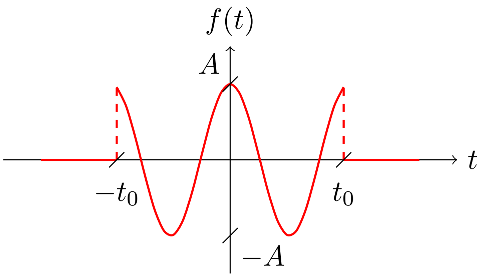
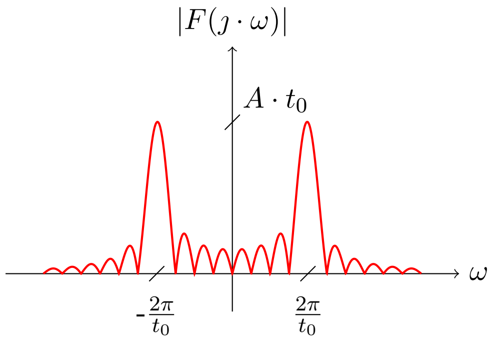
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ -Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

15 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

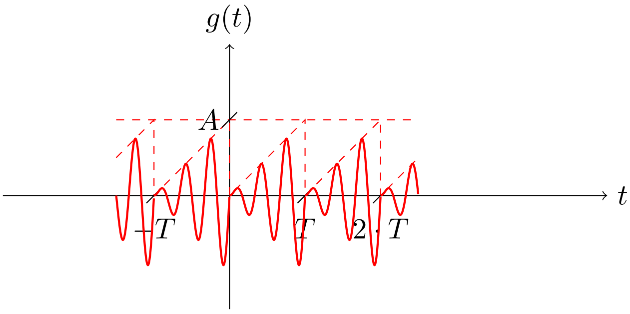
Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu **??**



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania **??**

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \; sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \; \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(f\left(t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - f\left(t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} \right)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu **??** wynoszą:

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$g^1(t) = f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t}$$
$$G_k^1 = F_{k-k_0}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$g(t) = \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t}$$
$$g(t) = g^1(t) - g^2(t)$$
$$G_k = G_k^1 - G_k^2$$
$$G_k = \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right)$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} = e^{\jmath \cdot \frac{2\ cdot 6\pi}{T} \cdot t}$$
$$= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 6$$

$$e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} = e^{-\jmath \cdot \frac{2\ cdot 6\pi}{T} \cdot t}$$
$$= e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t}$$
$$= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-6) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -6$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$G_k = \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^1)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^1}-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^2)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^2}-1\right)\right)=$$
$$=\left\{\ k_0^1=6\quad k_0^2=-6\ \right\}=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k-(-6))\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-(-6)}-1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k+6}-1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{-6}-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{6}-1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right)-\jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}-\jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{k-6}-\frac{1}{k+6}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6}{(k-6)\cdot(k+6)}-\frac{k-6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6-k+6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{A}{4\pi}\left(\frac{12}{k^2-36}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{k^2-36}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right)=$$
$$=\frac{3\cdot A}{\pi\cdot(k^2-36)}\cdot\left((-1)^{k}-1\right)$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{3\cdot A}{\pi\cdot(k^2-36)}\cdot\left((-1)^k-1\right)$, dla $k\neq 6\wedge k\neq -6$. Oznacza to iż współczynnik dla $k=6$ i $k=-6$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_6

$$G_6=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{6-k_0^1}-F_{6-k_0^2}\right)=$$
$$=\left\{\ k_0^1=6\quad k_0^2=-6\ \right\}=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{6-6}-F_{6-(-6)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0-F_{6+6}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0-F_{12}\right)$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_{12}

$$G_6=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0-F_{12)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\frac{A}{2}-\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{12}-1\right)\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\cdot\frac{A}{2} - \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot\Big((-1)^{12}-1\Big) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot(1-1) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot(0) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot 0 = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - 0 = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-6}

$$
\begin{aligned}
G_{-6} &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{-6-k_0^1} - F_{-6-k_0^2}\Big) = \\
&= \Big\{\ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6\ \Big\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{-6-6} - F_{-6-(-6)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-12} - F_{-6+6}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-12} - F_{0}\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-12} oraz F_0

$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{-12} - F_{0)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{-12\cdot 2\pi}\cdot\Big((-1)^{-12}-1\Big) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot(1-1) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot(0) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(0 - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(-\frac{A}{2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\frac{A}{2} = \\
&= -\frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
G_{-6} = -\frac{A}{4\cdot\jmath}
$$

$$G_6 = \frac{A}{4 \cdot \jmath}$$
$$G_k = \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3