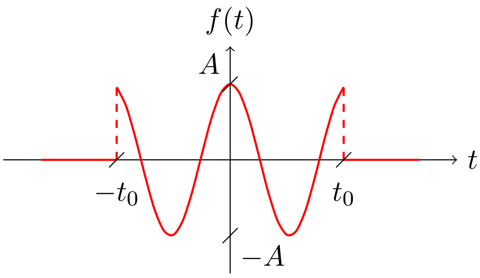
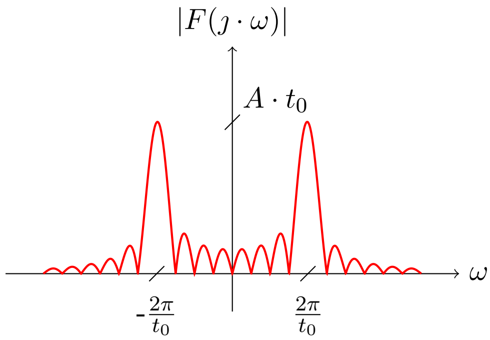
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\; Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ - Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

11 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

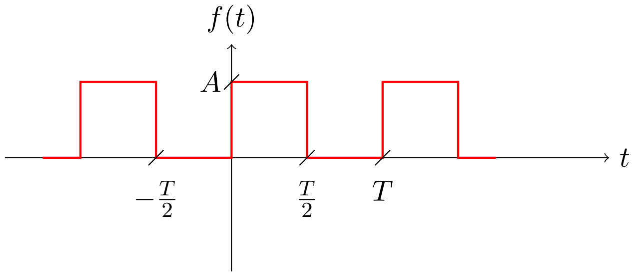
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt
\tag{2.4}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^z\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^z\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^0\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{\jmath \cdot k \cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1\right) \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Moduł liczby zespolonej wyznaczamy ze wzoru:

$$
|F_k| = \sqrt{\mathtt{Re}\left(F_k\right)^2 + \mathtt{Im}\left(F_k\right)^2}
$$

Natomiast argument liczby zespolonej wyznaczamy ze wzoru:

$$
\mathtt{Arg}\left\{F_k\right\} = arctan\left(\frac{\mathtt{Im}\left(F_k\right)}{\mathtt{Re}\left(F_k\right)}\right)
$$

W tym celu musimy wydzielić jawnie część rzeczywista i część urojoną wartości współczynnika F_k.

$$
F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \mathtt{Re}\left(F_k\right) = 0 \\ \mathtt{Im}\left(F_k\right) = \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \end{cases}
$$

A wiec moduł wartości współczynników F_k wynosi

$$
\begin{aligned}
|F_k| &= \sqrt{\mathtt{Re}\left(F_k\right)^2 + \mathtt{Im}\left(F_k\right)^2} = \\
&= \sqrt{0^2 + \left(\frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^k - 1)\right)^2} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{A}{k \cdot 2\pi}\right)^2 \cdot \left((-1)^k - 1\right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{\left(k \cdot 2\pi\right)^2} \cdot \left((-1)^k - 1\right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{k^2 \cdot \left(2\pi\right)^2} \cdot \left((-1)^k - 1\right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{k^2 \cdot \left(2\pi\right)^2}} \cdot \sqrt{\left((-1)^k - 1\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{A^2}}{\sqrt{k^2 \cdot \left(2\pi\right)^2}} \cdot \sqrt{\left((-1)^k - 1\right)^2} = \\
&= \frac{A}{\sqrt{k^2} \cdot \sqrt{\left(2\pi\right)^2}} \cdot \left|(-1)^k - 1\right| = \\
&= \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^k - 1\right| = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^k - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^k - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^{2 \cdot n} - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^{2 \cdot n + 1} - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|\left((-1)^2\right)^n - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(-1)^{2 \cdot n} \cdot (-1)^1 - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(1)^n - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|\left((-1)^2\right)^n \cdot (-1) - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|1 - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|(1)^n \cdot (-1) - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|0\right| & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|1 \cdot (-1) - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot 0 & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|-1 - 1\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot \left|-2\right| & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot 2\pi} \cdot 2 & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & dla \quad k = 2 \cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ \frac{A}{|k| \cdot \pi} & dla \quad k = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases}
\end{aligned}
$$

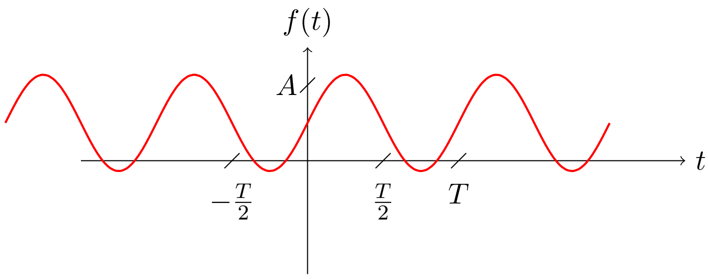
Podobnie argument wartości współczynników F_k wynosi

$$
\begin{aligned}
\mathtt{Arg}\left\{F_k\right\} &= arctan\left(\frac{\mathtt{Im}\left(F_k\right)}{\mathtt{Re}\left(F_k\right)}\right) = \\
&= arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)}{0}\right) = \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{2\cdot n}-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{2\cdot n++1}-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left((-1)^2\right)^n-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left((-1)^2\right)^n\cdot(-1)^1-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((1)^n-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((1)^n\cdot(-1)^1-1\right)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot(1-1)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot(1\cdot(-1)-1)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot(0)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot(-1-1)}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} arctan\left(\frac{0}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ arctan\left(\frac{-\frac{A}{k\cdot\pi}}{0}\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & dla \quad k = 2\cdot n \wedge n \in \mathcal{Z} \\ -\frac{\pi}{2} sign\left(k\right) & dla \quad k = 2\cdot n + 1 \wedge n \in \mathcal{Z} \end{cases}
\end{aligned}
$$

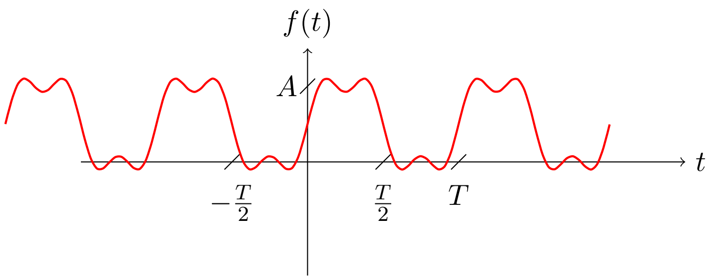
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left[\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)\right]\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}
\end{aligned}
$$

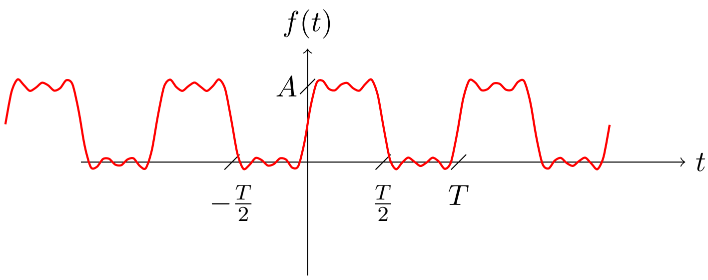
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



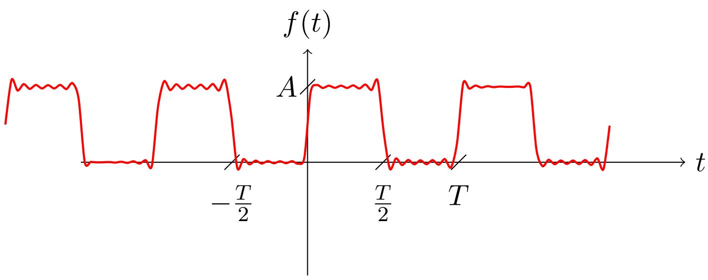
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



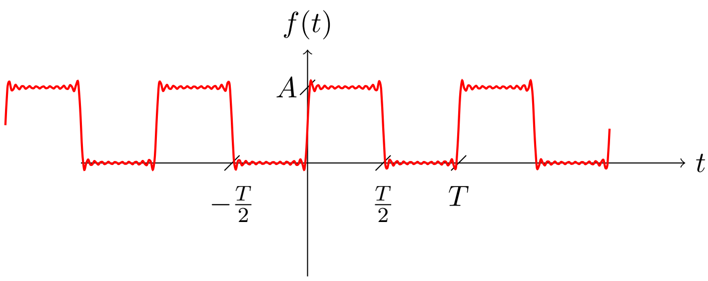
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

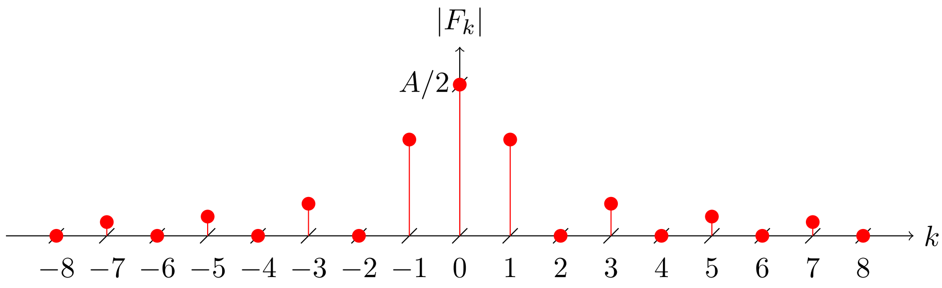


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



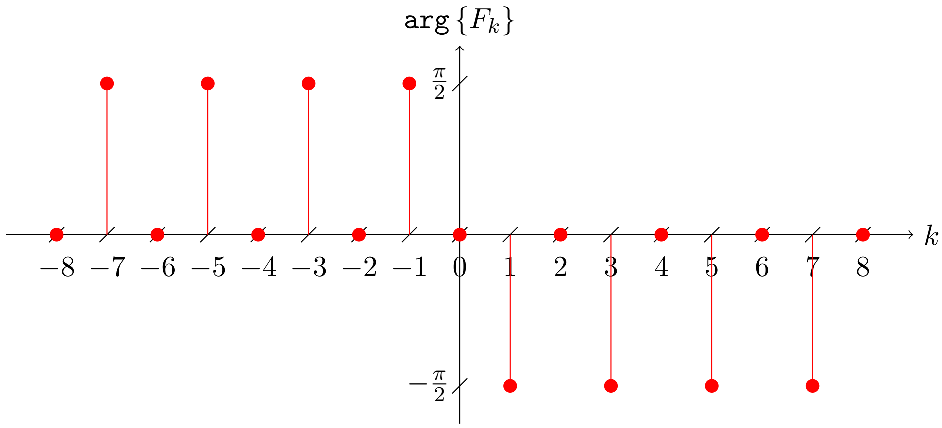
W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3

9 788393 962013