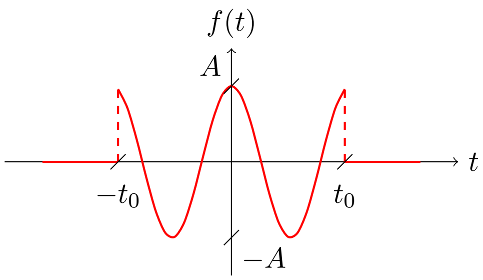
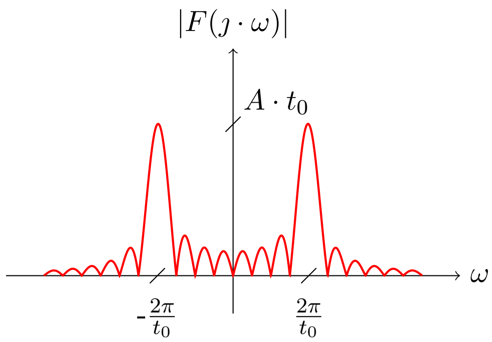
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

25 maja 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone
ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

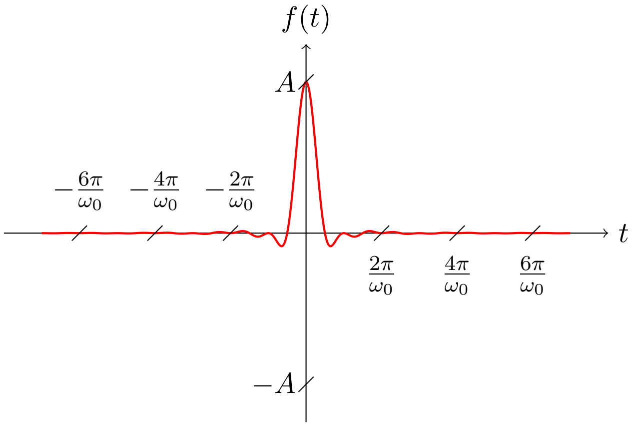
3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \tag{3.1}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.2}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) =$$
$$= \left\{cos(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) \quad &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) \quad &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(f_1(t) + f_2(t)\right)
\end{aligned}
$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}
$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))
\end{gathered}
$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$
\begin{gathered}
h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\
g(t) = H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)
\end{gathered}
$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału trójkątnego $h(t) = \Lambda(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa^2.

$$
\begin{gathered}
h(t) = \Lambda(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
g_1(t) = H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(\omega) = 2\pi \cdot \Lambda\left(-\omega\right) = 2\pi \cdot \Lambda\left(\omega\right)
\end{gathered}
$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\
&= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\
&= Sa^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Sa^2\left(\frac{2\cdot\omega_0\cdot t}{2}\right) = \\
&= \left\{a = 2\cdot\omega_0\right\} = \\
&= Sa^2\left(\frac{a\cdot t}{2}\right) = \\
&= g_1(a\cdot t)
\end{aligned}
$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a\cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$
\begin{gathered}
g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) \\
g(t) = g_1(\alpha\cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|\alpha|}\cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) = \\
&= \left\{\alpha = 2\cdot\omega_0\right\} = \\
&= \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot G_1(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}) = \\
&= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi\cdot\Lambda\left(\omega\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot 2\pi\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f_1(t) = g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))
\end{gathered}
$$

otrzymujemy:

$$
F_1(\jmath\omega) = G\left(\jmath\left(\omega-\omega_0\right)\right) =
$$

$$= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)$$

$$\begin{aligned} F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega + \omega_0\right)\right) = \\ &= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) \\ f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) \\ f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \frac{1}{2} \cdot \left(F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega +}{2 \cdot}\right.\right.$

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3