

Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Elektroniki i Telekomunikacji

Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5

60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl

www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

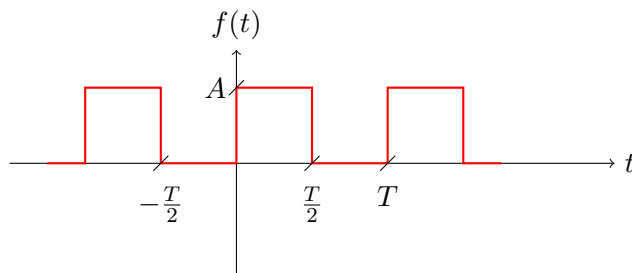
Wydrukowano w Polsce

0.1 Podstawowe własności sygnałów

0.1.1 Podstawowe własności sygnałów

Wartość średnia

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

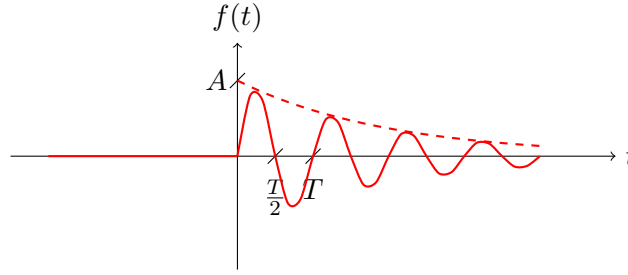
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Zadanie 2. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \quad (4)$$

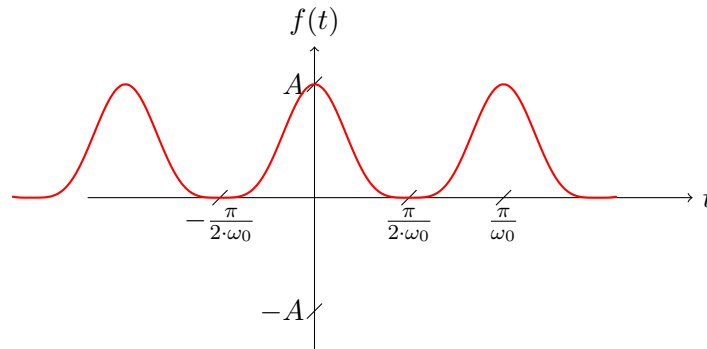
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + 0 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) \\ &-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right) \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Zadanie 3. Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (5)$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^4 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{2^2} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2}{4} \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot 2 + 2^2}{4^2} \cdot dt \end{aligned}$$

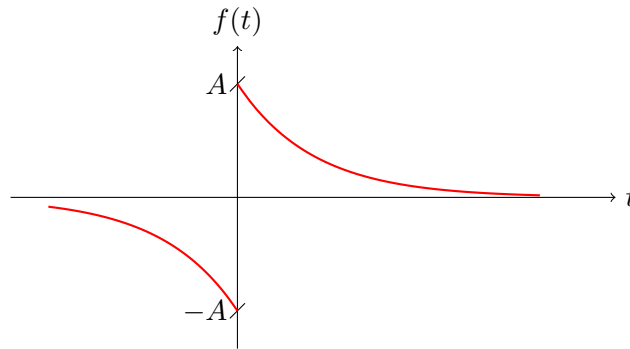
13 września 2019

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \\ &= \frac{A}{16} \cdot 6 \\ &= \frac{A}{8} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{8} \cdot A \end{aligned}$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

Energia sygnału

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (6)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (7)$$

Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji

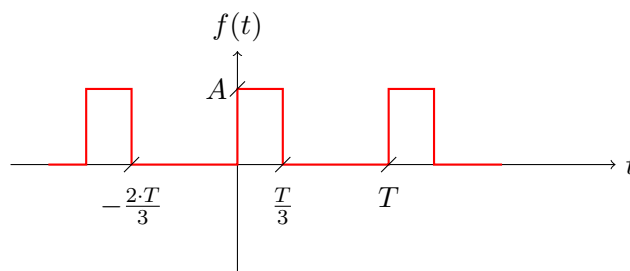
$$\begin{aligned} E &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 |-A \cdot e^{a \cdot t}|^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} |A \cdot e^{-a \cdot t}|^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A \cdot e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A \cdot e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A)^2 \cdot (e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot (e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot dw \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^w \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{2 \cdot a \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^{-2 \cdot a \cdot dt} \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^{2 \cdot a \cdot 0} - e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2 \cdot a \cdot 0} \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^0 - e^{-a \cdot \tau} \right) - \left(e^{-a \cdot \tau} - e^0 \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} + 1) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (2 - 2 \cdot e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

Moc sygnału

Zadanie 5. Oblicz moc okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

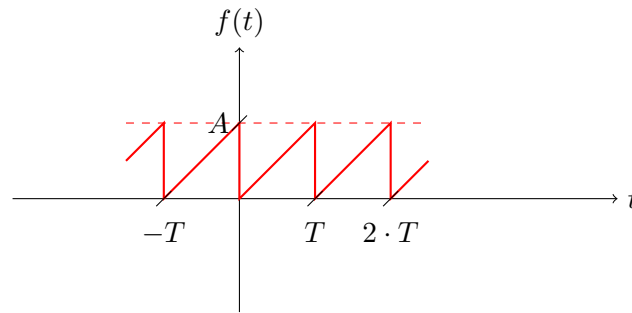
$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (9)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T |0|^2 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{3}} \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{3} - 0 \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \frac{T}{3} \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$

Zadanie 6. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (10)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (11)$$

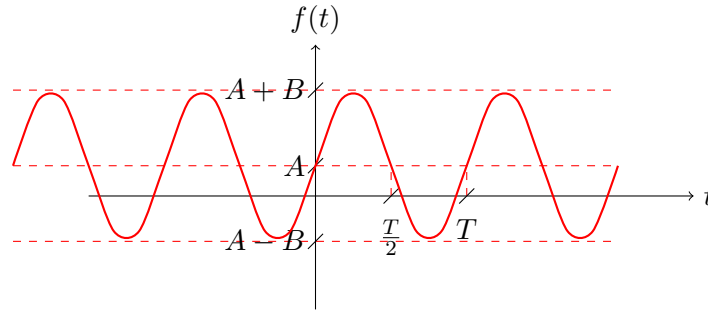
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$

Zadanie 7. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (12)$$

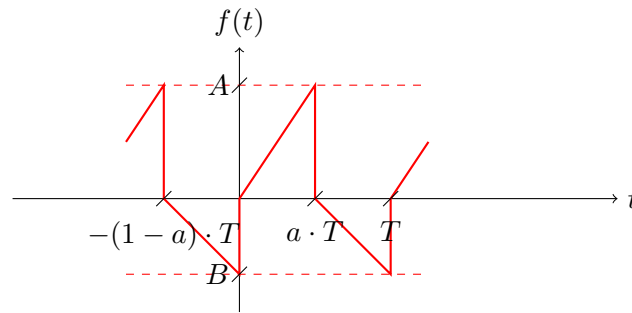
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right|^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \right. \\
 &\quad \left. dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \right\} \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot t \Big|_0^T + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot (T - 0) + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot T + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right. \\
 &\quad \left. dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right\} \\
 &= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^T - \int_0^T \cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) \\
 &= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T \cos(w) \cdot dw \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -\sin(w) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-1 + 1) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot 0 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (\sin(4\pi) - \sin(0)) \right) \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0) \right) \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot (T) \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2}
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $A^2 + \frac{B^2}{2}$

Zadanie 8. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (13)$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0,0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (14)$$

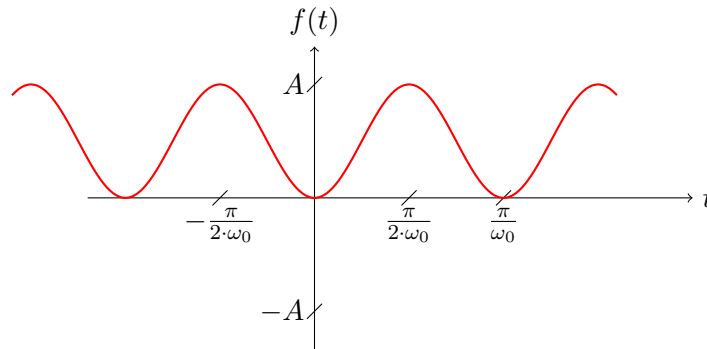
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left| \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a \cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a \cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \int_0^{a \cdot T} t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot dt \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt \\ &\quad - \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T t^2 \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot dt + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a \cdot T}^T dt \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a \cdot T}^T \right) \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a \cdot T}^T \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t \Big|_{a \cdot T}^T \right) \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 \right) \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 \right) \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot (1-a^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2 \right) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6} \right) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6 \right) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - 2 \cdot a + a^2) \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)$

Zadanie 9. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (15)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)|^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^4 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} n=0: \quad \quad \quad 1 \\ n=1: \quad \quad \quad 1 \quad 1 \\ n=2: \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n=3: \quad \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n=4: \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{1 \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^4 \cdot (-e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^0 + 4 \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^3 \cdot (-e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^1 + 6 \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 \cdot (-e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 4 \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^1 \cdot (-e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^3 + (-e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^0 \cdot (e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-0 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2^4 \cdot j^4} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - 0 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t - 3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{16 \cdot 1} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{0 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{16} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^0}{16} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6}{16} \cdot dt
 \end{aligned}$$

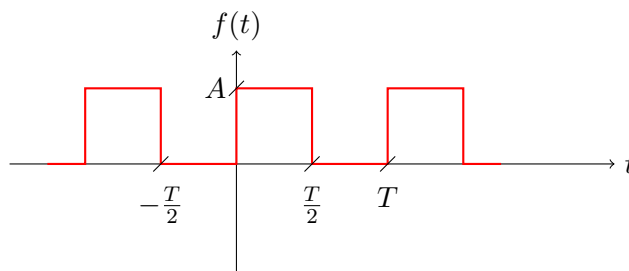
$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \int_0^T \left(e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 6 \right) dt \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + 6 \cdot \int_0^T dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 - 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_0^T + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_0^T + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0}) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0}) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0}) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot 0}) \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^0) \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1) - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 1) \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} - \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} + 6 \cdot T \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot T) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot T) + 6 \cdot T \right) \\
&= \left\{ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(8\pi) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(4\pi) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 0 - \frac{4}{\omega_0} \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0} \\
&= \frac{3 \cdot A^2}{8}
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{3 \cdot A^2}{8}$

0.2 Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

0.2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (17)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (19)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ &= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - \sin(0)) \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - 0) \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (21)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - 1) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{22}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned} \tag{23}$$

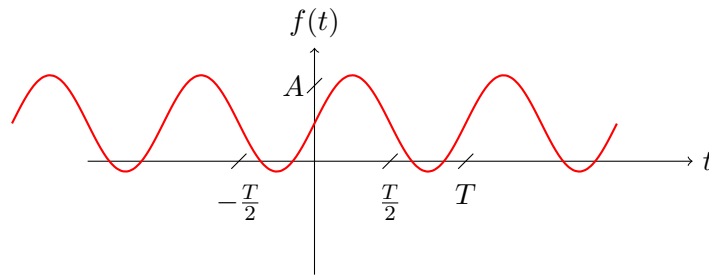
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

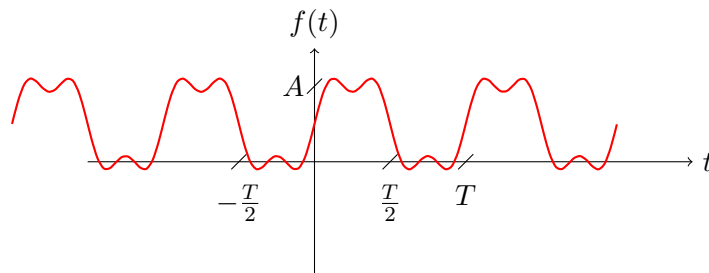
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \tag{24}$$

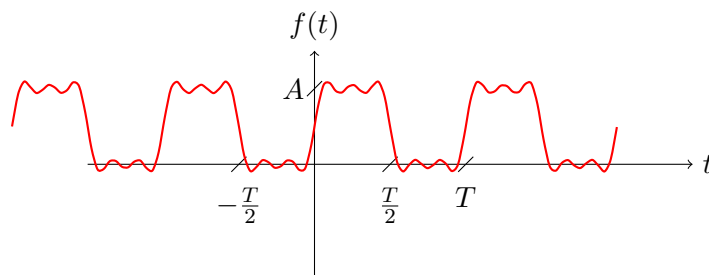
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



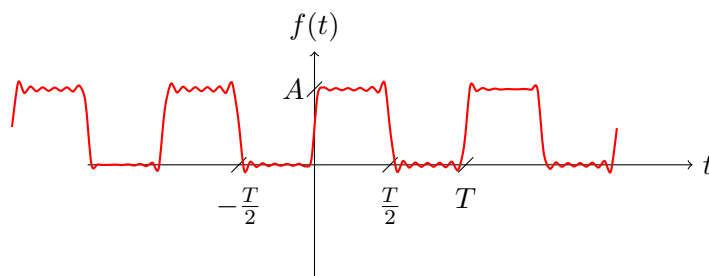
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



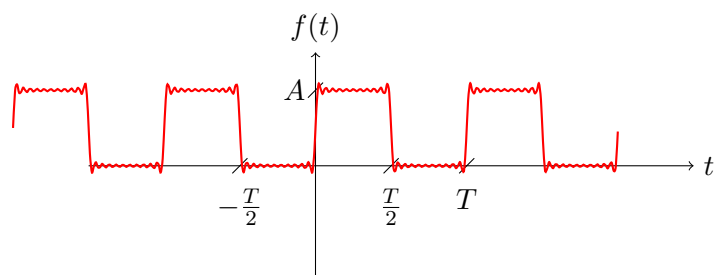
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

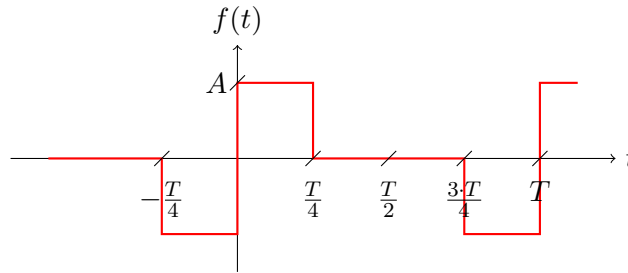


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (25)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (26)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (28)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{cases} z &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{cases} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\sin(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(\sin(0) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(0 - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{30}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \cos\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(0) - \cos\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(2 - 2 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot \frac{\pi}{2}))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{32}$$

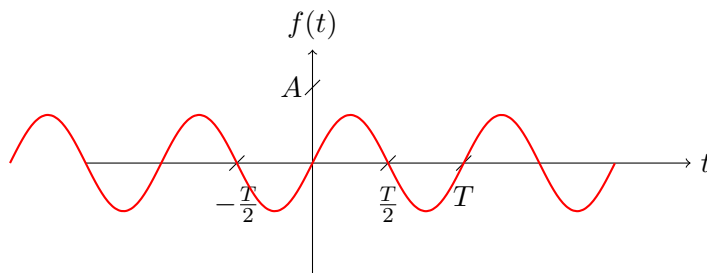
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$

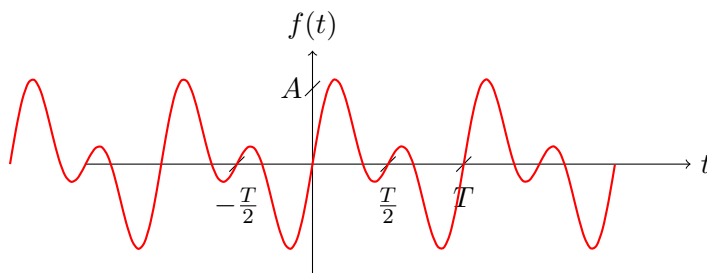
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (33)$$

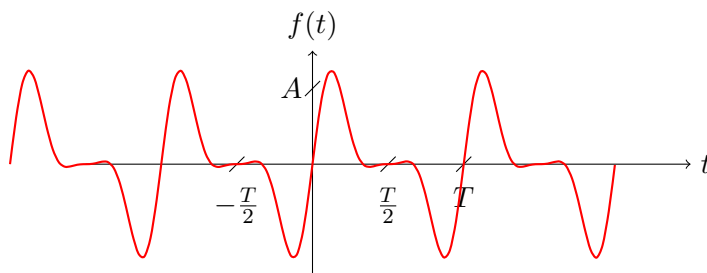
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



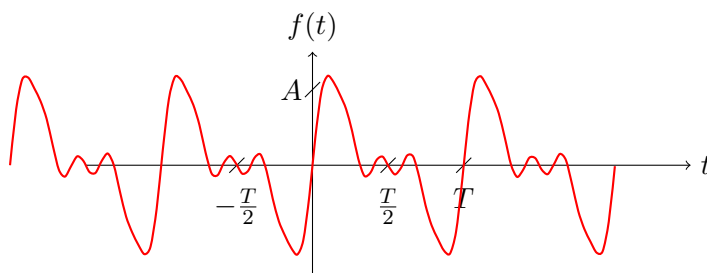
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



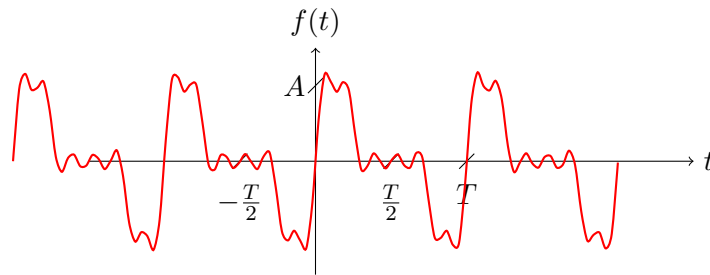
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



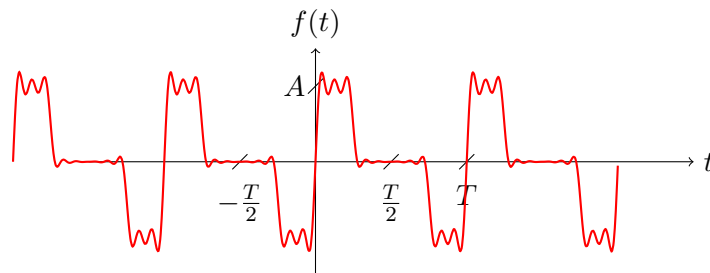
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



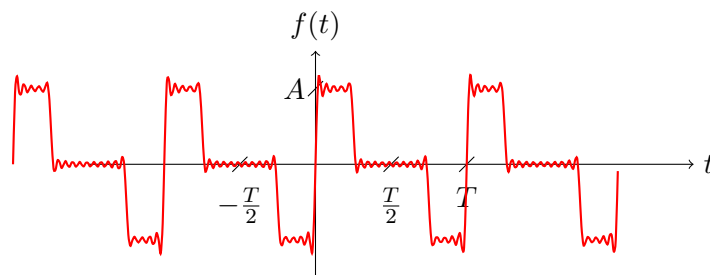
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

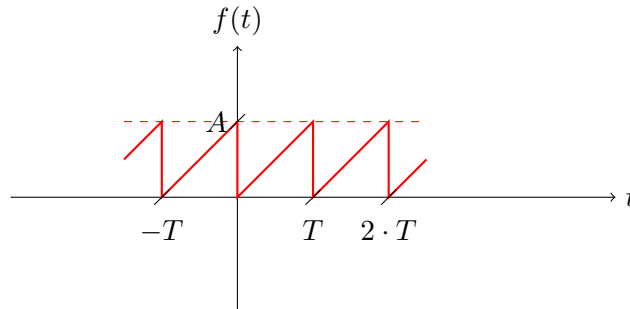


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (34)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (35)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (36)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \quad (37)$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (38)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = -\frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 1\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(0)) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (0 - 0) \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} \right) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \\ &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (39)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned} \quad (40)$$

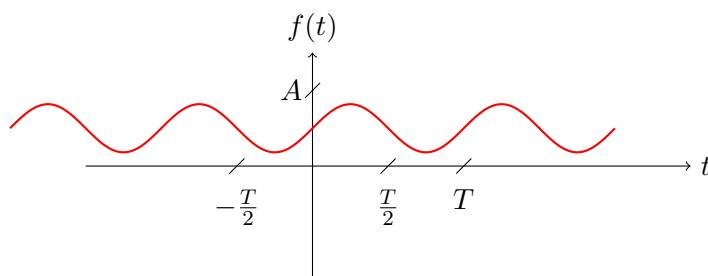
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{3 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{5 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{6 \cdot \pi}$

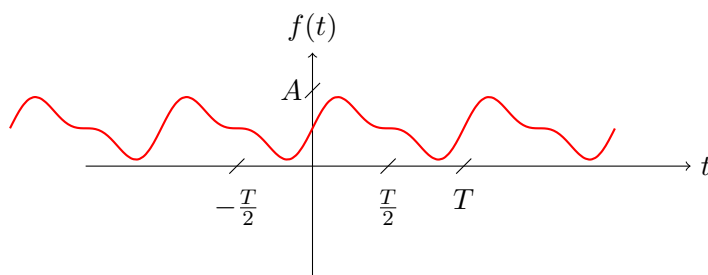
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (41)$$

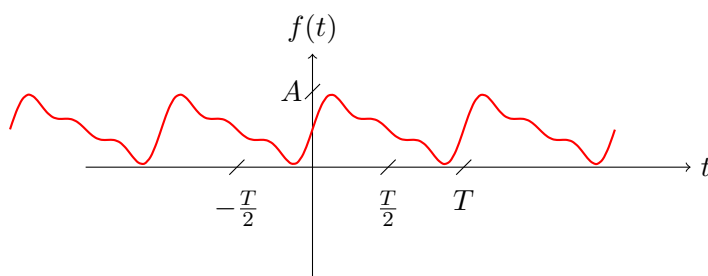
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



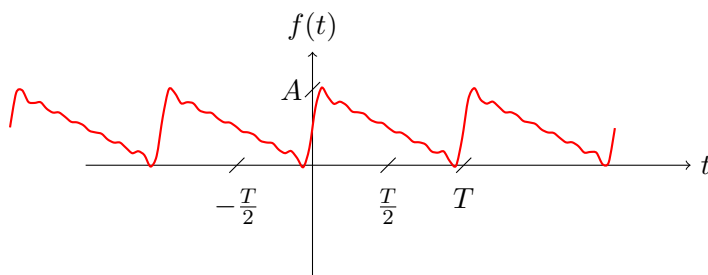
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



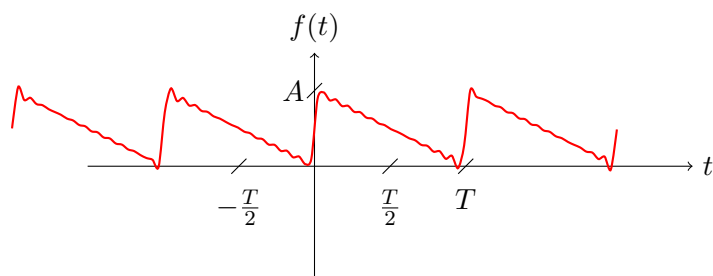
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

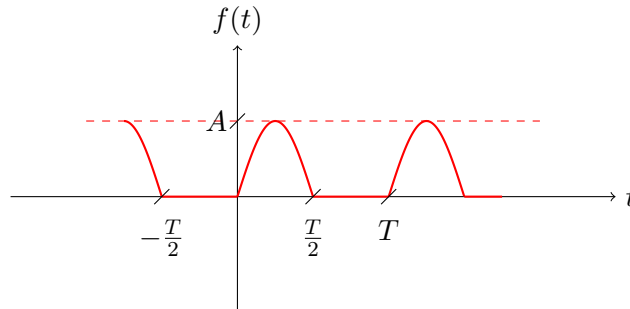


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (43)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (44)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2j} + \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2j} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-\cos(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-\cos(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(0)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1-k)) - \cos(0)) \right) \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1+k))) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1}{1-k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k))}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) + 1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - \cos(\pi \cdot (1+k)) + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(\pi \cdot (1-k)) - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{1 - k^2} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi \cdot (1+k)) = \cos(\pi + k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \\ \cos(\pi \cdot (1-k)) = \cos(\pi - k \cdot \pi) = -\cos(-k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + \cos(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) + \cos(k \cdot \pi) + k \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
&= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+\cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost a_1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = \frac{e^{j\cdot x} + e^{-j\cdot x}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{j\cdot x} - e^{-j\cdot x}}{2j} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + j\frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2j} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \\
 &= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (\cos(2\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1 - 1) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (45)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt &= \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{aligned} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot dz_2 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1+k)) - \sin(0)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1-k)) - \sin(0)) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost b_1

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^0 - e^0 \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (\sin(2\pi) - \sin(0)) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\ b_1 &= \frac{A}{2} \\ b_k &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

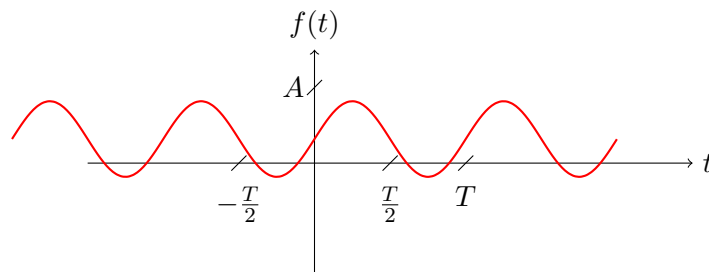
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35} \frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

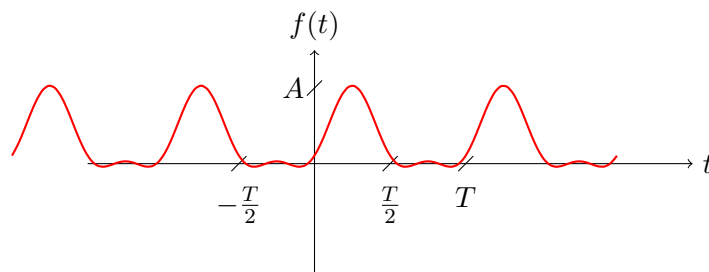
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (47)$$

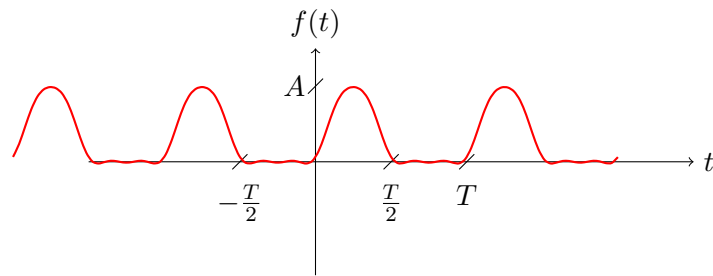
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



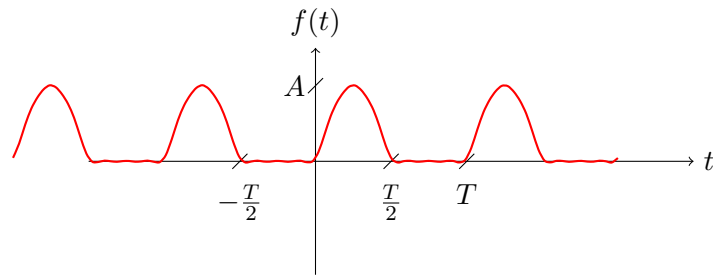
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



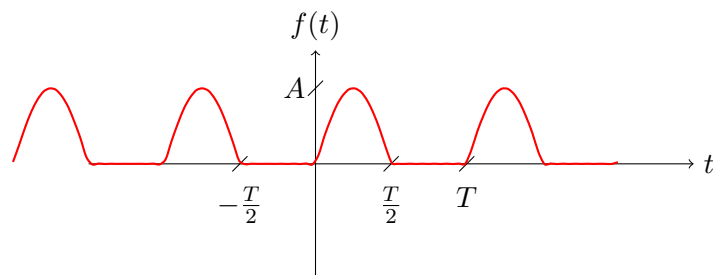
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



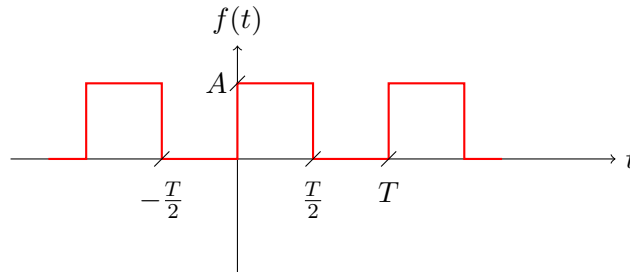
W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

0.2.2 Zespolony szereg Fouriera

Zadanie 5. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (48)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (49)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (51)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \\
 &= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \\
 &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \\
 &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0 \right) \\
 &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \\
 &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{52}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{A}{2} \\
 F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{53}$$

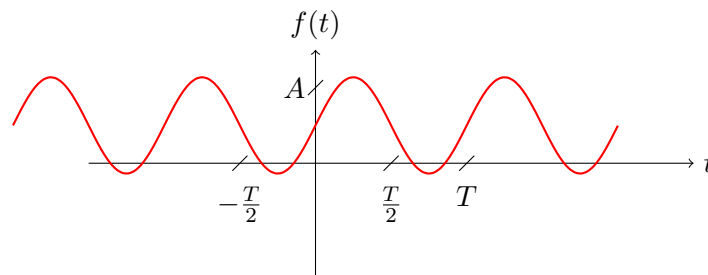
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg \{F_k\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

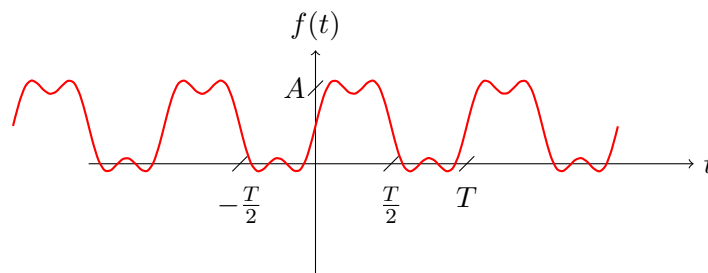
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{54}$$

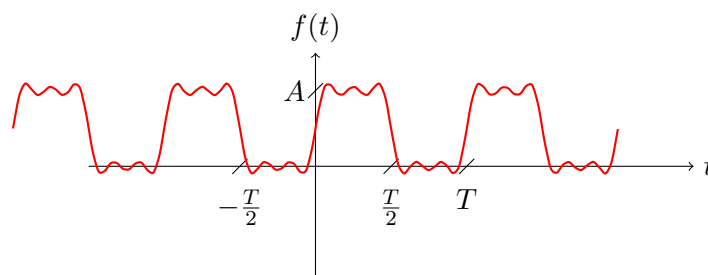
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



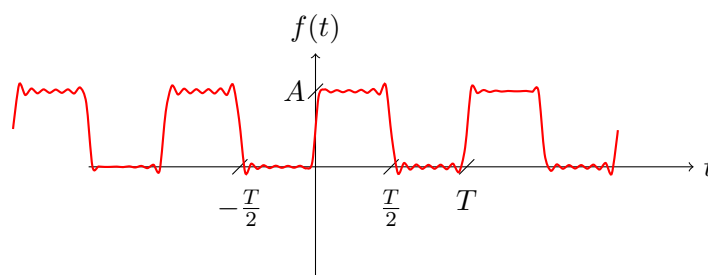
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



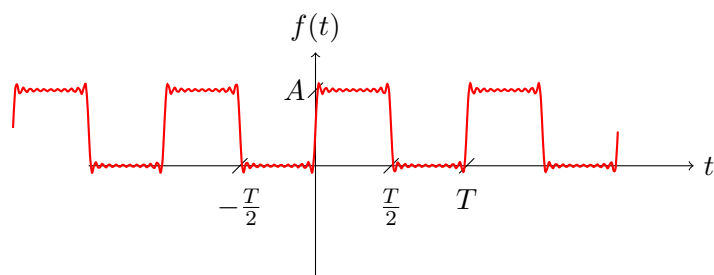
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

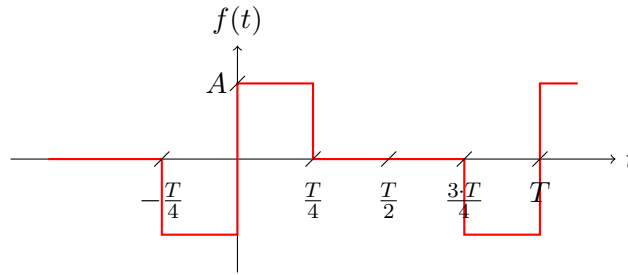


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 6. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (55)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (56)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (58)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{cases} z &= -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{cases} \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dt}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(-\frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot dt + \frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^0 - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(2 - \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= -j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) - 1)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = 0$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \quad (59)$$

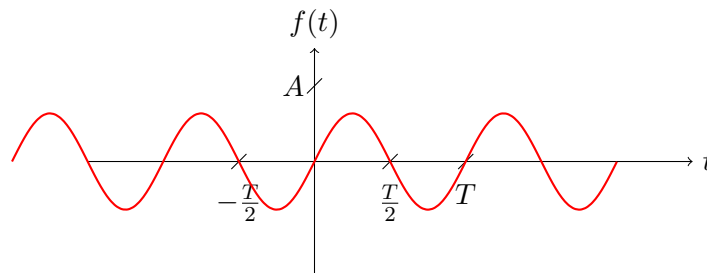
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

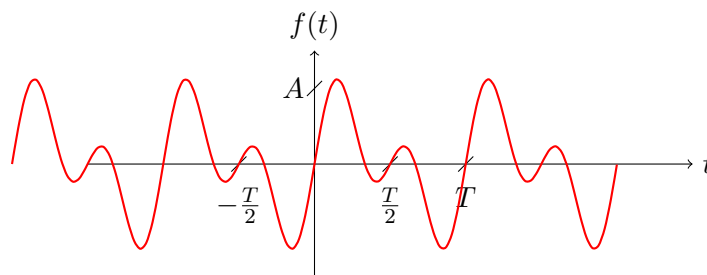
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (60)$$

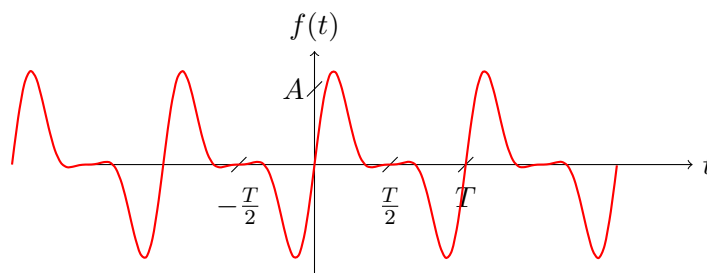
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



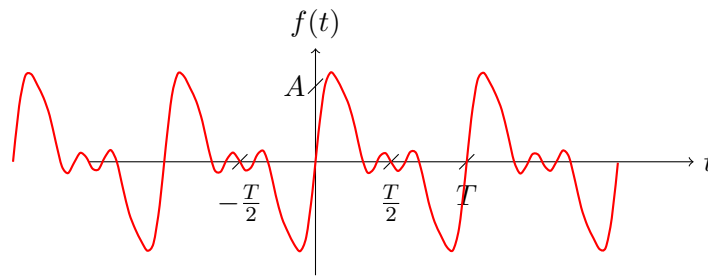
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



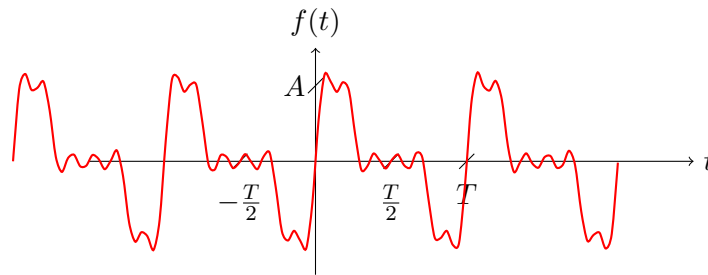
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



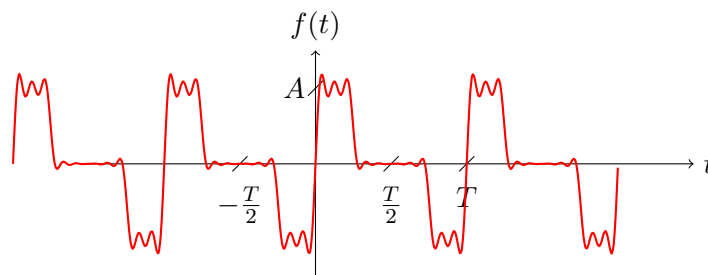
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



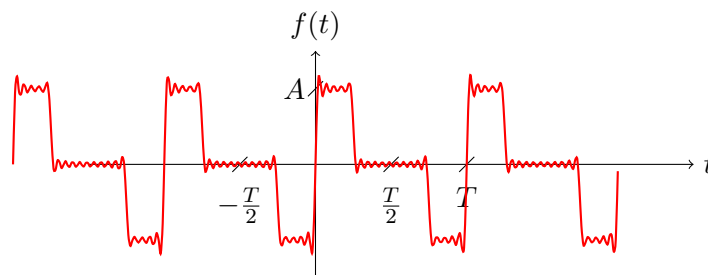
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

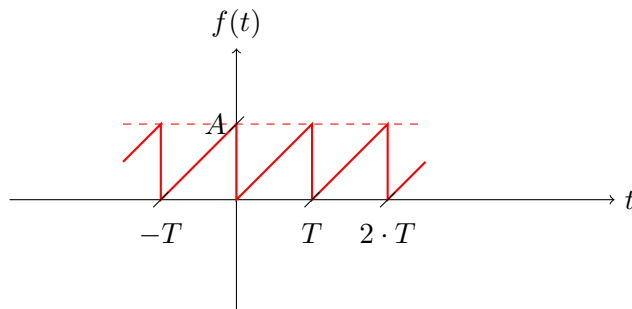


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 7. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (61)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązując go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (62)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (63)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - 0 \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T^2}{(-j \cdot k \cdot 2\pi)^2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + \frac{T^2}{-(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - e^0) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - 0 \right) \\
&= \frac{A}{-j \cdot k \cdot 2\pi}
\end{aligned}$$

$$= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \end{aligned} \quad (64)$$

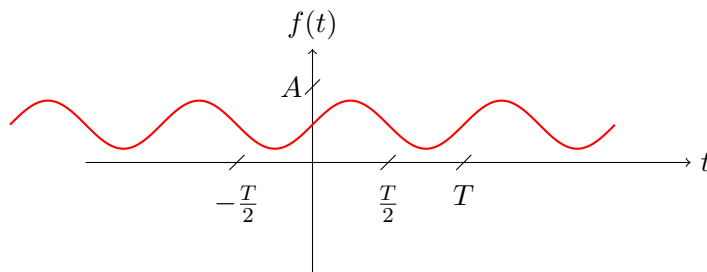
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

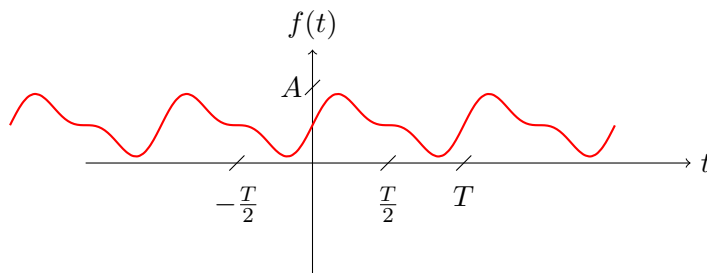
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (65)$$

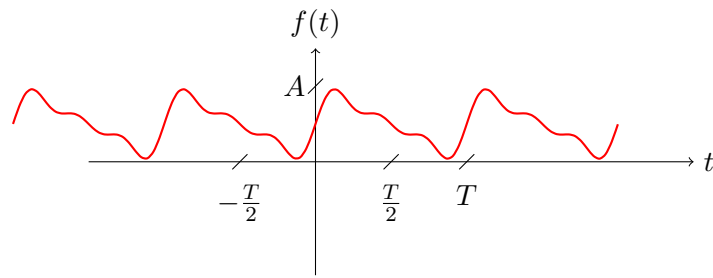
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



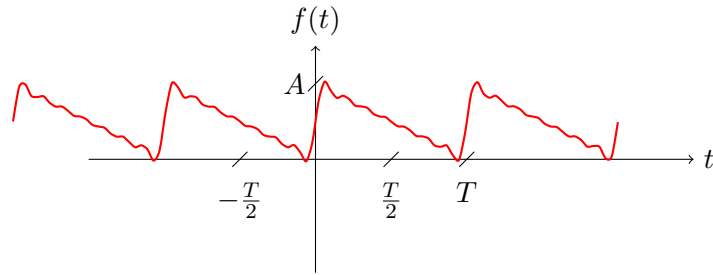
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



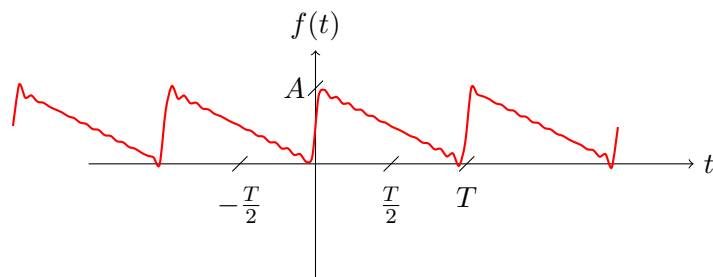
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

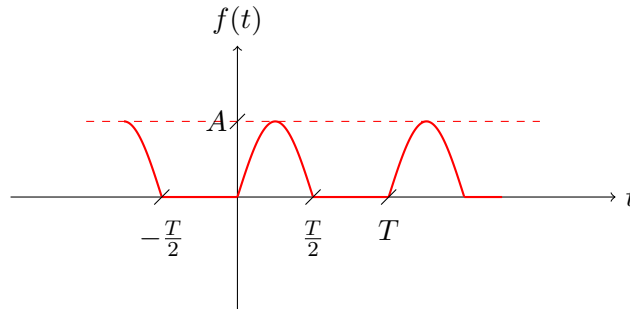


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 8. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (66)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (67)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (68)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_1

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4j} \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_1 wynosi $-j \cdot \frac{A}{4}$

F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak więc wyznaczmy wprost F_{-1}

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} \\
&= -\frac{A}{4j} \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

A więc wartość współczynnika F_{-1} wynosi $j \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned} \tag{69}$$

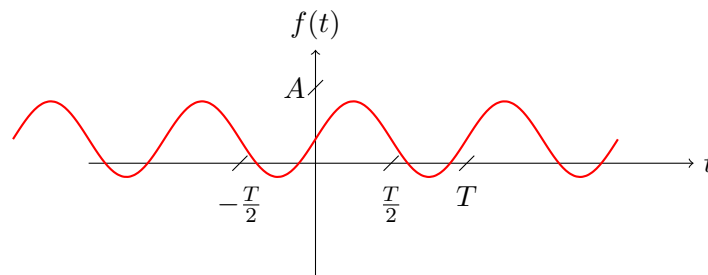
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

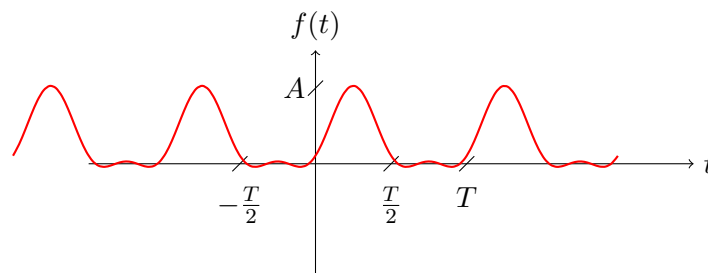
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{70}$$

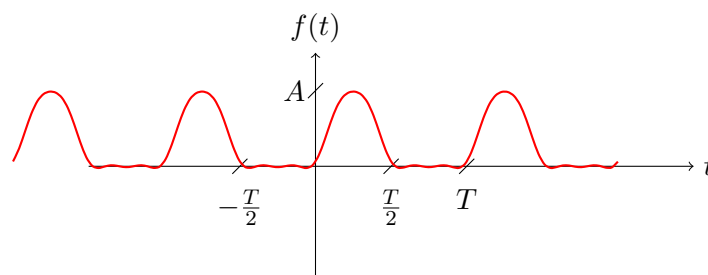
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



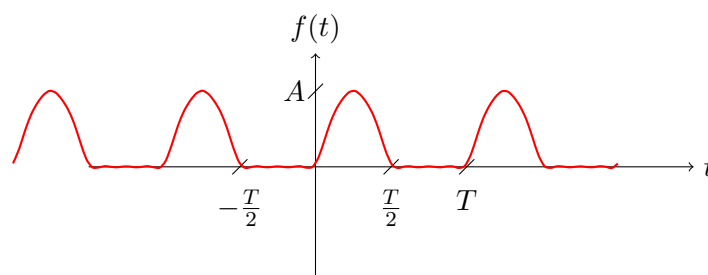
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



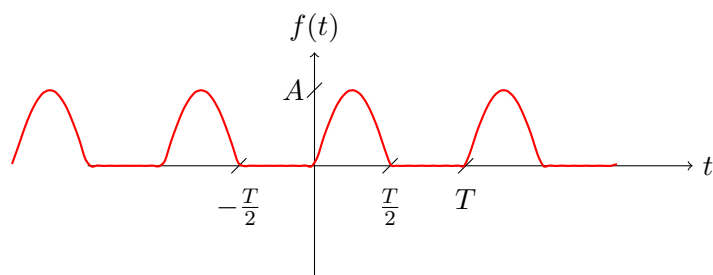
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

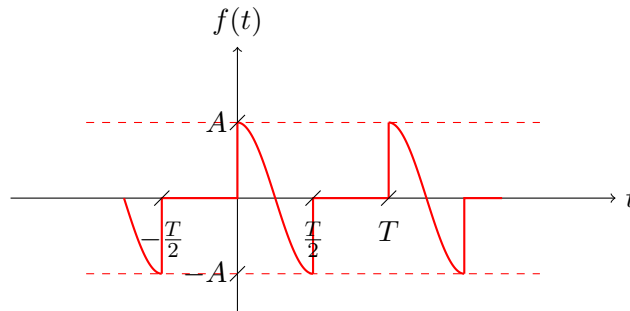


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ będącego przekształceniem sygnału cosinusoidalnego przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (71)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (72)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (73)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1 - k^2} \right) \\
&= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right)$.

Dla $k = 1$ i $k = -1$ trzeba wyznaczyć wartość współczynnika raz jeszcze wprost ze wzoru

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j 2\pi} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \cdot 2\pi} - e^0 \right) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{4}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Tak więc ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= \frac{A}{4} \\ F_{-1} &= \frac{A}{4} \\ F_k &= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

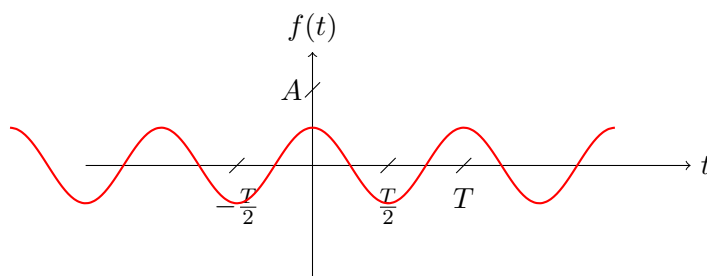
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$ F_k $	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	π	0	π	0	0	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0

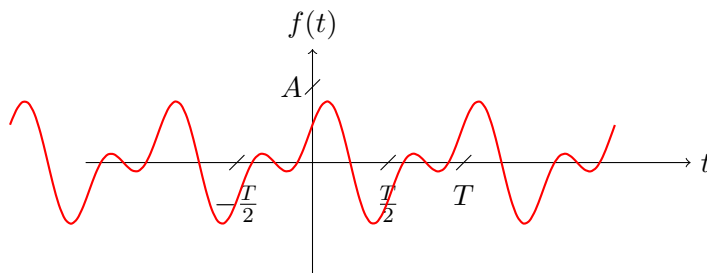
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (75)$$

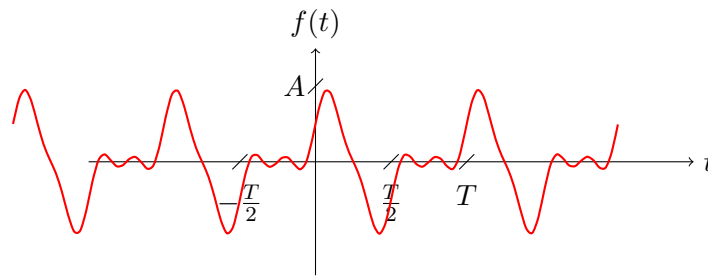
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



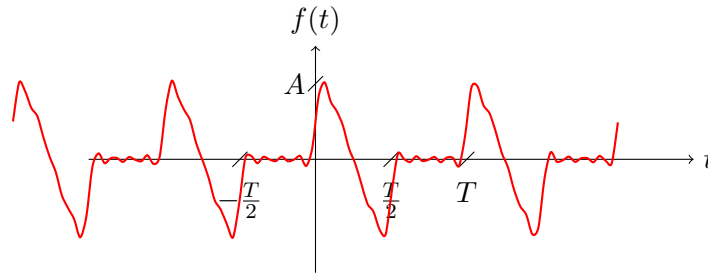
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



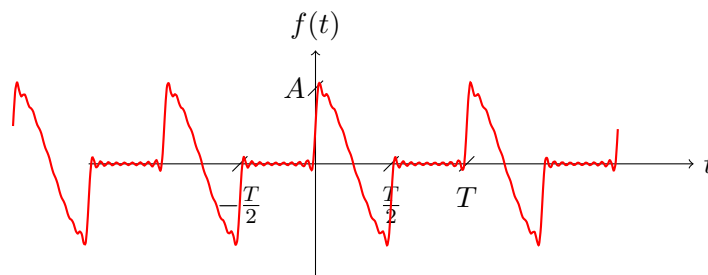
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



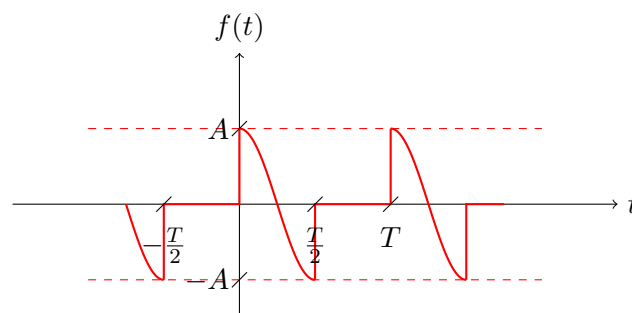
W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy

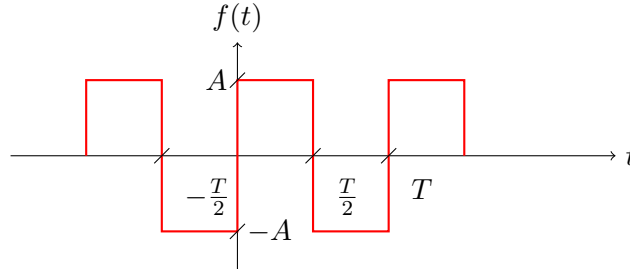


W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.



0.2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Zadanie 10. Wyznacz udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_1}{P} = ? \quad (76)$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (77)$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (78)$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T |-A|^2 \cdot dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + A^2 \cdot \int_{\frac{T}{2}}^T dt \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 + T - \frac{T}{2} \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot (T) \\ &= A^2 \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się A^2 .

Moc podstawowej (pierwszej) harmonicznej to (na podstawie twierdzenia Parsevala):

$$P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2 \quad (79)$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \quad (80)$$

W związku z tym, należy obliczyć wartość współczynnika F_1 . Można to zrobić bezpośrednio ze wzoru na F_k :

$$F_k = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (81)$$

podstawiając $k = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (82)$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na F_1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -A \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{2}}^T e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) \\ &= -\frac{A}{T \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_{\frac{T}{2}}^T e^z \cdot dz \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^z \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j\pi} - e^0 - e^{-j2\pi} + e^{-j\pi} \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} e^{-j2\pi} = \cos(2\pi) - j \cdot \sin(2\pi) = 1 \\ e^{-j\pi} = \cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi) = -1 \end{array} \right\} \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot (-1 - 1 - 1 - 1) \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot (-4) \\ &= \frac{2 \cdot A}{j \cdot \pi} \\ &= -j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 to $-j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}$

Podstawiając wartość współczynnika F_1 do wzoru na moc podstawowej harmonicznej otrzymujemy:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \left| -j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \right|^2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{\pi} \right)^2 \\ &= 2 \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\pi^2} \\ &= \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Moc podstawowej harmonicznej równa się $P_1 = \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}$.

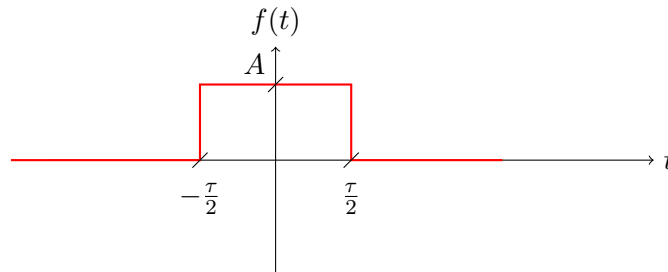
Teraz można wyznaczyć udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}}{A^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx 81\% \quad (83)$$

0.3 Analiza sygnałów nieokresowych. Transformata Fouriera

0.3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (84)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (85)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

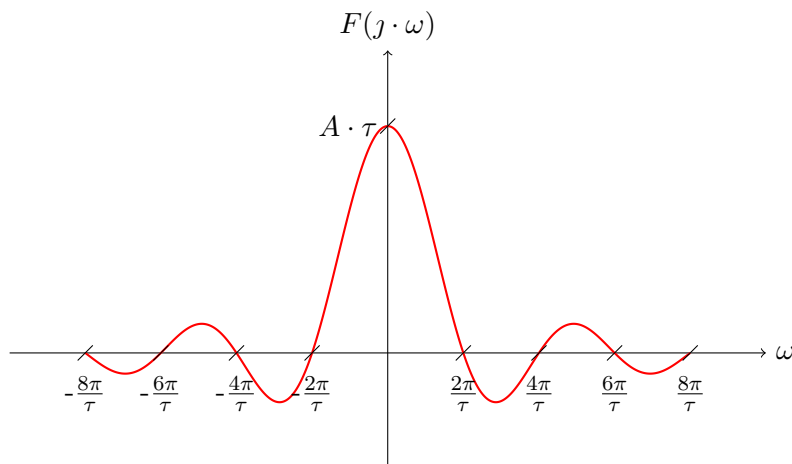
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \omega \cdot t \\ dz = -j \cdot \omega \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz \end{array} \right\} \\ &= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
&= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
&= \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-\frac{\tau}{2})} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right) \\
&= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\
&= A \cdot \tau \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa(\omega \cdot \frac{\tau}{2})$

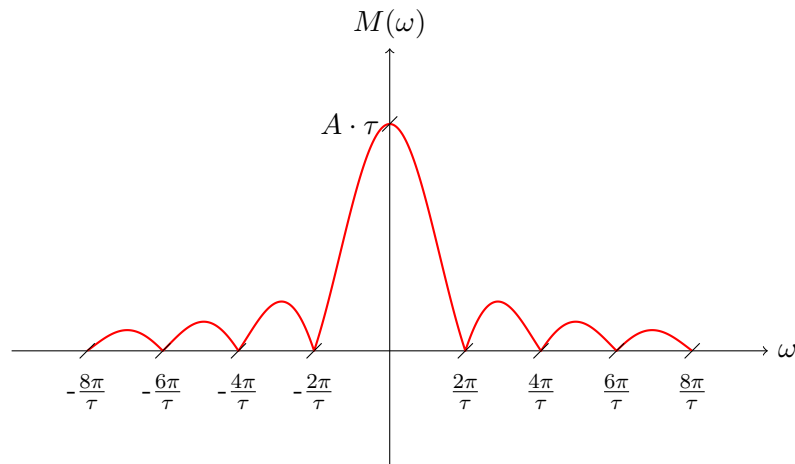
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right) \quad (86)$$



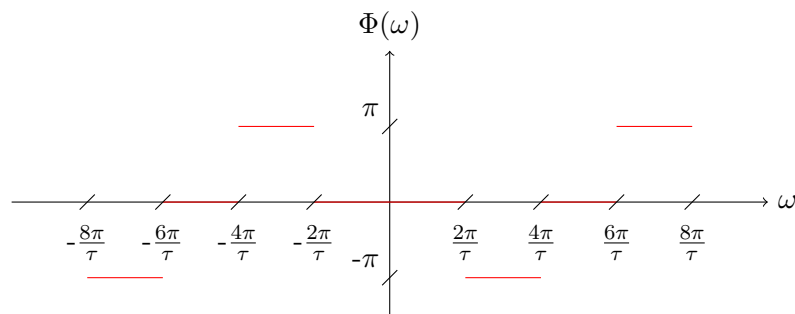
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (87)$$

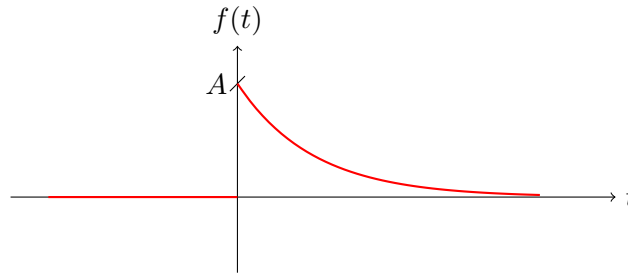


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}}\right) \quad (88)$$



Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (89)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (90)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 0 + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt \\ &= \begin{cases} z &= -(a+j\omega) \cdot t \\ dz &= -(a+j\omega) \cdot dt \\ dt &= \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz \end{cases} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{A}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{A}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\omega) \cdot \tau} - e^{-(a+j\omega) \cdot 0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - e^0) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - 1) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau + j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot (0 - 1) \\
&= \frac{A}{a+j\cdot\omega}
\end{aligned}$$

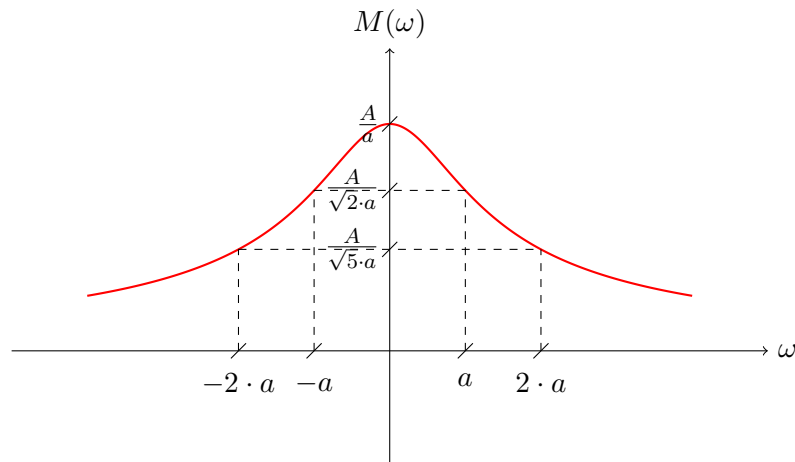
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{A}{a+j\cdot\omega}$

Wyznamy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} \\
&= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} \cdot \frac{(a-j\cdot\omega)}{(a-j\cdot\omega)} \\
&= \frac{A \cdot (a-j\cdot\omega)}{(a^2 + \omega^2)} \\
&= \frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)} - j \cdot \frac{A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)}
\end{aligned} \tag{91}$$

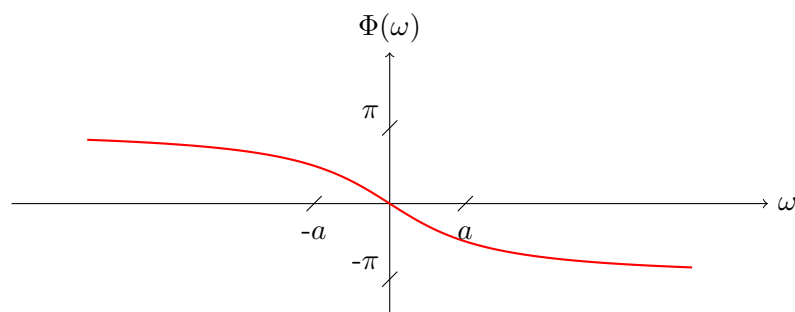
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| \\
&= \sqrt{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)} \right)^2 + \left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{A^2 \cdot (a^2 + \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2 + \omega^2)}} \\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}
\end{aligned} \tag{92}$$

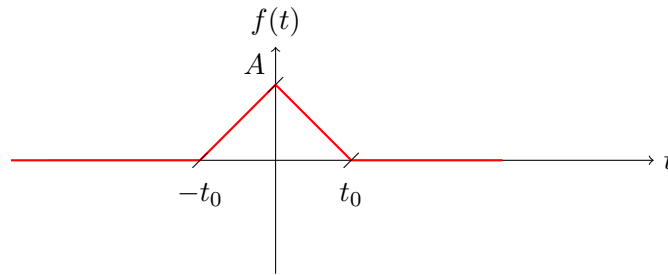


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(j\omega)\}}\right) \\
 &= \arctg\left(\frac{\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)}\right)}{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)}\right)}\right) \\
 &= \arctg\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)} \cdot \frac{(a^2 + \omega^2)}{A \cdot a}\right) \\
 &= \arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned} \tag{93}$$



Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (94)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (95)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (96)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \\ -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \\ \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \\ A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & dla \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & dla \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (97)$$

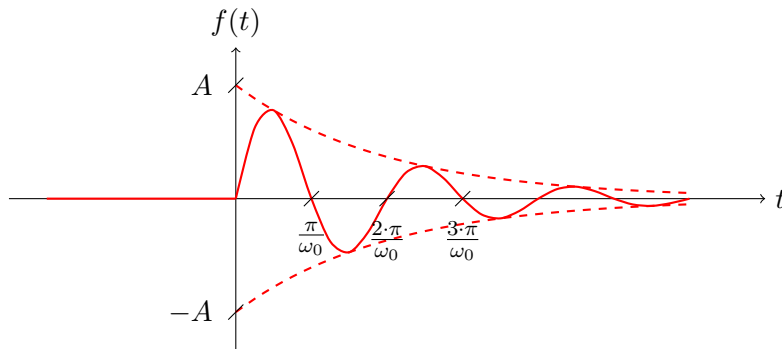
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{t_0} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad - \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{t_0} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ du = dt & v = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &\quad + A \cdot \left(\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
& + A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) \right) \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (1 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) \right) \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1) \\
& = -\frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \\
& + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{j \cdot \omega} \\
& = -\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) \\
& = \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) \\
& = \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\} \\
& = \left\{ \cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \right\} \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})) \\
& = \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) \\
& = \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) \\
& = \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\
& = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (98)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (99)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 0 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \begin{cases} z = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t & w = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t \\ dz = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot dt & dw = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{(-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot dz & dt = \frac{1}{(-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot dw \end{cases} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{dz}{(-a+j\omega_0-j\omega)} - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^w \cdot \frac{dw}{(-a-j\omega_0-j\omega)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^w \cdot dw \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^w \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \end{aligned}$$

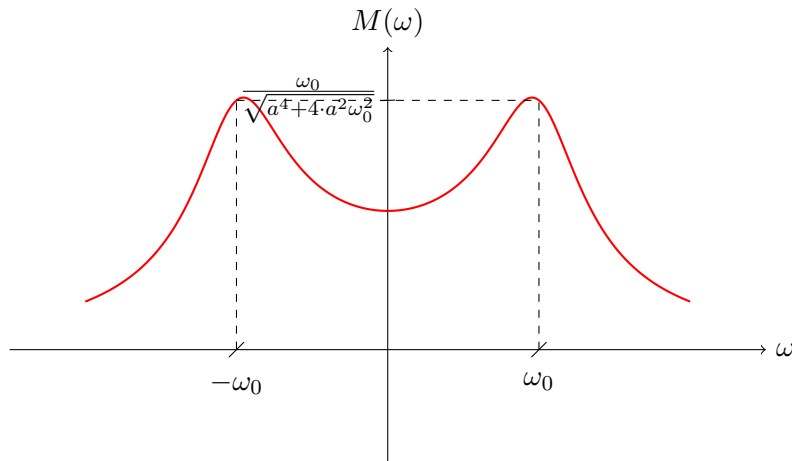
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot 0}) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot 0}) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(j\omega_0-j\omega) \cdot \tau}) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(-j\omega_0-j\omega) \cdot \tau}) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&- \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j\omega_0-j\omega) \cdot \tau} - 1 \right) \\
&= \frac{-1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} + \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \\
&= \frac{-(2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)) + 2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \\
&= \frac{2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 + 2 \cdot j^2 \cdot \omega - 2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 - 2 \cdot j^2 \cdot \omega}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + a \cdot j \cdot \omega_0 + a \cdot j \cdot \omega - a \cdot j \cdot \omega_0 - j^2 \cdot \omega_0^2 - j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + a \cdot j \cdot \omega + j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + j^2 \cdot \omega^2)} \\
&= \frac{4 \cdot j^2 \cdot \omega_0}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - j^2 \cdot \omega_0^2 + j^2 \cdot \omega^2)} \\
&= \frac{\omega_0}{a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + \omega_0^2 - \omega^2} \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2)} \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

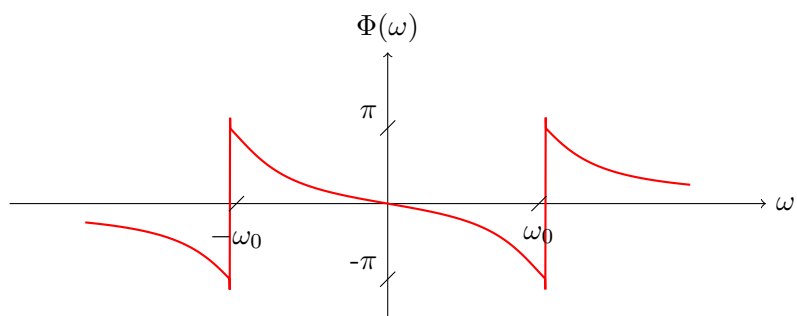
$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right| \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right| \\
&= \left\{ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right\} \\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ |a + j \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2)^2 + (2 \cdot a \cdot \omega)^2}}
\end{aligned}$$

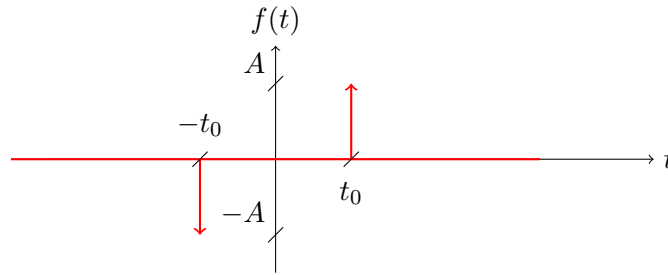


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right) \\
&= \left\{ \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \right\} \\
&= \arg(\omega_0) - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega) \\
&= \left\{ \arg(a + j \cdot b) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \\
&= \arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= \arctg(0) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= 0 - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) \\
&= -\arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



W pierwszej kolejności opisujemy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \quad (100)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (101)$$

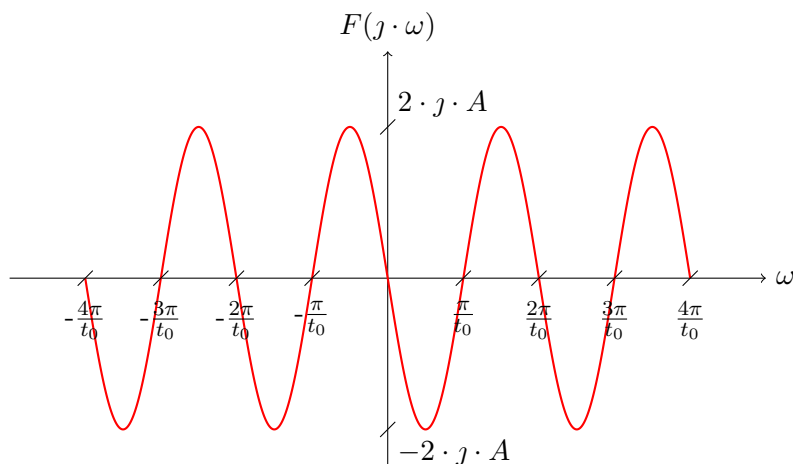
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
 &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \\
 &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} \\
 &= A \cdot (e^{-j\omega \cdot t_0} - e^{j\omega \cdot t_0}) \\
 &= A \cdot (-e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
 &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
 &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
 &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
 &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
 \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

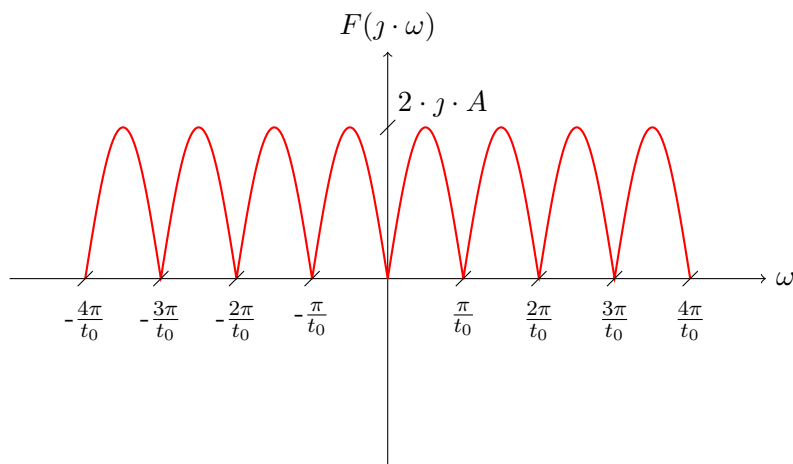
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \quad (102)$$



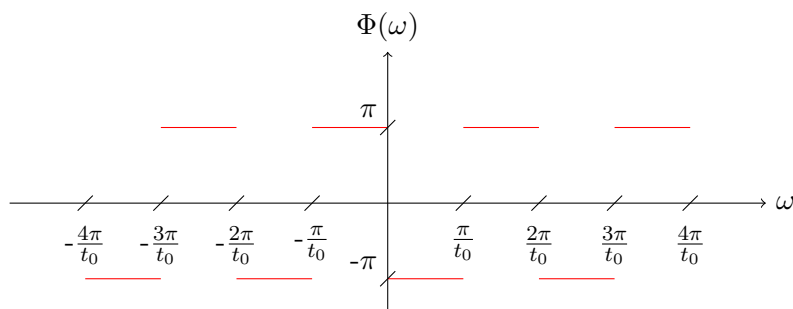
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (103)$$

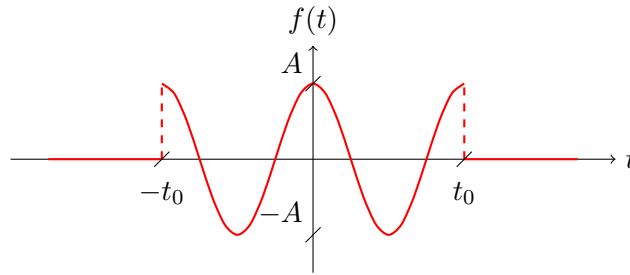


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}}\right) \quad (104)$$



Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (105)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (106)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

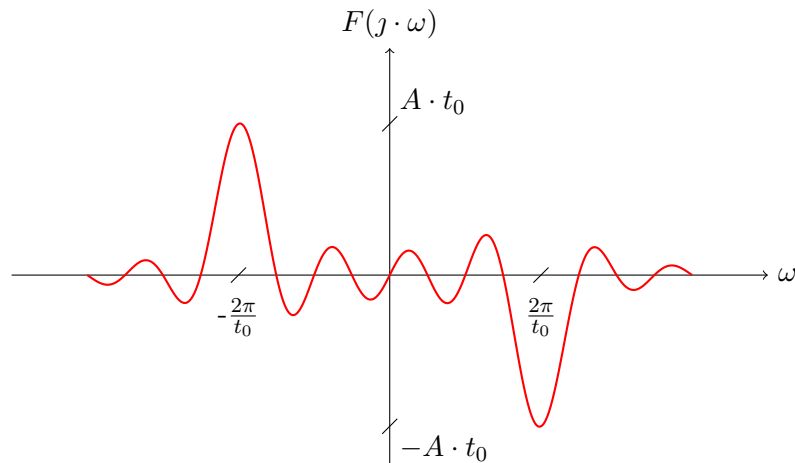
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{z_1} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{z_2} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} \right) \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \\
&= A \cdot t_0 \cdot \left(Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + Sa \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right)$

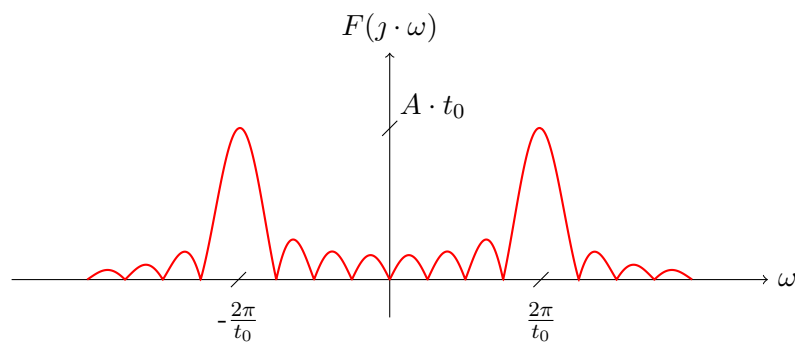
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(\text{Sa} \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \text{Sa} \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) \quad (107)$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

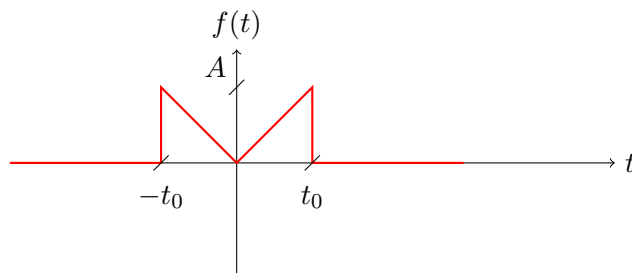
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (108)$$



Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}} \right) \quad (109)$$

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (110)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci funkcji $f(t)$. Funkcja ta jest określona za pomocą równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (111)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \\ A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0; 0)$ oraz $(t_0; A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (112)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt \\ &= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &\quad + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) \\ &\quad + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) \end{aligned}$$

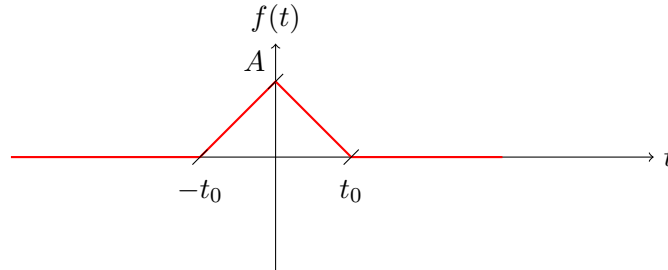
$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^0 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \\
&= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}}{2} \right) \\
&= \begin{cases} \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \\ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \end{cases} \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot (2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0)) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \right) \\
&= \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 \\
&= \left\{Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}\right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$

0.3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

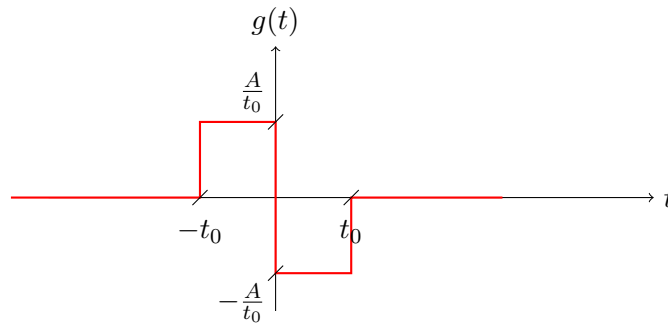
Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (113)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (114)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (115)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (116)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (117)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych prostokątów, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \quad (118)$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right)$$

$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$$

Wyznamy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(j\omega)$.

Z tablic matematycznych wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(j\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (119)$$

Teraz wyznaczymy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(j\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (120)$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$\begin{aligned}G(j\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) - A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ &\quad \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\ G(j\omega) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

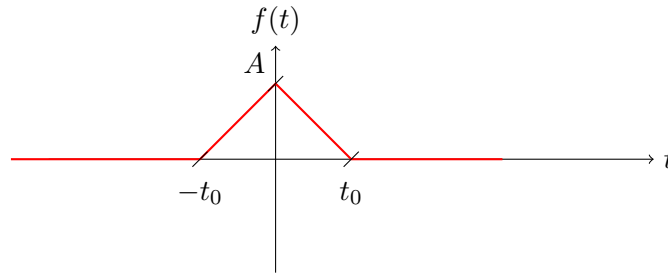
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (121)$$

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa(0) \cdot \sin(0) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot 1 \cdot 0 \\ G(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\ &= \frac{A \cdot 2 \cdot t_0}{\omega \cdot t_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

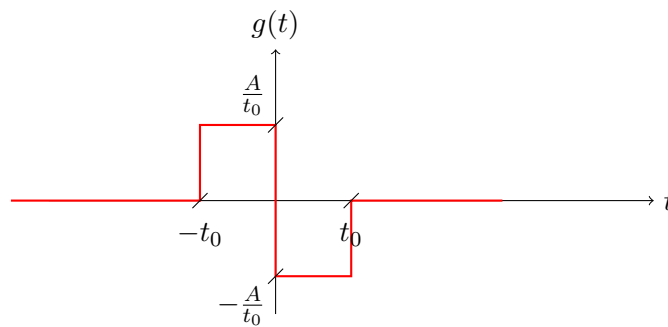
Zadanie 9. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Wykorzystując sygnały elementarne możemy napisać:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (122)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

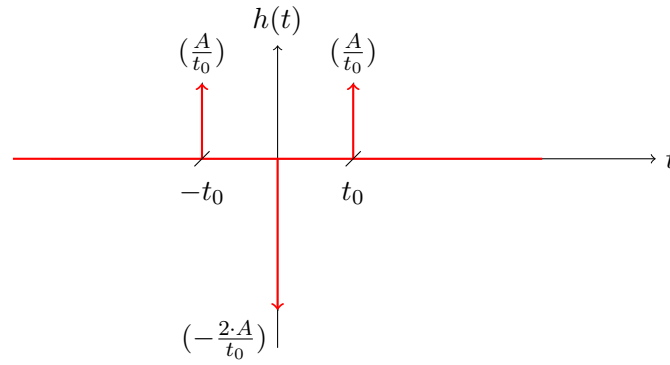
$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (123)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (124)$$

Pytanie, czy można dalej uprościć sygnał $g(t)$ dokonując jego różniczkowania. Wyznamy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (125)$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (126)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) \cdot dx \quad (127)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \quad (128)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (129)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (-t_0))\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (t_0))\} \\ &= \begin{pmatrix} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - 2 + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{t_0} \cdot (2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0) - 2) \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$H(j\omega) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \quad (130)$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

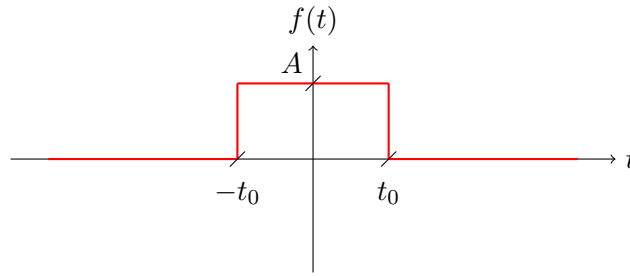
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{2 \cdot A}{j \cdot 0 \cdot t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot dt + \int_0^{t_0} (-\frac{A}{t_0}) \cdot dt \\ G(0) = \frac{A}{t_0} \cdot (0 - (-t_0)) - \frac{A}{t_0} \cdot (t_0 - 0) = A - A \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{j^2 \cdot \omega^2 \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \\ \cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \right) \\ &= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 10. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



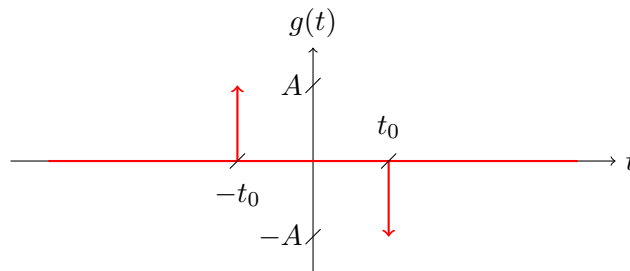
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (131)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (132)$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (133)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (134)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t}) \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
&= A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \\
&= j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(j\omega) = j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

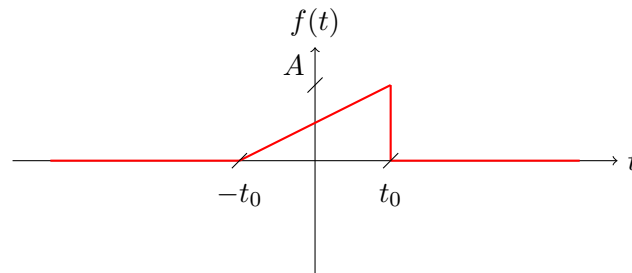
$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(j\omega)$ sygnału $f(t)$

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0 \cdot t_0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Zadanie 11. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (135)$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz (t_0, A) . Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = \frac{b}{t_0} \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = 2 \cdot b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{A}{2 \cdot t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases} \end{aligned}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

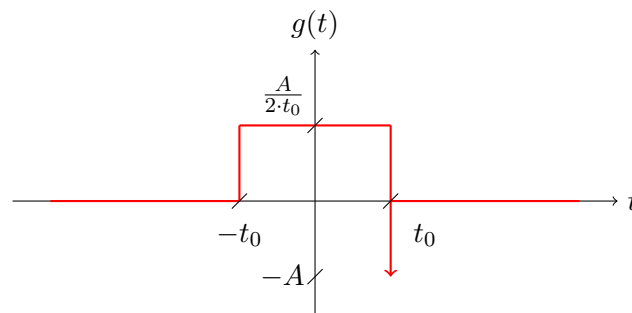
$$f(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2}$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (136)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (137)$$

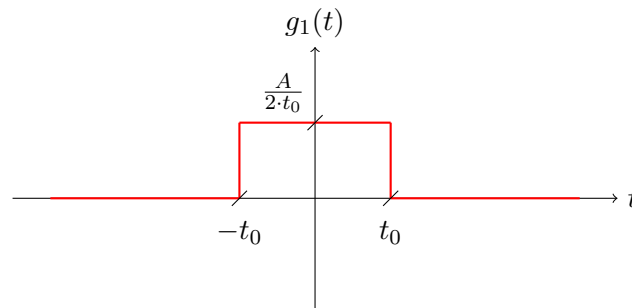


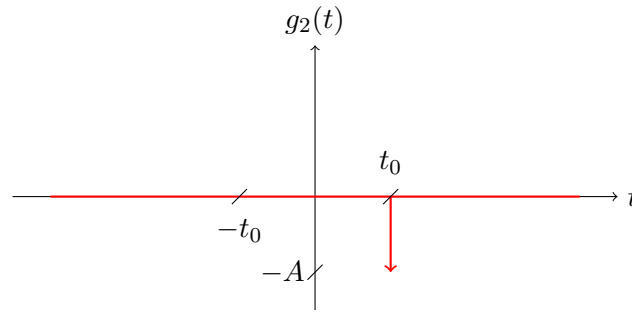
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad (138)$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (139)$$

$$g_2(t) = -A \cdot \delta(t - t_0) \quad (140)$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delty Diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (141)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= -A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\ &= -A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{aligned}$$

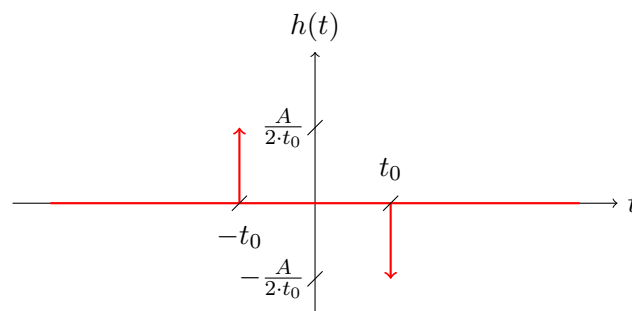
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(j\omega) = -A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t - t_0) \quad (142)$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t - t_0) \quad (143)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (144)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{j}{j} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \\ &= j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(j\omega) = j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g_1(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \end{aligned}$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(j\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned}
G_1(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot H(0) \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(0 \cdot t_0) \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(0) \\
&= A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot 0 \\
&= A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\
&= A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(j\omega) = A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\
g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(j\omega) \\
g(t) &= \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \alpha \cdot G_1(j\omega) + \beta \cdot G_2(j\omega)
\end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(j\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= G_1(j\omega) + G_2(j\omega) \\
&= A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
&= A \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0} \right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(j\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

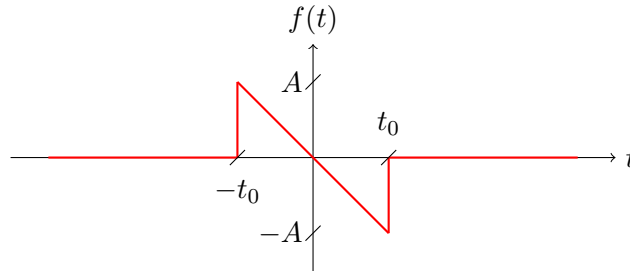
Podstawiając otrzymujemy

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \left(Sa(0 \cdot t_0) - e^{-j \cdot 0 \cdot t_0} \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot \left(Sa(0) - e^0 \right) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (1 - 1) \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot 0 \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + 0 \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0})$.

Zadanie 12. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (145)$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases} \end{aligned}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

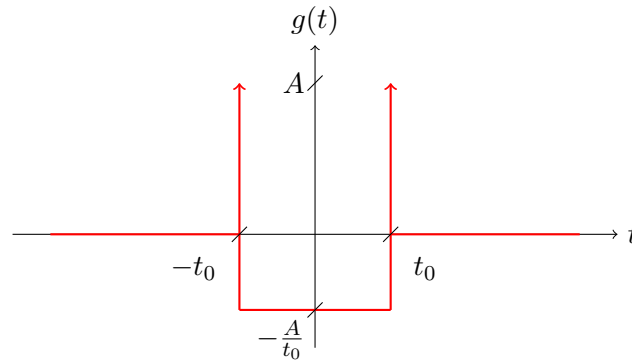
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (146)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \quad (147)$$

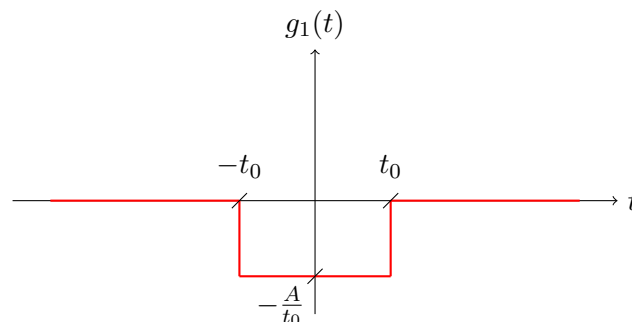


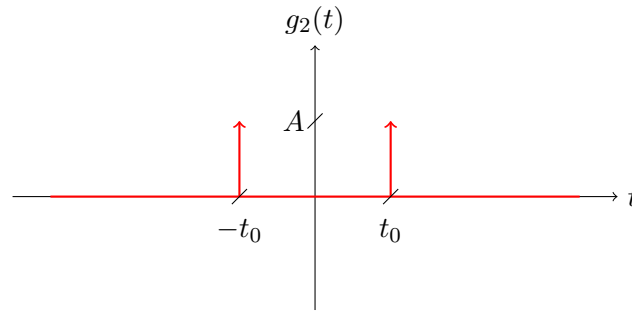
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad (148)$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (149)$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \quad (150)$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (151)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\ &= A \cdot (e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \\ &= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \\ &= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2}{2} \\ &= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}}{2} \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} \\ &= 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

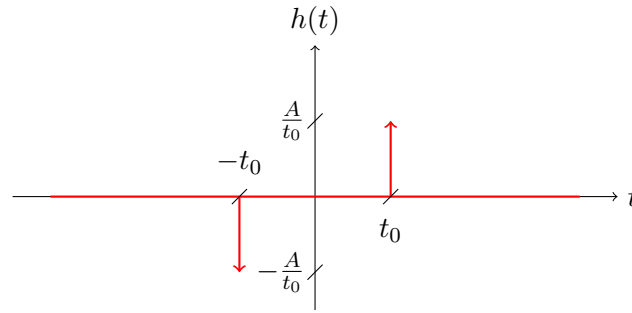
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(j\omega) = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0} \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \delta(t - t_0) \quad (152)$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0} \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \delta(t - t_0) \quad (153)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (154)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt \\
 &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
 &= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
 &= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \\
 &= -\frac{A}{t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \\
 &= -\frac{A}{t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
 &= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} \\
 &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \\
 &= -j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
 \end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(j\omega) = -j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(j\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(-j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \left(-j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(0 \cdot t_0) \right) \\ &= -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(0) \\ &= -2 \cdot A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 0 \\ &= -2 \cdot A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - 0 \\ &= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\ &= -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(j\omega) = -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega)$$

$$g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(j\omega)$$

$$g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \alpha \cdot G_1(j\omega) + \beta \cdot G_2(j\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(j\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega) + G_2(j\omega) \\ &= -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \\ &= -2 \cdot A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) \end{aligned}$$

Znając transformatę $G(j\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$ funkcji $f(t)$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

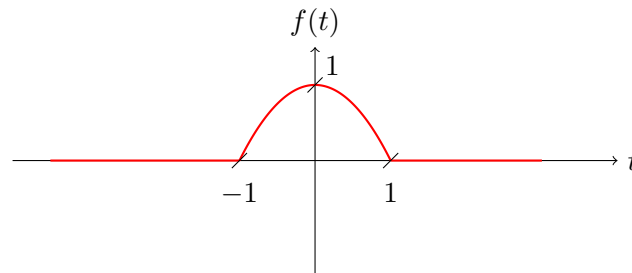
$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa(0 \cdot t_0) - \cos(0 \cdot t_0))) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa(0) - \cos(0)) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) \\ &= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 \\ &= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - 0 \\ &= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 13. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.

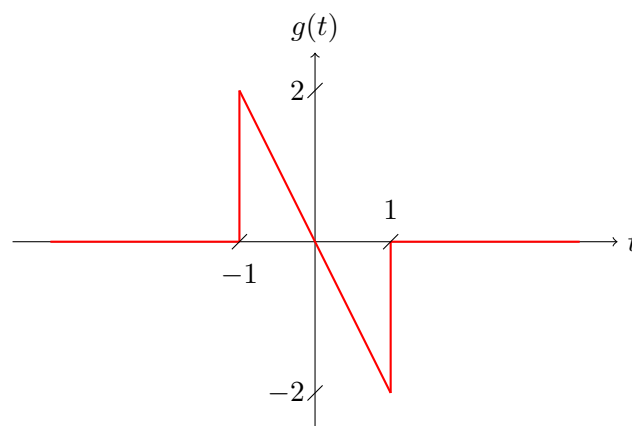


Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (155)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (156)$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (157)$$

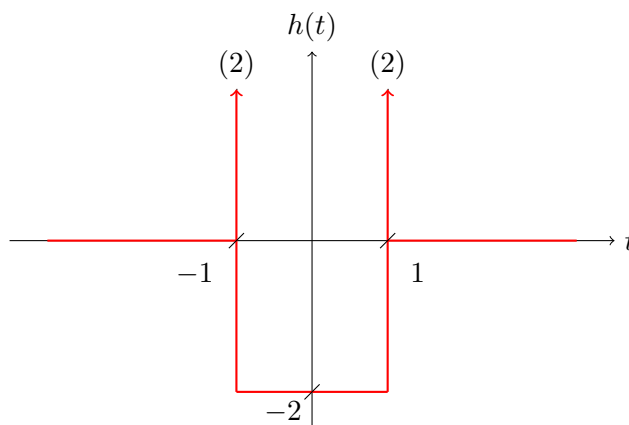
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (158)$$

Pytanie, czy można dalej uprościć sygnał $g(t)$ dokonując jego różniczkowania. Wyznamy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (159)$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \quad (160)$$

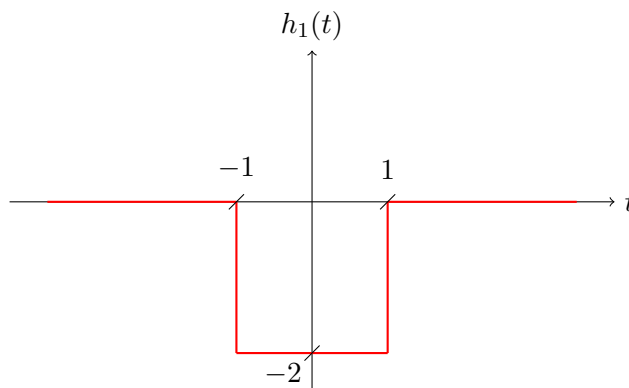


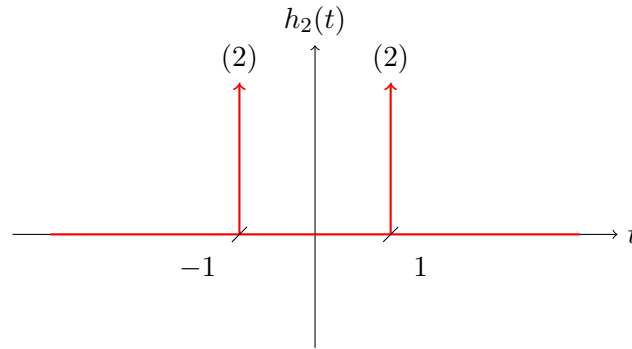
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (161)$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (162)$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \quad (163)$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (164)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} H_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ &= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\ &= 2 \cdot (e^{-j\omega \cdot (-1)} + e^{-j\omega \cdot 1}) \\ &= 2 \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &= 2 \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \cdot \frac{2}{2} \\ &= 4 \cdot \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} \\ &= 4 \cdot \cos(\omega) \end{aligned}$$

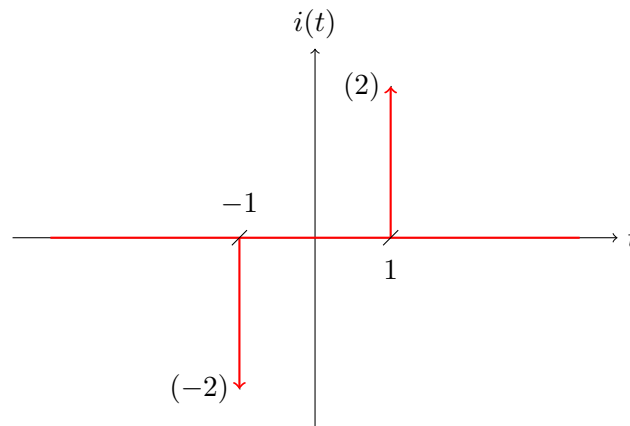
Transformata sygnału $h_2(t)$ to $G_2(j\omega) = 4 \cdot \cos(\omega)$

Funkcja $h_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona, więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$i(t) = h_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 0 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \quad (165)$$

,czyli po prostu:

$$i(t) = h_1'(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \quad (166)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $i(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$I(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (167)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
 I(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} -\delta(t+1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
 &= 2 \cdot \left(-e^{-j\omega \cdot (-1)} + e^{-j\omega \cdot 1} \right) \\
 &= 2 \cdot (-e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\
 &= -2 \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} \\
 &= -4 \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2 \cdot j} \\
 &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} \\
 &= -4 \cdot j \cdot \sin(\omega)
 \end{aligned}$$

Transformata sygnału $i(t)$ to $I(j\omega) = -4 \cdot j \cdot \sin(\omega)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu, aby wyznaczyć transformatę sygnału $h_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $i(t) = h_1'(t)$

$$i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} I(j\omega)$$

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot I(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0)$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $I(j\omega)$ sygnału $i(t)$ otrzymujemy transformatę $H_1(j\omega)$ sygnału $h_1(t)$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot I(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot I(0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I(0) = -4 \cdot j \cdot \sin(0) \\ I(0) = -4 \cdot j \cdot 0 \\ I(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (-4 \cdot j \cdot \sin(\omega)) + 0$$

$$= -4 \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\}$$

$$= -4 \cdot Sa(\omega)$$

Ostatecznie transformata sygnału $h_1(t)$ jest równa $H_1(j\omega) = -4 \cdot Sa(\omega)$.

Korzystając z liniowości transformacji Fouriera

$$h_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega)$$

$$h_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_2(j\omega)$$

$$h(t) = \alpha \cdot h_1(t) + \beta \cdot h_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \alpha \cdot H_1(j\omega) + \beta \cdot H_2(j\omega)$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $H(j\omega)$ funkcji $h(t)$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

$$= -4 \cdot Sa(\omega) + 4 \cdot \cos(\omega)$$

$$= 4 \cdot (\cos(\omega) - Sa(\omega))$$

Znając transformatę $H(j\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ funkcji $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} H(0) = 4 \cdot (\cos(0) - \text{Sa}(0)) \\ H(0) = 4 \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 4 \cdot 0 \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (4 \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))) + 0 \\
&= \frac{4}{j \cdot \omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g(t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{4}{j\omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))$.

Znając transformatę $G(j\omega)$ i kolejny raz korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned}
& g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
& f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

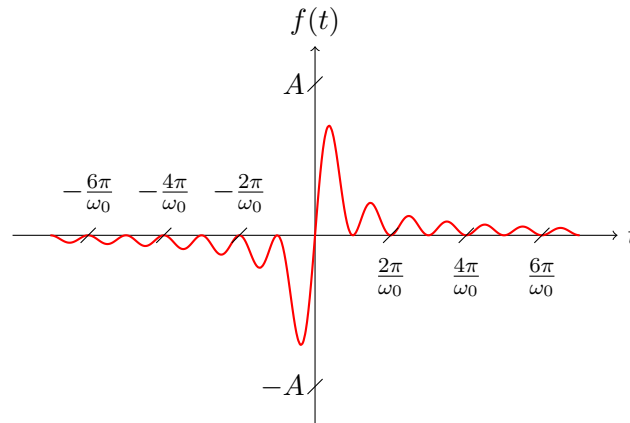
$$\begin{aligned}
& F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
& \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{4}{j \cdot 0} \cdot (\cos(0) - \text{Sa}(0)) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^0 g(t) \cdot dt = \int_{-1}^1 (-2) \cdot t \cdot dt = (-2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\ G(0) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-2) \cdot 0 \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{4}{j \cdot \omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) + 0 \\
&= \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) \\
&= \frac{4}{(-1) \cdot \omega^2} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) \\
&= \frac{4}{\omega^2} \cdot (\text{Sa}(\omega) - \cos(\omega))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{4}{\omega^2} \cdot (\text{Sa}(\omega) - \cos(\omega))$.

Zadanie 14. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (168)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (169)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} \\ &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right) \\ &= \begin{cases} f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$g(t) = H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)$$

Tak więc zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa

$$h(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$g_1(t) = H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(-j\omega) = \pi \cdot \Pi(-\omega) = 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$$

$$= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right)$$

$$= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right)$$

$$= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right)$$

$$= \{a = 2 \cdot \omega_0\}$$

$$= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right)$$

$$= g_1(a \cdot t)$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega)$$

$$g(t) = g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha})$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(j\omega)$

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \\
&= \left\{ \alpha = 2 \cdot \omega_0 \right\} \\
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}) \\
&= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Pi(\omega) \right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$
 Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f_1(t) &= g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

otrzymujemy wprost

$$\begin{aligned}
F_1(j\omega) &= G(j(\omega - \omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(j\omega) &= G(j(\omega + \omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega)
\end{aligned}$$

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)$$

otrzymujemy

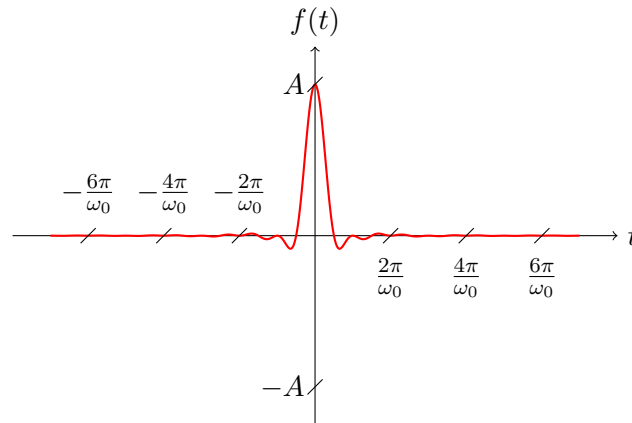
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) - F_2(j\omega) \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi \left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) - \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi \left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi \left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) - \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi \left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) \right)$

Zadanie 15. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (170)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (171)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right) \\ &= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f_1(t) + f_2(t)) \end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g(t) &= H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega) \end{aligned}$$

Tak więc zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa

$$\begin{aligned} h(t) &= \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ g_1(t) &= H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(-j\omega) = \pi \cdot \Lambda(-\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \\ &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) \\ &= Sa^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \\ &= Sa^2\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) \\ &= \{a = 2 \cdot \omega_0\} \\ &= Sa^2\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\ g(t) &= g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę $G_1(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \alpha = 2 \cdot \omega_0 \right\} \\
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$. Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f_1(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

otrzymujemy wprost

$$\begin{aligned}
F_1(j\omega) &= G(j(\omega - \omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(j\omega) &= G(j(\omega + \omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformaty Fouriera

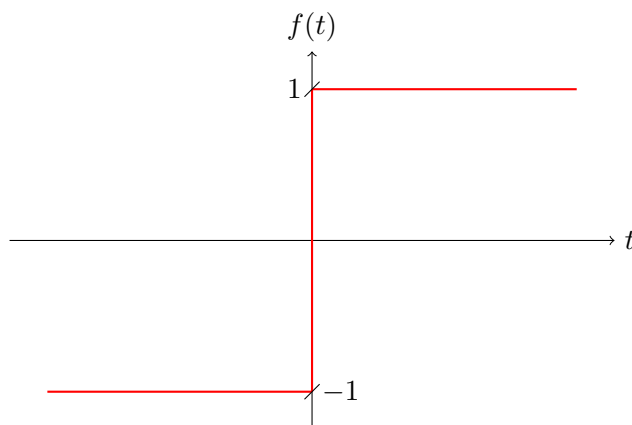
$$\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\
f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)
\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) - F_2(j\omega) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda \left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda \left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda \left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda \left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0} \right) \right)$

Zadanie 16. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ za pomocą twierdzeń.

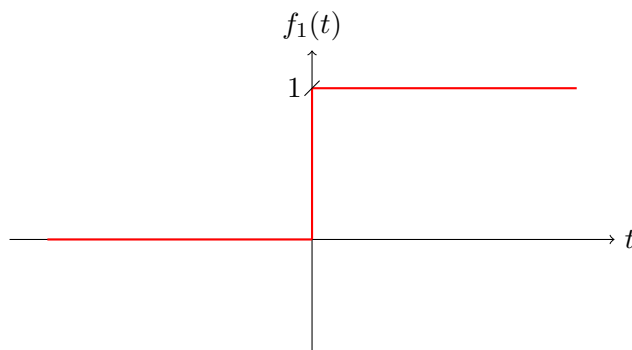


Sygnał $f(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sgn}(t) \\ &= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) \\ &= f_1(t) - f_2(t) \end{aligned}$$

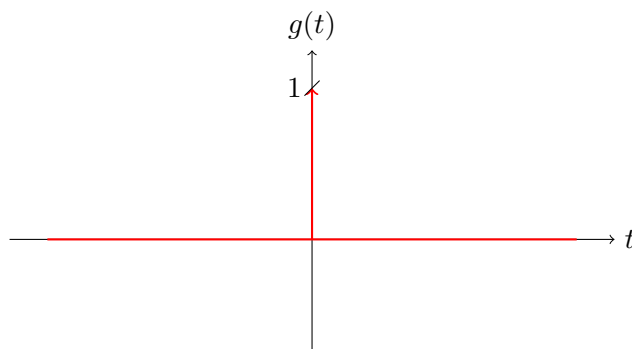
Wyraźnie widac iż funkcja jest złożeniem dwóch skoków jednostkowych

$$f_1(t) = \mathbb{1}(t) f_2(t) = \mathbb{1}(-t)$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



dla której w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} \\
 &= e^{-j\omega \cdot 0} \\
 &= e^0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(j\omega) = 1$

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$

$$\begin{aligned}
 g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
 f_1(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
 \end{aligned}$$

Tak więc mamy

$$\begin{aligned}
 F_1(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
 &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
 \end{aligned}$$

A więc transformata skoku jednostkowego jest $F_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$

Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= 1(-t) \\
 &= 1(-1 \cdot t)
 \end{aligned}$$

$$= f_1(-1 \cdot t)$$

A więc transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\ f_2(t) = f_1(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(j\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(j\frac{\omega}{a}) \\ &= \left\{ a = -1 \right\} \\ &= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta\left(\frac{\omega}{-1}\right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) \\ &= -\frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \end{aligned}$$

A więc transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(j\omega) = -\frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$

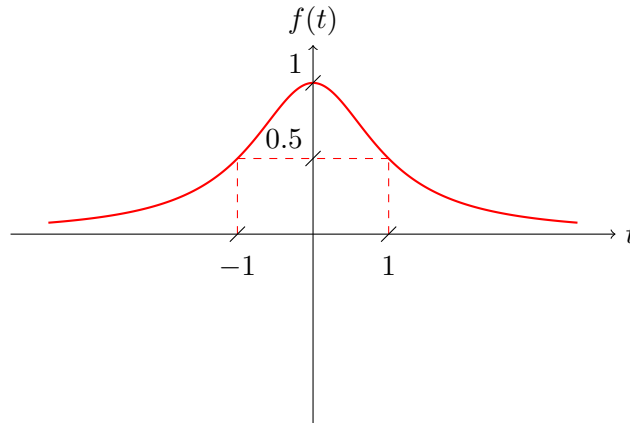
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\ f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\ f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) - F_2(j\omega) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \left(-\frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) \\ &= \frac{2}{j \cdot \omega} \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{2}{j \cdot \omega}$.

Zadanie 17. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ za pomocą twierdzeń.



Założmy sygnał $g(t) = e^{-|t|}$ i wyznaczmy jego transformatę.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{t-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-t-j\omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^0 e^{(1-j\omega) \cdot t} \cdot dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-(1+j\omega) \cdot t} \cdot dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z_1 = -(1+j\omega) \cdot t \quad z_2 = (1-j\omega) \cdot t \\ dz_1 = -(1+j\omega) \cdot dt \quad dz_2 = (1-j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot dz_1 \quad dt = \frac{1}{1-j\omega} \cdot dz_2 \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^0 e^{z_2} \cdot \frac{1}{1-j\omega} \cdot dz_2 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{z_1} \cdot \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot dz_1 \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^0 e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{z_1} \cdot dz_1 \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{z_2} \Big|_{-\tau}^0 + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{z_1} \Big|_0^{\tau} \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(1-j\omega) \cdot t} \Big|_{-\tau}^0 + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(1+j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{(1-j\omega) \cdot 0} - e^{(1-j\omega) \cdot (-\tau)} \right) + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-(1+j\omega) \cdot \tau} - e^{-(1+j\omega) \cdot 0} \right) \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^0 - e^{-(1-j\omega) \cdot \tau} \right) + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-(1+j\omega) \cdot \tau} - e^0 \right) \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\tau+j\omega \cdot \tau} \right) + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-\tau-j\omega \cdot \tau} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau} \cdot e^{j\omega \cdot \tau} \right) + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) \\
 &= \frac{1}{1-j\omega} \cdot \left(1 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\omega \cdot \tau} \right) + \frac{1}{-(1+j\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-j\omega \cdot \tau} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-j\cdot\omega} \cdot \left(1 - 0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\omega\cdot\tau}\right) + \frac{1}{-(1+j\cdot\omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-j\omega\cdot\tau} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-j\cdot\omega} \cdot (1-0) + \frac{1}{-(1+j\cdot\omega)} \cdot (0-1) \\
&= \frac{1}{1-j\cdot\omega} + \frac{1}{-(1+j\cdot\omega)} \cdot (-1) \\
&= \frac{1}{1-j\cdot\omega} + \frac{1}{1+j\cdot\omega} \\
&= \frac{(1+j\cdot\omega)}{(1+j\cdot\omega) \cdot (1-j\cdot\omega)} + \frac{(1-j\cdot\omega)}{(1+j\cdot\omega) \cdot (1-j\cdot\omega)} \\
&= \frac{(1+j\cdot\omega) + (1-j\cdot\omega)}{(1+j\cdot\omega) \cdot (1-j\cdot\omega)} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $g(t) = e^{-|t|}$ jest równa $G(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$. Postać funkcji $G(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ nie jest identyczna z postacią funkcji $f(t)$, funkcja różni się o współczynnik 2.

Z twierdzenia o liniowości transformaty

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
h(t) = \alpha \cdot g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \alpha \cdot G(j\omega)
\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2} \cdot e^{-|t|} \\
H(j\omega) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} \\
&= \frac{1}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

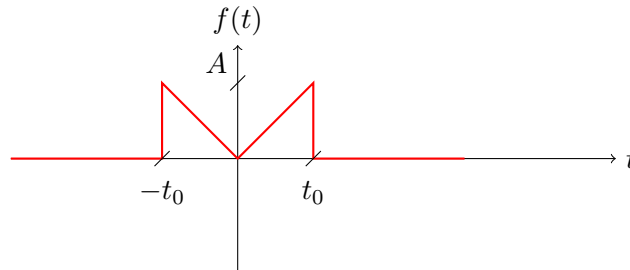
Na podstawie sygnału $h(t)$ i korzystając z twierdzenia o symetrii możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

$$\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\
f(t) = H(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= 2\pi \cdot h(-\omega) \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|-\omega|} \\
&= \pi \cdot e^{-|\omega|}
\end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ jest równa $F(j\omega) = \pi \cdot e^{-|\omega|}$

Zadanie 18. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Możemy zauważyć iż przedstawiony sygnał można otrzymać przez odejęcie trójkąta od sygnału prostokątnego. Wykorzystując sygnały elementarne możemy to zapisać następująco:

$$f(t) = A \cdot \left(\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \right) \quad (172)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = A \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \quad (173)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \\ f_2(t) &= \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \end{aligned}$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2 \cdot t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{2 \cdot t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) \quad (174)$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa^2\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (175)$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$ to $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

0.3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsewala

Zadanie 19. Oblicz energię sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \quad (176)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (177)$$

Energię sygnału można wyznaczyć ze wzoru:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (178)$$

Podstawiając dany sygnał $f(t)$ do wzoru na energię otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |Sa(\omega_0 \cdot t)|^2 \cdot dt \\ &= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{(\omega_0 \cdot t)} \right|^2 \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega_0 \cdot t)}{(\omega_0 \cdot t)^2} \cdot dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

Próbując obliczyć energię tym sposobem musimy obliczyć całkę cykliczną. A może jest łatwiejszy sposób?

Spróbujemy wykorzystać twierdzenie Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (179)$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(j\omega)$. Skoro wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (180)$$

to, na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) = G(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$

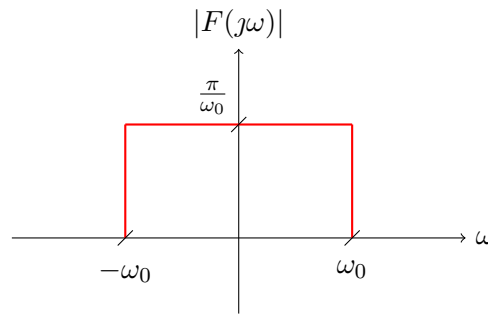
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa(\omega_0 \cdot t)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 2 \cdot \omega_0$:

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) \\ g(t) = f(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega) \\ Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Ponieważ energię wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (181)$$

to wyznaczmy $|F(j\omega)|^2$:

$$|F(j\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right)^2 \cdot d\omega + \int_{\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega + 0 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right)^2 \cdot \left(\omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \right) \\
&= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}
\end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ równa się $E = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Zadanie 20. Oblicz, jaka część energii sygnału $f(t) = A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa(\frac{\omega}{2})$.

$$f(t) = A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \quad (182)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (183)$$

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = ? \quad (184)$$

Ponieważ musimy obliczyć energię tylko dla pewnego zakresu pulsacji, to wykorzystamy twierdzenie Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (185)$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(j\omega)$.

Ponieważ możemy korzystać tylko ze znanych twierdzeń oraz wiedzy o transformacie sygnału $\Pi(t)$, to spróbujmy przekształcić sygnał $f(t)$ do postaci, w której wprost możemy zastosować twierdzenia. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{(e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{4} \right) \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right) \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right) \\ &= \frac{A}{4} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + \frac{A}{2} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A}{4} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \end{aligned}$$

Korzystając z liniowości przekształcenia Fouriera możemy niezależnie obliczyć transformaty dla sygnałów $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$, a następnie zsumować te transformaty. Zaczniemy od sygnału $f_2(t)$:

Skoro wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (186)$$

to, na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f_2(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega) \end{aligned}$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 4 \cdot \omega_0$:

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) \\ f_1(t) = f(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \\ Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega) \\ Sa\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{4 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_2(t) = \frac{A}{2} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_2(j\omega) \end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_2(t)$ to $F_2(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Zauważmy, że $f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_1(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\ f_1(t) = f_2(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = F_2(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_1(j\omega) \end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_1(t)$ to $F_1(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Podobnie, zauważmy, że $f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_3(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega)$$

$$f_3(t) = f_2(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(j\omega) = F_2(j(\omega - \omega_0))$$

otrzymujemy:

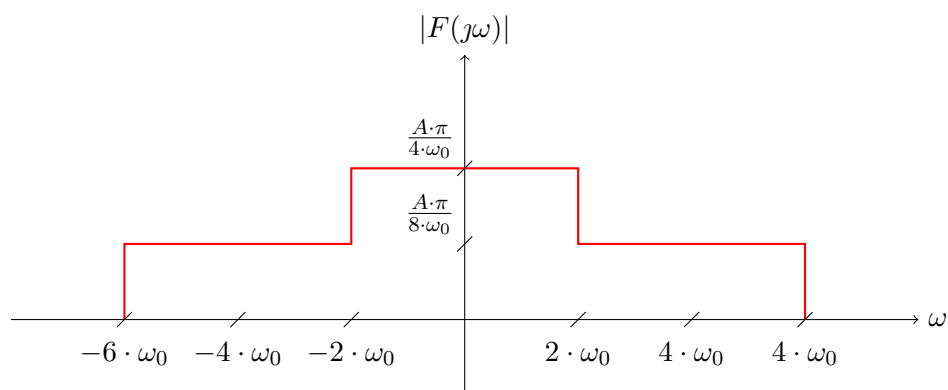
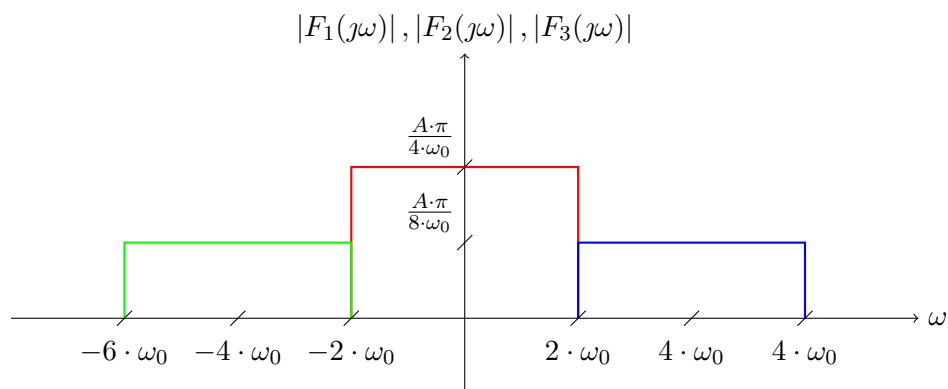
$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_3(j\omega) \end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_3(t)$ to $F_3(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Teraz możemy podać transformatę sygnału $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$,

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) + F_2(j\omega) + F_3(j\omega) \\ &= \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} & \omega \in (-6 \cdot \omega_0; -2 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (-2 \cdot \omega_0; 2 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} & \omega \in (2 \cdot \omega_0; 6 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (6 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Ponieważ energię wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (187)$$

to wyznaczmy $|F(j\omega)|^2$:

$$|F(j\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (-6 \cdot \omega_0; -2 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (-2 \cdot \omega_0; 2 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (2 \cdot \omega_0; 6 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (6 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-6 \cdot \omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-6 \cdot \omega_0}^{-2 \cdot \omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{2 \cdot \omega_0}^{6 \cdot \omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{6 \cdot \omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-6 \cdot \omega_0}^{-2 \cdot \omega_0} d\omega + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} d\omega + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{2 \cdot \omega_0}^{6 \cdot \omega_0} d\omega + 0 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-6 \cdot \omega_0}^{-2 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{2 \cdot \omega_0}^{6 \cdot \omega_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot (-2 \cdot \omega_0 - (-6 \cdot \omega_0)) + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0 - (-2 \cdot \omega_0)) + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot (6 \cdot \omega_0 - 2 \cdot \omega_0) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{2}{4} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = A \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$ równa się $E = \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (188)$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \left| \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \right) \cdot \omega \Big|_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0 - (-2 \cdot \omega_0)) \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (4 \cdot \omega_0) \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = ? \quad (189)$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = \frac{\frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}}{\frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \frac{16 \cdot \omega_0}{3 \cdot A^2 \cdot \pi} = \frac{2}{3} \approx 66\%$$

Na pulsacje z zakresu $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ przypada około 66% energii sygnału.

Zadanie 21.

Oblicz, jaka część energii sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (190)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (191)$$

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = ? \quad (192)$$

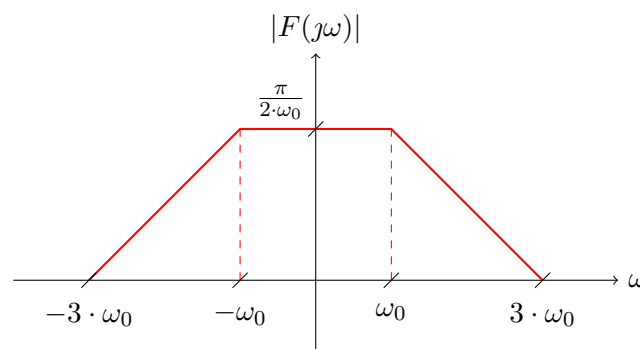
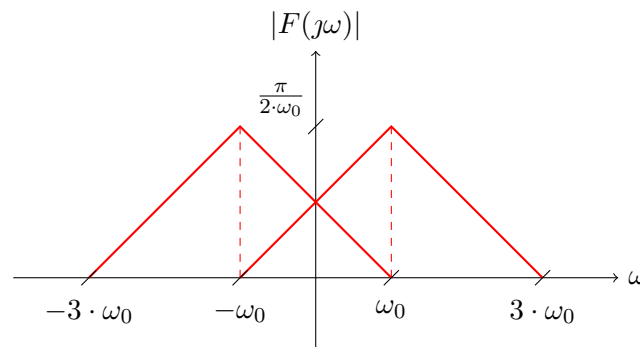
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (193)$$

W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3 \cdot \omega_0) \\ \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (-3 \cdot \omega_0; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (3 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_{-\infty}^{-3 \cdot \omega_0} |0|^2 \cdot d\omega + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left| \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left| -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{3 \cdot \omega_0}^{\infty} |0|^2 \cdot d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[0 + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left(\left(\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left(\left(-\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + 0 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega^2 \cdot d\omega + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega^2 \cdot d\omega - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(-\frac{\omega_0^3}{3} - \left(-\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} \right) \right) + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (-\omega_0 - (-3 \cdot \omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{\omega_0^3}{3} \right) - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (3 \cdot \omega_0 - \omega_0) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(-\frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{18 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} + \frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{18 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} + 1 + \frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} \right] \\ &= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - \frac{96}{16} + \frac{36}{8} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - 6 + \frac{108}{24} + 1 \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{160}{24} - 5 \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{160}{24} - \frac{120}{24} \right] \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{40}{24} \right] \\
&= \frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując, całkowita energia sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ to $E = \frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (194)$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega| < \omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \right) \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = ? \quad (195)$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

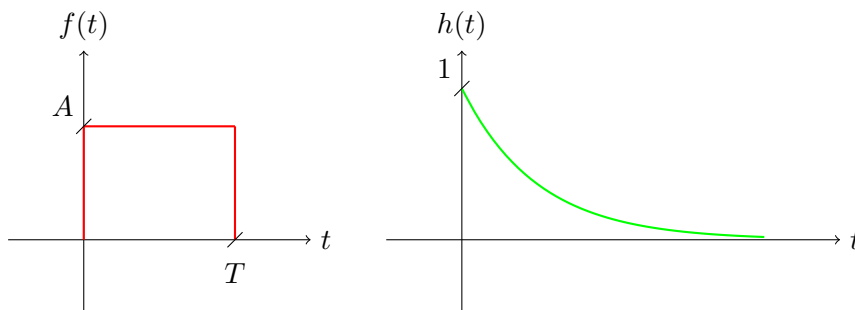
$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = \frac{\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}}{\frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}} = \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \frac{12 \cdot \omega_0}{5 \cdot \pi} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 60\%$$

Na pulsacje z zakresu $|\omega| < \omega_0$ przypada 60% energii sygnału.

0.4 Przetwarzanie sygnałów za pomocą układów LTI

0.4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$ i $h(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$



Wzór na splot sygnałów

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (196)$$

Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = A \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$h(t - \tau) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (-\infty; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji w dziedzinie τ dla różnych wartości t :

Po wymnożeniu obu funkcji, dla przykładowych wartości t , otrzymujemy (ciągła, czerwona linia):

Z wykresu widać, że dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot h(t - \tau)$. W związku z tym, wyznaczymy splot oddzielnie dla poszczególnych przedziałów wartości t

Przedział 1 Dla wartości t spełniających warunek $t < 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Przedział 2 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq 0$ i $t < T$ otrzymujemy

$$f(\tau) \cdot h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (0; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot d\tau + \int_0^t (A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}) \cdot d\tau + \int_t^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 + A \cdot \int_0^t (e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau + 0 \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_0^t (e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \tau} \Big|_0^t \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot t} - e^{a \cdot 0}) \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot t} - 1) \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^{a \cdot t} \cdot e^{-a \cdot t} - 1 \cdot e^{-a \cdot t}) \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^{a \cdot t - a \cdot t} - e^{-a \cdot t}) \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^0 - e^{-a \cdot t}) \\ &= \frac{A}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) \end{aligned}$$

Przedział 3 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq T$ otrzymujemy

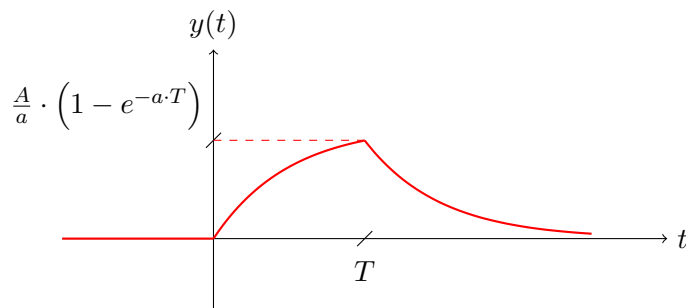
$$f(\tau) \cdot h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

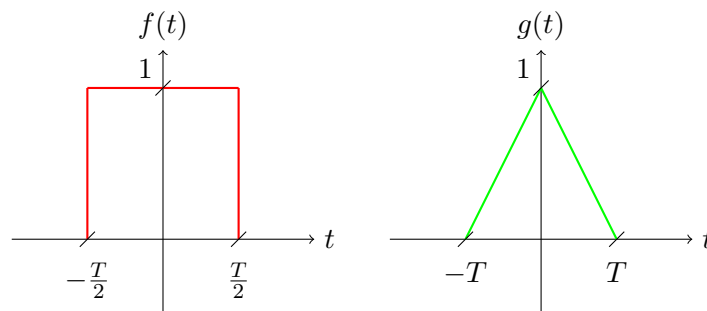
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot d\tau + \int_0^T (A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}) \cdot d\tau + \int_T^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 + A \cdot \int_0^T (e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau + 0 \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_0^T (e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \tau} \Big|_0^T \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - e^{a \cdot 0}) \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - 1) \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; 0) \\ \frac{A}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) & t \in (0; T) \\ \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - 1) & t \in (T; \infty) \end{cases}$$



Zadanie 2. Oblicz splot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$



Wzór na splot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (197)$$

Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$g(t - \tau) = \Lambda\left(\frac{t - \tau}{T}\right)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; -\frac{T}{2}) \\ A & \tau \in (-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}) \\ 0 & \tau \in (\frac{T}{2}; \infty) \end{cases}$$

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T); \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t - T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t + T) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty); \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy

Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t - \tau)$.

Przedział 1 .

Dla wartości t spełniających warunek $t + T < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned}t + T &< -\frac{T}{2} \\t &< -\frac{T}{2} - T \\t &< -\frac{3}{2} \cdot T\end{aligned}$$

w wyniku mnożenia otrzymamy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\&= 0\end{aligned}$$

Przedział 2 .

Dla wartości t spełniających warunki $t + T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll} t + T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{T}{2} - T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{3}{2} \cdot T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \end{array}$$

a więc $t \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T, -\frac{T}{2}\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t + T\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t + T\right) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{1}{T} \cdot \tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{t+T}{T} \cdot d\tau + 0 \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \tau \cdot d\tau + \frac{t+T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T} \cdot (\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T + \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t + \frac{3}{2} \cdot T \right) \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{T} \cdot \left(t^2 + \frac{3}{2} \cdot t \cdot T + t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{5}{2} \cdot t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 + 2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 3 \cdot t \cdot T + 2 \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T
\end{aligned}$$

Przedział 3 .

Dla wartości t spełniających warunki $t \geq -\frac{T}{2}$ i $t < \frac{T}{2}$

$$t \geq -\frac{T}{2} \quad \wedge \quad t < \frac{T}{2}$$

a więc $t \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T, \frac{1}{2} \cdot T \right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t \in \left(-\frac{T}{2}, t \right)$ oraz $t \in \left(t, \frac{T}{2} \right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2} \right) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t \right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(t; \frac{T}{2} \right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty \right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^t \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
 &= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{t - T}{T} \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau \right) \cdot d\tau - \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{-t - T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t \tau \cdot d\tau - \frac{t - T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t d\tau - \frac{1}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau + \frac{t + T}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{t - T}{T} \cdot \tau \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_t^{\frac{T}{2}} + \frac{t + T}{T} \cdot \tau \Big|_t^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 - \left(-\frac{T}{2} \right)^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t - \left(-\frac{T}{2} \right) \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} \right)^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t - T) \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t + T) \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t \cdot T - \frac{1}{2} \cdot T^2 \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t \cdot T - 2 \cdot t^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 - 2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 + t \cdot T - 2 \cdot t^2 + T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 + 2 \cdot T^2 \right) \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \left(-t^2 + T^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{T} \cdot t^2 + T
 \end{aligned}$$

Przedział 4 .

Dla wartości t spełniających warunki $t - T \geq -\frac{T}{2}$ i $t - T < \frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll}
t - T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t - T < \frac{T}{2} \\
t \geq -\frac{T}{2} + T & \wedge & t < \frac{T}{2} + T \\
t \geq \frac{1}{2} \cdot T & \wedge & t < \frac{3}{2} \cdot T
\end{array}$$

a więc $t \in \left(\frac{1}{2} \cdot T, \frac{3}{2} \cdot T\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t - T, \frac{T}{2}\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T} & \tau \in \left(t - T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t-T} 0 \cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t - T}{T} \cdot d\tau + 0 \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau - \frac{t - T}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t - T}{T} \cdot \tau \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - (t - T)^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - (t - T) \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - (t^2 - 2 \cdot t \cdot T + T^2) \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t + T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - T^2 \right) - \frac{1}{T} \cdot (t - T) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot T - t \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t \cdot T - t^2 - \frac{3}{2} \cdot T^2 + t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot t \cdot T - 2 \cdot t^2 - \frac{6}{2} \cdot T^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - \frac{6}{2} \cdot t \cdot T + 2 \cdot t^2 + \frac{6}{2} \cdot T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot T^2 - 3 \cdot t \cdot T + t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 \\
&= \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2
\end{aligned}$$

Przedział 5

Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} t - T &\geq \frac{T}{2} \\ t &\geq \frac{T}{2} + T \\ t &\geq \frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

a więc $t \in \left(\frac{3}{2} \cdot T, \infty\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = 0$$

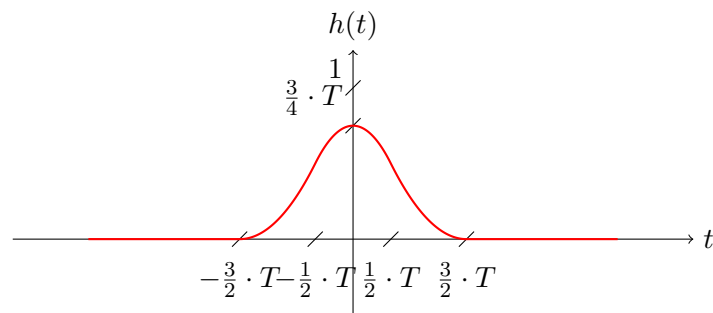
a więc wartość spłotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik spłotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

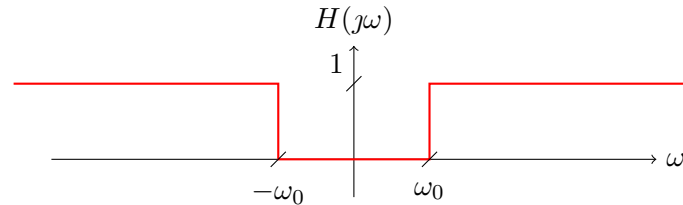
$$= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + \frac{3}{4} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases}$$



0.4.2 Filtry

Zadanie 3.

Na układ LTI o transmitancji podanej poniżej, podano sygnał $u(t) = A \cdot \text{Sa}(3 \cdot \omega_0 \cdot t)$. Wyznacz odpowiedź układu $y(t)$ wiedząc, że $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



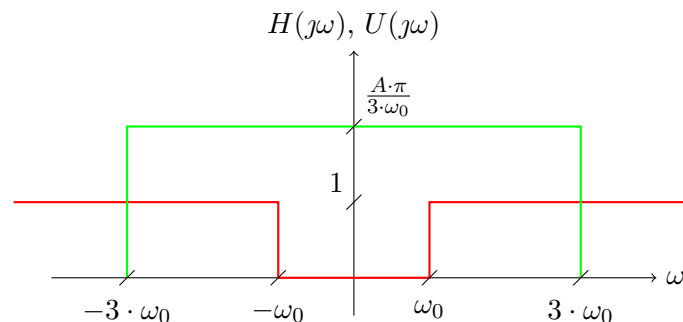
Wiemy, że odpowiedź układu LTI można obliczyć z zależności $y(t) = u(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ jest odpowiedzią impulsową układu. Wiemy także, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$.

Ponieważ wyznaczenie splotu liniowego sygnałów jest bardziej skomplikowane niż operacja mnożenia, dlatego spróbujemy skorzystać z tej drugiej zależności, czyli mnożenia transformat. W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$, czyli $U(j\omega)$.

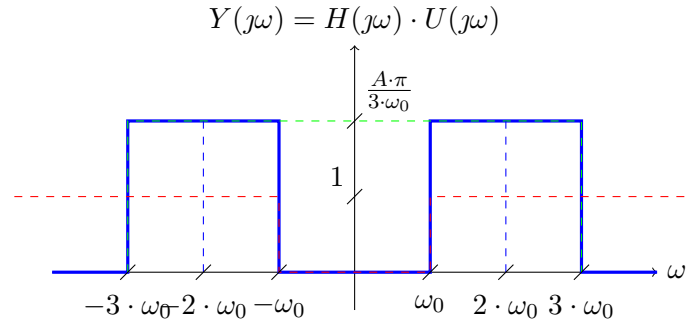
$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ \text{Sa}\left(6 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|6 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right) \\ A \cdot \text{Sa}(3 \cdot \omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału wejściowego $u(t)$ to $U(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$.

Transformatę sygnału wyjściowego, czyli $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$ wyznaczymy graficznie. W tym celu na wykresie transmitancji $H(j\omega)$ dodamy transformatę $U(j\omega)$:



Teraz dokonujemy operacji mnożenia transformat $U(j\omega)$ przez $H(j\omega)$



$$Y(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \quad (198)$$

Skoro znamy transformatę sygnału wyjściowego, to spróbujemy wyznaczyć sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu wykorzystując wcześniejsze obliczenia. Transformata $Y(j\omega)$ to suma dwóch przeskalowanych prostokątów, przesuniętych na osi pulsacji. W takim razie można wnioskować, że sygnał w dziedzinie czasu to będzie suma dwóch zmodulowanych i przeskalowanych funkcji $Sa(t)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - (-2 \cdot \omega_0)}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

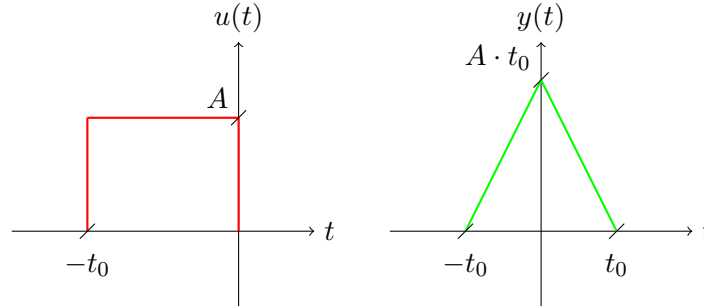
Podsumowując sygnał wyjściowy $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) + \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \\ &= \frac{A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \left(e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} + e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \right) \\ &\quad \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \end{aligned}$$

Odpowiedź układu to $y(t) = \frac{2 \cdot A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$.

Zadanie 4.

Wyznacz odpowiedź impulsową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wyglądają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$. W związku z tym $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(j\omega)$.

W pierwszym kroku wyznaczmy transformaty sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) & y(t) &= A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \\
 U(j\omega) &= \mathcal{F}\{u(t)\} & Y(j\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
 \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) & \Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 \Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) & \Lambda\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
 \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} & A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
 A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}
 \end{aligned}$$

Skoro znamy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyć transmi-tancję układu, czyli $H(j\omega)$.

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \\
 &= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}} \\
 &= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}
 \end{aligned}$$

Teraz możemy wyznaczyć odpowiedź impulsową układu $h(t)$:

$$\begin{aligned}
 h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\
 ? &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
 \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\end{aligned}$$

Odpowiedź impulsowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

© 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3



9 788393 962013