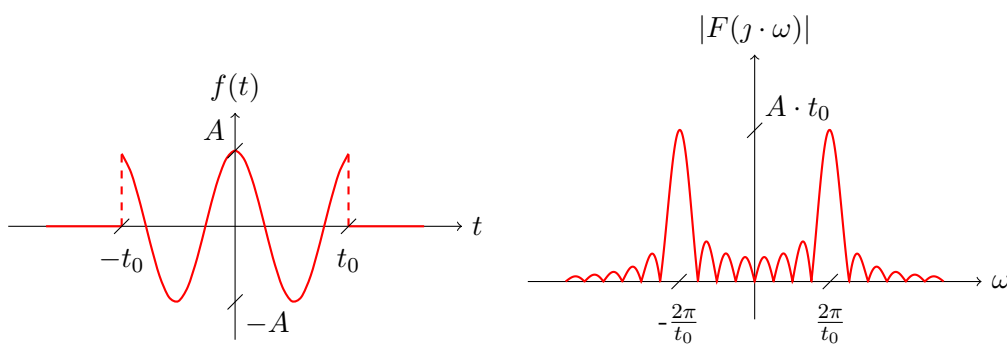


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\text{Sa}(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - \text{Sa}(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

30 marca 2020

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe własności sygnałów

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc sygnału

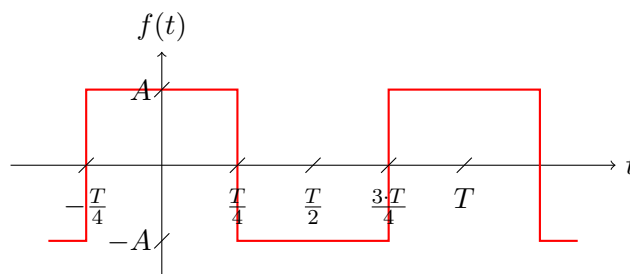
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0) = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1) = \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1)
\end{aligned}$$

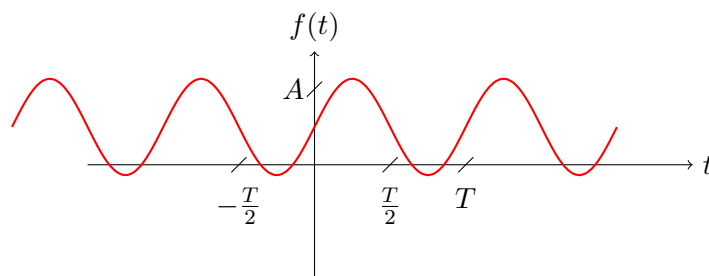
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

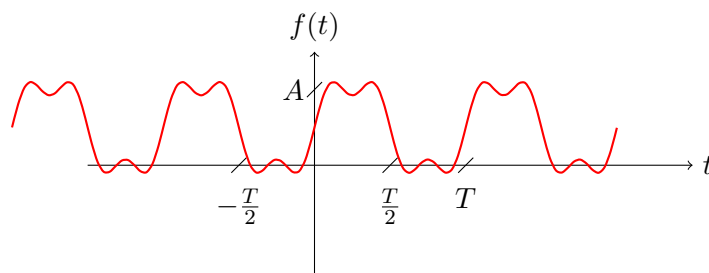
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.5)$$

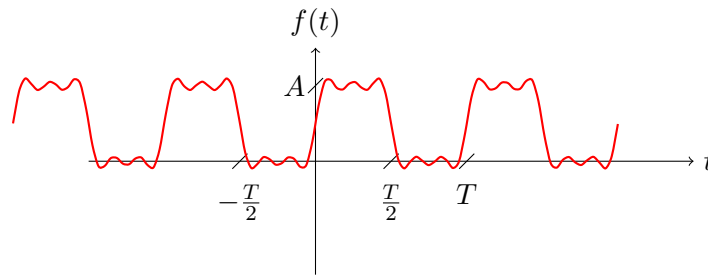
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



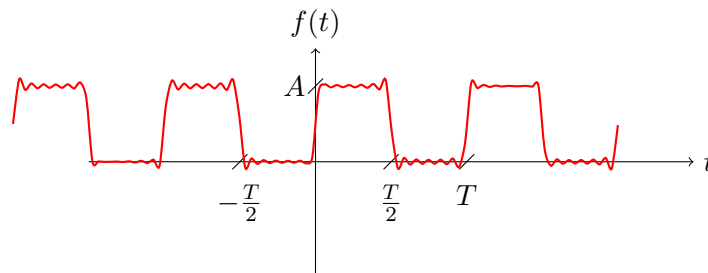
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



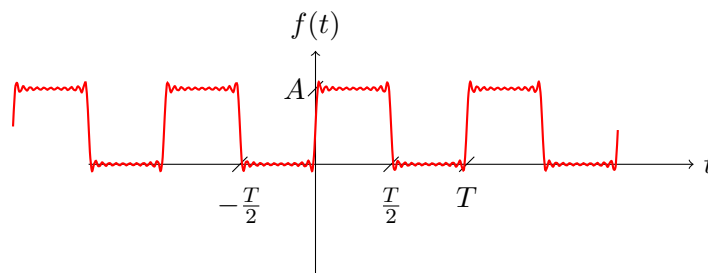
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

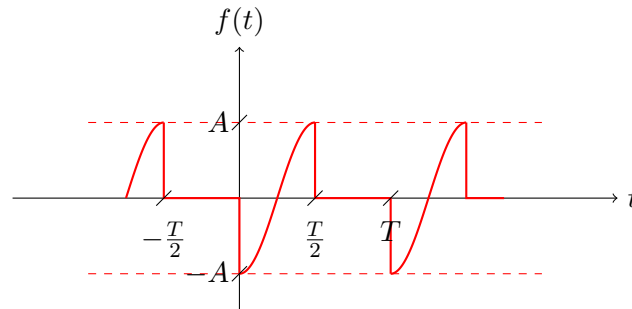


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału sinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.7)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.8)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1 - k^2} \right) = \\
&= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)$.

Dla $k = 1$ i $k = -1$ trzeba wyznaczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j 2\pi} - e^0 \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Tak więc ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = \frac{A}{4}$$

$$F_{-1} = \frac{A}{4}$$

$$F_k = -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)$$

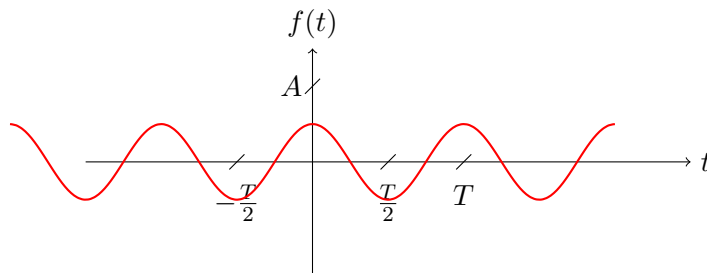
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$ F_k $	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

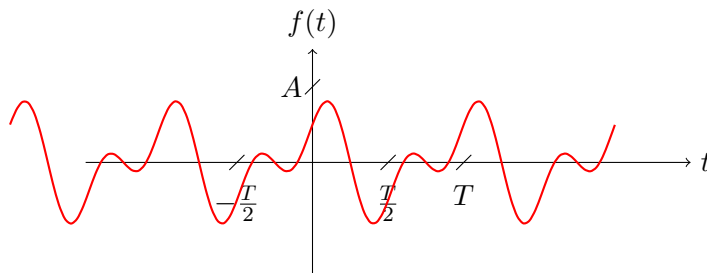
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.9)$$

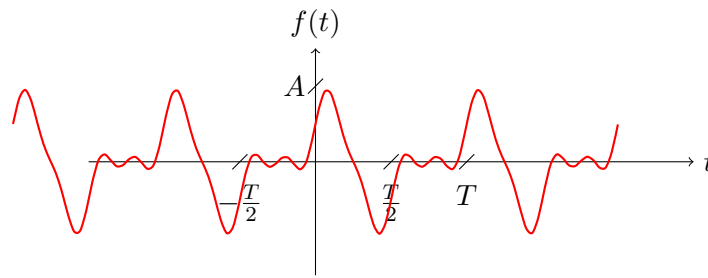
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



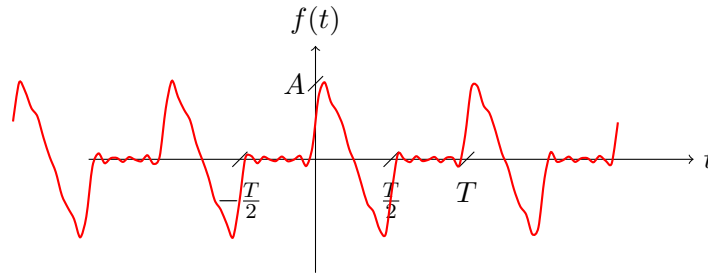
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



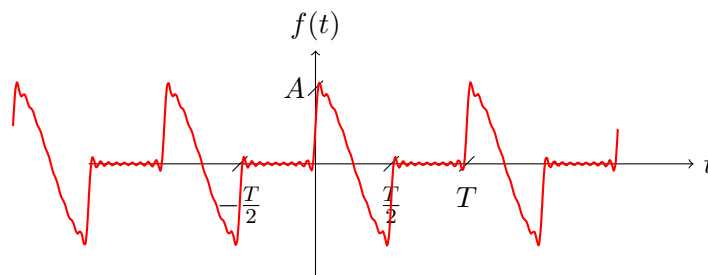
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



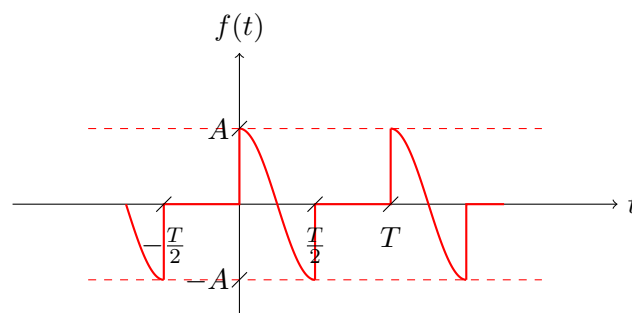
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsewala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

- 3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji
- 3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera
- 3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera.
Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3

