Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

22 maja 2019

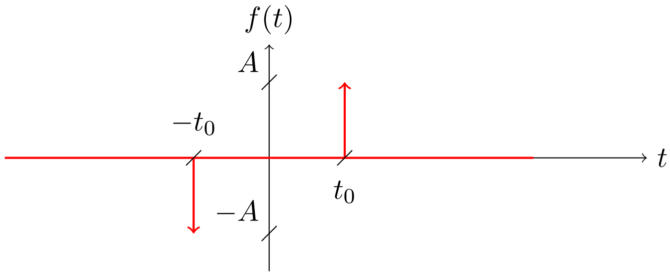
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Książka współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \tag{1}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

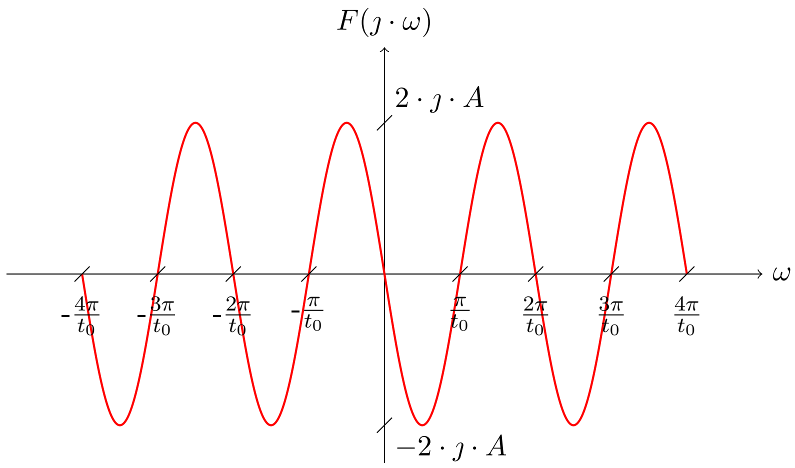
$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{2}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} \\
&= A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= A \cdot \left(-e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

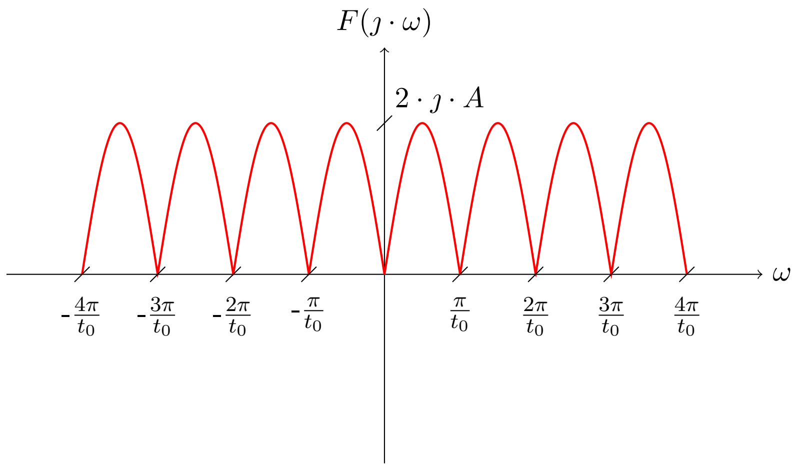
Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)$
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0) \tag{3}$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{4}$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}) \tag{5}$$