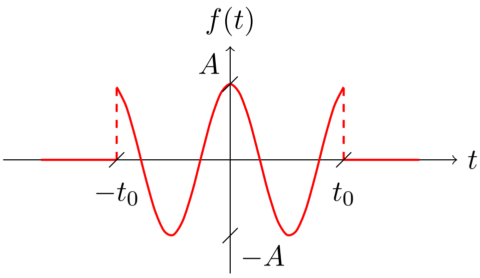
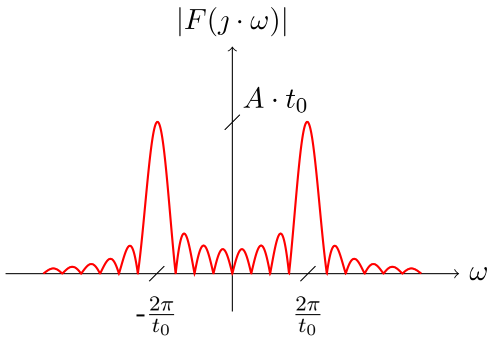
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

7 maja 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

2.2 Zespolony szerego Fouriera

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

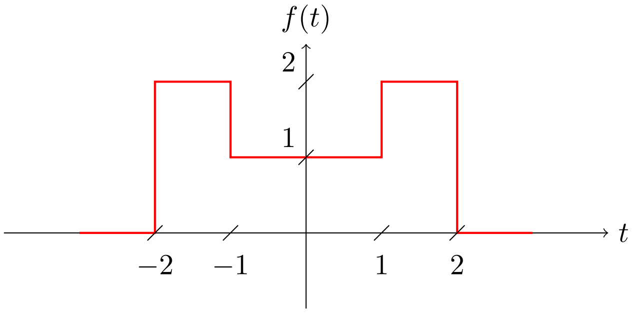
Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Podaj co najmniej 2 sposoby opisu sygnału $f(t)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \tag{3.1}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = 2 \cdot f_1(t) - f_2(t) \tag{3.2}$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$f_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{4}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) \tag{3.3}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = 2 \cdot Sa\left(\omega\right) \tag{3.4}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2 \cdot (4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right)) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right) = 8 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ to $F(\jmath\omega) = 8 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$.
Inne możliwości opisu sygnał $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$
$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

Rozważmy następujący opis sygnału $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno trasformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$f_2(t) = \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right)$$
$$f_3(t) = \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1\left(\jmath\omega\right)$.
Z treści zadania wiemy że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{4}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) \tag{3.5}$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2\left(\jmath\omega\right)$. Z treści zadania wiemy że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = G(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} \tag{3.6}$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $f_3(t)$, czyli $F_3\left(\jmath\omega\right)$. Z treści zadania wiemy że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_3(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(\jmath\omega) = G(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Pi\left(t+\frac{3}{2}\right)\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}$$
$$\Pi\left(t+\frac{3}{2}\right)\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_3(t)$ to:

$$F_3(\jmath\omega)=\mathcal{F}\{f_3(t)\}=Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}} \tag{3.7}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\} &= 4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}+Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}=\\
&=4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}+e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}\right)=\\
&=4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}+e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{3}{2}}}{2}=\\
&=\left\{cos\left(x\right)=\tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}=\\
&=4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot 2\cdot cos\left(\omega\cdot\frac{3}{2}\right)=\\
&=4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+2\cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot cos\left(\omega\cdot\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)=\Pi\left(\frac{t}{4}\right)+\Pi\left(t-\frac{3}{2}\right)+\Pi\left(t+\frac{3}{2}\right)$ to $F(\jmath\omega)=4\cdot Sa\left(2\cdot\omega\right)+2\cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot cos\left(\omega\cdot\frac{3}{2}\right)$.

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3