Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

4 czerwca 2019

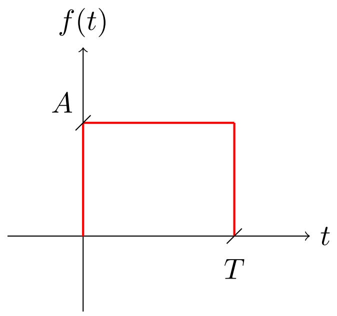
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

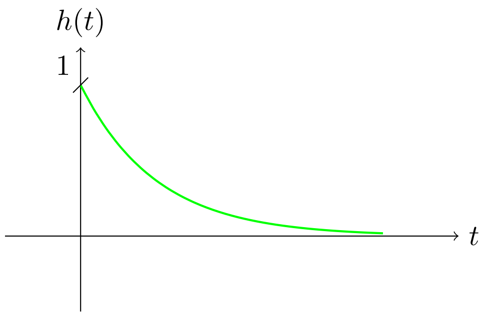
pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$ i $h(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$





Wzór na slot sygnałów

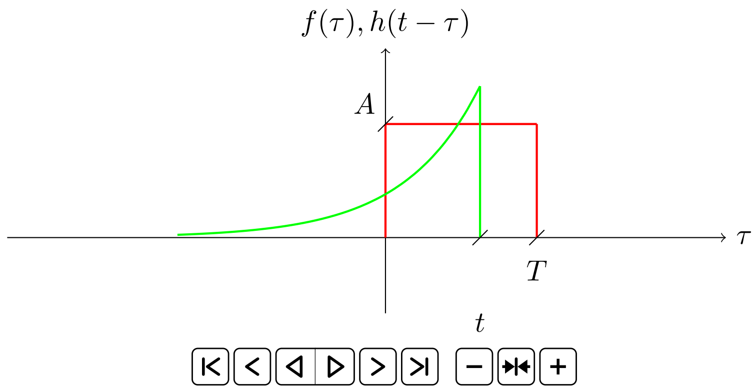
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \tag{1}$$

Wzory sygnałów pod całką

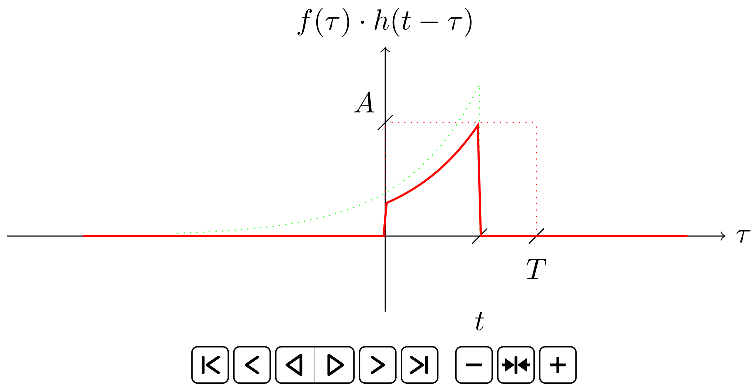
$$f(\tau) = A \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$
$$h(t-\tau) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot (t-\tau)}$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$
$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a \cdot (t-\tau)} & \tau \in (-\infty; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji w dziedzinie τ dla różnych wartości t:

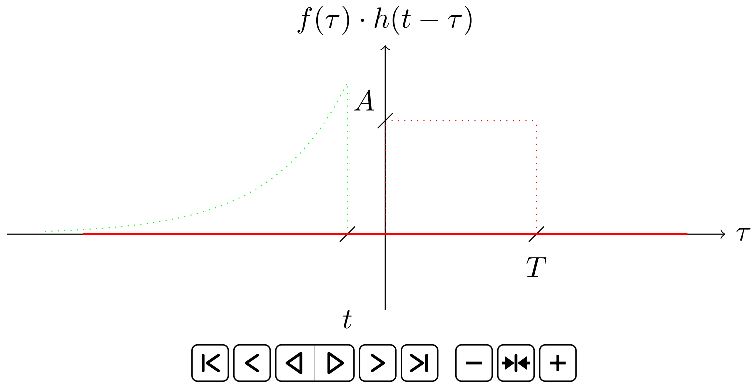


Po wymnożeniu obu funkcji, dla przykładowych wartości t, otrzymujemy (ciągła, czerwona linia):



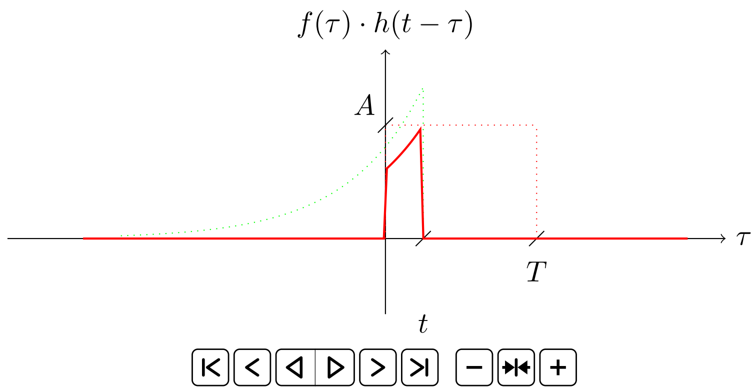
Z wykresu widać, że dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot h(t-\tau)$. W związku z tym, wyznaczymy splot oddzielnie dla posczególnych przedziałów wartości t

Przedział 1 Dla wartości t spełniających warunek $t < 0$ otrzymujemy:



$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Przedział 2 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq 0$ i $t < T$ otrzymujemy

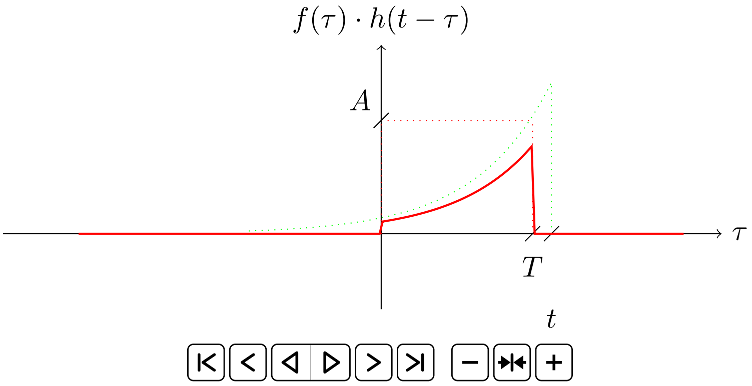


$$f(\tau)\cdot h(t-\tau)=\begin{cases}0 & \tau\in(-\infty;0)\\ A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} & \tau\in(0;t)\\ 0 & \tau\in(t;\infty)\end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\cdot d\tau + \int_{0}^{t}\left(A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)}\right)\cdot d\tau + \int_{t}^{\infty} 0\cdot d\tau\\
&= 0 + A\cdot\int_{0}^{t}\left(e^{-a\cdot t}\cdot e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau + 0\\
&= A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\int_{0}^{t}\left(e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau\\
&= A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot\tau}\big|_0^t\\
&= \frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot t}-e^{a\cdot 0}\right)\\
&= \frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot t}-1\right)\\
&= \frac{A}{a}\cdot\left(e^{a\cdot t}\cdot e^{-a\cdot t}-1\cdot e^{-a\cdot t}\right)\\
&= \frac{A}{a}\cdot\left(e^{a\cdot t-a\cdot t}-e^{-a\cdot t}\right)\\
&= \frac{A}{a}\cdot\left(e^{0}-e^{-a\cdot t}\right)\\
&= \frac{A}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right)
\end{aligned}$$

Przedział 3 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq T$ otrzymujemy



$$f(\tau)\cdot h(t-\tau)=\begin{cases}0 & \tau\in(-\infty;0)\\ A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} & \tau\in(0;T)\\ 0 & \tau\in(T;\infty)\end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau\\ &=\int_{-\infty}^{0}0\cdot d\tau+\int_{0}^{T}\left(A\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)}\right)\cdot d\tau+\int_{T}^{\infty}0\cdot d\tau\\ &=0+A\cdot\int_{0}^{T}\left(e^{-a\cdot t}\cdot e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau+0\\ &=A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\int_{0}^{T}\left(e^{a\cdot\tau}\right)\cdot d\tau\\ &=A\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot\tau}\Big|_0^T\\ &=\frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-e^{a\cdot 0}\right)\\ &=\frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-1\right)\end{aligned}$$

Podsumowując:

$$y(t)=f(\tau)\cdot h(t-\tau)=\begin{cases}0 & t\in(-\infty;0)\\ \frac{A}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right) & t\in(0;T)\\ \frac{A}{a}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(e^{a\cdot T}-1\right) & t\in(T;\infty)\end{cases}$$