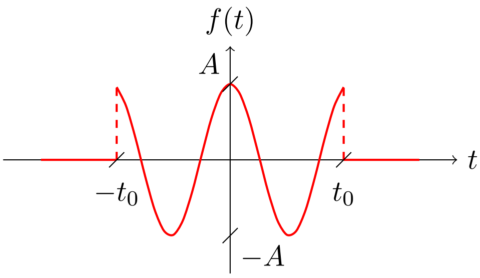
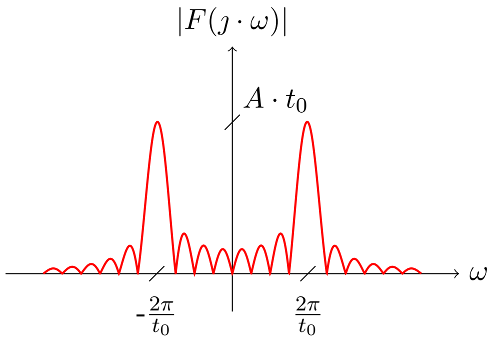
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

31 marca 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

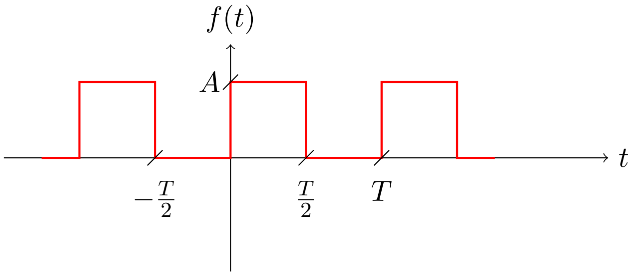
1.1.3 Moc sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$.
Współczynniki a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(z\right)|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - sin\left(0\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(sin \left(k \cdot \pi \right) - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin \left(k \cdot \pi \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{2.5}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(z \right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(z \right) \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \, cos \left(z \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \, cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \pi \right) - cos \left(0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \pi \right) - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(1 - cos \left(k \cdot \pi \right) \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \left(1 - cos \left(k \cdot \pi \right) \right)$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(1 - cos\left(k \cdot \pi\right)\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

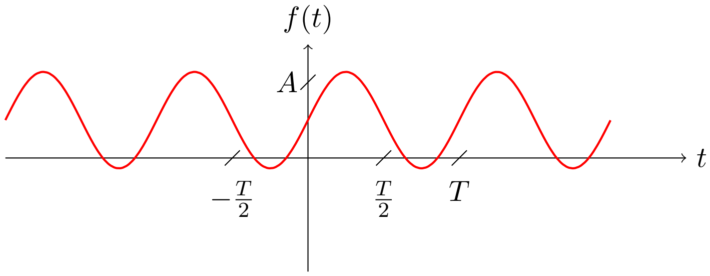
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

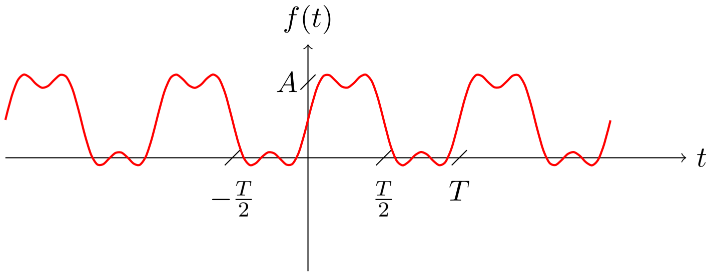
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \\ f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - cos(k \cdot \pi) \right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

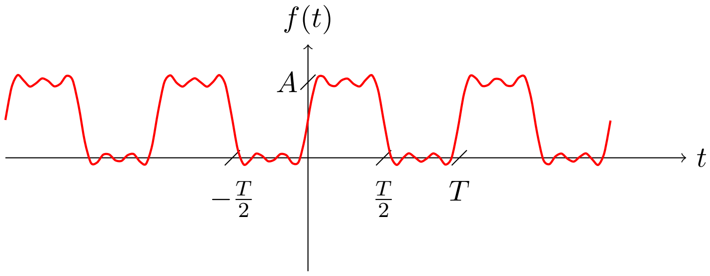
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



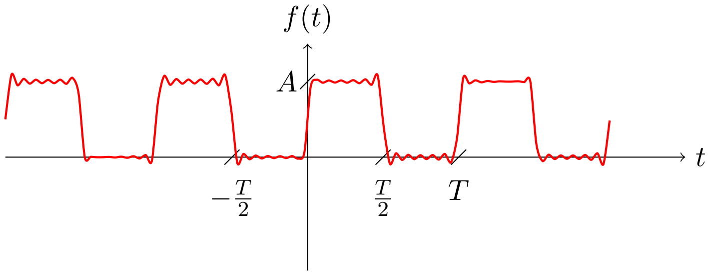
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



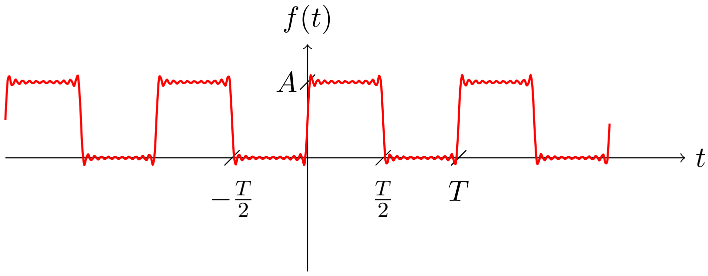
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

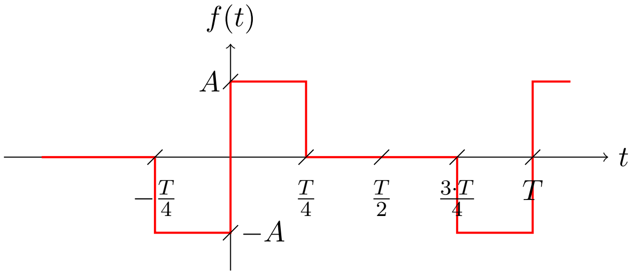


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \quad \wedge k \in C \tag{2.8}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.9}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{2.10}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\,(z)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\,(z)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\,(z)\cdot dt + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\,(z)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\,sin\,(z)|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\,(z)|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(sin\,(0) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) - sin\,(0)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(0 - sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot(0) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.11}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{aligned} z &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt &= \tfrac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(0\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(2 - 2\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0 = 0$$
$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

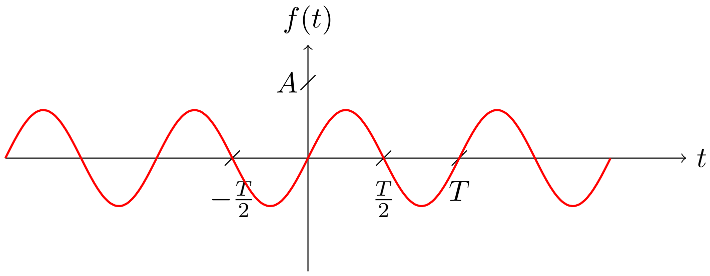
k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$

Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako:

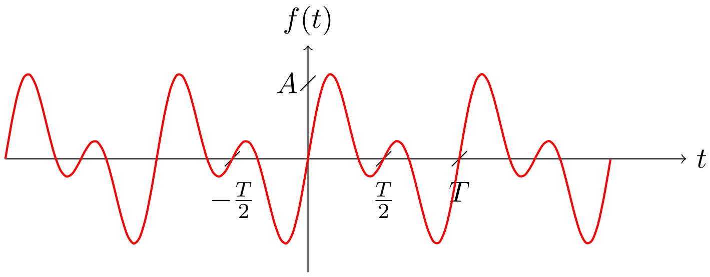
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$

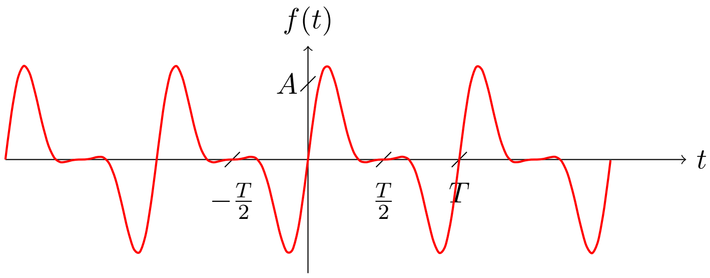
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



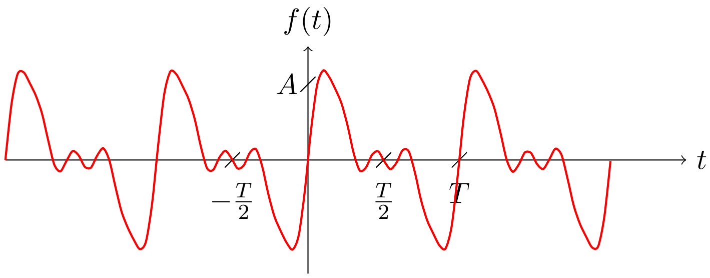
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



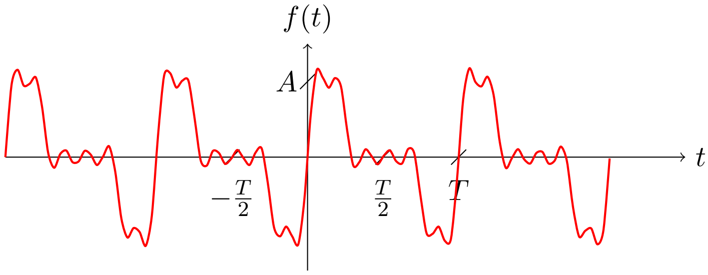
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



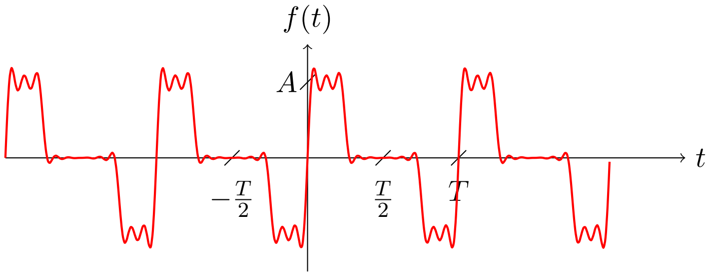
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



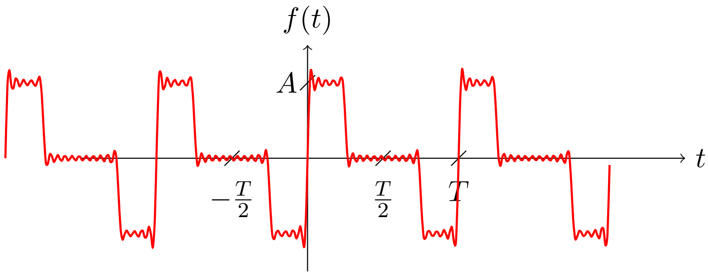
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

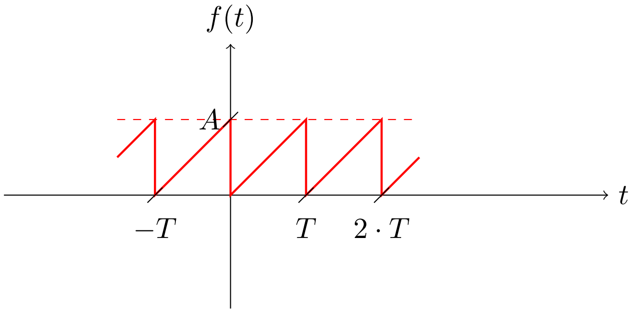


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.12}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.13}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.14}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.15}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right) = \\
&= -\frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi} = \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k\cdot\pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

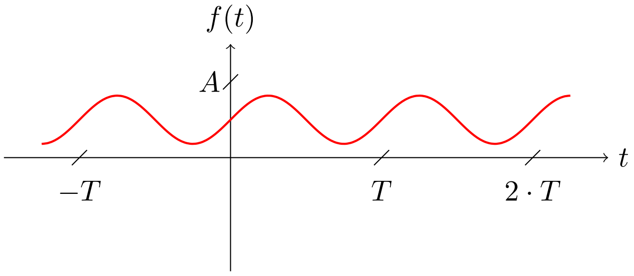
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

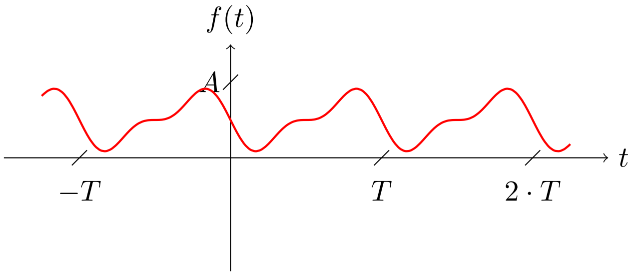
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \\ f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{A}{k \cdot \pi}\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.16}$$

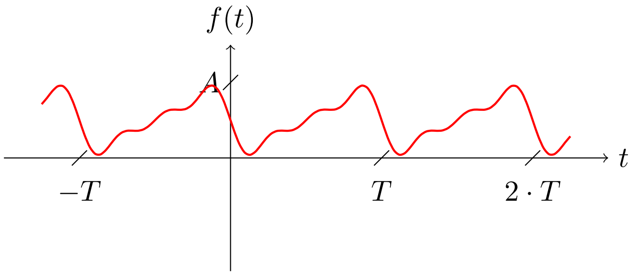
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



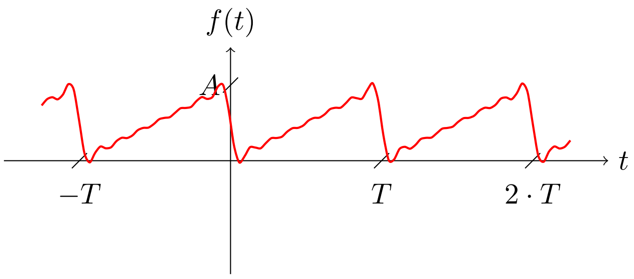
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



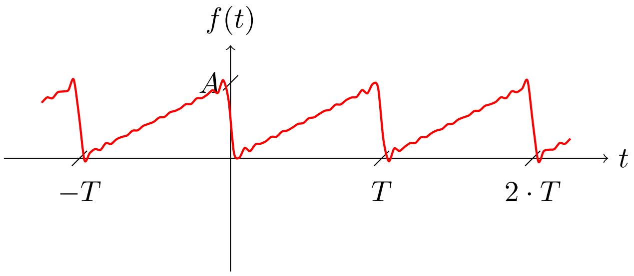
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

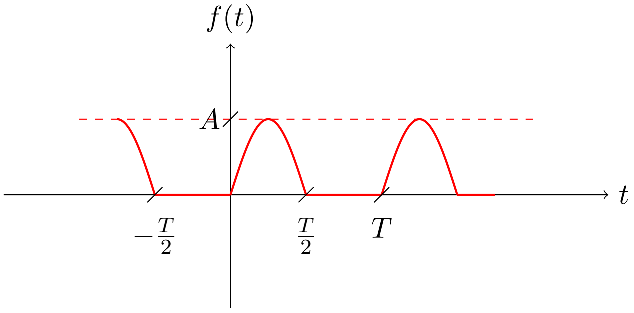


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:
W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.17}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.18}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.19}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \begin{Bmatrix} cos\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2\jmath} + \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2\jmath} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right) =
\end{aligned}
$$

$$=\left\{\begin{matrix} z_1 & =\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & =\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\\ dz_1 & =\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & =\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt\\ dt & =\frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\wedge k\neq -1 & dt & =\frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\wedge k\neq 1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right)\cdot\frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}+\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right)\cdot\frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right)\cdot dz_1+\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right)\cdot dz_2\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)+\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)+\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1+k)\right)-cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1+k)\right)\right)=\right.$$

$$\left.+\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1-k)\right)-cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1-k)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-cos\left(0\right)\right)=\right.$$

$$\left.+\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)-cos\left(0\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(0\right)-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right)=\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(0\right)-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{1+k}\cdot\left(1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right)+\frac{1}{1-k}\cdot\left(1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-k}{(1+k)\cdot(1-k)}\cdot\left(1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right)+\frac{1+k}{(1+k)\cdot(1-k)}\cdot\left(1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-k+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}+\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)+k-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-k+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)+1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)+k-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{1-k^2}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)=cos\left(\pi+k\cdot\pi\right)=-cos\left(k\cdot\pi\right)\\ cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)=cos\left(\pi-k\cdot\pi\right)=-cos\left(-k\cdot\pi\right)=-cos\left(k\cdot\pi\right)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2+cos\left(k\cdot\pi\right)-k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)+cos\left(k\cdot\pi\right)+k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2+2\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}=$$

$$=\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1+cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1+cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k\neq 1$

Współczynnik a_k dla $k=1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji a_1:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{0}-e^{0}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}}{2\jmath}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(2\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1-1) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.20}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2}\right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right) =
\end{aligned}
$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right) =$$

$$- \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \Bigg) \Bigg) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1+k)\right) - sin\left(0\right)\right) = \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1-k)\right) - sin\left(0\right)\right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) = \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot 0 =$$

$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

Współczynnik b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji b_1:

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z \right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z \right) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \, sin\left(z \right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \, sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(2\pi \right) - sin\left(0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(0 - 0 \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) =$$

$$= \frac{A}{2}$$

Wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0 = \frac{A}{\pi}$$
$$a_1 = 0$$
$$a_k = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\,(k \cdot \pi)}{1 - k^2}$$
$$b_1 = \frac{A}{2}$$
$$b_k = 0$$

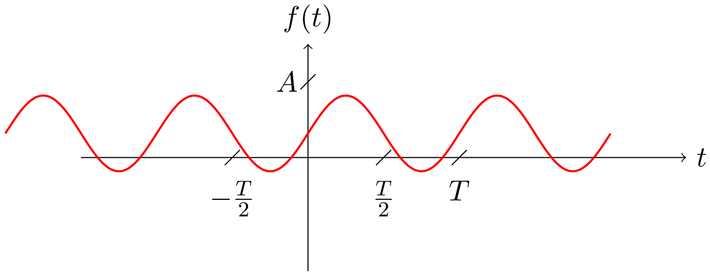
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k:

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

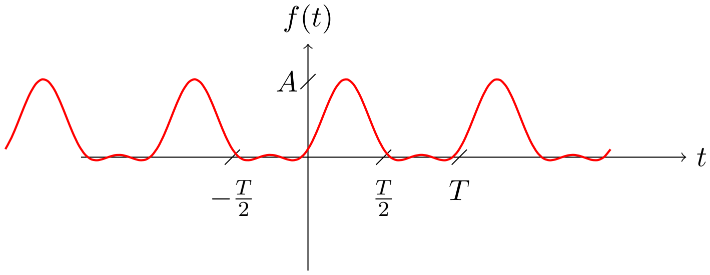
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{2.21}$$

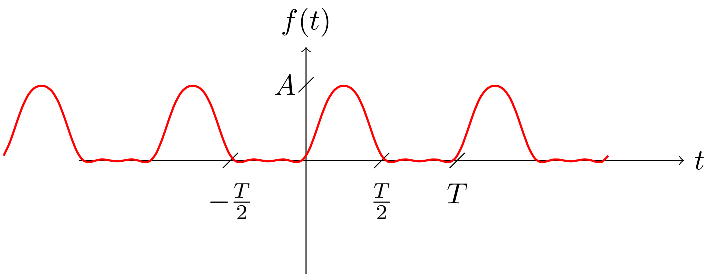
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



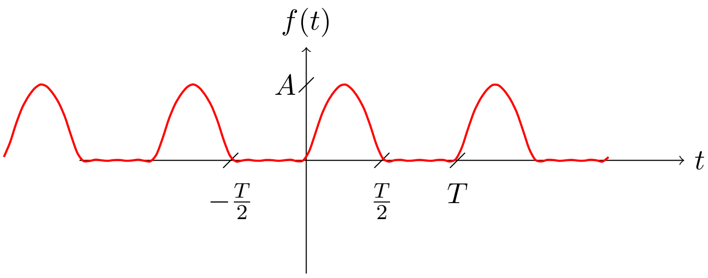
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



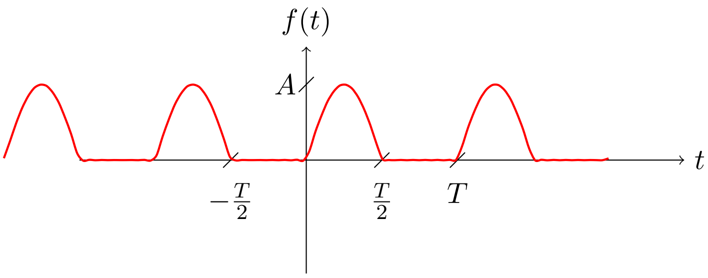
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



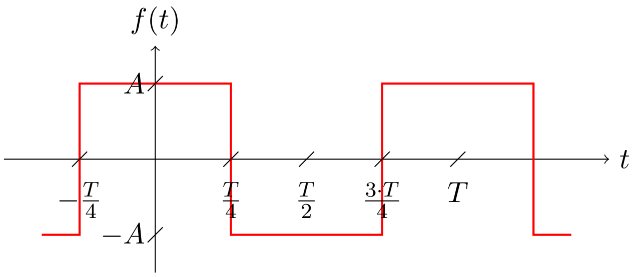
W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.22}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.23}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.25}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^z\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^0\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned}
$$

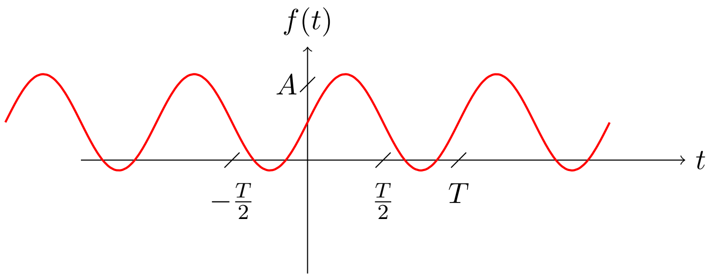
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k\rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

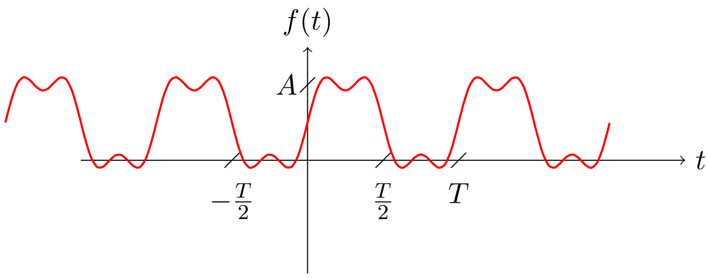
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.26}$$

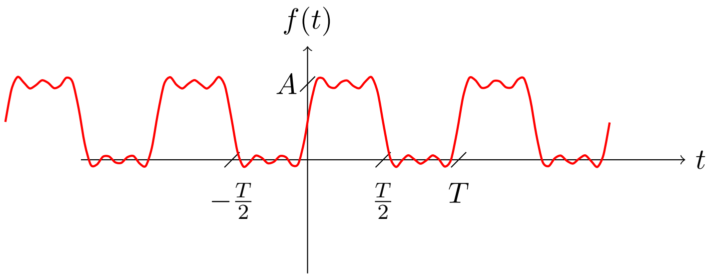
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



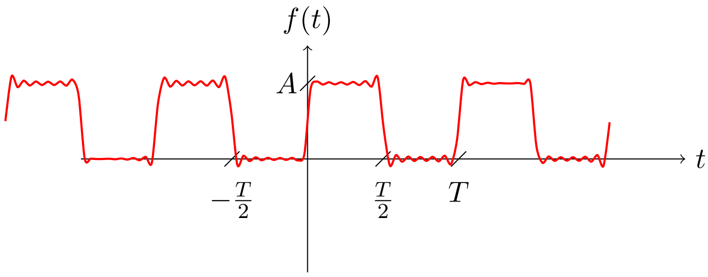
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



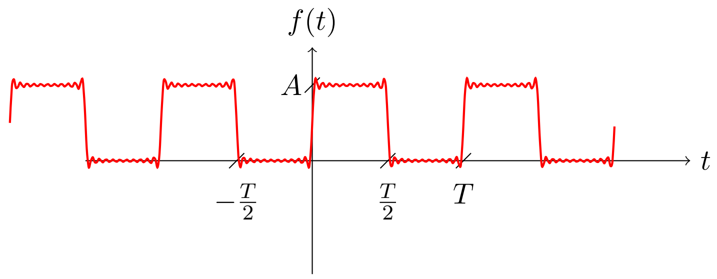
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

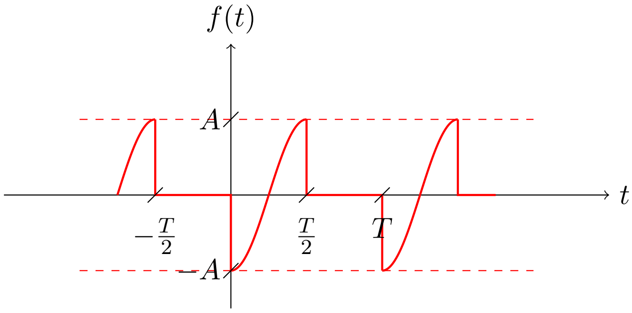


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału sinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.27}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.28}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt & = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (sin\,(pi) - sin\,(0)) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{2.29}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z_1 = \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot t & z_2 = -\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot t \\ dz_1 = \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt & dz_2 = -\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot dz_2 \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1}\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot dz_2\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2}\cdot dz_2\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{\jmath\cdot 2\pi\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1}\cdot dz_1 - \frac{T}{\jmath\cdot 2\pi\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2}\cdot dz_2\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{\jmath\cdot 2\pi}\cdot\left(\frac{1}{(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1}\cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2}\cdot dz_2\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^{0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{1-k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1-k^2} \right) = \\
&= -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1-k^2} \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi}+1}{1-k^2} \right)$.
Dla $k = 1$ i $k = -1$ trzeba wyzanczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\left(x \right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z = -\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = -\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}-0\right) - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right) \cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t + \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t + \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t} + e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-1+1)\cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot (1-1) + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2\cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Tak wiec ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = \frac{A}{4}$$
$$F_{-1} = \frac{A}{4}$$
$$F_k = -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2}\right)$$

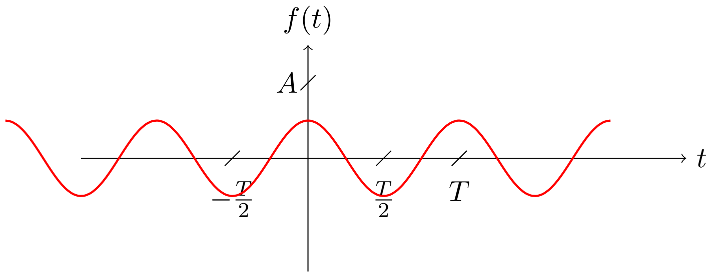
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$\lvert F_k \rvert$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

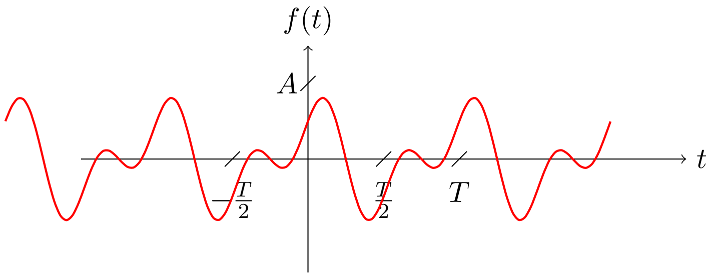
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.30}$$

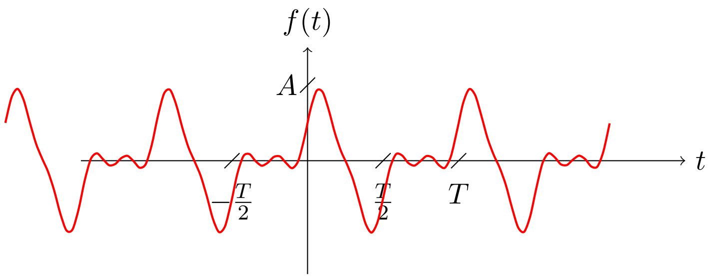
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



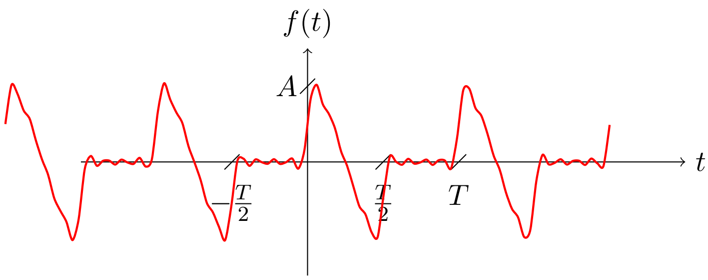
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



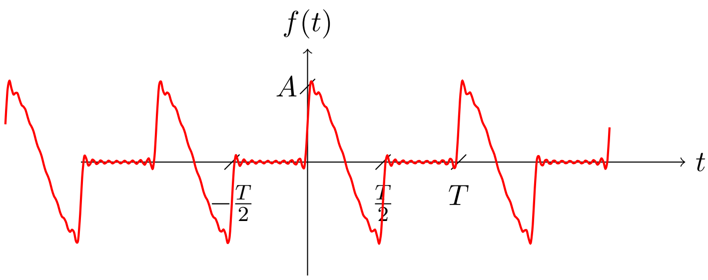
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



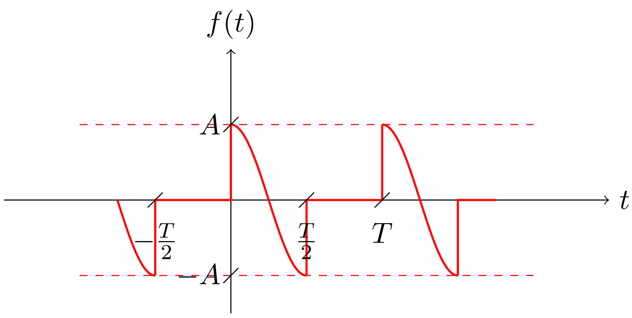
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3