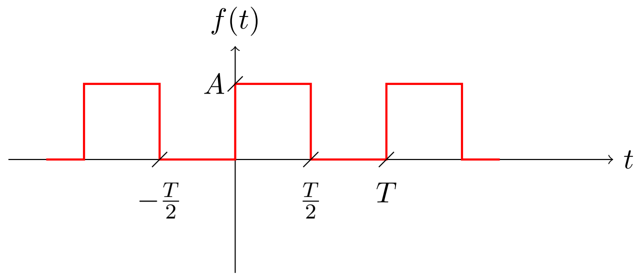
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1}$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

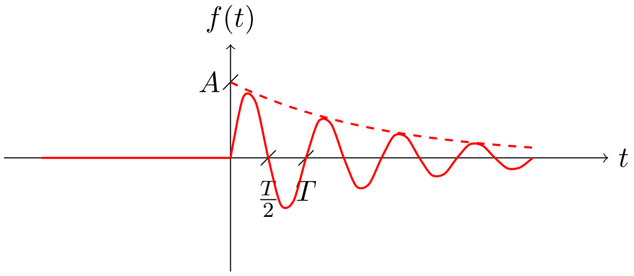
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Zadanie 2. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \tag{4}$$

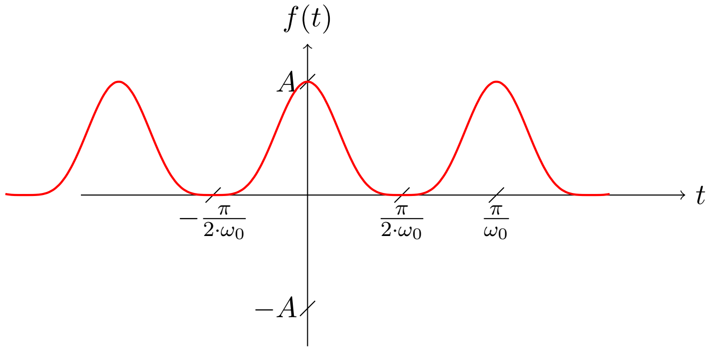
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} u = sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} u = cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a}\cdot 1\cdot 0\right)\right.\right.\\
&+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right)\right)\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+0\right)\right.\right.\\
&+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a}\cdot 1\cdot 1\right)\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right)\right)\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\right.\\
&-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\
&\left.+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{array}{l}
-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\\
-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\
+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt=\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt
\end{array}\right\}\\
&= \left\{\begin{array}{l}
-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\
=\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt
\end{array}\right\}\\
&= \left\{\begin{array}{l}
-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\
=\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt
\end{array}\right\}\\
&= \left\{\begin{array}{l}
\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)}\\
=\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt
\end{array}\right\}\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Zadanie 3. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot cos^4(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \tag{5}$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \\
&= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^4\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^2\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+\left(e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2}{2^2}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^{0}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)\cdot 2+2^2}{4^2}\cdot dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 2\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t - \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{0} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2 + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t & z_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t \\ dz_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt & dz_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot\frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot\frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_3}\cdot\frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_4}\cdot\frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot dz_2 + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_3}\cdot dz_3\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_4}\cdot dz_4 + 6\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} dt\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_1}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_2}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_3}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_4}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{+\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + 6\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0} + \frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot\pi}\right) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot\pi}\right) + 6\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$$

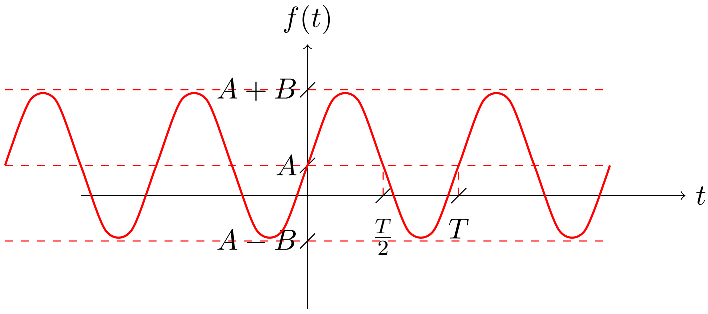
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot(1-1) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot(1-1)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot(-1-(-1)) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot(-1-(-1)) + 6\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)$$
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)$$
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right)$$
$$= \frac{A}{16} \cdot 6$$
$$= \frac{A}{8} \cdot 3$$
$$= \frac{3}{8} \cdot A$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{6}$$

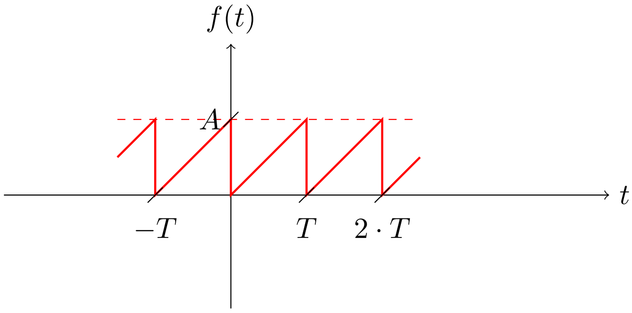
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left| A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot \int_0^T dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \begin{Bmatrix} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{Bmatrix} \\
&= A^2 \cdot t|_0^T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + B^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot (T - 0) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T sin(z) \cdot dz + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos(z)|_0^T\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) \\
&= \begin{Bmatrix} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{Bmatrix} \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t|_0^T - \int_0^T cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw\right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T cos(w) \cdot dw\right)
\end{aligned}$$

$$= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-cos\,(2\pi) + cos\,(0)) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -sin\,(w)|_0^T\right)$$
$$= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-1 + 1) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T\right)$$
$$= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot 0 + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right)$$
$$= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (sin\,(4\pi) - sin\,(0))\right)$$
$$= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0)\right)$$
$$= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (T)$$
$$= A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T$

Zadanie 5. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{7}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{8}$$

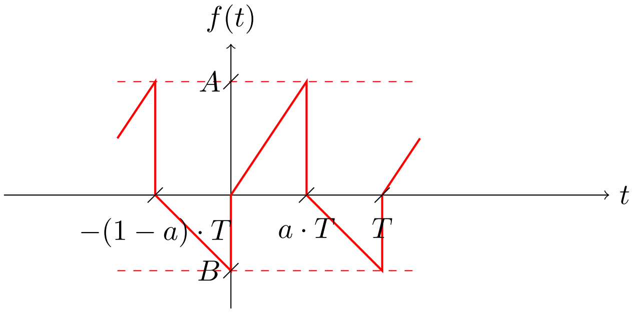
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot T
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot T$

Zadanie 6. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać za pomocą dwuch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{9}$$

W pierwszym okresie w pierwszej części wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a\cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = -\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{10}$$

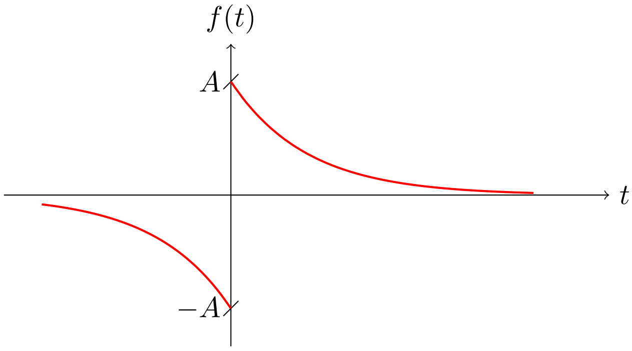
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a\cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left| \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a\cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a\cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \int_0^{a\cdot T} t^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot dt \Big|_0^{a\cdot T} \right) + \int_{a\cdot T}^{T} \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt - \int_{a\cdot T}^{T} 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a\cdot T} \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a\cdot T}^{T} t \cdot dt + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a\cdot T}^{T} dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a\cdot T}^{T} \right) - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a\cdot T}^{T} \right) \\ &+ \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t \big|_{a\cdot T}^{T} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0\right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3\right)$$
$$- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2\right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T)$$
$$= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3\right)$$
$$- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2\right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(1 - a^3\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3$$
$$- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(1 - a^2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot \left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T$$
$$- \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6}\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 2 \cdot a + a^2\right)$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2$$
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T$

Zadanie 7. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{11}$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{12}$$

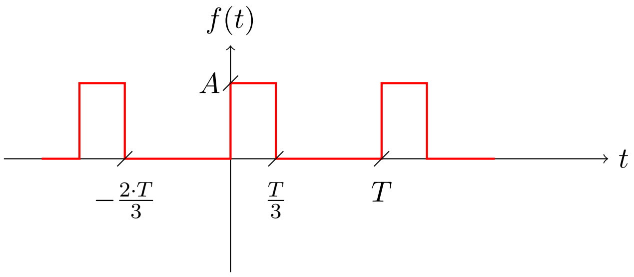
Podstawiamy do wzoru na enargie wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left| -A \cdot e^{a \cdot t} \right|^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left| A \cdot e^{-a \cdot t} \right|^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left(-A \cdot e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left(A \cdot e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} (-A)^2 \cdot \left(e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot \left(e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot dz - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot dw \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{z} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{w} \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^{2\cdot a\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{-2\cdot a\cdot dt}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{2\cdot a\cdot 0} - e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2\cdot a\cdot 0} \right) \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{0} - e^{-a\cdot\tau} \right) - \left(e^{-a\cdot\tau} - e^{0} \right) \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} - e^{-a\cdot\tau} + 1 \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(2 - 2\cdot e^{-a\cdot\tau} \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot 2 \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

Zadanie 8. Oblicz wartość energii okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{13}$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

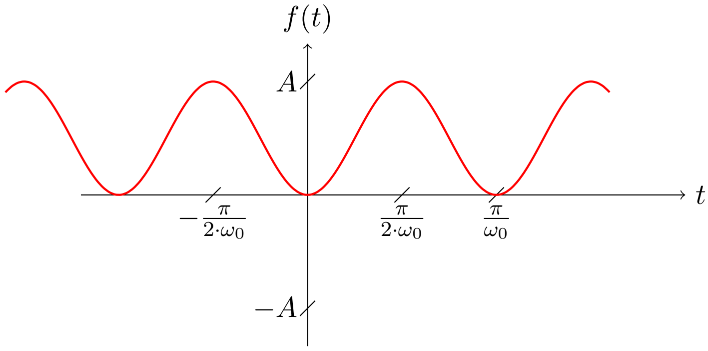
$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{14}$$

Podstawiamy do wzoru na enargie wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} |0|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} 0 \cdot dt \\ &= A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \\ &= A^2 \cdot t|_0^{\frac{T}{3}} \\ &= A^2 \cdot \left(\frac{T}{3} - 0\right) \\ &= A^2 \cdot \frac{T}{3} \end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot \frac{T}{3}$

Zadanie 9. Oblicz wartość energii sygnału $f(t) = A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{15}$$

Podstawiamy do wzoru na energie wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned}
E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left| A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t) \right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath} \right)^4 \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^4}{(2\cdot\jmath)^4} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array} \right\} \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{1\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^4 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^0 + 4\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^3 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^1 + 6\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 4\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^1 \cdot \left(-e^{-\right.}{(2\cdot\jmath)^4} \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0}}{2^4\cdot\jmath^4} \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - \jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{16\cdot 1} \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{16} \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{0}}{16} \cdot dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \int_0^T \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\int_0^T e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_0^T e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt - 4\cdot\int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt - 4\cdot\int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + 6\cdot\int_0^T dt\right)$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = 4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t & z_2 = -4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t & z_3 = 2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t & z_4 = -2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t \\ dz_1 = 4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot dt & dz_2 = -4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot dt & dz_3 = 2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot dt & dz_4 = -2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot dt \\ dt = \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_4 \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1}\cdot\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2}\cdot\frac{1}{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_2 - 4\cdot\int_0^T e^{z_3}\cdot\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot dz_3 - 4\cdot\int_0^T e^{z_4}\cdot\frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot d\right.$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\int_0^T e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\int_0^T e^{z_2}\cdot dz_2 - 4\cdot\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\int_0^T e^{z_3}\cdot dz_3 - 4\cdot\frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\int_0^T e^{z_4}\cdot d\right.$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{z_1}\Big|_0^T - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{z_2}\Big|_0^T - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{z_3}\Big|_0^T + \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{z_4}\Big|_0^T + 6\cdot t\Big|_0^T\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + 6\cdot t\Big|_0^T\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + \right.$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) + \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\right.\right.$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}\right.\right.$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} + \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + \frac{4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{4}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + 6\cdot T\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + \frac{4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + 6\cdot T\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} - \frac{4\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 4\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} + 6\cdot T\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath} - \frac{4}{\omega_0}\cdot\frac{e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2\cdot\jmath} + 6\cdot T\right)$$

$$= \left\{sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\ cdotx}}{2\cdot\jmath}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot sin\left(4\cdot\omega_0\cdot T\right) - \frac{4}{\omega_0}\cdot sin\left(2\cdot\omega_0\cdot T\right) + 6\cdot T\right)$$

$$= \left\{T = \frac{2\pi}{\omega_0}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot sin\left(4\cdot\omega_0\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0}\cdot sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot sin\left(8\pi\right) - \frac{4}{\omega_0}\cdot sin\left(4\pi\right) + 6\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

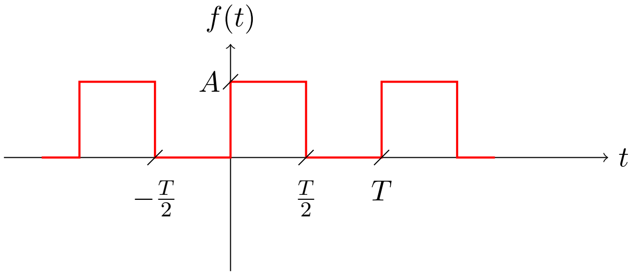
$$= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot 0 - \frac{4}{\omega_0}\cdot 0 + 6\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

$$= \frac{A^2}{16} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0}$$

$$= \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3\pi}{\omega_0}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{4} \cdot \frac{3\pi}{\omega_0}$

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{16}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{17}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{18}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{19}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - sin\left(0\right)\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - 0\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\pi\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{21}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\, cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\, cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\pi\right) - cos\left(0\right)\right) \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\pi\right) - 1\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(1 - cos\left(k\cdot\pi\right)\right)
\end{aligned} \tag{22}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k\cdot\pi}\left(1 - cos\left(k\cdot\pi\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(1 - cos\left(k\cdot\pi\right)\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

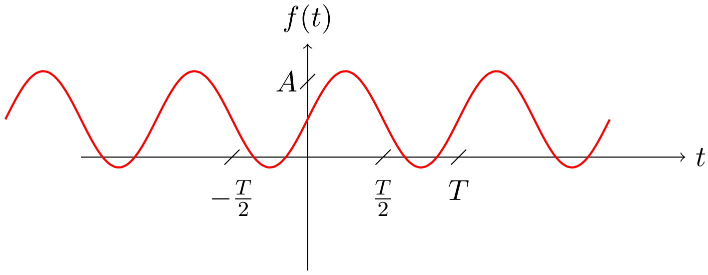
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	0

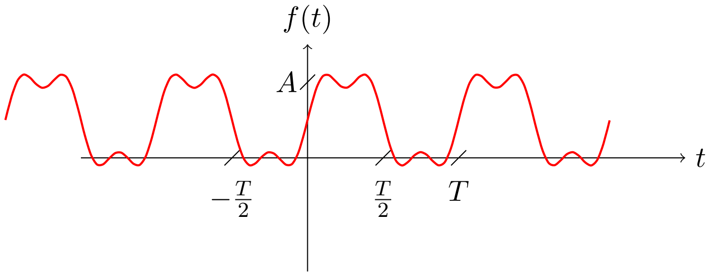
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) + b_k\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right] \tag{24}$$

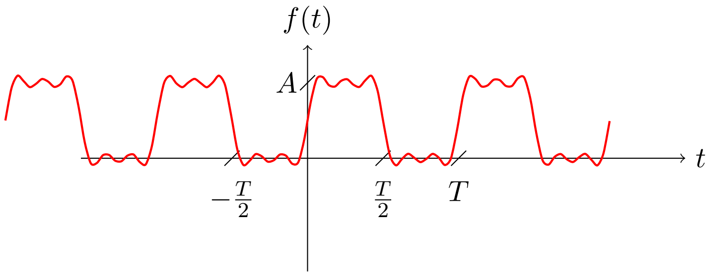
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



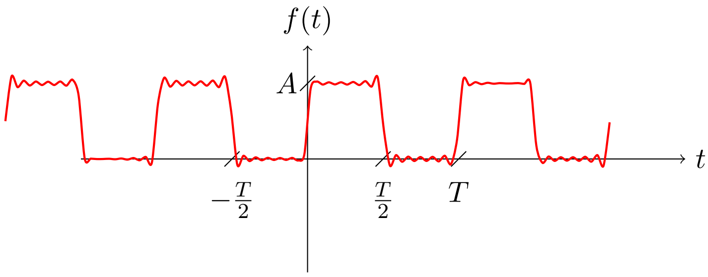
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



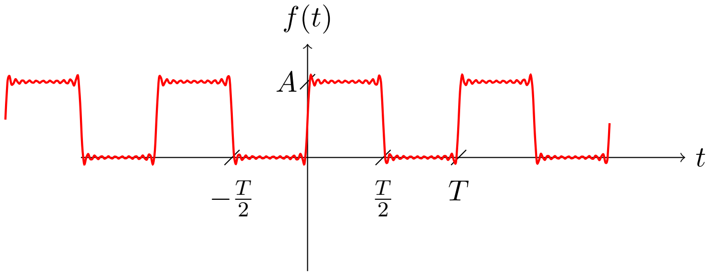
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

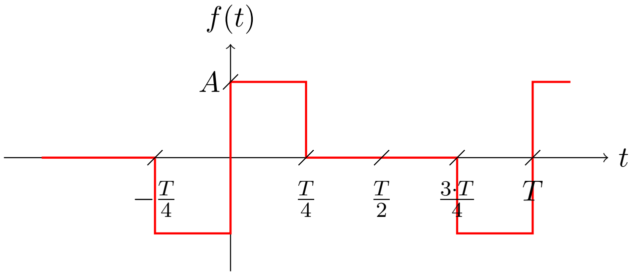


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 11. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \quad \wedge k \in C \tag{25}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{26}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right)\right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{28}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt & = \frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot dt + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\,sin\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) - sin\left(0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(0 - sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(0\right)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{30}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot dz + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot dz\right)\\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot dz\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\,(z)|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\,(z)|_0^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\,(0) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\,(0)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\,(0) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + cos\,(0)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(2 - 2\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_k &= 0\\
b_k &= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

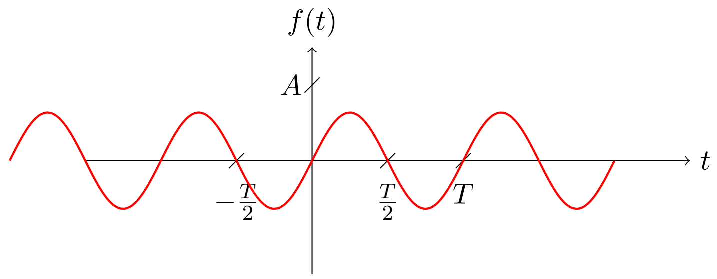
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$

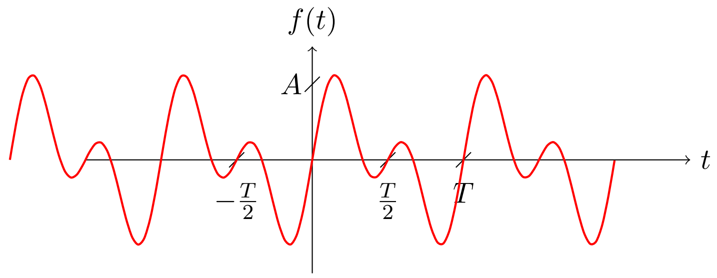
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{33}$$

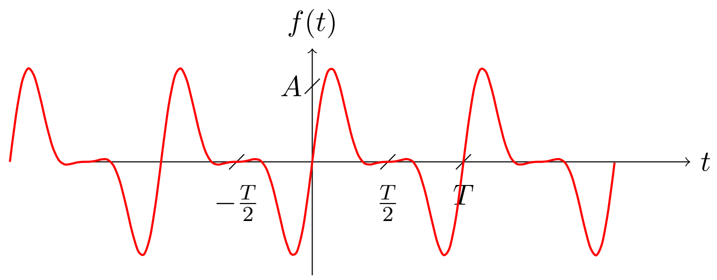
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



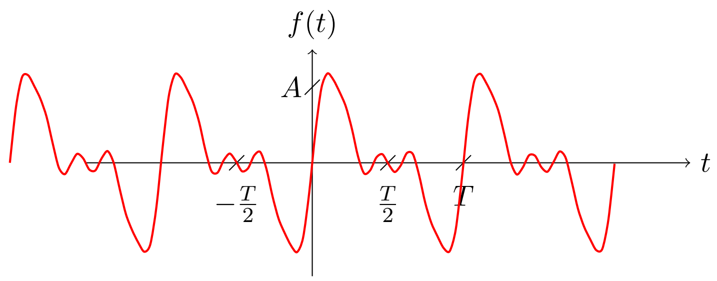
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



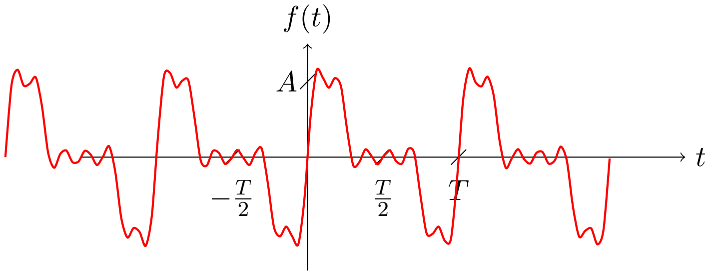
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



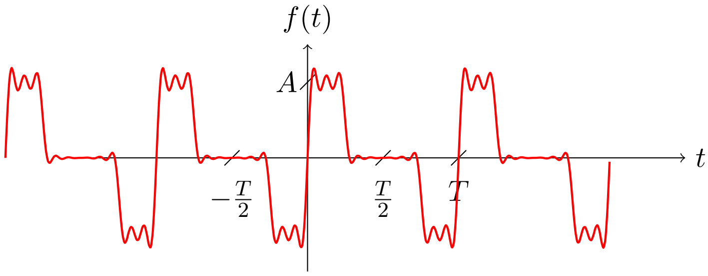
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



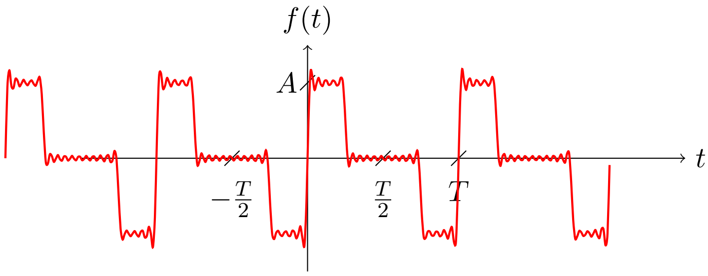
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

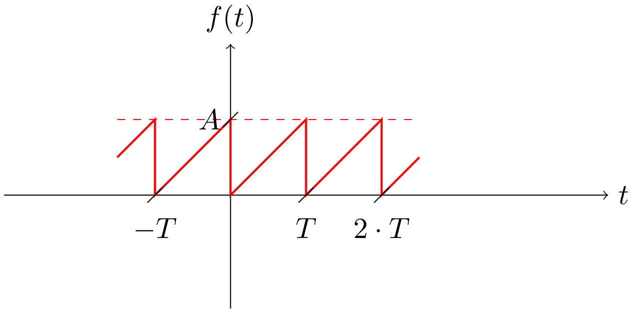


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{34}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{35}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T^2 - 0^2\right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{36}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2}\int_0^T t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{Bmatrix} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(cos\left(k \cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1)\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{37}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{38}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{Bmatrix}\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right)\\
&= -\frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned} \tag{39}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k\cdot\pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2}\\
a_k &= 0\\
b_k &= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned} \tag{40}$$

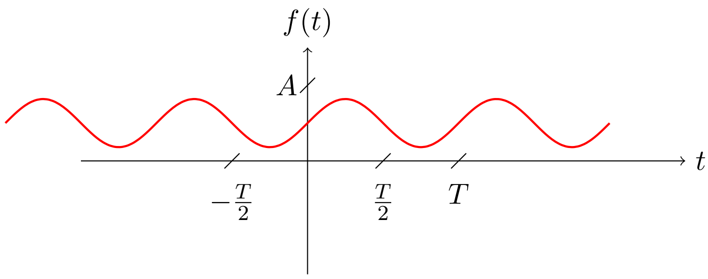
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

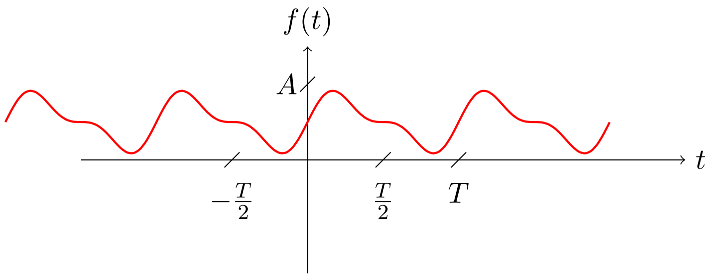
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{41}$$

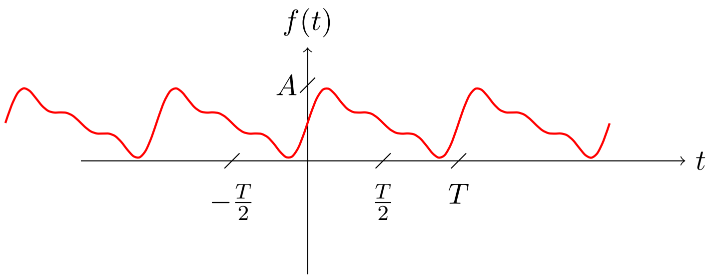
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



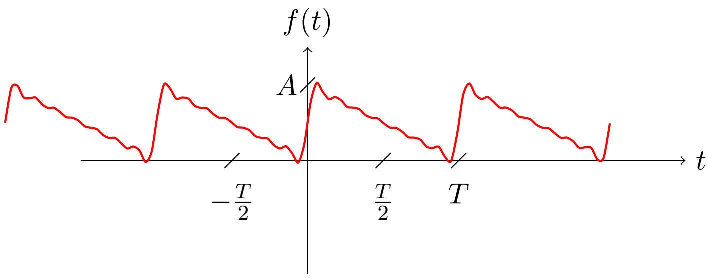
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



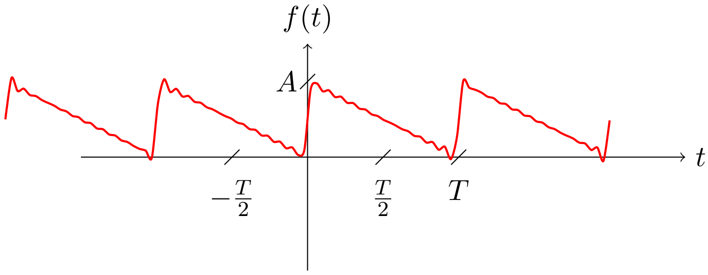
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

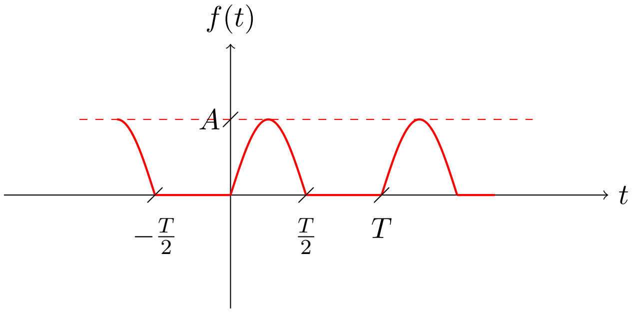


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{42}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{43}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1-1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{44}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} cos\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2\jmath} + \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2\jmath} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\}
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) \right.
$$

$$
\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(0\right) \right) \right.
$$

$$
\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - cos\left(0\right) \right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) \right) \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) \right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1}{1-k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right)
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right)
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + 1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right)
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{1-k^2}
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{l} cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) = cos\left(\pi + k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \\ cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) = cos\left(\pi - k \cdot \pi\right) = -cos\left(-k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \end{array} \right\}
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + cos\left(k \cdot \pi\right) - k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right) + cos\left(k \cdot \pi\right) + k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2}
$$

$$
= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2}
$$

$$
= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost a_1

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} cos\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^0 - e^0\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2\jmath}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (cos\,(2\pi) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1-1) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{45}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}
$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{matrix}\right\}$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(z_1\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(z_2\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1+k)\right) - sin\left(0\right) \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1-k)\right) - sin\left(0\right) \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot 0$$

$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost b_1

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right)$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right)$$

$$= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\}$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right)$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right)$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0} \right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)$$
$$= \left\{ \begin{aligned} z &= \tfrac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \tfrac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\}$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\,(2\pi) - sin\,(0) \right) - \frac{T}{2} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2} \right)$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right)$$
$$= \frac{A}{2}$$

A wiec wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1 - k^2} \\ b_1 &= \frac{A}{2} \\ b_k &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

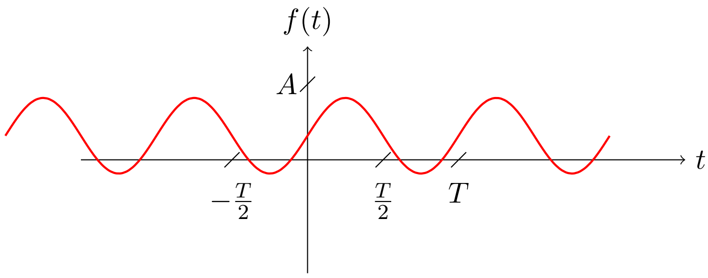
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

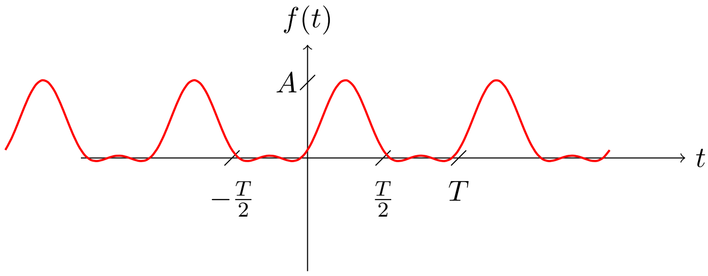
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{47}$$

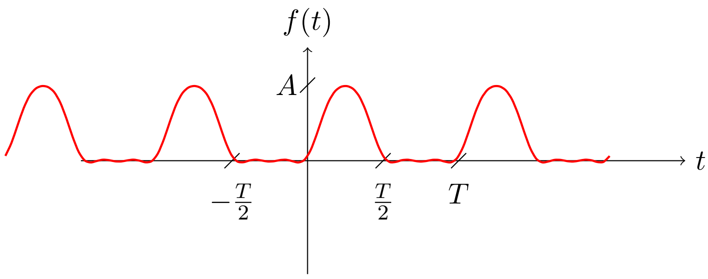
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



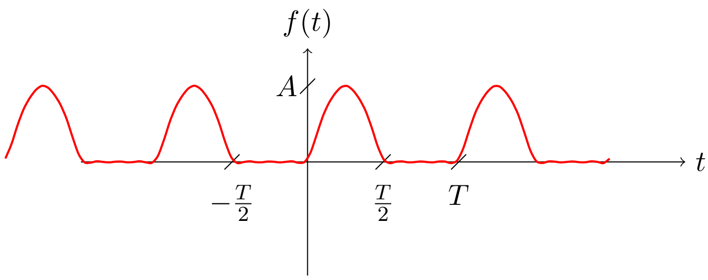
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



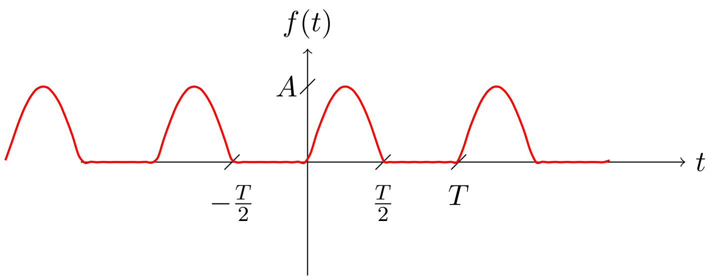
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

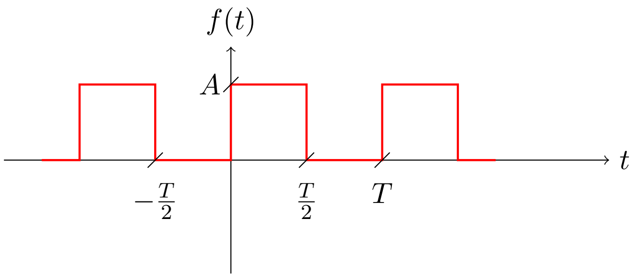


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 14. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{48}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{49}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{50}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{51}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^{0}\right) \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned} \tag{52}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi}-1\right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi}-1\right)
\end{aligned} \tag{53}
$$

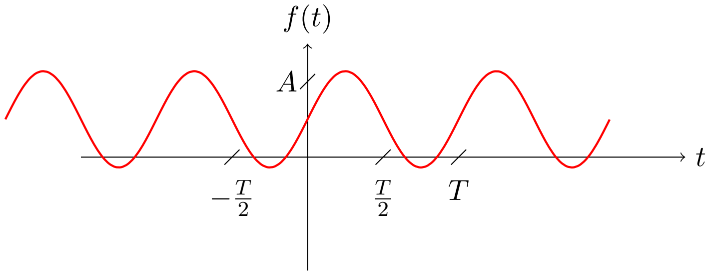
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k\rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

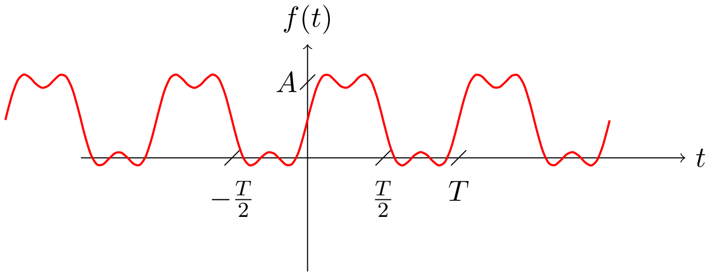
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \tag{54}
$$

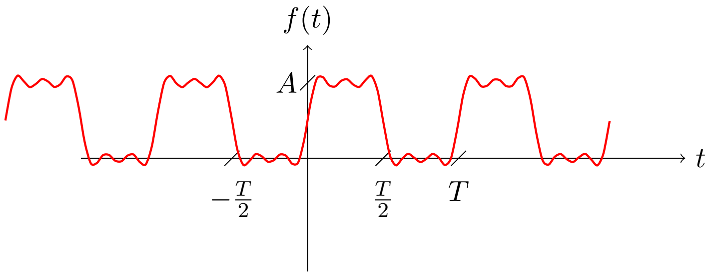
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



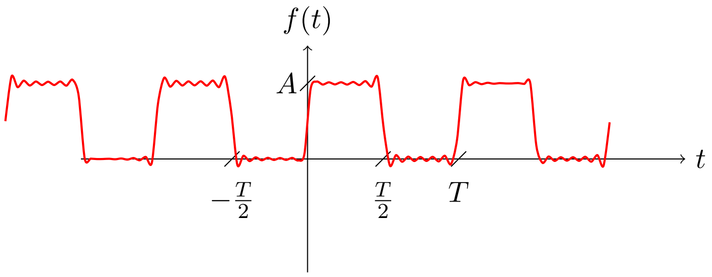
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



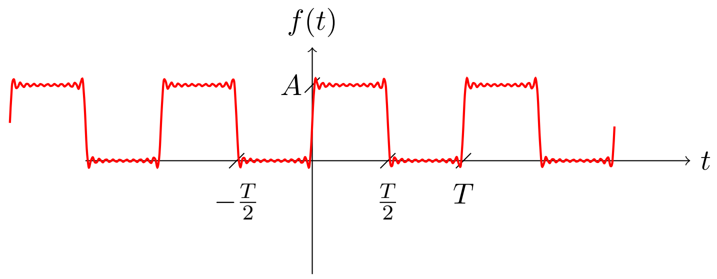
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

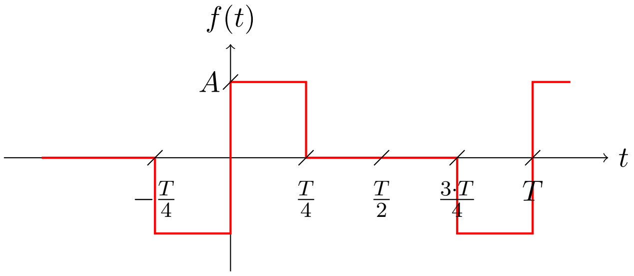


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 15. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \quad \wedge k \in C \tag{55}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{56}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{58}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{matrix} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt & = \frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(-\frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot dt + \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(e^{z}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{z}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}} - e^{0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + 1\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(2 - \left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot 2\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot \pi}\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\\
&= \left\{cos(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot \pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot \pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot \pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

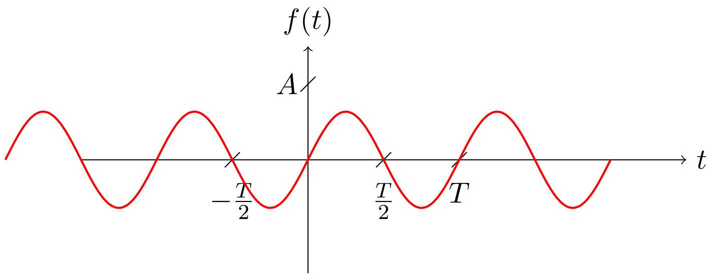
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$
$\|F_k\|$	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

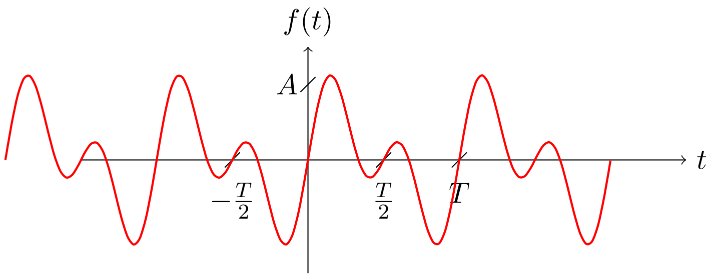
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{60}
$$

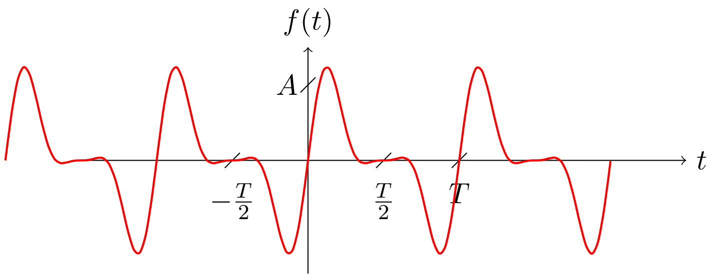
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



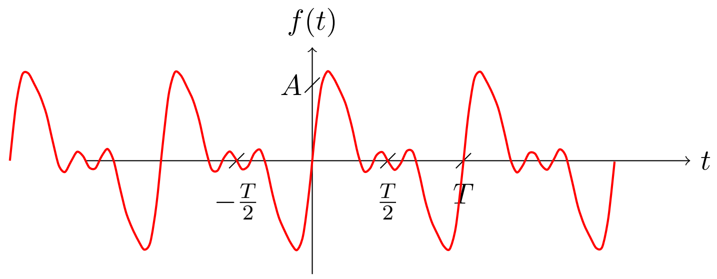
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



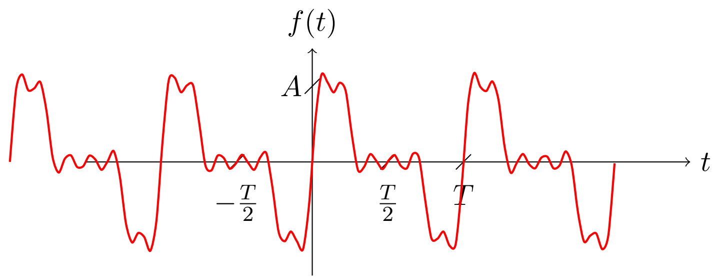
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



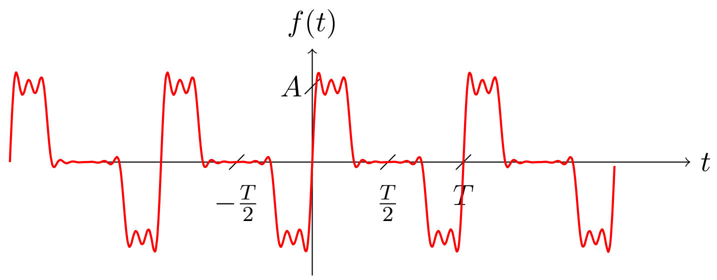
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



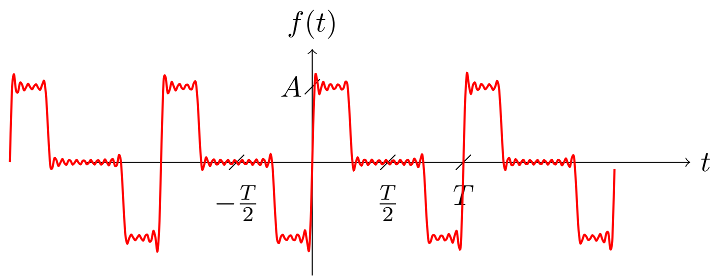
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

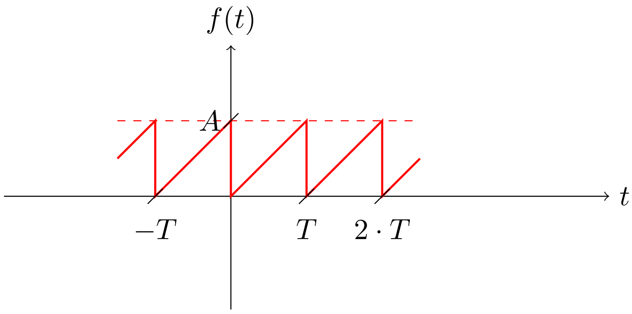


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 16. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{61}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{62}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt\\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2\\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$
Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{63}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\ du & = dt & v & = \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - 0\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T^2}{\left(-\jmath\cdot k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} + \frac{T^2}{-\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - e^0\right)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot(1-1)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot 0\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - 0\right)\\
&= \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}
\end{aligned}
$$

$$= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \tag{64}$$

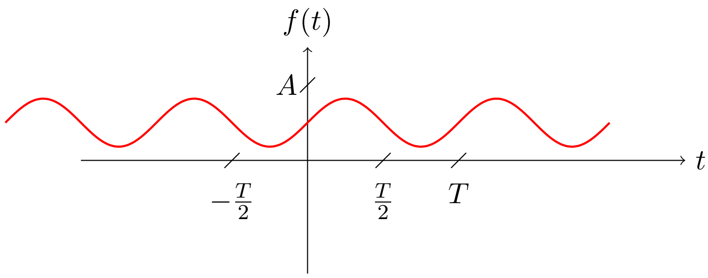
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg\,(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

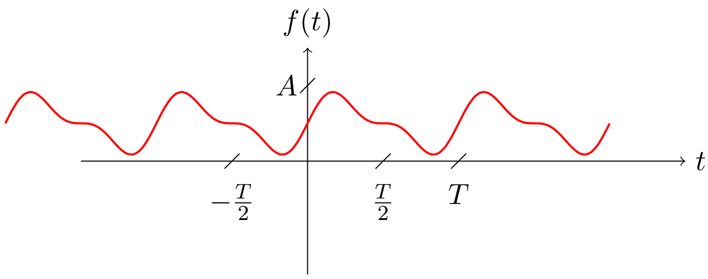
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{65}$$

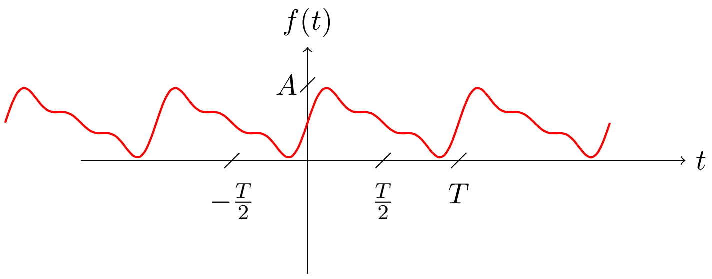
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



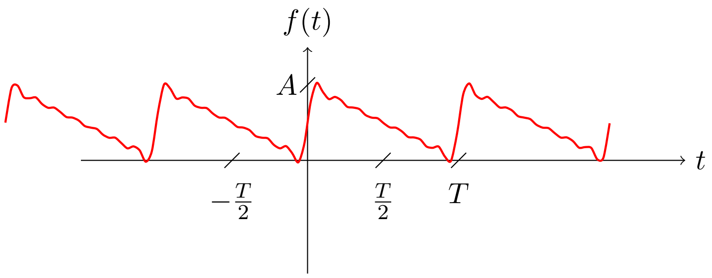
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



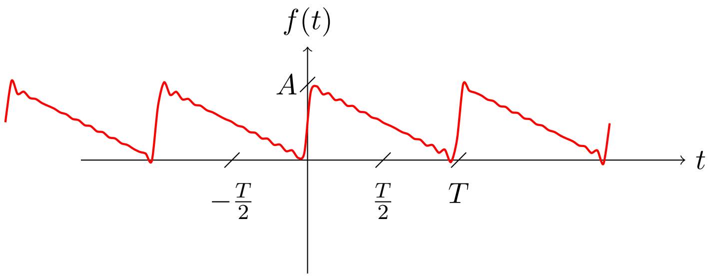
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

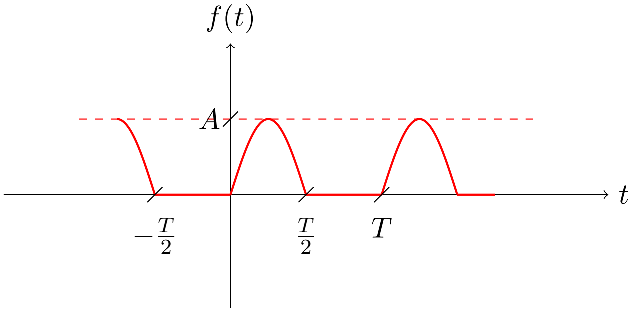


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 17. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{66}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot dt \tag{67}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right) \\
&= \frac{A}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0\right) \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{68}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt & = \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0}\right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0}\right)\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0\right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0\right)\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1\right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1\right)\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1\right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1\right)}{(1-k) \cdot (1+k)}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1\right) + (1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1\right)}{(1-k) \cdot (1+k)}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 2}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2}\right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}+1}{1-k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_1

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right)$$

$$= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right)$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} z & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right)$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0\right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4\jmath} \\
&= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_1 wynosi $-\jmath \cdot \frac{A}{4}$

F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć wspołczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_{-1}

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} z & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z|_0^{\frac{T}{2}} - t|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} \\
&= -\frac{A}{4\jmath} \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= \jmath \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
\tag{69}
$$

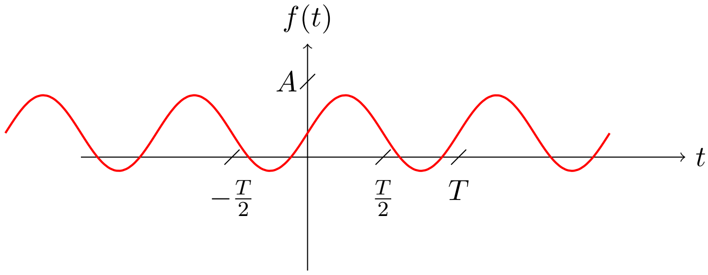
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

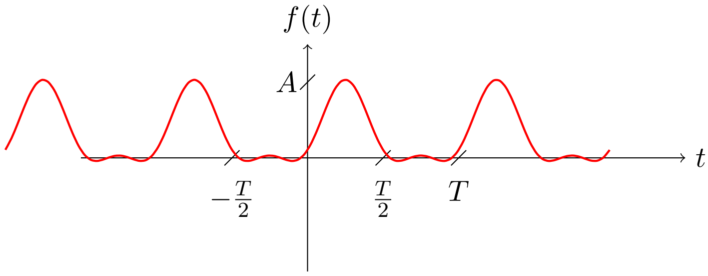
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{70}
$$

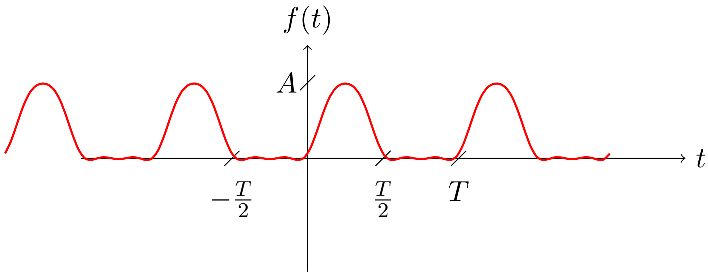
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



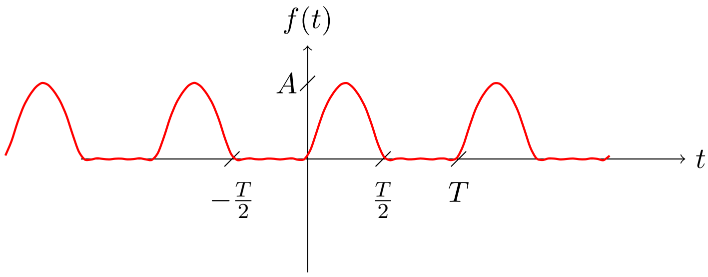
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



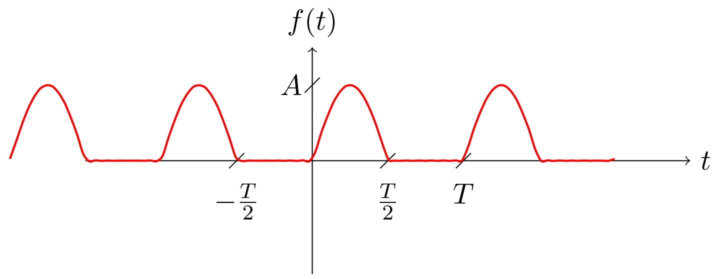
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

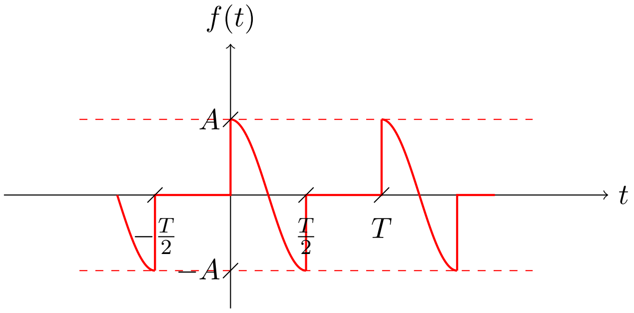


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 18. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału cosinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{71}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{72}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt & = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (sin\,(pi) - sin\,(0)) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{73}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{\jmath\cdot 2\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1}\cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2}\cdot dz_2\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)}\cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot 0}\right) - \frac{1}{(1+k)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot 0}\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - e^0\right) - \frac{1}{(1+k)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) - \frac{1}{(1+k)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\left(-1\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) - \frac{1}{(1+k)}\cdot\left(-1\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\left(-\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) - \frac{1}{(1+k)}\cdot\left(-\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{\left(-e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)\cdot(1+k)}{(1-k)\cdot(1+k)} - \frac{\left(-e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)\cdot(1-k)}{(1-k)\cdot(1+k)}\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{-\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1 - k\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - k}{(1-k)\cdot(1+k)} - \frac{-\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1 + k\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} + k}{(1-k)\cdot(1+k)}\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{-\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1 - k\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - k + e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} + 1 - k\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - k}{1-k^2}\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath\cdot 4\pi}\cdot\left(\frac{-2\cdot k\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 2\cdot k}{1-k^2}\right)$$
$$= -\frac{A\cdot k}{\jmath\cdot 2\pi}\cdot\left(\frac{e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} + 1}{1-k^2}\right)$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A\cdot k}{\jmath\cdot 2\pi}\cdot\left(\frac{e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi}+1}{1-k^2}\right)$.
Dla $k=1$ i $k=-1$ trzeba wyzanczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$F_1 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt$$
$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right)$$
$$= \left\{cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right)$$
$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt$$
$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t - \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t - \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-1)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}e^{0}\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}1\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) \\
&= \left\{\begin{matrix} z=-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz=-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt=\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\end{matrix}\right\} \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{z}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}e^{z}\cdot dz\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(t\big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}-0\right)-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\pi}-e^{0}\right)\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1)\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right) \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}0\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{T}\left(A \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right)$$
$$= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{T}\left(A \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t}\right) \cdot dt$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt\right)$$
$$= \left\{\begin{array}{c} z = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array}\right\}$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_{0}^{\frac{T}{2}} + t\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_{0}^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0\right)\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0}\right) + \frac{T}{2}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{\jmath \cdot 2\pi} - e^{0}\right) + \frac{T}{2}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2}$$

$$= \frac{A}{4}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.
Tak wiec ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= \frac{A}{4} \\ F_{-1} &= \frac{A}{4} \\ F_k &= -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned} \tag{74}$$

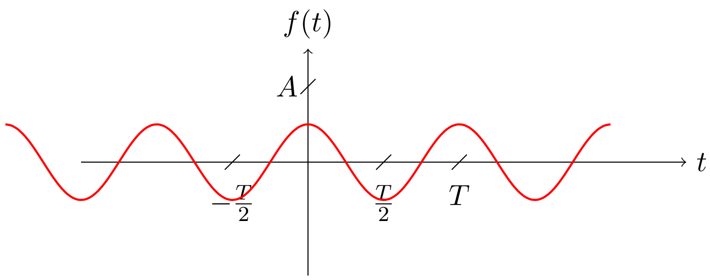
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$\lvert F_k \rvert$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\left\{F_k\right\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

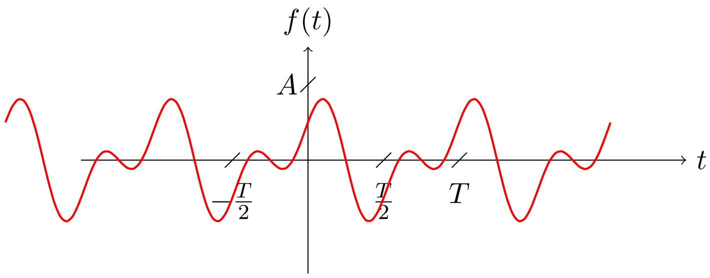
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{75}$$

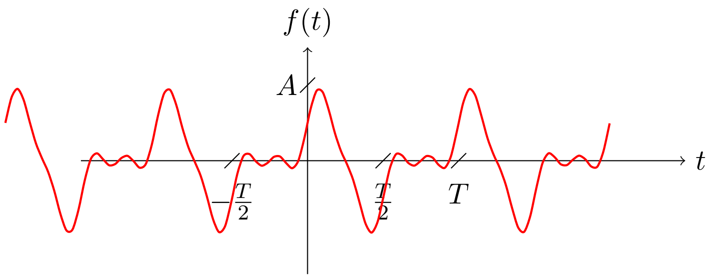
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



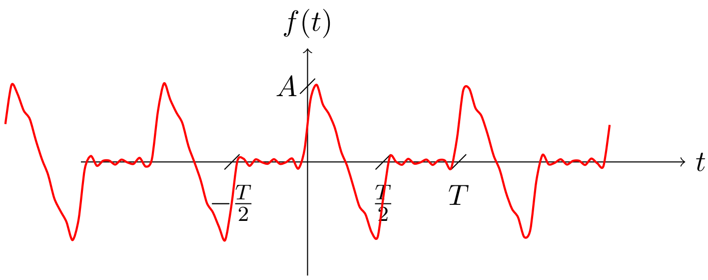
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



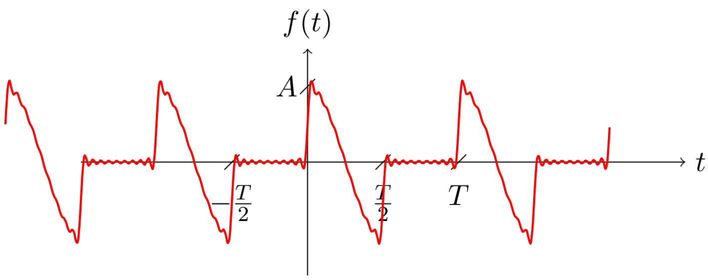
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



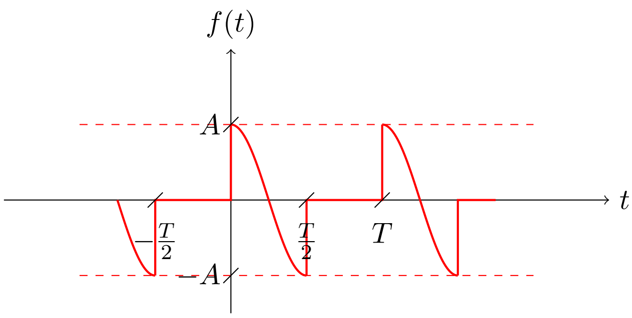
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



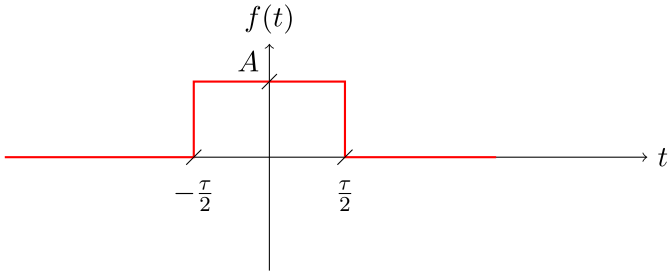
W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



Zadanie 19. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \tag{76}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{77}$$

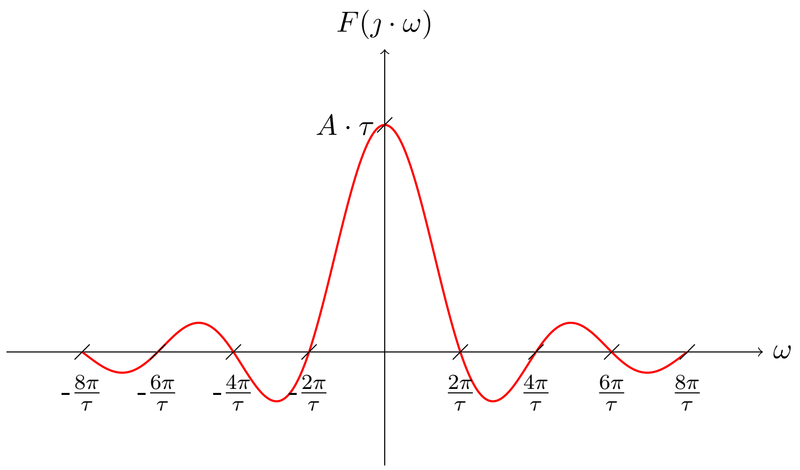
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt \\
&= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = -\jmath \cdot \omega \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \omega \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot dz \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot dz \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{z}|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
&= \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-\frac{\tau}{2})} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}\right)$$
$$= \left\{sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}\right\}$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$
$$= \left\{\frac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\}$$
$$= A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

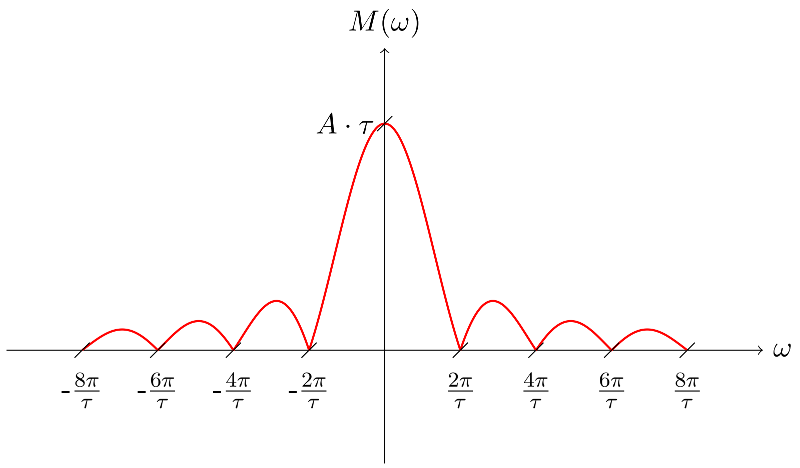
Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) \tag{78}$$



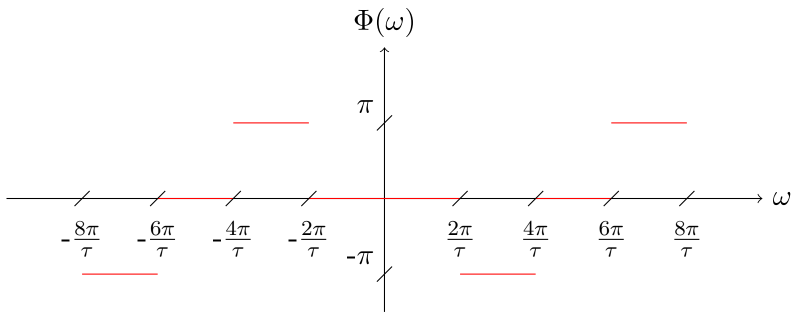
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{79}$$

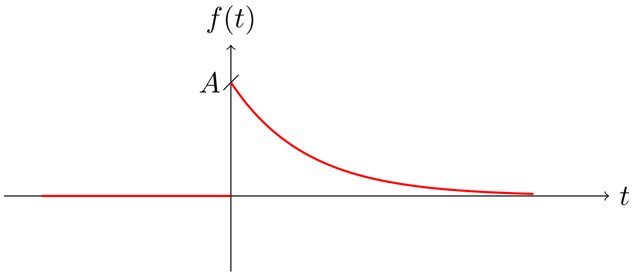


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{80}$$


$\Phi(\omega)$
π
$-\pi$
ω
$-\frac{8\pi}{\tau}$
$-\frac{6\pi}{\tau}$
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$\frac{6\pi}{\tau}$
$\frac{8\pi}{\tau}$

Zadanie 20. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{81}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{82}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{-(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t \\ dz &= -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot dt \\ dt &= \tfrac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot dz \end{aligned} \right\} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot dz \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z} \Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{A}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{-(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t} \Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{A}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{-(a + \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{-(a + \jmath \cdot \omega) \cdot 0} \right)
\end{aligned}$$

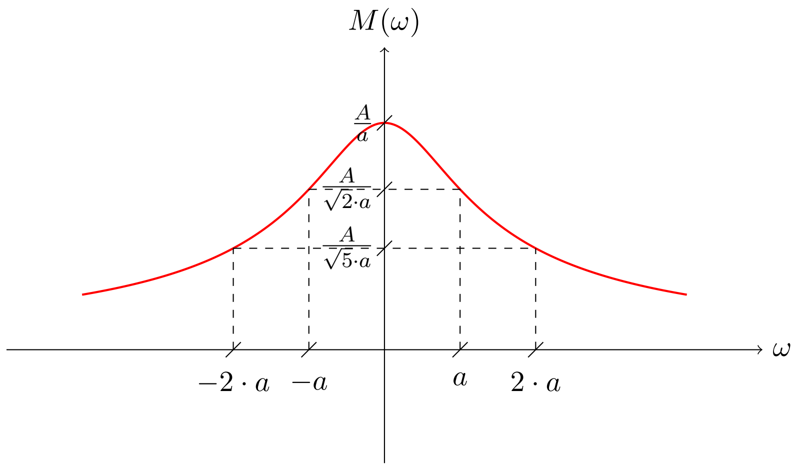
$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{0}\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau+\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot(0-1)\\
&= \frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}$
Wyznaczmy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\frac{(a-\jmath\cdot\omega)}{(a-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{A\cdot(a-\jmath\cdot\omega)}{(a^2+\omega^2)}\\
&= \frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}-\jmath\cdot\frac{A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

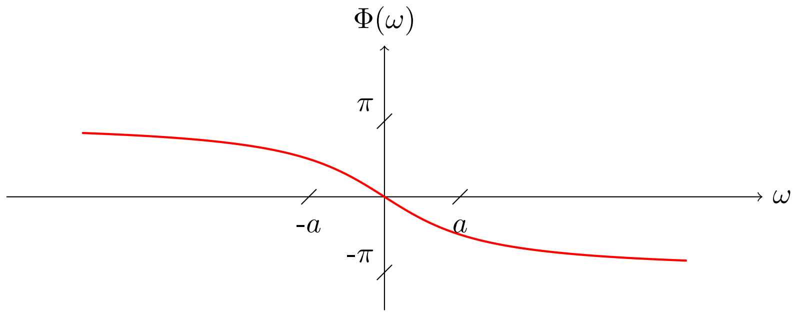
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)|\\
&= \sqrt{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)^2+\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{A^2\cdot(a^2+\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2+\omega^2)}}\\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

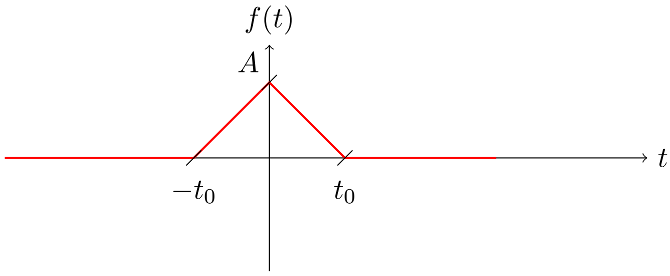


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arctg(\frac{Im\{F(\jmath\omega)\}}{Re\{F(\jmath\omega)\}}) \\
&= arctg\left(\frac{\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)}{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)}\right) \\
&= arctg\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\cdot\frac{(a^2+\omega^2)}{A\cdot a}\right) \\
&= arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned} \tag{85}$$



Zadanie 21. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{86}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{87}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{88}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{89}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\
&= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right)
\end{aligned}$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \bigg|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right)$$

$$+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \bigg|_0^{t_0} \right)$$

$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \bigg|_{-t_0}^{0} \right) \right)$$

$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right)$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \bigg|_0^{t_0} \right) \right)$$

$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \right)$$

$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right)$$

$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(1 - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \right) \right)$$

$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right)$$

$$= - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

$$+ \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega}$$

$$= - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$$

$$= \left\{ cos(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\}$$

$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot cos(\omega \cdot t_0)$$

$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - cos(\omega \cdot t_0))$$

$$= \left\{ \begin{matrix} sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot x) \\ cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot sin^2(x) \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}))$$

$$= \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$$

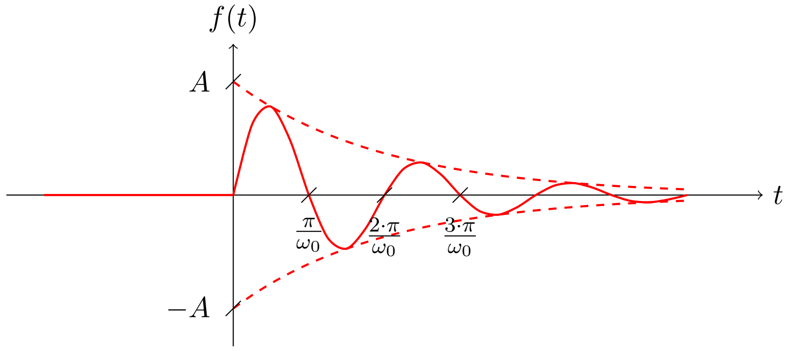
$$= \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$$

$$= \left\{ \frac{sin(x)}{x} = Sa(x) \right\}$$

$$= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 22. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a \cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{90}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{91}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 0 + \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{lcllcl} z & = & (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t & w & = & (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t \\ dz & = & (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot dt & dw & = & (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot dt \\ dt & = & \frac{1}{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot dz & dt & = & \frac{1}{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot dw \end{array} \right\} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \jmath} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{dz}{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} - \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \jmath} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot \frac{dw}{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot dw \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z} \Big|_{0}^{\tau} - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{w} \Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \Big|_{0}^{\tau} \\
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \Big|_{0}^{\tau}
\end{aligned}$$

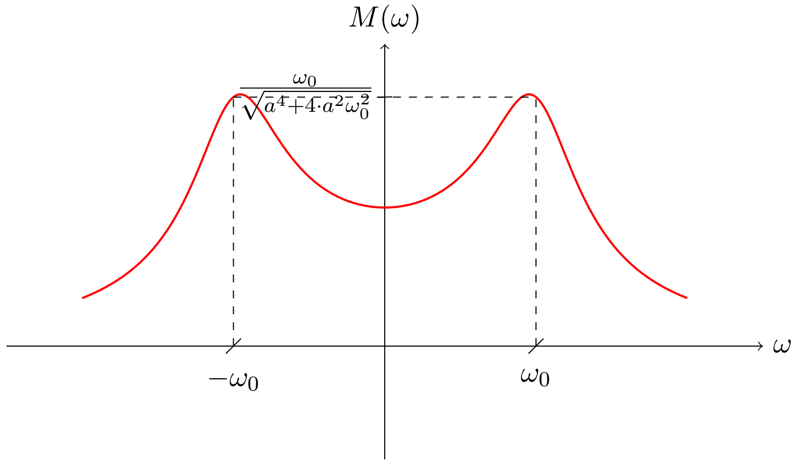
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)\\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)\\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{-1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}+\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{-(2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega))+2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0+2\cdot\jmath^2\cdot\omega-2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0-2\cdot\jmath^2\cdot\omega}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+a\cdot\jmath\cdot\omega_0+a\cdot\jmath\cdot\omega-a\cdot\jmath\cdot\omega_0-\jmath^2\cdot\omega_0^2-\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+a\cdot\jmath\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega^2)}\\
&= \frac{4\cdot\jmath^2\cdot\omega_0}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\jmath^2\cdot\omega_0^2+\jmath^2\cdot\omega^2)}\\
&= \frac{\omega_0}{a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+\omega_0^2-\omega^2}\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2)}\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

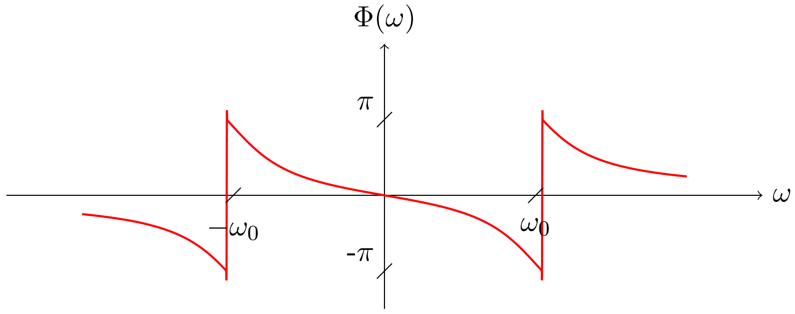
$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+(\jmath\cdot\omega)^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega}\right|\\
&= \left\{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\right\}\\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega|}
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ |a + \jmath \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\}$$
$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \omega\right)^2}}$$



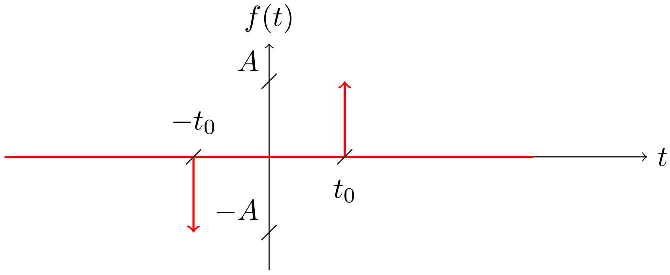
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega}\right) \\
&= \left\{ arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right) \right\} \\
&= arg\left(\omega_0\right) - arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega\right) \\
&= \left\{ arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg(\tfrac{b}{a}) \right\} \\
&= arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= arctg\left(0\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= -arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



$\Phi(\omega)$
π
-π
$-\omega_0$
ω_0
ω

Zadanie 23. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \tag{92}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

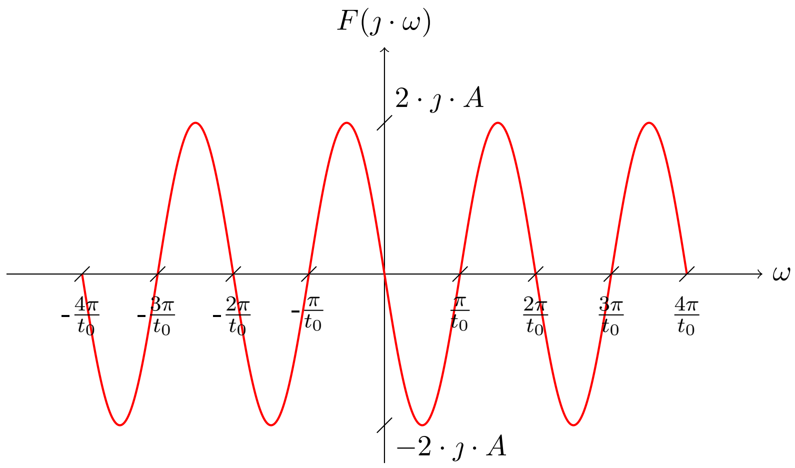
$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{93}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(-e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

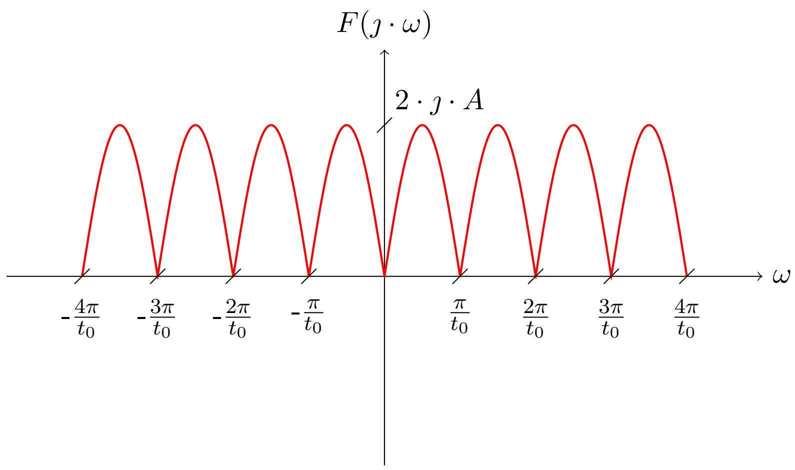
Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0) \tag{94}$$



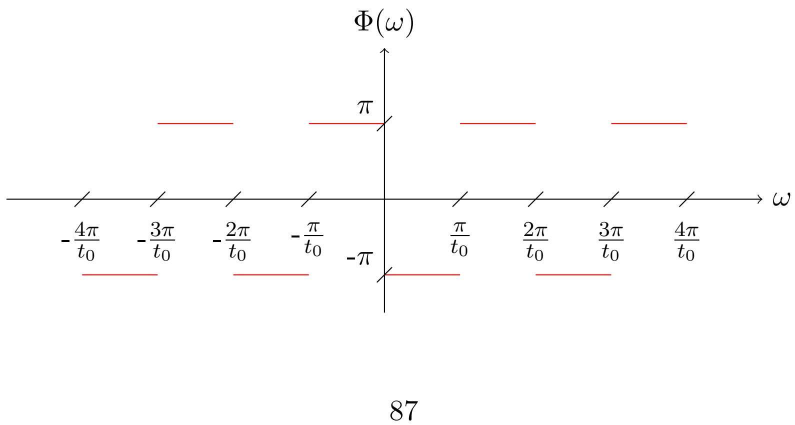
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{95}$$

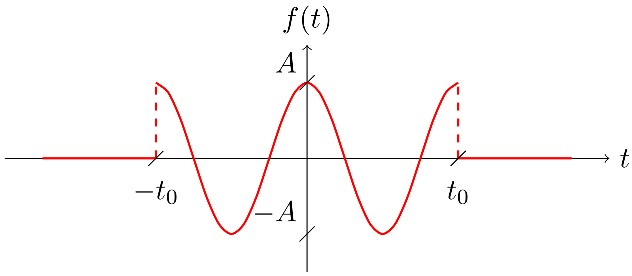


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{96}$$



Zadanie 24. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{97}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{98}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

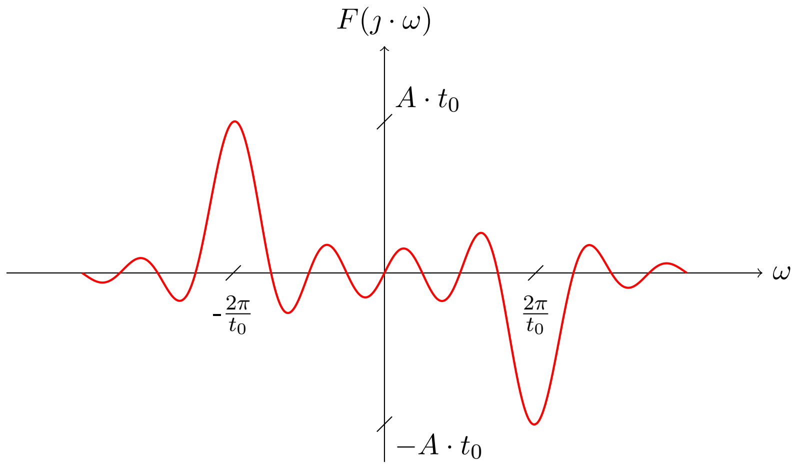
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\
&= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t - \jmath\cdot\omega\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{t_0}\cdot t - \jmath\cdot\omega\cdot t}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)\cdot t}\right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)\cdot t} \cdot dt\right) \\
&= \left\{\begin{array}{cc} z_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1}\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot dz_1+\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot dz_2\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1}\cdot dz_1+\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2}\cdot dz_2\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot e^{z_1}\Big|_{-t_0}^{t_0}+\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot e^{z_2}\Big|_{-t_0}^{t_0}\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0}+\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0}\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}-e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot(-t_0)}\right)+\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot(-t_0)}\right)\Bigg)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}\right)+\frac{1}{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}-e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}\right)+\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}\right)\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}\right)\cdot\frac{2}{2}\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}}{2\cdot\jmath}+\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}}{2\cdot\jmath}\right)\\
&= \left\{sin(x)=\frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath}\right\}\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)+\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)\cdot\frac{t_0}{t_0}+\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\cdot\frac{t_0}{t_0}\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)+\frac{2\cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}\cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\right)\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(2\cdot t_0\cdot\frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0}+2\cdot t_0\cdot\frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0}\right)\\
&= \left\{Sa(x)=\frac{sin(x)}{x}\right\}\\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(2\cdot t_0\cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)+2\cdot t_0\cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\right)\\
&= A\cdot t_0\cdot\left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)+Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=A\cdot t_0\cdot\left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}-\omega\right)\cdot t_0\right)+Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0}+\omega\right)\cdot t_0\right)\right)$

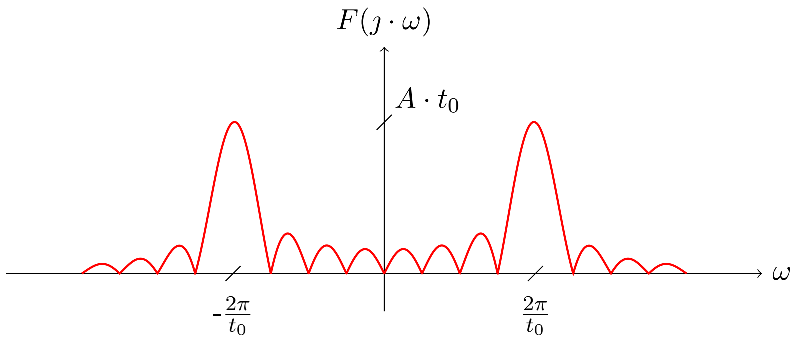
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \tag{99}$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

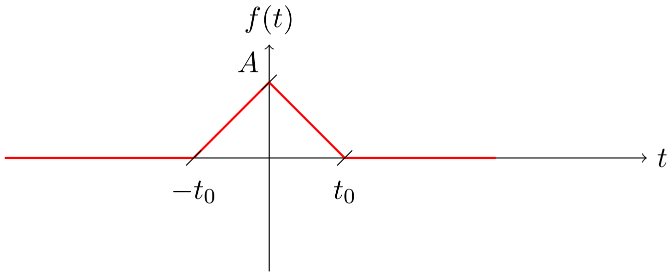
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{100}$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{101}$$

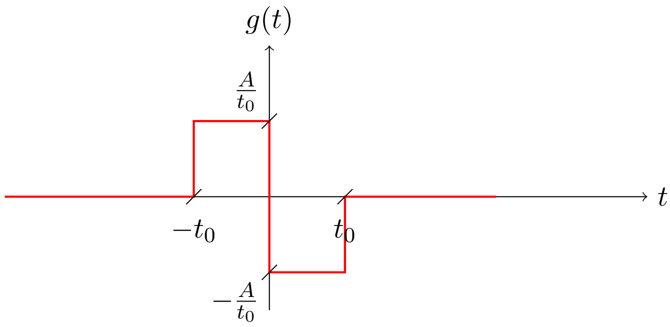
Zadanie 25. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{102}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{103}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{104}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{105}$$

Z powyzszego równania widać, że musimy znać $G(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{106}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych prostokątów, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \tag{107}$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0})$$
$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0})$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(\jmath\omega)$.

Z tablic matematycznych wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{108}$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(\jmath\omega)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{109}$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
G(\jmath\omega) = A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\
G(\jmath\omega) = A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\
\left\{sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}\right\} \\
G(\jmath\omega) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)
\end{aligned}$$

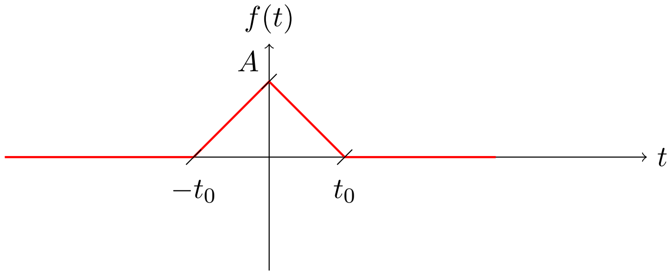
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&\left\{\begin{array}{l}
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \\
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa(0) \cdot sin(0) \\
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot 1 \cdot 0 \\
G(0) = 0
\end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
&= \left\{\tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} \\
&= \frac{A \cdot 2 \cdot t_0}{\omega \cdot t_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

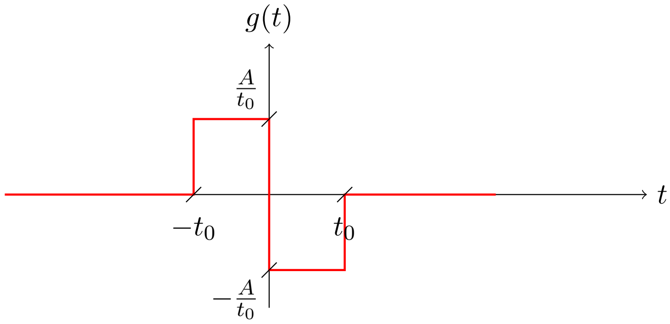
Zadanie 26. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{111}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

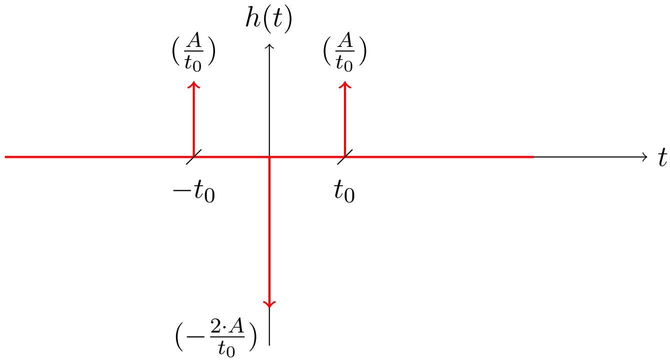
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{112}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{113}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{114}$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{115}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x) \cdot dx \tag{116}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$G(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \tag{117}$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{118}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (-t_0))\right\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (t_0))\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \end{array}\right\} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 2 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) \\
&\left\{cos(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{t_0} \cdot (2 \cdot cos(\omega \cdot t_0) - 2) \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}
$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$
H(\jmath\omega) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) \tag{119}
$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&\left\{\begin{array}{l}
H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(0 \cdot t_0) - 1) \\
H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(0) - 1) \\
H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (1 - 1) \\
H(0) = 0
\end{array}\right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}
$$

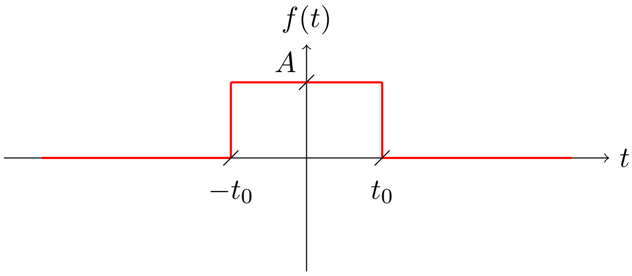
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&\left\{\begin{array}{l}
G(0) = \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot 0 \cdot t_0} \cdot (cos(0 \cdot t_0) - 1) \\
G(0) = \frac{0}{0}!!! \\
G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} (-\frac{A}{t_0}) \cdot dt \\
G(0) = \frac{A}{t_0} \cdot (0 - (-t_0)) - \frac{A}{t_0} \cdot (t_0 - 0) = A - A \\
G(0) = 0
\end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath^2 \cdot \omega^2 \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot (1 - cos(\omega \cdot t_0)) \\
&\left\{\begin{array}{l}
sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot x) \\
cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot sin^2(x)
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
&= \left\{\tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} \\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 27. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



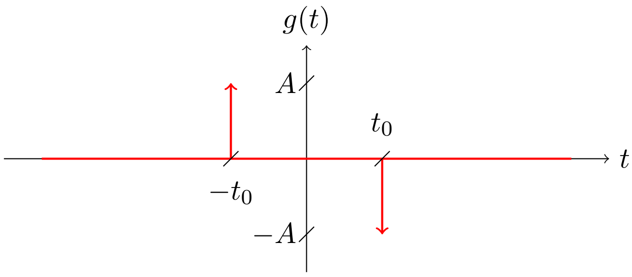
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{120}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{121}$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{122}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{123}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t}\right) \cdot dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} \\
&= \left\{ sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) \\
&= \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(\jmath\omega) = \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

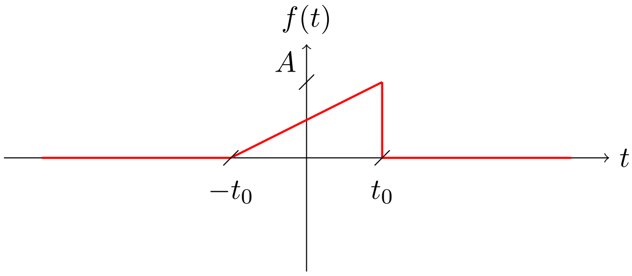
$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{gathered}
$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(\jmath\omega)$ sygnału $f(t)$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(0 \cdot t_0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\,(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 \\
&= \left\{ Sa\,(x) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)$.

Zadanie 28. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{124}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz (t_0, A). Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = \frac{b}{t_0} \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = 2 \cdot b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{2 \cdot t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

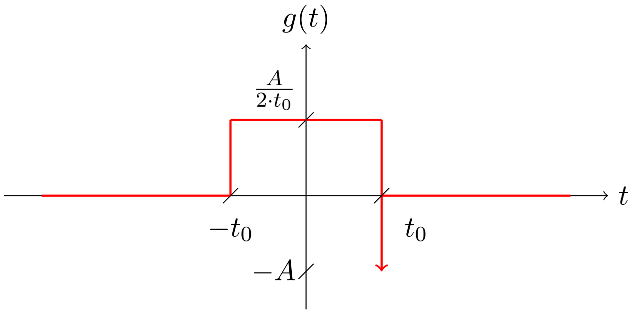
$$f(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2}$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{125}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{126}$$

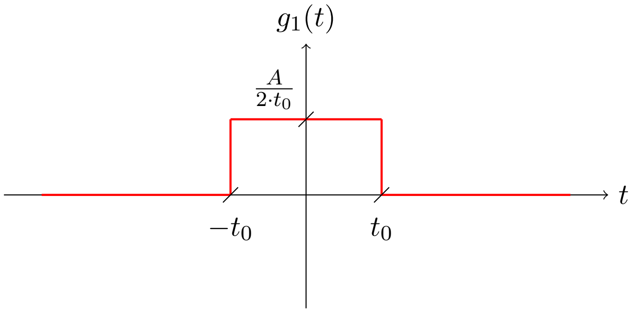


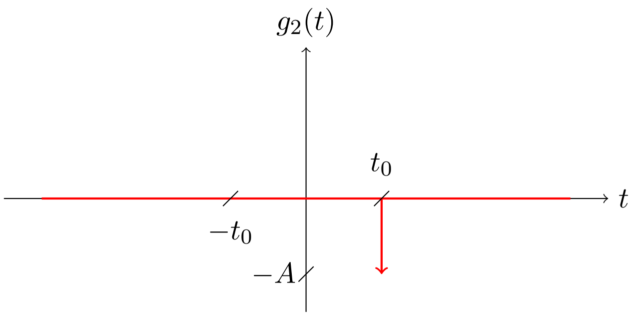
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{127}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{128}$$

$$g_2(t) = -A \cdot \delta(t - t_0) \tag{129}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delty diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{130}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-A \cdot \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= -A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= -A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}
\end{aligned}$$

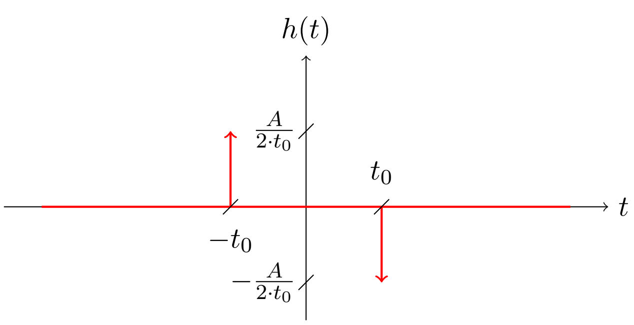
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = -A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t+t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t-t_0) \tag{131}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t+t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t-t_0) \tag{132}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{133}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t+t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t-t_0) \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{\jmath}{\jmath} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$
\begin{aligned}
G_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(0)\cdot H(0)\\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right) + \pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(0\cdot t_0\right)\\
&= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right) + \pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(0\right)\\
&= A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0} + \pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot 0\\
&= A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0} + 0\\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\}\\
&= A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)$.
Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)\\
g_2(t) &\xrightarrow{F} G_2(\jmath\omega)\\
g(t) = g_1(t) + g_2(t) &\xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)\\
&= A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right) - A\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\\
&= A\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right) - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)
\end{aligned}
$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{F} G(\jmath\omega)\\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\cdot d\tau &\xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0)
\end{aligned}
$$

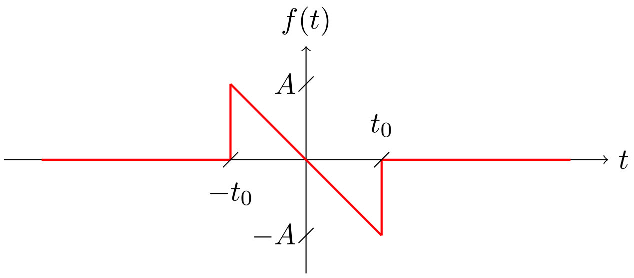
Podstawiając otrzymujemy

$$
F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(0)\cdot G(0)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \Big(Sa\left(0 \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot 0 \cdot t_0} \Big) \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \Big(Sa\left(0\right) - e^{0} \Big) \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot 0 \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big) + 0 \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \Big(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \Big)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$.

Zadanie 29. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{134}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

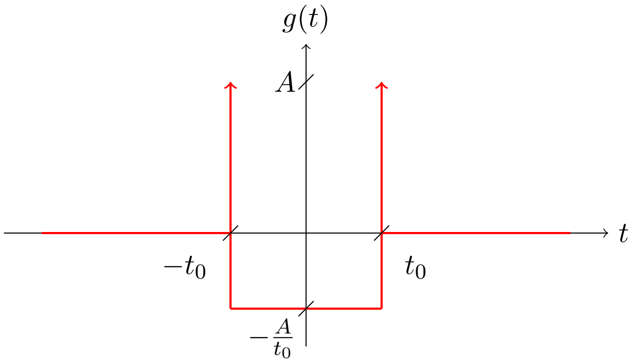
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{135}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{136}$$

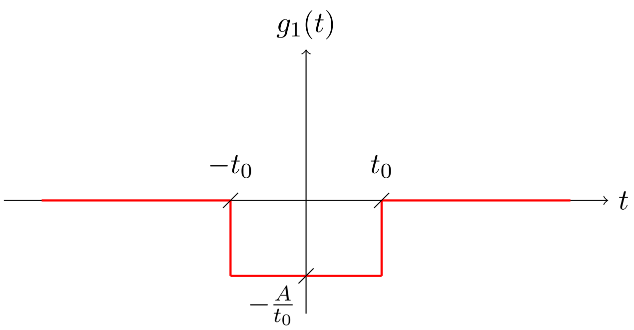


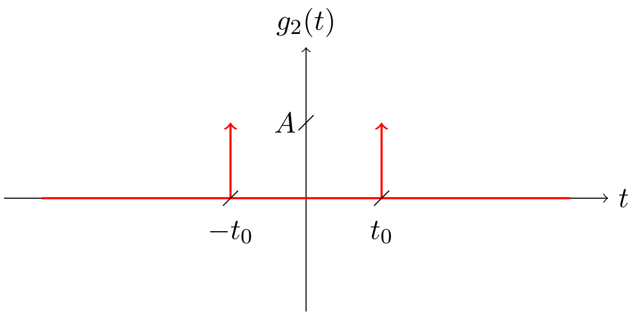
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{137}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{138}$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{139}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{140}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t+t_0) + A \cdot \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \\
&= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2} \\
&= \left\{ cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

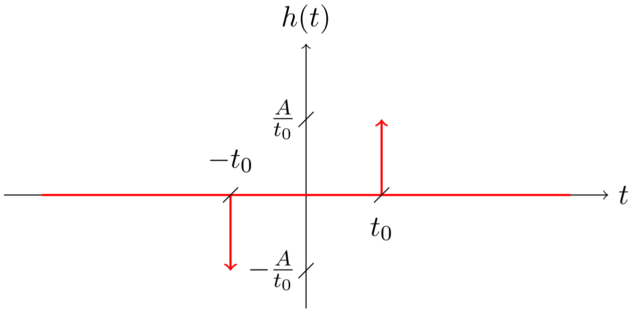
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{141}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{142}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{143}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\right) \cdot dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)\right\} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} \\
&= \left\{sin\,(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath}\right\} \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega\cdot t_0) \\
&= -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega\cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega\cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$
$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned}
G_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(0 \cdot t_0\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(0\right) \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 0 \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} - 0 \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$.
Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g_2(t) \xrightarrow{F} G_2(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) + 2 \cdot A \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right) \\
&= -2 \cdot A \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$

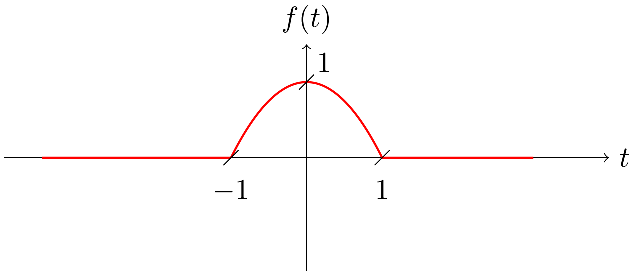
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 30. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.

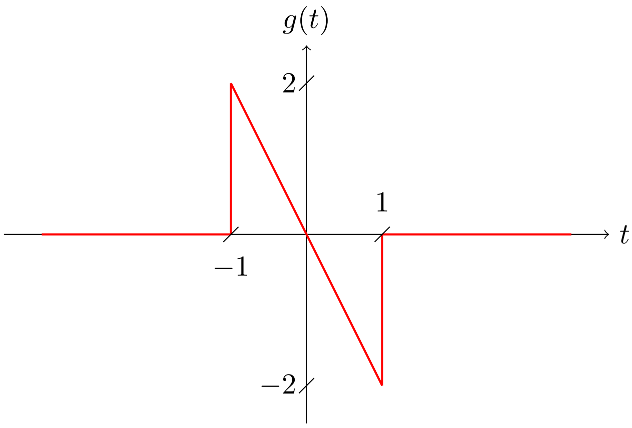


Sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{144}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{145}$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{146}$$

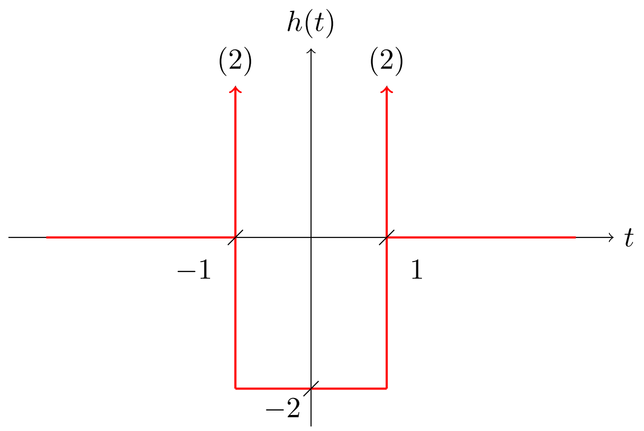
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{147}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{148}$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{149}$$

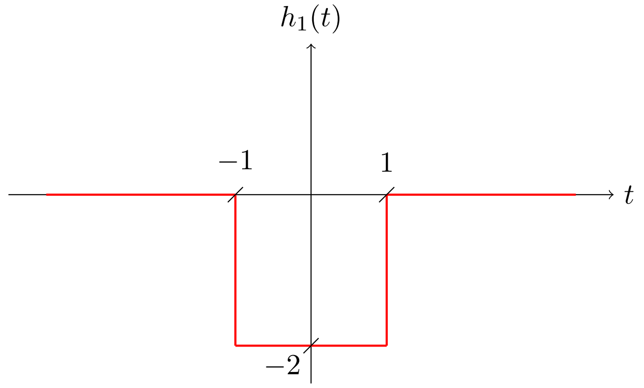


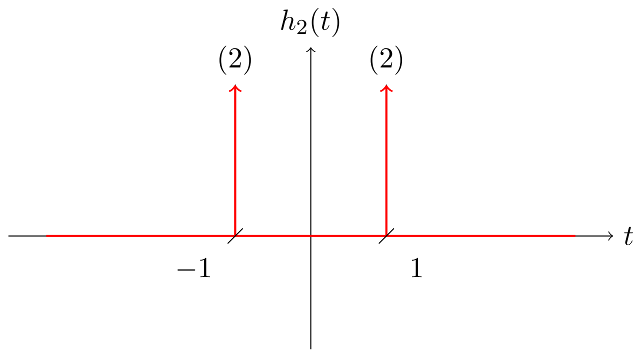
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{150}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{151}$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{152}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{153}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= 2 \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-1)} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) \cdot \frac{2}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega}}{2} \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} \\
&= 4 \cdot cos\,(\omega)
\end{aligned}$$

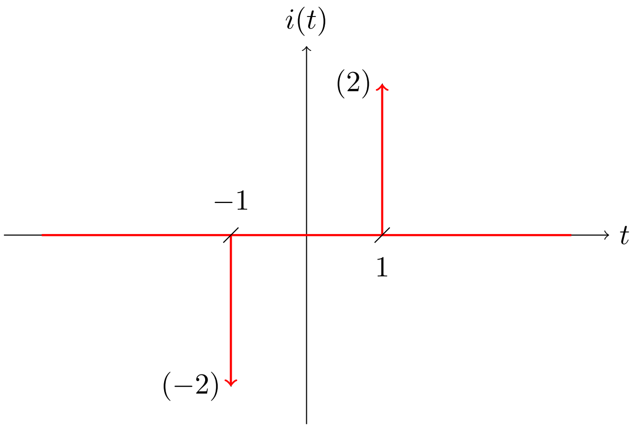
Transformata sygnału $h_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 4 \cdot cos\,(\omega)$

Funkcja $h_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$i(t) = h_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 0 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} - 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{154}$$

czyli po prostu

$$i(t) = h_1'(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{155}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $i(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$I(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{156}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
I(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} -\delta(t+1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= 2 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-1)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(-e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \\
&= -2 \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} \\
&= -4 \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin\,(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= -4 \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $i(t)$ to $I(\jmath\omega) = -\jmath \cdot 4 \cdot sin\,(\omega)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $h_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $i(t) = h_1'(t)$

$$i(t) \xrightarrow{F} I(\jmath\omega)$$
$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} H_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot I(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0)$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $I(\jmath\omega)$ sygnału $i(t)$ otrzymujemy transformatę $H_1(\jmath\omega)$ sygnału $h_1(t)$

$$\begin{aligned}
H_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot I(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-\jmath \cdot 4 \cdot sin\,(\omega)) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-\jmath \cdot 4 \cdot sin\,(0)) \\
&= -\frac{1}{\omega} \cdot 4 \cdot sin\,(\omega) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot 4 \cdot sin\,(0) \\
&= -4 \cdot \frac{sin\,(\omega)}{\omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot 4 \cdot 0 \\
&= -4 \cdot \frac{sin\,(\omega)}{\omega} - 0 \\
&= \left\{ Sa\,(x) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} \\
&= -4 \cdot Sa\,(\omega)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $h_1(t)$ jest równa $H_1(\jmath\omega) = -4 \cdot Sa\,(\omega)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g_2(t) \xrightarrow{F} G_2(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0) \\
&= -2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając otrzymujemy

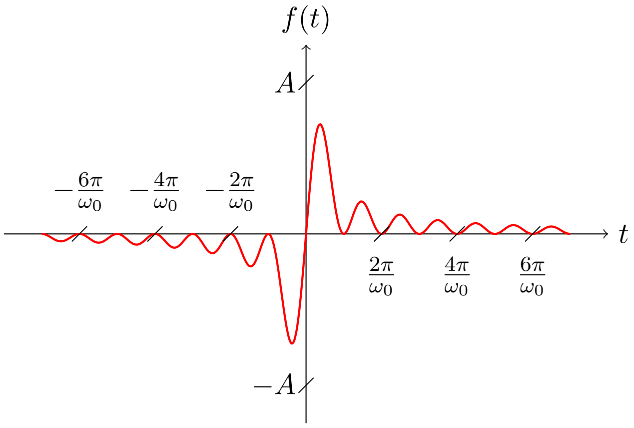
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 31. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest rowna $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \tag{157}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{158}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} f_1(t) & = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) & = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot (f_1(t) - f_2(t))
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = G(\jmath(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$
$$g(t) = H(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa

$$h(t) = \Pi(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t) = H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = \pi \cdot \Pi(-\omega) = 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \\
&= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) \\
&= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \\
&= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) \\
&= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} \\
&= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) \\
&= g_1(a \cdot t)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(\jmath\omega)$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a}) \\
&= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} \\
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}) \\
&= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot \Pi\left(\omega\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) \\
f_1(t) = g(t) \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))
\end{gathered}
$$

otrzymujemy wprost

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega - \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega + \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)$$

otrzymujemy

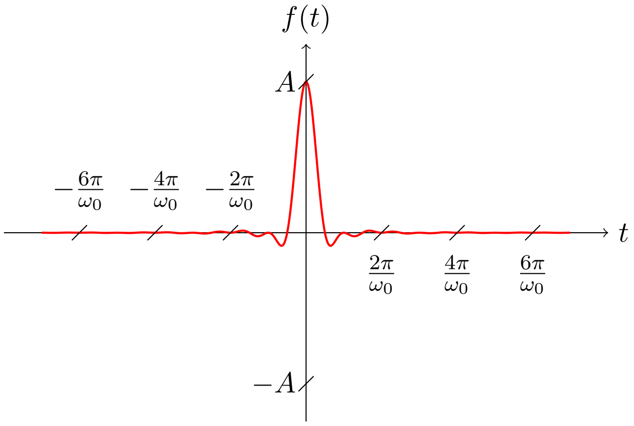
$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) \\ &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$

Zadanie 32. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest rowna $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{159}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{160}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)\\
&= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\}\\
&= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2}\\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)\\
&= \begin{Bmatrix} f_1(t) & = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\\ f_2(t) & = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\end{Bmatrix}\\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(f_1(t) + f_2(t)\right)
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = G(\jmath\,(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$
$$g(t) = H(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa

$$h(t) = \Lambda(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t) = H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = \pi \cdot \Lambda\left(-\omega\right) = 2\pi \cdot \Lambda\left(\omega\right)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \\
&= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) \\
&= Sa^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \\
&= Sa^2\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) \\
&= \Big\{a = 2 \cdot \omega_0\Big\} \\
&= Sa^2\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) \\
&= g_1(a \cdot t)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(\jmath\omega)$

$$G(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ a = 2 \cdot \omega_0 \right\} \\
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}) \\
&= \left\{ G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot \Lambda\left(\omega\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$
g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)
$$

$$
f_1(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))
$$

otrzymujemy wprost

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega - \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega + \omega_0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

$$
f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)
$$

$$
f_2(t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)
$$

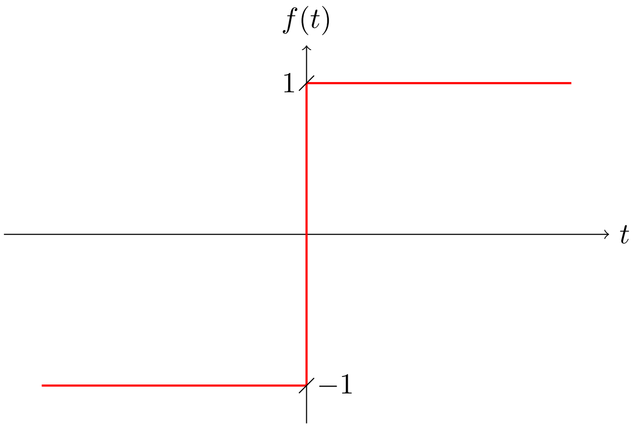
$$
f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)
$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)\end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$

Zadanie 33. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = sgn(t)$ za pomocą twierdzeń.

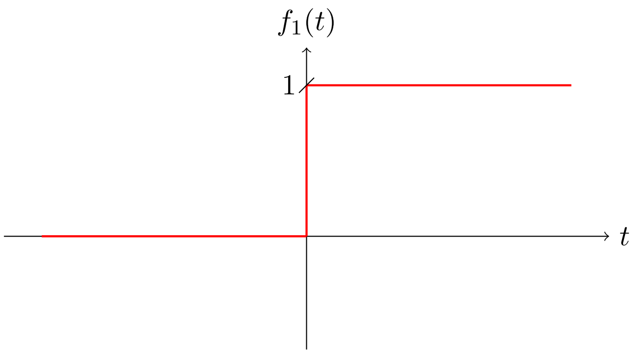


Sygnał $f(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} f(t) &= sgn(t) \\ &= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) \\ &= f_1(t) - f_2(t) \end{aligned}$$

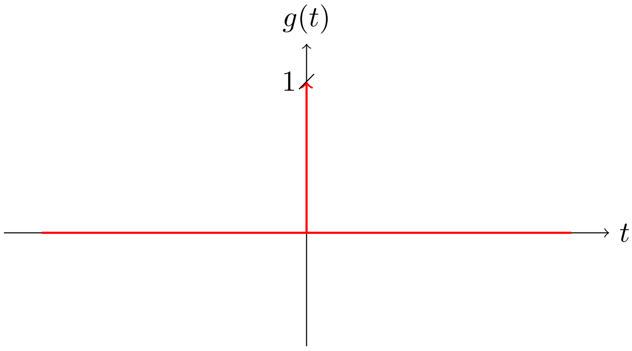
Wyrażnie widac iż funkcja jest złożeniem dwóch skoków jednostkowych

$$f_1(t) = \mathbb{1}(t) f_2(t) \qquad\qquad = \mathbb{1}(-t)$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



dla której w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot f(t)\cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} \\
&= e^{0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t)=\delta(t)$ jest $G(\jmath\omega)=1$
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{F} G(\jmath\omega) \\
f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\cdot d\tau &\xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0)
\end{aligned}
$$

Tak wiec mamy

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot 1 + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot 1 \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi\cdot\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

A wiec transformata skoku jednostkowego jest $F_1(\jmath\omega)=\frac{1}{\jmath\cdot\omega}+\pi\cdot\delta(\omega)$
Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako

$$
\begin{aligned}
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) \\
&= \mathbb{1}(-1\cdot t)
\end{aligned}
$$

$$= f_1(-1 \cdot t)$$

A wiec transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = f_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

$$\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a}) \\
&= \Big\{a = -1\Big\} \\
&= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta(\frac{\omega}{-1}) \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) \\
&= -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A więc transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(\jmath\omega) - \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \Big(-\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\Big) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \\
&= \frac{2}{\jmath \cdot \omega}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath\cdot\omega}$.