

Teoria Sygnałów w zadaniach
Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

11 maja 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

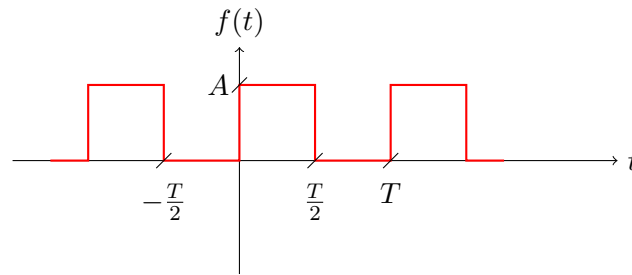
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

Wydrukowano w Polsce

Książka współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

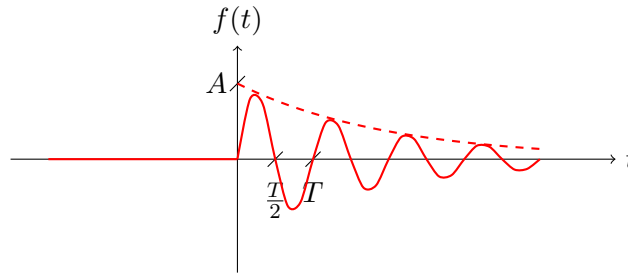
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Zadanie 2. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \quad (4)$$

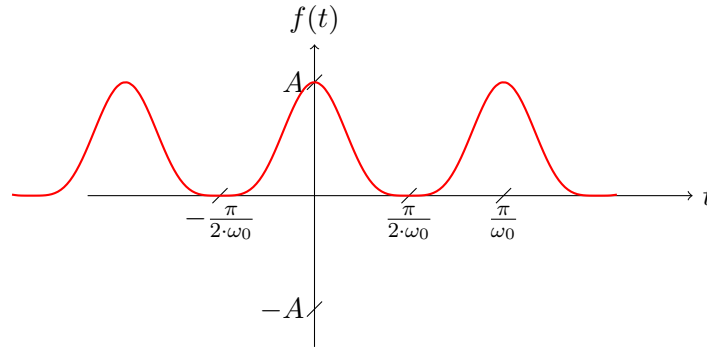
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \\ &-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right) \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Zadanie 3. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (5)$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

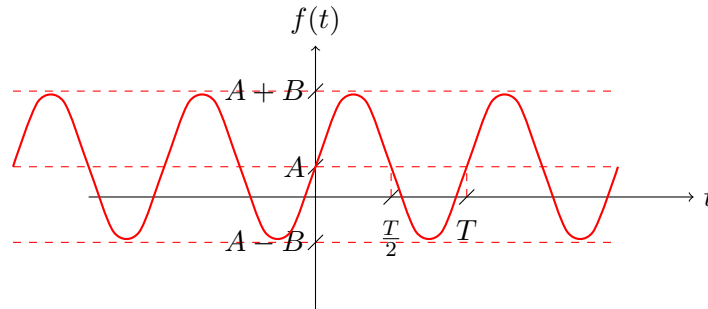
$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^4 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{2^2} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot 2 + 2^2}{4^2} \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 6) \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 6 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \end{array} \right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 6 \cdot dt \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_3} \cdot dz_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} dt \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} + \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{j \cdot 2 \cdot \pi}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot \pi} - e^{-j \cdot \pi}) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot \pi} - e^{j \cdot \pi}) + 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \\ &= \frac{A}{16} \cdot 6 \\ &= \frac{A}{8} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{8} \cdot A \end{aligned}$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (6)$$

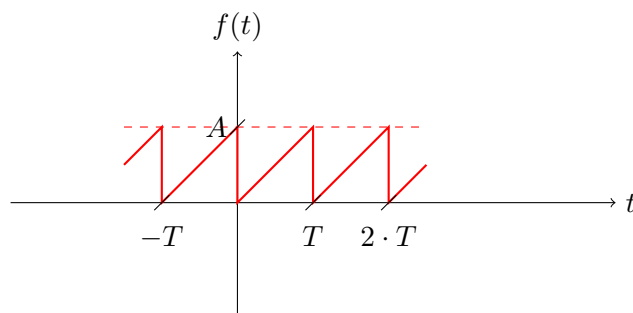
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left| A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left(A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot \int_0^T dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\
 &= A^2 \cdot t \Big|_0^T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + B^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot (T - 0) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot dz + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^T \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{array} \right\} \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t \Big|_0^T - \int_0^T \cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T \cos(w) \cdot dw \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -\sin(w) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-1 + 1) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot 0 + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(\sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (\sin(4\pi) - \sin(0)) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (T) \\
&= A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T$

Zadanie 5. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (7)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (8)$$

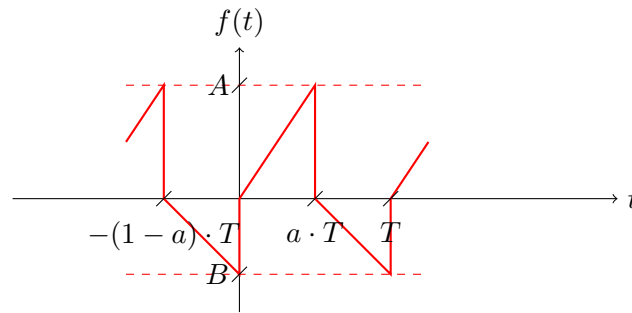
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt \\ &= \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\ &= \frac{A^2}{3} \cdot T \end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot T$

Zadanie 6. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (9)$$

W pierwszym okresie w pierwszej części wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C}$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (10)$$

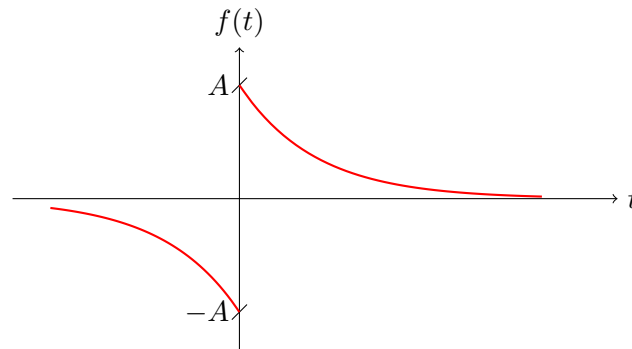
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left| \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} t^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot dt \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt - \int_{a \cdot T}^T 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot dt + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a \cdot T}^T dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a \cdot T}^T \right) - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a \cdot T}^T \right) \\ &\quad + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t \Big|_{a \cdot T}^T \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0 \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 \right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2 \right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 \right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2 \right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot (1-a^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot T \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot T - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2 \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6} \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6 \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - 2 \cdot a + a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T$

Zadanie 7. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (11)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (12)$$

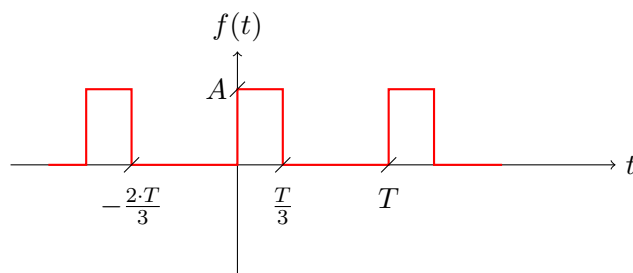
Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 |-A \cdot e^{a \cdot t}|^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} |A \cdot e^{-a \cdot t}|^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A \cdot e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A \cdot e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A)^2 \cdot (e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot (e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot dw \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^w \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{2 \cdot a \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^{-2 \cdot a \cdot dt} \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^{2 \cdot a \cdot 0} - e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2 \cdot a \cdot 0} \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^0 - e^{-a \cdot \tau} \right) - \left(e^{-a \cdot \tau} - e^0 \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} + 1) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (2 - 2 \cdot e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

Zadanie 8. Oblicz wartość energii okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

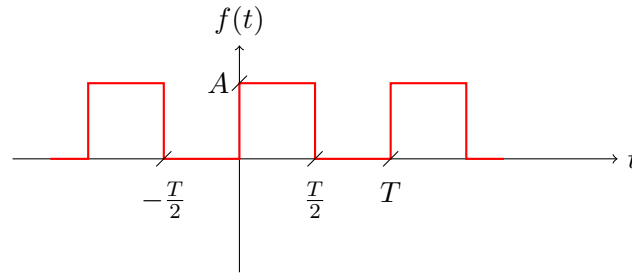
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (14)$$

Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T |0|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T 0 \cdot dt \\ &= A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \\ &= A^2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{3}} \\ &= A^2 \cdot \left(\frac{T}{3} - 0\right) \\ &= A^2 \cdot \frac{T}{3} \end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot \frac{T}{3}$

Zadanie 9. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (16)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (18)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \begin{cases} z &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{cases} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - \sin(0)) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - 0) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{20}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - 1) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{21}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{22}$$

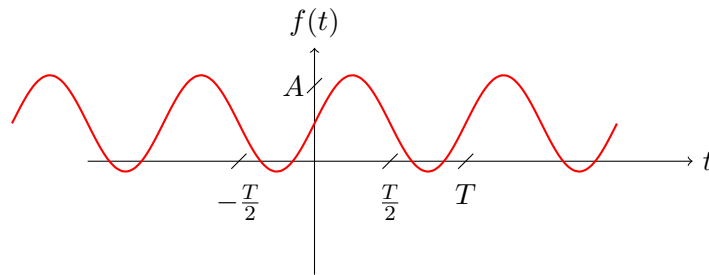
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

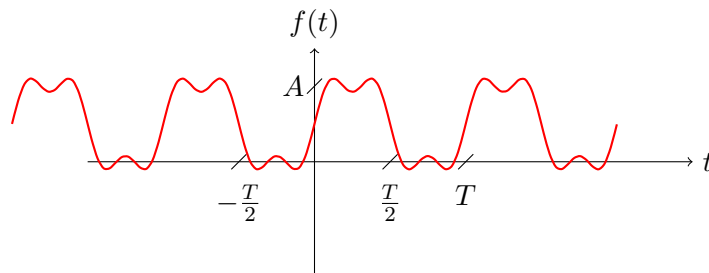
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{23}$$

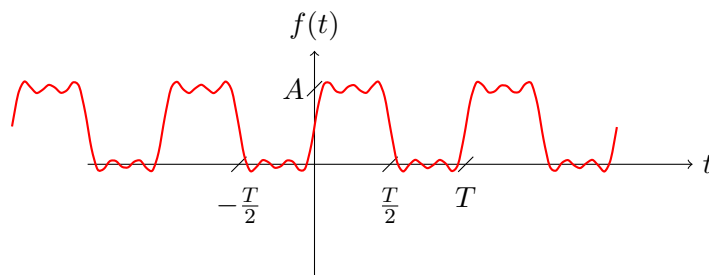
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



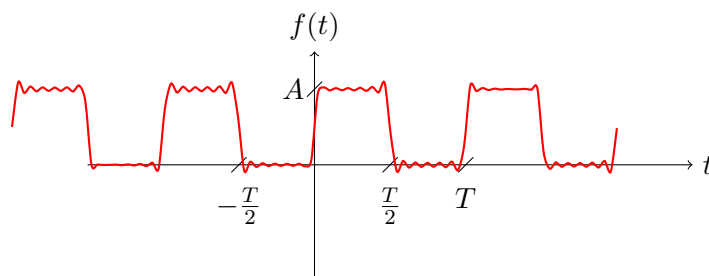
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



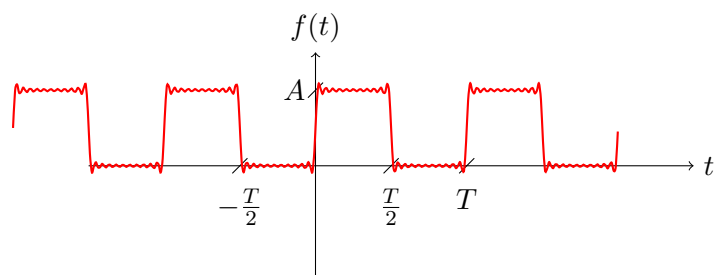
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

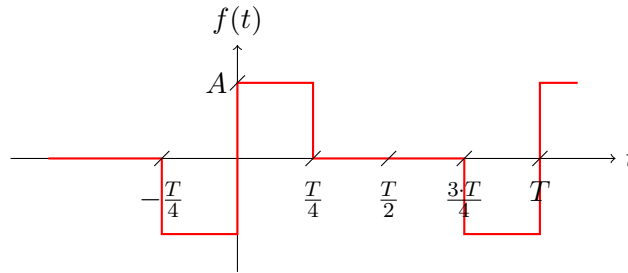


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (24)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (25)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (27)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{cases} z &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{cases} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\sin(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(\sin(0) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(0 - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{28}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{29}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \cos\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(2 - 2 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot \frac{\pi}{2}))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

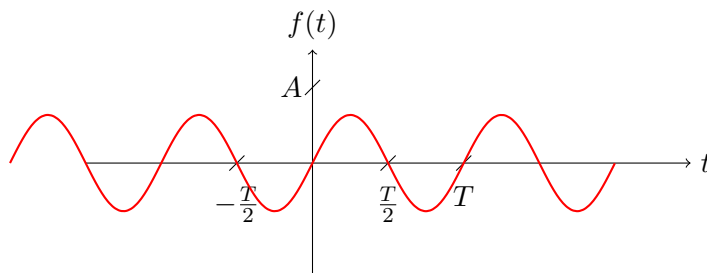
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$

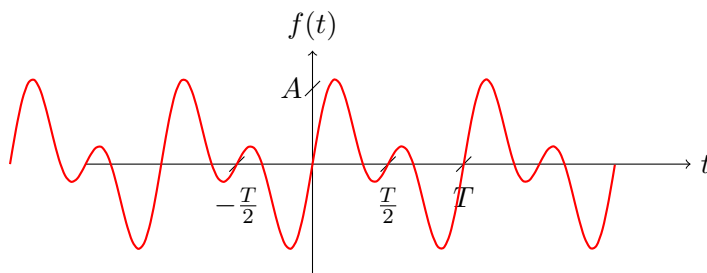
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (32)$$

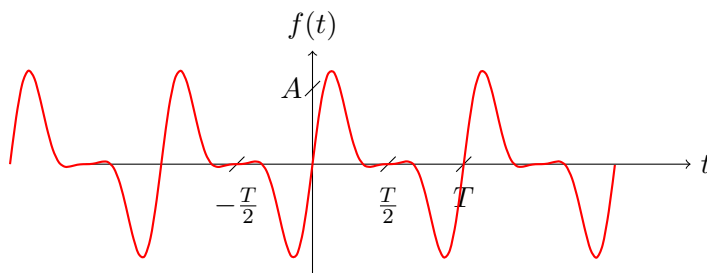
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



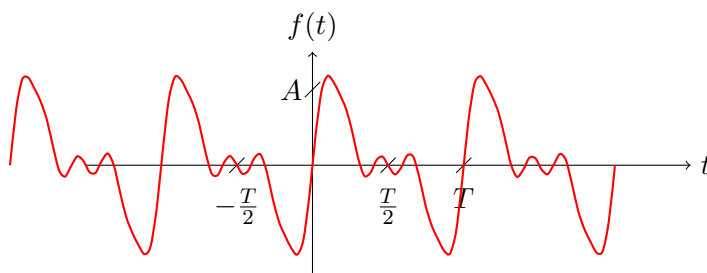
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



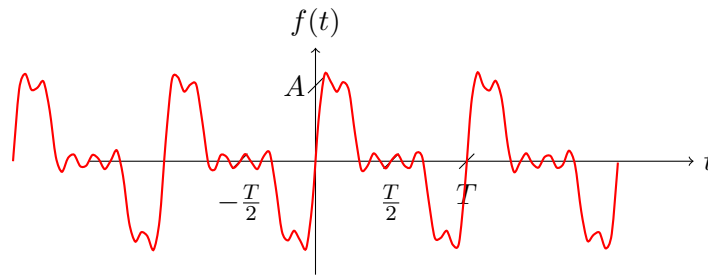
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



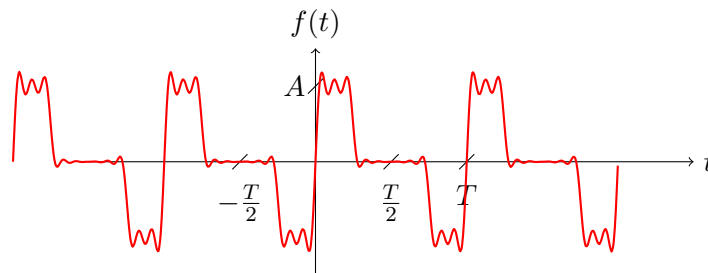
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



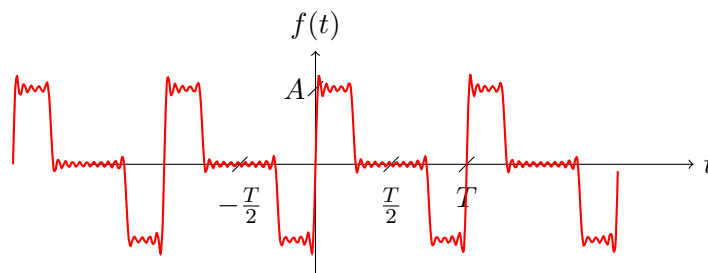
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

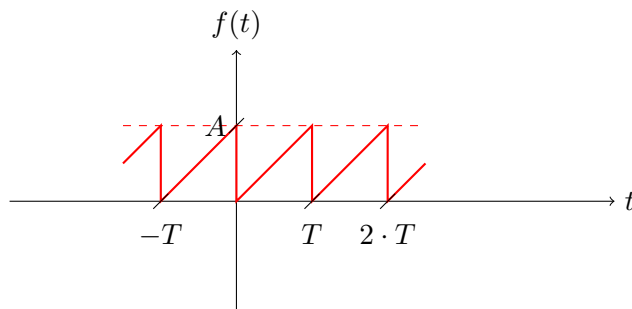


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 11. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (33)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (34)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (35)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \quad (36)$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (37)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = -\frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 1\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(0)) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (0 - 0) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} \right) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \\ &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (38)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (39)$$

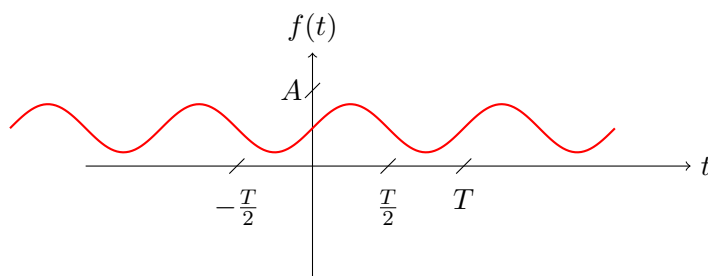
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{3 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{5 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{6 \cdot \pi}$

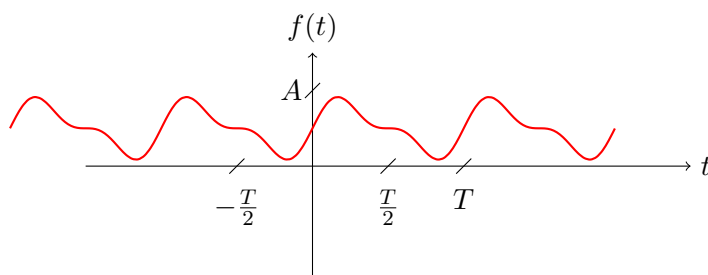
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (40)$$

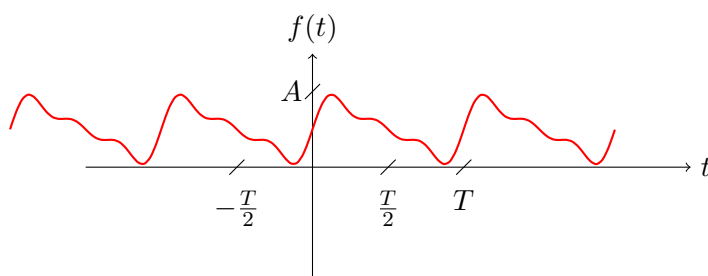
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



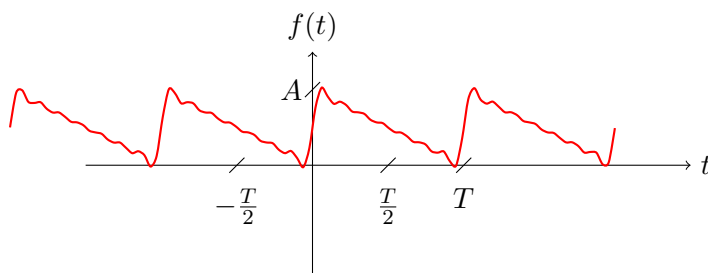
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



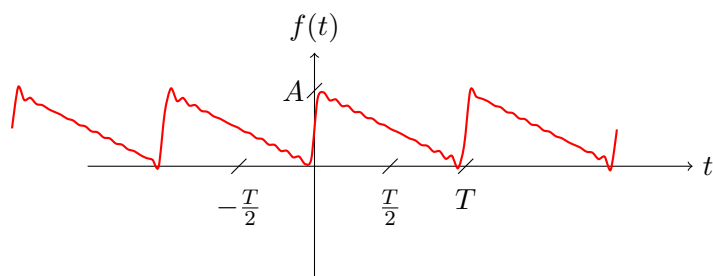
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

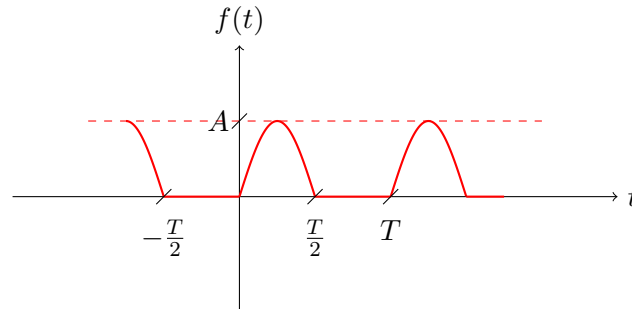


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (41)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (42)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (43)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2j} + \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2j} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-\cos(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-\cos(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(0)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1-k)) - \cos(0)) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1+k))) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1}{1-k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k))}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) + 1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - \cos(\pi \cdot (1+k)) + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(\pi \cdot (1-k)) - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{1 - k^2} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi \cdot (1+k)) = \cos(\pi + k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \\ \cos(\pi \cdot (1-k)) = \cos(\pi - k \cdot \pi) = -\cos(-k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + \cos(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) + \cos(k \cdot \pi) + k \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+\cos(k \cdot \pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost a_1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2j} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \\
 &= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (\cos(2\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (44)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt &= \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{aligned} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1+k)) - \sin(0)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1-k)) - \sin(0)) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost b_1

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (\sin(2\pi) - \sin(0)) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\ b_1 &= \frac{A}{2} \\ b_k &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

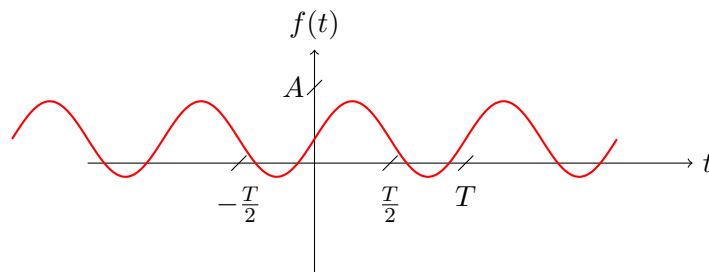
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35} \frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

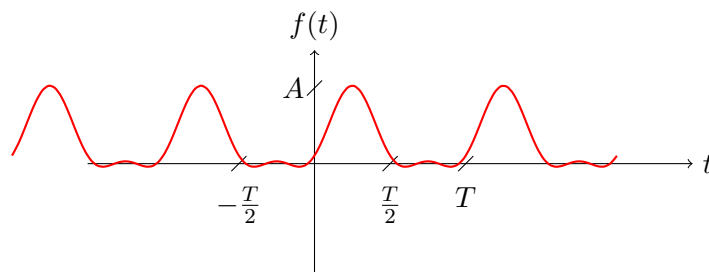
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (46)$$

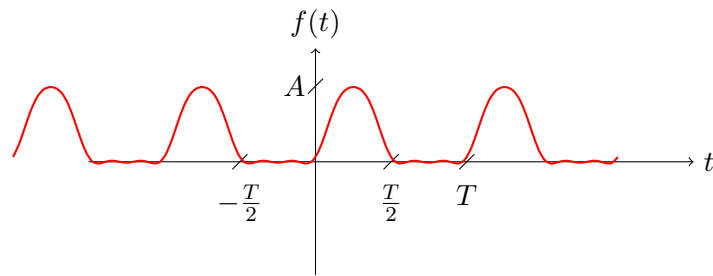
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



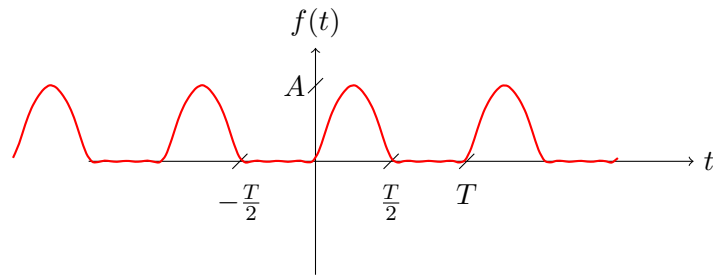
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



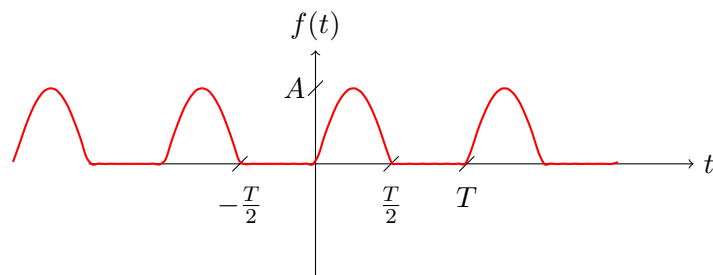
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

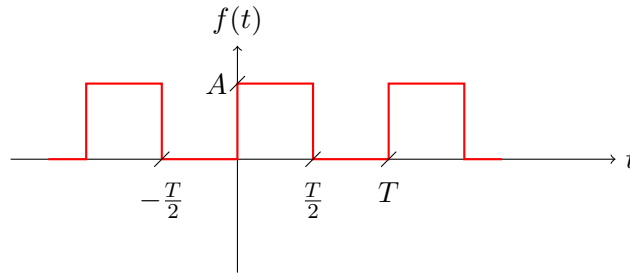


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (48)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (50)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0 \right) \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{51}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{52}$$

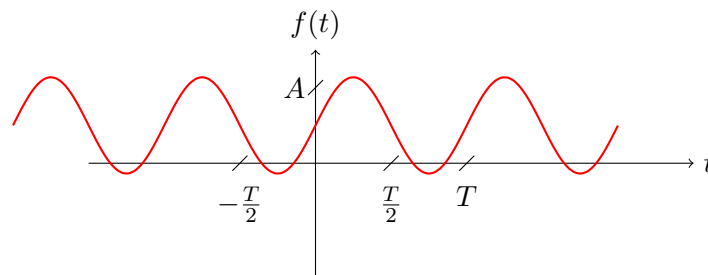
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg \{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

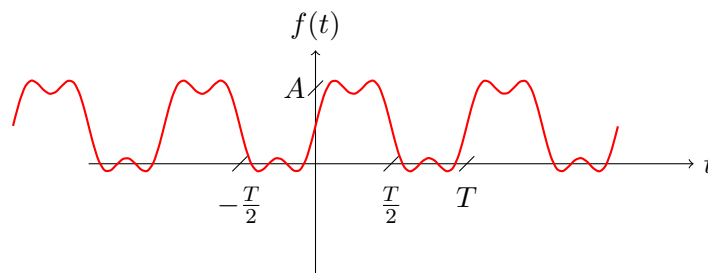
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{53}$$

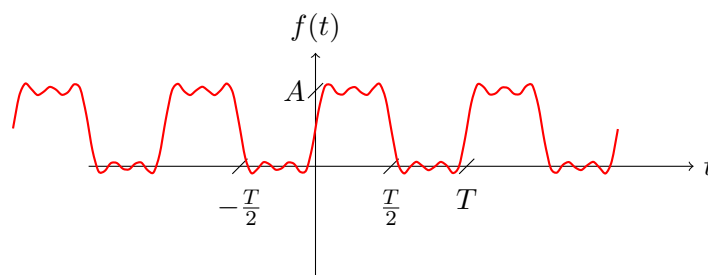
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



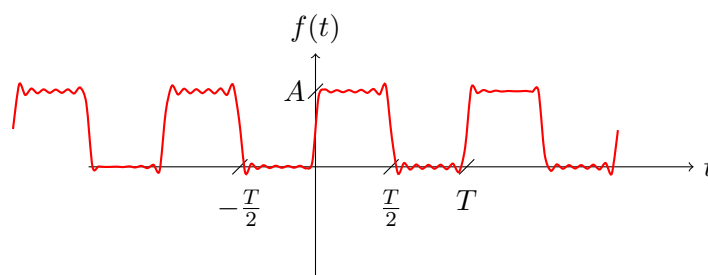
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



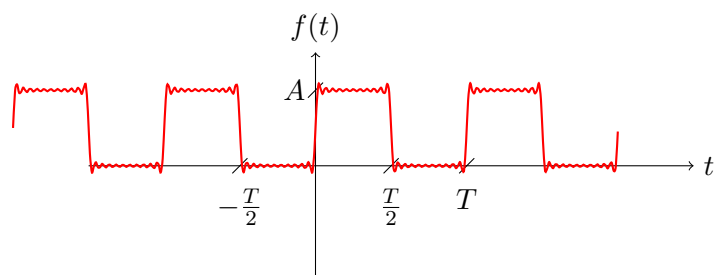
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

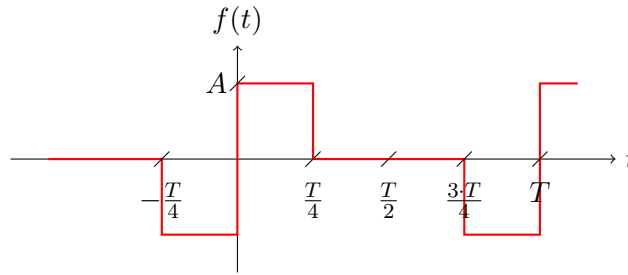


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 14. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (54)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (55)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (57)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{cases} z &= -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{cases} \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-\frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot dt + \frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^0 - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(2 - \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= -j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) - 1)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = 0$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \quad (58)$$

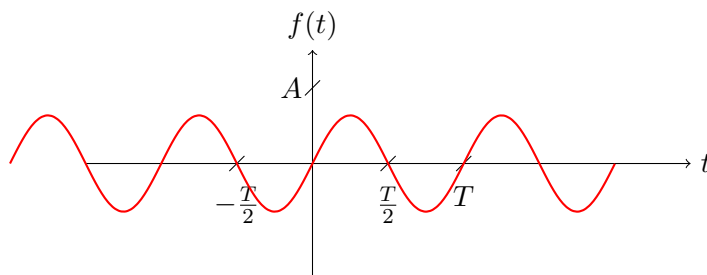
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

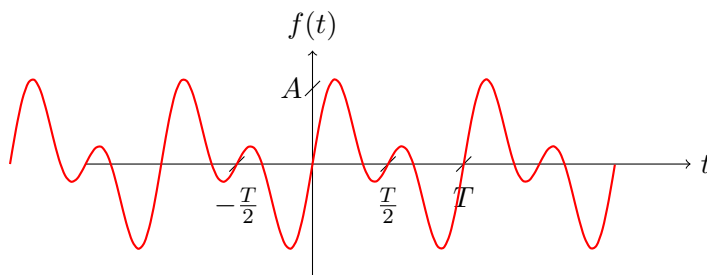
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (59)$$

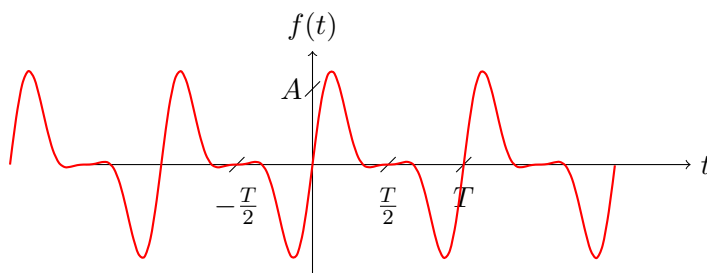
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



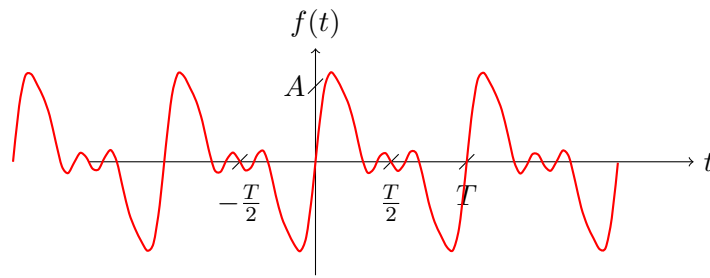
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



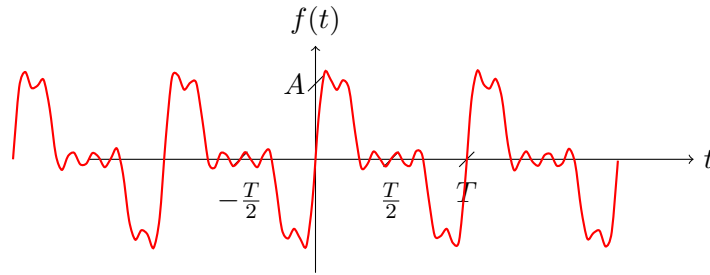
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



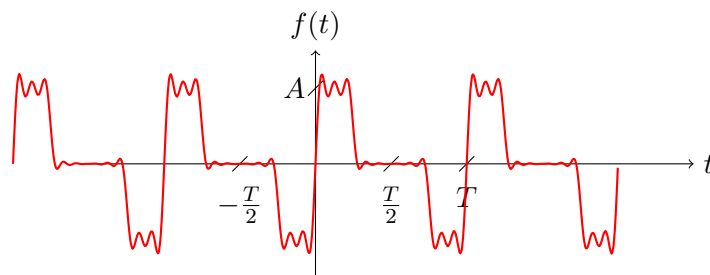
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



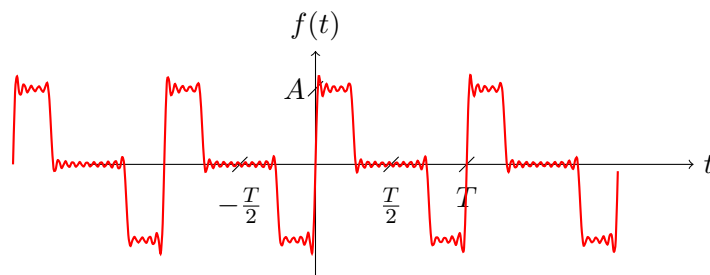
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

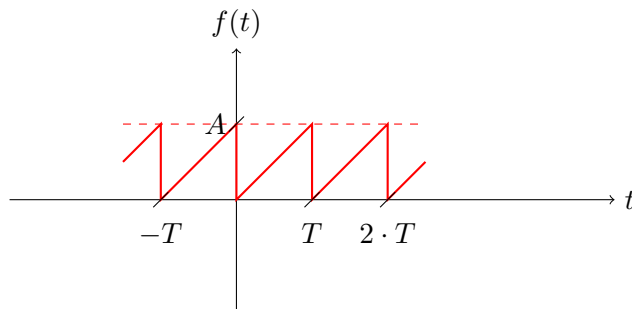


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 15. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (60)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (61)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (62)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - 0 \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T^2}{(-j \cdot k \cdot 2\pi)^2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + \frac{T^2}{-(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - e^0) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - 0 \right) \\
&= \frac{A}{-j \cdot k \cdot 2\pi}
\end{aligned}$$

$$= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \end{aligned} \quad (63)$$

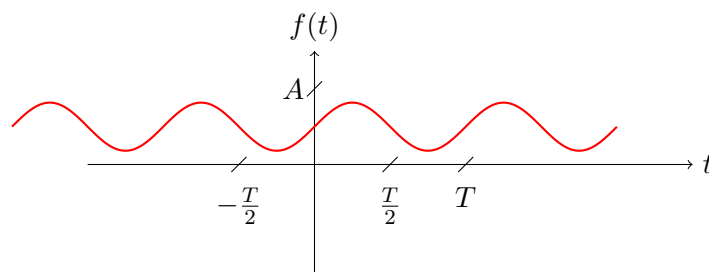
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

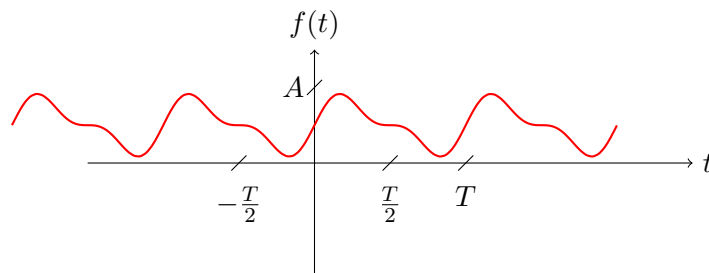
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (64)$$

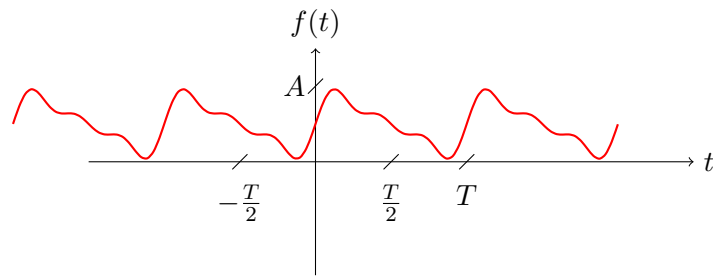
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



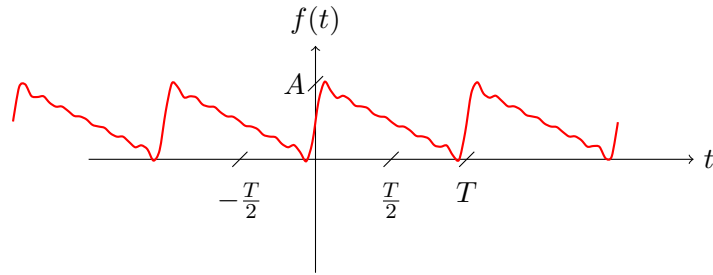
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



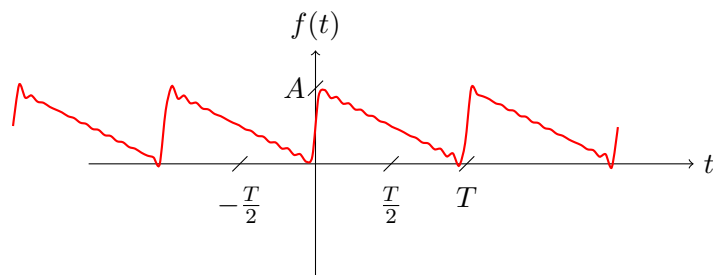
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

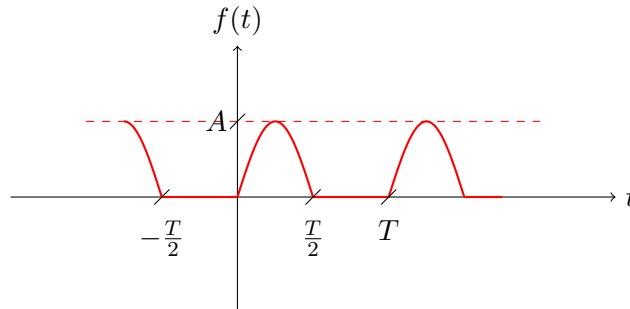


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 16. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (65)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (66)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (67)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_1

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4j} \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_1 wynosi $-j \cdot \frac{A}{4}$

F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_{-1}

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= -\frac{A}{4j} \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_{-1} wynosi $j \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned} \tag{68}$$

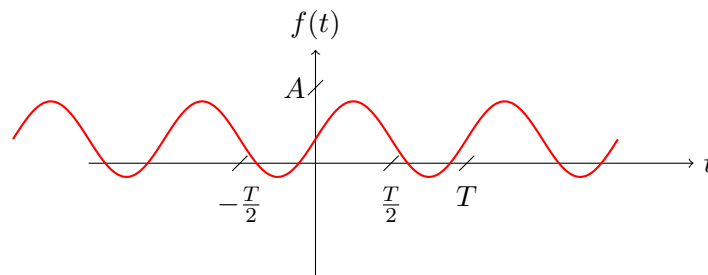
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

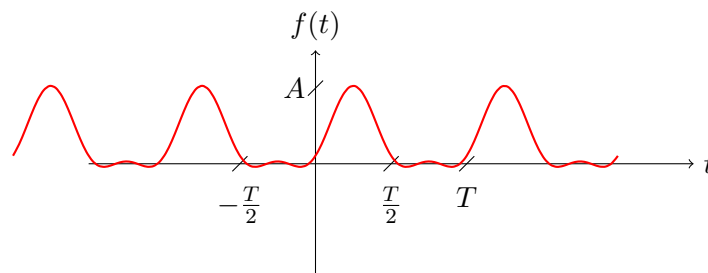
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{69}$$

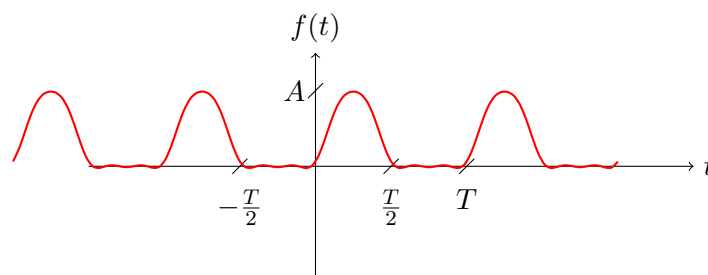
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



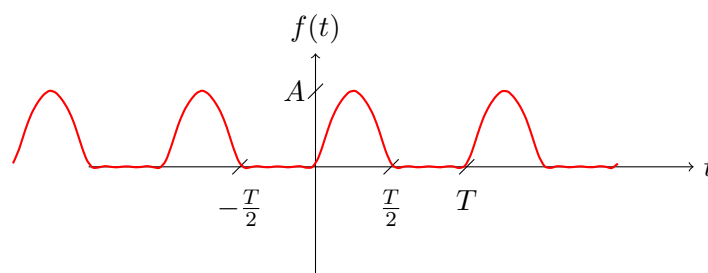
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



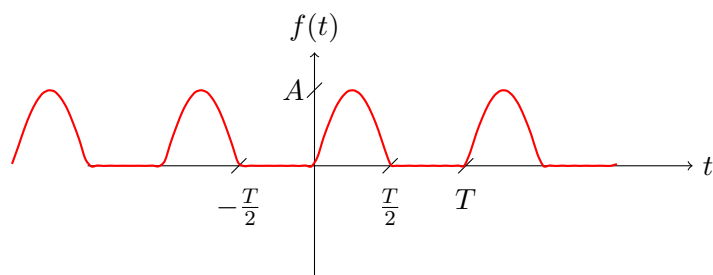
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.