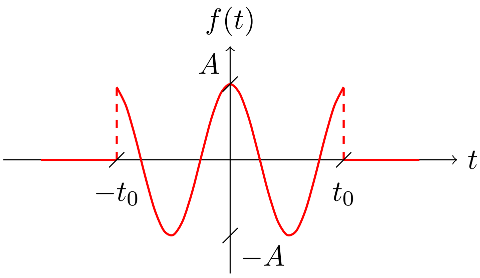
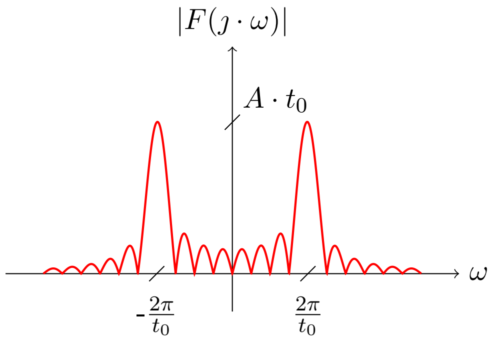
# Teoria Sygnałów w zadaniach




$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$


Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner



23 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl


ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

# Rozdział 1

# Podstawowe własności sygnałów

## 1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

### 1.1.1 Wartość średnia

### 1.1.2 Energia sygnału

### 1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

# Rozdział 2

# Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

## 2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

## 2.2 Zespolony szerego Fouriera

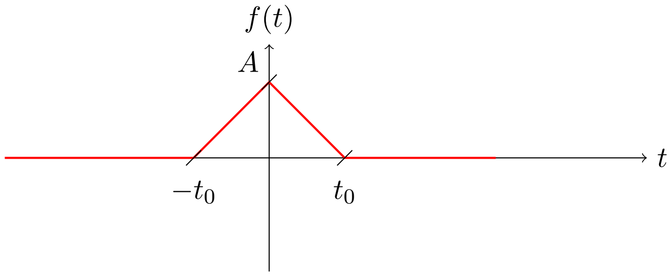
## 2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

# Rozdział 3

# Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

## 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

**Zadanie 1.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.




W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.1}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.2}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$.

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.3}$$

Dla pierwszego zakresu wartości $t$ wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej $m$ i $b$.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla $t$ z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości $t$ wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej $m$ i $b$.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla $t$ z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.4}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt =$$

$$+ \int_{0}^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt =$$

$$+ \int_{0}^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt =$$

$$= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt =$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{t_0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt\right) =$$

$$+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right) =$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0} - \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt\right) =$$

$$+ A \cdot \left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right) =$$

$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega}\left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)\right) =$$

$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right) =$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} + \frac{1}{\jmath \cdot \omega}\left(\frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right)\right) =$$

$$+ \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right) =$$

$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right) =$$

$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(1 - e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) =$$

$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\right) =$$

$$- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 1\right) =$$

$$= -\frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} =$$

$$+ \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} =$$

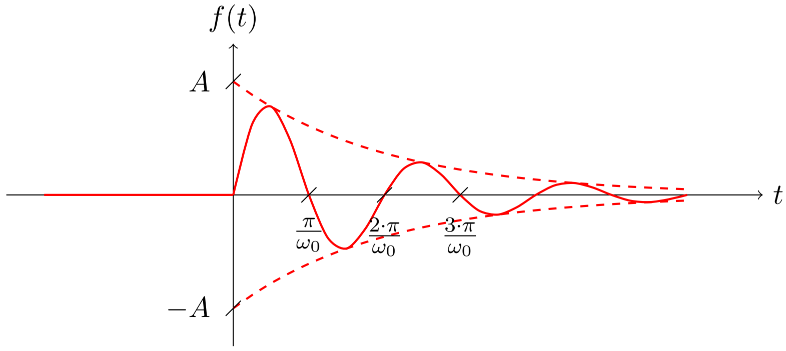
$$= -\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot cos(\omega \cdot t_0) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - cos(\omega \cdot t_0)) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot x) \\ cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot sin^2(x) \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})) = \\
&= \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) = \\
&= \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) = \\
&= \left\{ \tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$.

**Zadanie 2.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.




Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.5}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.6}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

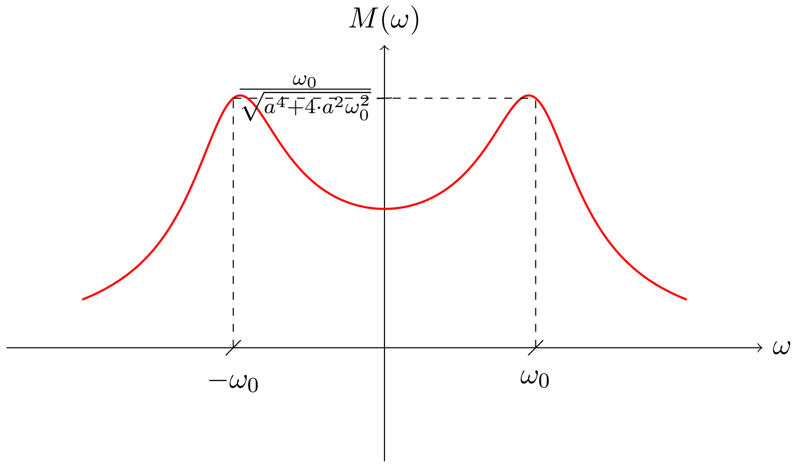
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot \left( \frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath} \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 0 + \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left( \int_0^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left( \int_0^{\tau} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{lllccc} z & = & (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t & w & = & (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t \\ dz & = & (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt & dw & = & (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt \\ dt & = & \frac{1}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dz & dt & = & \frac{1}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dw \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_0^{\tau} e^{z} \cdot \frac{dz}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} - \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_0^{\tau} e^{w} \cdot \frac{dw}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\tau} e^{z} \cdot dz - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\tau} e^{w} \cdot dw = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z}\Big|_0^{\tau} - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{w}\Big|_0^{\tau} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^{\tau} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left( e^{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot 0} \right) + \\
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \left( e^{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot 0} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( \lim_{\tau \to \infty} \left( e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \to \infty} 1 \right) + \\
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( \lim_{\tau \to \infty} \left( e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(-\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \to \infty} 1 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( \lim_{\tau \to \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) + \\
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( \lim_{\tau \to \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( 0 \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) + \\
&- \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} \cdot \left( 0 \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{(-\jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{-1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} + \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} = \\
&= \frac{-(2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)) + 2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)}{2 \cdot \jmath \cdot (-a + \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega) \cdot 2 \cdot \jmath \cdot (-a - \jmath \cdot \omega_0 - \jmath \cdot \omega)} = \\
&= \frac{2 \cdot \jmath \cdot a + 2 \cdot \jmath^2 \cdot \omega_0 + 2 \cdot \jmath^2 \cdot \omega - 2 \cdot \jmath \cdot a + 2 \cdot \jmath^2 \cdot \omega_0 - 2 \cdot \jmath^2 \cdot \omega}{4 \cdot \jmath^2 \cdot (a^2 + a \cdot \jmath \cdot \omega_0 + a \cdot \jmath \cdot \omega - a \cdot \jmath \cdot \omega_0 - \jmath^2 \cdot \omega_0^2 - \jmath^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + a \cdot \jmath \cdot \omega + \jmath^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + \jmath^2 \cdot \omega^2)} = \\
&= \frac{4 \cdot \jmath^2 \cdot \omega_0}{4 \cdot \jmath^2 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \jmath^2 \cdot \omega_0^2 + \jmath^2 \cdot \omega^2)} = \\
&= \frac{\omega_0}{a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + \omega_0^2 - \omega^2} = \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2)} = \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}$.
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right| = \\
&= \left\{ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right\} = \\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega|} =
\end{aligned}
$$

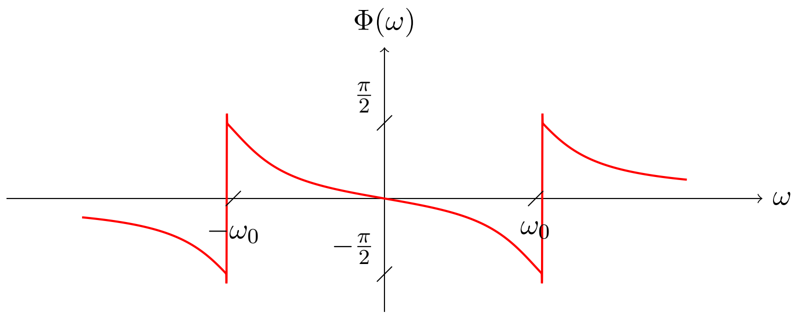
$$= \left\{ |a + \jmath \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} =$$
$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \omega\right)^2}}$$




Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

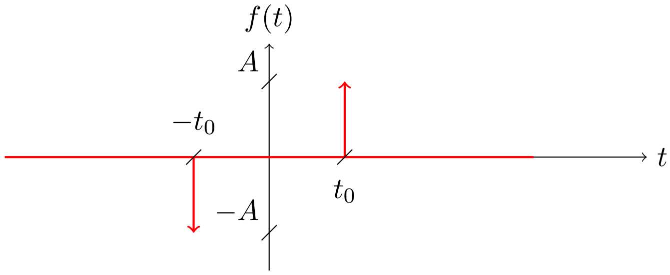
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega}\right) = \\
&= \left\{ arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right) \right\} = \\
&= arg\left(\omega_0\right) - arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega\right) = \\
&= \left\{ arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg\left(\tfrac{b}{a}\right) \right\} = \\
&= arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= arctg\left(0\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= -arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$




Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

**Zadanie 3.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe




W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \tag{3.7}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.8}$$

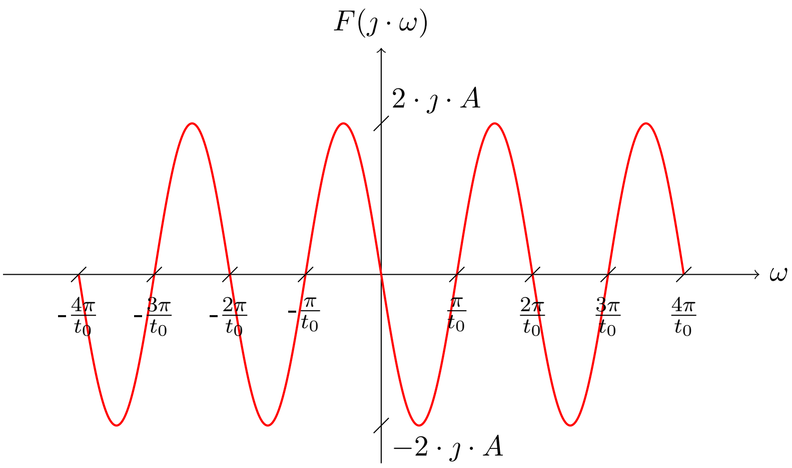
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left( e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left( -e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left( e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left( e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)$

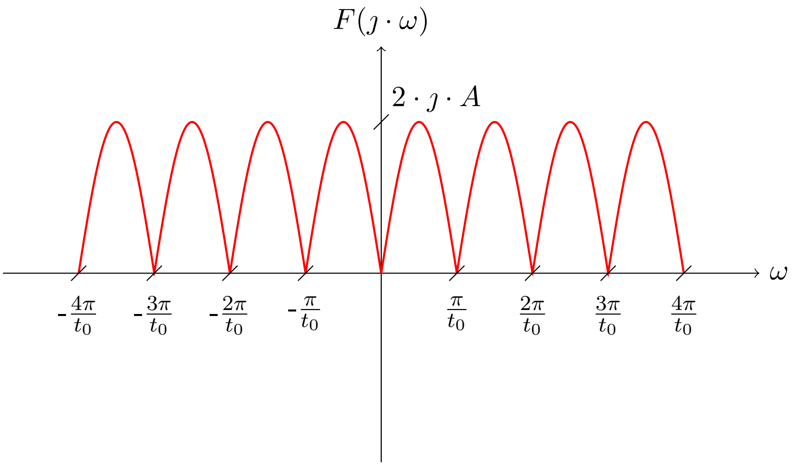
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0) \tag{3.9}$$



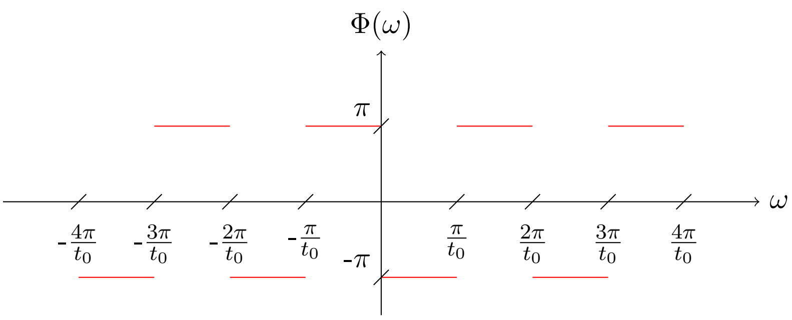

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.10}$$

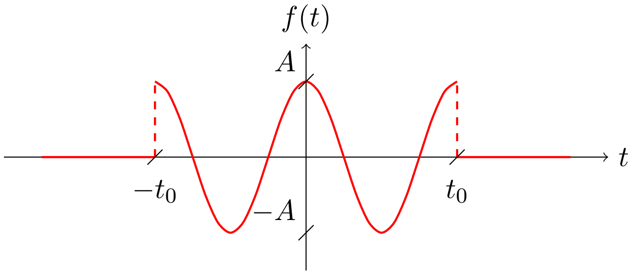



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{3.11}$$



**Zadanie 4.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe




$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.12}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.13}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left( e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left( e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left( e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left( \int_{-t_0}^{t_0} e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{rr} z_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{z_1}\Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{z_2}\Big|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t}\Bigg|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left( e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left( e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left( e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \right) =$$

$$= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) =$$

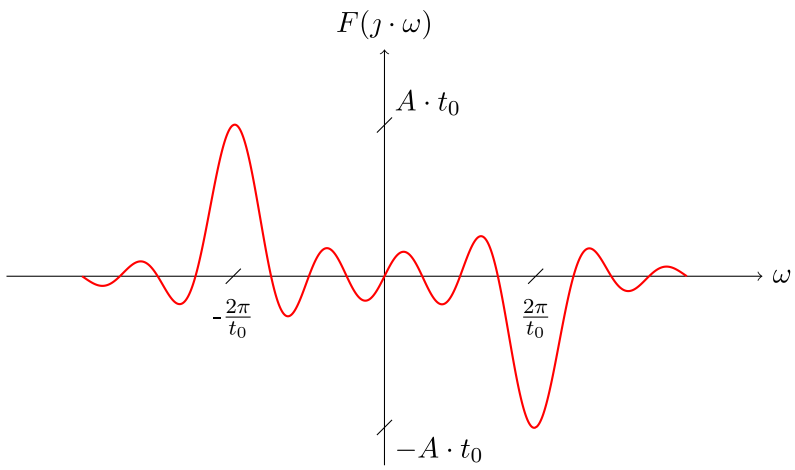
$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left( 2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) =$$
$$= \left\{ Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \right\} =$$
$$= \frac{A}{2} \cdot \left( 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right) =$$
$$= A \cdot t_0 \cdot \left( Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right)$$

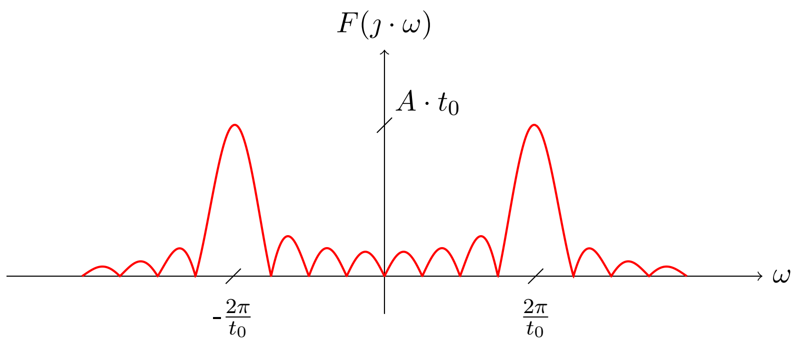
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left( Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left( Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)\right) \tag{3.14}$$




Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

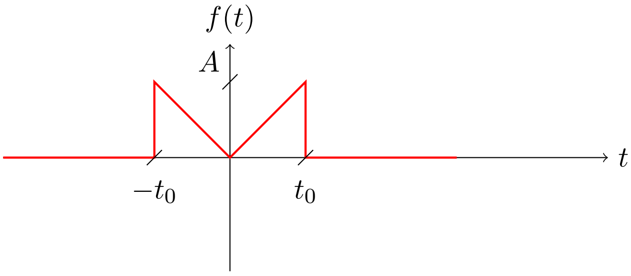
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.15}$$




Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}\right) \tag{3.16}$$

**Zadanie 5.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku




Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.17}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci funkcji $f(t)$. Funkcja ta jest określona za pomocą równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.18}$$

Dla pierwszego zakresu wartości $t$ wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej $m$ i $b$.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla $t$ z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości $t$ wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0; 0)$ oraz $(t_0; A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej $m$ i $b$.

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla $t$ z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.19}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left( -\frac{A}{t_0} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left( t \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{0}^{t_0} - \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left( 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \left( \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right) \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left( t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \left( \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{0}^{t_0} \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right)\right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot \jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2}\right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} sin\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \\ cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) = \\
&= \left\{ sin^2\left(x\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot cos\left(2 \cdot x\right) \right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 = \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \frac{sin(x)}{x}\right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$

## 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

## 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

# Rozdział 4

# Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

## 4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

## 4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3