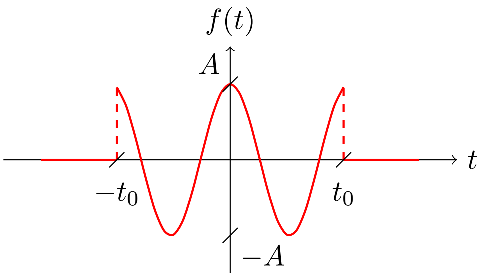
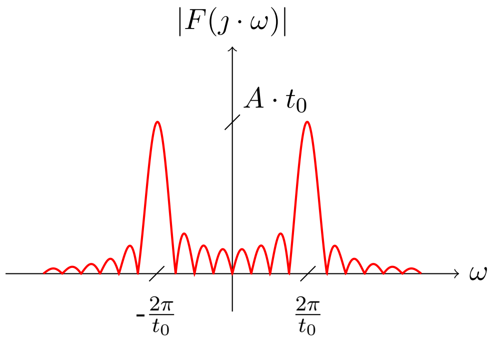
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A\cdot\Pi\left(\frac{t}{2\cdot t_0}\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0}\cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A\cdot t_0\cdot\left[\ Sa\left(\omega\cdot t_0+2\pi\right) - Sa\left(\omega\cdot t_0-2\pi\right)\right]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

25 marca 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

Zadanie 1. Expand the following signals into a sum of sine and cosine functions, and a constant, by using the Euler identities.

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t)$$
$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t)$$

Euler identities:

$$sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}$$
$$cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}$$

Binomial theorem:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{1.1}$$

where $\binom{n}{k}$ are called binomial coefficients:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.2}$$

The binomial coefficient $\binom{n}{k}$ appears as the kth entry in the nth row of Pascal's triangle (counting starts at 0). Each entry is the sum of the two above it. Below, example for $n = 6$ is presented:

$$\left\{\begin{array}{lccccccccccccc}
n{=}0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n{=}1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n{=}2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n{=}3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n{=}4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n{=}5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n{=}6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= sin^5(t) - sin^3(t) = \\
&= \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^5 - \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^3 = \\
&= \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}\right)^5}{(2 \cdot \jmath)^5} - \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}\right)^3}{(2 \cdot \jmath)^3} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^5 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^0 + 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^1 + 10 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^2}{(2 \cdot \jmath)^5} +$$

$$+ \frac{10 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^3 + 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^4 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^5}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^0 + 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^1 + 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^2 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^3}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 5} \cdot 1 + 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 1}) + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}}{(2 \cdot \jmath)^5} +$$

$$+ \frac{10 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}) + 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 5})}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot 1 + 3 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 1}) + 3 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 3})}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t} - 10 \cdot e^{-\jmath \cdot t} + 5 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5}}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot e^{\jmath \cdot t} + 3 \cdot e^{-\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} + 5 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t} - 10 \cdot e^{-\jmath \cdot t}}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot e^{\jmath \cdot t} + 3 \cdot e^{-\jmath \cdot t}}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}) + 10 \cdot (e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t})}{(2 \cdot \jmath)^4 \cdot (2 \cdot \jmath)} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t} - \cdot e^{-\jmath \cdot t})}{(2 \cdot \jmath)^2 \cdot (2 \cdot \jmath)} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{(2 \cdot \jmath)^4} -$$

$$- \left(\frac{sin(3 \cdot t) - 3 \cdot sin(t)}{(2 \cdot \jmath)^2} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{16} + \left(\frac{sin(3 \cdot t) - 3 \cdot sin(t)}{4} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{16} + \frac{4 \cdot sin(3 \cdot t) - 12 \cdot sin(t)}{16} =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - sin(3 \cdot t) - 2 \cdot sin(t)}{16}$$

To sum up:

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t) = \frac{sin(5 \cdot t) - sin(3 \cdot t) - 2 \cdot sin(t)}{16}$$

$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) =$$

$$= \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}}{2} \right)^6 - \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}}{2} \right)^4 =$$

$$= \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}\right)^6}{2^6} - \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}\right)^4}{2^4} =$$

$$= \frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^6 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^0 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^5 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^1 + 15 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^2 + 20 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^3}{2^6} +$$

$$+ \frac{15 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^4 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^5 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^6}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^0 + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^1 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^2 + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^3 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^4}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 6} \cdot 1 + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 5} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 1} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 20 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}}{2^6} +$$

$$+ \frac{15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot 1 + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 1} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 20 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 0} + 15 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 6 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 0} + 4 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 6 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 15 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 20}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 4 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 6}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}) + 15 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}) + 20}{2^5 \cdot 2} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}) + 6}{2^3 \cdot 2}\right) =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 6 \cdot cos(4 \cdot t) + 15 \cdot cos(2 \cdot t) + 10}{2^5} -$$

$$- \left(\frac{cos(4 \cdot t) + 4 \cdot cos(2 \cdot t) + 3}{2^3}\right) =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 6 \cdot cos(4 \cdot t) + 15 \cdot cos(2 \cdot t) + 10 - 4 \cdot cos(4 \cdot t) - 16 \cdot cos(2 \cdot t) - 12}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{32}$$

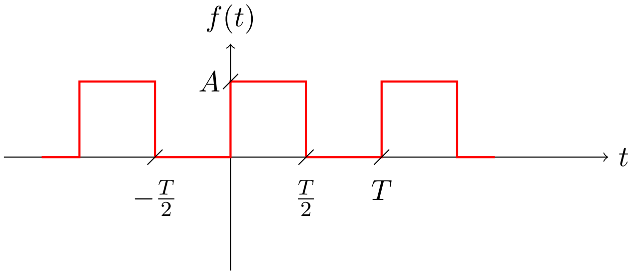
To sum up:

$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) = \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{32}$$

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1.4}$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

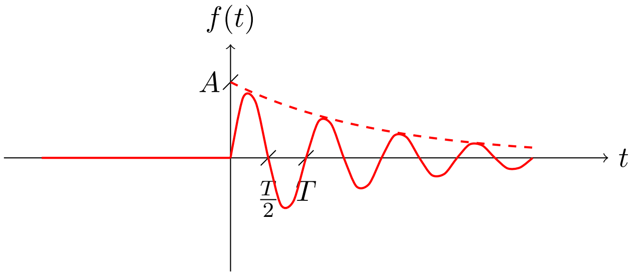
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{1.5}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Zadanie 2. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \tag{1.7}$$

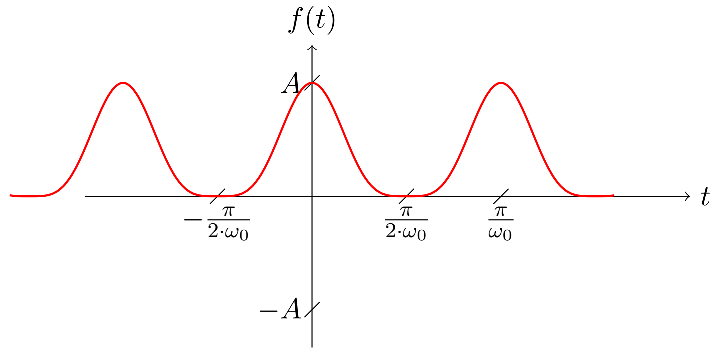
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot 1\cdot 0 \right) + \right.\\
&+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right) =\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + 0 \right) + \right.\\
&+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a}\cdot 1\cdot 1\right) + \right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right) =\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \right.\\
&-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi} +\\
&\left.+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =\\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\tfrac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) + \\ &-\tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) + \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi} + \\ &+\tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T^2}{4\pi^2}\cdot\textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{aligned}\right\} =\\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\tfrac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) - \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) + \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi} = \\ &= \textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T^2}{4\pi^2}\cdot\textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{aligned}\right\} =\\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\tfrac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) - \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot\tfrac{\tau}{2}\right) + \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T}{2\pi} = \\ &= \left(1 - \tfrac{1}{a^2}\cdot\tfrac{T^2}{4\pi^2}\right)\cdot\textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{aligned}\right\} =\\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)} = \\ &= \textstyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \end{aligned}\right\} =\\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)}\right) =\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Zadanie 3. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot cos^4\left(\omega_0 \cdot t\right)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \tag{1.8}$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt = \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^4\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^2\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\frac{\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+\left(e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2}{2^2}\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^0+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+2+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+2}{4}\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\frac{\left(e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot\left(e^{\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot2\cdot\omega_0\cdot t}\right)\cdot2+2^2}{4^2}\cdot dt =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 2\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 4}{16}\cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t - \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16}\cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{0} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16}\cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2 + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16}\cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right)\cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{cccc} z_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t & z_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t \\ dz_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt & dz_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt = \\ dt = \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_3}\cdot \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_4}\cdot \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot dz_2 + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_3}\cdot dz_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_4}\cdot dz_4 + 6\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} dt\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_1}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_2}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_3}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_4}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{+\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) +$$

$$\left. + 6\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0} + \frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right) + \right.$$

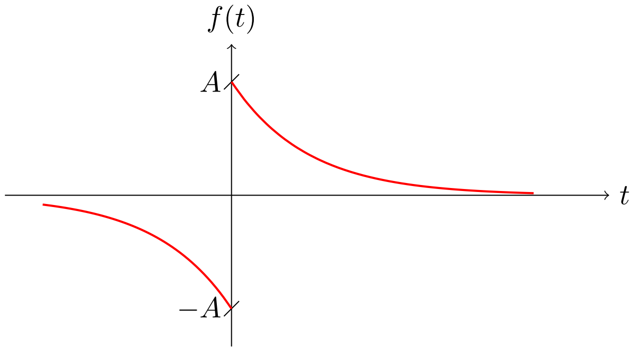
$$\left. + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{\jmath\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot\pi}\right) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot \left(e^{-\jmath\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot\pi}\right) + 6\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1-1) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1-(-1)) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1-(-1)) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) \right) =$$
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) \right) =$$
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) \right) =$$
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) =$$
$$= \frac{A}{16} \cdot 6 =$$
$$= \frac{A}{8} \cdot 3 =$$
$$= \frac{3}{8} \cdot A$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

1.1.2 Energia sygnału

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{1.9}$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.10}$$

Podstawiamy do wzoru na enargie wzór naszej funkcji

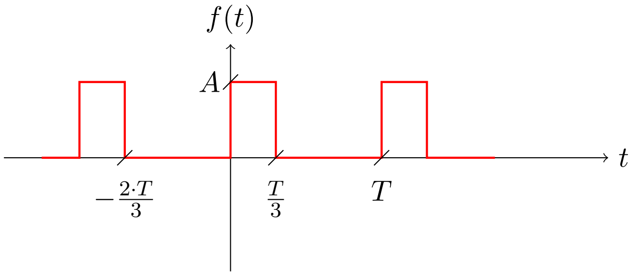
$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left| -A \cdot e^{a \cdot t} \right|^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left| A \cdot e^{-a \cdot t} \right|^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left(-A \cdot e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left(A \cdot e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} (-A)^2 \cdot \left(e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot \left(e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot dz - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot dw \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^z\big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^w\big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^{2\cdot a\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{-2\cdot a\cdot dt}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{2\cdot a\cdot 0} - e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2\cdot a\cdot 0} \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{0} - e^{-a\cdot\tau} \right) - \left(e^{-a\cdot\tau} - e^{0} \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} - e^{-a\cdot\tau} + 1 \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(2 - 2\cdot e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot 2\cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

1.1.3 Moc sygnału

Zadanie 5. Oblicz moc okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1.11}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

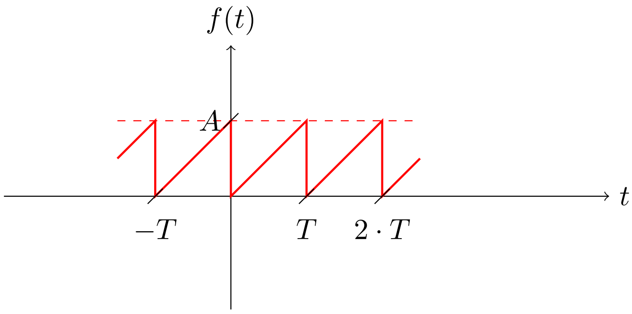
$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.12}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} |0|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{3}} = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{3} - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \frac{T}{3} = \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$

Zadanie 6. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{1.13}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.14}$$

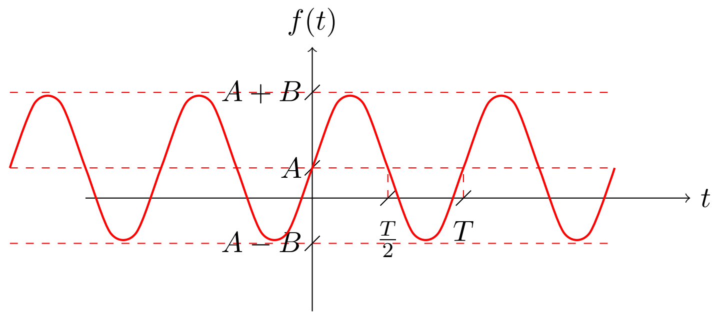
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \bigg|_0^T \right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 = \\
&= \frac{A^2}{3}
\end{aligned}
$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$

Zadanie 7. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.15}$$

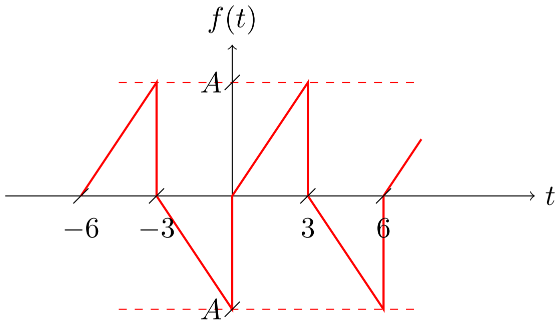
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot t|_0^T + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot (T - 0) + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T sin(z) \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot T + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos(z)|_0^T\right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{matrix} \right\} = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(t|_0^T - \int_0^T cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T cos(w) \cdot dw \right) =
\end{aligned}$$

$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-cos\,(2\pi) + cos\,(0)) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -sin\,(w)|_0^T\right) =$$
$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-1 + 1) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T\right) =$$
$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot 0 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (sin\,(4\pi) - sin\,(0))\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0)\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot (T) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2}$$

Moc sygnału wynosi $A^2 + \frac{B^2}{2}$

Zadanie 8. Calculate the average power and the effective value (RMS) for the periodic signal given below



First of all, the definition of $f(t)$ signal has to be derived. This is periodic piecewise function, piecewise linear function to be precise. The simplest form of linear function is:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{1.16}$$

In the first interval of the first period (e.g. $t \in (0; 3)$), linear function crosses two points: $(0, 0)$ and $(3, A)$. So, in order to derive m and b, the following system of the equations has to be solved.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot 3 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot 3 + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{3} = m \end{cases}$$

As a result we get:

$$f(t) = \frac{A}{3} \cdot t$$

In the second interval of the first period (e.g. $t \in (3; 6)$), linear function crosses other two points:: $(3, 0)$ oraz $(6, -A)$. So, in order to derive m i b, the following system of the equations has to be solved.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 3 + b \\ -A = m \cdot 6 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 \cdot m = b \\ -A = 6 \cdot m - 3 \cdot m \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 \cdot m = b \\ -A = 3 \cdot m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot m = b \\ -\frac{A}{3} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot (-\frac{A}{3}) = b \\ -\frac{A}{3} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{3} = m \end{cases}$$

As a result, second interval of the first period is described by:

$$f(t) = -\frac{A}{3} \cdot t + A$$

As a result the piecewise linear function in the first period is given by:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot t & for \quad t \in (0;3) \\ -\frac{A}{3} \cdot t + A & for \quad t \in (3;6) \end{cases}$$

For the whole periodic signal $f(t)$ we get:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) & for \quad t \in (0 + k \cdot 6; 3 + k \cdot 6) \\ -\frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) + A & for \quad t \in (3 + k \cdot 6; 6 + k \cdot 6) \end{cases} \wedge k \in I$$

The average power for periodic signals is defined by:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.17}$$

In our case we get:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^3 \left| \frac{A}{3} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_3^6 \left| -\frac{A}{3} \cdot t + A \right|^2 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \left(\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(\left(-\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{A}{3} \cdot t \cdot A + A^2 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{54} \cdot \int_0^3 t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt - \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{2 \cdot A^2}{3} \cdot t \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 A^2 \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{54} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^3 + \frac{A^2}{54} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt + \frac{A^2}{6} \cdot \int_3^6 dt = \\
&= \frac{A^2}{162} \cdot \left(3^3 - 0^3\right) + \frac{A^2}{54} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_3^6 - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_3^6 + \frac{A^2}{6} \cdot t|_3^6 = \\
&= \frac{A^2}{162} \cdot 27 + \frac{A^2}{162} \cdot \left(6^3 - 3^3\right) - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot \left(6^2 - 3^2\right) + \frac{A^2}{6} \cdot (6 - 3) = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{A^2}{162} \cdot 189 - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot 27 + \frac{A^2}{6} \cdot 3 = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{7 \cdot A^2}{6} - \frac{9 \cdot A^2}{6} + \frac{3 \cdot A^2}{6} =
\end{aligned}$$

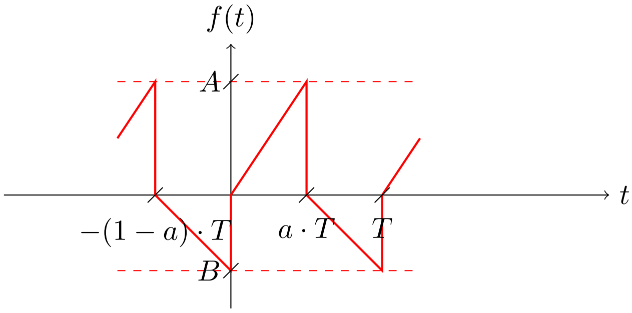
$$= \frac{2 \cdot A^2}{6} =$$
$$= \frac{A^2}{3}$$

The average power equals to $\frac{A^2}{3}$.
The effective value (RMS) is defined by:

$$RMS = \sqrt{P} \tag{1.18}$$

Therefore, effective value (RMS) equals to $\frac{A}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 9. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{1.19}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m\cdot a\cdot T = b \\ -B = m\cdot (T - a\cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m\cdot a\cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a\cdot T}\cdot a\cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a}\cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t + \frac{B}{1-a}\cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T}\cdot t & dla \quad t\in(0;a\cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t + \frac{B}{1-a}\cdot a & dla \quad t\in(a\cdot T;T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T}\cdot (t-k\cdot T) & dla \quad t\in(0+k\cdot T;a\cdot T+k\cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot (t-k\cdot T) + \frac{B}{1-a}\cdot a & dla \quad t\in(a\cdot T+k\cdot T;T+k\cdot T) \end{cases} \wedge k\in C$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$P = \frac{1}{T}\cdot\int_T |f(t)|^2\cdot dt \tag{1.20}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\cdot\int_T |f(t)|^2\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{a\cdot T}\left|\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\right|^2\cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T}\left|\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t - \frac{B}{1-a}\cdot a\right|^2\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\int_0^{a\cdot T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\right)^2\cdot dt + \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\left(\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t - \frac{B}{1-a}\cdot a\right)^2\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\int_0^{a\cdot T}\frac{A^2}{a^2\cdot T^2}\cdot t^2\cdot dt + \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\left(\left(\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t\right)^2 - 2\cdot\frac{B}{T-a\cdot T}\cdot t\cdot\frac{B}{1-a}\cdot a + \left(\frac{B}{1-a}\cdot a\right)^2\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\int_0^{a\cdot T} t^2\cdot dt + \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\left(\frac{B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot t^2 - 2\cdot\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot t\cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2}\cdot a^2\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_0^{a\cdot T}\right) + \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\frac{B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot t^2\cdot dt + \\
&- \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} 2\cdot\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot t\cdot a\cdot dt + \frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\frac{B^2}{(1-a)^2}\cdot a^2\cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_0^{a\cdot T}\right) + \frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t^2\cdot dt +
\end{aligned}$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot dt + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a \cdot T}^{T} dt =$$

$$= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a \cdot T}^{T} \right) +$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a \cdot T}^{T} \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t|_{a \cdot T}^{T} \right) =$$

$$= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 \right) +$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) =$$

$$= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 \right) +$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(1 - a^3 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 +$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(1 - a^2 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot \left(1 + a + a^2 \right) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$- \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left(1 + a + a^2 \right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left(\left(1 + a + a^2 \right) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2 \right) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left(\left(1 + a + a^2 \right) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6} \right) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\left(1 + a + a^2 \right) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6 \right) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2 \right) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2 \right) =$$

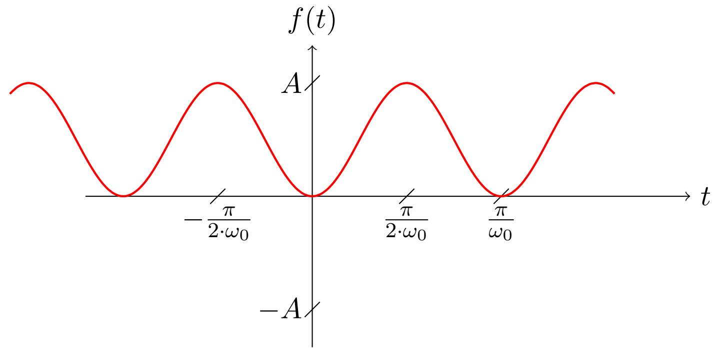
$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 2 \cdot a + a^2 \right) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 =$$

$$= \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)$

Zadanie 10. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.21}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left|A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \right)^4 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{\left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^4}{(2 \cdot \jmath)^4} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{1 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^4 \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^0 + 4 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^3 \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^1 + 6 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^2 \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^2}{(2 \cdot \jmath)^4} + \right. \\
&\left. + \frac{4 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^1 \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^3 + 1 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^0 \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^4}{(2 \cdot \jmath)^4} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-0 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2^4 \cdot \jmath^4} + \right. \\
&\left. + \frac{-4 \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-3 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2^4 \cdot \jmath^4} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t - 0 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t - \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t - 2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t - 3 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t - 4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{16 \cdot 1} \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6 \cdot e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6 \cdot e^{0}}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \int_0^T \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) dt =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = 4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = 2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t = \\ dz_1 = 4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt = \\ dt = \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_4 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_2 + \right.$$

$$\left. - 4 \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_3 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 + \right.$$

$$\left. -4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 - 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1}\Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2}\Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3}\Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4}\Big|_0^T + \right.$$

$$\left. +6 \cdot t\Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + \right.$$

$$\left. +6 \cdot t\Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + 6 \cdot (T - 0)\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{0}\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{0}\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{0}\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{0}\right) + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \right.$$

$$\left. -\frac{4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - 4 \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath} - \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath\ cdotx}}{2 \cdot \jmath} \right\} =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot T\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot T\right) + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \left\{ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(8\pi\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(4\pi\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 0 - \frac{4}{\omega_0} \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0} =$$
$$= \frac{3 \cdot A^2}{8}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{3 \cdot A^2}{8}$

Zadanie 11. Oblicz moc sygnału $f(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Pierwszym krokiem jest ustalenie czy sygnał $f(t)$ jest sygnałem okresowym czy nie. Nasz sygnał jest sumą dwóch funkcji okresowych $f_1(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t)$ i $f_2(t) = B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Suma funkcji okresowych jest funkcją okresową, wtedy i tylko wtedy gdy stosunek okresów funkcji składowych jest liczbą wymierną

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathcal{W}$$

W naszym przypadku

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{k} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{n} \\ \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} \end{aligned}$$

W ogólności liczby n i k mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi $n, k \in \mathcal{R}$. Załóżmy jednak iż ułamek $\frac{n}{k}$ jest pewną liczba wymierna $\frac{a}{b}$ gdzie $a, b \in \mathcal{Z}$ są liczbami całkowitymi.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} = \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathcal{Z}$$

W takim przypadku okres naszego sygnału jest Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością okresów funkcji składowych. Stwórzmy więc tabelę z kolejnymi wielokrotnościami okresów funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Zgodnie z przyjętym przez nas założeniem

Wielokrotność okresu	1	2	3	...	a	...	b	...
T_1	$\frac{2\pi}{k}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{k}$	...	$a \cdot \frac{2\pi}{k}$	...	$\boxed{b \cdot \frac{2\pi}{k}}$	...
T_2	$\frac{2\pi}{n}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{n}$	...	$\boxed{a \cdot \frac{2\pi}{n}}$	...	$b \cdot \frac{2\pi}{n}$	...

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot T_1 = a \cdot T_2$$

a więc a-ta wielokrotność okresu pierwszej funkcji jest równa b-tej wielokrotności okresu drugiej funkcji, a wiec jest ona poszukiwaną przez nas Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością. Związku z tym okresem naszego sygnału jest $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$. Aby obliczyć moc należy wybrać przedział o długości jednego okresu. Przedział może być dowolnie położony, przyjmijmy więc przedział $t \in (0; T)$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.22}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T |A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)|^2 \cdot dt =$$

Ponieważ mamy doczynienia z sygnałem o wartościach rzeczywistych możemy pominąć obliczenie modułu.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t))^2 \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Big((A \cdot sin\,(k \cdot t))^2 + 2 \cdot A \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot B \cdot cos\,(n \cdot t) + (B \cdot cos\,(n \cdot t))^2\Big) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Big(A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) + B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t)\Big) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) =$$
$$= \left\{\ sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \quad cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\ \right\} =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^2 \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2}\right)^2 \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2 - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2}{(2 \cdot \jmath)^2} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2 \cdot \jmath \cdot 2} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2 + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2}{2^2} \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot k \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t}}{4 \cdot \jmath} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot t} + e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot t}}{4 \cdot \jmath} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt\right) =$$

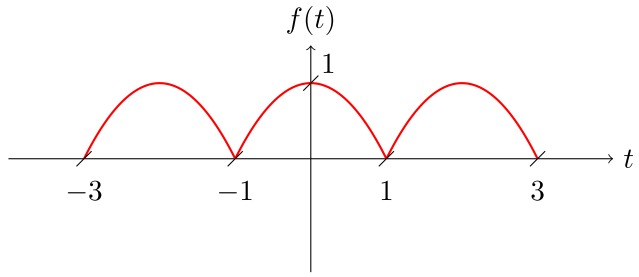
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\int_0^T\left(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}-2\cdot 1+e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\right)\cdot dt+\right.\\
&+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\int_0^T\left(e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t}+e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t}-e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t}-e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\right)\cdot dt+\\
&+\left.\frac{B^2}{4}\cdot\int_0^T\left(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}+2\cdot 1+e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\right)\cdot dt\right)=\\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\cdot dt-\int_0^T 2\cdot dt+\int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\cdot dt\right)+\right.\\
&+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\int_0^T e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\cdot dt+\int_0^T e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\cdot dt-\int_0^T e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\cdot dt-\int_0^T e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\cdot dt\right)+\\
&+\left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\cdot dt+\int_0^T 2\cdot dt+\int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\cdot dt\right)\right)=\\
&=\left\{\begin{array}{llll}
z_1=2\cdot\jmath\cdot k\cdot t & z_2=-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t & z_3=2\cdot\jmath\cdot n\cdot t & z_4=-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t\\
dz_1=2\cdot\jmath\cdot k\cdot dt & dz_2=-2\cdot\jmath\cdot k\cdot dt & dz_3=2\cdot\jmath\cdot n\cdot dt & dz_4=-2\cdot\jmath\cdot n\cdot dt\\
dt=\frac{dz_1}{2\cdot\jmath\cdot k} & dt=\frac{dz_2}{-2\cdot\jmath\cdot k} & dt=\frac{dz_3}{2\cdot\jmath\cdot n} & dt=\frac{dz_4}{-2\cdot\jmath\cdot n}\\
z_5=2\cdot\jmath\cdot(k+n)\cdot t & z_6=-2\cdot\jmath\cdot(k+n)\cdot t & z_7=2\cdot\jmath\cdot(k-n)\cdot t & z_8=-2\cdot\jmath\cdot(k-n)\cdot t\\
dz_5=\jmath\cdot(k+n)\cdot dt & dz_6=-\jmath\cdot(k+n)\cdot dt & dz_7=\jmath\cdot(k-n)\cdot dt & dz_8=-\jmath\cdot(k-n)\cdot dt\\
dt=\frac{dz_5}{\jmath\cdot(k+n)} & dt=\frac{dz_6}{-\jmath\cdot(k+n)} & dt=\frac{dz_7}{\jmath\cdot(k-n)} & dt=\frac{dz_8}{-\jmath\cdot(k-n)}
\end{array}\right\}=\\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\int_0^T e^{z_1}\cdot\frac{dz_1}{2\cdot\jmath\cdot k}-2\cdot\int_0^T dt+\int_0^T e^{z_2}\cdot\frac{dz_2}{-2\cdot\jmath\cdot k}\right)+\right.\\
&+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\int_0^T e^{z_5}\cdot\frac{dz_5}{\jmath\cdot(k+n)}+\int_0^T e^{z_7}\cdot\frac{dz_7}{\jmath\cdot(k-n)}+\right.\\
&-\left.\int_0^T e^{z_8}\cdot\frac{dz_8}{-\jmath\cdot(k-n)}-\int_0^T e^{z_6}\cdot\frac{dz_6}{-\jmath\cdot(k+n)}\right)+\\
&+\left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\int_0^T e^{z_3}\cdot\frac{dz_3}{2\cdot\jmath\cdot n}+2\cdot\int_0^T dt+\int_0^T e^{z_4}\cdot\frac{dz_4}{-2\cdot\jmath\cdot n}\right)\right)=\\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\int_0^T e^{z_1}\cdot dz_1-2\cdot\int_0^T dt+\frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\int_0^T e^{z_2}\cdot dz_2\right)+\right.\\
&+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\int_0^T e^{z_5}\cdot dz_5+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\int_0^T e^{z_7}\cdot dz_7+\right.\\
&-\left.\frac{1}{-\jmath\cdot(k-n)}\cdot\int_0^T e^{z_8}\cdot dz_8-\frac{1}{-\jmath\cdot(k+n)}\cdot\int_0^T e^{z_6}\cdot dz_6\right)+\\
&+\left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\int_0^T e^{z_3}\cdot dz_3+2\cdot\int_0^T dt+\frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\int_0^T e^{z_4}\cdot dz_4\right)\right)=\\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot e^{z_1}\Big|_0^T-2\cdot t\Big|_0^T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot e^{z_2}\Big|_0^T\right)+\right.\\
&+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot e^{z_5}\Big|_0^T+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot e^{z_7}\Big|_0^T+\right.\\
&+\left.\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot e^{z_8}\Big|_0^T+\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot e^{z_6}\Big|_0^T\right)+\\
&+\left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot e^{z_3}\Big|_0^T+2\cdot t\Big|_0^T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot e^{z_4}\Big|_0^T\right)\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\Big|_0^T - 2 \cdot t|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\Big|_0^T \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\Big|_0^T + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\Big|_0^T \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\Big|_0^T + 2 \cdot t|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\Big|_0^T \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot 0}\right) - 2 \cdot (T-0) - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot 0}\right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot T} - e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot 0}\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot T} - e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot 0}\right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot T} - e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot 0}\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot T} - e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot 0}\right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot 0}\right) + 2 \cdot (T-0) - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot 0}\right) \right) \right) =\\
&= \left\{ \begin{array}{c} T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2 \\ T = b \cdot \frac{2\pi}{k} = a \cdot \frac{2\pi}{n} \end{array} \right\} =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} - e^0\right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} - e^0\right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot k\cdot T} \cdot e^{\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot k\cdot T} \cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot T} \cdot e^{\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot T} \cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - e^0\right) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - e^0\right) \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} \cdot e^{\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} \cdot e^{\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi} \cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi} \cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi} \cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi} \cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\right) \right) \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll}
\underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi} = 1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi} = 1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi} = 1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi} = 1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} = 1
\end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot(1-1) - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot(1-1)\right) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot(1\cdot 1-1) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot(1\cdot 1-1) + \right.\\
&+ \left.\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot(1\cdot 1-1) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot(1\cdot 1-1)\right) + \\
&+ \left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot(1-1) + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot(1-1)\right)\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot 0 - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot 0\right) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot 0 + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot 0 + \right.\\
&+ \left.\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot 0 + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot 0\right) + \\
&+ \left.\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot 0 + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot 0\right)\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot(0 - 2\cdot T - 0) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot(0+0+0+0) + \\
&+ \left.\frac{B^2}{4}\cdot(0 + 2\cdot T - 0)\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot(-2\cdot T) + \frac{B^2}{4}\cdot 2\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{2}\cdot T + \frac{B^2}{2}\cdot T\right) = \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$

Zadanie 12. Compute the average power for the following periodic signal $f(t)$



Signal in the range $t \in (-1; 1)$ is described as:

$$f(t) = 1 - t^2 \tag{1.23}$$

The average power for periodic signals is defined by:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.24}$$

In this case period T is equal to 2.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left|1 - t^2\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - 2 \cdot t^2 + t^4\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-1}^{1} 1 \cdot dt + \int_{-1}^{1} (-2) \cdot t^2 \cdot dt + \int_{-1}^{1} t^4 \cdot dt\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[t\Big|_{-1}^{1} - 2 \cdot \frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{t^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[(1 - (-1)) - \frac{2}{3} \cdot (1 - (-1)) + \frac{1}{5} \cdot (1 - (-1))\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

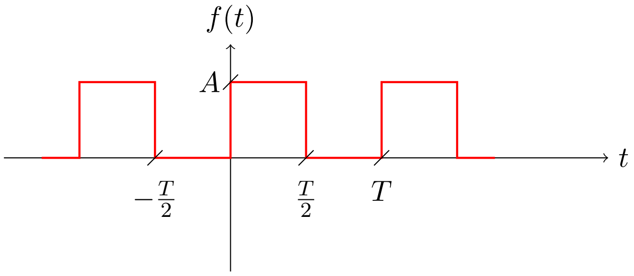
The average power equals to $\frac{8}{15}$.

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{\cancel{T}}\cdot\left(\frac{\cancel{T}}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi}\left(sin\left(k \cdot \pi\right) - sin\left(0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi}\left(sin\left(k \cdot \pi\right) - 0\right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot \pi\right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.5}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi}\left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi}\left(cos\left(k \cdot \pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi}\left(cos\left(k \cdot \pi\right) - 1\right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi}\left(1 - cos\left(k \cdot \pi\right)\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi}\left(1 - cos\left(k \cdot \pi\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$a_0 = \frac{A}{2}$$
$$a_k = 0 \tag{2.6}$$
$$b_k = \frac{A}{k \cdot \pi}\left(1 - cos\left(k \cdot \pi\right)\right)$$

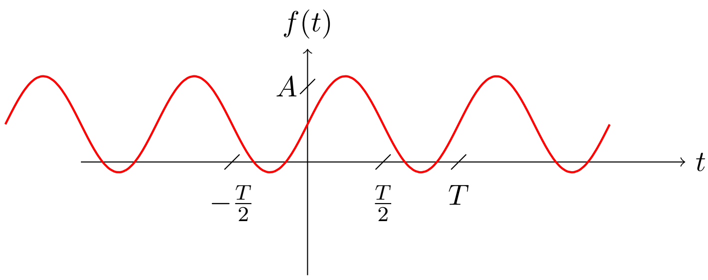
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

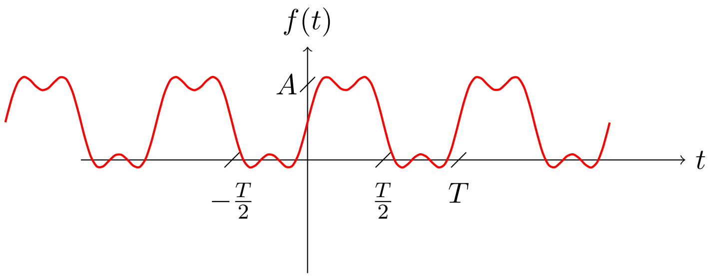
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{2.7}$$

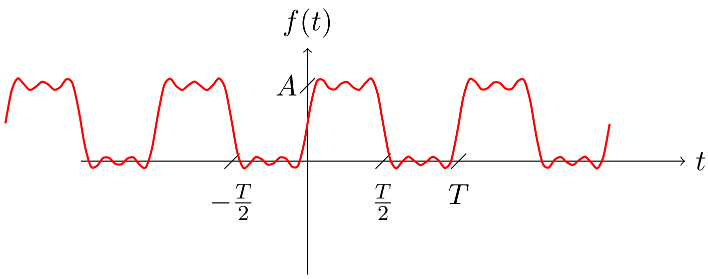
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



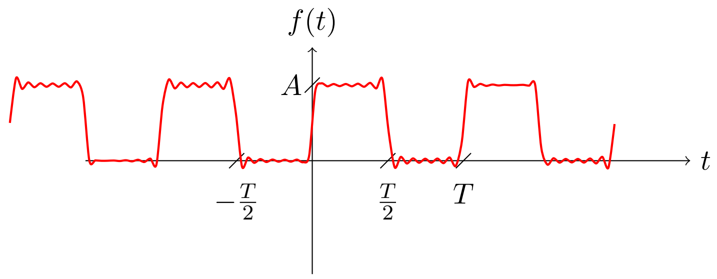
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



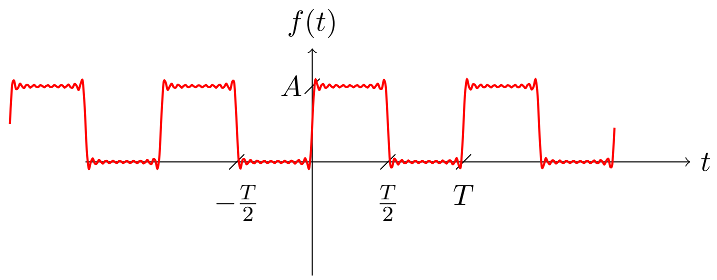
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

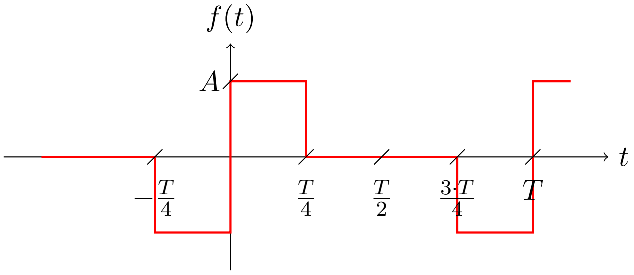


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.8}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.9}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_{0}^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_{0}^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.10}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot dt + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\,sin\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) - sin\left(0\right)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(0 - sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(0\right) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.11}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{aligned} z &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt &= \tfrac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot dz + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\,(z)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\,(z)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\,(z)|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\,(z)|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\,(0) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\,(0)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\,(0) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + cos\,(0)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(2 - 2\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$a_0 = 0$$
$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

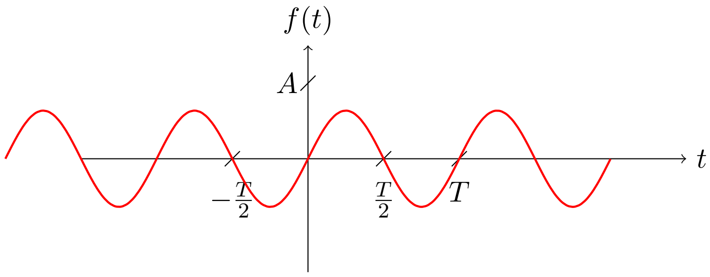
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$

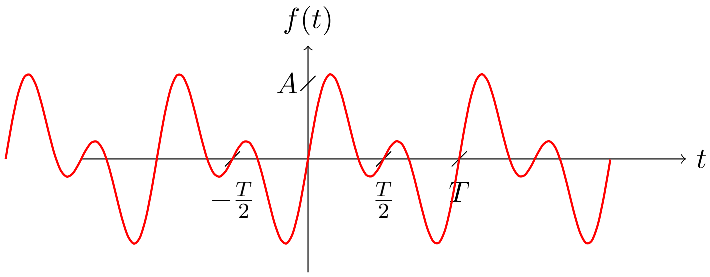
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$

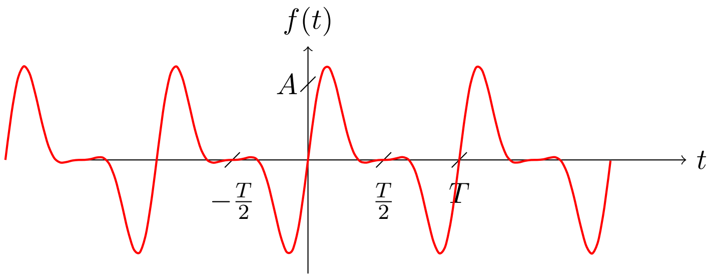
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



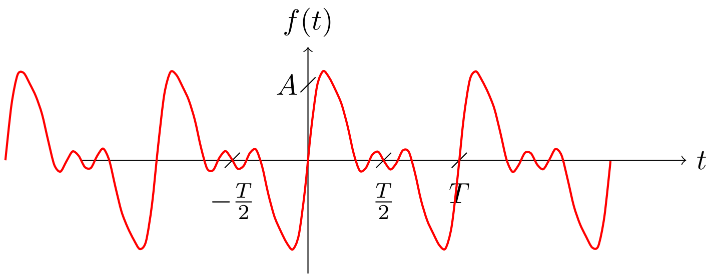
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



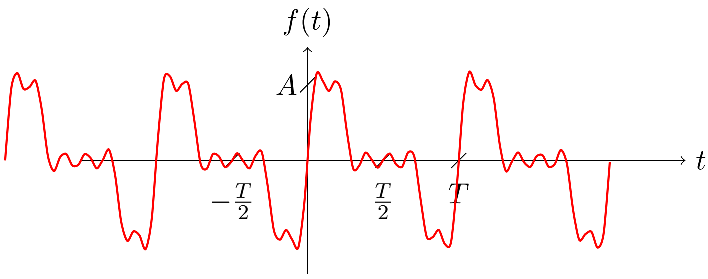
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



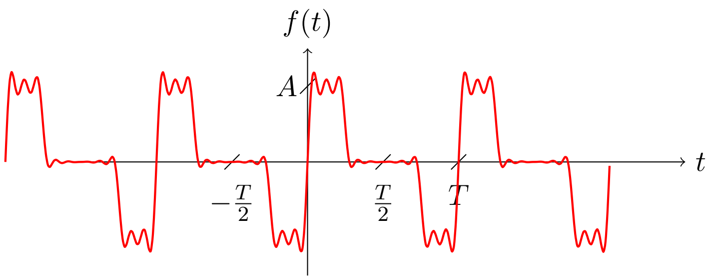
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



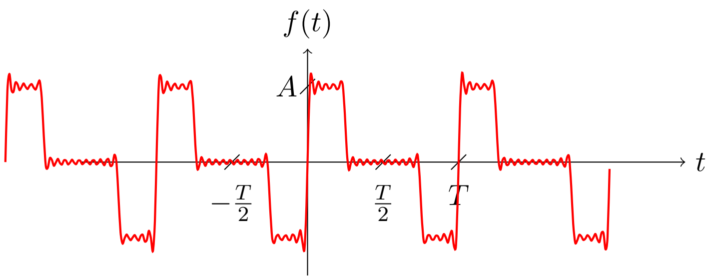
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

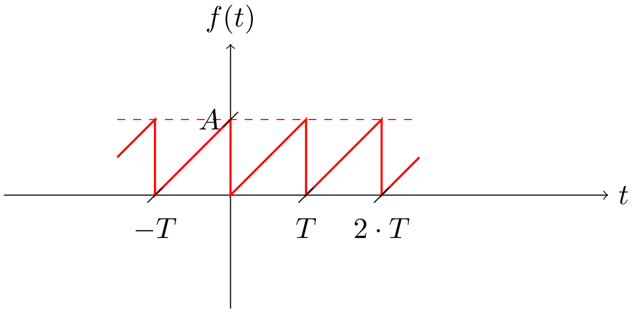


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.12}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.13}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.14}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.15}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right) = \\
&= -\frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi} = \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k\cdot\pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

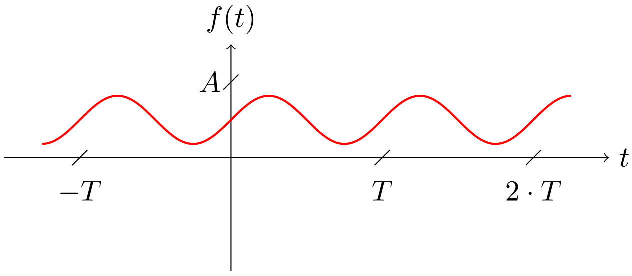
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

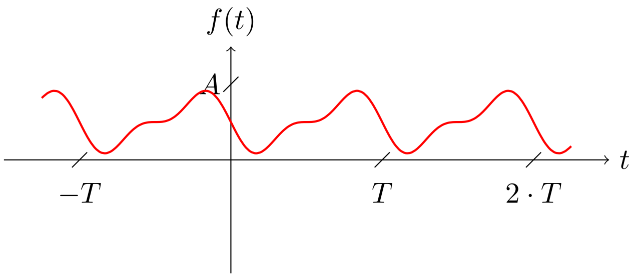
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{2.16}$$

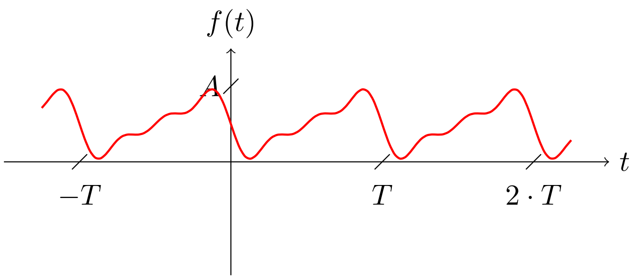
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



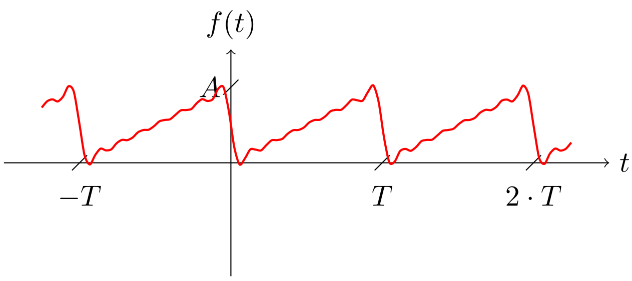
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



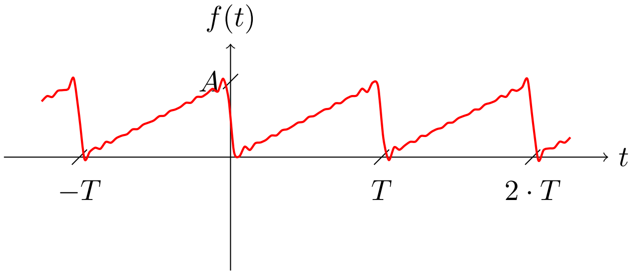
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

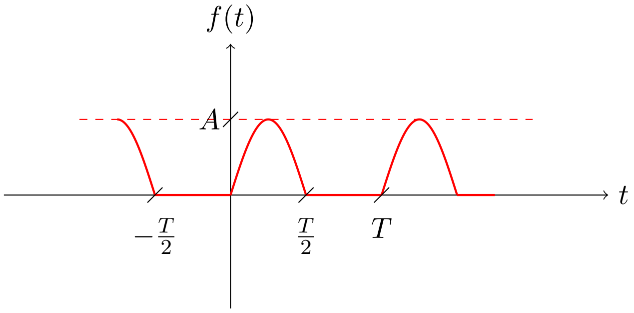


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.17}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot dt \tag{2.18}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1-1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.19}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} cos\,(x) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\,(x) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}}{2\jmath}+\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}}{2\jmath}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)+sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\wedge k\neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\wedge k\neq 1 \end{array}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) - cos\left(0\right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) - cos\left(0\right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right)\right) + \frac{1}{1-k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right)\right) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k) \right)}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k) \right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) + 1 - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k) \right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) - cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k) \right)}{1-k^2} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} cos\left(\pi \cdot (1+k) \right) = cos\left(\pi + k \cdot \pi \right) = -cos\left(k \cdot \pi \right) \\ cos\left(\pi \cdot (1-k) \right) = cos\left(\pi - k \cdot \pi \right) = -cos\left(-k \cdot \pi \right) = -cos\left(k \cdot \pi \right) \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + cos\left(k \cdot \pi \right) - k \cdot cos\left(k \cdot \pi \right) + cos\left(k \cdot \pi \right) + k \cdot cos\left(k \cdot \pi \right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot cos\left(k \cdot \pi \right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi \right)}{1-k^2}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+cos(k \cdot \pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost a_1

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{0} - e^{0}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2\jmath} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz =$$

$$= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(2\pi\right) - cos\left(0\right)\right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1 - 1) =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi}\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.20}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}}{2}-\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}}{2}\right)\cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)-cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\right)\cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\cdot dt-\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{llll}
z_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\
dz_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\
dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\wedge k\neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\wedge k\neq 1
\end{array}\right\} = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_1)\cdot\frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}-\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_2)\cdot\frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\right) = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_1)\cdot dz_1-\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_2)\cdot dz_2\right) =
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\,(z_1)|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\,(z_2)|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) = \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (sin\,(\pi \cdot (1+k)) - sin\,(0)) = \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (sin\,(\pi \cdot (1-k)) - sin\,(0)) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) = \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot 0 =$$
$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost b_1

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$
$$= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$
$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2}\right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) - 1\right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0\right)\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right)\right) - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\,(2\pi) - sin\,(0)\right) - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2}$$

A wiec wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$a_0 = \frac{A}{\pi}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_k = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\,(k \cdot \pi)}{1 - k^2}$$

$$b_1 = \frac{A}{2}$$
$$b_k = 0$$

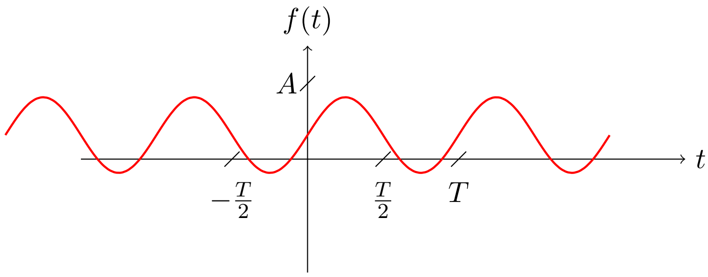
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

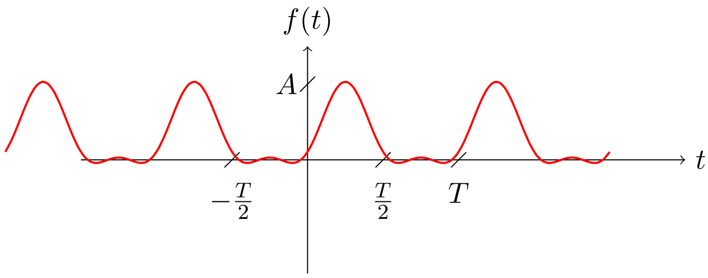
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{2.21}$$

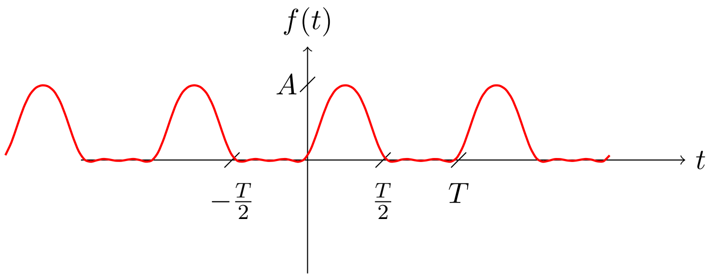
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



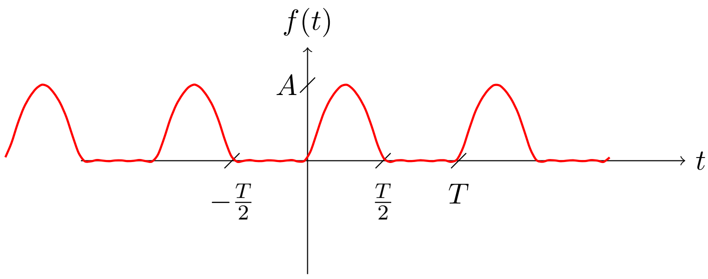
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



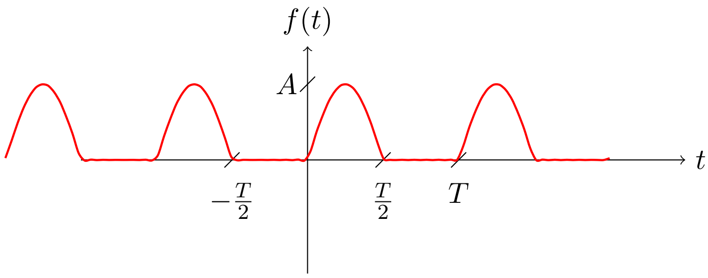
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



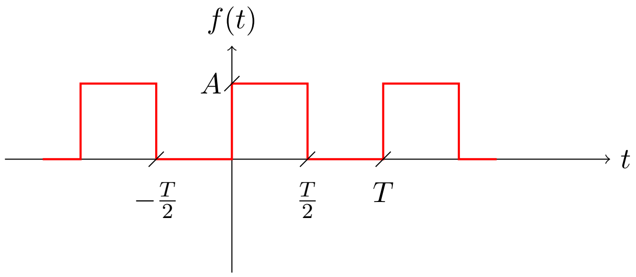
W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.22}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.23}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.25}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z &= -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^z\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^0\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned}
$$

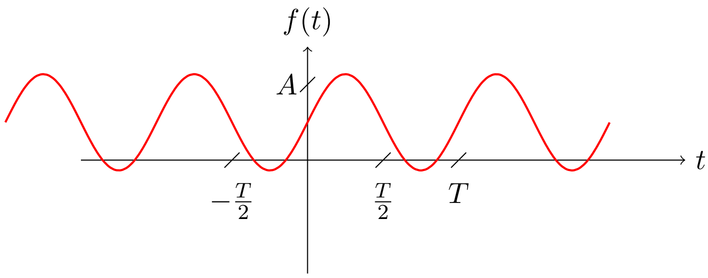
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k\rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

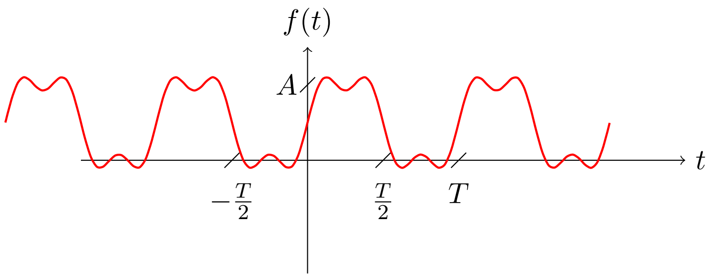
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.26}$$

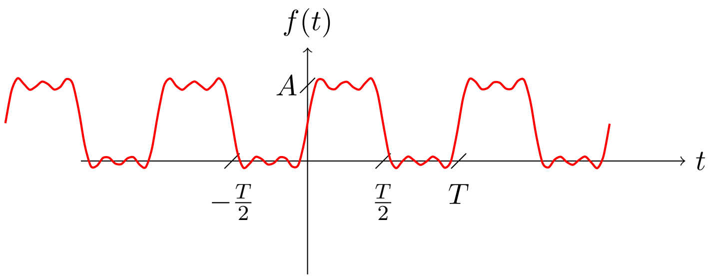
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



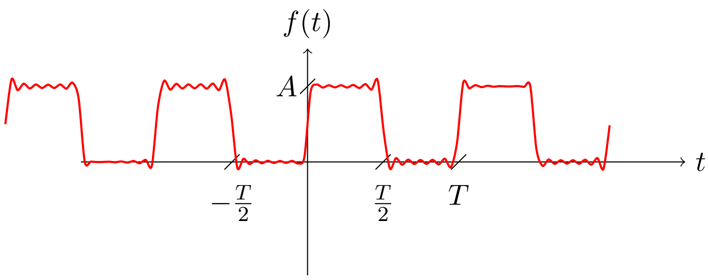
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



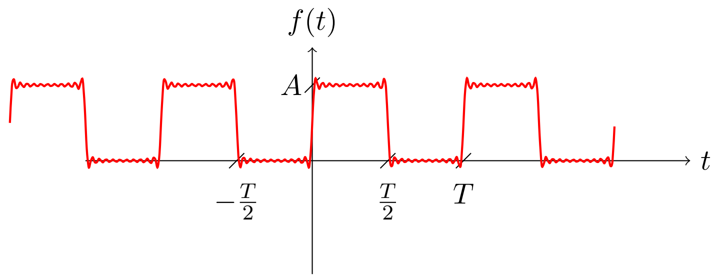
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

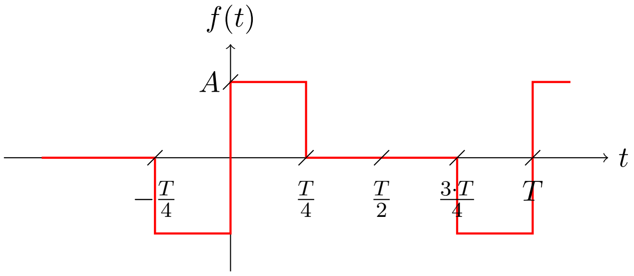


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.27}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.28}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.30}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(-\frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot dt + \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(e^{z}\big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{z}\big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(2 - \left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot 2\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\pi}\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = \\
&= \left\{cos(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = 0$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \tag{2.31}$$

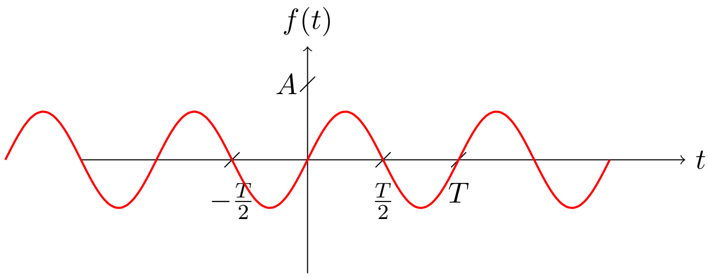
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

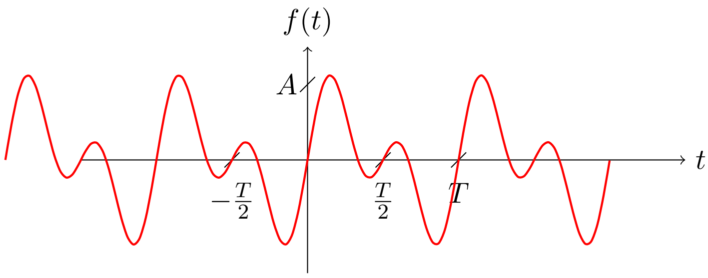
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.32}$$

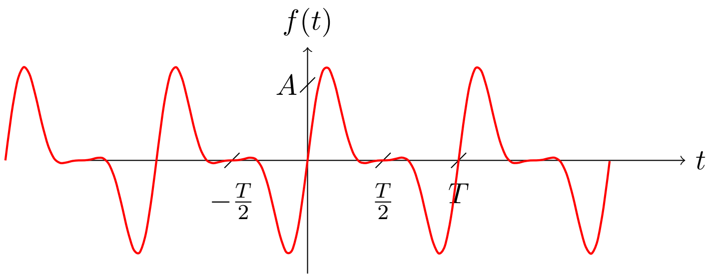
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



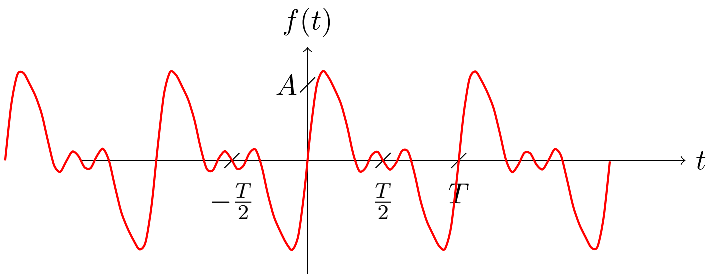
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



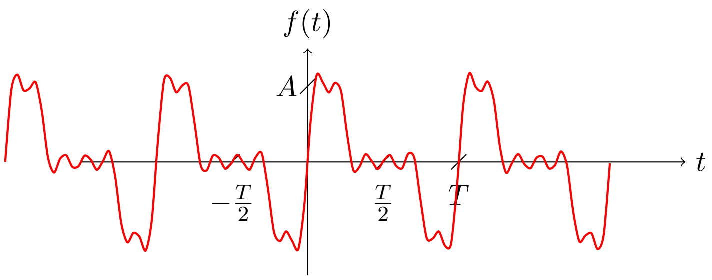
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



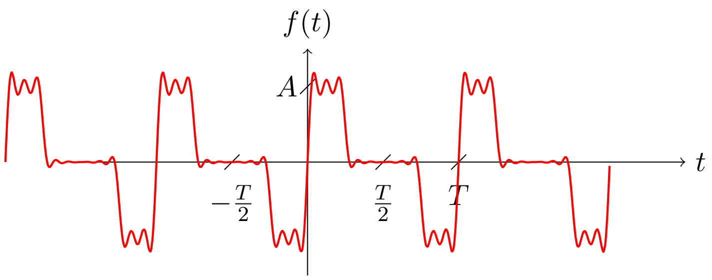
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



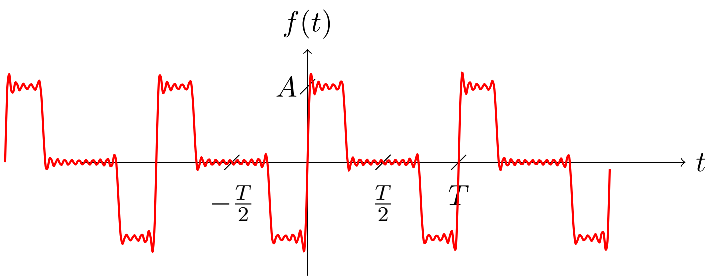
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

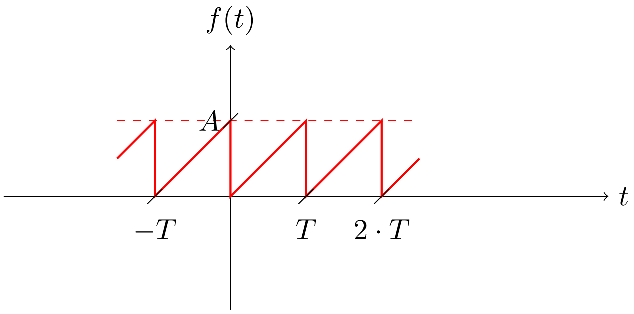


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.33}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.34}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{2.35}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - 0\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T^2}{\left(-\jmath\cdot k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Bigg|_0^T\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} + \frac{T^2}{-\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - e^0\right)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot 0\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - 0\right) = \\
&= \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

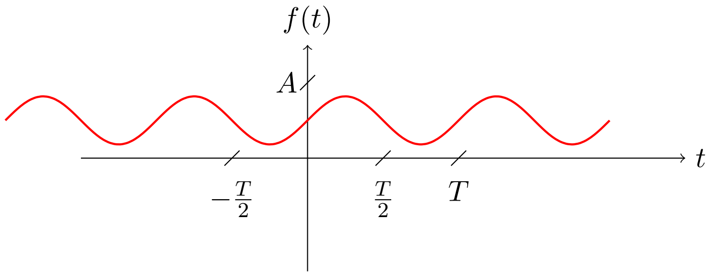
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg\left(F_k\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

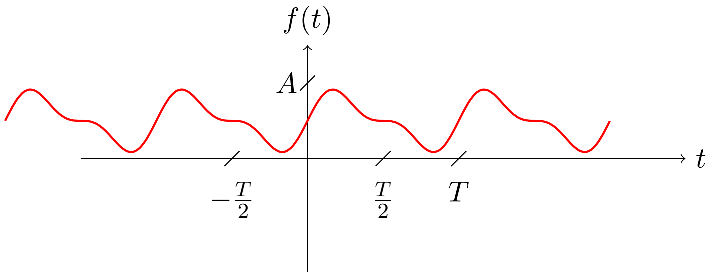
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.36}$$

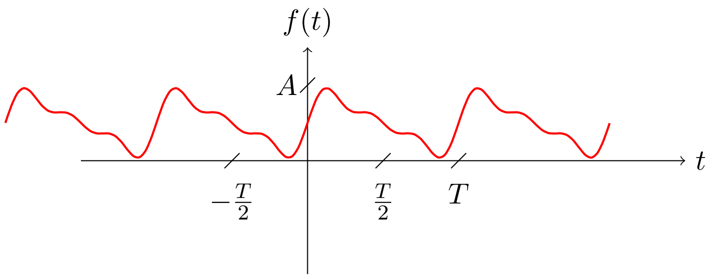
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



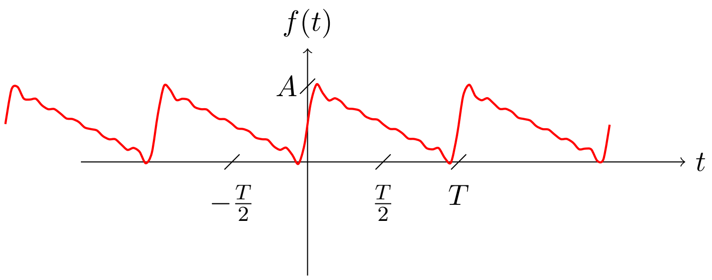
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



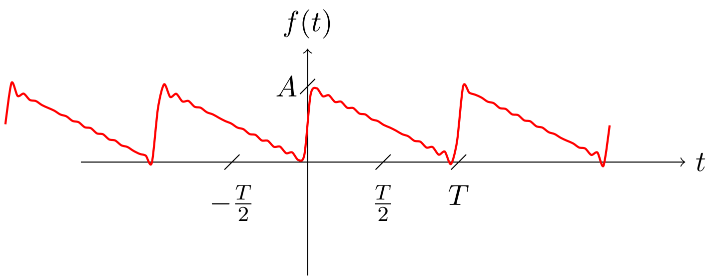
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

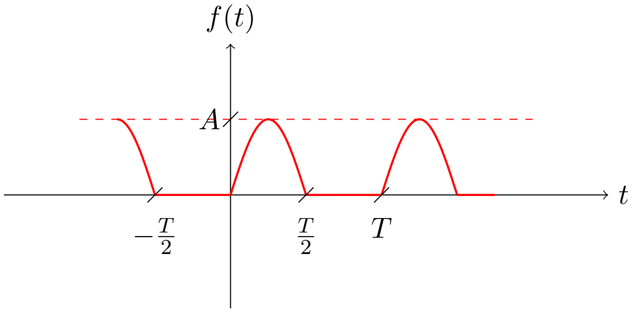


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.37}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.38}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1-1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.39}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt & = \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k}\cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot 0}\right) + \frac{1}{1+k}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - e^{0}\right) + \frac{1}{1+k}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1+k}{(1-k)\cdot(1+k)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - 1\right) + \frac{1-k}{(1-k)\cdot(1+k)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - 1\right)\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(1+k)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - 1\right)}{(1-k)\cdot(1+k)} + \frac{(1-k)\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - 1\right)}{(1-k)\cdot(1+k)}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(1+k)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - 1\right) + (1-k)\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - 1\right)}{(1-k)\cdot(1+k)}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - 1 + k\cdot e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - k + e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - 1 - k\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} + k}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} - 2 + k\cdot e^{\jmath\cdot\pi\cdot(1-k)} + e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)} - k\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot(1+k)}}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - 2 + k\cdot e^{\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} + e^{-\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - k\cdot e^{-\jmath\cdot\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k}}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{-1\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - 2 + k\cdot(-1)\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - 1\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - k\cdot(-1)\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k}}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{-e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - 2 - k\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} + k\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k}}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{-2\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} - 2}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{2\cdot e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} + 2}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\pi}\cdot 2\cdot\left(\frac{e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} + 1}{1-k^2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\frac{e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k} + 1}{1-k^2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\frac{e^{-\jmath\cdot\pi\cdot k}+1}{1-k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_1

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -\jmath \cdot \tfrac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -\jmath \cdot \tfrac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{4\jmath} = \\
&= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_1 wynosi $-\jmath \cdot \frac{A}{4}$
F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć wspołczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_{-1}

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right) \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t + \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t + \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1-1) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= -\frac{A}{4\jmath} = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= \jmath \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

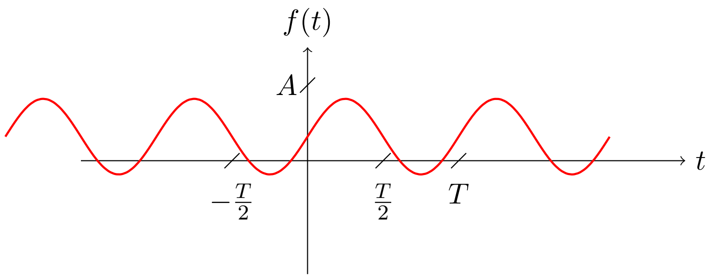
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

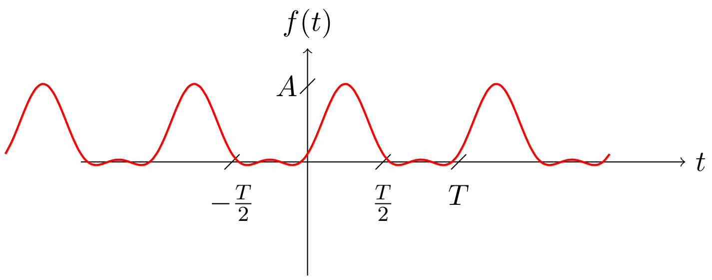
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.40}
$$

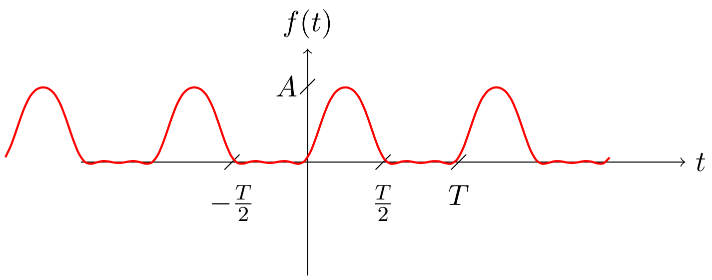
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



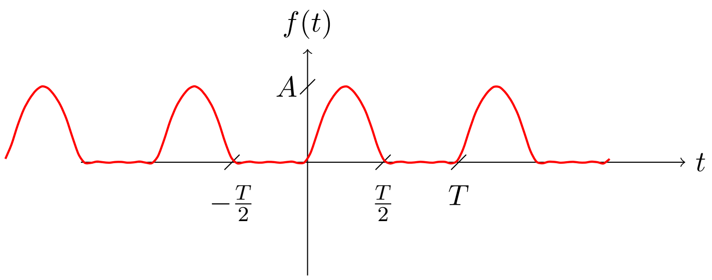
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



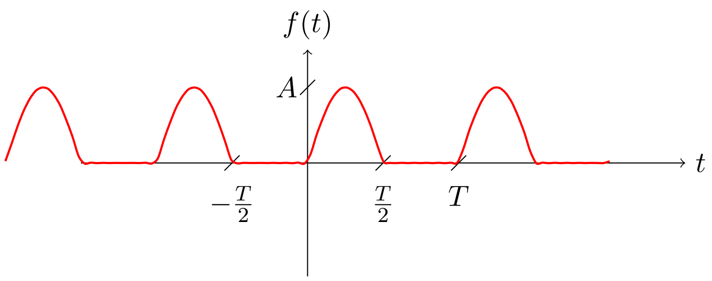
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

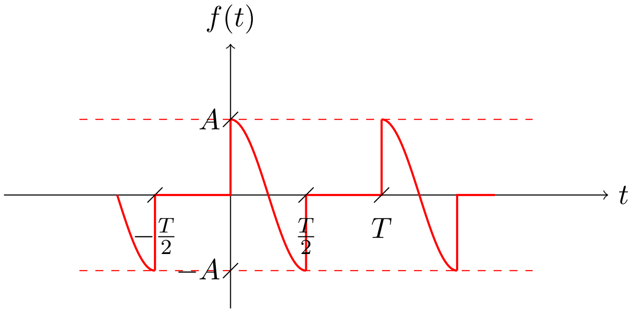


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału cosinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.41}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.42}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt & = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (sin\,(pi) - sin\,(0)) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.43}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} z_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^{0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{1-k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1-k^2} \right) = \\
&= -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1-k^2} \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi}+1}{1-k^2} \right)$.
Dla $k = 1$ i $k = -1$ trzeba wyzanczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{c} z = -\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = -\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}-0\right) - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-1+1)\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2}-0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot \left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot \left(e^{\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot (1-1) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Tak wiec ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= \frac{A}{4} \\
F_{-1} &= \frac{A}{4} \\
F_k &= -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}
$$

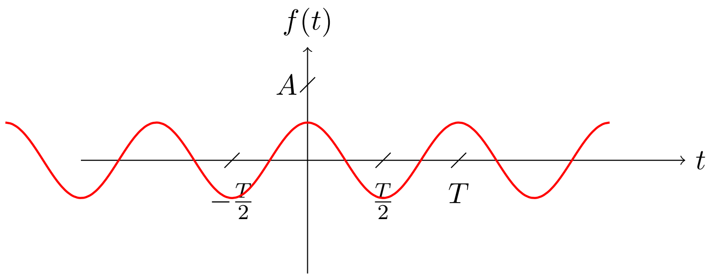
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$\lvert F_k \rvert$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\left\{F_k\right\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

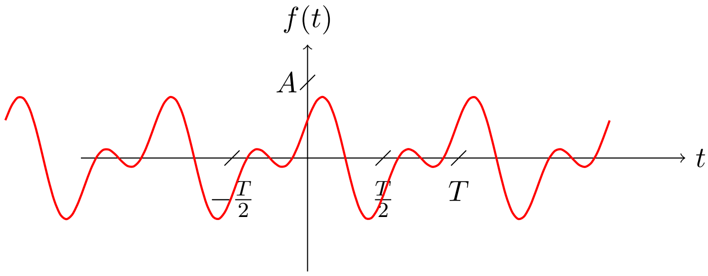
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.44}
$$

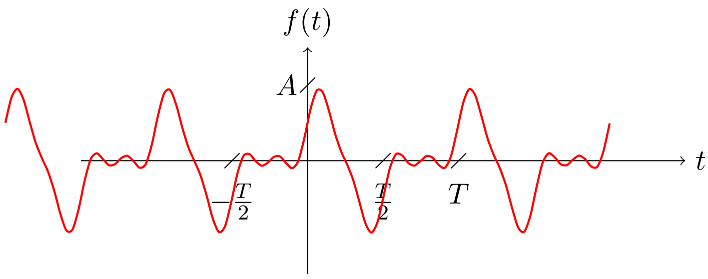
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



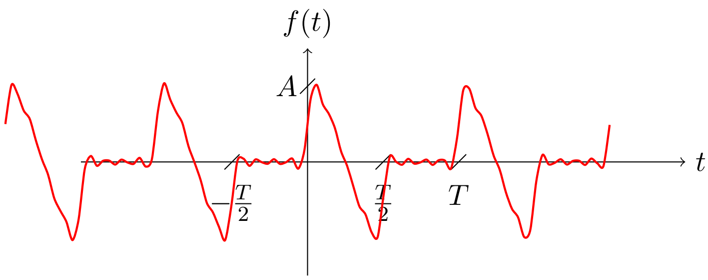
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



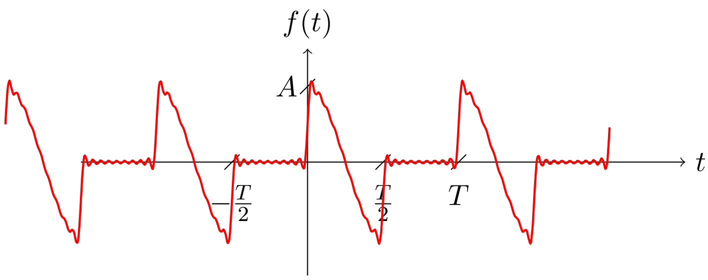
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



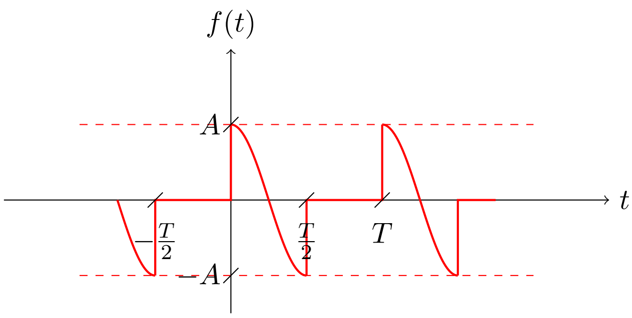
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy

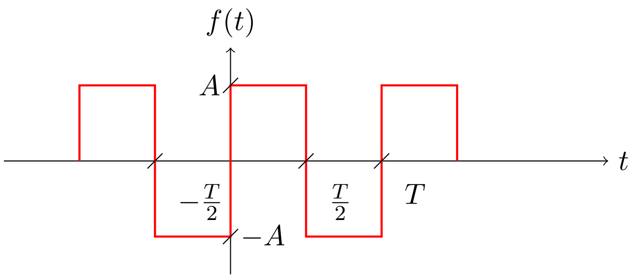


W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Wyznacz udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_1}{P} = ? \tag{2.45}$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.46}$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{2.47}$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T |-A|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + A^2 \cdot \int_{\frac{T}{2}}^T dt \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t|_0^{\frac{T}{2}} + t|_{\frac{T}{2}}^T \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 + T - \frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot (T) = \\ &= A^2 \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się A^2.

Moc podstawowej (pierwszej) harmonicznej to (na podstawie twierdzenia Parsevala):

$$P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2 \tag{2.48}$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \tag{2.49}$$

W związku z tym, należy obliczyć wartość współczynnika F_1. Można to zrobić bezpośrednio ze wzoru na F_k:

$$F_k = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.50}$$

podstawiając $k = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.51}$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na F_1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -\jmath \cdot \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -\jmath \cdot \tfrac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^z \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^z \cdot dz \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^z\big|_0^{\frac{T}{2}} - e^z\big|_{\frac{T}{2}}^{T} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} - e^0 - e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} + e^{-\jmath \cdot \pi} \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} &= cos(2\pi) - \jmath \cdot sin(2\pi) = 1 \\ e^{-\jmath \cdot \pi} &= cos(\pi) - \jmath \cdot sin(\pi) = -1 \end{aligned} \right\} = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot (-1 - 1 - 1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot (-4) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \pi} = \\
&= -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 to $-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}$

Podstawiając wartość współczynnika F_1 do wzoru na moc podstawowej harmonicznej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \cdot |F_1|^2 = \\ &= 2 \cdot \left| -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \right|^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{\pi} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\pi^2} = \\ &= \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Moc podstawowej harmonicznej równa się $P_1 = \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}$.

Teraz można wyznaczyć udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

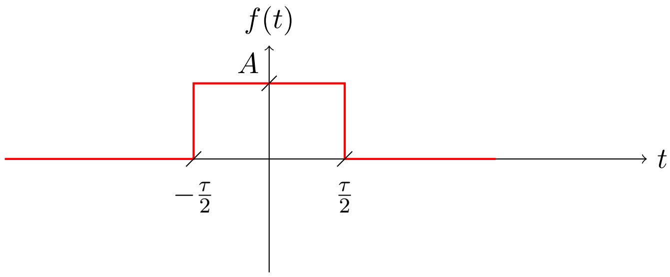
$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}}{A^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx 81\% \tag{2.52}$$

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \tag{3.1}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.2}$$

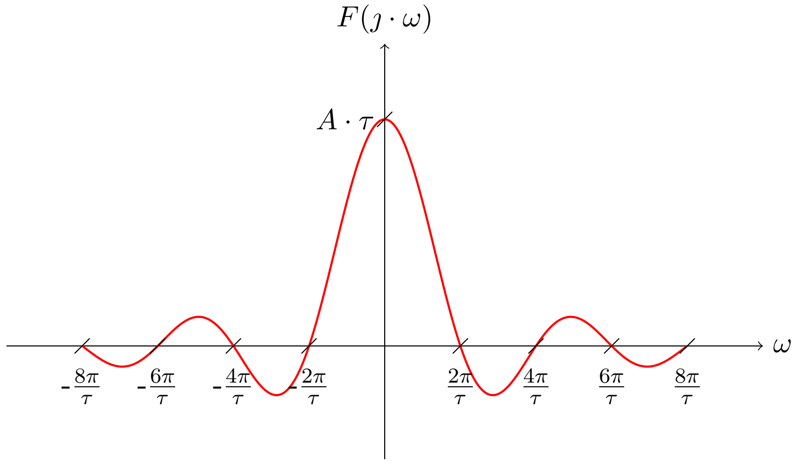
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} z & = -\jmath \cdot \omega \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \omega \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot dz \end{Bmatrix} = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{z}|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-\frac{\tau}{2})}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}\right) = \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) = \\
&= \left\{ \frac{sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\
&= A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)
\end{aligned}
$$

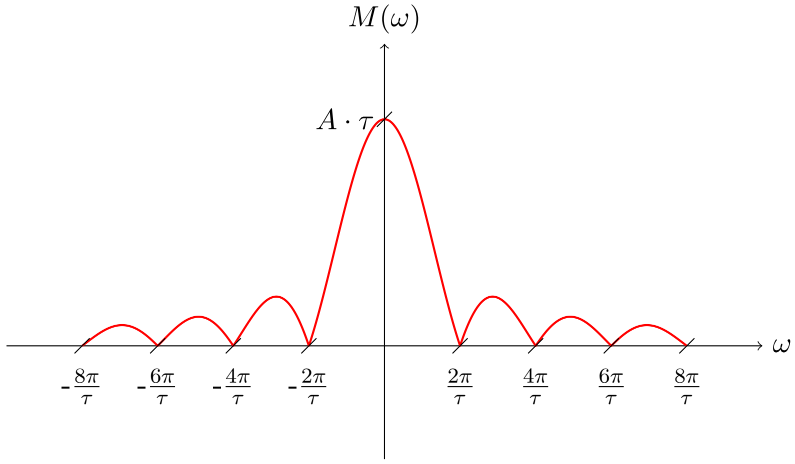
Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) \tag{3.3}$$



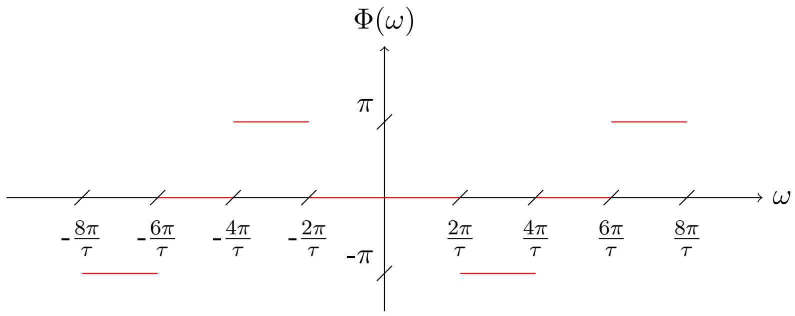
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.4}$$

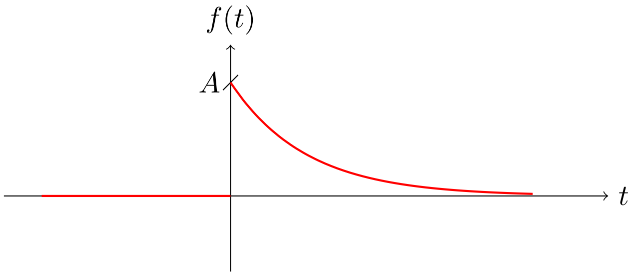


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{3.5}$$



Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.6}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.7}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t \\ dz &= -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot dt \\ dt &= \tfrac{1}{-(a+\jmath \cdot \omega)} \cdot dz \end{aligned} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z}\big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{A}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t}\Big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{A}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left(e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot 0} \right) =
\end{aligned}$$

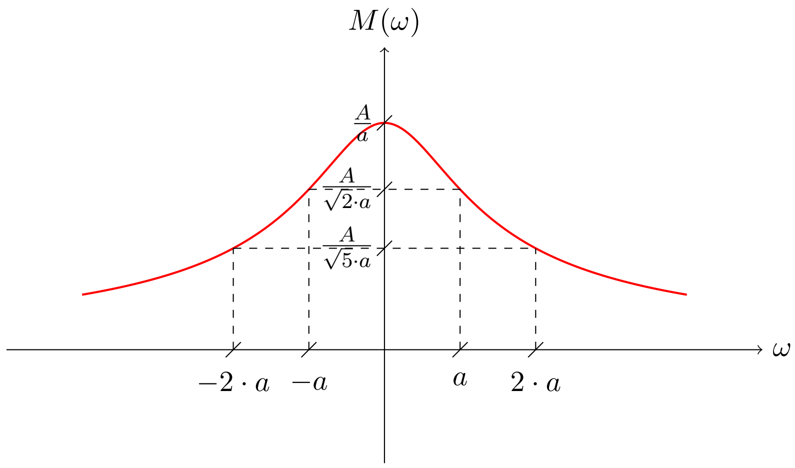
$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{0}\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau+\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot(0-1)=\\
&= \frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}$
Wyznaczmy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\frac{(a-\jmath\cdot\omega)}{(a-\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{A\cdot(a-\jmath\cdot\omega)}{(a^2+\omega^2)}=\\
&= \frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}-\jmath\cdot\frac{A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

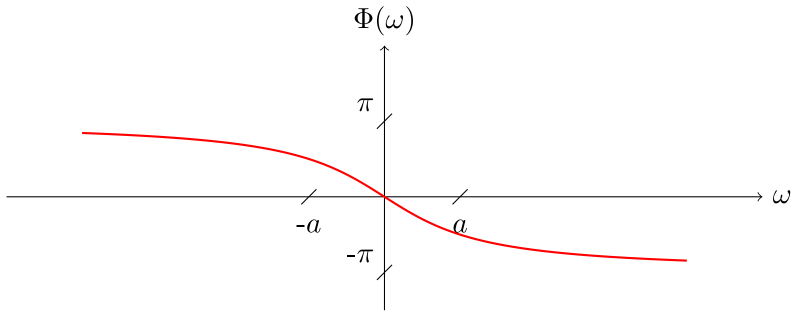
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)|=\\
&= \sqrt{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)^2+\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)^2}=\\
&= \sqrt{\frac{A^2\cdot(a^2+\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}}=\\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2+\omega^2)}}=\\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}
\end{aligned}
$$

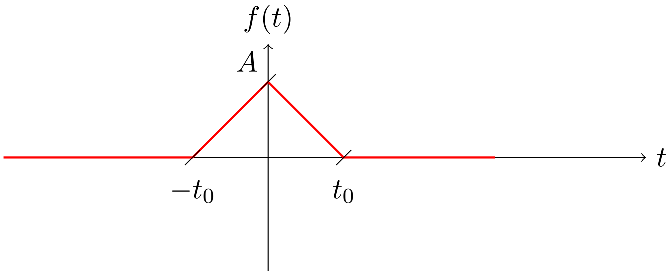


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= arctg(\frac{Im\{F(\jmath\omega)\}}{Re\{F(\jmath\omega)\}}) = \\ &= arctg\left(\frac{\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)}{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)}\right) = \\ &= arctg\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\cdot\frac{(a^2+\omega^2)}{A\cdot a}\right) = \\ &= arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$



Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.8}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.9}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.10}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.11}$$

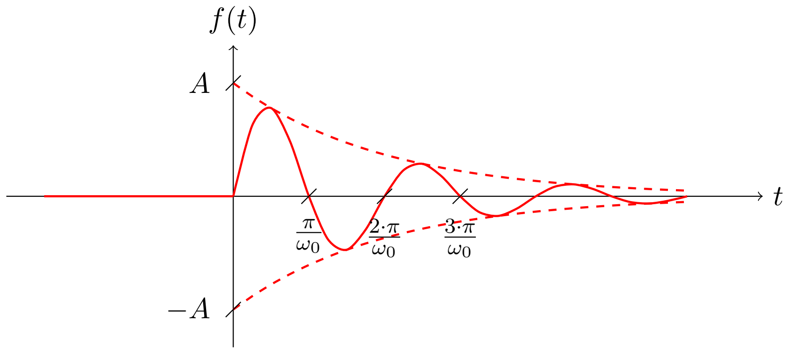
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right) =
\end{aligned}$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) =$$
$$+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) =$$
$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right) \right) =$$
$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) =$$
$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) =$$
$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \right) =$$
$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) =$$
$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(1 - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) =$$
$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \right) \right) =$$
$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) =$$
$$= -\frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} =$$
$$+ \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} =$$
$$= -\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) =$$
$$= \left\{ cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot cos(\omega \cdot t_0) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - cos(\omega \cdot t_0)) =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot x) \\ cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot sin^2(x) \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})) =$$
$$= \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) =$$
$$= \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) =$$
$$= \left\{ \tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} =$$
$$= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.12}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.13}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot \left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath} \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 0 + \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{rclrcl} z &=& (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t & w &=& (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t \\ dz &=& (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt & dw &=& (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt \\ dt &=& \frac{1}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dz & dt &=& \frac{1}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dw \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{dz}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} - \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot \frac{dw}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot dw = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z}\big|_{0}^{\tau} - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{w}\big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{0}^{\tau} + \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{0}^{\tau}
\end{aligned}$$

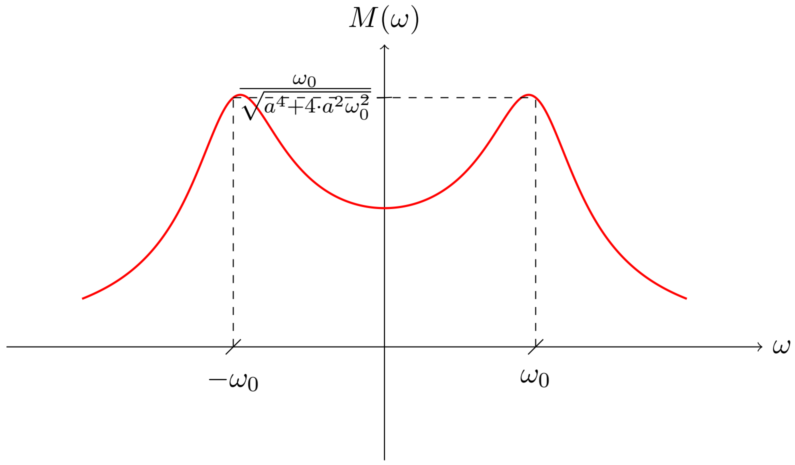
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)+\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)+\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)+\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)+\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{-1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}+\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{-(2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega))+2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0+2\cdot\jmath^2\cdot\omega-2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0-2\cdot\jmath^2\cdot\omega}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+a\cdot\jmath\cdot\omega_0+a\cdot\jmath\cdot\omega-a\cdot\jmath\cdot\omega_0-\jmath^2\cdot\omega_0^2-\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+a\cdot\jmath\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega^2)}=\\
&= \frac{4\cdot\jmath^2\cdot\omega_0}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\jmath^2\cdot\omega_0^2+\jmath^2\cdot\omega^2)}=\\
&= \frac{\omega_0}{a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+\omega_0^2-\omega^2}=\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2)}=\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

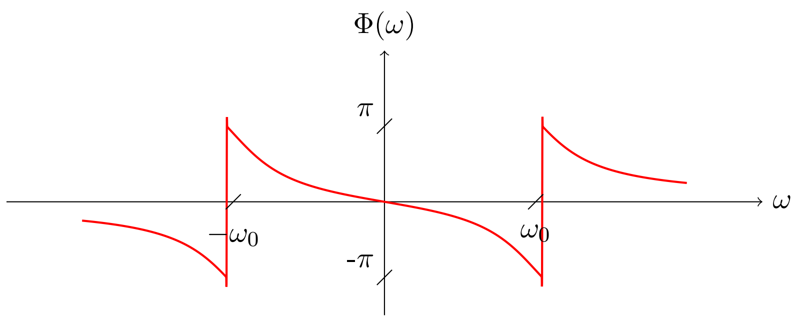
$$
\begin{aligned}
M(\omega)=|F(j\omega)| &=\\
&=\left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}\right|=\\
&=\left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+(\jmath\cdot\omega)^2}\right|=\\
&=\left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2}\right|=\\
&=\left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega}\right|=\\
&=\left\{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\right\}=\\
&=\frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega|}=\\
&=\left\{|a+\jmath\cdot b|=\sqrt{a^2+b^2}\right\}=
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \omega\right)^2}}$$

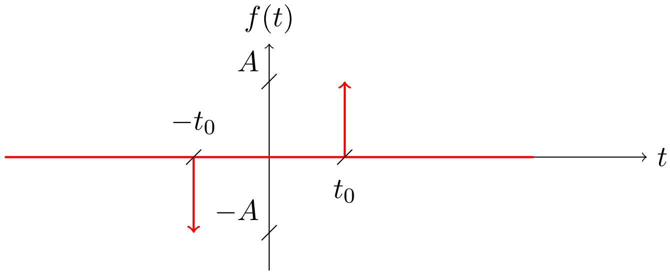


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega}\right) = \\
&= \left\{arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right)\right\} = \\
&= arg\left(\omega_0\right) - arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega\right) = \\
&= \left\{arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg(\tfrac{b}{a})\right\} = \\
&= arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= arctg\left(0\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= -arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \tag{3.14}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.15}$$

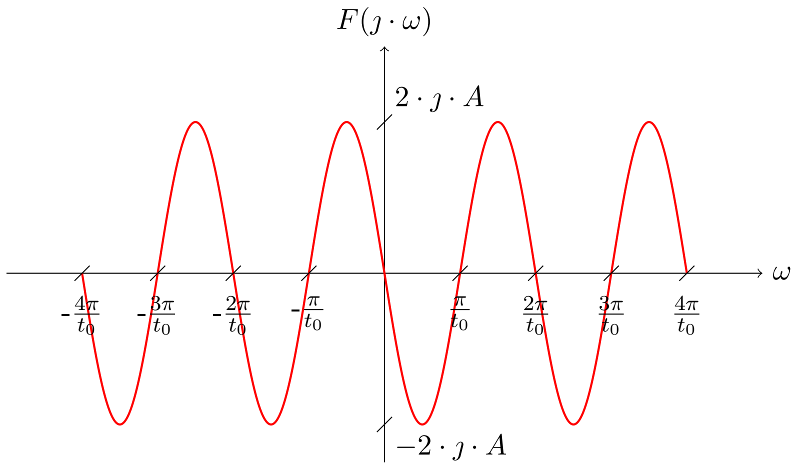
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(-e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)$

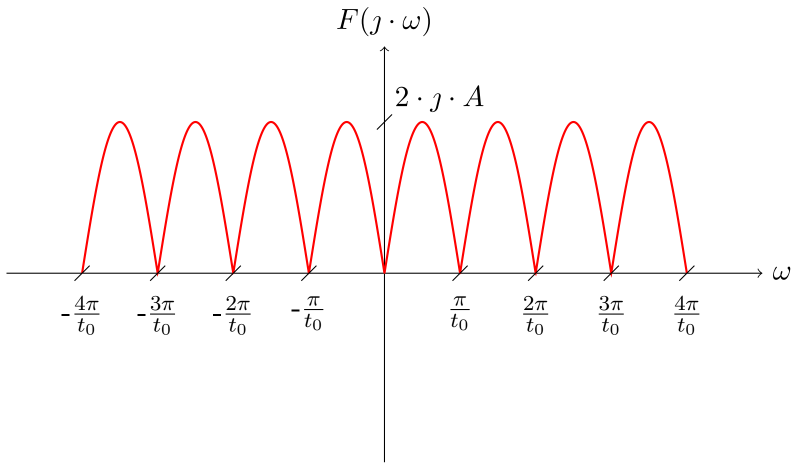
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0) \tag{3.16}$$



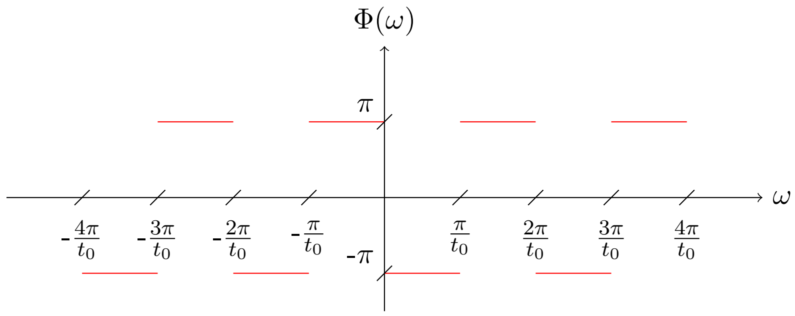
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.17}$$

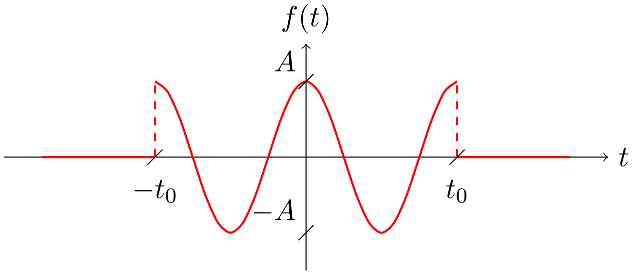


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{3.18}$$



Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.19}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.20}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{matrix} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{z_1}\Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{z_2}\Big|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \right) =$$

$$= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) =$$

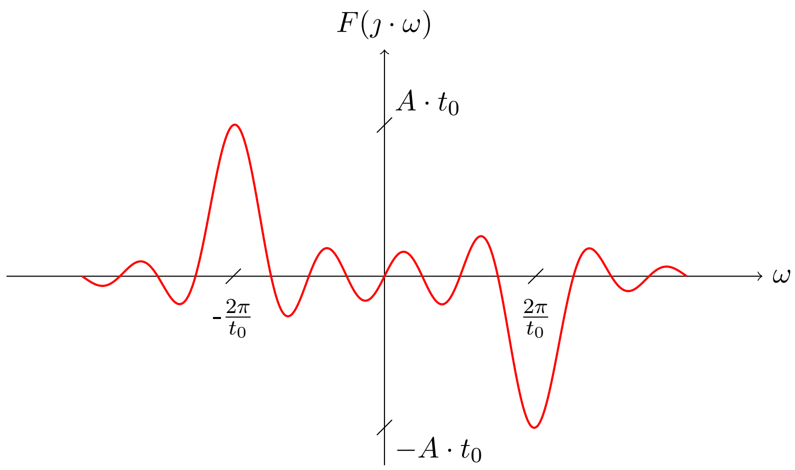
$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) =$$
$$= \left\{ Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \right\} =$$
$$= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right) =$$
$$= A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right)$$

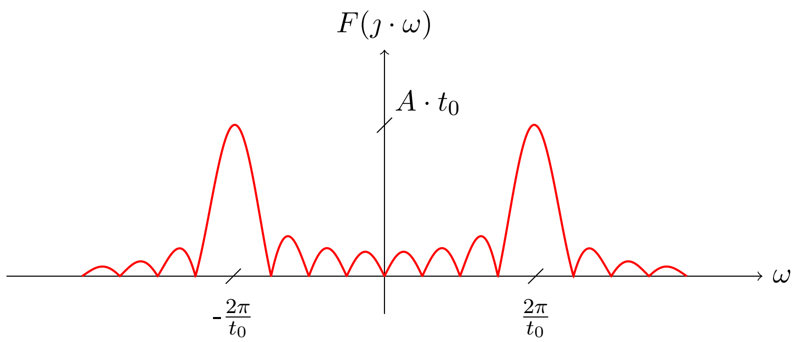
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right) \tag{3.21}$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

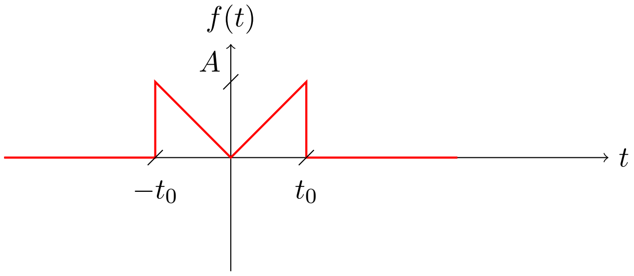
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.22}$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{3.23}$$

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.24}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci funkcji $f(t)$. Funkcja ta jest określona za pomocą równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.25}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0; 0)$ oraz $(t_0; A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.26}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{0}^{t_0} - \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right) \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{0}^{t_0} \right) \right) =
\end{aligned}$$

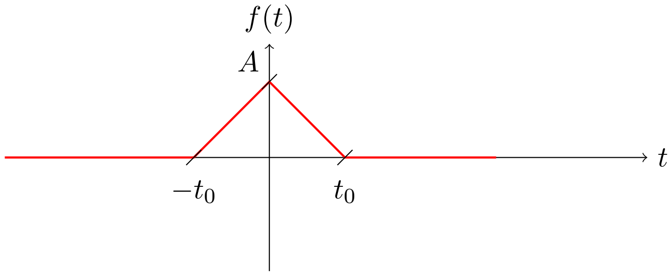
$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot \jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2}\right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} sin\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \\ cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) = \\
&= \left\{ sin^2\left(x\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot cos\left(2 \cdot x\right) \right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 = \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \frac{sin(x)}{x}\right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

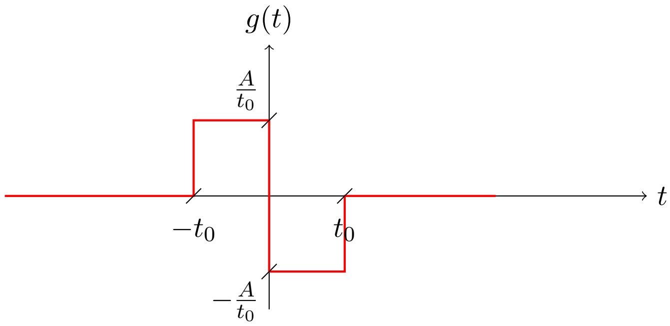
Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.27}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{3.28}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.29}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.30}$$

Z powyzszego równania widać, że musimy znać $G(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{3.31}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych prostokątów, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \tag{3.32}$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0})$$
$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0})$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(\jmath\omega)$.

Z tablic matematycznych wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t-(-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{3.33}$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(\jmath\omega)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t-(\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

$$\Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot t_0\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0}\cdot\Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot t_0\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0}\cdot\Pi(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) \tag{3.34}$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$G(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = A\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) - A\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$
$$G(\jmath\omega) = A\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\right)$$
$$G(\jmath\omega) = A\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}\right)$$
$$\left\{sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath}\right\}$$
$$G(\jmath\omega) = A\cdot 2\cdot\jmath\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$

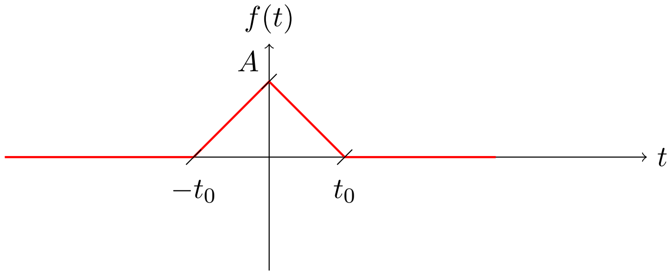
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot A\cdot 2\cdot\jmath\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) = \\
&= \left\{\begin{array}{l} G(0) = A\cdot 2\cdot\jmath\cdot Sa\left(\frac{0\cdot t_0}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{0\cdot t_0}{2}\right) \\ G(0) = A\cdot 2\cdot\jmath\cdot Sa(0)\cdot sin(0) \\ G(0) = A\cdot 2\cdot\jmath\cdot 1\cdot 0 \\ G(0) = 0 \end{array}\right\} = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot A\cdot 2\cdot\jmath\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) = \\
&= \left\{\frac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} = \\
&= \frac{A\cdot 2\cdot t_0}{\omega\cdot t_0}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) = \\
&= A\cdot t_0\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) = \\
&= A\cdot t_0\cdot Sa^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A\cdot\Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A\cdot t_0\cdot Sa^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})$

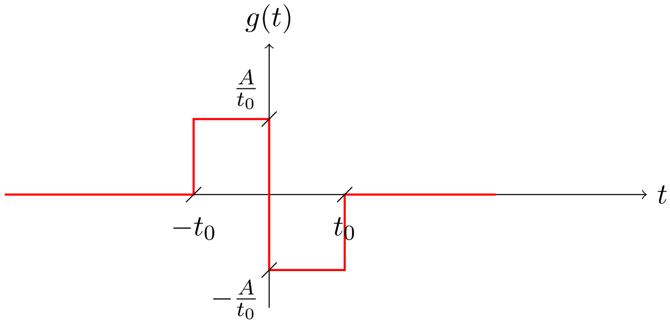
Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.36}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

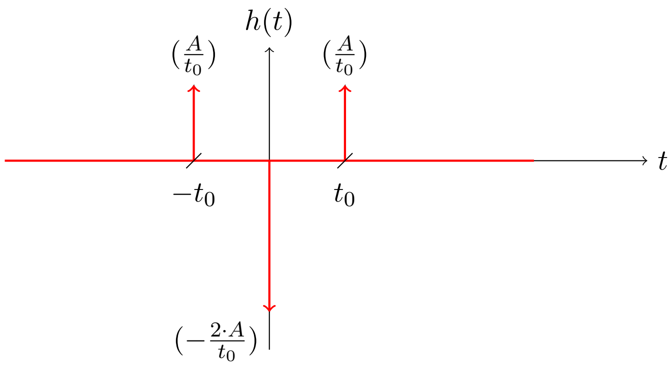
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.37}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.38}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{3.39}$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{3.40}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x) \cdot dx \tag{3.41}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$G(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \tag{3.42}$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{3.43}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (-t_0))\right\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 2 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{t_0} \cdot (2 \cdot cos(\omega \cdot t_0) - 2) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$H(\jmath\omega) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) \tag{3.44}$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$:

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (cos(0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

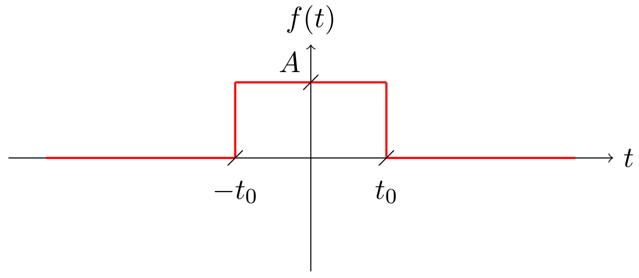
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot 0 \cdot t_0} \cdot (cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} (-\frac{A}{t_0}) \cdot dt \\ G(0) = \frac{A}{t_0} \cdot (0 - (-t_0)) - \frac{A}{t_0} \cdot (t_0 - 0) = A - A \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath^2 \cdot \omega^2 \cdot t_0} \cdot (cos(\omega \cdot t_0) - 1) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot (1 - cos(\omega \cdot t_0)) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot x) \\ cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot sin^2(x) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) =$$
$$= \left\{\tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} =$$
$$= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



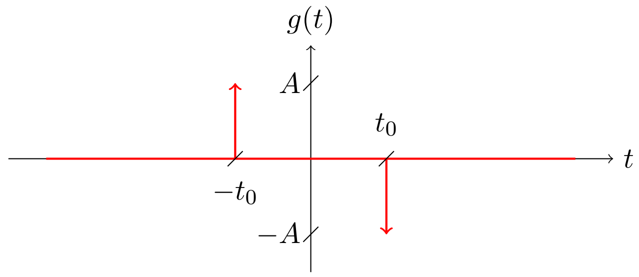
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.45}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.46}$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.47}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.48}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t}\right) \cdot dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} = \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) = \\
&= \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(\jmath\omega) = \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

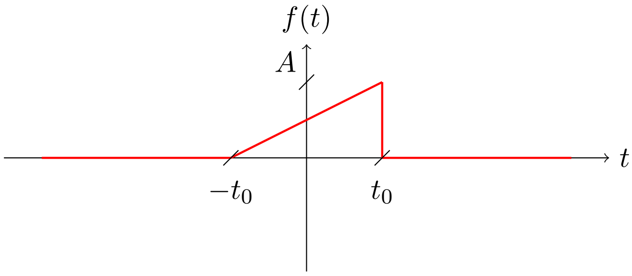
$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{gathered}
$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(\jmath\omega)$ sygnału $f(t)$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(0 \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(0\right) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} + 0 = \\
&= \left\{ Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$.

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.49}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz (t_0, A). Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = \frac{b}{t_0} \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = 2 \cdot b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{2 \cdot t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

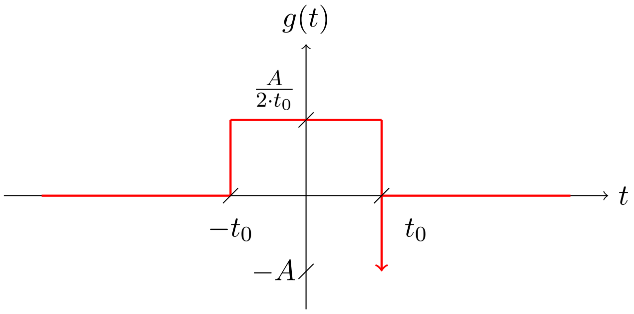
$$f(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2}$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0}\cdot t + \frac{A}{2} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.50}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - A\cdot\delta(t - t_0) \tag{3.51}$$

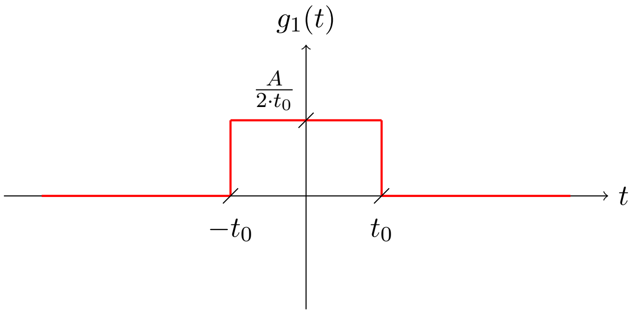


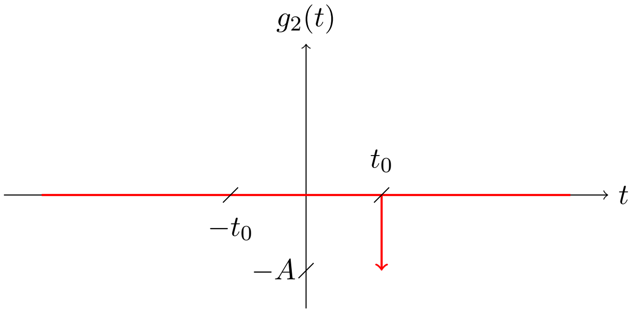
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{3.52}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.53}$$

$$g_2(t) = -A\cdot\delta(t - t_0) \tag{3.54}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delty diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.55}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= -A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= -A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}
\end{aligned}$$

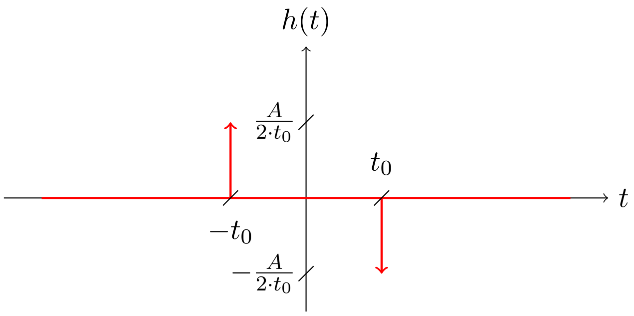
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = -A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t - t_0) \tag{3.56}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t - t_0) \tag{3.57}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.58}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{\jmath}{\jmath} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot H(0) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(0 \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(0\right) = \\
&= A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot 0 = \\
&= A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} + 0 = \\
&= \left\{ Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$.
Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) \\
g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(\jmath\omega) \\
g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \alpha \cdot G_1(\jmath\omega) + \beta \cdot G_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) = \\
&= A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)
\end{aligned}
$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}
$$

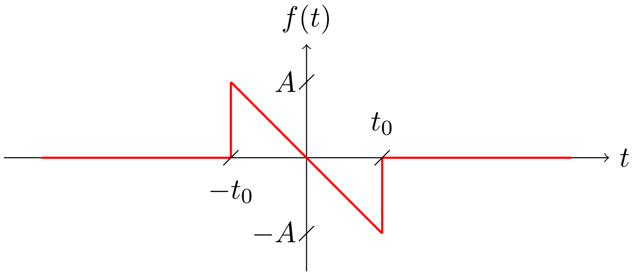
Podstawiając otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \left(Sa\left(0 \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot 0 \cdot t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \left(Sa\left(0\right) - e^{0} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (1 - 1) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot 0 =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + 0 =$$
$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)$.

Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.59}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

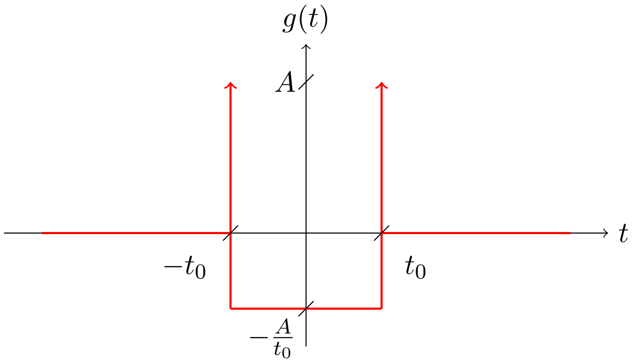
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.60}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.61}$$

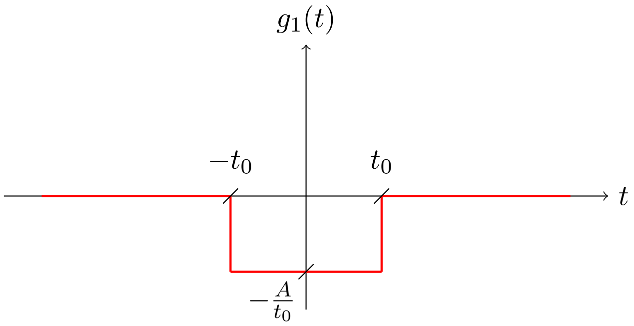


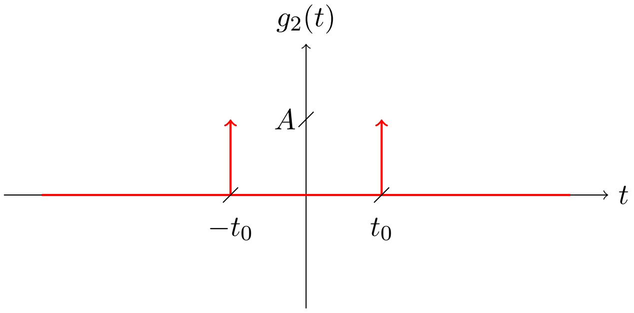
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{3.62}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.63}$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.64}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.65}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t+t_0) + A \cdot \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \left\{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)\right\} = \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \cdot \frac{2}{2} = \\
&= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2} = \\
&= \left\{cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

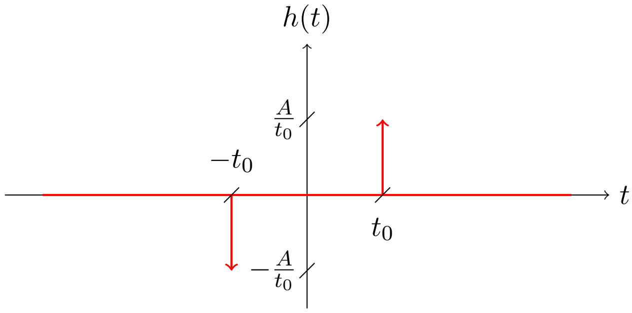
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{3.66}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{3.67}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.68}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)\right\} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} = \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} = \\
&= \left\{sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath}\right\} = \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega\cdot t_0) = \\
&= -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega\cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned}
G_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(-\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right)\right) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot\left(-\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot sin\left(0\cdot t_0\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{\omega}\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right) - \pi\cdot\delta(\omega)\cdot\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot sin\left(0\right) = \\
&= -2\cdot A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0} - \pi\cdot\delta(\omega)\cdot\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot 0 = \\
&= -2\cdot A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0} - 0 = \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} = \\
&= -2\cdot A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = -2\cdot A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)\\
g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(\jmath\omega)\\
g(t) = \alpha\cdot g_1(t) + \beta\cdot g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \alpha\cdot G_1(\jmath\omega) + \beta\cdot G_2(\jmath\omega)
\end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) = \\
&= -2\cdot A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right) + 2\cdot A\cdot cos\left(\omega\cdot t_0\right) = \\
&= -2\cdot A\cdot\left(Sa\left(\omega\cdot t_0\right) - cos\left(\omega\cdot t_0\right)\right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)\\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0)
\end{aligned}$$

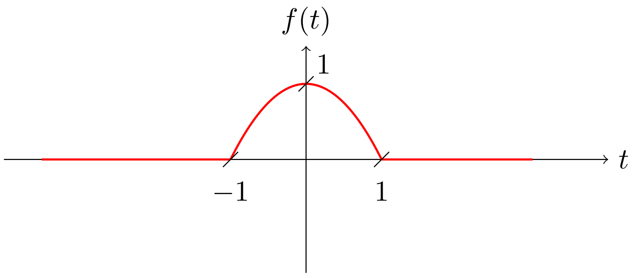
Podstawiając otrzymujemy

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega) + \pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.

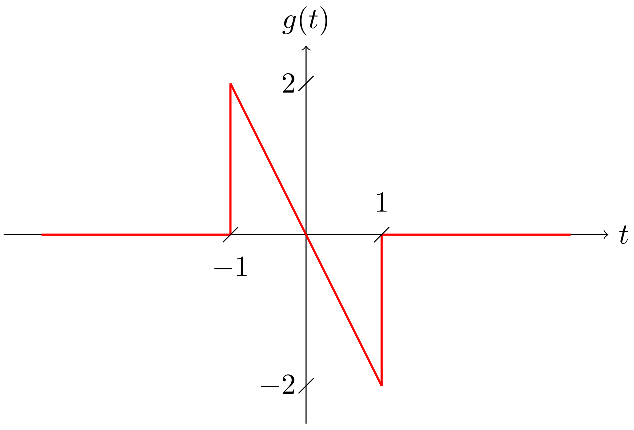


Sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.69}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.70}$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.71}$$

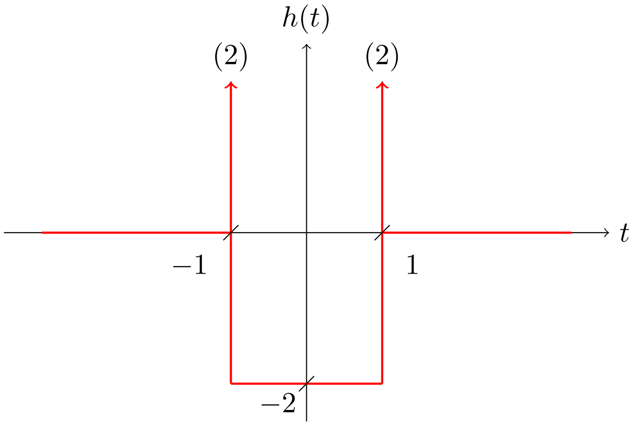
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.72}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{3.73}$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{3.74}$$

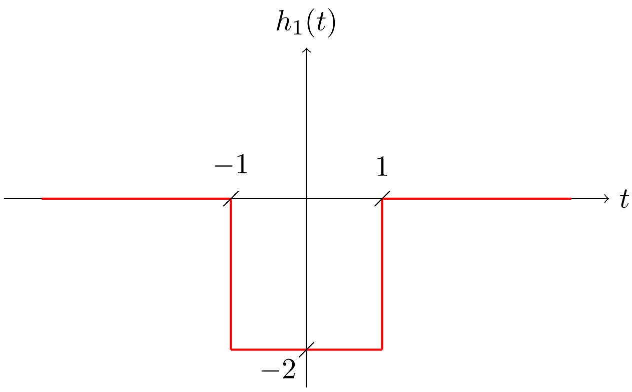


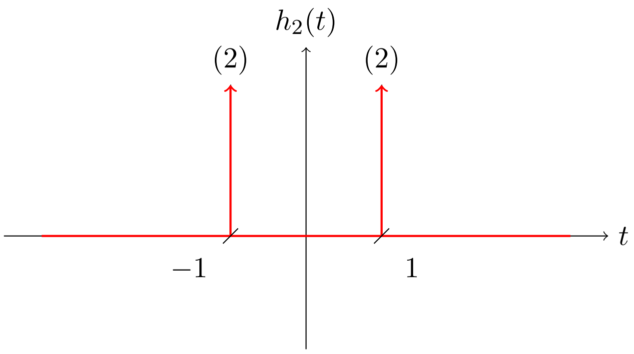
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{3.75}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.76}$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{3.77}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.78}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= 2 \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-1)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 1} \right) = \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega} \right) = \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \cdot \frac{2}{2} = \\
&= 4 \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega}}{2} = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2} \right\} = \\
&= 4 \cdot cos\,(\omega)
\end{aligned}$$

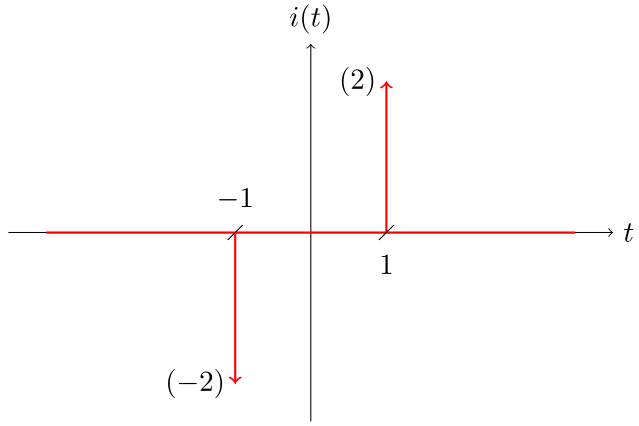
Transformata sygnału $h_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 4 \cdot cos\,(\omega)$

Funkcja $h_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona, więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$i(t) = h_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 0 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} - 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{3.79}$$

,czyli po prostu:

$$i(t) = h_1'(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{3.80}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $i(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$I(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.81}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
I(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} -\delta(t+1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= 2 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-1)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 1} \right) = \\
&= 2 \cdot \left(-e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega} \right) = \\
&= -2 \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} = \\
&= -4 \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega}}{2\cdot\jmath} = \\
&= \left\{ sin\,(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= -4 \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $i(t)$ to $I(\jmath\omega) = -4 \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu, aby wyznaczyć transformatę sygnału $h_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $i(t) = h_1'(t)$

$$i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} I(\jmath\omega)$$

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot I(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0)$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $I(\jmath\omega)$ sygnału $i(t)$ otrzymujemy transformatę $H_1(\jmath\omega)$ sygnału $h_1(t)$

$$\begin{aligned} H_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot I(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot I(0) = \\ &= \left\{\begin{array}{l} I(0) = -4\cdot\jmath\cdot sin\,(0) \\ I(0) = -4\cdot\jmath\cdot 0 \\ I(0) = 0 \end{array}\right\} = \\ &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot(-4\cdot\jmath\cdot sin\,(\omega))+0 = \\ &= -4\cdot\frac{sin\,(\omega)}{\omega} = \\ &= \left\{Sa\,(x) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} = \\ &= -4\cdot Sa\,(\omega) \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $h_1(t)$ jest równa $H_1(\jmath\omega) = -4\cdot Sa\,(\omega)$.

Korzystając z liniowości transformacji Fouriera

$$\begin{aligned} h_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(\jmath\omega) \\ h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_2(\jmath\omega) \\ h(t) = \alpha\cdot h_1(t)+\beta\cdot h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \alpha\cdot H_1(\jmath\omega)+\beta\cdot H_2(\jmath\omega) \end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $H(\jmath\omega)$ funkcji $h(t)$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= H_1(\jmath\omega)+H_2(\jmath\omega) = \\ &= -4\cdot Sa\,(\omega)+4\cdot cos\,(\omega) = \\ &= 4\cdot(cos\,(\omega)-Sa\,(\omega)) \end{aligned}$$

Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\ g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0) \end{aligned}$$

Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0) = \\ &= \left\{\begin{array}{l} H(0) = 4\cdot(cos\,(0)-Sa\,(0)) \\ H(0) = 4\cdot(1-1) \\ H(0) = 4\cdot 0 \\ H(0) = 0 \end{array}\right\} = \\ &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot(4\cdot(cos\,(\omega)-Sa\,(\omega)))+0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega))$$

Ostatecznie transformata sygnału $g(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega))$.

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i kolejny raz korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

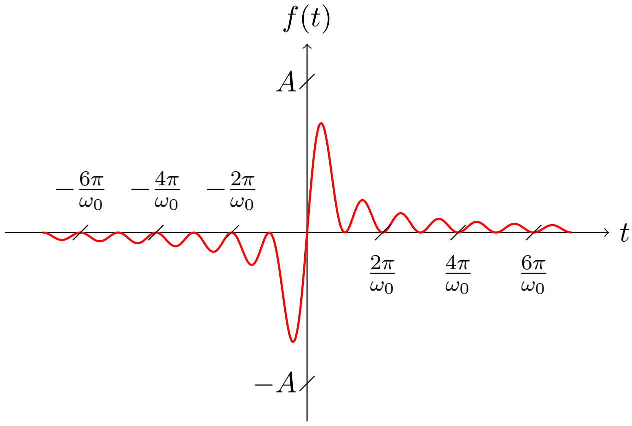
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{4}{\jmath \cdot 0} \cdot (cos\,(0) - Sa\,(0)) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-1}^{1} (-2) \cdot t \cdot dt = (-2) \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \\ G(0) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-2) \cdot 0 \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega)) + 0 = \\
&= \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega)) = \\
&= \frac{4}{(-1) \cdot \omega^2} \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega)) = \\
&= \frac{4}{\omega^2} \cdot (Sa\,(\omega) - cos\,(\omega))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{4}{\omega^2} \cdot (Sa\,(\omega) - cos\,(\omega))$.

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest rowna $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{3.82}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.83}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(f_1(t) - f_2(t)\right)
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\ g(t) = H(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega) \end{aligned}$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa

$$\begin{aligned} h(t) = \Pi(t) &\xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ g_1(t) = H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = \pi \cdot \Pi\left(-\omega\right) = 2\pi \cdot \Pi\left(\omega\right) \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\ &= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) = \\ &= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) = \\ &= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} = \\ &= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) = \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) \\ g(t) = g_1(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(\jmath\omega)$

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{\alpha = 2 \cdot \omega_0\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot G_1(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}) = \\
&= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi\cdot\Pi\left(\omega\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f_1(t) = g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))
\end{aligned}
$$

otrzymujemy wprost

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega-\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega+\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) \\
f(t) = \alpha\cdot f_1(t)+\beta\cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha\cdot F_1(\jmath\omega)+\beta\cdot F_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

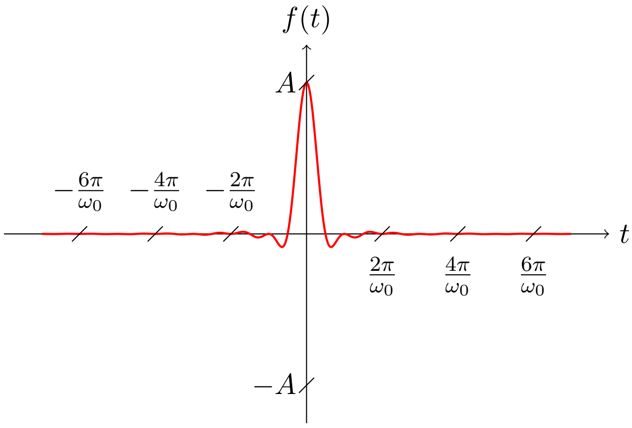
$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$

Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest rowna $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \tag{3.84}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.85}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) = \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\} = \\
&= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right) = \\
&= \begin{Bmatrix} f_1(t) & = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) & = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_1(t) + f_2(t))
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = G(\jmath\,(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$
$$g(t) = H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa

$$h(t) = \Lambda(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t) = H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = \pi \cdot \Lambda\left(-\omega\right) = 2\pi \cdot \Lambda\left(\omega\right)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\ &= Sa^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) = \\ &= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} = \\ &= Sa^2\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) = \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(\jmath\omega)$

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{\alpha = 2 \cdot \omega_0\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot G_1(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}) = \\
&= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi\cdot\Lambda\left(\omega\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot 2\pi\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f_1(t) = g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))
\end{aligned}
$$

otrzymujemy wprost

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega-\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega+\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

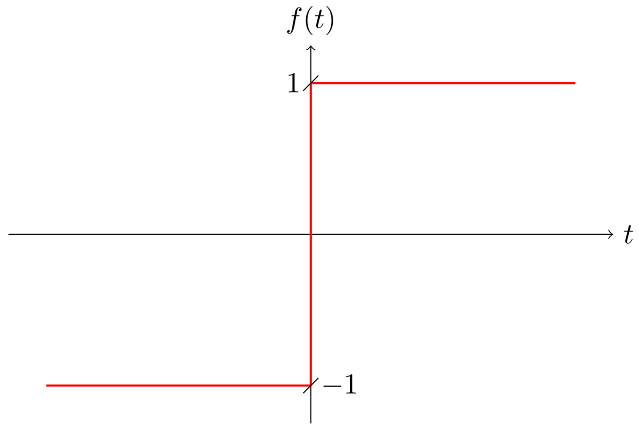
$$
\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) \\
f(t) = \alpha\cdot f_1(t) + \beta\cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha\cdot F_1(\jmath\omega) + \beta\cdot F_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$

Zadanie 9. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = sgn(t)$ za pomocą twierdzeń.

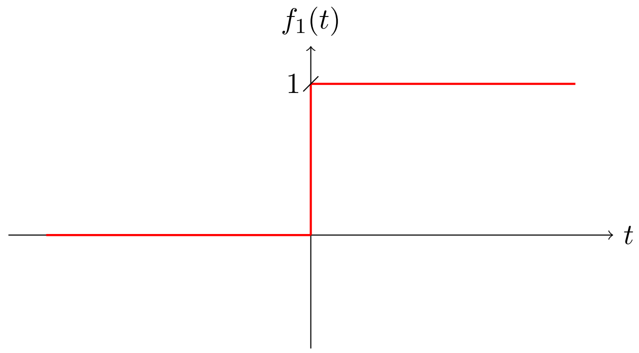


Sygnał $f(t)$ można zapisać jako

$$
\begin{aligned}
f(t) = sgn(t) = \\
&= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) = \\
&= f_1(t) - f_2(t)
\end{aligned}
$$

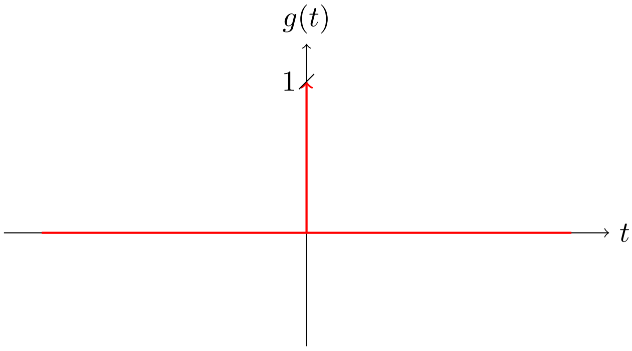
Wyrażnie widac iż funkcja jest złożeniem dwóch skoków jednostkowych

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= \mathbb{1}(t) \\
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t)
\end{aligned}
$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



dla której w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} = \\
&= e^{0} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(\jmath\omega) = 1$
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Tak wiec mamy

$$\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A wiec transformata skoku jednostkowego jest $F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) = \\
&= \mathbb{1}(-1 \cdot t) = \\
&= f_1(-1 \cdot t)
\end{aligned}$$

A wiec transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = f_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned}F_2(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a}) = \\ &= \Big\{a = -1\Big\} = \\ &= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta(\frac{\omega}{-1}) = \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) = \\ &= -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\end{aligned}$$

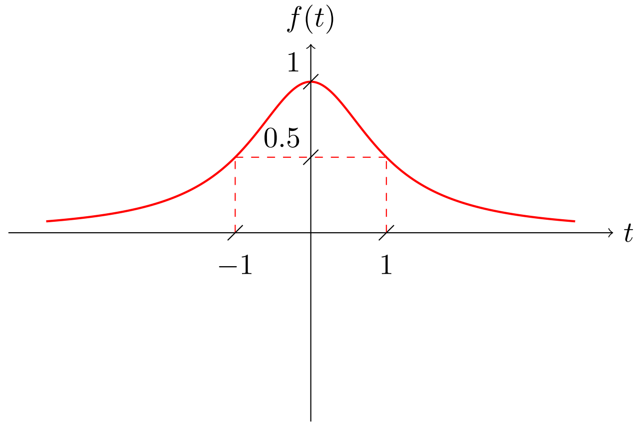
A więc transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(\jmath\omega) - \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

$$\begin{aligned}F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) = \\ &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \left(-\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\right) = \\ &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) = \\ &= \frac{2}{\jmath \cdot \omega}\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath\cdot\omega}$.

Zadanie 10. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ za pomocą twierdzeń.



Załóżmy sygnał $g(t) = e^{-|t|}$ i wyznaczmy jego transformatę.

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt + \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = -(1+\jmath\cdot\omega)\cdot t & z_2 = (1-\jmath\cdot\omega)\cdot t \\ dz_1 = -(1+\jmath\cdot\omega)\cdot dt & dz_2 = (1-\jmath\cdot\omega)\cdot dt \\ dt = \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot dz_1 & dt = \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot dz_2 \end{matrix} \right\} = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot dz_2 + \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z_1} \cdot \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot dz_1 = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z_1} \cdot dz_1 = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z_2}\big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z_1}\big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot 0} - e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot(-\tau)}\right) + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau} - e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right) = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{0} - e^{-(1-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau} - e^{0}\right) = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(1 - e^{-\tau+\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-\tau-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - 1\right) = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} 1 - \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - \lim_{\tau\to\infty} 1\right) = \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \left(1 - \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - 1\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(1-0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right)+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)=\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot(1-0)+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot(0-1)=\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot(-1)=\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}+\frac{1}{1+\jmath\cdot\omega}=\\
&= \frac{(1+\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}+\frac{(1-\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{(1+\jmath\cdot\omega)+(1-\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}=\\
&= \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)=e^{-|t|}$ jest równa $G(\jmath\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$. Postać funkcji $G(\jmath\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$ nie jest identyczna z postacią funkcji $f(t)$, funkcja różni się o współczynnik 2.

Z twierdzenia o liniowości transformaty

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)\\
h(t)=\alpha\cdot g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)=\alpha\cdot G(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2}\cdot e^{-|t|}\\
H(\jmath\omega) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}=\\
&= \frac{1}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

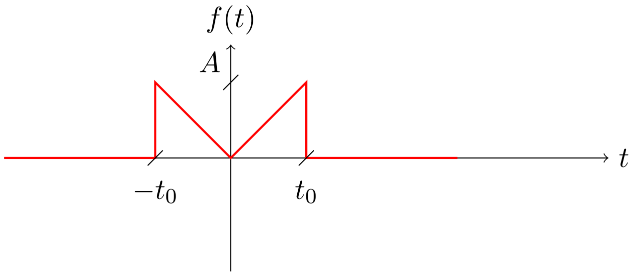
Na podstawie sygnału $h(t)$ i korzystając z twierdzenia o symetrii możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)\\
f(t)=H(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)=2\pi\cdot h(-\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= 2\pi\cdot h(-\omega)=\\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-|-\omega|}=\\
&= \pi\cdot e^{-|\omega|}
\end{aligned}
$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ jest równa $F(\jmath\omega)=\pi\cdot e^{-|\omega|}$

Zadanie 11. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Możemy zauważyć iż przedstawiony sygnał można otrzymać przez oodjęcie trójkąta od sygnału prostokątnego. Wykorzystując sygnały elementarne możemy to zapisać następująco:

$$f(t) = A \cdot \left(\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \tag{3.86}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = A \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \tag{3.87}$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right)$$
$$f_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2 \cdot t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2 \cdot t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) \tag{3.88}$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{gathered} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\ f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa^2\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right) \\ \Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{gathered}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

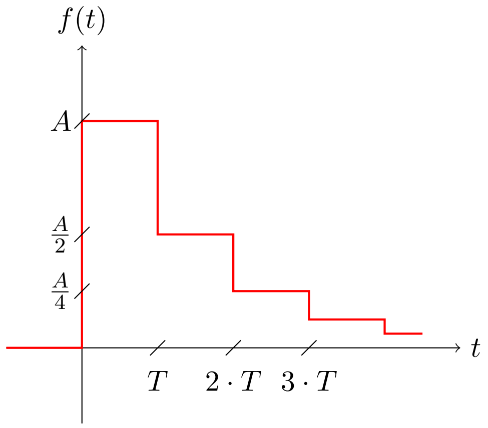
$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{3.89}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

Zadanie 12. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzesuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowość transformaty fouriera

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

możemy napisać że:

$$F(\jmath\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega)$$

gdzie $H_n(\jmath\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zacznijmy od skali.

Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T}\cdot t\right) = \\ &= g\left(\frac{1}{T}\cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}}\cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{1}{T}}\right) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}}\cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) = \\ &= T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$
Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\begin{aligned} h_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(\jmath\omega) \\ h(t) = h_n(t-t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = H_n(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(\jmath\omega) &= H(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\ &= T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot H_n(\jmath\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\frac{A}{2^n}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n
\end{aligned}
$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n = \\
&= \left\{ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right\} = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$
F(\jmath\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}
$$

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Oblicz energię sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{3.90}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.91}$$

Energię sygnału można wyznaczyc ze wzoru:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{3.92}$$

Podstawiając dany sygnał $f(t)$ do wzoru na energie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \left\{ \quad Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{sin\left(\omega_0 \cdot t\right)}{\left(\omega_0 \cdot t\right)}\right|^2 \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^2\left(\omega_0 \cdot t\right)}{\left(\omega_0 \cdot t\right)^2} \cdot dt = \\
&= ....
\end{aligned}$$

Próbując obliczyc energię tym sposobem musimy obliczyć całkę cykliczną. A może jest łatwiejszy sposób?

Spróbumy wykorzystać twierdzenie Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.93}$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(\jmath\omega)$. Skoro wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.94}$$

to, na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)
\end{gathered}$$

otrzymujemy:

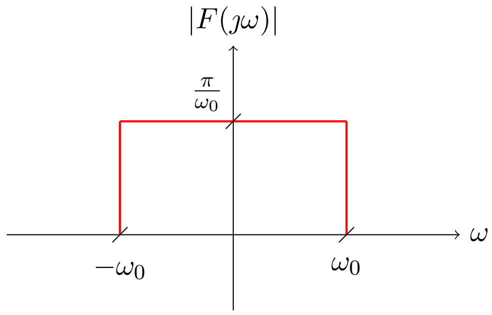
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 2 \cdot \omega_0$:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)$$
$$g(t) = f(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$
$$Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0})$$
$$Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0})$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.



$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Ponieważ energię wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.95}$$

to wyznaczmy $|F(\jmath\omega)|^2$:

$$|F(\jmath\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}
\end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = Sa\,(\omega_0 \cdot t)$ równa się $E = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Zadanie 2. Oblicz, jaka część energi sygnału $f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \tag{3.96}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.97}$$

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} =? \tag{3.98}$$

Ponieważ musimy obliczyć energię tylko dla pewnego zakresu pulsacji, to wykorzystamy twierdzenie Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.99}$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(\jmath\omega)$.

Ponieważ możemy korzystać tylko ze znanych twierdzeń oraz wiedzy o transformacie sygnału $\Pi(t)$, to spróbujmy przekształcić sygnał $f(t)$ do postaci, w której wprost możemy zastosować twierdzenia. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
f(t) &= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) = \\
&= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^2 = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t})^2 + 2 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + (e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t})^2}{4}\right) = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 2 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right) = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 2 \cdot e^{0} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right) = \\
&= \frac{A}{4} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + \frac{A}{2} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) + \frac{A}{4} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} = \\
&= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)
\end{aligned}$$

Korzystając z liniowości przekształcenia Fouriera możemy niezależnie obliczyć transformaty dla sygnałów $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$, a następnie zsumować te transformaty. Zacznijmy od sygnału $f_2(t)$:

Skoro wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.100}$$

to, na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f_2(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$$

otrzymujemy:

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 4 \cdot \omega_0$:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = f(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$
$$Sa\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{4 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_2(t) = \frac{A}{2} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_2(\jmath\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_2(t)$ to $F_2(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Zauważmy, że $f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_1(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = f_2(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = F_2(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))$$

otrzymujemy:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_1(\jmath\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_1(t)$ to $F_1(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Podobnie, zauważmy, że $f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_3(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$

$$f_3(t) = f_2(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(\jmath\omega) = F_2(\jmath(\omega - \omega_0))$$

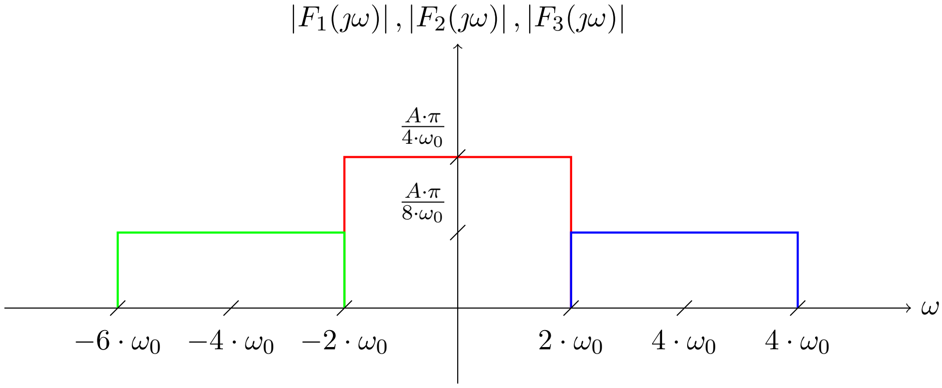
otrzymujemy:

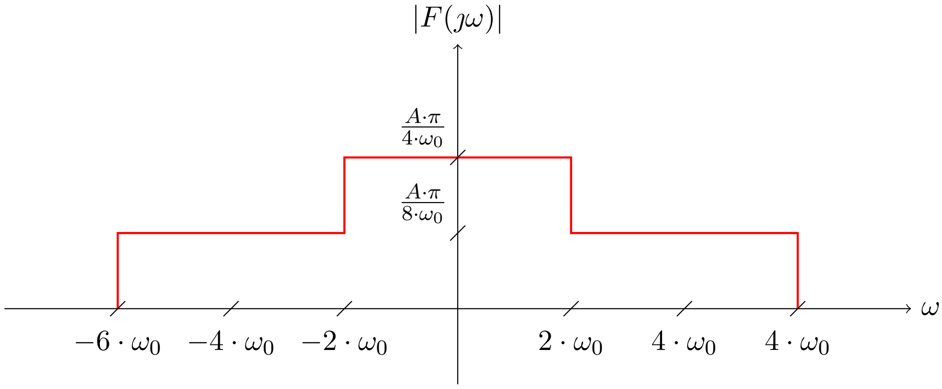
$$\begin{aligned}
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\
f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \\
f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_3(\jmath\omega)
\end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_3(t)$ to $F_3(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.
Teraz możemy podać transformatę sygnału $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$,

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega) + F_3(\jmath\omega) = \\
&= \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.





$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0} & \omega \in (-6\cdot\omega_0; -2\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (-2\cdot\omega_0; 2\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0} & \omega \in (2\cdot\omega_0; 6\cdot\omega_0) \\ 0 & \omega \in (6\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Ponieważ energię wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega \tag{3.101}$$

to wyznaczmy $|F(\jmath\omega)|^2$:

$$|F(\jmath\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-6\cdot\omega_0; -2\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-2\cdot\omega_0; 2\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (2\cdot\omega_0; 6\cdot\omega_0) \\ 0 & \omega \in (6\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\infty}^{-6\cdot\omega_0}0\cdot d\omega + \int_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0}\left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega + \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0}\left(\frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega + \int_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0}\left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega + \int_{6\cdot\omega_0}^{\infty}0\cdot d\omega\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0}d\omega + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0}d\omega + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0}d\omega + 0\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot(-2\cdot\omega_0-(-6\cdot\omega_0)) + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(2\cdot\omega_0-(-2\cdot\omega_0)) + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot(6\cdot\omega_0-2\cdot\omega_0)\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot4\cdot\omega_0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot4\cdot\omega_0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2}\cdot4\cdot\omega_0\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{4\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{A^2\cdot\pi^2}{4\cdot\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}\right) = \\
&= \frac{A^2\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\cdot\left(\frac{2}{4}+1\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) =$$
$$= \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$

Energia sygnału $f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$ równa się $E = \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsevala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega|<2\cdot\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.102}$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega|<2\cdot\omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} \left|\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2}\right) \cdot \omega\Big|_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0 - (-2 \cdot \omega_0)) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (4 \cdot \omega_0) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} = ? \tag{3.103}$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} = \frac{\frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}}{\frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \frac{16 \cdot \omega_0}{3 \cdot A^2 \cdot \pi} = \frac{2}{3} \approx 66\%$$

Na pulsacje z zakresu $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ przypada około 66% energii sygnału.

Zadanie 3.

Oblicz, jaka część energi sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \tag{3.104}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.105}$$

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = ? \tag{3.106}$$

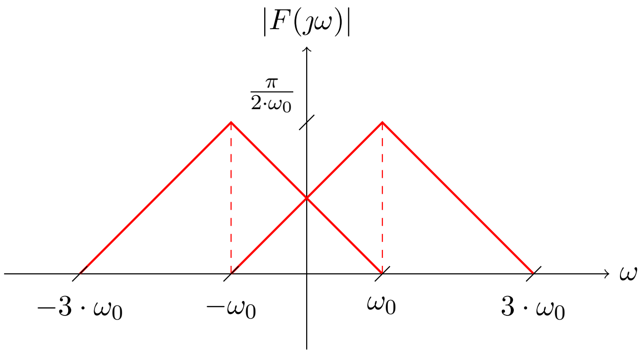
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala:

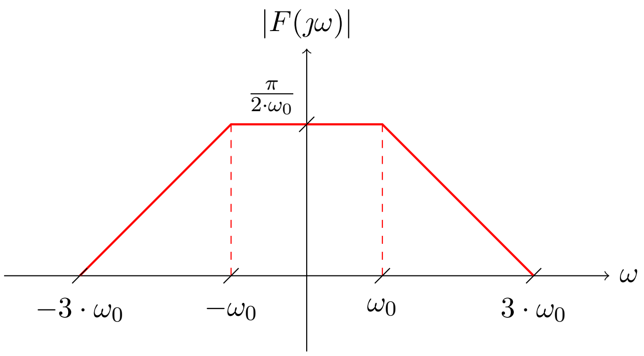
$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.107}$$

W tym celu musimy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)\right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.





$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3\cdot\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (-3\cdot\omega_0; -\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{2\cdot\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0\rangle \\ -\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3\cdot\omega_0\rangle \\ 0 & \omega \in (3\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\int_{-\infty}^{-3\cdot\omega_0}|0|^2\cdot d\omega + \int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left|\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega +\right.$$

$$\left. + \int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left|-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{3\cdot\omega_0}^{\infty}|0|^2\cdot d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[0 + \int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left(\left(\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2 + 2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega + \left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega +\right.$$

$$\left. + \int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left(\left(-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2 - 2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega + \left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega^2\cdot d\omega + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega\cdot d\omega + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}d\omega + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0} +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega^2\cdot d\omega - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega\cdot d\omega + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0 - (-\omega_0)) +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0} - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(-\frac{\omega_0^3}{3} - \left(-\frac{27\cdot\omega_0^3}{3}\right)\right) + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{9\cdot\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(-\omega_0 - (-3\cdot\omega_0)) +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0 + \frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(\frac{27\cdot\omega_0^3}{3} - \frac{\omega_0^3}{3}\right) - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{9\cdot\omega_0^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(3\cdot\omega_0 - \omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3} + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(-\frac{8\cdot\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0 + \frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0} +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3} - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\frac{8\cdot\omega_0^2}{2} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0} - \frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0} + \frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0} + \frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0} + \frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0} - \frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0} + \frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} + 1 + \frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24} - \frac{96}{16} + \frac{36}{8} + 1\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24}-6+\frac{108}{24}+1\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-5\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-\frac{120}{24}\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{40}{24}\right]=\\
&= \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}
\end{aligned}
$$

Podsumowując, całkowita energia sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0\cdot t)\cdot cos(\omega_0\cdot t)$ to $E = \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega \tag{3.108}$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
E_{|\omega|<\omega_0} &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\right)\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0-(-\omega_0))=\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(2\cdot\omega_0)=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}
\end{aligned}
$$

Podsumowując $E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = ? \tag{3.109}$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = \frac{\frac{\pi}{4\cdot\omega_0}}{\frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\frac{12\cdot\omega_0}{5\cdot\pi} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 60\%$$

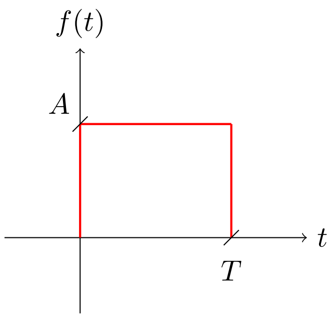
Na pulsacje z zakresu $|\omega| < \omega_0$ przypada 60% energi sygnału.

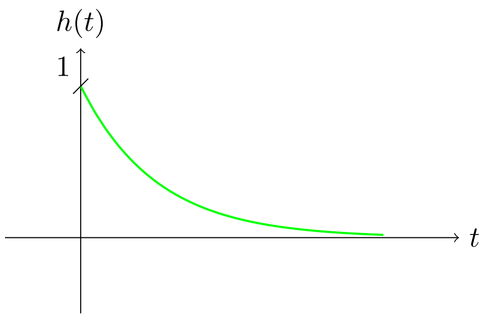
Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$ i $h(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$





Wzór na slot sygnałów

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \tag{4.1}$$

Wzory sygnałów pod całką

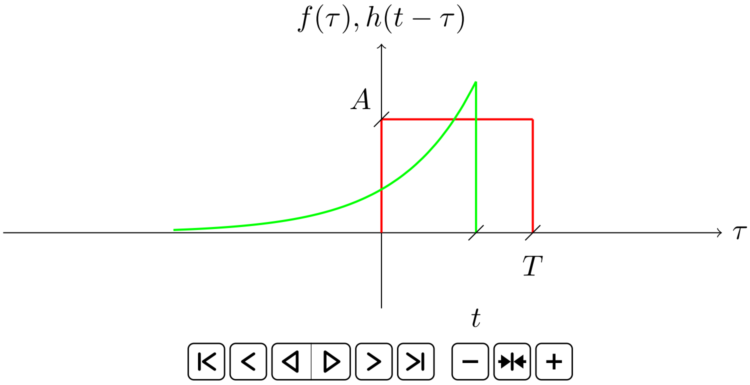
$$f(\tau) = A \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$h(t-\tau) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot (t-\tau)}$$

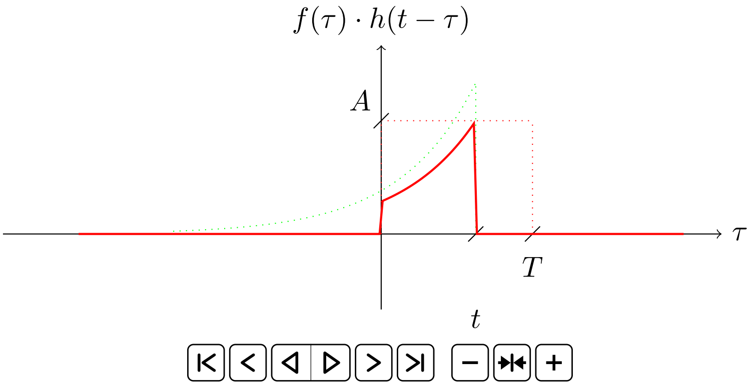
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a \cdot (t-\tau)} & \tau \in (-\infty; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji w dziedzinie τ dla różnych wartości t:

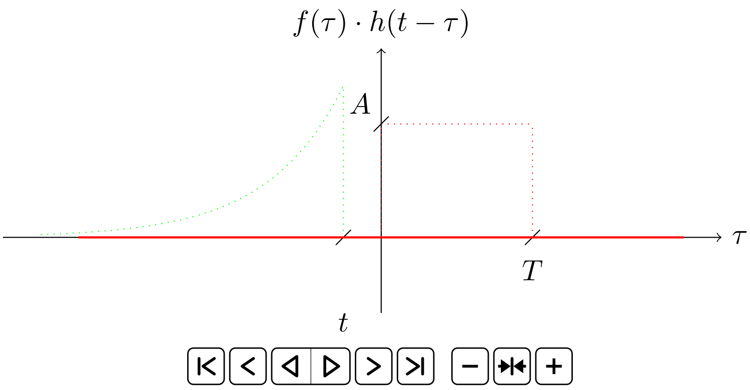


Po wymnożeniu obu funkcji, dla przykładowych wartości t, otrzymujemy (ciągła, czerwona linia):



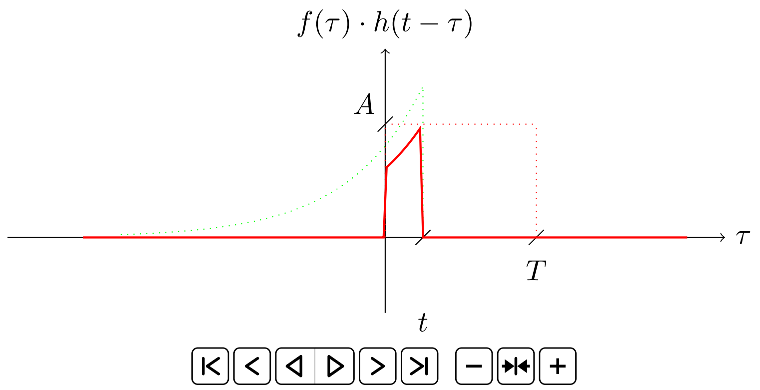
Z wykresu widać, że dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot h(t-\tau)$. W związku z tym, wyznaczymy splot oddzielnie dla posczególnych przedziałów wartości t

Przedział 1 Dla wartości t spełniających warunek $t < 0$ otrzymujemy:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau =$$
$$= 0$$

Przedział 2 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq 0$ i $t < T$ otrzymujemy

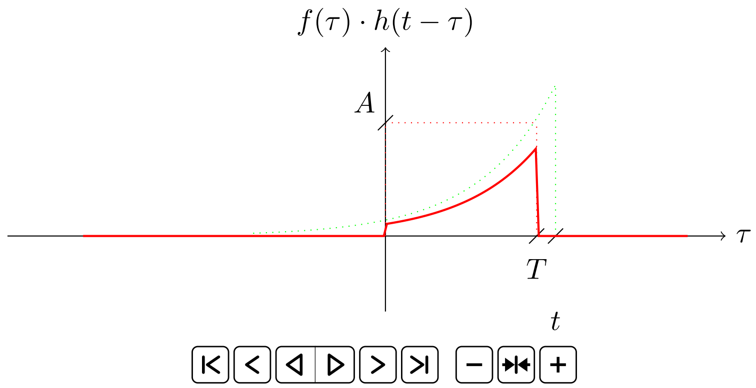


$$f(\tau) \cdot h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} & \tau \in (0; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{t} \left(A \cdot e^{-a\cdot(t-\tau)}\right) \cdot d\tau + \int_{t}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\
&= 0 + A \cdot \int_{0}^{t} \left(e^{-a\cdot t} \cdot e^{a\cdot\tau}\right) \cdot d\tau + 0 = \\
&= A \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \int_{0}^{t} \left(e^{a\cdot\tau}\right) \cdot d\tau = \\
&= A \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a\cdot\tau}\Big|_{0}^{t} = \\
&= \frac{A}{a} \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \left(e^{a\cdot t} - e^{a\cdot 0}\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \left(e^{a\cdot t} - 1\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{a\cdot t} \cdot e^{-a\cdot t} - 1 \cdot e^{-a\cdot t}\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{a\cdot t - a\cdot t} - e^{-a\cdot t}\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{0} - e^{-a\cdot t}\right) = \\
&= \frac{A}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot t}\right)
\end{aligned}$$

Przedział 3 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq T$ otrzymujemy



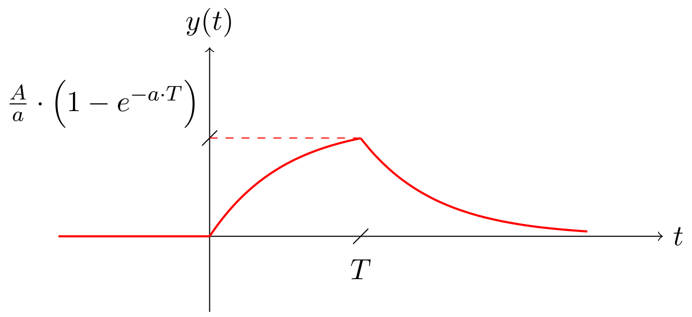
$$f(\tau)\cdot h(t-\tau)=\begin{cases}0 & \tau\in(-\infty;0)\\ A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} & \tau\in(0;T)\\ 0 & \tau\in(T;\infty)\end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

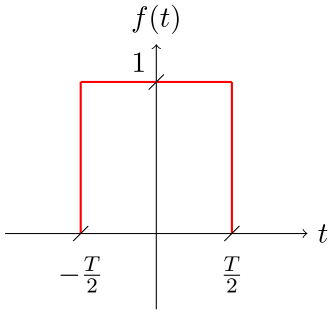
$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau=\\&=\int_{-\infty}^{0}0\cdot d\tau+\int_{0}^{T}\left(A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)}\right)\cdot d\tau+\int_{T}^{\infty}0\cdot d\tau=\\&=0+A\cdot\int_{0}^{T}\left(e^{-a\cdot t}\cdot e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau+0=\\&=A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\int_{0}^{T}\left(e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau=\\&=A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot\tau}\Big|_0^T=\\&=\frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-e^{a\cdot 0}\right)=\\&=\frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-1\right)\end{aligned}$$

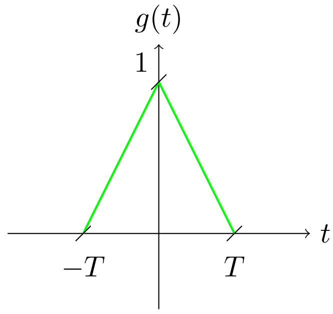
Podsumowując:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau=\begin{cases}0 & t\in(-\infty;0)\\ \frac{A}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right) & t\in(0;T)\\ \frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-1\right) & t\in(T;\infty)\end{cases}$$


y(t)
A/a · (1 − e^{−a·T})
t
T

Zadanie 2. Oblicz splot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$





Wzór na slot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \tag{4.2}$$

Wzory sygnałów pod całką

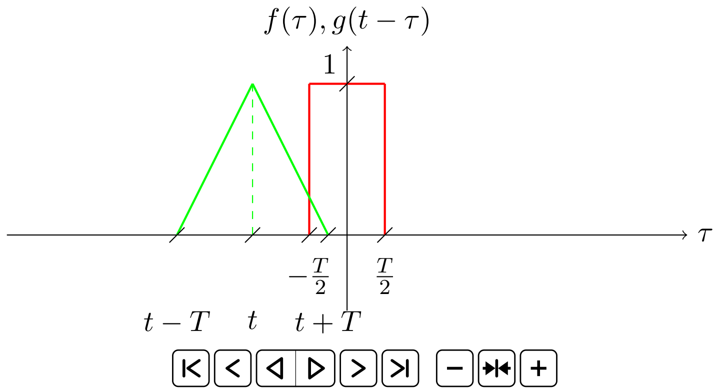
$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$g(t-\tau) = \Lambda\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

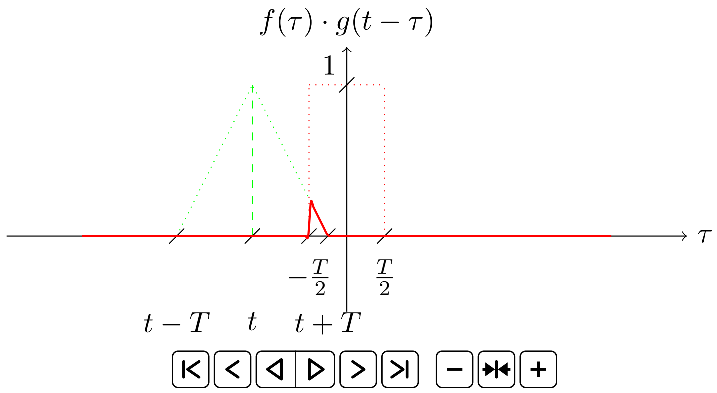
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ A & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t-T)\,; \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t-T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t+T) \\ 0 & \tau \in (t+T; \infty)\,; \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

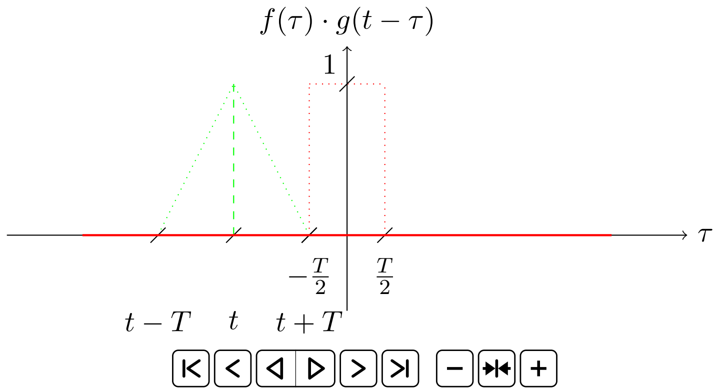


Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy



Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t-\tau)$.

Przedział 1 .



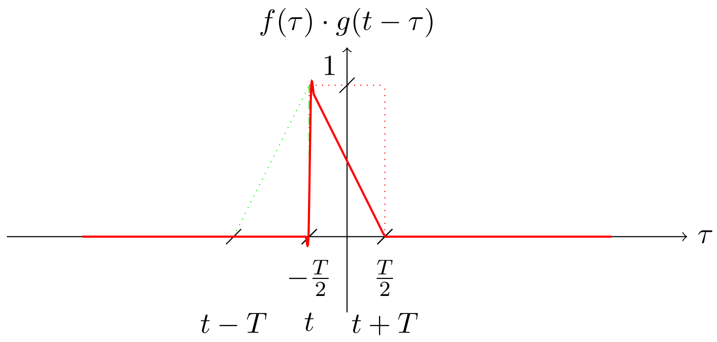
Dla wartości t spełniających warunek $t + T < -\frac{T}{2}$

$$
\begin{aligned}
t + T &< -\frac{T}{2} \\
t &< -\frac{T}{2} - T \\
t &< -\frac{3}{2} \cdot T
\end{aligned}
$$

w wyniku mnożenia otrzymyjemy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Przedział 2 .



Dla wartości t spełniających warunki $t+T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned}
t+T &\geq -\frac{T}{2} & \wedge && t &< -\frac{T}{2}\\
t &\geq -\frac{T}{2} - T & \wedge && t &< -\frac{T}{2}\\
t &\geq -\frac{3}{2}\cdot T & \wedge && t &< -\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

a więc $t \in \left\langle -\frac{3}{2}\cdot T, -\frac{T}{2}\right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t+T\right)$.

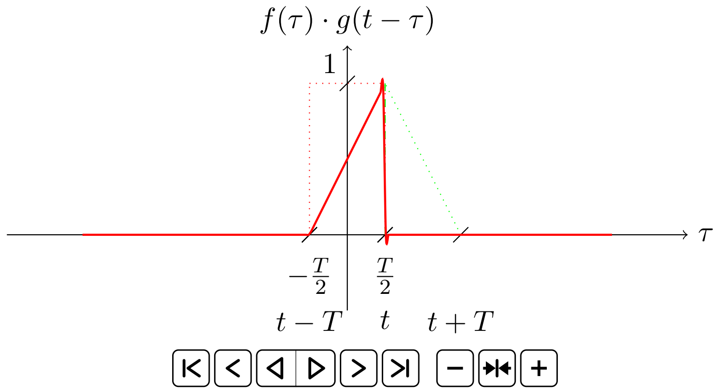
$$f(\tau)\cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right)\\ -\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t+T\right)\\ 0 & \tau \in (t+T;\infty) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau =\\
&= \int_{-\infty}^{\frac{T}{2}} 0\cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0\cdot d\tau =\\
&= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\frac{1}{T}\cdot\tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\frac{t+T}{T}\cdot d\tau + 0 =\\
&= -\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\tau\cdot d\tau + \frac{t+T}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau =\\
&= -\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T}\cdot(\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} =\\
&= -\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(t+T-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) =\\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + 2\cdot t\cdot T + T^2 - \frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(t+T+\frac{T}{2}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{t+T}{T}\cdot\left(t+\frac{3}{2}\cdot T\right)= \\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{T}\cdot\left(t^2+\frac{3}{2}\cdot t\cdot T+t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)= \\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{5}{2}\cdot t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2+2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+3\cdot t\cdot T+2\frac{1}{4}\cdot T^2\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{1}{2\cdot T}\cdot 3\cdot t\cdot T+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\frac{9}{4}\cdot T^2= \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{3}{2}\cdot t+\frac{9}{8}\cdot T
\end{aligned}
$$

Przedział 3 .



Dla wartości t spełniających warunki $t \geq -\frac{T}{2}$ i $t < \frac{T}{2}$

$$
t \geq -\frac{T}{2} \qquad \wedge \qquad t < \frac{T}{2}
$$

a więc $t \in \left\langle -\frac{1}{2}\cdot T, \frac{1}{2}\cdot T\right)$

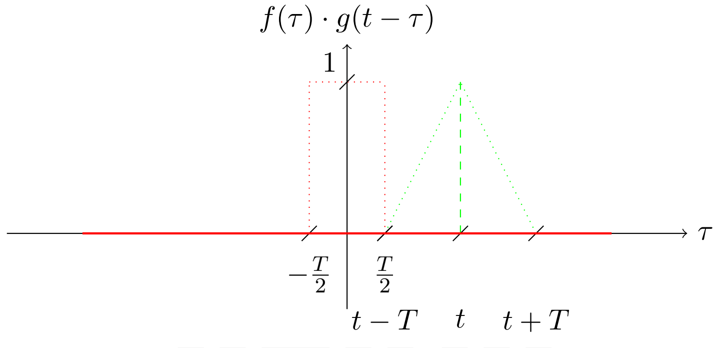
w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t \in \left(-\frac{T}{2}, t\right)$ oraz $t \in \left(t, \frac{T}{2}\right)$.

$$
f(\tau)\cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ \frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t\right) \\ -\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(t; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0\cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\left(\frac{1}{T}\cdot\tau-\frac{t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau-\frac{-t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0\cdot d\tau = \\
&= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\frac{1}{T}\cdot\tau\cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\frac{t-T}{T}\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau\right)\cdot d\tau - \int_{t}^{\frac{T}{2}}\frac{-t-T}{T}\cdot d\tau + 0 = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\tau\cdot d\tau - \frac{t-T}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t} d\tau - \frac{1}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}}\tau\cdot d\tau + \frac{t+T}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}} d\tau = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{t-T}{T}\cdot\tau|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{t}^{\frac{T}{2}} + \frac{t+T}{T}\cdot\tau|_{t}^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2-\left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2-t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2-t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t-T)\cdot\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2-t^2\right) + \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t+T)\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t\cdot T - \frac{1}{2}\cdot T^2\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2-t^2\right) + \\
&+ \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t^2 + \frac{1}{2}\cdot T^2 - t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot T^2+t^2\right) + \\
&+ \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t\cdot T - 2\cdot t^2 + T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2 - 2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2 - \frac{1}{4}\cdot T^2 + t^2 + t\cdot T - 2\cdot t^2 + T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 + 2\cdot T^2\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(-t^2+T^2\right) = \\
&= -\frac{1}{T}\cdot t^2 + T
\end{aligned}
$$

Przedział 4 .



Dla wartości t spełniających warunki $t-T \geq -\frac{T}{2}$ i $t-T < \frac{T}{2}$

$$
\begin{aligned}
t - T &\geq -\frac{T}{2} & \wedge && t - T &< \frac{T}{2}\\
t &\geq -\frac{T}{2} + T & \wedge && t &< \frac{T}{2} + T\\
t &\geq \frac{1}{2} \cdot T & \wedge && t &< \frac{3}{2} \cdot T
\end{aligned}
$$

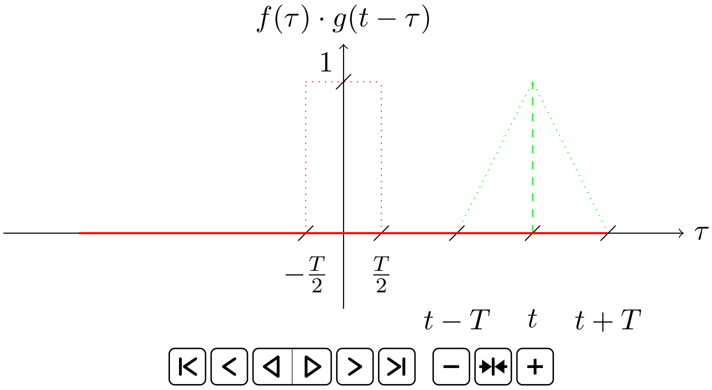
a więc $t \in \left\langle \frac{1}{2} \cdot T, \frac{3}{2} \cdot T \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t - T, \frac{T}{2}\right)$.

$$
f(\tau) \cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t-T) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(t-T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{t-T} 0 \cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\
&= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} frac1T \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t-T}{T} \cdot d\tau + 0 = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau - \frac{t-T}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t-T}{T} \cdot \tau|_{t-T}^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - (t-T)^2\right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - (t-T)\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot T + T^2\right)\right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t + T\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - T^2\right) - \frac{1}{T} \cdot (t-T) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot T - t\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T\right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t \cdot T - t^2 - \frac{3}{2} \cdot T^2 + t \cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T\right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot t \cdot T - 2 \cdot t^2 - \frac{6}{2} \cdot T^2 + 2 \cdot t \cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - \frac{6}{2} \cdot t \cdot T + 2 \cdot t^2 + \frac{6}{2} \cdot T^2 - 2 \cdot t \cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot T^2 - 3 \cdot t \cdot T + t^2\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 = \\
&= \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2
\end{aligned}
$$

Przedział 5 .



Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} t - T &\geq \frac{T}{2} \\ t &\geq \frac{T}{2} + T \\ t &\geq \frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

a więc $t \in \left\langle \frac{3}{2} \cdot T, \infty \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

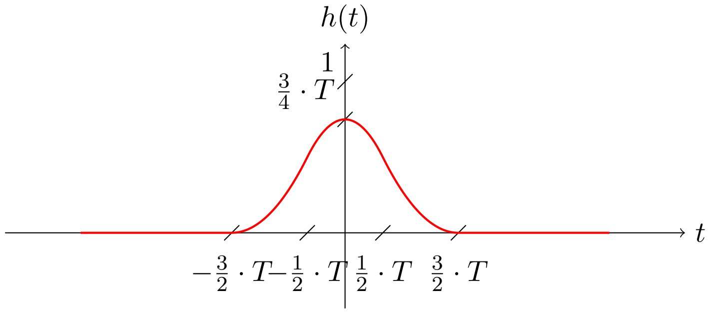
$$f(\tau) \cdot g(t-\tau) = 0$$

a więc wartość splotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik splotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

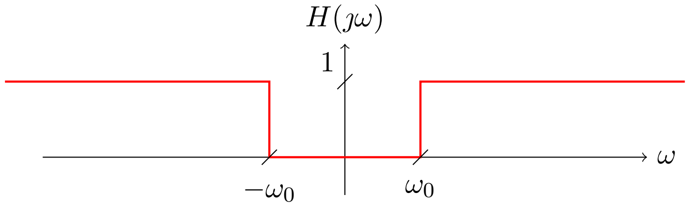
$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + \frac{3}{4} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases} \end{aligned}$$


$h(t)$
1
$\frac{3}{4} \cdot T$
t
$-\frac{3}{2} \cdot T$
$-\frac{1}{2} \cdot T$
$\frac{1}{2} \cdot T$
$\frac{3}{2} \cdot T$

4.2 Filtry

Zadanie 1.

Na układ LTI o transmitancji podanej poniżej, podano sygnał $u(t) = A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$. Wyznacz odpowiedź układu $y(t)$ wiedząc, że $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



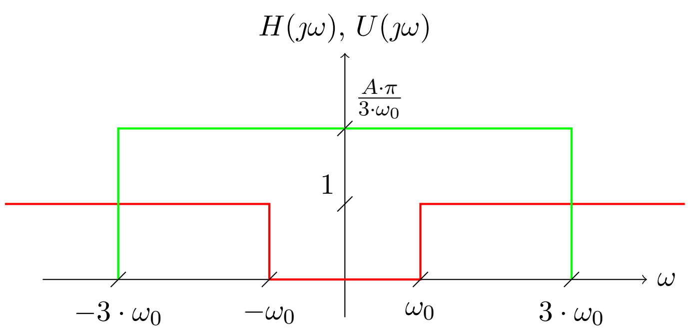
Wiemy, że odpowiedź układu LTI można obliczyć z zależności $y(t) = u(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ jest odpowiedzią impulsową układu. Wiemy także, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$.

Ponieważ wyznaczenie splotu liniowego sygnałów jest bardziej skomplikowane niż operacja mnożenia, dlatego spróbujemy skorzystać z tej drugie zależności, czyli mnożenia transformat. W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$, czyli $U(\jmath\omega)$.

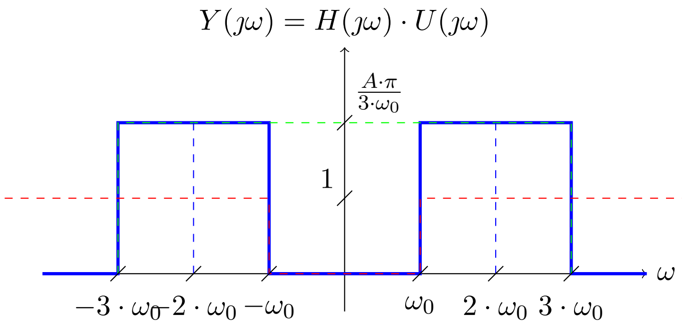
$$\begin{aligned}
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)\\
Sa\left(6 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|6 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)\\
A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału wejściowego $u(t)$ to $U(\jmath\omega) = \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6\cdot\omega_0}\right)$.

Transformatę sygnału wyjściowego, czyli $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ wyznaczymy graficznie, W tym celu na wykresie transmitancji $H(\jmath\omega)$ dodamy transformatę $U(\jmath\omega)$:



Teraz dokonujmy operacji mnożenia transformat $U(\jmath\omega)$ przez $H(\jmath\omega)$



$$Y(\jmath\omega) = \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) \tag{4.3}$$

Skoro zanmy transformatę sygnału wyjściowego, to spróbujmy wyznaczyć sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu wykorzystując wcześniejsze obliczenia. Transformata $Y(\jmath\omega)$ to suma dwóch przeskalowanych prostokątów, przesuniętych na osi pulsacji. W takim razie można wnioskować, że sygnał w dziedzinie czasiu to będzie suma dwóch zmodulowanych i przeskalowanych funkcji $Sa(t)$.

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\cdot\Pi(-\omega)\\
Sa\left(2\cdot\omega_0\cdot\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-(-2\cdot\omega_0)}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

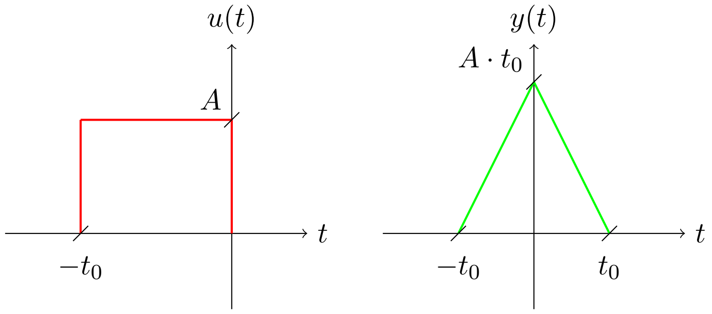
Podsumowując sygnał wyjściowy $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) + \frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) =\\
&= \frac{A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot\left(e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)} + e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\right) =\\
&= \left\{cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =\\
&= \frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\,(2\cdot\omega_0\cdot t))
\end{aligned}$$

Odpowiedź układu to $y(t) = \frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\,(2\cdot\omega_0\cdot t))$.

Zadanie 2.

Wyznacz odpowiedź implusową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wygladają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$. W związku z tym $H(\jmath\omega) = \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(\jmath\omega)$.

W pierwszym kroku wyznaczmy transformaty sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t+\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \\
U(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{u(t)\} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{1}{t_0}\cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{t+\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
A \cdot \Pi\left(\frac{t+\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \\
Y(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
\Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Lambda\left(\frac{1}{t_0}\cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Skoro zanmy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyc transmitancję układu, czyli $H(\jmath\omega)$.

$$
\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)} = \\
&= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}} = \\
&= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

Teraz możemy wyznaczć odpowiedź implusową układu $h(t)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\
? &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Pi\left(\frac{1}{t_0}\cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{t_0}{2}}$$

Odpowiedź implusowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

ISBN 978-83-939620-1-3