Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

28 maja 2019

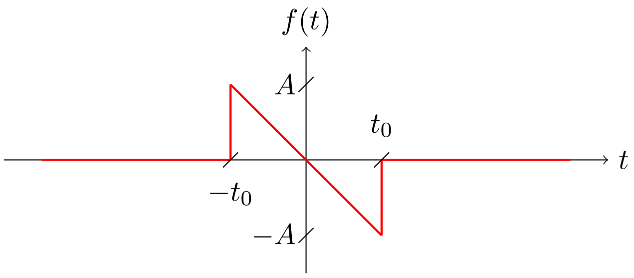
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{1}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

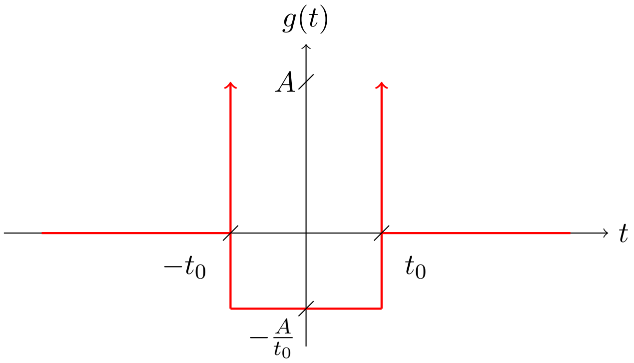
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{2}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3}$$

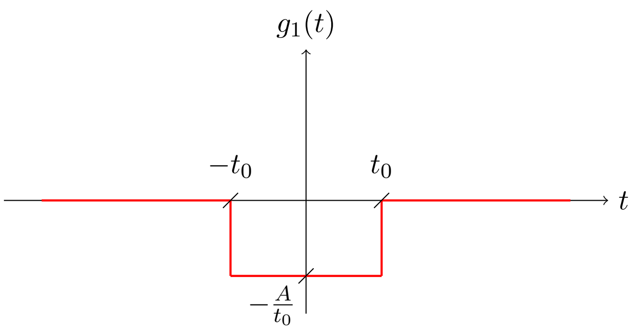


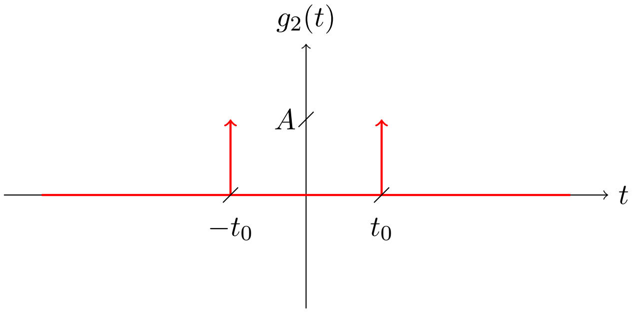
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{4}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{5}$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{6}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{7}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t+t_0) + A \cdot \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \\
&= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2} \\
&= \left\{ cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

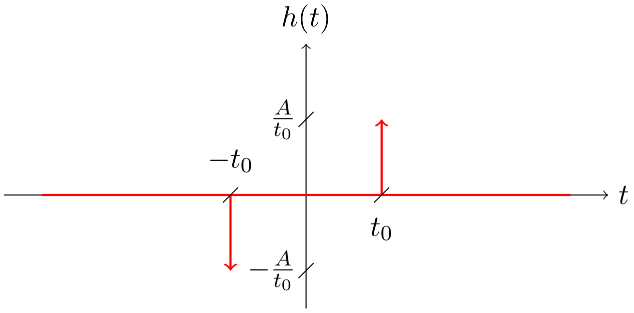
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{8}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{9}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{10}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\right) \cdot dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)\right\} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} \\
&= \left\{sin\,(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath}\right\} \\
&= -\frac{2\cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega\cdot t_0) \\
&= -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega\cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = -\jmath \cdot \frac{2\cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega\cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega)$$
$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned}
G_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(0 \cdot t_0)\right) \\
&= -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(0) \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\,(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 0 \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\,(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - 0 \\
&= \left\{Sa\,(x) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = -2 \cdot A \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)$.
Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g_2(t) \xrightarrow{F} G_2(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0) \\
&= -2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.