

# Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

28 maja 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

[www.et.put.poznan.pl](http://www.et.put.poznan.pl)

[www.multimedia.edu.pl](http://www.multimedia.edu.pl)

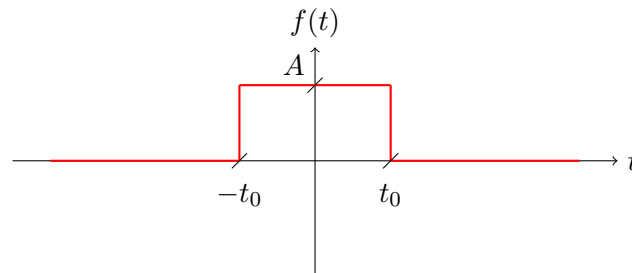
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

**Zadanie 1.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału  $f(t)$  przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



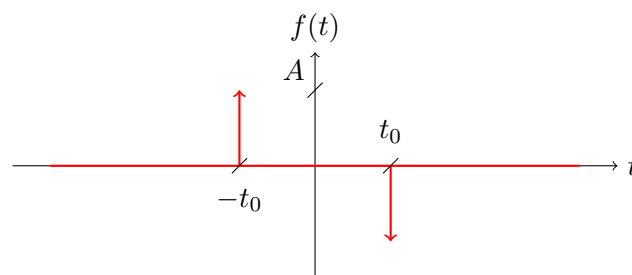
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (1)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału  $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (2)$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału  $g(t)$  złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (4)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t}) \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \\
&= j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału  $g(t)$  to  $G(j\omega) = j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału  $f(t)$  na podstawie transformaty sygnału  $g(t) = f'(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{F} G(j\omega) \\
f(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{F} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę  $G(j\omega)$  sygnału  $g(t)$  otrzymujemy transformatę  $F(j\omega)$  sygnału  $f(t)$

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0 \cdot t_0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału  $f(t)$  jest równa  $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$ .