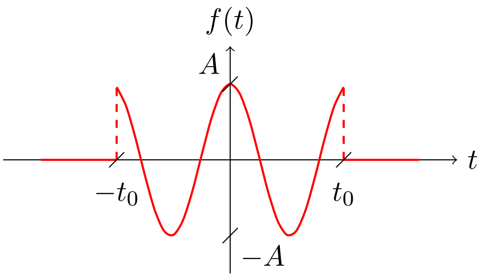
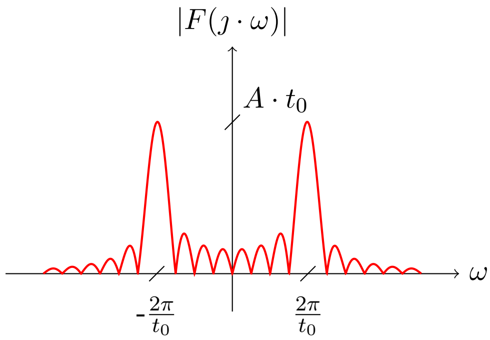
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ -Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

25 marca 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

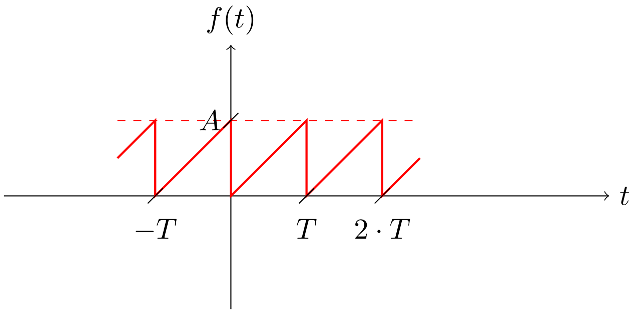
1.1.3 Moc sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.1}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt = \\ &= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T^2 - 0^2\right) = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.3}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{matrix}\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) =
\end{aligned}
$$

$$= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi}\right) =$$
$$= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} =$$
$$= -\frac{A}{k \cdot \pi}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$a_0 = \frac{A}{2}$$
$$a_k = 0$$
$$b_k = -\frac{A}{k \cdot \pi}$$

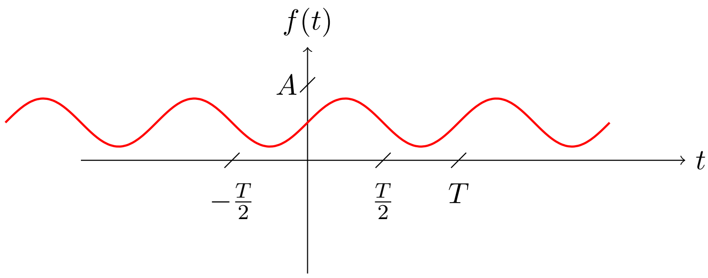
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

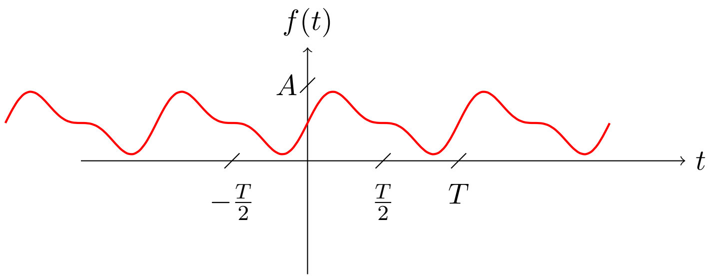
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{2.5}$$

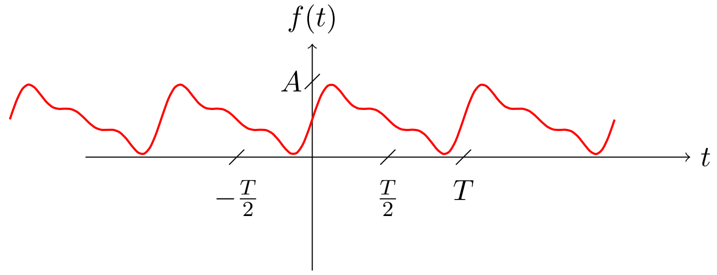
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



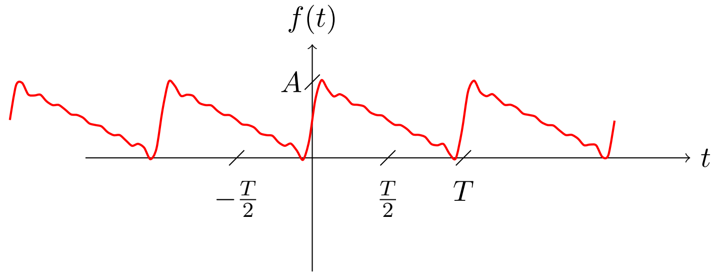
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



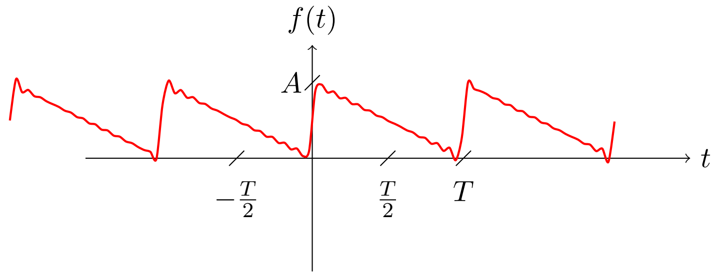
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

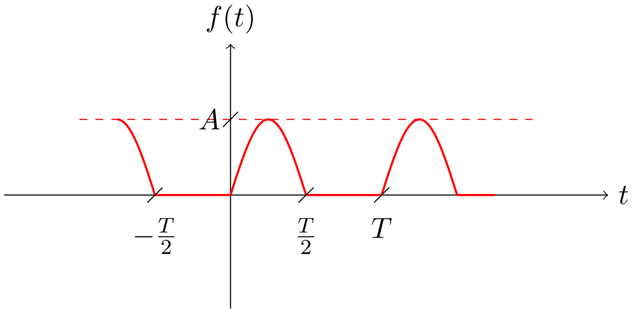


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.6}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.7}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(cos\left(\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(-1-1\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(-2\right) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.8}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} cos\left(x\right) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}}{2\jmath}+\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}}{2\jmath}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)+sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 &= \tfrac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\ dz_1 &= \tfrac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 &= \tfrac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\wedge k\neq -1 & dt &= \tfrac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\wedge k\neq 1\end{aligned}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(0\right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - cos\left(0\right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1}{1-k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + 1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{1-k^2} =$$
$$= \begin{Bmatrix} cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) = cos\left(\pi + k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \\ cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) = cos\left(\pi - k \cdot \pi\right) = -cos\left(-k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + cos\left(k \cdot \pi\right) - k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right) + cos\left(k \cdot \pi\right) + k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+cos(k \cdot \pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost a_1

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{0} - e^{0}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2\jmath}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz =$$

$$= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(2\pi\right) - cos\left(0\right)\right) =$$

$$= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(1 - 1\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.9}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_1) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z_2) \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\,(z_1)\big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\,(z_2)\big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) \right) =$$

$$- \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \Bigg) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (sin\,(\pi \cdot (1+k)) - sin\,(0)) = \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (sin\,(\pi \cdot (1-k)) - sin\,(0)) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) = \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot 0 =$$

$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost b_1

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z \right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z \right) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} sin\left(z \right)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(2\pi \right) - sin\left(0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(0 - 0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{\pi} \\
a_1 &= 0 \\
a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi \right)}{1 - k^2}
\end{aligned}
$$

$$b_1 = \frac{A}{2}$$

$$b_k = 0$$

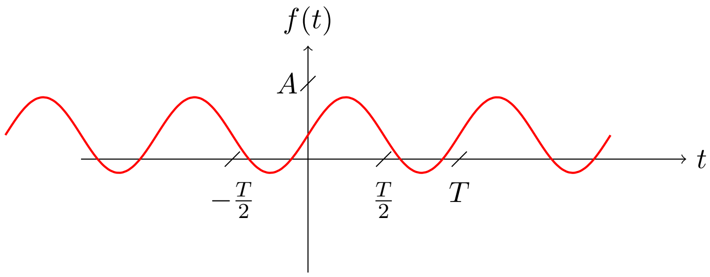
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

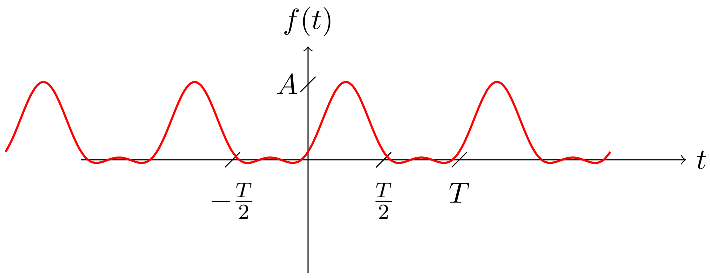
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{2.10}$$

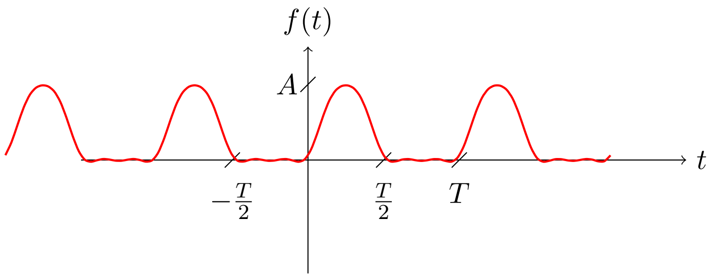
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



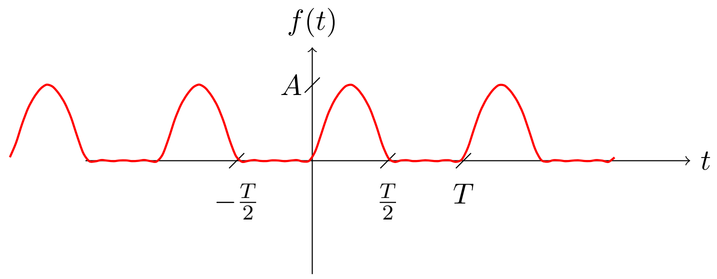
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



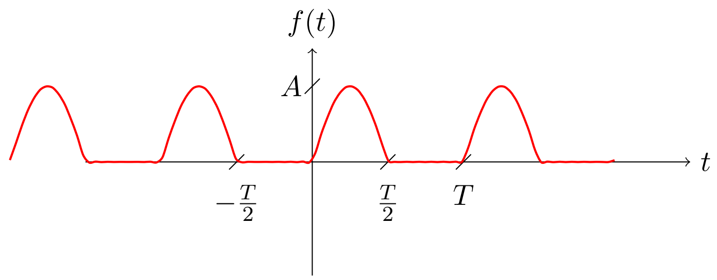
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3

9 788393 962013