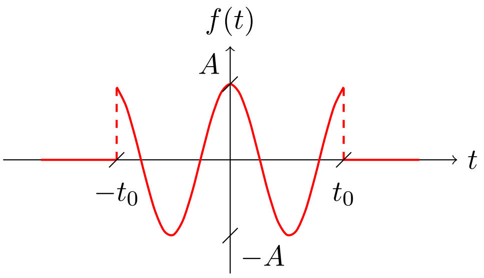
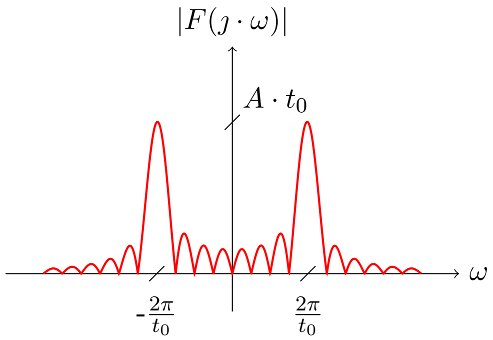
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ & Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) \\ & - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)] \end{aligned}$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

25 marca 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone
ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

Zadanie 1. Rozwiń poniższe sygnały

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t)$$
$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t)$$

Euler identities:

$$sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}$$
$$cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}$$

Dwumian Newtona:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{1.1}$$

gdzie współczynnik $\binom{n}{k}$ określone są jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.2}$$

The binomial coefficient $\binom{n}{k}$ appears as the kth entry in the nth row of Pascal's triangle (counting starts at 0). Each entry is the sum of the two above it. Below, example for $n = 6$ is presented:

$$\left\{ \begin{array}{lccccccccccccc}
n{=}0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n{=}1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n{=}2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n{=}3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n{=}4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n{=}5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n{=}6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array} \right\} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= sin^5(t) - sin^3(t) = \\
&= \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^5 - \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^3 = \\
&= \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}\right)^5}{(2 \cdot \jmath)^5} - \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}\right)^3}{(2 \cdot \jmath)^3} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^5 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^0 + 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^1 + 10 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^2}{(2 \cdot \jmath)^5} +$$

$$+ \frac{10 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^3 + 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^4 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^5}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^0 + 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^1 + 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^2 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t})^3}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 5} \cdot 1 + 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 1}) + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}}{(2 \cdot \jmath)^5} +$$

$$+ \frac{10 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}) + 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 5})}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot 1 + 3 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 1}) + 3 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-\jmath \cdot t \cdot 3})}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t} - 10 \cdot e^{-\jmath \cdot t} + 5 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5}}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot e^{\jmath \cdot t} + 3 \cdot e^{-\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} + 5 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} + 10 \cdot e^{\jmath \cdot t} - 10 \cdot e^{-\jmath \cdot t}}{(2 \cdot \jmath)^5} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot e^{\jmath \cdot t} + 3 \cdot e^{-\jmath \cdot t}}{(2 \cdot \jmath)^3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 5} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} - 5 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}) + 10 \cdot (e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t})}{(2 \cdot \jmath)^4 \cdot (2 \cdot \jmath)} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 3} - e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} - 3 \cdot (e^{\jmath \cdot t} - \cdot e^{-\jmath \cdot t})}{(2 \cdot \jmath)^2 \cdot (2 \cdot \jmath)} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{(2 \cdot \jmath)^4} -$$

$$- \left(\frac{sin(3 \cdot t) - 3 \cdot sin(t)}{(2 \cdot \jmath)^2} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{16} + \left(\frac{sin(3 \cdot t) - 3 \cdot sin(t)}{4} \right) =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - 5 \cdot sin(3 \cdot t) + 10 \cdot sin(t)}{16} + \frac{4 \cdot sin(3 \cdot t) - 12 \cdot sin(t)}{16} =$$

$$= \frac{sin(5 \cdot t) - sin(3 \cdot t) - 2 \cdot sin(t)}{16}$$

To sum up:

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t) = \frac{sin(5 \cdot t) - sin(3 \cdot t) - 2 \cdot sin(t)}{16}$$

$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) =$$

$$= \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}}{2} \right)^6 - \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}}{2} \right)^4 =$$

$$= \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}\right)^6}{2^6} - \frac{\left(e^{\jmath \cdot t} + e^{-\jmath \cdot t}\right)^4}{2^4} =$$

$$= \frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^6 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^0 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^5 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^1 + 15 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^2 + 20 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^3}{2^6} +$$

$$+ \frac{15 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^4 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^5 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^6}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^4 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^0 + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^3 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^1 + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^2 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^2 + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^1 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^3 + 1 \cdot (e^{\jmath \cdot t})^0 \cdot (e^{-\jmath \cdot t})^4}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 6} \cdot 1 + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 5} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 1} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 20 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3}}{2^6} +$$

$$+ \frac{15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 5} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} \cdot 1 + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 3} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 1} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 1} \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 3} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 20 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 0} + 15 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 6 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 0} + 4 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + 6 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 15 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 15 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 20}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + 4 \cdot e^{-\jmath \cdot t \cdot 2} + 6}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 6} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 6} + 6 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4}) + 15 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}) + 20}{2^5 \cdot 2} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath \cdot t \cdot 4} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 4} + 4 \cdot (e^{\jmath \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot t \cdot 2}) + 6}{2^3 \cdot 2}\right) =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 6 \cdot cos(4 \cdot t) + 15 \cdot cos(2 \cdot t) + 10}{2^5} -$$

$$- \left(\frac{cos(4 \cdot t) + 4 \cdot cos(2 \cdot t) + 3}{2^3}\right) =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 6 \cdot cos(4 \cdot t) + 15 \cdot cos(2 \cdot t) + 10 - 4 \cdot cos(4 \cdot t) - 16 \cdot cos(2 \cdot t) - 12}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{32}$$

To sum up:

$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) = \frac{cos(6 \cdot t) + 2 \cdot cos(4 \cdot t) - cos(2 \cdot t) - 2}{32}$$

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc sygnału

Zadanie 1. Oblicz moc sygnału $f(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Pierwszym krokiem jest ustalenie czy sygnał $f(t)$ jest sygnałem okresowym czy nie. Nasz sygnał jest sumą dwóch funkcji okresowych $f_1(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t)$ i $f_2(t) = B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Suma funkcji okresowych jest funkcją okresową, wtedy i tylko wtedy gdy stosunek okresów funkcji składowych jest liczbą wymierną

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathcal{W}$$

W naszym przypadku

$$T_1 = \frac{2\pi}{k}$$
$$T_2 = \frac{2\pi}{n}$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k}$$

W ogólności liczby n i k mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi $n, k \in \mathcal{R}$. Załóżmy jednak iż ułamek $\frac{n}{k}$ jest pewną liczba wymierna $\frac{a}{b}$ gdzie $a, b \in \mathcal{Z}$ są liczbami całkowitymi.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} = \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathcal{Z}$$

W takim przypadku okres naszego sygnału jest Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością okresów funkcji składowych. Stwórzmy więc tabelę z kolejnymi wielokrotnościami okresów funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Zgodnie z przyjętym przez nas założeniem

Wielokrotność okresu	1	2	3	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
T_1	$\frac{2\pi}{k}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$\cdots$	$a \cdot \frac{2\pi}{k}$	$\cdots$	$\boxed{b \cdot \frac{2\pi}{k}}$	$\cdots$
T_2	$\frac{2\pi}{n}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$\cdots$	$\boxed{a \cdot \frac{2\pi}{n}}$	$\cdots$	$b \cdot \frac{2\pi}{n}$	$\cdots$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot T_1 = a \cdot T_2$$

a więc a-ta wielokrotność okresu pierwszej funkcji jest równa b-tej wielokrotności okresu drugiej funkcji, a wiec jest ona poszukiwaną przez nas Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością. Związku z tym okresem naszego sygnału jest $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$. Aby obliczyć moc należy wybrać przedział o długości jednego okresu. Przedział może być dowolnie położony, przyjmijmy więc przedział $t \in (0; T)$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.4}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)|^2 \cdot dt = \end{aligned}$$

Ponieważ mamy doczynienia z sygnałem o wartościach rzeczywistych możemy pominąć obliczenie modułu.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t))^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \Big((A \cdot sin\,(k \cdot t))^2 + 2 \cdot A \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot B \cdot cos\,(n \cdot t) + (B \cdot cos\,(n \cdot t))^2\Big) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \Big(A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) + B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t)\Big) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) = \\ &= \left\{\ sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \quad cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\ \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \Bigg(A^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^2 \cdot dt + \\ &+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2} \cdot dt + \\ &+ B^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2}\right)^2 \cdot dt\Bigg) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \Bigg(A^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2 - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2}{(2 \cdot \jmath)^2} \cdot dt + \\ &+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2 \cdot \jmath \cdot 2} \cdot dt + \\ &+ B^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2 + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2}{2^2} \cdot dt\Bigg) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \Bigg(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot k \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \\ &+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t}}{4 \cdot \jmath} \cdot dt + \\ &+ B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt\Bigg) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t} - 2\cdot e^0 + e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}}{-4} \cdot dt + \right.\\
&+ 2\cdot A\cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t} + e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t} - e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t} - e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t}}{4\cdot\jmath} \cdot dt +\\
&\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t} + 2\cdot e^0 + e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}}{4} \cdot dt \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \int_0^T \left(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t} - 2\cdot 1 + e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t} \right) \cdot dt + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \int_0^T \left(e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t} + e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t} - e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t} - e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t} \right) \cdot dt +\\
&\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \int_0^T \left(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t} + 2\cdot 1 + e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t} \right) \cdot dt \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t} \cdot dt - \int_0^T 2\cdot dt + \int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t} \cdot dt \right) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \left(\int_0^T e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t} \cdot dt \right) +\\
&\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t} \cdot dt + \int_0^T 2\cdot dt + \int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t} \cdot dt \right) \right) =
\end{aligned}
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{llll}
z_1 = 2\cdot\jmath\cdot k\cdot t & z_2 = -2\cdot\jmath\cdot k\cdot t & z_3 = 2\cdot\jmath\cdot n\cdot t & z_4 = -2\cdot\jmath\cdot n\cdot t\\
dz_1 = 2\cdot\jmath\cdot k\cdot dt & dz_2 = -2\cdot\jmath\cdot k\cdot dt & dz_3 = 2\cdot\jmath\cdot n\cdot dt & dz_4 = -2\cdot\jmath\cdot n\cdot dt\\
dt = \frac{dz_1}{2\cdot\jmath\cdot k} & dt = \frac{dz_2}{-2\cdot\jmath\cdot k} & dt = \frac{dz_3}{2\cdot\jmath\cdot n} & dt = \frac{dz_4}{-2\cdot\jmath\cdot n}\\
z_5 = 2\cdot\jmath\cdot(k+n)\cdot t & z_6 = -2\cdot\jmath\cdot(k+n)\cdot t & z_7 = 2\cdot\jmath\cdot(k-n)\cdot t & z_8 = -2\cdot\jmath\cdot(k-n)\cdot t\\
dz_5 = \jmath\cdot(k+n)\cdot dt & dz_6 = -\jmath\cdot(k+n)\cdot dt & dz_7 = \jmath\cdot(k-n)\cdot dt & dz_8 = -\jmath\cdot(k-n)\cdot dt\\
dt = \frac{dz_5}{\jmath\cdot(k+n)} & dt = \frac{dz_6}{-\jmath\cdot(k+n)} & dt = \frac{dz_7}{\jmath\cdot(k-n)} & dt = \frac{dz_8}{-\jmath\cdot(k-n)}
\end{array} \right\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{2\cdot\jmath\cdot k} - 2\cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-2\cdot\jmath\cdot k} \right) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \left(\int_0^T e^{z_5} \cdot \frac{dz_5}{\jmath\cdot(k+n)} + \int_0^T e^{z_7} \cdot \frac{dz_7}{\jmath\cdot(k-n)} + \right.\\
&\left. - \int_0^T e^{z_8} \cdot \frac{dz_8}{-\jmath\cdot(k-n)} - \int_0^T e^{z_6} \cdot \frac{dz_6}{-\jmath\cdot(k+n)} \right) +\\
&\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{2\cdot\jmath\cdot n} + 2\cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-2\cdot\jmath\cdot n} \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 - 2\cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 \right) + \right.\\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_5} \cdot dz_5 + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_7} \cdot dz_7 + \right.\\
&\left. - \frac{1}{-\jmath\cdot(k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_8} \cdot dz_8 - \frac{1}{-\jmath\cdot(k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_6} \cdot dz_6 \right) +\\
&\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 + 2\cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 \right) \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{z_1}\Big|_0^T - 2 \cdot t\Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{z_2}\Big|_0^T \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{z_5}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{z_7}\Big|_0^T + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{z_8}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{z_6}\Big|_0^T \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{z_3}\Big|_0^T + 2 \cdot t\Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{z_4}\Big|_0^T \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}\Big|_0^T - 2 \cdot t\Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}\Big|_0^T \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot t}\Big|_0^T + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot t}\Big|_0^T \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}\Big|_0^T + 2 \cdot t\Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}\Big|_0^T \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot T} - e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot 0} \right) - 2 \cdot (T-0) - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot T} - e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot 0} \right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot T} - e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot 0} \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot T} - e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot 0} \right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot T} - e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot 0} \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot T} - e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot 0} \right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot T} - e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot 0} \right) + 2 \cdot (T-0) - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot T} - e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot 0} \right) \right) \right) =\\
&= \left\{ \begin{array}{l} T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2 \\ T = b \cdot \frac{2\pi}{k} = a \cdot \frac{2\pi}{n} \end{array} \right\} =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} - e^0 \right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} - e^0 \right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot T} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot T} - e^0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot T} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot T} - e^0 \right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot T} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot T} - e^0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot T} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot T} - e^0 \right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - e^0 \right) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - e^0 \right) \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot b \cdot 2\pi} - 1 \right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot b \cdot 2\pi} - 1 \right) \right) + \right.\\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1 \right) + \right.\\
&+ \left. \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1 \right) \right) +\\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot a \cdot 2\pi} - 1 \right) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot a \cdot 2\pi} - 1 \right) \right) \right) =\\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{2 \cdot \jmath \cdot b \cdot 2\pi} - 1 \right) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \left(e^{-2 \cdot \jmath \cdot b \cdot 2\pi} - 1 \right) \right) + \right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot \jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)+\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)\right)+$$

$$\left.+\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\left(e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)+2\cdot T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\left(e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi}-1\right)\right)\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi}=1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi}=1\\ \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi}=1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi}=1\\ \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi}=1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi}=1\\ \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi}=1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi}=1\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot(1-1)-2\cdot T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot(1-1)\right)+\right.$$

$$+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot \jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot(1\cdot 1-1)+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot(1\cdot 1-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot(1\cdot 1-1)+\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot(1\cdot 1-1)\right)+$$

$$\left.+\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot(1-1)+2\cdot T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot(1-1)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot 0-2\cdot T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot 0\right)+\right.$$

$$+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot \jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot 0+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot 0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot 0+\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot 0\right)+$$

$$\left.+\frac{B^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot 0+2\cdot T-\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot(0-2\cdot T-0)+\right.$$

$$+\frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot \jmath}\cdot(0+0+0+0)+$$

$$\left.+\frac{B^2}{4}\cdot(0+2\cdot T-0)\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{-4}\cdot(-2\cdot T)+\frac{B^2}{4}\cdot 2\cdot T\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A^2}{2}\cdot T+\frac{B^2}{2}\cdot T\right)=$$

$$=\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$$

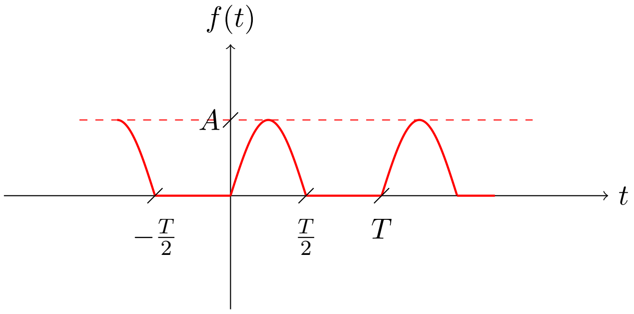
Ostatecznie moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} z & = \frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(cos\left(\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(-1-1\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot\left(-2\right) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.3}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \begin{Bmatrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2\jmath} + \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2\jmath} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right) + sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right) \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) \right. =$$

$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(0\right) \right) \right. =$$

$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - cos\left(0\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) \right) \right. =$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1}{1-k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-k+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}+\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)+k-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)= \\
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-k+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)+1-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)+k-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)= \\
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2-cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)+k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)-cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)-k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{1-k^2}= \\
&= \left\{\begin{matrix} cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)=cos\left(\pi+k\cdot\pi\right)=-cos\left(k\cdot\pi\right) \\ cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)=cos\left(\pi-k\cdot\pi\right)=-cos\left(-k\cdot\pi\right)=-cos\left(k\cdot\pi\right)\end{matrix}\right\}= \\
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2+cos\left(k\cdot\pi\right)-k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)+cos\left(k\cdot\pi\right)+k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}= \\
&= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2+2\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}= \\
&= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{1+cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1+cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k\neq 1$

a_k dla $k=1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost a_1

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt= \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)= \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right)= \\
&= \left\{\begin{matrix} cos\left(x\right) & =\frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & =\frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{matrix}\right\}= \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt+0\right)= \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right)= \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{0}-e^{0}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}}{2\jmath}\right)\cdot dt= \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2\right)\cdot dt=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(2\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(1 - 1\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right) = \\
&= \left\{sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath}\right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2}\right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)}\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot dz_2\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right)\right)\right) =$$

$$- \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right)\right)\Bigg) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \Bigg(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1+k)\right) - sin\left(0\right)\right) =$$

$$- \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1-k)\right) - sin\left(0\right)\right)\Bigg) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \Bigg(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) =$$

$$- \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0)\Bigg) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0\right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot 0 =$$

$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost b_1

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{0}-e^{0}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot\jmath\cdot\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}}{2}-\frac{1+1}{2}\right)\cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2\right)-1\right)\cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = \frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz - \left(\frac{T}{2}-0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin\left(z\right)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2}\right) = \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\, sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(2\pi\right) - sin\left(0\right) \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(0 - 0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{\pi} \\
a_1 &= 0 \\
a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1 - k^2} \\
b_1 &= \frac{A}{2} \\
b_k &= 0
\end{aligned}
$$

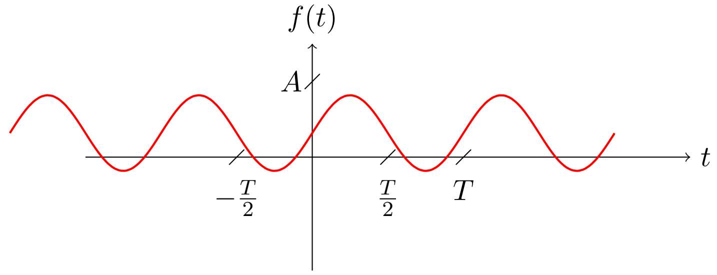
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

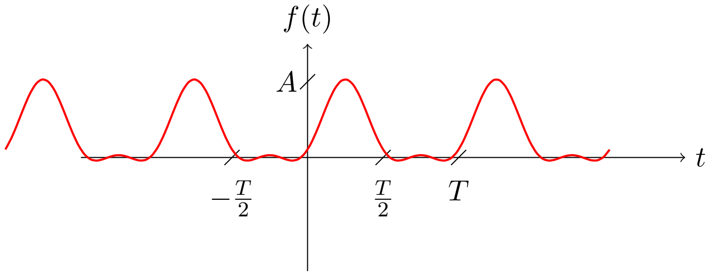
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \tag{2.5}
$$

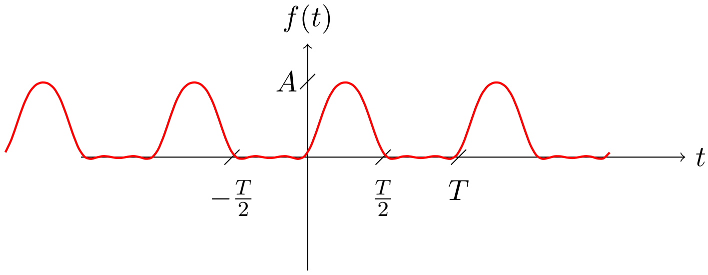
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



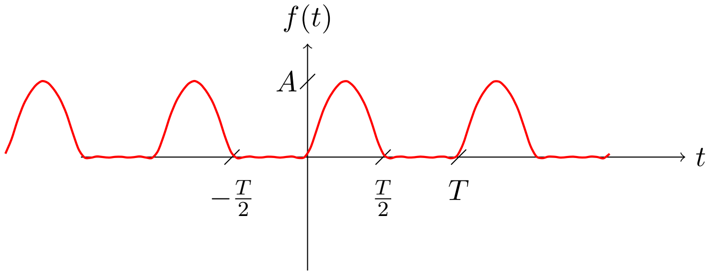
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



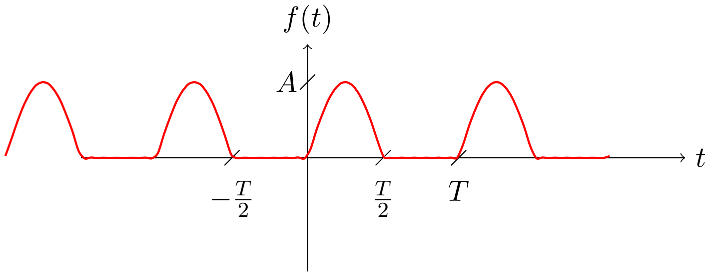
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3