Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

28 maja 2019

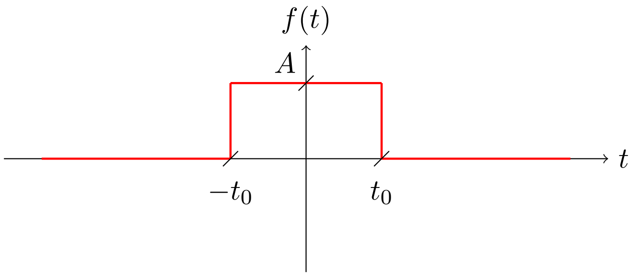
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



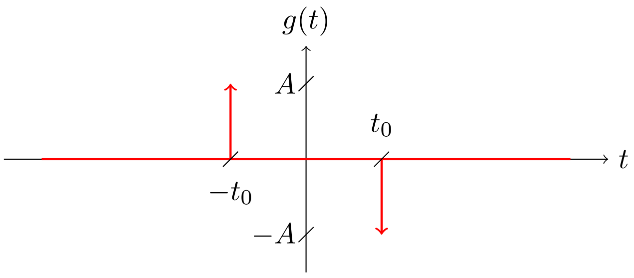
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{1}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{2}$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{4}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t}\right) \cdot dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) \\
&= \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(\jmath\omega) = \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{F} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{F} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0)
\end{aligned}
$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(\jmath\omega)$ sygnału $f(t)$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(0 \cdot t_0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\,(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 \\
&= \left\{ Sa\,(x) = \frac{sin(x)}{x} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\,(\omega \cdot t_0)$.