Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

5 czerwca 2019

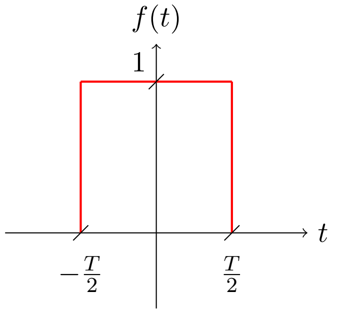
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

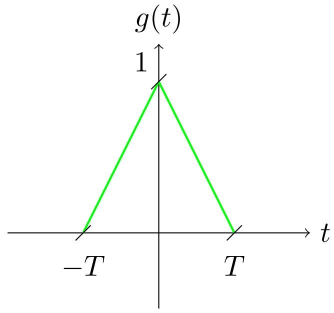
pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$





Wzór na slot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \tag{1}$$

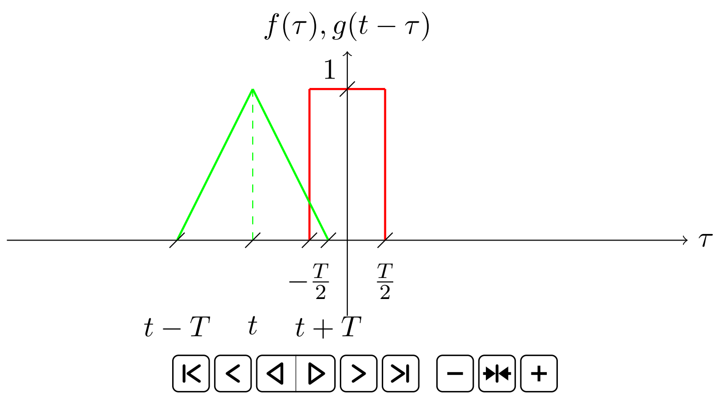
Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$
$$g(t-\tau) = \Lambda\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

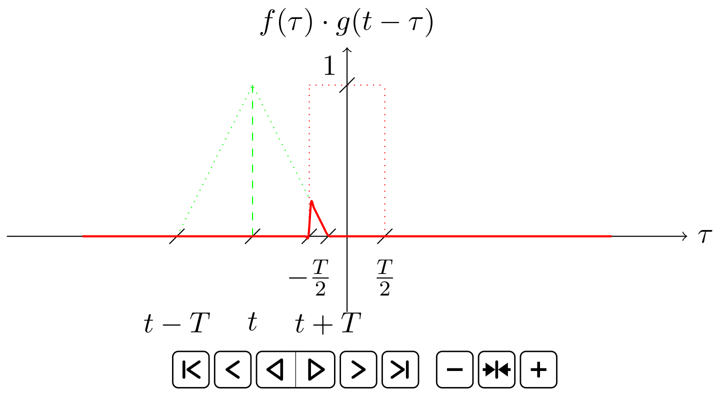
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ A & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t-T); \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t-T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t+T) \\ 0 & \tau \in (t+T; \infty); \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

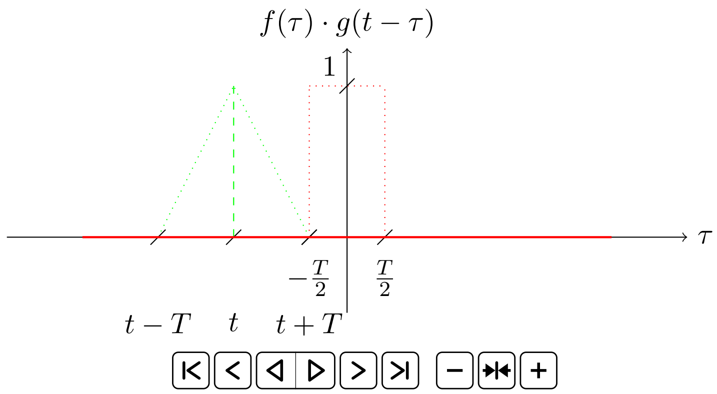


Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy



Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t-\tau)$.

Przedział 1 .



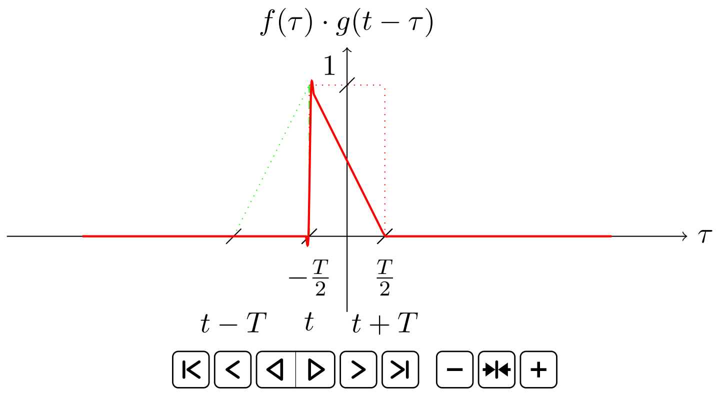
Dla wartości t spełniających warunek $t + T < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned} t + T &< -\frac{T}{2} \\ t &< -\frac{T}{2} - T \\ t &< -\frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

w wyniku mnożenia otrzymyjemy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Przedział 2 .



Dla wartości t spełniających warunki $t+T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$
\begin{array}{ccc}
t+T \geq -\dfrac{T}{2} & \wedge & t < -\dfrac{T}{2} \\
t \geq -\dfrac{T}{2} - T & \wedge & t < -\dfrac{T}{2} \\
t \geq -\dfrac{3}{2} \cdot T & \wedge & t < -\dfrac{T}{2}
\end{array}
$$

a więc $t \in \left\langle -\frac{3}{2} \cdot T, -\frac{T}{2} \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t+T\right)$.

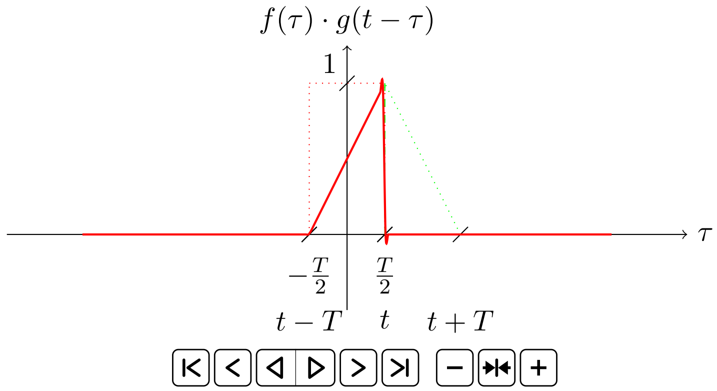
$$
f(\tau) \cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t+T\right) \\ 0 & \tau \in (t+T; \infty) \end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{1}{T} \cdot \tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{t+T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
&= -\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \tau \cdot d\tau + \frac{t+T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau \\
&= -\frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T} \cdot (\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \\
&= -\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T+\frac{T}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{t+T}{T}\cdot\left(t+\frac{3}{2}\cdot T\right)\\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{T}\cdot\left(t^2+\frac{3}{2}\cdot t\cdot T+t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)\\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{5}{2}\cdot t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2+2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+3\cdot t\cdot T+2\frac{1}{4}\cdot T^2\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{1}{2\cdot T}\cdot 3\cdot t\cdot T+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\frac{9}{4}\cdot T^2\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{3}{2}\cdot t+\frac{9}{8}\cdot T
\end{aligned}
$$

Przedział 3 .



Dla wartości t spełniających warunki $t \geq -\frac{T}{2}$ i $t < \frac{T}{2}$

$$
t \geq -\frac{T}{2} \qquad \wedge \qquad t < \frac{T}{2}
$$

a więc $t \in \left\langle -\frac{1}{2}\cdot T, \frac{1}{2}\cdot T\right)$

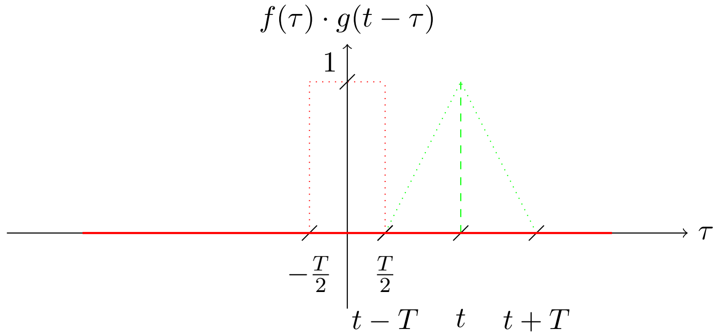
w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t \in \left(-\frac{T}{2}, t\right)$ oraz $t \in \left(t, \frac{T}{2}\right)$.

$$
f(\tau)\cdot g(t-\tau) = \begin{cases}
0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right)\\
\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t\right)\\
-\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(t; \frac{T}{2}\right)\\
0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right)
\end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0\cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \left(\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0\cdot d\tau \\
&= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \frac{1}{T}\cdot\tau\cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \frac{t-T}{T}\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T}\cdot\tau\right)\cdot d\tau - \int_{t}^{\frac{T}{2}} \frac{-t-T}{T}\cdot d\tau + 0 \\
&= \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t} \tau\cdot d\tau - \frac{t-T}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t} d\tau - \frac{1}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}} \tau\cdot d\tau + \frac{t+T}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{t-T}{T}\cdot\tau|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{t}^{\frac{T}{2}} + \frac{t+T}{T}\cdot\tau|_{t}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - t\right) \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - t\right) \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t-T)\cdot\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t+T)\cdot\left(\frac{T}{2} - t\right) \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t\cdot T - \frac{1}{2}\cdot T^2\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t^2\right. \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{4}\cdot T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot T^2 + t^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t\cdot T - 2\cdot\right. \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2 + \frac{1}{4}\cdot T^2 - 2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2 - \frac{1}{4}\cdot T^2 + t^2 + t\cdot T - 2\cdot t^2 + T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 + 2\cdot T^2\right) \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(-t^2 + T^2\right) \\
&= -\frac{1}{T}\cdot t^2 + T
\end{aligned}
$$

Przedział 4 .



Dla wartości t spełniających warunki $t-T \geq -\frac{T}{2}$ i $t-T < \frac{T}{2}$

$$
\begin{aligned}
t - T &\geq -\frac{T}{2} & \wedge && t - T &< \frac{T}{2} \\
t &\geq -\frac{T}{2} + T & \wedge && t &< \frac{T}{2} + T \\
t &\geq \frac{1}{2} \cdot T & \wedge && t &< \frac{3}{2} \cdot T
\end{aligned}
$$

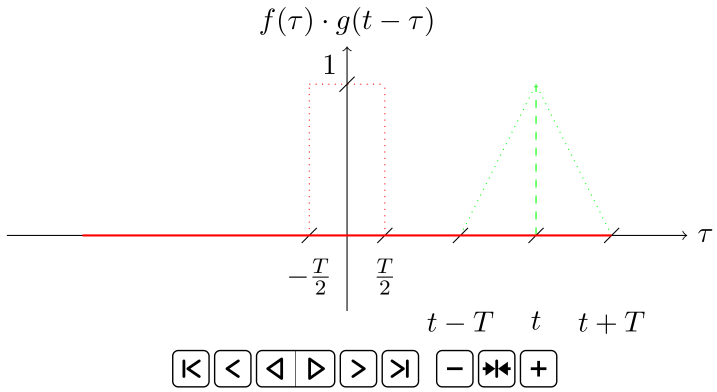
a więc $t \in \left\langle \frac{1}{2} \cdot T, \frac{3}{2} \cdot T \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t - T, \frac{T}{2}\right)$.

$$
f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(t - T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t-T} 0 \cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} frac1T \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t - T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau - \frac{t - T}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t - T}{T} \cdot \tau|_{t-T}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} \right)^2 - (t - T)^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - (t - T) \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot T + T^2 \right) \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t + T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - T^2 \right) - \frac{1}{T} \cdot (t - T) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot T - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t \cdot T - t^2 - \frac{3}{2} \cdot T^2 + t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot t \cdot T - 2 \cdot t^2 - \frac{6}{2} \cdot T^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - \frac{6}{2} \cdot t \cdot T + 2 \cdot t^2 + \frac{6}{2} \cdot T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot T^2 - 3 \cdot t \cdot T + t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 \\
&= \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2
\end{aligned}
$$

Przedział 5 .



Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} t - T &\geq \frac{T}{2} \\ t &\geq \frac{T}{2} + T \\ t &\geq \frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

a więc $t \in \left\langle \frac{3}{2} \cdot T, \infty \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

$$f(\tau) \cdot g(t-\tau) = 0$$

a więc wartość splotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik splotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases}$$