

Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\text{Sa}(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - \text{Sa}(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

5 kwietnia 2020

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc sygnału

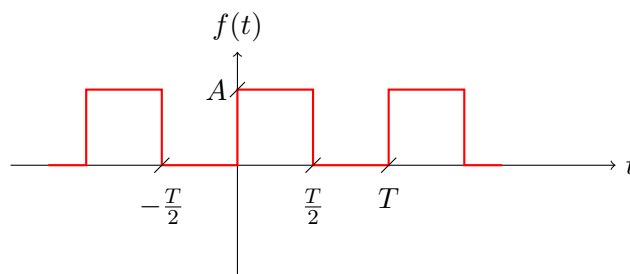
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1) = \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)
\end{aligned}$$

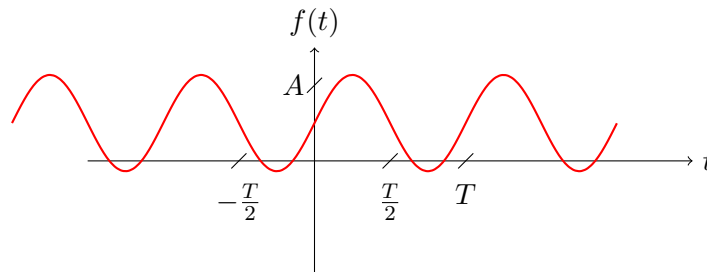
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

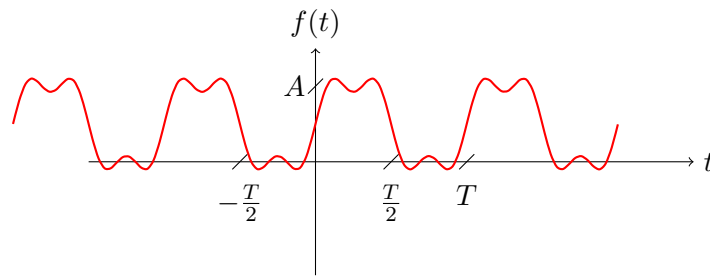
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

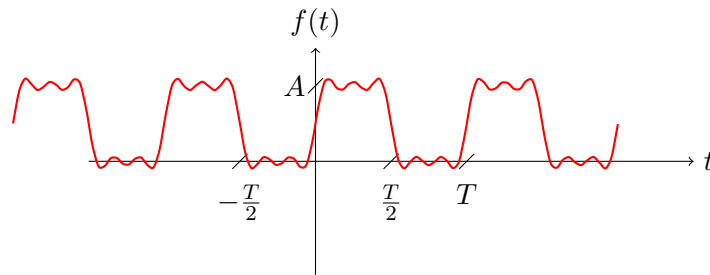
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



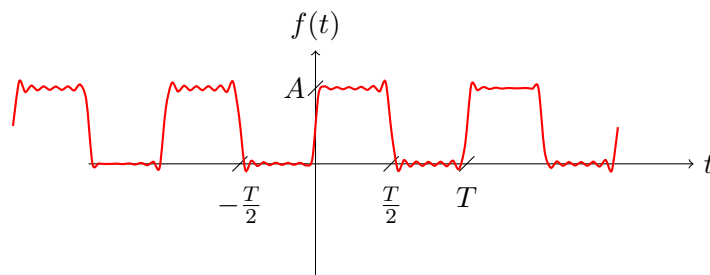
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



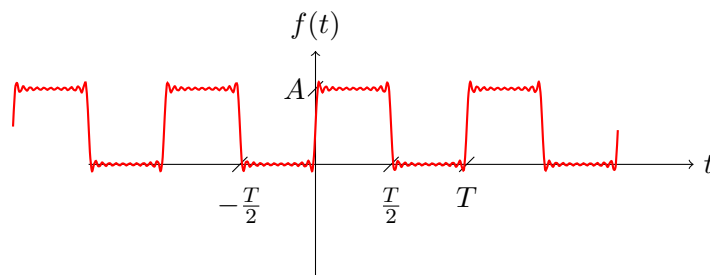
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

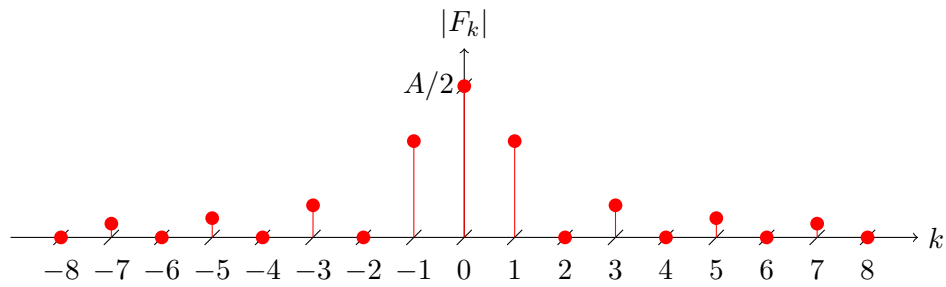


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



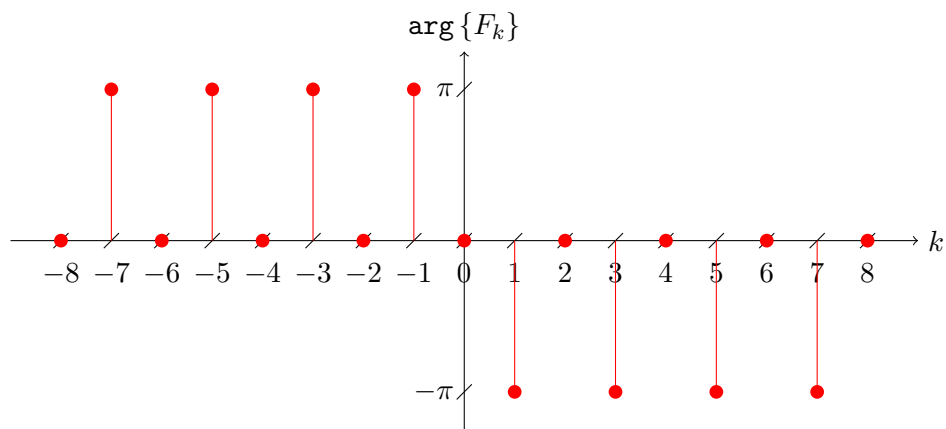
W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.



2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

- 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji
- 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera
- 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera.
Twierdzenie Parsewala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

