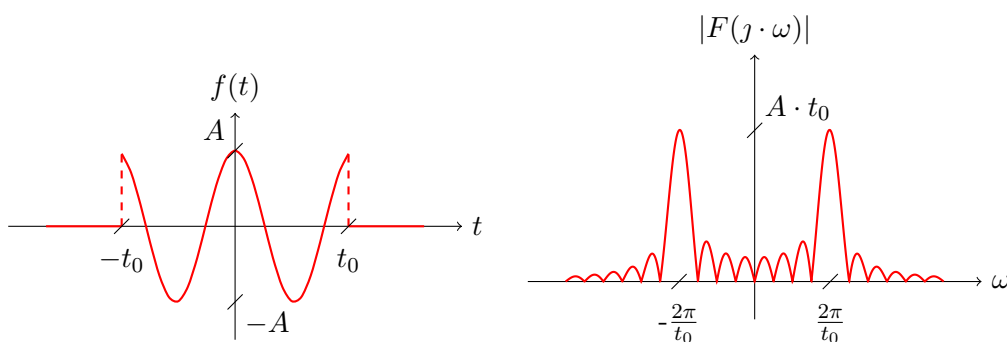


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\text{Sa}(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - \text{Sa}(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

19 czerwca 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

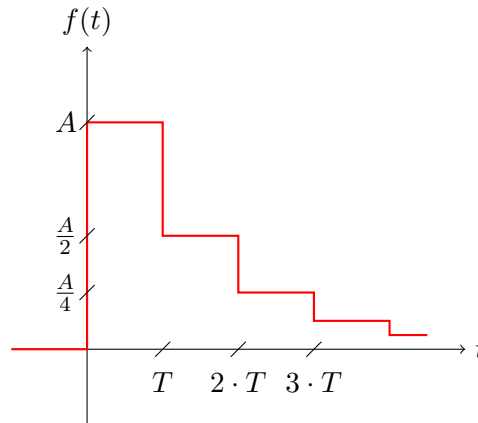
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzysuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowości transformaty fouriera

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\ f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\ f(t) &= \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega) \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$F(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(j\omega)$$

gdzie $H_n(j\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zaczniemy od skali.

Wyznaczamy transformatę funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi(\frac{t}{T})$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ h(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

a więc otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \\ &= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(\frac{j\omega}{\frac{1}{T}}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczamy transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$
Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\begin{aligned} h_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(j\omega) \\ h(t) = h_n(t - t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = H_n(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(j\omega) &= H(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(j\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{A}{2^n} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n
\end{aligned}$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n \\
&= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right\} \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(j\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}$$

© 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3



9 788393 962013