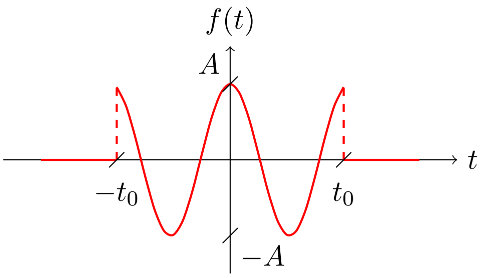
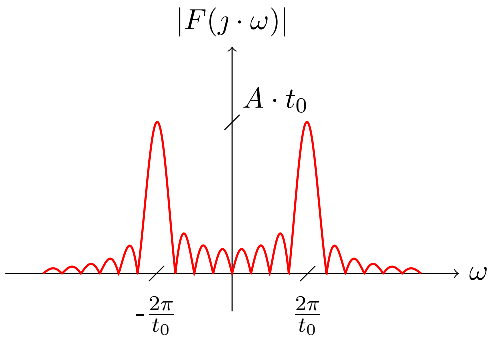
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) \\ -Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

6 października 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

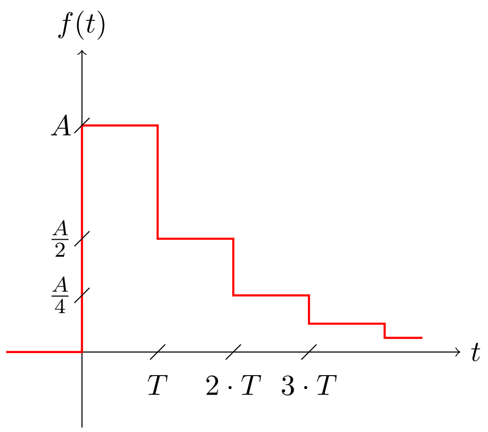
Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzesuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowość transformaty fouriera

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

możemy napisać że:

$$F(\jmath\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega)$$

gdzie $H_n(\jmath\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zacznijmy od skali.

Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) = \\ &= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{1}{T}}\right) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$h_n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(\jmath\omega)$$

$$h(t) = h_n(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = H_n(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(\jmath\omega) &= H(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot \frac{A}{2^n} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n = \\ &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n \end{aligned}$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n = \\ &= \left\{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\right\} = \\ &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}} \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}}$$

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3

9 788393 962013