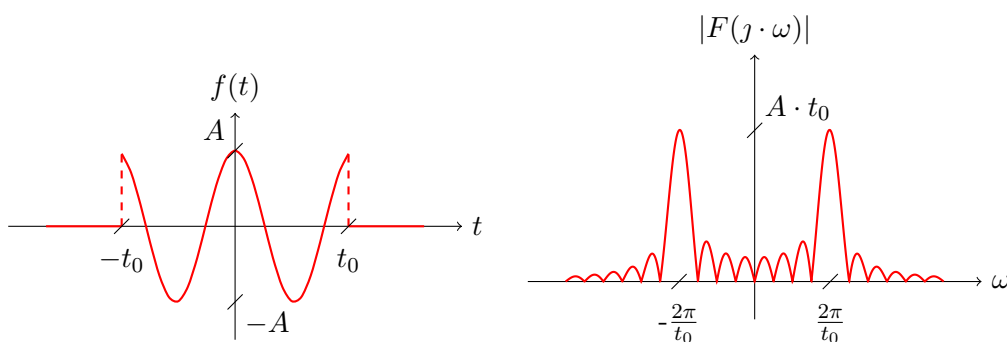


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

6 maja 2020

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

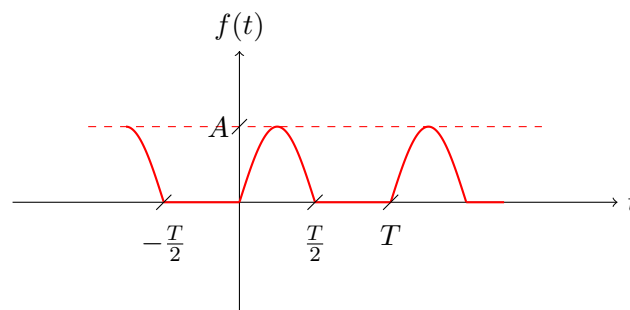
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.3)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j k \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j k \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{j \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-j \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j \pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j \pi \cdot (1-k)} + e^{-j \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j \pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \pi} \cdot e^{-j \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j \pi} \cdot e^{-j \pi \cdot k} + e^{-j \pi} \cdot e^{-j \pi \cdot k} - k \cdot e^{-j \pi} \cdot e^{-j \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-j \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1 :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4j} = \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $-j \cdot \frac{A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1} :

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= -\frac{A}{4j} = \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $j \cdot \frac{A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{\pi} \\ F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\ F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \\ F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned}$$

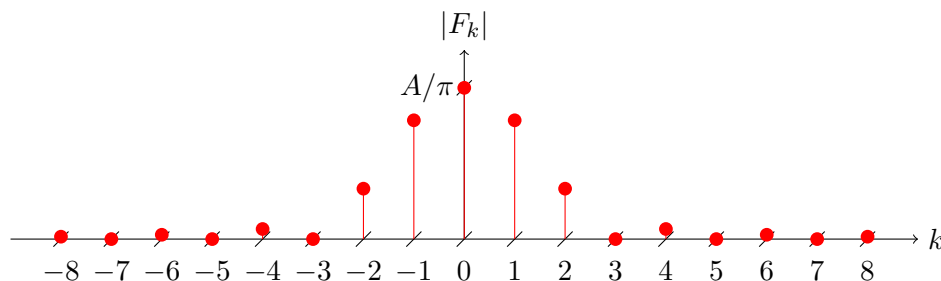
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\ f(t) &= \frac{A}{\pi} + j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.4) \end{aligned}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

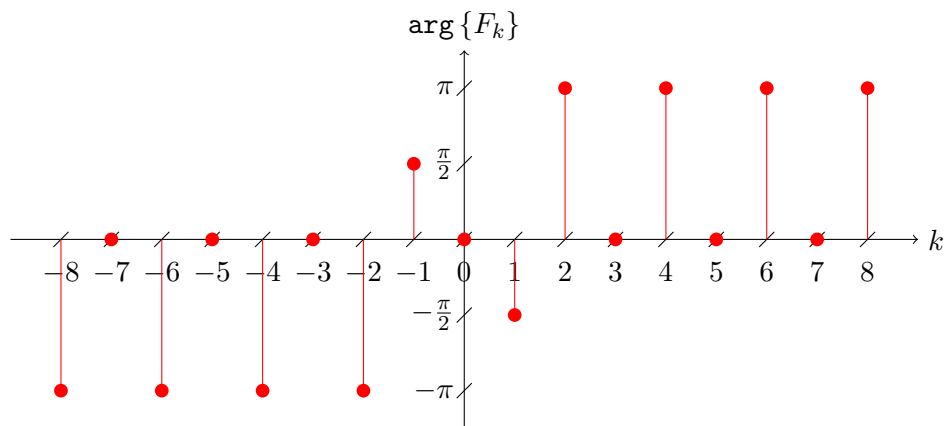
F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$-\frac{A}{3\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$\text{Arg}\{F_k\}$	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	π	0	π	0	π

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



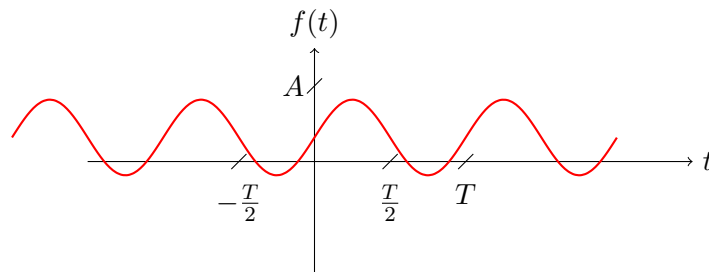
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

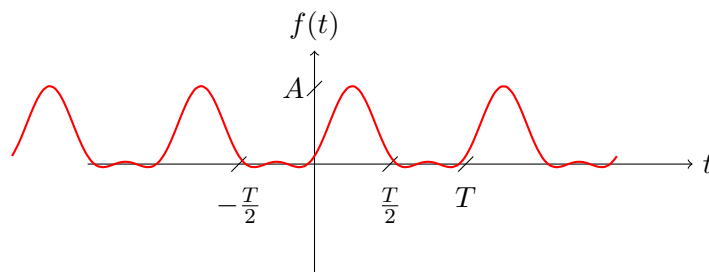


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

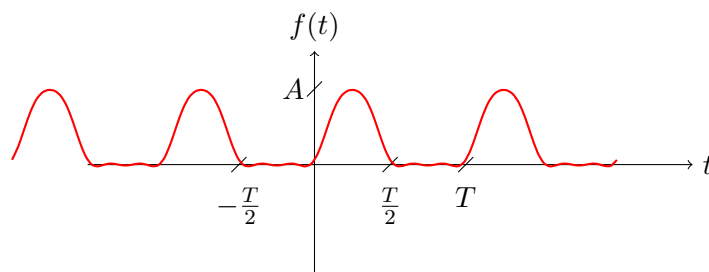
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



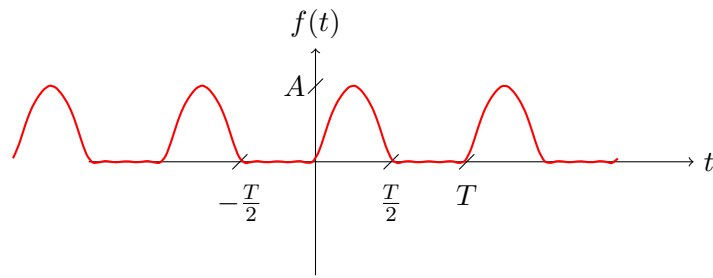
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



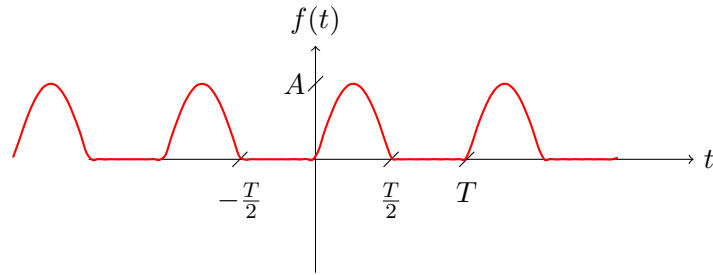
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



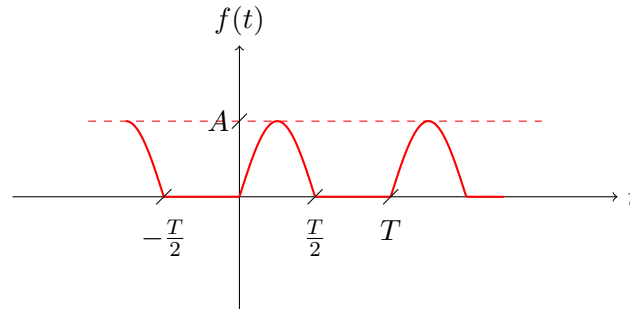
W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Wyznacz stosunek mocy parzystych harmonicznych do mocy całkowitej dla sygnału przedstawionego na rysunku poniżej. Wykorzystaj współczynniki zespolonego szeregu Fouriera obliczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

Celem jest obliczenie stosunku mocy parzystych harmonicznych P_{par} do mocy całkowitej P .

$$\frac{P_{par}}{P}$$

Moc sygnału możemy wyznaczyć z definicji:

$$P = \frac{1}{T} \int_T (f(t))^2 \cdot dt$$

Podstawiając wzór naszej funkcji otrzymujemy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T (0)^2 \cdot dt = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^2 \cdot dt + 0 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{\left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2}{2^2 \cdot j^2} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{\left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2 - 2 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2}{-4} \cdot dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{-4} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} - 2 \cdot e^0 + e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t}}{-4} \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} - 2 \cdot 1 + e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \begin{cases} llz_1 &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t & z_2 &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz_1 &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt & dz_2 &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} & dt &= \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{cases} = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - 2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - 2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - 2 \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j2\pi} - e^0 \right) - 2 \cdot \left(\frac{T}{2} \right) + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - T + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - T + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} (0 - T + 0) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} (-T) = \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi więc: $P = \frac{A^2}{4}$

Moc sygnału możemy wyznaczyć na podstawie współczynników zespolonego szeregu Fouriera F_k za pomocą twierdzenia Parsewala

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

Dla sygnałów rzeczywistych widmo amplitudowe sygnału jest parzyste a więc mamy

$$\begin{aligned}
|F_{-k}|^2 = |F_k|^2 &\Rightarrow P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\
&= |F_0|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2
\end{aligned}$$

A więc moc parzystych harmoniczných można wyznaczyć odejmując od mocy całkowitej moc nieparzystych harmoniczných i moc składowej zerowej

$$P_{par} = P - |F_0|^2 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnału przedstawionego powyżej wyznaczone w ramach zadania 1 wynoszą

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

A więc moc parzystych harmoniczných wynosi

$$\begin{aligned}
P_{par} &= P - |F_0|^2 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2 = \\
P_{par} &= P - |F_0|^2 - 2 \cdot |F_1|^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \left| \frac{A}{\pi} \right|^2 - 2 \cdot \left| -j \cdot \frac{A}{4} \right|^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2 \cdot k+1} + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2 \cdot k} \cdot (-1)^1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{((-1)^2)^k \cdot (-1)^1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1)^k \cdot (-1) + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1 \cdot (-1) + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{0}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |0|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{16} - 0 = \\
&= \frac{2 \cdot A^2}{8} - \frac{A^2}{\pi^2} - \frac{A^2}{8} = \\
&= \frac{A^2}{8} - \frac{A^2}{\pi^2} = \\
&= A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)
\end{aligned}$$

A więc moc parzystych harmoniczných wynosi: $P_{par} = A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)$

A więc poszukiwany stosunek parzystych harmoniczných do całkowitej mocy sygnału wynosi:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{par}}{P} &= \frac{A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)}{\frac{A^2}{4}} = \\
&= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot 4 = \\
&= \frac{4}{8} - \frac{4}{\pi^2} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}
\end{aligned}$$

A więc poszukiwany stosunek parzystych harmoniczných do całkowitej mocy sygnału wynosi: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

- 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji
- 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera
- 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera.
Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

