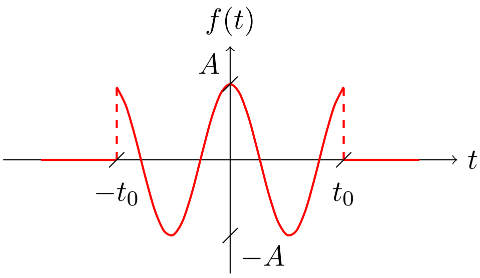
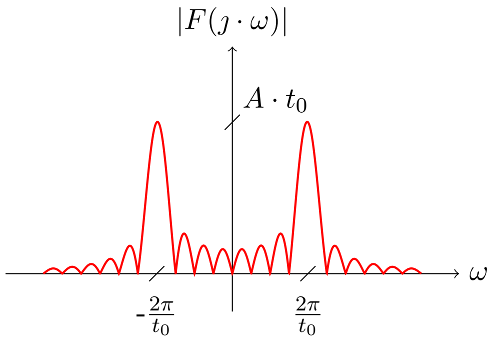
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\; Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) - Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

17 czerwca 2019

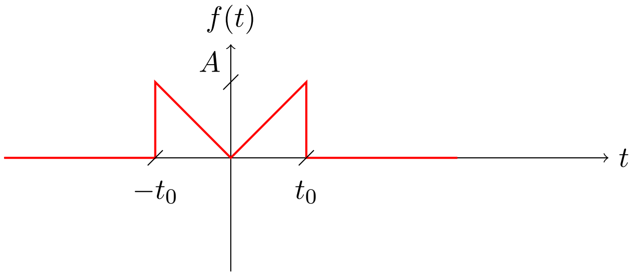
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{1}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci funkcji $f(t)$. Funkcja ta jest określona za pomocą równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{2}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0; 0)$ oraz $(t_0; A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

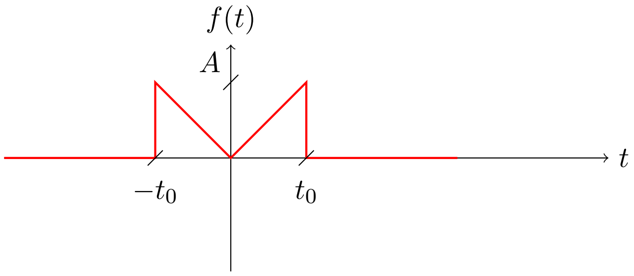
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\
&= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \end{matrix} \right\} \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{0}^{t_0} - \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} \right) \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{0}^{t_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right)$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0}\right)\right)$$
$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right)$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{0}\right)\right)$$
$$= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)\right)$$
$$- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right)$$
$$- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right)$$
$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2}$$
$$= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot \jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath}$$
$$+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath}$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)\right)$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath}$$
$$+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2}\right)$$
$$= \left\{\begin{matrix} sin\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \\ cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)$$
$$= \left\{sin^2\left(x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos\left(2 \cdot x\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \frac{sin(x)}{x}\right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Możemy zauważyć iż przedstawiony sygnał można otrzymać przez oodjęcie trójkąta od sygnału prostokątnego. Wykorzystując sygnały elementarne możemy to zapisać następująco:

$$f(t) = A \cdot \left(\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \tag{4}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = A \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \tag{5}$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right)$$
$$f_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2 \cdot t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2 \cdot t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) \tag{6}$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa^2\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{7}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

ISBN 978-83-939620-1-3

9 788393 962013