Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

21 maja 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

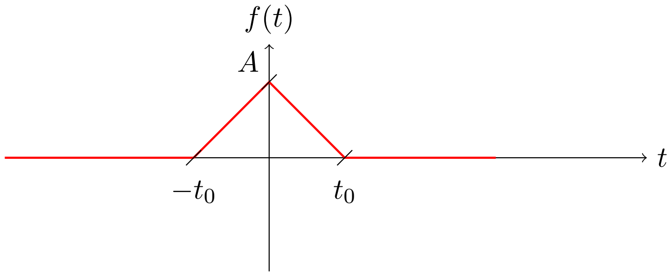
pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Wydrukowano w Polsce

Książka współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{1}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{2}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{4}$$

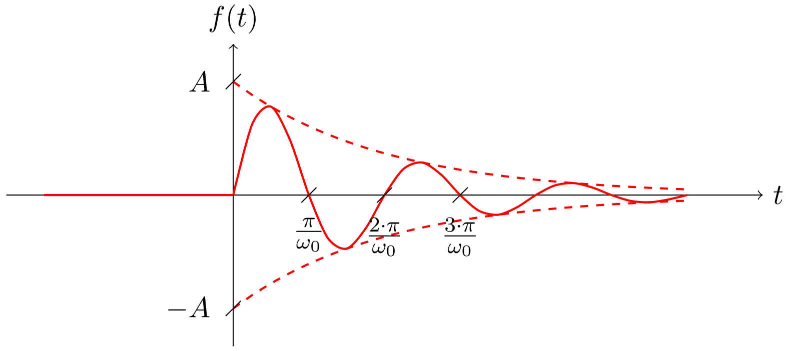
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\
&= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_0^{t_0}-\int_0^{t_0}\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\cdot dt\right)\\
&+A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_0^{t_0}\right)\\
&=\frac{A}{t_0}\cdot\left(0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-(-t_0)\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}+\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)\right)\\
&+\frac{A}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\\
&-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}+\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_0^{t_0}\right)\right)\\
&+\frac{A}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\\
&=\frac{A}{t_0}\cdot\left(0-t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right)\\
&-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(1-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)\\
&-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0-\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\right)\\
&-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-1\right)\\
&=-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\\
&+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\\
&=-\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)\\
&=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}-\frac{A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)\\
&=\left\{cos(x)=\tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}\\
&=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}-\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot cos(\omega\cdot t_0)\\
&=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot(1-cos(\omega\cdot t_0))\\
&=\left\{\begin{array}{l} sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos(2\cdot x)\\ cos(2\cdot x)=1-2\cdot sin^2(x)\end{array}\right\}\\
&=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot(1-1+2\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2}))\\
&=\frac{4\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})\\
&=\frac{A\cdot t_0}{\frac{t_0^2\cdot\omega^2}{4}}\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})\\
&=\left\{\tfrac{sin(x)}{x}=Sa(x)\right\}\\
&=A\cdot t_0\cdot Sa^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{5}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{6}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot \left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath} \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= 0 + \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ccccccc} z & = & (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t & w & = & (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t \\ dz & = & (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt & dw & = & (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt \\ dt & = & \frac{1}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot dz & dt & = & \frac{1}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot dw \end{array} \right\} \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{dz}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} - \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot \frac{dw}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot dw \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z}\big|_0^{\tau} - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{w}\big|_0^{\tau} \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^{\tau} \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^{\tau}
\end{aligned}$$

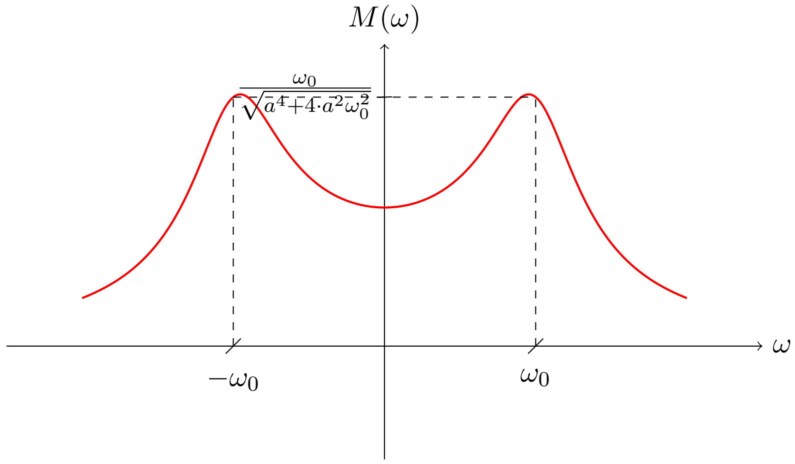
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)\\
&= \frac{-1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}+\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{-(2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega))+2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\\
&= \frac{2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0+2\cdot\jmath^2\cdot\omega-2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0-2\cdot\jmath^2\cdot\omega}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+a\cdot\jmath\cdot\omega_0+a\cdot\jmath\cdot\omega-a\cdot\jmath\cdot\omega_0-\jmath^2\cdot\omega_0^2-\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+a\cdot\jmath\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega^2)}\\
&= \frac{4\cdot\jmath^2\cdot\omega_0}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\jmath^2\cdot\omega_0^2+\jmath^2\cdot\omega^2)}\\
&= \frac{\omega_0}{a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+\omega_0^2-\omega^2}\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2)}\\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

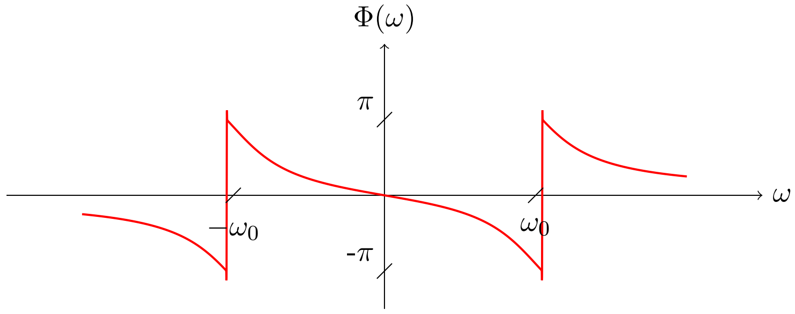
$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(\jmath\omega)|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+(\jmath\cdot\omega)^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2}\right|\\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega}\right|\\
&= \left\{\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right|=\tfrac{|z_1|}{|z_2|}\right\}\\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ |a + \jmath \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \omega\right)^2}}
\end{aligned}
$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2}\right) \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega}\right) \\
&= \left\{ arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right) \right\} \\
&= arg\left(\omega_0\right) - arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega\right) \\
&= \left\{ arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg(\tfrac{b}{a}) \right\} \\
&= arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= arctg\left(0\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= -arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}
$$


$\Phi(\omega)$
π
ω
$-\omega_0$
ω_0
-π