Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

31 maja 2019

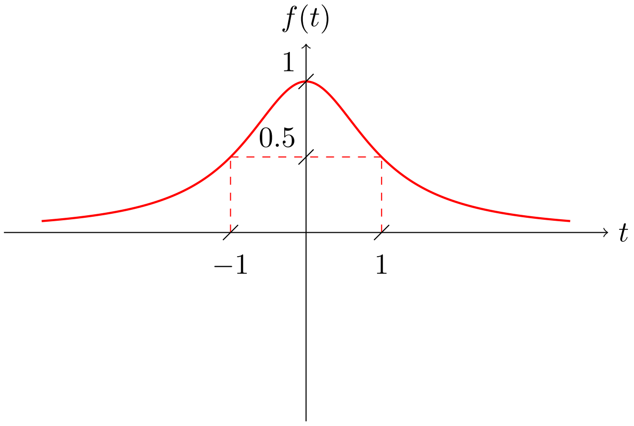
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ za pomocą twierdzeń.



Załóżmy sygnał $g(t) = e^{-|t|}$ i wyznaczmy jego transformatę.

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt + \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = -\left(1+\jmath\cdot\omega\right)\cdot t & z_2 = \left(1-\jmath\cdot\omega\right)\cdot t \\ dz_1 = -\left(1+\jmath\cdot\omega\right)\cdot dt & dz_2 = \left(1-\jmath\cdot\omega\right)\cdot dt \\ dt = \frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot dz_1 & dt = \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot dz_2 \end{matrix} \right\} \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot dz_2 + \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z_1} \cdot \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot dz_1 \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{0} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z_1} \cdot dz_1 \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z_2}\Big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z_1}\Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot 0} - e^{(1-\jmath\cdot\omega)\cdot(-\tau)}\right) + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau} - e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right) \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{0} - e^{-(1-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-(1+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau} - e^{0}\right) \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(1 - e^{-\tau+\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-\tau-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} 1 - \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - \lim_{\tau\to\infty} 1\right) \\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega} \cdot \left(1 - \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-\left(1+\jmath\cdot\omega\right)} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau} - 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(1-0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}\right)+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}\cdot(1-0)+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot(0-1)\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}+\frac{1}{-(1+\jmath\cdot\omega)}\cdot(-1)\\
&= \frac{1}{1-\jmath\cdot\omega}+\frac{1}{1+\jmath\cdot\omega}\\
&= \frac{(1+\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}+\frac{(1-\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{(1+\jmath\cdot\omega)+(1-\jmath\cdot\omega)}{(1+\jmath\cdot\omega)\cdot(1-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)=e^{-|t|}$ jest równa $G(\jmath\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$. Postać funkcji $G(\jmath\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$ nie jest identyczna z postacią funkcji $f(t)$, funkcja różni się o współczynnik 2.

Z twierdzenia o liniowości transformaty

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)\\
h(t)=\alpha\cdot g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)=\alpha\cdot G(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2}\cdot e^{-|t|}\\
H(\jmath\omega) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}\\
&= \frac{1}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

Na podstawie sygnału $h(t)$ i korzystając z twierdzenia o symetrii możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)\\
f(t)=H(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)=2\pi\cdot h(-\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= 2\pi\cdot h(-\omega)\\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-|-\omega|}\\
&= \pi\cdot e^{-|\omega|}
\end{aligned}
$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ jest równa $F(\jmath\omega)=\pi\cdot e^{-|\omega|}$