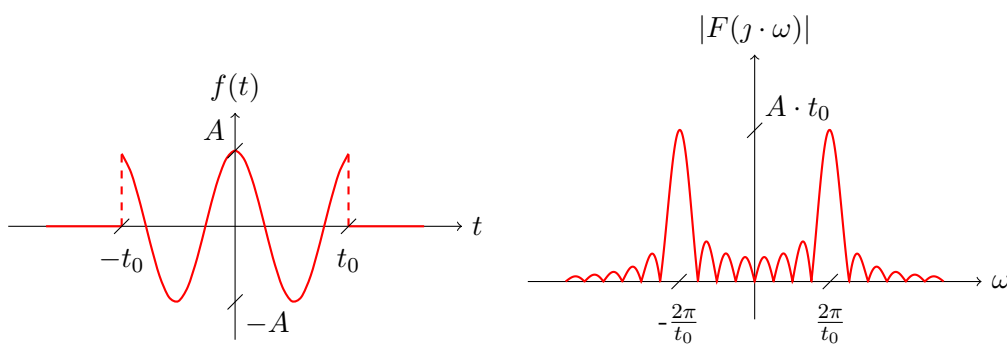


# Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

6 kwietnia 2020

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

[www.et.put.poznan.pl](http://www.et.put.poznan.pl)

[www.multimedia.edu.pl](http://www.multimedia.edu.pl)

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

## Rozdział 1

# Podstawowe własności sygnałów

### 1.1 Podstawowe własności sygnałów

#### 1.1.1 Wartość średnia

#### 1.1.2 Energia sygnału

#### 1.1.3 Moc sygnału

## Rozdział 2

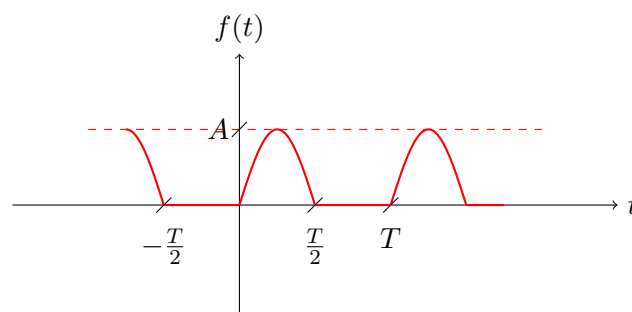
# Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

### 2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

### 2.2 Zespolony szereg Fouriera

#### Zadanie 1.

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału  $f(t)$  przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Współczynnik  $F_0$  wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie  $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left( -\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika  $F_0$  wynosi  $\frac{A}{\pi}$ .

Współczynniki  $F_k$  wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.3)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie  $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left( \frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{1-k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{1-k} \cdot \left( e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left( e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{1-k} \cdot \left( e^{j\pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left( e^{-j\pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left( e^{j\pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left( e^{-j\pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{(1+k) \cdot \left( e^{j\pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left( e^{-j\pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{(1+k) \cdot \left( e^{j\pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left( e^{-j\pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{e^{j\pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j\pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j\pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j\pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{e^{j\pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j\pi \cdot (1-k)} + e^{-j\pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j\pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{e^{j\pi} \cdot e^{-j\pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j\pi} \cdot e^{-j\pi \cdot k} + e^{-j\pi} \cdot e^{-j\pi \cdot k} - k \cdot e^{-j\pi} \cdot e^{-j\pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{-1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left( \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika  $F_k$  wynosi  $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}$  dla  $k \neq 1 \wedge k \neq -1$ .

Współczynnik  $F_k$  dla  $k = 1$  musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji  $F_1$ :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \left( \frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \left( \frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left( e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left( e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{T}{2} + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4j} = \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika  $F_1$  wynosi  $-j \cdot \frac{A}{4}$ .

Współczynnik  $F_k$  dla  $k = -1$  musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji  $F_{-1}$ :

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left( \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left( \frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left( e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left( \frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left( e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left( 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= -\frac{A}{4j} = \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika  $F_{-1}$  wynosi  $j \cdot \frac{A}{4}$ .

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$F_0 = \frac{A}{\pi}$$

$$F_k = \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}$$

$$F_{-1} = j \cdot \frac{A}{4}$$

$$F_1 = -j \cdot \frac{A}{4}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników  $F_k$

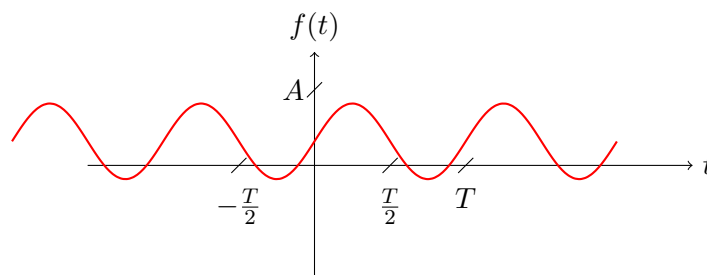
$F_k$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$F_k$	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcję  $f(t)$  możemy wyrazić jako

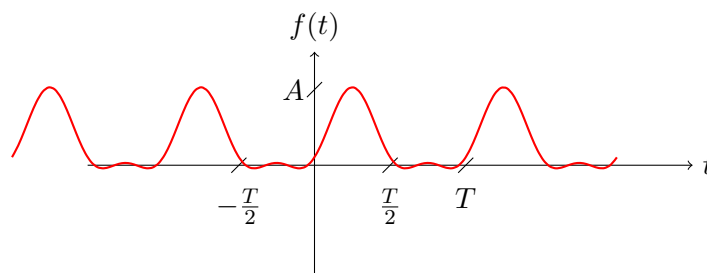
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[ \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.4)$$

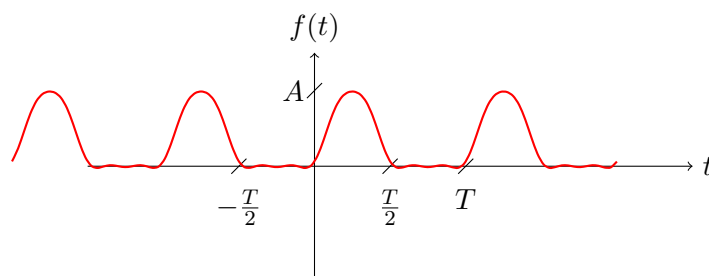
W przypadku sumowania od  $k_{min} = -1$  do  $k_{max} = 1$  otrzymujemy:



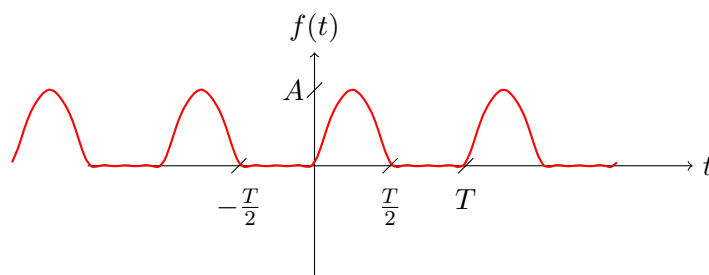
W przypadku sumowania od  $k_{min} = -2$  do  $k_{max} = 2$  otrzymujemy:



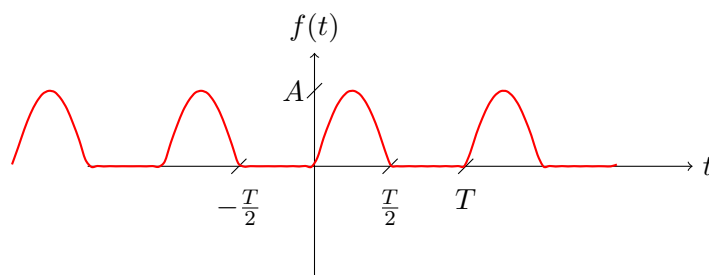
W przypadku sumowania od  $k_{min} = -4$  do  $k_{max} = 4$  otrzymujemy:



W przypadku sumowania od  $k_{min} = -6$  do  $k_{max} = 6$  otrzymujemy:

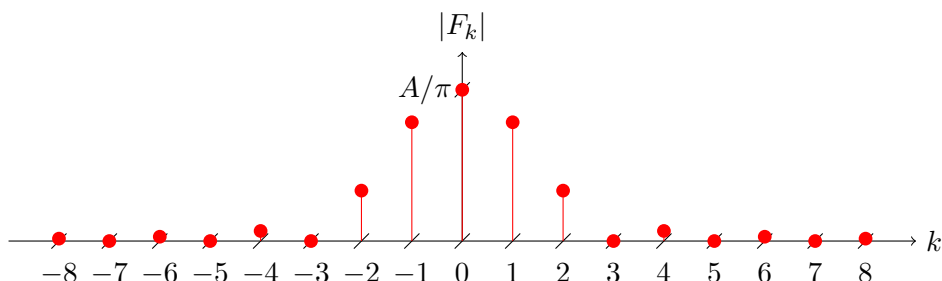


W przypadku sumowania od  $k_{min} = -12$  do  $k_{max} = 12$  otrzymujemy:



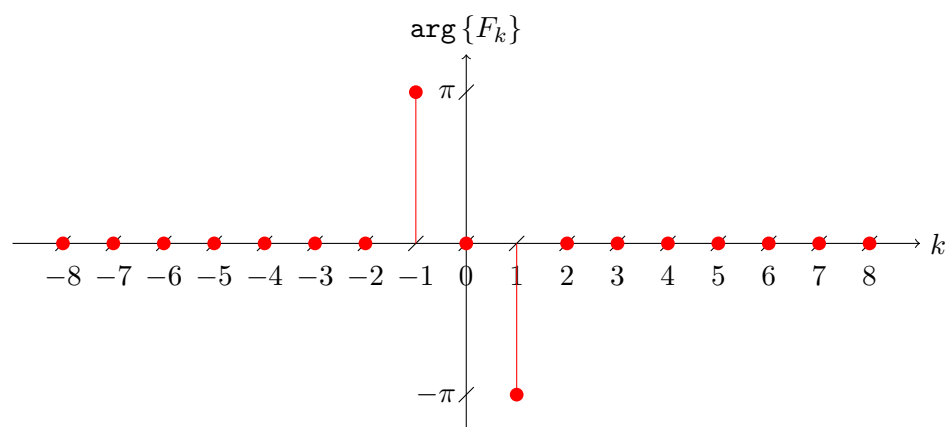
W granicy sumowania od  $k_{min} = -\infty$  do  $k_{max} = \infty$  otrzymujemy oryginalny sygnał.

Na podstawie wyznaczonych współczynników  $F_k$  możemy narysować widmo amplitudowe  $|F_k|$  sygnału  $f(t)$ .



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników  $F_k$  możemy narysować widmo fazowe  $\arg \{F_k\}$  sygnału  $f(t)$ .



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

## 2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsewala

## Rozdział 3

# Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

- 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji
- 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera
- 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera.  
Twierdzenie Parsevala

## Rozdział 4

# Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

### 4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

### 4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

