

Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

28 maja 2019

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

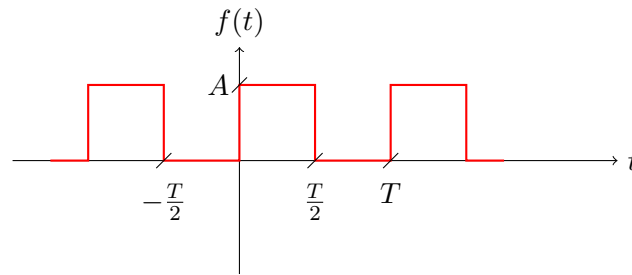
Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

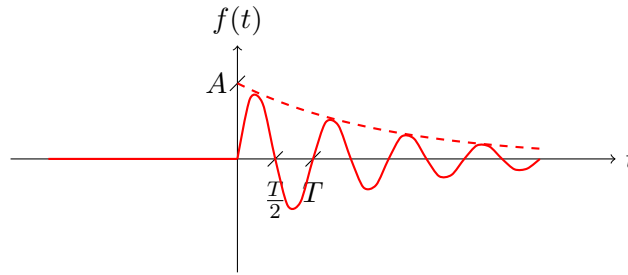
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Zadanie 2. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \quad (4)$$

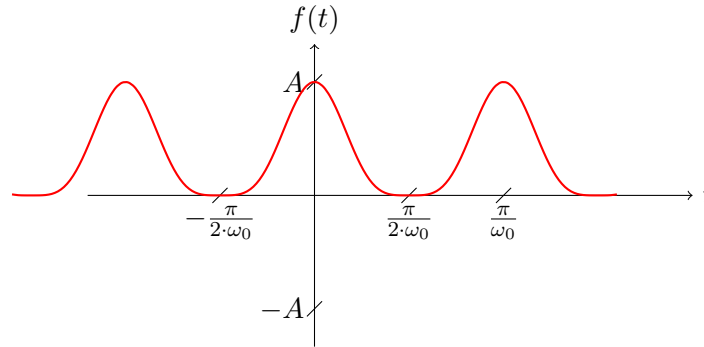
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \\ &-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right) \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Zadanie 3. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (5)$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

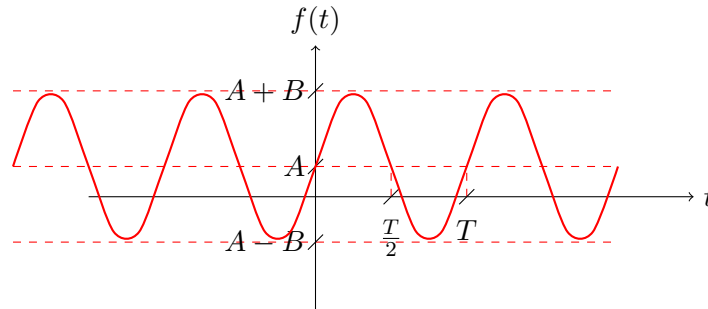
$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^4 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{2^2} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot 2 + 2^2}{4^2} \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{e^{j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 6) \cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 6 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \end{array} \right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 4 \cdot e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 4 \cdot e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 6 \cdot dt \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_3} \cdot dz_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} dt \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}}) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}}) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} + \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{j \cdot 2 \cdot \pi}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot \pi} - e^{-j \cdot \pi}) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot \pi} - e^{j \cdot \pi}) + 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \\ &= \frac{A}{16} \cdot 6 \\ &= \frac{A}{8} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{8} \cdot A \end{aligned}$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (6)$$

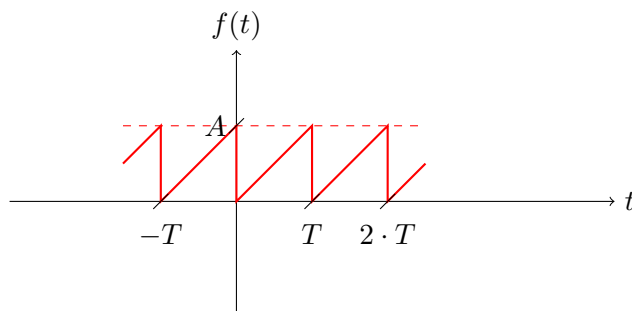
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left| A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left(A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot \int_0^T dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\
 &= A^2 \cdot t \Big|_0^T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + B^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot (T - 0) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot dz + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^T \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{array} \right\} \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t \Big|_0^T - \int_0^T \cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) \\
 &= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T \cos(w) \cdot dw \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -\sin(w) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-1 + 1) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot 0 + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(\sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (\sin(4\pi) - \sin(0)) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0) \right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (T) \\
&= A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T$

Zadanie 5. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (7)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (8)$$

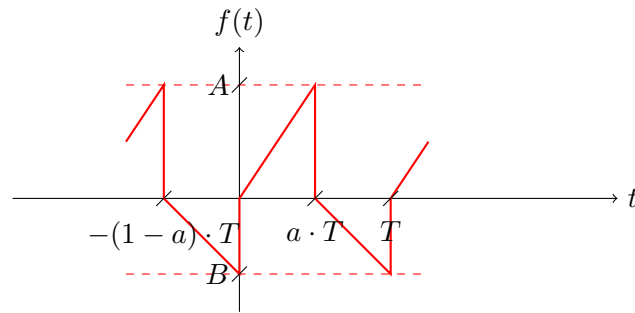
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt \\ &= \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\ &= \frac{A^2}{3} \cdot T \end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot T$

Zadanie 6. Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (9)$$

W pierwszym okresie w pierwszej części wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C}$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (10)$$

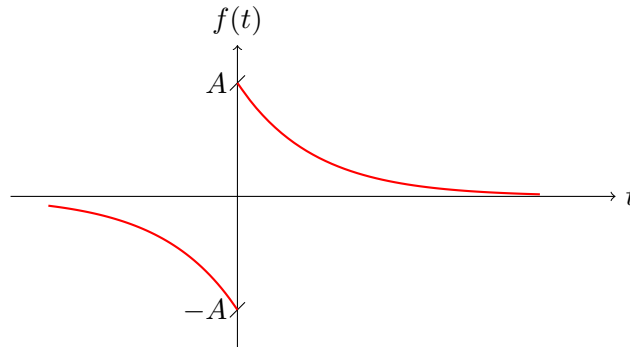
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left| \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{a \cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} t^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot dt \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt - \int_{a \cdot T}^T 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot dt + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a \cdot T}^T dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a \cdot T}^T \right) - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a \cdot T}^T \right) \\ &\quad + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t \Big|_{a \cdot T}^T \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0 \right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 \right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2 \right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 \right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2 \right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot (1-a^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot T \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot T - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2 \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6} \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6 \right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - 2 \cdot a + a^2) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T$

Zadanie 7. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (11)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (12)$$

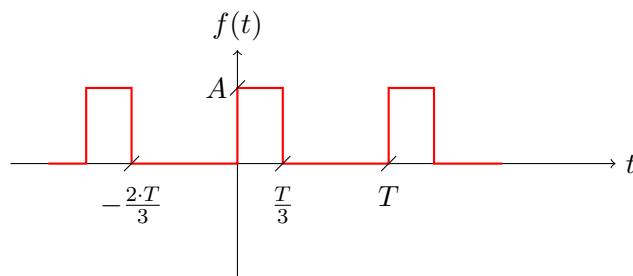
Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 |-A \cdot e^{a \cdot t}|^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} |A \cdot e^{-a \cdot t}|^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A \cdot e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A \cdot e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A)^2 \cdot (e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot (e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot dw \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^w \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{2 \cdot a \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^{-2 \cdot a \cdot dt} \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^{2 \cdot a \cdot 0} - e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2 \cdot a \cdot 0} \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^0 - e^{-a \cdot \tau} \right) - \left(e^{-a \cdot \tau} - e^0 \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} + 1) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (2 - 2 \cdot e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

Zadanie 8. Oblicz wartość energii okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

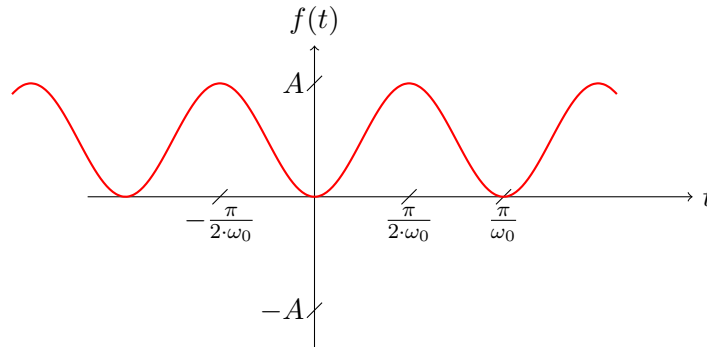
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (14)$$

Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T |0|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T 0 \cdot dt \\ &= A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \\ &= A^2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{3}} \\ &= A^2 \cdot \left(\frac{T}{3} - 0\right) \\ &= A^2 \cdot \frac{T}{3} \end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot \frac{T}{3}$

Zadanie 9. Oblicz wartość energii sygnału $f(t) = A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (15)$$

Podstawiamy do wzoru na enargie wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

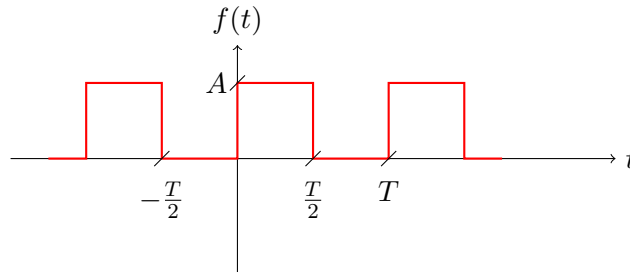
$$\begin{aligned}
 E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T \left| A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) \right|^2 \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\
 &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^4 \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{(e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{1 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^4 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^0 + 4 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^3 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^1 + 6 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^2 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^2 + 4 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^1 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^3 + (-e^{j\omega_0 \cdot t})^0 \cdot (e^{-j\omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-0 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-3 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-4 \cdot j\omega_0 \cdot t}}{2^4 \cdot j^4} \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t - 0 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j\omega_0 \cdot t - j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t - 2 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t - 3 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j\omega_0 \cdot t - 4 \cdot j\omega_0 \cdot t}}{16 \cdot 1} \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{0 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j\omega_0 \cdot t}}{16} \cdot dt \\
 &= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^0}{16} \cdot dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6}{16} \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \int_0^T \left(e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \right) dt \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\int_0^T e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + 6 \cdot \int_0^T dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 - 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_0^T + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0} \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0} \right) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0} \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0} \right) + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0 \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0 \right) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0 \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0 \right) + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1 \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1 \right) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1 \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1 \right) + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} - \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} + 6 \cdot T \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot T) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot T) + 6 \cdot T \right) \\
&= \left\{ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(8\pi) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(4\pi) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 0 - \frac{4}{\omega_0} \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2}{16} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3\pi}{\omega_0}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{4} \cdot \frac{3\pi}{\omega_0}$

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (17)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (19)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - \sin(0)) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - 0) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{21}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - 1) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{22}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{23}$$

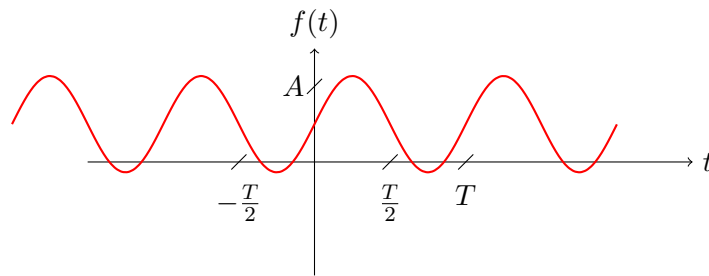
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

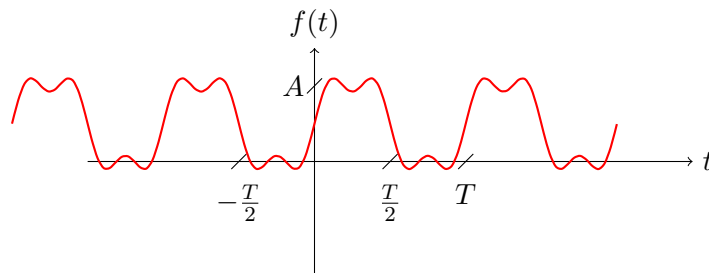
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \tag{24}$$

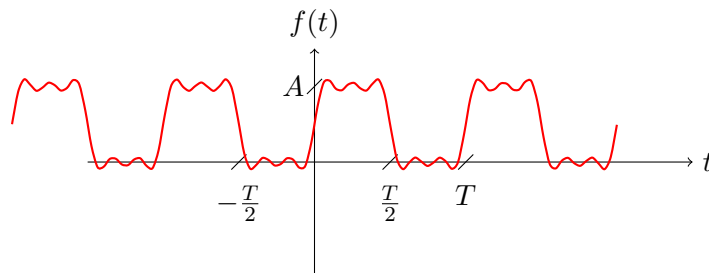
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



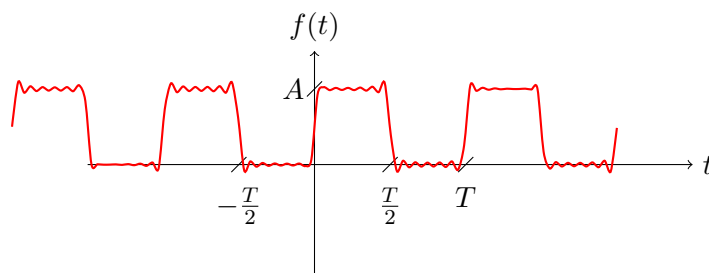
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



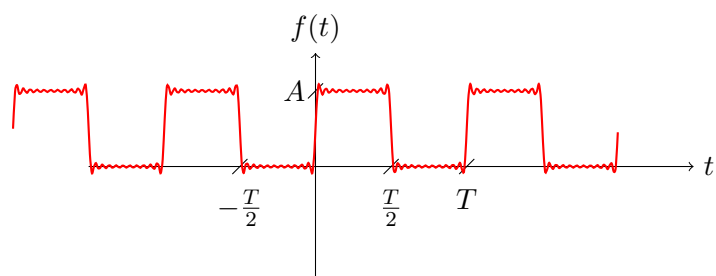
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

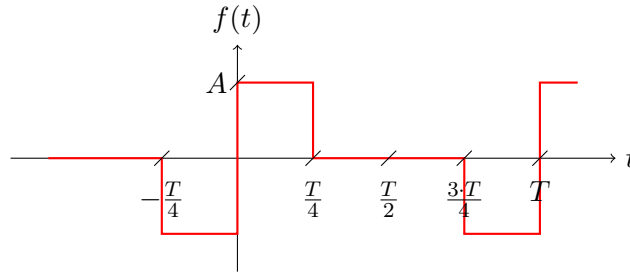


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 11. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (25)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (26)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (28)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\sin(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(\sin(0) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(0 - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{30}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \cos\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(2 - 2 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot \frac{\pi}{2}))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{32}$$

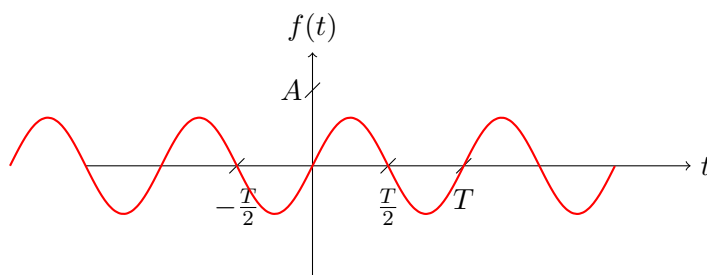
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$

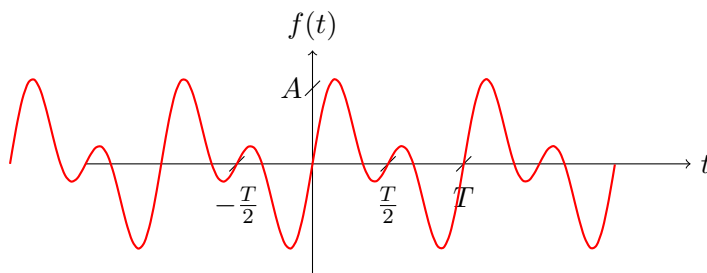
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (33)$$

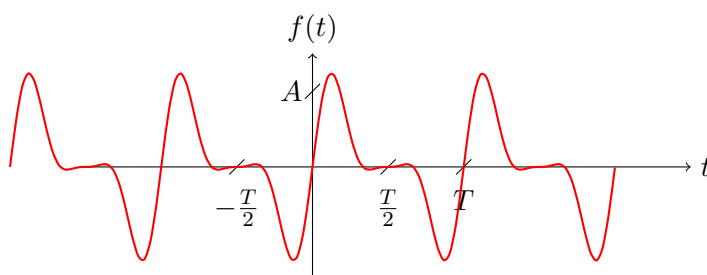
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



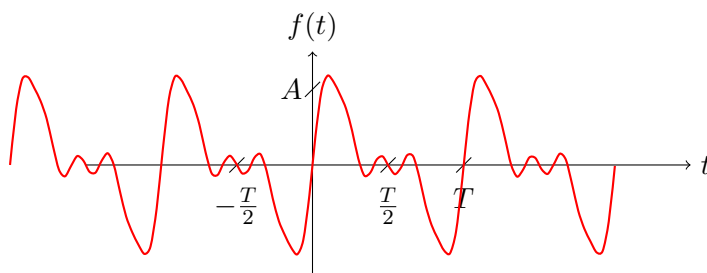
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



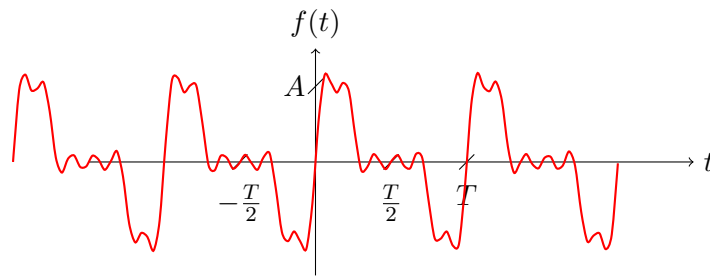
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



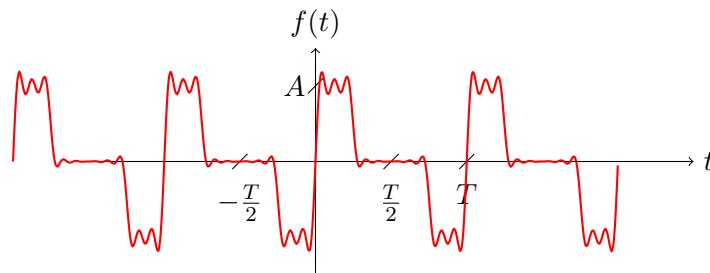
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



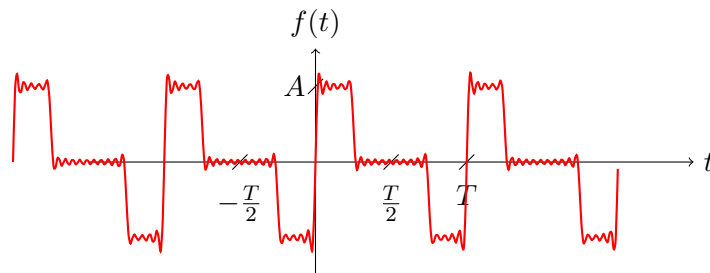
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

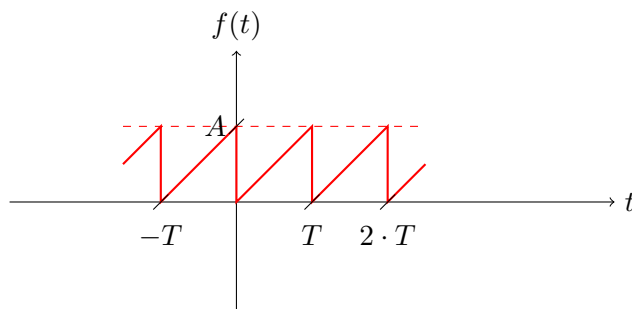


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (34)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązując go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (35)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (36)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \quad (37)$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (38)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = -\frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 1\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(0)) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (0 - 0) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} \right) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \\ &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (39)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (40)$$

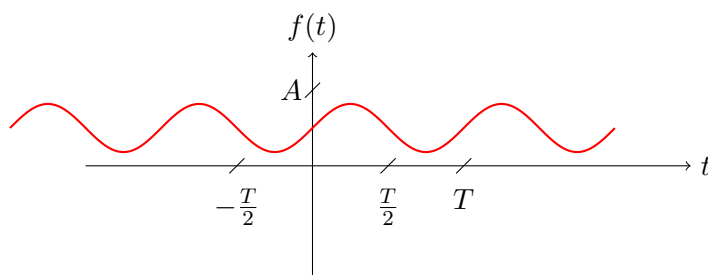
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{3 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{5 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{6 \cdot \pi}$

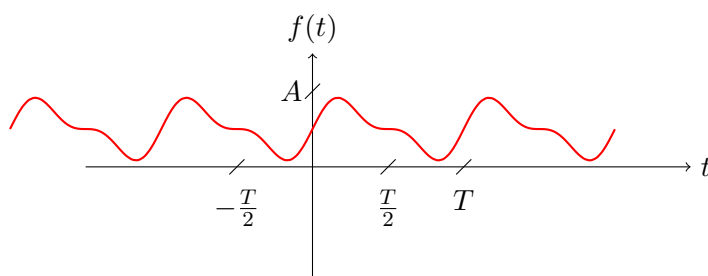
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (41)$$

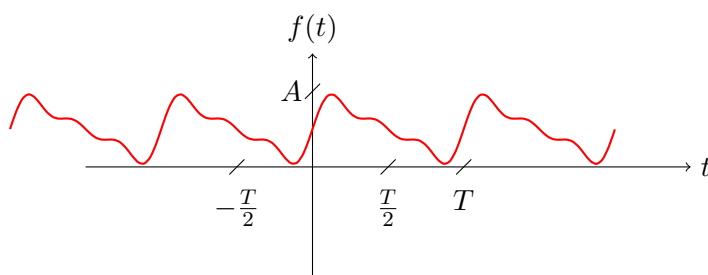
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



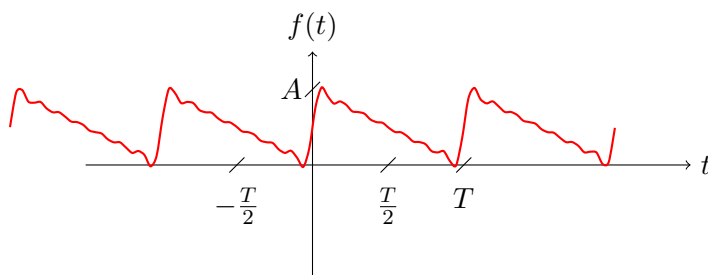
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



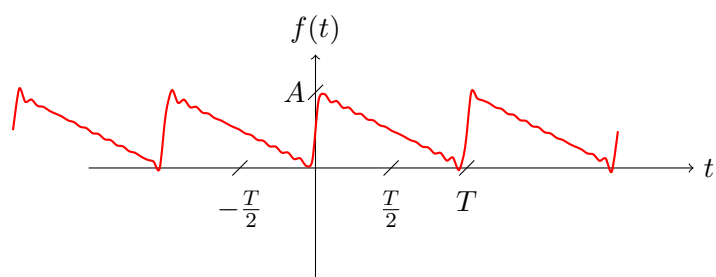
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

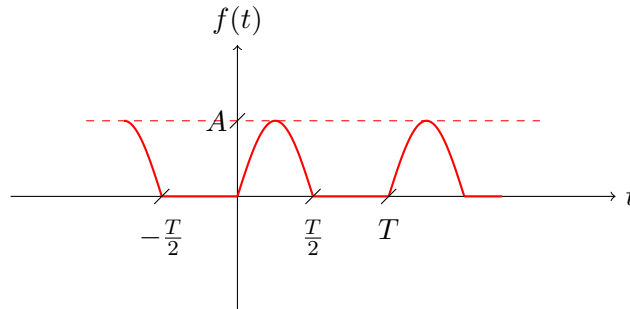


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (43)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (44)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2j} + \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2j} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-\cos(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-\cos(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(0)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1-k)) - \cos(0)) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1+k))) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1}{1-k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k))}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) + 1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - \cos(\pi \cdot (1+k)) + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(\pi \cdot (1-k)) - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{1 - k^2} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi \cdot (1+k)) = \cos(\pi + k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \\ \cos(\pi \cdot (1-k)) = \cos(\pi - k \cdot \pi) = -\cos(-k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + \cos(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) + \cos(k \cdot \pi) + k \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+\cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost a_1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2j} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \\
 &= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (\cos(2\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (45)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1+k)) - \sin(0)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1-k)) - \sin(0)) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost b_1

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (\sin(2\pi) - \sin(0)) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\ b_1 &= \frac{A}{2} \\ b_k &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

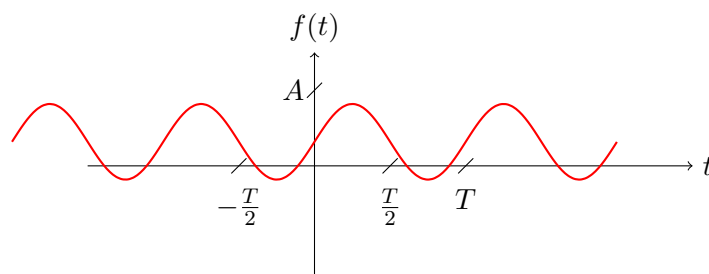
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35} \frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

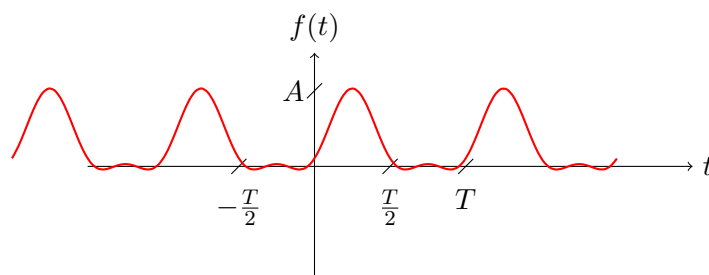
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (47)$$

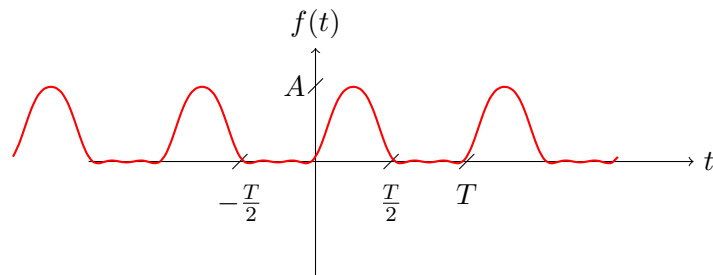
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



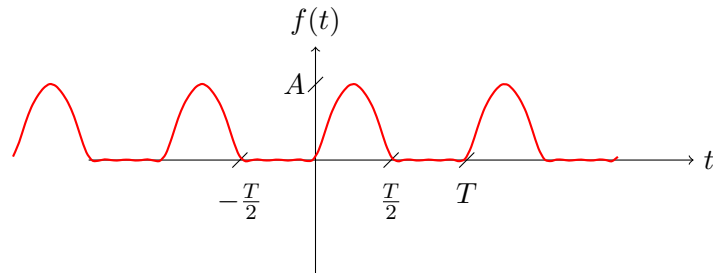
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



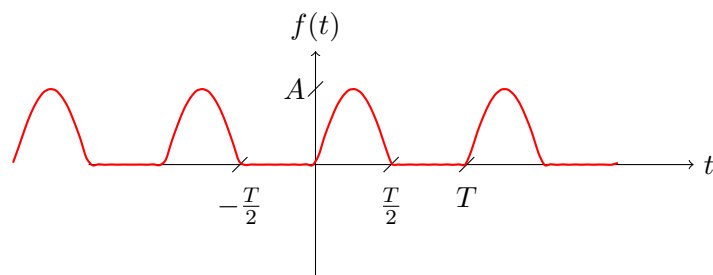
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

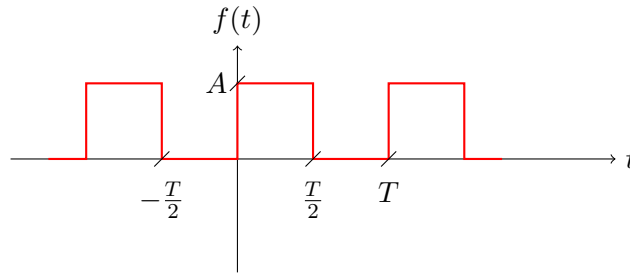


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 14. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (48)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (49)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (51)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0 \right) \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{52}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{53}$$

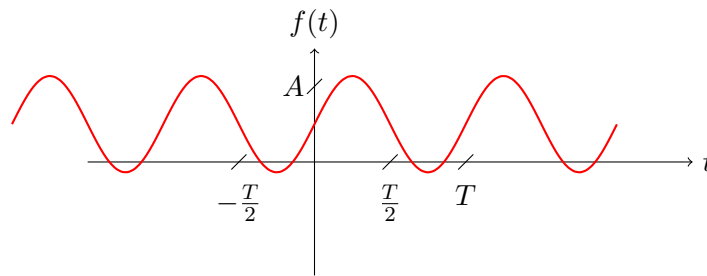
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg \{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

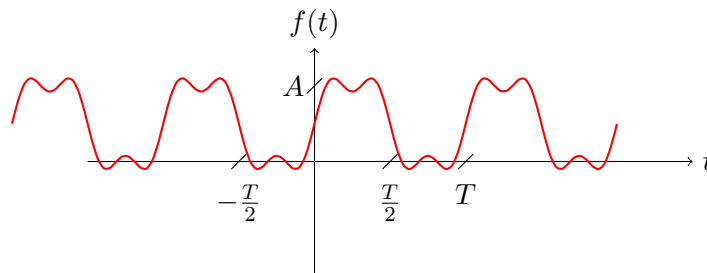
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{54}$$

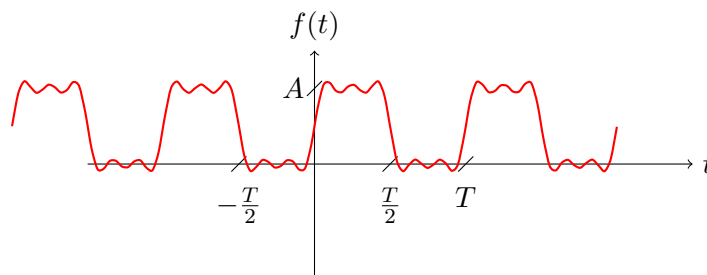
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



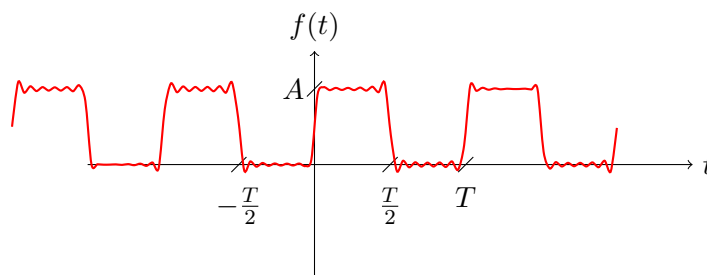
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



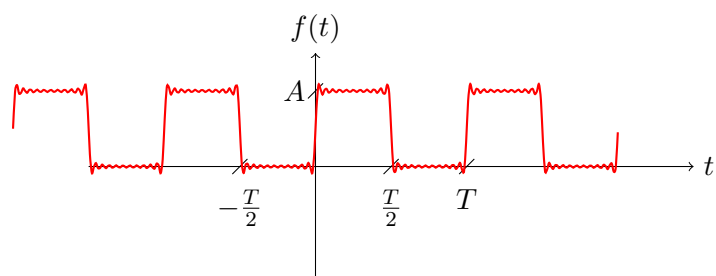
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

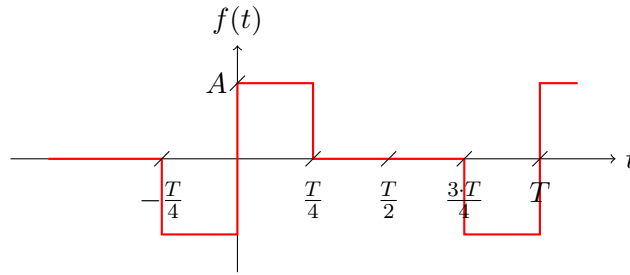


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 15. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (55)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (56)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (58)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-\frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot dt + \frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^0 - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(2 - \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= -j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) - 1)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = 0$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \quad (59)$$

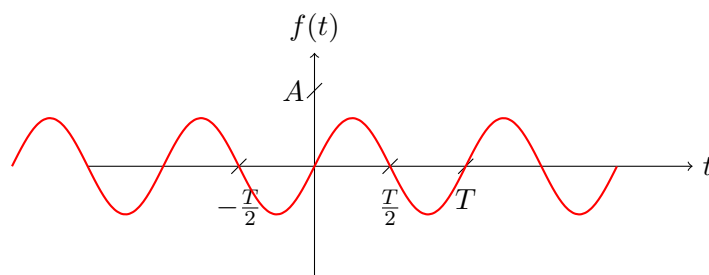
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

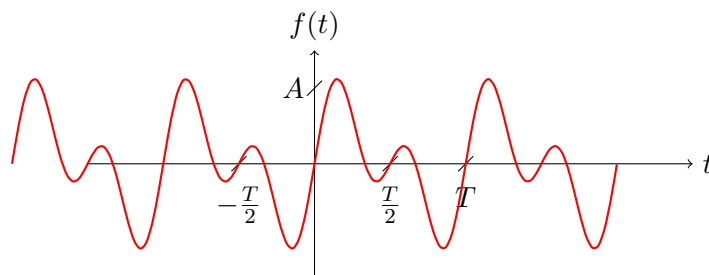
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (60)$$

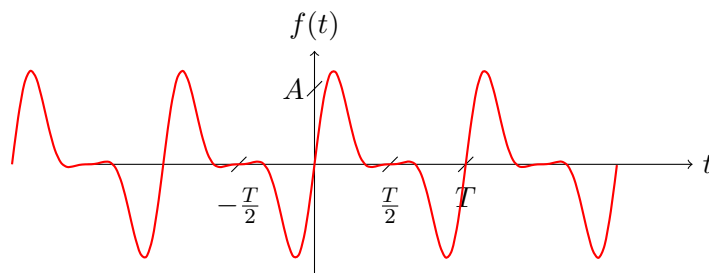
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



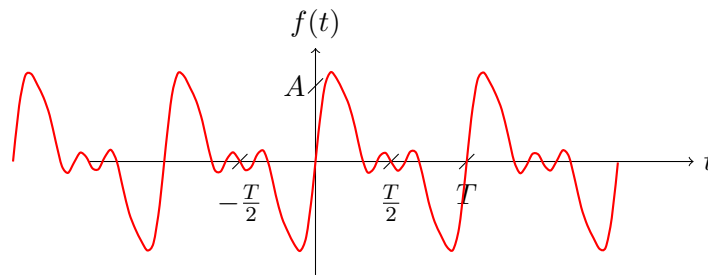
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



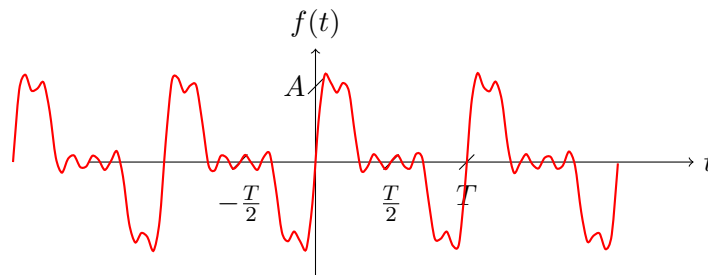
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



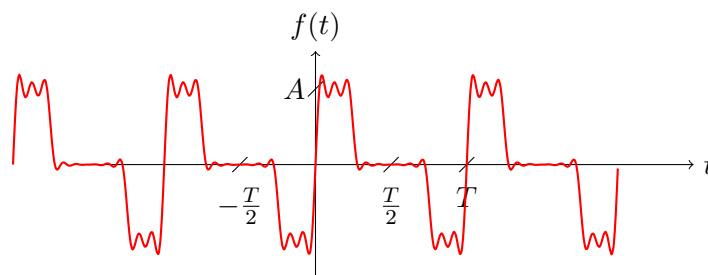
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



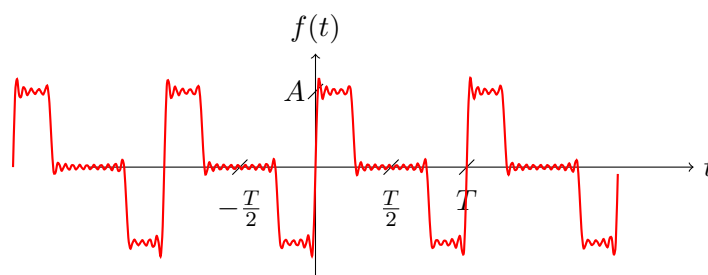
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

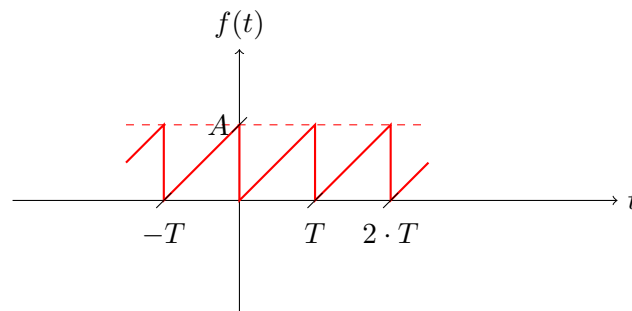


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 16. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (61)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązując go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (62)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (63)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - 0 \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T^2}{(-j \cdot k \cdot 2\pi)^2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + \frac{T^2}{-(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - 0 \right) \\
&= \frac{A}{-j \cdot k \cdot 2\pi}
\end{aligned}$$

$$= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = \frac{A}{2}$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \quad (64)$$

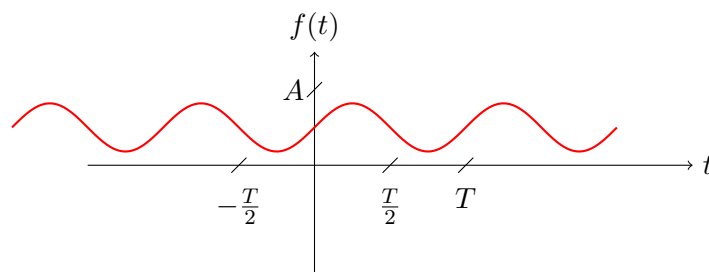
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

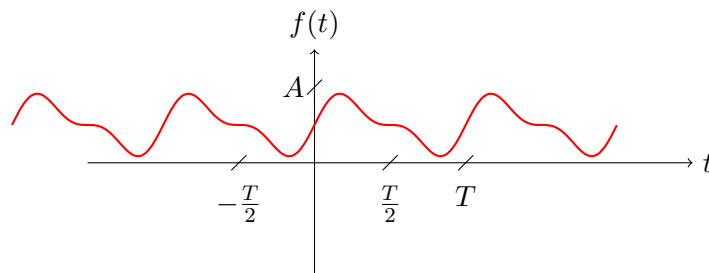
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (65)$$

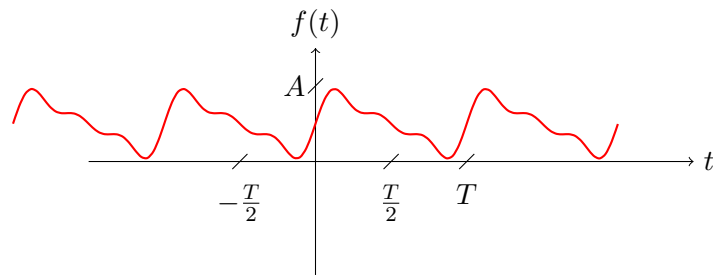
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



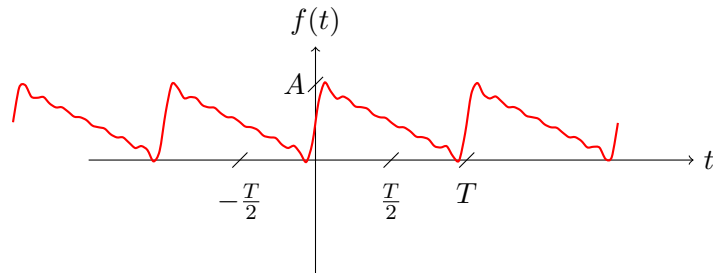
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



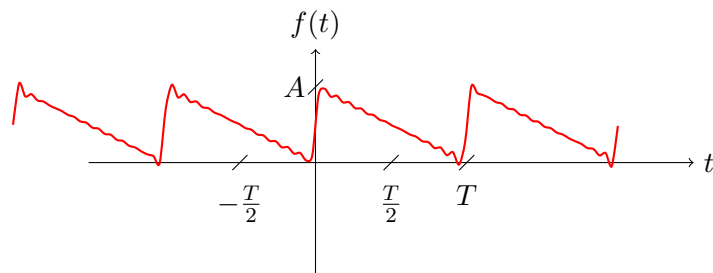
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

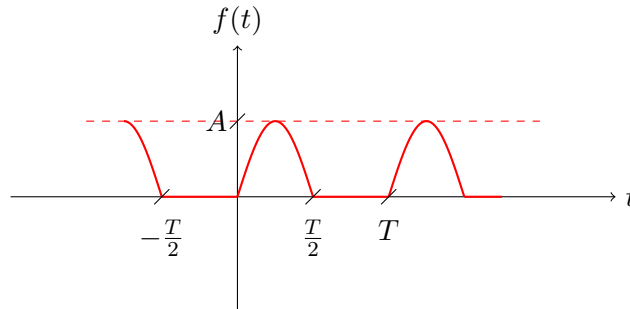


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 17. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (66)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (67)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (68)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_1

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4j} \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_1 wynosi $-j \cdot \frac{A}{4}$

F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_{-1}

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= -\frac{A}{4j} \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_{-1} wynosi $j \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned} \tag{69}$$

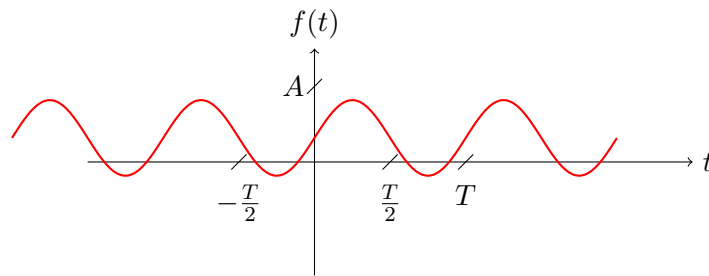
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

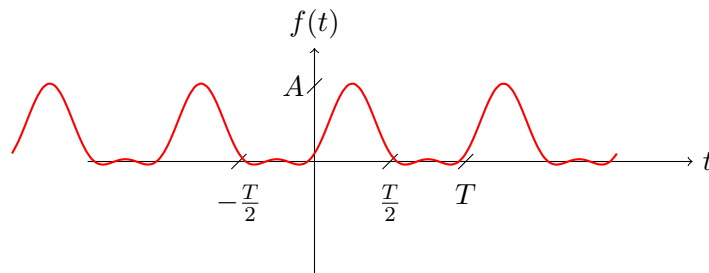
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{70}$$

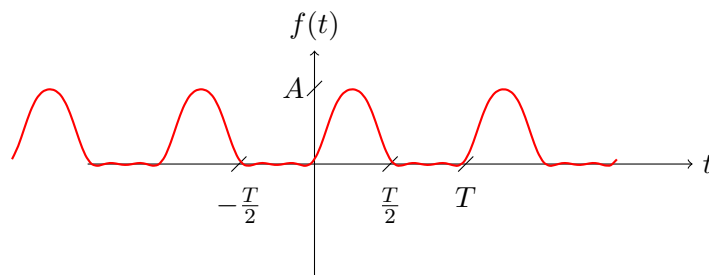
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



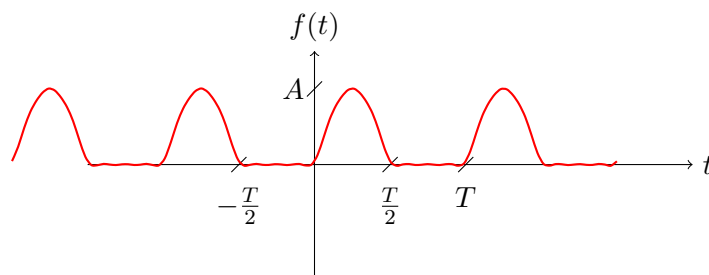
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



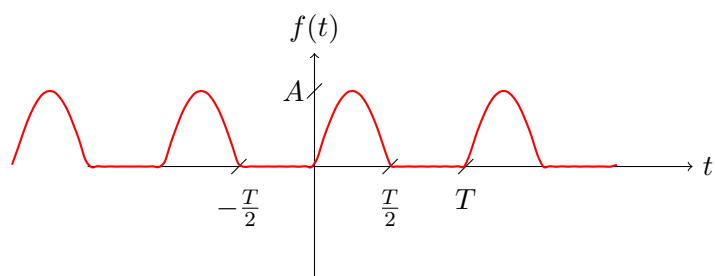
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

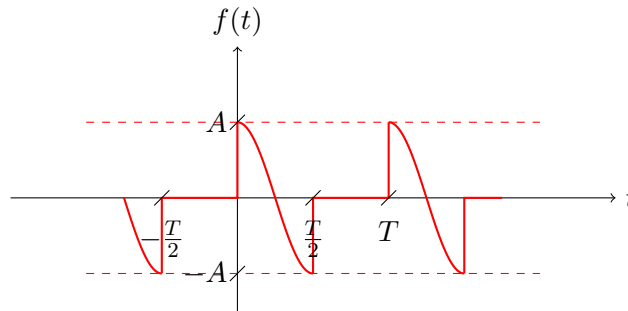


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 18. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału cosinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (71)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (72)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (73)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1 - k^2} \right) \\
&= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)$.

Dla $k = 1$ i $k = -1$ trzeba wyznaczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \begin{cases} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{cases} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j 2\pi} - e^0 \right) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{4}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Tak więc ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= \frac{A}{4} \\ F_{-1} &= \frac{A}{4} \\ F_k &= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

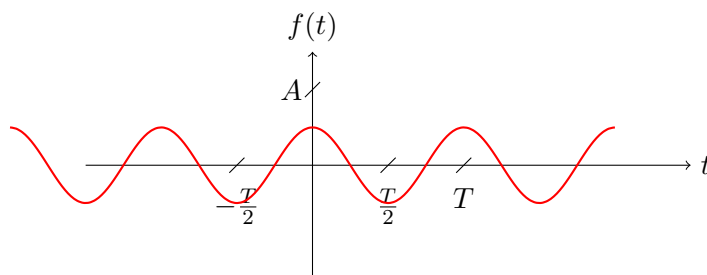
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$ F_k $	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

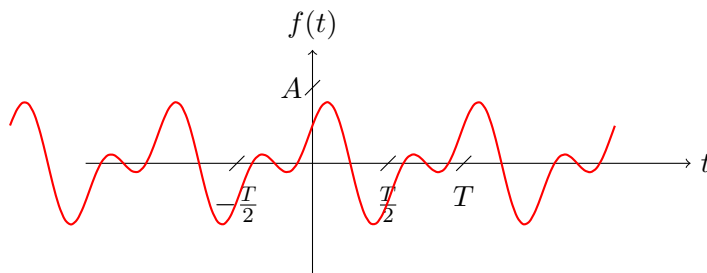
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (75)$$

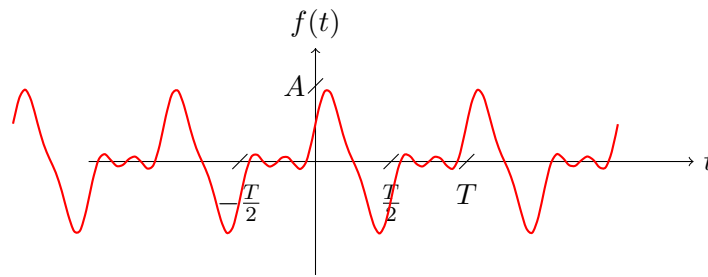
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



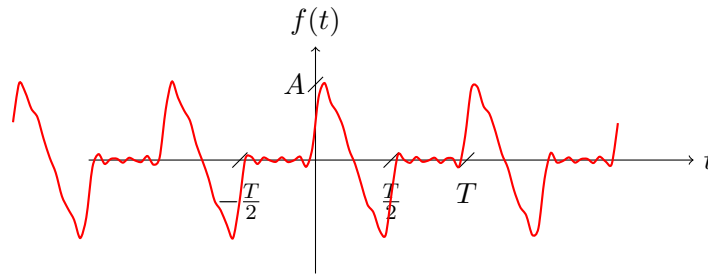
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



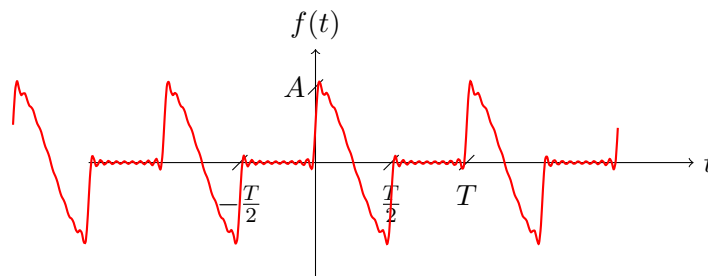
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



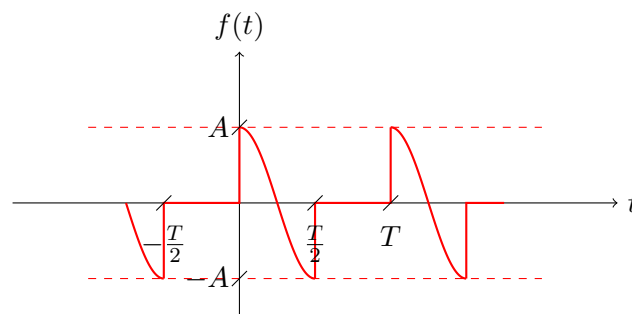
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



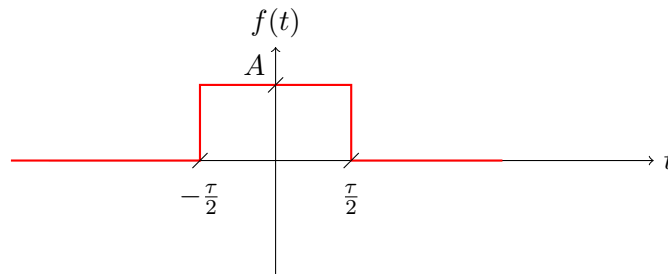
W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



Zadanie 19. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (76)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (77)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

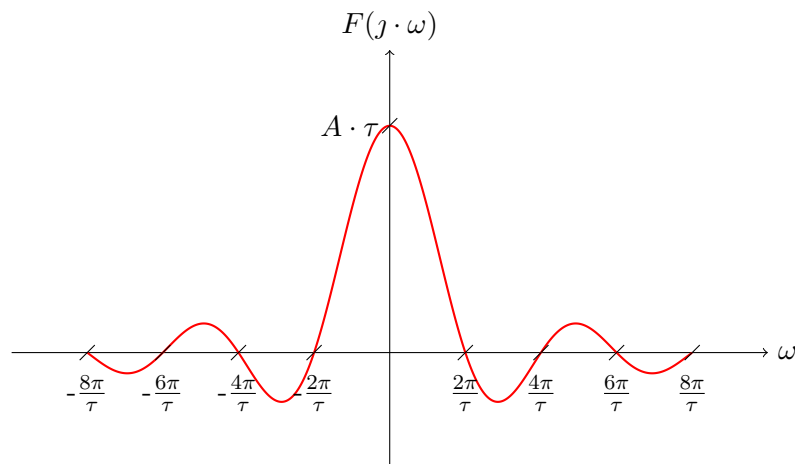
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \omega \cdot t \\ dz = -j \cdot \omega \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz \end{array} \right\} \\ &= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot \left(e^{-j\omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \cdot (-\frac{\tau}{2})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right) \\
&= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = \text{Sa}(x) \right\} \\
&= A \cdot \tau \cdot \text{Sa} \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot \text{Sa}(\omega \cdot \frac{\tau}{2})$

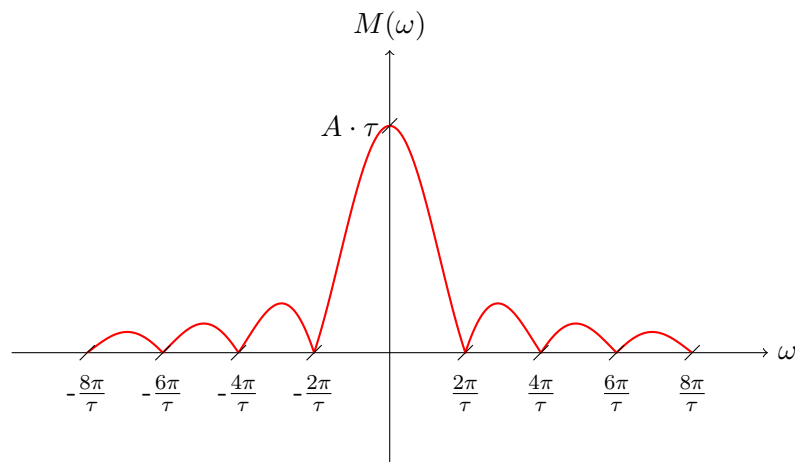
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot \text{Sa} \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right) \quad (78)$$



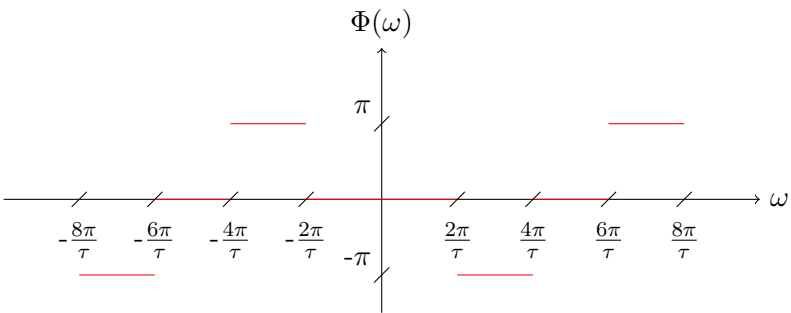
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (79)$$

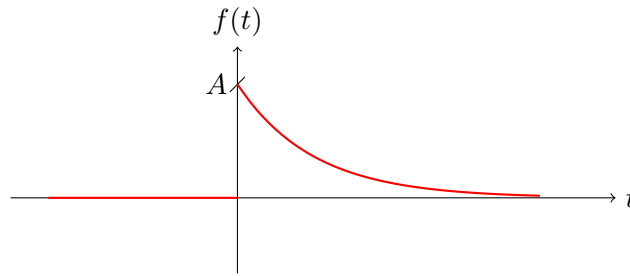


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}} \right) \quad (80)$$



Zadanie 20. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (81)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (82)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 0 + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -(a+j\omega) \cdot t \\ dz = -(a+j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{A}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{A}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\omega) \cdot \tau} - e^{-(a+j\omega) \cdot 0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\omega)\cdot\tau} - e^0) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\omega)\cdot\tau} - 1) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega)\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau+j\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot e^{j\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot (0 - 1) \\
&= \frac{A}{a+j\cdot\omega}
\end{aligned}$$

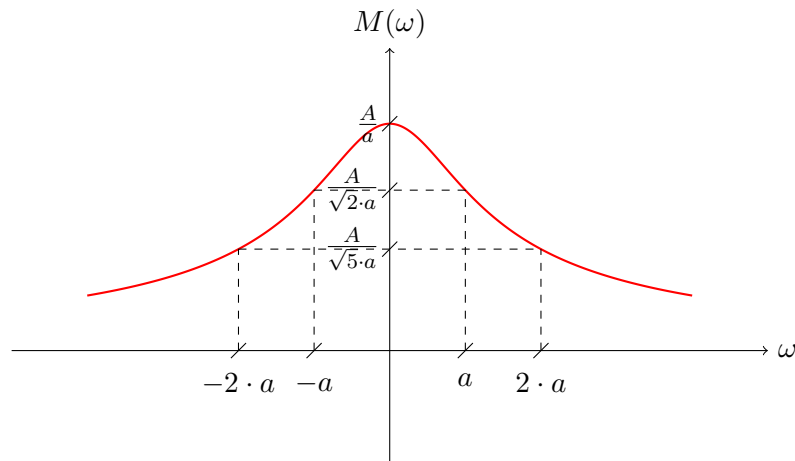
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{A}{a+j\omega}$

Wyznaczymy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} \\
&= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} \cdot \frac{(a-j\cdot\omega)}{(a-j\cdot\omega)} \\
&= \frac{A \cdot (a-j\cdot\omega)}{(a^2+\omega^2)} \\
&= \frac{A \cdot a}{(a^2+\omega^2)} - j \cdot \frac{A \cdot \omega}{(a^2+\omega^2)}
\end{aligned} \tag{83}$$

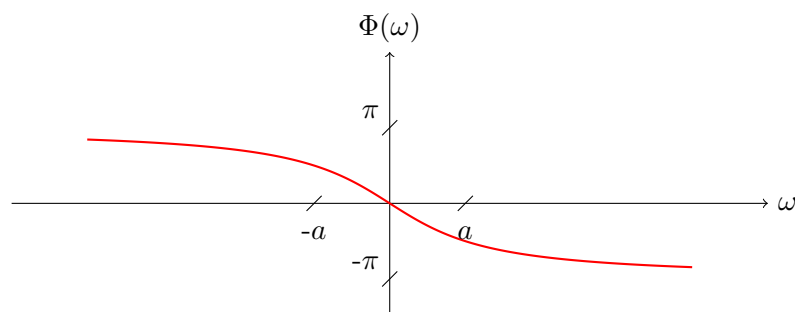
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| \\
&= \sqrt{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2+\omega^2)}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{A^2 \cdot (a^2+\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2+\omega^2)}} \\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}
\end{aligned} \tag{84}$$

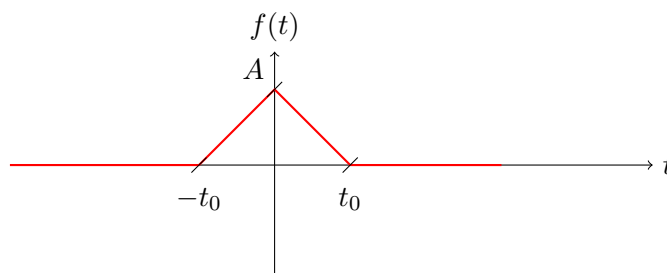


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(j\omega)\}}\right) \\
 &= \arctg\left(\frac{\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)}\right)}{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)}\right)}\right) \\
 &= \arctg\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)} \cdot \frac{(a^2 + \omega^2)}{A \cdot a}\right) \\
 &= \arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned} \tag{85}$$



Zadanie 21. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (86)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (87)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (88)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \\ -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \\ \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \\ \begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases} \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (89)$$

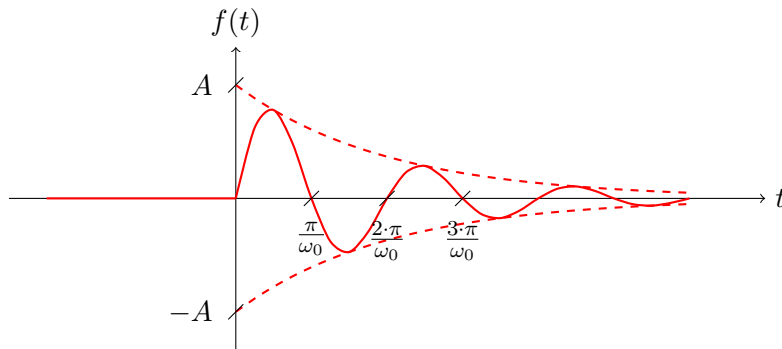
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{t_0} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad - \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{t_0} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u &= t \\ du &= dt \end{array} \quad \begin{array}{ll} dv &= e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ v &= \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left. t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &\quad + A \cdot \left(\left. \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right|_{-t_0}^0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
& + A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) \right) \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (1 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) \right) \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1) \\
& = -\frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \\
& + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{j \cdot \omega} \\
& = -\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& = \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) \\
& = \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\} \\
& = \left\{ \cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \right\} \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})) \\
& = \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) \\
& = \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) \\
& = \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\
& = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \text{Sa}^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 22. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (90)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (91)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 0 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \begin{cases} z = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t & w = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t \\ dz = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot dt & dw = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{(-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot dz & dt = \frac{1}{(-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot dw \end{cases} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{dz}{(-a+j\omega_0-j\omega)} - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^w \cdot \frac{dw}{(-a-j\omega_0-j\omega)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^w \cdot dw \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^w \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \end{aligned}$$

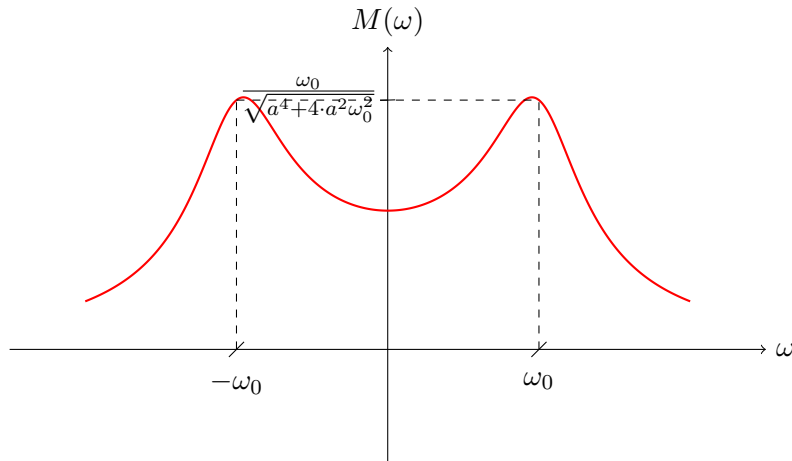
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{(-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 0} \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{(-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 0} \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&= \frac{-1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} + \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \\
&= \frac{-(2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)) + 2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \\
&= \frac{2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 + 2 \cdot j^2 \cdot \omega - 2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 - 2 \cdot j^2 \cdot \omega}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + a \cdot j \cdot \omega_0 + a \cdot j \cdot \omega - a \cdot j \cdot \omega_0 - j^2 \cdot \omega_0^2 - j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + a \cdot j \cdot \omega + j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + j^2 \cdot \omega^2)} \\
&= \frac{4 \cdot j^2 \cdot \omega_0}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - j^2 \cdot \omega_0^2 + j^2 \cdot \omega^2)} \\
&= \frac{\omega_0}{a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + \omega_0^2 - \omega^2} \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2)} \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

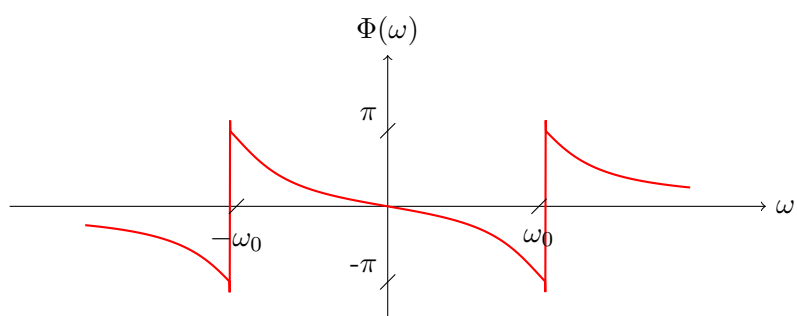
$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right| \\
&= \left\{ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right\} \\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ |a + j \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2)^2 + (2 \cdot a \cdot \omega)^2}}
\end{aligned}$$

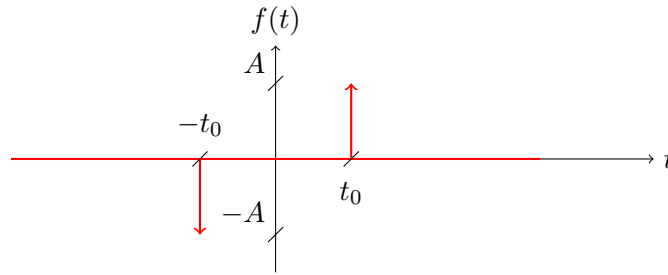


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right) \\
&= \left\{ \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \right\} \\
&= \arg(\omega_0) - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega) \\
&= \left\{ \arg(a + j \cdot b) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \\
&= \arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= \arctg(0) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= 0 - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= -\arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



Zadanie 23. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opisujemy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \quad (92)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (93)$$

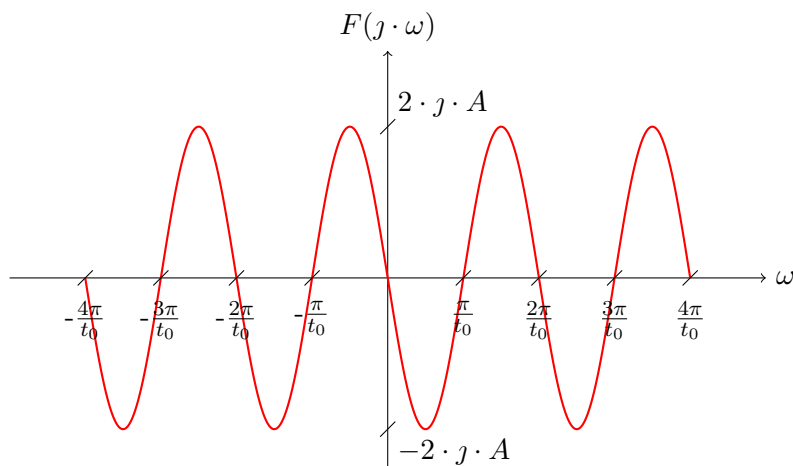
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
 &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \\
 &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} \\
 &= A \cdot (e^{-j\omega \cdot t_0} - e^{j\omega \cdot t_0}) \\
 &= A \cdot (-e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
 &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
 &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
 &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
 &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
 \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

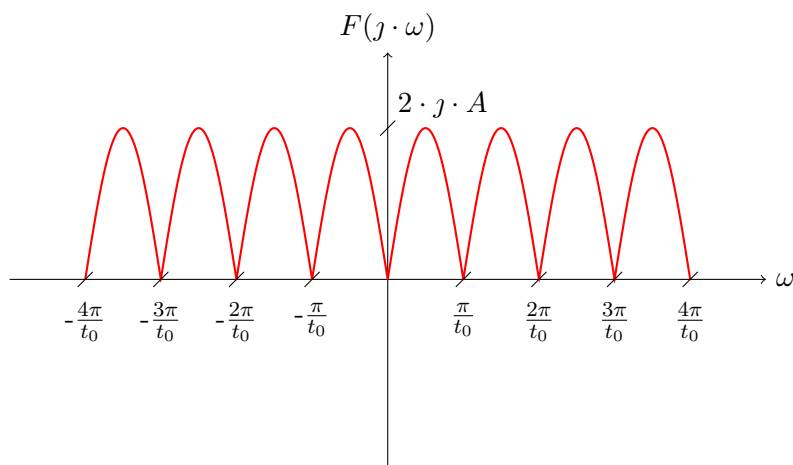
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \quad (94)$$



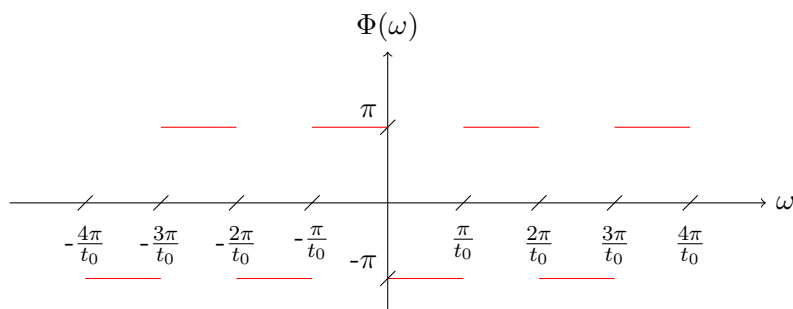
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (95)$$

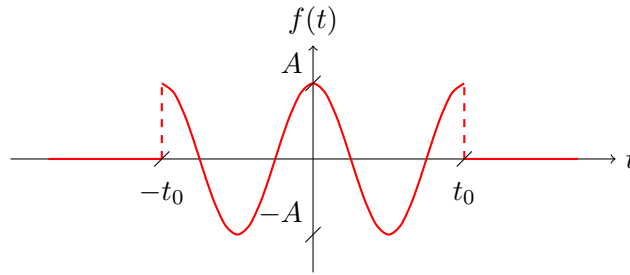


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}}\right) \quad (96)$$



Zadanie 24. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (97)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (98)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

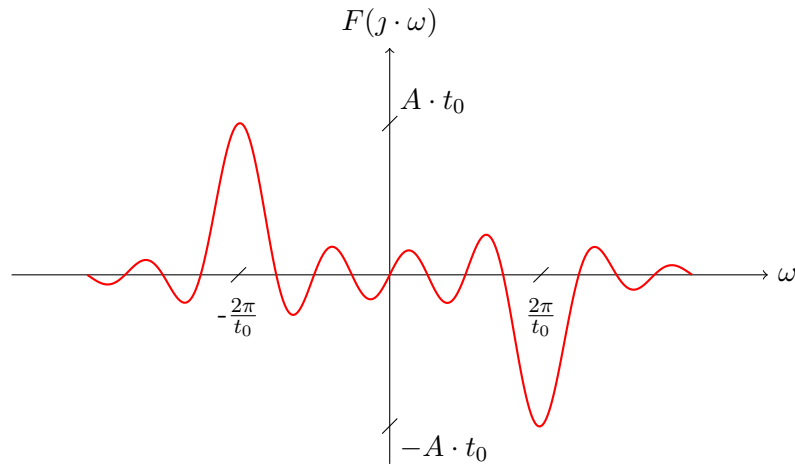
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot e^{z_1} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot e^{z_2} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot (-t_0)} \right) + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot (-t_0)} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} \right) + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} \right) + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0} \right) \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= A \cdot t_0 \cdot \left(Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right)$

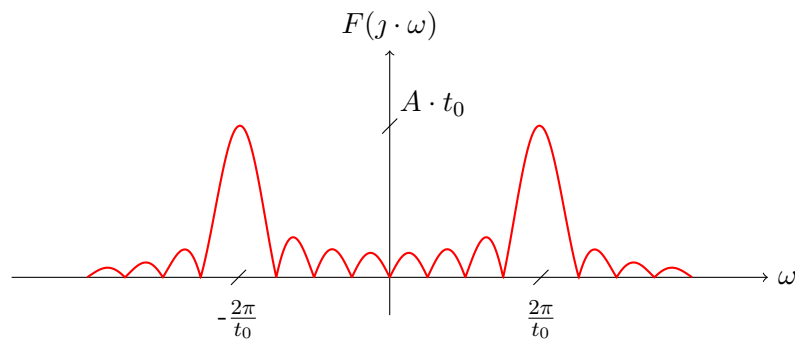
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \quad (99)$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

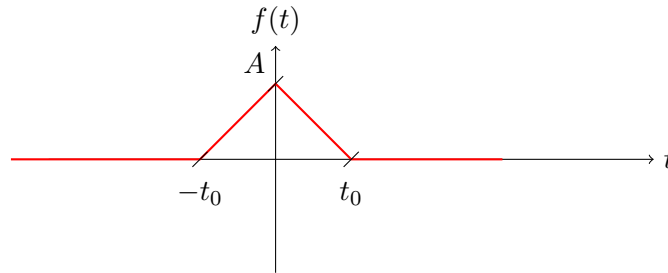
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (100)$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}} \right) \quad (101)$$

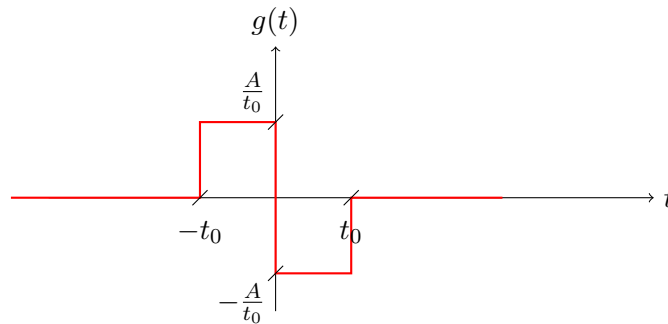
Zadanie 25. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (102)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (103)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (104)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (105)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (106)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych prostokątów, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \quad (107)$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right)$$

$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$$

Wyznamy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(j\omega)$.

Z tablic matematycznych wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(j\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (108)$$

Teraz wyznaczymy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(j\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (109)$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$\begin{aligned}G(j\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) - A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ &\quad \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\ G(j\omega) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

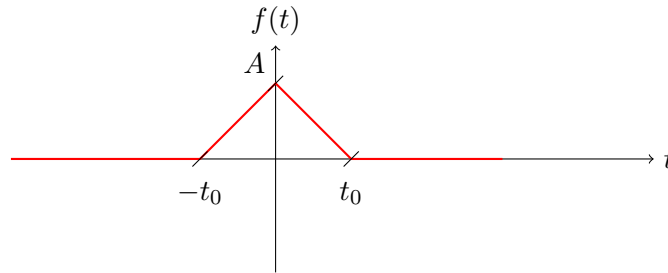
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (110)$$

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa(0) \cdot \sin(0) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot 1 \cdot 0 \\ G(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\ &= \frac{A \cdot 2 \cdot t_0}{\omega \cdot t_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

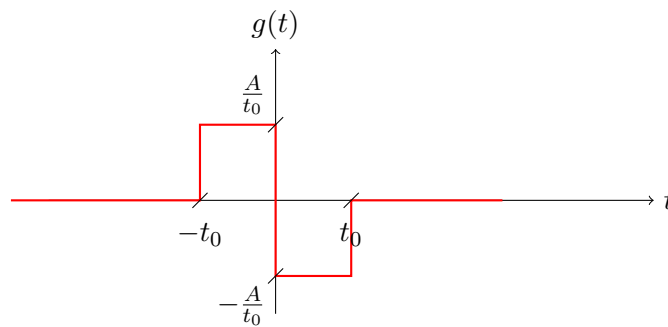
Zadanie 26. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (111)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

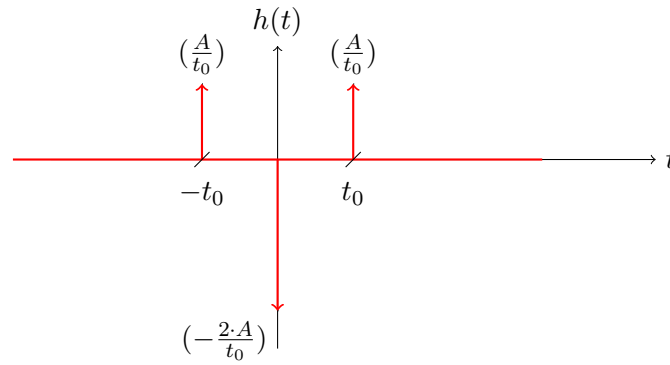
$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (112)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (113)$$

Pytanie, czy można dalej uprościć sygnał $g(t)$ dokonując jego różniczkowania. Wyznamy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (114)$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (115)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) \cdot dx \quad (116)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \quad (117)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (118)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (-t_0))\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (t_0))\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - 2 + e^{-j\omega \cdot t_0}) \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{t_0} \cdot (2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0) - 2) \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$H(j\omega) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \quad (119)$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{2 \cdot A}{j \cdot 0 \cdot t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot dt + \int_0^{t_0} (-\frac{A}{t_0}) \cdot dt \\ G(0) = \frac{A}{t_0} \cdot (0 - (-t_0)) - \frac{A}{t_0} \cdot (t_0 - 0) = A - A \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{j^2 \cdot \omega^2 \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \\ \cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \right) \\ &= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$