Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

30 maja 2019

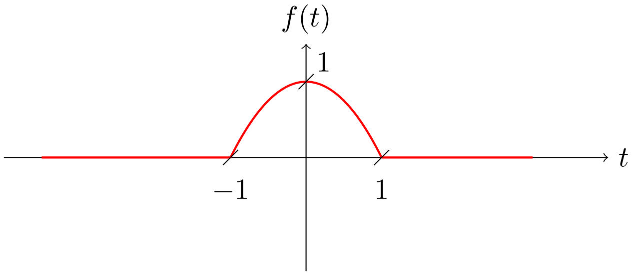
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.

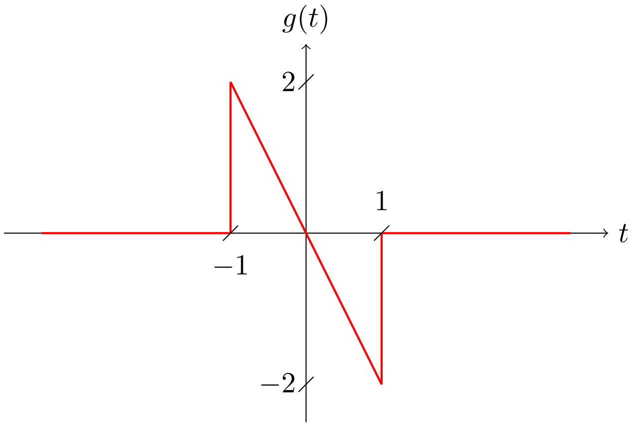


Sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{1}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{2}$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3}$$

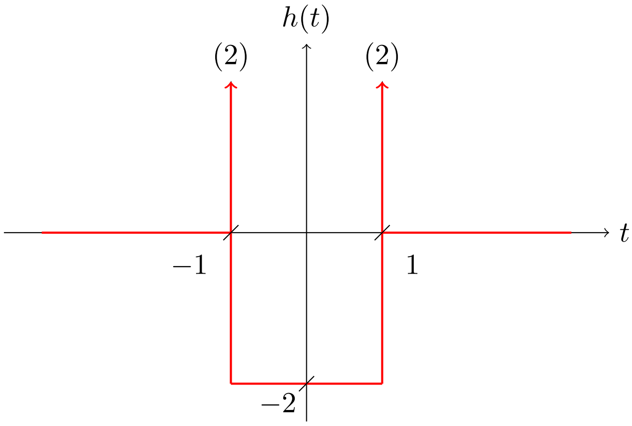
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{4}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{5}$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{6}$$

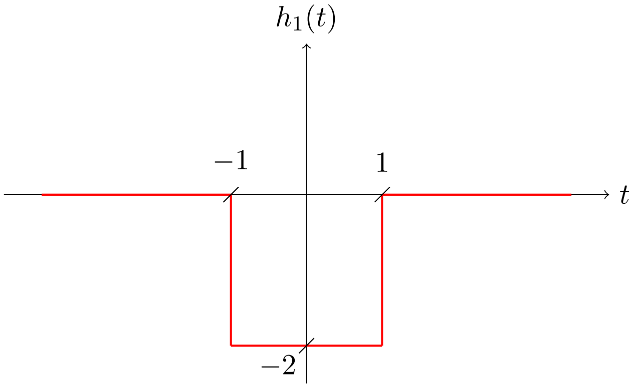


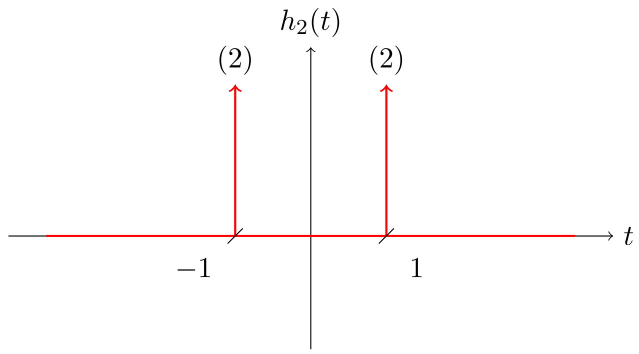
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{7}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{8}$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{9}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{10}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= 2 \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-1)} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) \cdot \frac{2}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega}}{2} \\
&= \left\{ cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} \\
&= 4 \cdot cos\,(\omega)
\end{aligned}$$

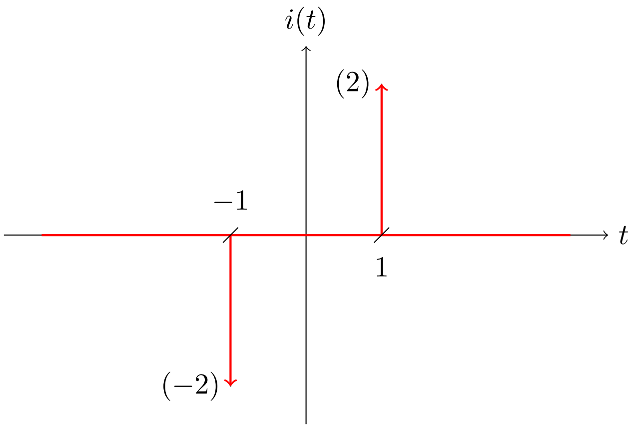
Transformata sygnału $h_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 4 \cdot cos\,(\omega)$

Funkcja $h_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$i(t) = h_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 0 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad - 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{11}$$

czyli po prostu

$$i(t) = h_1'(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \tag{12}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $i(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$I(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{13}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
I(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} -\delta(t+1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= 2 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-1)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(-e^{\jmath\cdot\omega} + e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \\
&= -2 \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} \\
&= -4 \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega} - e^{-\jmath\cdot\omega}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} \\
&= -4 \cdot \jmath \cdot sin\left(\omega\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $i(t)$ to $I(\jmath\omega) = -\jmath \cdot 4 \cdot sin\left(\omega\right)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $h_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $i(t) = h_1'(t)$

$$i(t) \xrightarrow{F} I(\jmath\omega)$$
$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} H_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot I(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0)$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $I(\jmath\omega)$ sygnału $i(t)$ otrzymujemy transformatę $H_1(\jmath\omega)$ sygnału $h_1(t)$

$$\begin{aligned}
H_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot I(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-\jmath \cdot 4 \cdot sin\,(\omega)) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-\jmath \cdot 4 \cdot sin\,(0)) \\
&= -\frac{1}{\omega} \cdot 4 \cdot sin\,(\omega) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot 4 \cdot sin\,(0) \\
&= -4 \cdot \frac{sin\,(\omega)}{\omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot 4 \cdot 0 \\
&= -4 \cdot \frac{sin\,(\omega)}{\omega} - 0 \\
&= \left\{ Sa\,(x) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} \\
&= -4 \cdot Sa\,(\omega)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $h_1(t)$ jest równa $H_1(\jmath\omega) = -4 \cdot Sa\,(\omega)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$g_1(t) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega)$$
$$g_2(t) \xrightarrow{F} G_2(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega) = G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0) \\
&= -2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$

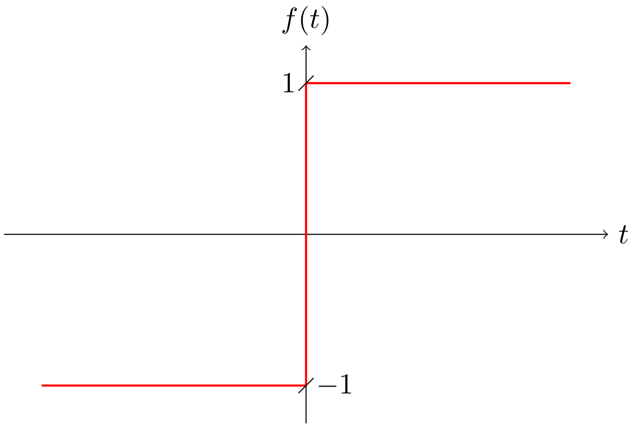
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = sgn(t)$ za pomocą twierdzeń.

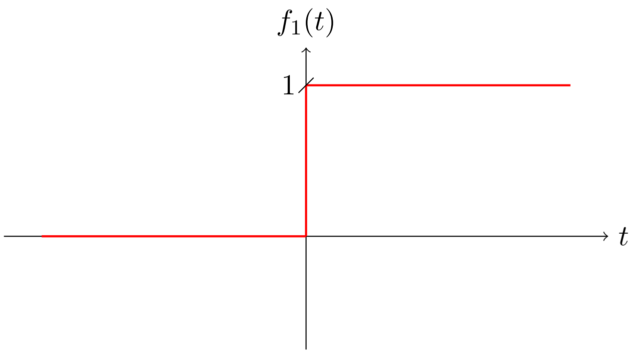


Sygnał $f(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} f(t) &= sgn(t) \\ &= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) \\ &= f_1(t) - f_2(t) \end{aligned}$$

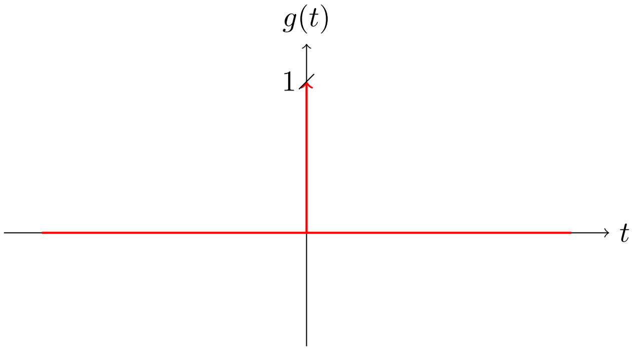
Wyraźnie widac iż funkcja jest złożeniem dwóch skoków jednostkowych

$$f_1(t) = \mathbb{1}(t) f_2(t) \qquad = \mathbb{1}(-t)$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



dla której w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(\jmath\omega) = 1$
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$

$$g(t) \xrightarrow{F} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Tak wiec mamy

$$\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A wiec transformata skoku jednostkowego jest $F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) \\
&= \mathbb{1}(-1 \cdot t)
\end{aligned}$$

$$= f_1(-1 \cdot t)$$

A wiec transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = f_1(a \cdot t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a})$$

$$\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a}) \\
&= \Big\{a = -1\Big\} \\
&= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta(\frac{\omega}{-1}) \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) \\
&= -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A więc transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(\jmath\omega) - \frac{1}{\jmath\cdot\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{F} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{F} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega)$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \Big(-\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\Big) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \\
&= \frac{2}{\jmath \cdot \omega}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath\cdot\omega}$.