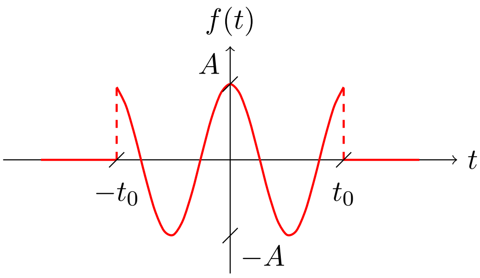
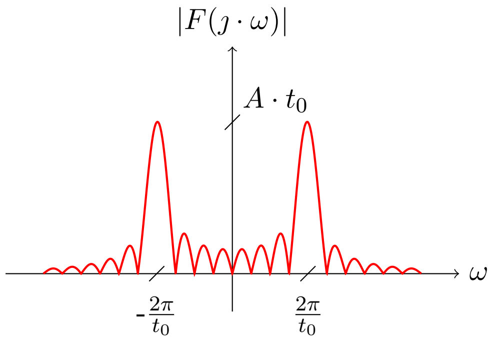
# Teoria Sygnałów w zadaniach




$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$


Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner


26 maja 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone
ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

# Rozdział 1

# Podstawowe własności sygnałów

## 1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

### 1.1.1 Wartość średnia

### 1.1.2 Energia sygnału

### 1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

# Rozdział 2

# Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

## 2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

## 2.2 Zespolony szerego Fouriera

## 2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

# Rozdział 3

# Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

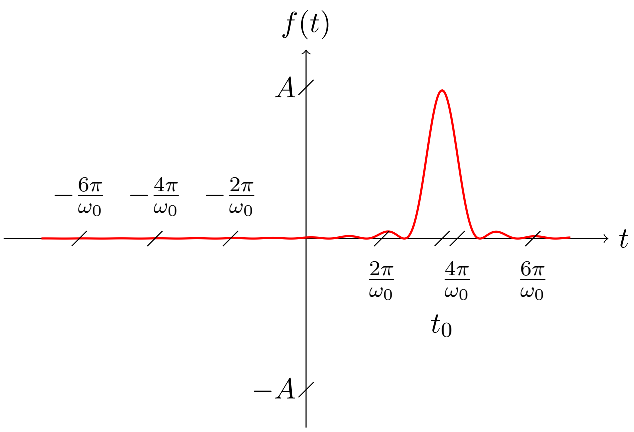
## 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

## 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

**Zadanie 1.** Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{3.1}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.2}$$




W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x}+e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)=\\
&=\begin{Bmatrix} f_1(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\\ f_2(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\end{Bmatrix}=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(f_1(t)+f_2(t)\right)
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji $Sa^2$ i funkcji wykładniczych.

$$f_1(t)=Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}=g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}$$
$$f_2(t)=Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}=g(t)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}$$

Znając transformatę sygnału $g(t)=Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}G(\jmath\omega)$$
$$f(t)=g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\xrightarrow{\mathcal{F}}F(\jmath\omega)=G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$h(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}H(\jmath\omega)$$
$$g(t)=H(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}G(\jmath\omega)=2\pi\cdot h(-\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału trójkątnego $h(t)=\Lambda(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji $Sa^2$.

$$h(t)=\Lambda(t)\xrightarrow{F}H(\jmath\omega)=Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t)=H(t)=Sa^2\left(\frac{t}{2}\right)\xrightarrow{F}G_1(\jmath\omega)=2\pi\cdot h(\omega)=2\pi\cdot\Lambda\left(-\omega\right)=2\pi\cdot\Lambda\left(\omega\right)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned}
g(t)&=Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)=\\
&=\left\{k(t)=Sa^2\left(\tfrac{t}{T}\right)\right\}=\\
&=k\left(t-t_0\right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $k(t)$ możemy z łatwością wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ za pomoca twierdzenia o przesunięciu w czasie

$$k(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} K(\jmath\omega)$$
$$g(t) = k(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = K(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $k(t)$.

$$\begin{aligned} k(t) &= Sa^2\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2\cdot t}{2\cdot T}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{t}{2}\right) = \\ &= \left\{a = \tfrac{2}{T}\right\} = \\ &= Sa^2\left(a\cdot\frac{t}{2}\right) = \\ &= g_1(a\cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $k(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)$$
$$k(t) = g_1(\alpha\cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} K(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned} K(\jmath\omega) &= \frac{1}{|\alpha|}\cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{\alpha = \tfrac{2}{T}\right\} = \\ &= \frac{1}{\left|\frac{2}{T}\right|}\cdot G_1(\frac{\omega}{\frac{2}{T}}) = \\ &= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi\cdot\Lambda\left(\omega\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{\frac{2}{T}}\cdot 2\pi\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{\frac{2}{T}}\right) = \\ &= \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Tak wiec transformata sygnału $k(t) = Sa^2\left(\frac{t}{T}\right)$ jest równa $K(\jmath\omega) = \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)$

Podstawiając do wzoru na transformatę sygnału $g(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = k(t-t_0)$ otrzymyjemy $G(\jmath\omega) = K(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$f_1(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}$$
$$f_2(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega-\omega_0\right)\right) = \\ &= \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega-\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega-\omega_0)\cdot t_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega+\omega_0\right)\right) = \\ &= \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega+\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega+\omega_0)\cdot t_0}\end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha\cdot f_1(t) + \beta\cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha\cdot F_1(\jmath\omega) + \beta\cdot F_2(\jmath\omega)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \frac{1}{2}\cdot\left(F_1(\jmath\omega)+F_2(\jmath\omega)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega-\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega-\omega_0)\cdot t_0} + \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega+\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega+\omega_0)\cdot t_0}\right)\end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega-\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega-\omega_0)\cdot t_0} + \pi\cdot T\cdot\Lambda\left(\frac{(\omega+\omega_0)\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(\omega+\omega_0)\cdot t_0}\right)$$

## 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

# Rozdział 4

# Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

## 4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

## 4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3