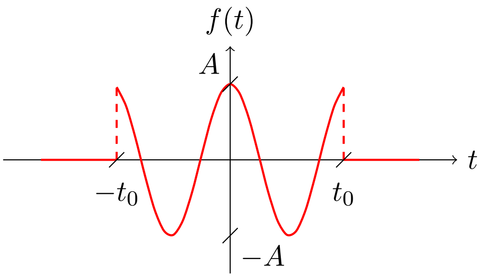
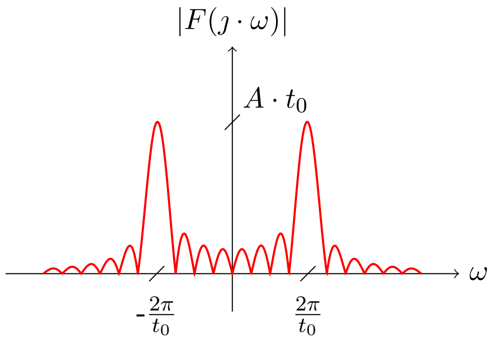
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

19 czerwca 2019

Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone
ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

0.1 Podstawowe własności sygnałów

0.1.1 Podstawowe własności sygnałów

Wartość średnia

Energia sygnału

Moc sygnału

0.2 Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

0.2.1 Trygonometryczny szerego Fouriera

0.2.2 Zespolony szerego Fouriera

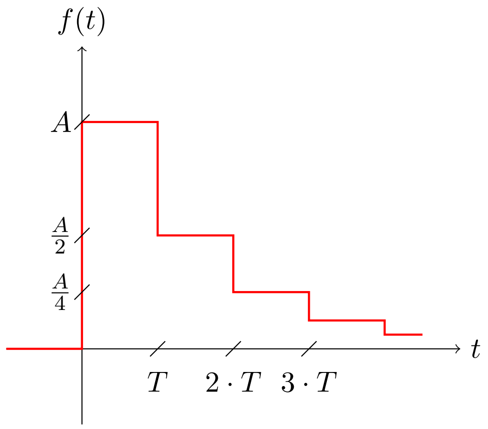
0.2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

0.3 Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

0.3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

0.3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzesuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowość transformaty fouriera

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

możemy napisać że:

$$F(\jmath\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega)$$

gdzie $H_n(\jmath\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zacznijmy od skali.

Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \\ &= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{1}{T}}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\begin{aligned} h_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(\jmath\omega) \\ h(t) = h_n(t-t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = H_n(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(\jmath\omega) &= H(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \\ &= T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot H_n(\jmath\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\frac{A}{2^n}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot A\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n \\ &= A\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n \end{aligned}$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= A\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}\right)^n \\ &= \left\{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}q^n = \frac{1}{1-q}\right\} \\ &= A\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}} \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(\jmath\omega) = A\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot T}}$$

0.3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

0.4 Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

0.4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

0.4.2 Filtry

© 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3