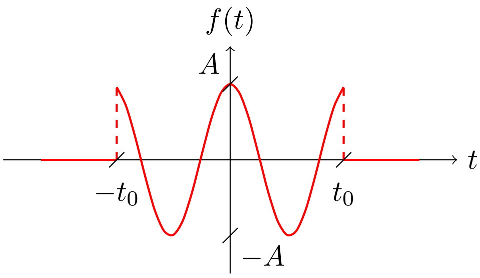
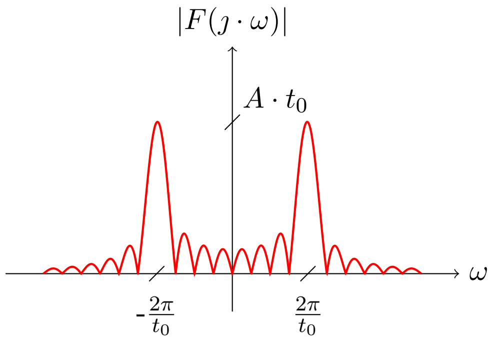
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\ Sa\left(\omega \cdot t_0 + 2\pi\right) \\ -Sa\left(\omega \cdot t_0 - 2\pi\right)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

25 maja 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

Zadanie 1. Przedstaw poniższe sygnały jako funkcję liniową sinusów i kosinusów wykorzystując wzory Eulera.

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t)$$
$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t)$$

Wzory Eulera:

$$sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}$$
$$cos\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}$$

Dwumian Newtona:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{1.1}$$

gdzie współczynniki $\binom{n}{k}$ określone są jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.2}$$

Współczynniki dwumianu Newtona $\binom{n}{k}$ są $k-tym$ elementem w $n-tym$ wierszu trójkąta Pascala (liczymy od 0). Każdy element trójkąta jest sumą dwóch elementów nad nim. Poniżej przedstawiono przykład dla $n = 6$:

$$\left\{\begin{array}{lccccccccccccc}
n{=}0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n{=}1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n{=}2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n{=}3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n{=}4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n{=}5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n{=}6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= sin^5(t) - sin^3(t) = \\
&= \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^5 - \left(\frac{e^{\jmath \cdot t} - e^{-\jmath \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^3 =
\end{aligned}$$

$$= \frac{(e^{\jmath\cdot t} - e^{-\jmath\cdot t})^5}{(2\cdot\jmath)^5} - \frac{(e^{\jmath\cdot t} - e^{-\jmath\cdot t})^3}{(2\cdot\jmath)^3} =$$

$$= \frac{1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^5\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^0 + 5\cdot(e^{\jmath\cdot t})^4\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^1 + 10\cdot(e^{\jmath\cdot t})^3\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^2}{(2\cdot\jmath)^5}+$$

$$+\frac{10\cdot(e^{\jmath\cdot t})^2\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^3 + 5\cdot(e^{\jmath\cdot t})^1\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^4 + 1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^0\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^5}{(2\cdot\jmath)^5}-$$

$$-\left(\frac{1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^3\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^0 + 3\cdot(e^{\jmath\cdot t})^2\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^1 + 3\cdot(e^{\jmath\cdot t})^1\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^2 + 1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^0\cdot(-e^{-\jmath\cdot t})^3}{(2\cdot\jmath)^3}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 5}\cdot 1 + 5\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 4}\cdot(-e^{-\jmath\cdot t\cdot 1}) + 10\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2}}{(2\cdot\jmath)^5}+$$

$$+\frac{10\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2}\cdot(-e^{-\jmath\cdot t\cdot 3}) + 5\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 1}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + 1\cdot 1\cdot(-e^{-\jmath\cdot t\cdot 5})}{(2\cdot\jmath)^5}-$$

$$-\left(\frac{1\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3}\cdot 1 + 3\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2}\cdot(-e^{-\jmath\cdot t\cdot 1}) + 3\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 1}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 1\cdot 1\cdot(-e^{-\jmath\cdot t\cdot 3})}{(2\cdot\jmath)^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 5} - 5\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3} + 10\cdot e^{\jmath\cdot t} - 10\cdot e^{-\jmath\cdot t} + 5\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 3} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 5}}{(2\cdot\jmath)^5}-$$

$$-\left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 3} - 3\cdot e^{\jmath\cdot t} + 3\cdot e^{-\jmath\cdot t} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 3}}{(2\cdot\jmath)^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 5} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 5} - 5\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3} + 5\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 3} + 10\cdot e^{\jmath\cdot t} - 10\cdot e^{-\jmath\cdot t}}{(2\cdot\jmath)^5}-$$

$$-\left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 3} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 3} - 3\cdot e^{\jmath\cdot t} + 3\cdot e^{-\jmath\cdot t}}{(2\cdot\jmath)^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 5} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 5} - 5\cdot(e^{\jmath\cdot t\cdot 3} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 3}) + 10\cdot(e^{\jmath\cdot t} - e^{-\jmath\cdot t})}{(2\cdot\jmath)^4\cdot(2\cdot\jmath)}-$$

$$-\left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 3} - e^{-\jmath\cdot t\cdot 3} - 3\cdot(e^{\jmath\cdot t} - \cdot e^{-\jmath\cdot t})}{(2\cdot\jmath)^2\cdot(2\cdot\jmath)}\right) =$$

$$= \frac{sin(5\cdot t) - 5\cdot sin(3\cdot t) + 10\cdot sin(t)}{(2\cdot\jmath)^4}-$$

$$-\left(\frac{sin(3\cdot t) - 3\cdot sin(t)}{(2\cdot\jmath)^2}\right) =$$

$$= \frac{sin(5\cdot t) - 5\cdot sin(3\cdot t) + 10\cdot sin(t)}{16} + \left(\frac{sin(3\cdot t) - 3\cdot sin(t)}{4}\right) =$$

$$= \frac{sin(5\cdot t) - 5\cdot sin(3\cdot t) + 10\cdot sin(t)}{16} + \frac{4\cdot sin(3\cdot t) - 12\cdot sin(t)}{16} =$$

$$= \frac{sin(5\cdot t) - sin(3\cdot t) - 2\cdot sin(t)}{16}$$

Podsumowując:

$$f_1(t) = sin^5(t) - sin^3(t) = \frac{sin(5\cdot t) - sin(3\cdot t) - 2\cdot sin(t)}{16}$$

$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) =$

$$= \left(\frac{e^{\jmath\cdot t} + e^{-\jmath\cdot t}}{2}\right)^6 - \left(\frac{e^{\jmath\cdot t} + e^{-\jmath\cdot t}}{2}\right)^4 =$$

$$= \frac{\left(e^{\jmath\cdot t} + e^{-\jmath\cdot t}\right)^6}{2^6} - \frac{\left(e^{\jmath\cdot t} + e^{-\jmath\cdot t}\right)^4}{2^4} =$$

$$= \frac{1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^6\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^0 + 6\cdot(e^{\jmath\cdot t})^5\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^1 + 15\cdot(e^{\jmath\cdot t})^4\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^2 + 20\cdot(e^{\jmath\cdot t})^3\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^3}{2^6} +$$

$$+ \frac{15\cdot(e^{\jmath\cdot t})^2\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^4 + 6\cdot(e^{\jmath\cdot t})^1\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^5 + 1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^0\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^6}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^4\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^0 + 4\cdot(e^{\jmath\cdot t})^3\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^1 + 6\cdot(e^{\jmath\cdot t})^2\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^2 + 4\cdot(e^{\jmath\cdot t})^1\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^3 + 1\cdot(e^{\jmath\cdot t})^0\cdot(e^{-\jmath\cdot t})^4}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 6}\cdot 1 + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 5}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 1} + 15\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 4}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 20\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 3}}{2^6} +$$

$$+ \frac{15\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 1}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 5} + 1\cdot 1\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{1\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 4}\cdot 1 + 4\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 3}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 1} + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 4\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 1}\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 3} + 1\cdot 1\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 6} + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + 15\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + 20\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 0} + 15\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 6\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 6}}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + 4\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 0} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 4}}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 6} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 6} + 6\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + 6\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + 15\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + 15\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 20}{2^6} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + 4\cdot e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot t\cdot 2} + 6}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 6} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 6} + 6\cdot(e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 4}) + 15\cdot(e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 2}) + 20}{2^5\cdot 2} -$$

$$- \left(\frac{e^{\jmath\cdot t\cdot 4} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 4} + 4\cdot(e^{\jmath\cdot t\cdot 2} + e^{-\jmath\cdot t\cdot 2}) + 6}{2^3\cdot 2}\right) =$$

$$= \frac{cos(6\cdot t) + 6\cdot cos(4\cdot t) + 15\cdot cos(2\cdot t) + 10}{2^5} -$$

$$- \left(\frac{cos(4\cdot t) + 4\cdot cos(2\cdot t) + 3}{2^3}\right) =$$

$$= \frac{cos(6\cdot t) + 6\cdot cos(4\cdot t) + 15\cdot cos(2\cdot t) + 10 - 4\cdot cos(4\cdot t) - 16\cdot cos(2\cdot t) - 12}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6\cdot t) + 2\cdot cos(4\cdot t) - cos(2\cdot t) - 2}{2^5} =$$

$$= \frac{cos(6\cdot t) + 2\cdot cos(4\cdot t) - cos(2\cdot t) - 2}{32}$$

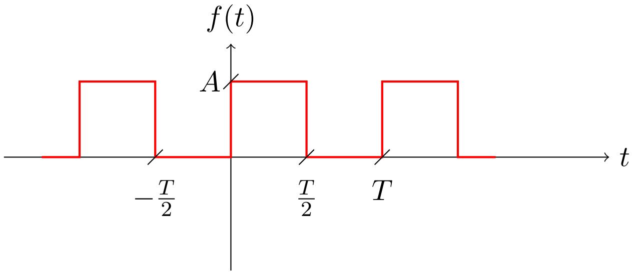
Podsumowując:

$$f_2(t) = cos^6(t) - cos^4(t) = \frac{cos(6\cdot t) + 2\cdot cos(4\cdot t) - cos(2\cdot t) - 2}{32}$$

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1.4}$$

Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{1.5}$$

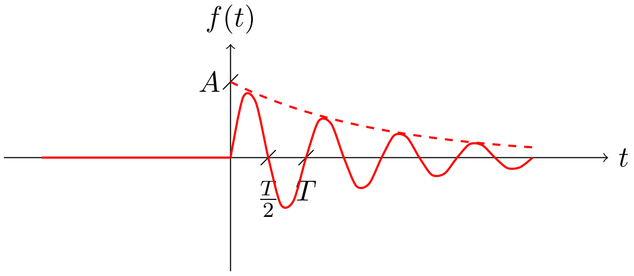
Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$.

Zadanie 2.

Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku :



Wartość średnią sygnału wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \tag{1.7}$$

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji:

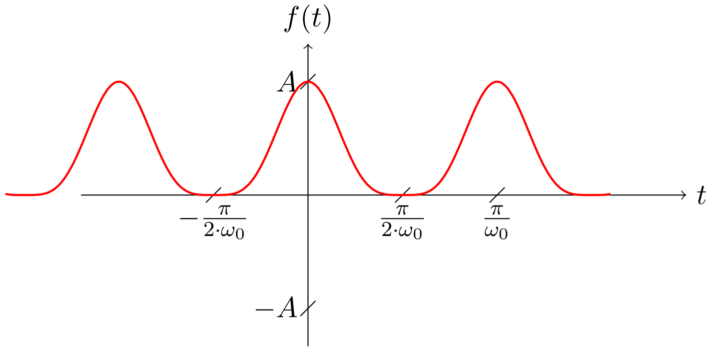
$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) + \right.\\
&+ \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) + \right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + 0 \right) + \right.\\
&+ \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 1 \right) + \right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \right.\\
&- \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} + \\
&\left. + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \\ -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} + \\ + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} = \\ = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} = \\ = \left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right) \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} = \\ = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \right) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0.

Zadanie 3.

Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t) = A \cdot cos^4 (\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku:



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{1.8}$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku: $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji dla zakresu $t \in \left(-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}; \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}\right)$:

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}} \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} A \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)^4 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} A \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right)^4 \cdot dt = \\
&= \left\{ cos(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} A \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^4 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\left(\frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\frac{\left(e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^2 + 2 \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}\right)^2}{2^2} \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t - \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{0} + e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2}{4} \right)^2 \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)\cdot 2 + 2^2}{4^2} \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 2\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 4}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t - \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{0} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2 + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t & z_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t \\ dz_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt & dz_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt = \\ dt = \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_3} \cdot dz_3 +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_4} \cdot dz_4 + 6\cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} dt\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot e^{z_1}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot e^{z_2}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot e^{z_3}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot e^{z_4}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{+\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) +\right.$$

$$+ \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) +$$

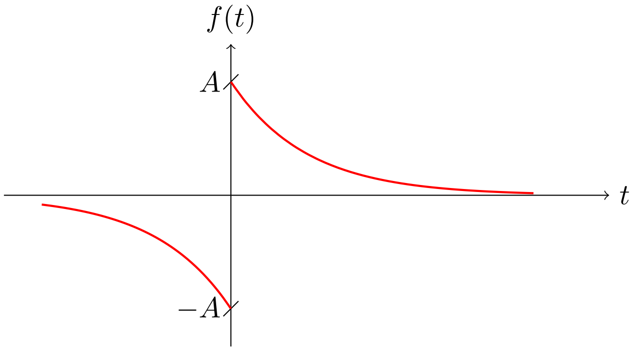
$$\left. + 6\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0} + \frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot 2 \cdot \pi} - e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} \right) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} - e^{\jmath \cdot 2 \cdot \pi} \right) + \right. \\
&\left. + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi} - e^{-\jmath \cdot \pi} \right) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} - e^{\jmath \cdot \pi} \right) + 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \right. \\
&\left. + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{A}{16} \cdot 6 = \\
&= \frac{A}{8} \cdot 3 = \\
&= \frac{3}{8} \cdot A
\end{aligned}
$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$.

1.1.2 Energia sygnału

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{1.9}$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.10}$$

Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji

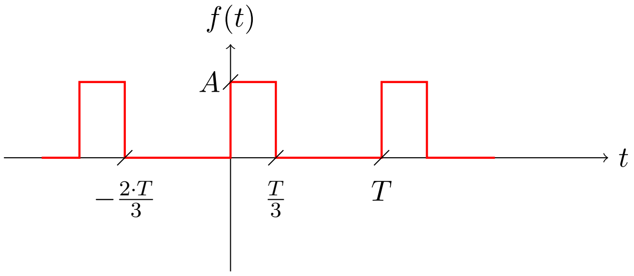
$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left| -A \cdot e^{a \cdot t} \right|^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left| A \cdot e^{-a \cdot t} \right|^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left(-A \cdot e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left(A \cdot e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} (-A)^2 \cdot \left(e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot \left(e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^z \cdot dz - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot dw \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^z\big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^w\big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^{2\cdot a\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{-2\cdot a\cdot dt}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{2\cdot a\cdot 0} - e^{-2\cdot a\cdot\frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2\cdot a\cdot\frac{\tau}{2}} - e^{-2\cdot a\cdot 0} \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{0} - e^{-a\cdot\tau} \right) - \left(e^{-a\cdot\tau} - e^{0} \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} - e^{-a\cdot\tau} + 1 \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(2 - 2\cdot e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot 2 \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} \right) = \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$.

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Zadanie 5. Oblicz moc okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1.11}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.12}$$

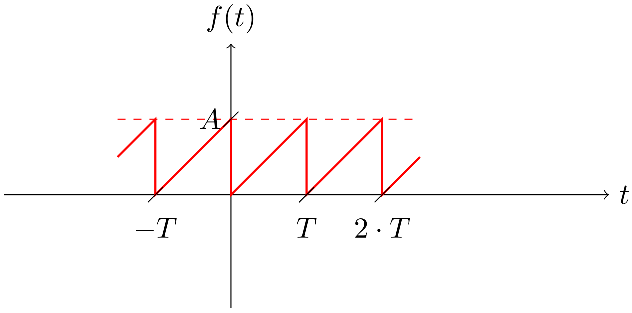
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} |0|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{3}} = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{3} - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \frac{T}{3} = \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$.

Zadanie 6.

Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{1.13}$$

W pierwszym okresie, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0,0)$ oraz (T, A). Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

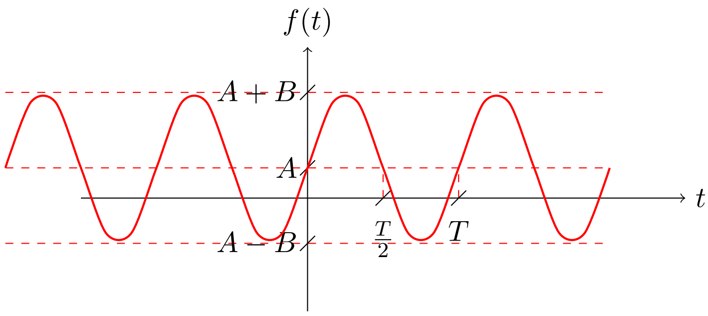
$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.14}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left|\frac{A}{T} \cdot t\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t\right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0\right) = \\
&= \frac{A^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 = \\
&= \frac{A^2}{3}
\end{aligned}
$$

Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3}$.

Zadanie 7. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku:



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.15}$$

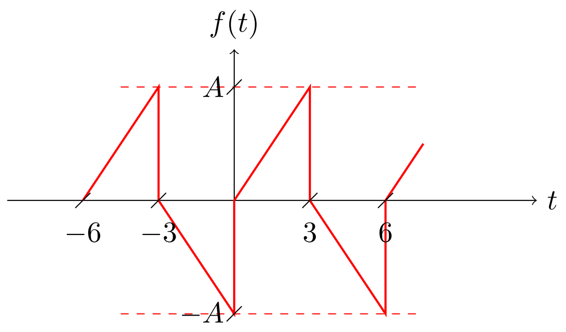
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot t|_0^T + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T sin\,(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot (T-0) + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T sin\,(z) \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{T} \cdot T + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{matrix} \right\} = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(t|_0^T - \int_0^T cos\,(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left((T-0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T cos\,(w) \cdot dw \right) =
\end{aligned}$$

$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-cos\,(2\pi) + cos\,(0)) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -sin\,(w)|_0^T\right) =$$
$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-1 + 1) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^T\right) =$$
$$= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot 0 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (sin\,(4\pi) - sin\,(0))\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0)\right) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot (T) =$$
$$= A^2 + \frac{B^2}{2}$$

Moc sygnału wynosi $A^2 + \frac{B^2}{2}$.

Zadanie 8. Oblicz moc i wartość skuteczną sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{1.16}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(3, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{3} = a \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{3} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(3, 0)$ oraz $(6, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3 + b \\ -A = a \cdot 6 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 6 \cdot a - 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot (-\frac{A}{3}) = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{A}{3} \cdot t + A$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot t & for \quad t \in (0;3) \\ -\frac{A}{3} \cdot t + A & for \quad t \in (3;6) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) & for \quad t \in (0 + k \cdot 6; 3 + k \cdot 6) \\ -\frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) + A & for \quad t \in (3 + k \cdot 6; 6 + k \cdot 6) \end{cases} \wedge k \in I$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.17}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^3 \left| \frac{A}{3} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_3^6 \left| -\frac{A}{3} \cdot t + A \right|^2 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \left(\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(\left(-\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{A}{3} \cdot t \cdot A + A^2 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{54} \cdot \int_0^3 t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt - \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{2 \cdot A^2}{3} \cdot t \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 A^2 \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{54} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^3 + \frac{A^2}{54} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt + \frac{A^2}{6} \cdot \int_3^6 dt =
\end{aligned}$$

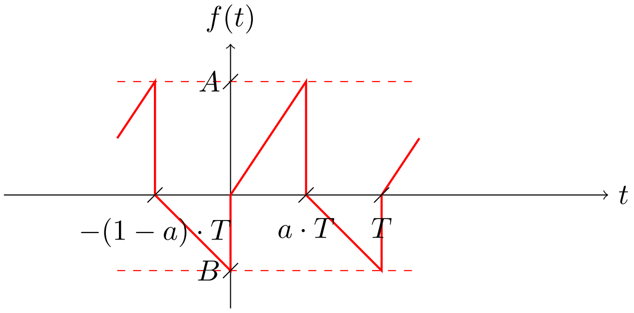
$$
\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{162} \cdot \left(3^3 - 0^3\right) + \frac{A^2}{54} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_3^6 - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \left.\frac{t^2}{2}\right|_3^6 + \frac{A^2}{6} \cdot t|_3^6 = \\
&= \frac{A^2}{162} \cdot 27 + \frac{A^2}{162} \cdot \left(6^3 - 3^3\right) - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot \left(6^2 - 3^2\right) + \frac{A^2}{6} \cdot (6-3) = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{A^2}{162} \cdot 189 - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot 27 + \frac{A^2}{6} \cdot 3 = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{7 \cdot A^2}{6} - \frac{9 \cdot A^2}{6} + \frac{3 \cdot A^2}{6} = \\
&= \frac{2 \cdot A^2}{6} = \\
&= \frac{A^2}{3}
\end{aligned}
$$

Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3}$.
Wzór na obliczenie wartości skutecznej to:

$$RMS = \sqrt{P} \tag{1.18}$$

Wartość skuteczna sygnału to $\frac{A}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 9. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{1.19}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a\cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.20}$$

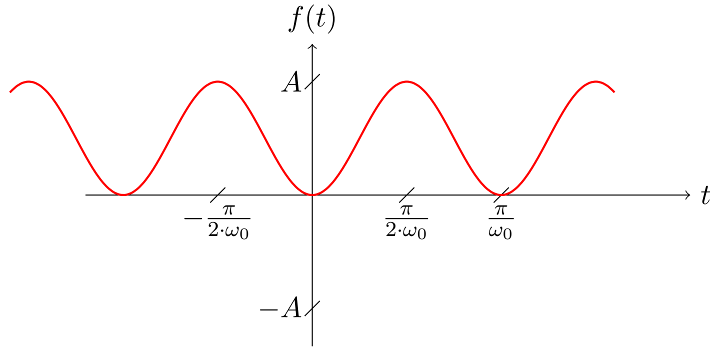
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{a\cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left| \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a\cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a\cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} \left(\left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \int_0^{a\cdot T} t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a\cdot T} \right) + \frac{1}{T} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}2\cdot\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot t\cdot a\cdot dt+\frac{1}{T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}\frac{B^2}{(1-a)^2}\cdot a^2\cdot dt=\\
&=\frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_0^{a\cdot T}\right)+\frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\int_{a\cdot T}^{T}t^2\cdot dt+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot a\cdot\int_{a\cdot T}^{T}t\cdot dt+\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot a^2\cdot\int_{a\cdot T}^{T}dt=\\
&=\frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot(a\cdot T)^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)+\frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_{a\cdot T}^{T}\right)+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot a\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_{a\cdot T}^{T}\right)+\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot a^2\cdot\left(t\big|_{a\cdot T}^{T}\right)=\\
&=\frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot a^3\cdot T^3-0\right)+\frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot T^3-\frac{1}{3}\cdot(a\cdot T)^3\right)+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot a\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot T^2-\frac{1}{2}\cdot(a\cdot T)^2\right)+\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot a^2\cdot(T-a\cdot T)=\\
&=\frac{A^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\frac{1}{3}\cdot a^3\cdot T^3+\frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot T^3-\frac{1}{3}\cdot a^3\cdot T^3\right)+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot a\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot T^2-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot T^2\right)+\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot a^2\cdot(1-a)\cdot T=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{T^3\cdot(1-a)^2}\cdot\left(1-a^3\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot T^3+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{T^2\cdot(1-a)^2}\cdot a\cdot\left(1-a^2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2+\frac{B^2}{T\cdot(1-a)^2}\cdot a^2\cdot(1-a)\cdot T=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{(1-a)^2}\cdot(1-a)\cdot\left(1+a+a^2\right)\cdot\frac{1}{3}+\\
&-\frac{2\cdot B^2}{(1-a)^2}\cdot a\cdot(1-a)\cdot(1+a)\cdot\frac{1}{2}+\frac{B^2}{1-a}\cdot a^2=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\left(1+a+a^2\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2\cdot B^2}{1-a}\cdot a\cdot(1+a)\cdot\frac{1}{2}+\frac{B^2}{1-a}\cdot a^2=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\left(\left(1+a+a^2\right)\cdot\frac{1}{3}-2\cdot a\cdot(1+a)\cdot\frac{1}{2}+a^2\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\left(\left(1+a+a^2\right)\cdot\frac{2}{6}-2\cdot a\cdot(1+a)\cdot\frac{3}{6}+a^2\cdot\frac{6}{6}\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\left(1+a+a^2\right)\cdot 2-2\cdot a\cdot(1+a)\cdot 3+a^2\cdot 6\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(2+2\cdot a+2\cdot a^2-6\cdot a-6\cdot a^2+6\cdot a^2\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(2-4\cdot a+2\cdot a^2\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-2\cdot a+a^2\right)=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{1-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-a)^2=\\
&=\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{3}\cdot(1-a)
\end{aligned}
$$

Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3}\cdot a+\frac{B^2}{3}\cdot(1-a)$.

Zadanie 10. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku.



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.21}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji :

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left|A \cdot sin^2(\omega_0 \cdot t)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath}\right)^4 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^4}{(2\cdot\jmath)^4} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{1\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^4 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^0 + 4\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^3 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^1 + 6\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2}{(2\cdot\jmath)^4} + \right. \\
&+ \left. \frac{4\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^1 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^3 + 1\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^0 \cdot \left(-e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^4}{(2\cdot\jmath)^4} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2^4\cdot\jmath^4} + \right. \\
&+ \left. \frac{-4\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2^4\cdot\jmath^4} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - \jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 3\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t - 4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{16\cdot 1} \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6 \cdot e^{0\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6 \cdot e^0}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6}{16} \cdot dt =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \int_0^T \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - 4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) dt =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot dt + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = 4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = 2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t = \\ dz_1 = 4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot dt = \\ dt = \frac{1}{4\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0} \cdot dz_4 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_2 + \right.$$

$$\left. - 4 \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_3 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 + \right.$$

$$\left. -4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 - 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1}\Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2}\Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3}\Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4}\Big|_0^T + \right.$$

$$\left. +6 \cdot t\Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_0^T + \right.$$

$$\left. +6 \cdot t\Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot 0}\right) + 6 \cdot (T - 0)\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - e^0\right) + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T} - 1\right) + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{1}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \right.$$

$$\left. -\frac{4 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T\right) =$$

$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - 4 \cdot e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \frac{e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath} - \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot \jmath} + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \ cdotx}}{2 \cdot \jmath} \right\} =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot T\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot T\right) + 6 \cdot T \right) =$$
$$= \left\{ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} =$$
$$= \frac{A^2}{16 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot sin\left(8\pi\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot sin\left(4\pi\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 0 - \frac{4}{\omega_0} \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$
$$= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0} =$$
$$= \frac{3 \cdot A^2}{8}$$

Moc sygnału równa się $\frac{3 \cdot A^2}{8}$.

Zadanie 11. Oblicz moc sygnału $f(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Pierwszym krokiem jest ustalenie czy sygnał $f(t)$ jest sygnałem okresowym czy nie. Nasz sygnał jest sumą dwóch funkcji okresowych $f_1(t) = A \cdot sin\,(k \cdot t)$ i $f_2(t) = B \cdot cos\,(n \cdot t)$.

Suma funkcji okresowych jest funkcją okresową, wtedy i tylko wtedy gdy stosunek okresów funkcji składowych jest liczbą wymierną

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathcal{W}$$

W naszym przypadku

$$T_1 = \frac{2\pi}{k}$$
$$T_2 = \frac{2\pi}{n}$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k}$$

W ogólności liczby n i k mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi $n, k \in \mathcal{R}$. Załóżmy jednak iż ułamek $\frac{n}{k}$ jest pewną liczba wymierna $\frac{a}{b}$ gdzie $a, b \in \mathcal{Z}$ są liczbami całkowitymi.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} = \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathcal{Z}$$

W takim przypadku okres naszego sygnału jest Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością okresów funkcji składowych. Stwórzmy więc tabelę z kolejnymi wielokrotnościami okresów funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Zgodnie z przyjętym przez nas założeniem

Wielokrotność okresu	1	2	3	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
T_1	$\frac{2\pi}{k}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$\cdots$	$a \cdot \frac{2\pi}{k}$	$\cdots$	$\boxed{b \cdot \frac{2\pi}{k}}$	$\cdots$
T_2	$\frac{2\pi}{n}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$\cdots$	$\boxed{a \cdot \frac{2\pi}{n}}$	$\cdots$	$b \cdot \frac{2\pi}{n}$	$\cdots$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot T_1 = a \cdot T_2$$

a więc a-ta wielokrotność okresu pierwszej funkcji jest równa b-tej wielokrotności okresu drugiej funkcji, a wiec jest ona poszukiwaną przez nas Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością. Związku z tym okresem naszego sygnału jest $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$. Aby obliczyć moc należy wybrać przedział o długości jednego okresu. Przedział może być dowolnie położony, przyjmijmy więc przedział $t \in (0; T)$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.22}$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt = $$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T |A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t)|^2 \cdot dt =$$

Ponieważ mamy doczynienia z sygnałem o wartościach rzeczywistych możemy pominąć obliczenie modułu.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (A \cdot sin\,(k \cdot t) + B \cdot cos\,(n \cdot t))^2 \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Big((A \cdot sin\,(k \cdot t))^2 + 2 \cdot A \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot B \cdot cos\,(n \cdot t) + (B \cdot cos\,(n \cdot t))^2\Big) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Big(A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) + B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t)\Big) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T sin^2\,(k \cdot t) \cdot dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\,(k \cdot t) \cdot cos\,(n \cdot t) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T cos^2\,(n \cdot t) \cdot dt\right) =$$
$$= \left\{\; sin\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \quad cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \;\right\} =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath}\right)^2 \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2}\right)^2 \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2 - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot k \cdot t}\right)^2}{(2 \cdot \jmath)^2} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t}}{2 \cdot \jmath \cdot 2} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{\left(e^{\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2 + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot n \cdot t} + \left(e^{-\jmath \cdot n \cdot t}\right)^2}{2^2} \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot k \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} + e^{\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t + \jmath \cdot n \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t}}{4 \cdot \jmath} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^{\jmath \cdot n \cdot t - \jmath \cdot n \cdot t} + e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right.$$
$$+ 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot t} + e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot t}}{4 \cdot \jmath} \cdot dt +$$
$$\left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt\right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \int_0^T \left(e^{2\cdot \jmath \cdot k \cdot t} - 2 \cdot 1 + e^{-2\cdot \jmath \cdot k \cdot t} \right) \cdot dt + \right.$$

$$+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \int_0^T \left(e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot t} + e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot t} \right) \cdot dt +$$

$$\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \int_0^T \left(e^{2\cdot \jmath \cdot n \cdot t} + 2 \cdot 1 + e^{-2\cdot \jmath \cdot n \cdot t} \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{2\cdot \jmath \cdot k \cdot t} \cdot dt - \int_0^T 2 \cdot dt + \int_0^T e^{-2\cdot \jmath \cdot k \cdot t} \cdot dt \right) + \right.$$

$$+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\int_0^T e^{\jmath \cdot (k+n) \cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{\jmath \cdot (k-n) \cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-\jmath \cdot (k-n) \cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-\jmath \cdot (k+n) \cdot t} \cdot dt \right) +$$

$$\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{2\cdot \jmath \cdot n \cdot t} \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot dt + \int_0^T e^{-2\cdot \jmath \cdot n \cdot t} \cdot dt \right) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = 2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t & z_2 = -2 \cdot \jmath \cdot k \cdot t & z_3 = 2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t & z_4 = -2 \cdot \jmath \cdot n \cdot t \\ dz_1 = 2 \cdot \jmath \cdot k \cdot dt & dz_2 = -2 \cdot \jmath \cdot k \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot \jmath \cdot n \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot \jmath \cdot n \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{2\cdot \jmath \cdot k} & dt = \frac{dz_2}{-2\cdot \jmath \cdot k} & dt = \frac{dz_3}{2\cdot \jmath \cdot n} & dt = \frac{dz_4}{-2\cdot \jmath \cdot n} \\ z_5 = 2 \cdot \jmath \cdot (k+n) \cdot t & z_6 = -2 \cdot \jmath \cdot (k+n) \cdot t & z_7 = 2 \cdot \jmath \cdot (k-n) \cdot t & z_8 = -2 \cdot \jmath \cdot (k-n) \cdot t \\ dz_5 = \jmath \cdot (k+n) \cdot dt & dz_6 = -\jmath \cdot (k+n) \cdot dt & dz_7 = \jmath \cdot (k-n) \cdot dt & dz_8 = -\jmath \cdot (k-n) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_5}{\jmath \cdot (k+n)} & dt = \frac{dz_6}{-\jmath \cdot (k+n)} & dt = \frac{dz_7}{\jmath \cdot (k-n)} & dt = \frac{dz_8}{-\jmath \cdot (k-n)} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{2 \cdot \jmath \cdot k} - 2 \cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-2 \cdot \jmath \cdot k} \right) + \right.$$

$$+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\int_0^T e^{z_5} \cdot \frac{dz_5}{\jmath \cdot (k+n)} + \int_0^T e^{z_7} \cdot \frac{dz_7}{\jmath \cdot (k-n)} + \right.$$

$$\left. - \int_0^T e^{z_8} \cdot \frac{dz_8}{-\jmath \cdot (k-n)} - \int_0^T e^{z_6} \cdot \frac{dz_6}{-\jmath \cdot (k+n)} \right) +$$

$$\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{2 \cdot \jmath \cdot n} + 2 \cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-2 \cdot \jmath \cdot n} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 - 2 \cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 \right) + \right.$$

$$+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_5} \cdot dz_5 + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_7} \cdot dz_7 + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{-\jmath \cdot (k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_8} \cdot dz_8 - \frac{1}{-\jmath \cdot (k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_6} \cdot dz_6 \right) +$$

$$\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 + 2 \cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^T - 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^T \right) + \right.$$

$$+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot \jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{z_5} \Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{z_7} \Big|_0^T + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot (k-n)} \cdot e^{z_8} \Big|_0^T + \frac{1}{\jmath \cdot (k+n)} \cdot e^{z_6} \Big|_0^T \right) +$$

$$\left. + \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{z_3} \Big|_0^T + 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \jmath \cdot n} \cdot e^{z_4} \Big|_0^T \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\Bigg(\frac{A^2}{-4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\Big|_0^T - 2\cdot t|_0^T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot t}\Big|_0^T\bigg) +$$

$$+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\bigg(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\Big|_0^T +$$

$$+ \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot t}\Big|_0^T + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot t}\Big|_0^T\bigg) +$$

$$+ \frac{B^2}{4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\Big|_0^T + 2\cdot t|_0^T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot t}\Big|_0^T\bigg)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\Bigg(\frac{A^2}{-4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot 0}\Big) - 2\cdot(T-0) - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot 0}\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\bigg(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot T} - e^{\jmath\cdot(k+n)\cdot 0}\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot T} - e^{\jmath\cdot(k-n)\cdot 0}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot T} - e^{-\jmath\cdot(k-n)\cdot 0}\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot T} - e^{-\jmath\cdot(k+n)\cdot 0}\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{B^2}{4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot T} - e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot 0}\Big) + 2\cdot(T-0) - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot T} - e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot 0}\Big)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} T = b\cdot T_1 = a\cdot T_2 \\ T = b\cdot\frac{2\pi}{k} = a\cdot\frac{2\pi}{n}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\Bigg(\frac{A^2}{-4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} - e^0\Big) - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}} - e^0\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\bigg(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot k\cdot T}\cdot e^{\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot k\cdot T}\cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot k\cdot T}\cdot e^{\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot k\cdot T}\cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot T} - e^0\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{B^2}{4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - e^0\Big) + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - e^0\Big)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\Bigg(\frac{A^2}{-4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\Big) - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\bigg(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}}\cdot e^{\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}}\cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}}\cdot e^{\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot k\cdot b\cdot\frac{2\pi}{k}}\cdot e^{-\jmath\cdot n\cdot a\cdot\frac{2\pi}{n}} - 1\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{B^2}{4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big) + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\Bigg(\frac{A^2}{-4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\Big) - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot b\cdot 2\pi} - 1\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath}\cdot\bigg(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)}\cdot\Big(e^{-\jmath\cdot b\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big)\bigg) +$$

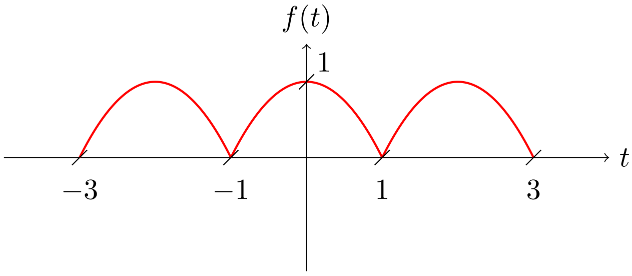
$$+ \frac{B^2}{4}\cdot\bigg(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big) + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n}\cdot\Big(e^{-2\cdot\jmath\cdot a\cdot 2\pi} - 1\Big)\bigg)\Bigg) =$$

$$
= \left\{ \begin{array}{ll}
\underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath \cdot a \cdot 2\pi} = 1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath \cdot a \cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath \cdot a \cdot 2\pi} = 1 & \underset{a\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath \cdot a \cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{\jmath \cdot b \cdot 2\pi} = 1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{2\cdot\jmath \cdot b \cdot 2\pi} = 1 \\
\underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-\jmath \cdot b \cdot 2\pi} = 1 & \underset{b\in\mathcal{Z}}{\forall} e^{-2\cdot\jmath \cdot b \cdot 2\pi} = 1
\end{array} \right\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k} \cdot (1-1) - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k} \cdot (1-1) \right) + \right. \\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)} \cdot (1\cdot 1-1) + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)} \cdot (1\cdot 1-1) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)} \cdot (1\cdot 1-1) + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)} \cdot (1\cdot 1-1) \right) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n} \cdot (1-1) + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n} \cdot (1-1) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k} \cdot 0 - 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot k} \cdot 0 \right) + \right. \\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot(k+n)} \cdot 0 + \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)} \cdot 0 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\jmath\cdot(k-n)} \cdot 0 + \frac{1}{\jmath\cdot(k+n)} \cdot 0 \right) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n} \cdot 0 + 2\cdot T - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot n} \cdot 0 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot (0 - 2\cdot T - 0) + \right. \\
&+ \frac{2\cdot A\cdot B}{4\cdot\jmath} \cdot (0+0+0+0) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot (0 + 2\cdot T - 0) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot (-2\cdot T) + \frac{B^2}{4} \cdot 2\cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{2} \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$

Zadanie 12. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Dla zakresu $t \in (-1; 1)$ sygnał opisany jest wzorem:

$$f(t) = 1 - t^2 \tag{1.23}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{1.24}$$

Dla tego sygnału okres T równa się 2.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left|1 - t^2\right|^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^2 \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - 2 \cdot t^2 + t^4\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-1}^{1} 1 \cdot dt + \int_{-1}^{1} (-2) \cdot t^2 \cdot dt + \int_{-1}^{1} t^4 \cdot dt\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[t\Big|_{-1}^{1} - 2 \cdot \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{t^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[(1 - (-1)) - \frac{2}{3} \cdot (1 - (-1)) + \frac{1}{5} \cdot (1 - (-1))\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

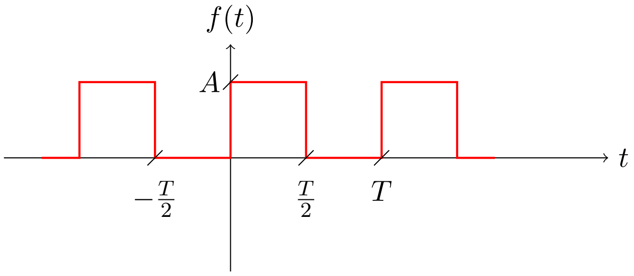
Moc sygnału równa się $\frac{8}{15}$.

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.1}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot t|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$.
Współczynniki a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(z\right)|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - sin\left(0\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(sin \left(k \cdot \pi \right) - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin \left(k \cdot \pi \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{2.5}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(z \right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin \left(z \right) \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \, cos \left(z \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \, cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \pi \right) - cos \left(0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(cos \left(k \cdot \pi \right) - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(1 - cos \left(k \cdot \pi \right) \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \left(1 - cos \left(k \cdot \pi \right) \right)$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi}\left(1 - cos\left(k \cdot \pi\right)\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

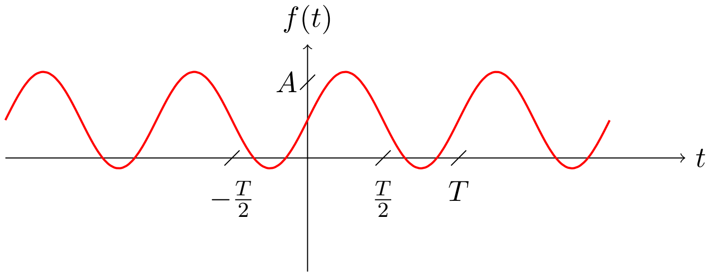
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

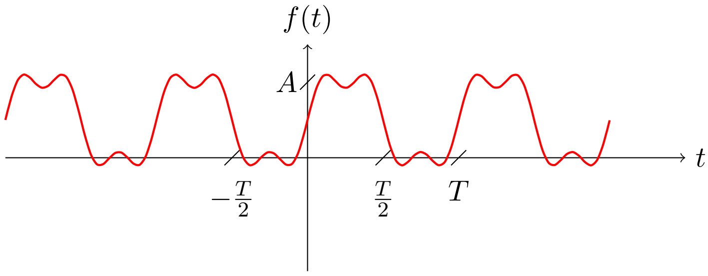
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \\ f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{A}{k \cdot \pi}(1 - cos(k \cdot \pi)\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

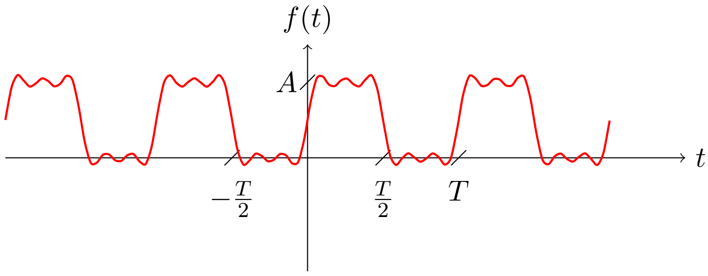
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



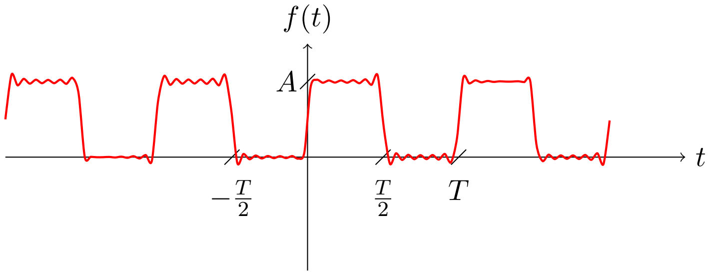
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



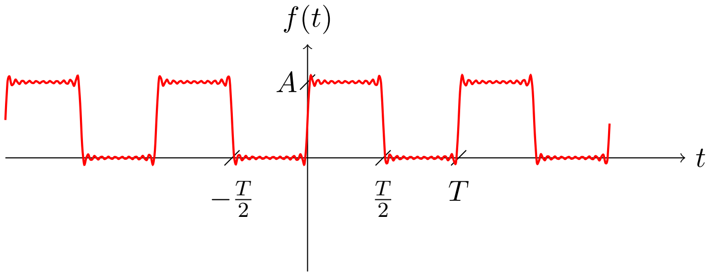
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

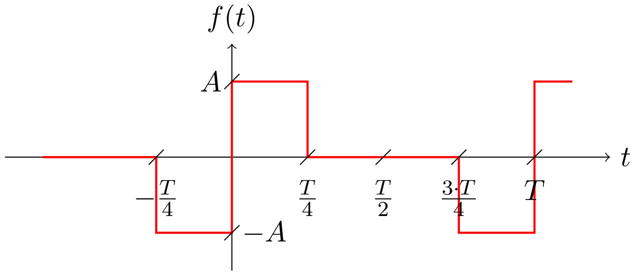


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k\cdot T; 0 + k\cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k\cdot T; \frac{T}{4} + k\cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k\cdot T; \frac{3\cdot T}{4} + k\cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.8}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \tag{2.9}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot dt + 0\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(-A\cdot t\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A\cdot t\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\left(0-\left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A\cdot\left(\frac{T}{4}-0\right)\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\frac{T}{4} + A\cdot\frac{T}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{T}(0) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.10}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\,(z)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} cos\,(z)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\,(z)\cdot dt + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} cos\,(z)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\,sin\,(z)|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\,(z)|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(sin\,(0) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) - sin\,(0)\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(0 - sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot(0) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.11}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{aligned} z &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(0\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(2 - 2\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0 = 0$$
$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

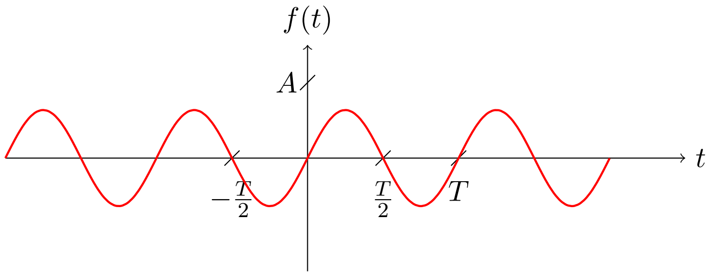
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$

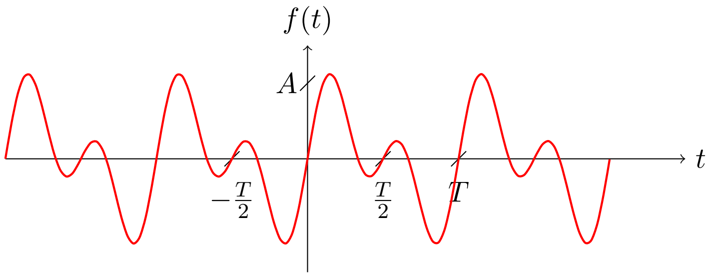
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$

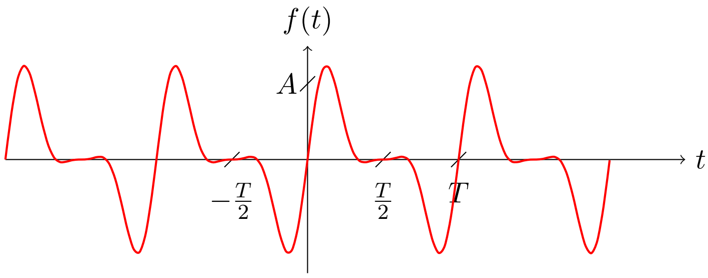
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



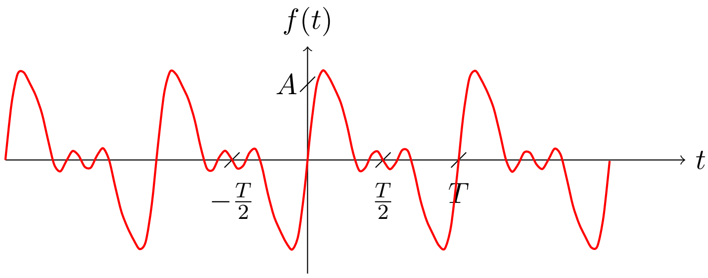
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



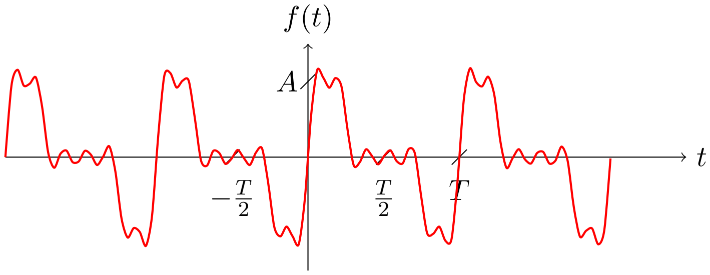
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



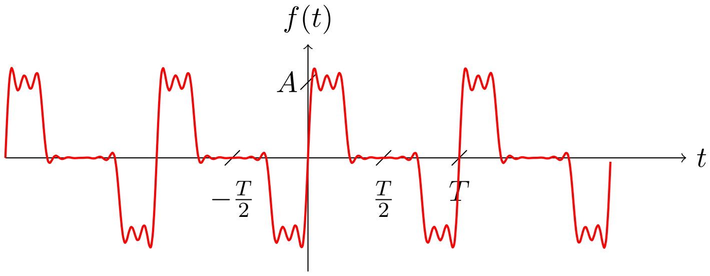
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



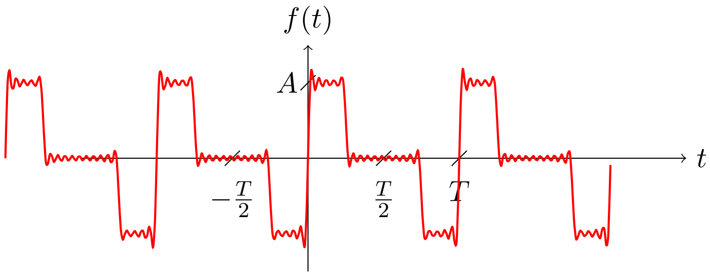
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

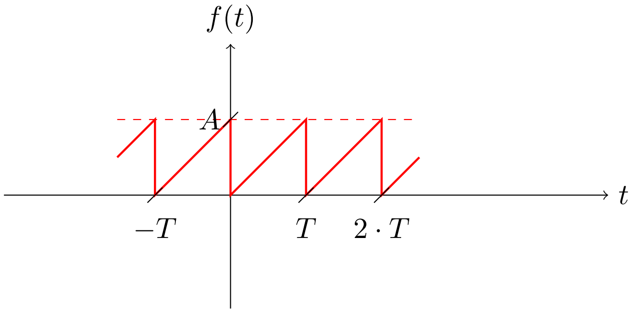


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.12}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.13}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.14}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.15}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) = \\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right) = \\
&= -\frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi} = \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k\cdot\pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned}$$

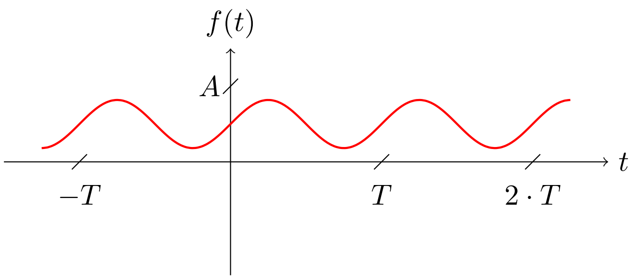
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

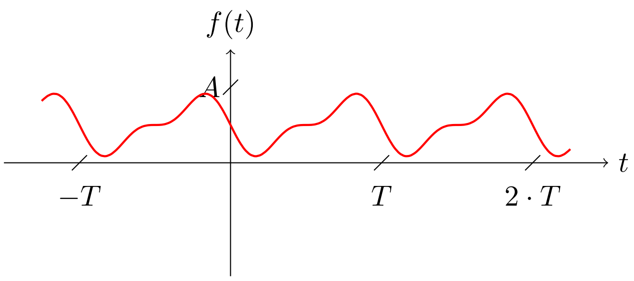
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \\ f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{A}{k \cdot \pi}\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.16}$$

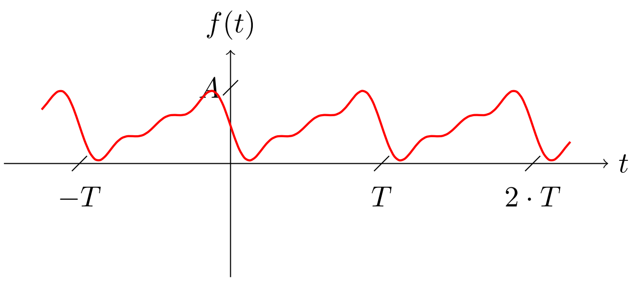
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



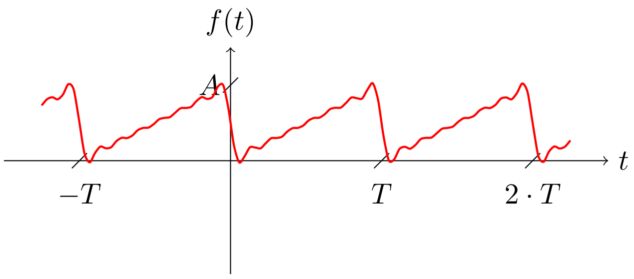
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



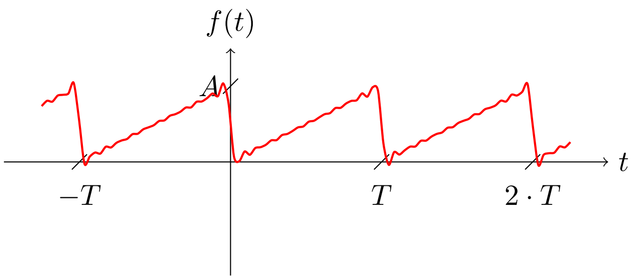
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

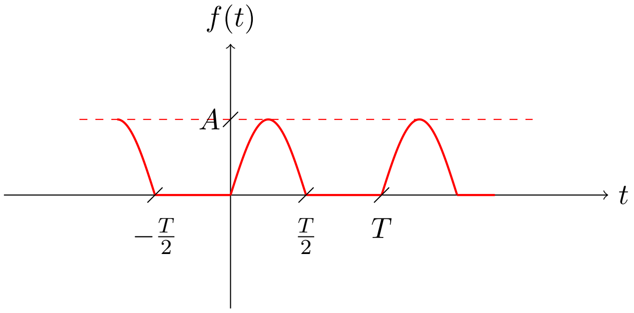


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.17}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.18}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot(cos\,(\pi) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot(-1-1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi}\cdot(-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.19}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} cos\,(x) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\,(x) &= \tfrac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)}}{2\jmath}+\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)}}{2\jmath}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)+sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{llll} z_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\wedge k\neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\wedge k\neq 1\end{array}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k) \right) \right) = \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k) \right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k) \right) \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(0\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - cos\left(0\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1}{1-k} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)\right) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot \left(1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)\right) \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - k + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + 1 - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) + k - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) + k \cdot cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) - cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) - k \cdot cos\left(\pi \cdot (1-k)\right)}{1-k^2} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} cos\left(\pi \cdot (1+k)\right) = cos\left(\pi + k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \\ cos\left(\pi \cdot (1-k)\right) = cos\left(\pi - k \cdot \pi\right) = -cos\left(-k \cdot \pi\right) = -cos\left(k \cdot \pi\right) \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + cos\left(k \cdot \pi\right) - k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right) + cos\left(k \cdot \pi\right) + k \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2} =$$
$$= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1-k^2}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+cos(k \cdot \pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$

Współczynnik a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji a_1:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{0}-e^{0}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}}{2\jmath}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2\right)\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz = \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi}\cdot\left(cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)-cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot 0\right)\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(2\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1-1) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.20}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2}\right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned}
z_1 &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\
dz_1 &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & z_2 &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\
dt &= \tfrac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt &= \tfrac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1
\end{aligned}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right) \cdot dz_2 \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1+k)\right) - sin\left(0\right)\right) + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(sin\left(\pi \cdot (1-k)\right) - sin\left(0\right)\right) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0-0) = \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0-0) \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot (0-0) =$$
$$= -\frac{A}{T} \cdot 0 =$$
$$= 0$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

Współczynnik b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji b_1:

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$
$$= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} =$$
$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \, sin\left(z\right)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \, sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(2\pi\right) - sin\left(0\right) \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(0 - 0 \right) - \frac{T}{2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) =$$

$$= \frac{A}{2}$$

Wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0 = \frac{A}{\pi}$$
$$a_1 = 0$$
$$a_k = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1 - k^2}$$
$$b_1 = \frac{A}{2}$$
$$b_k = 0$$

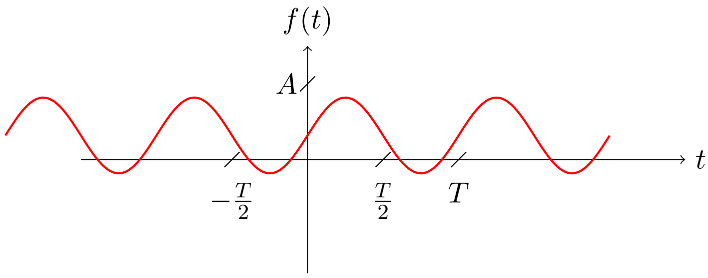
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k:

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

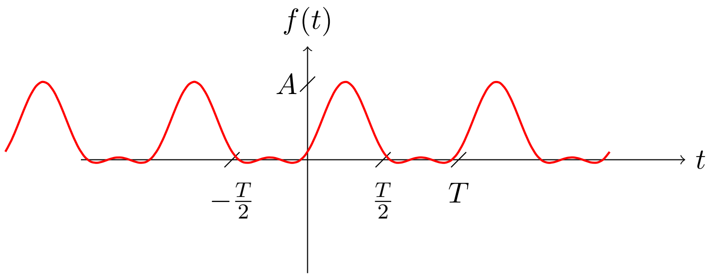
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{2.21}$$

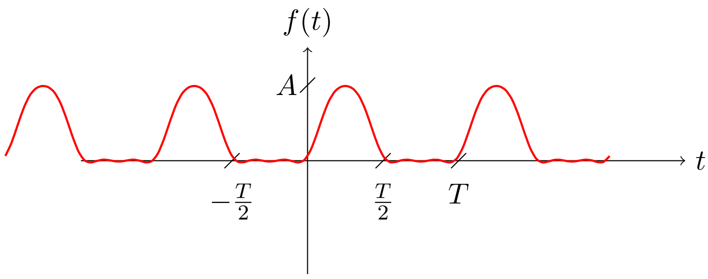
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



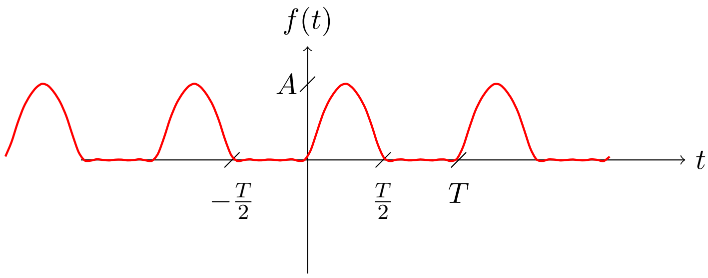
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



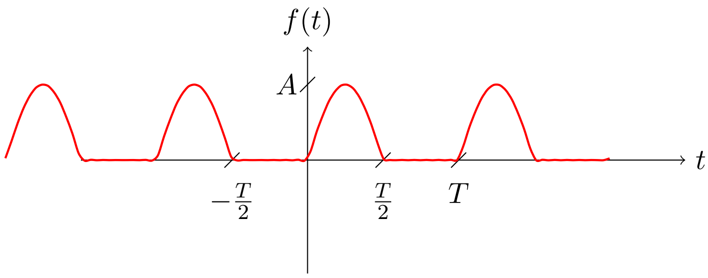
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:

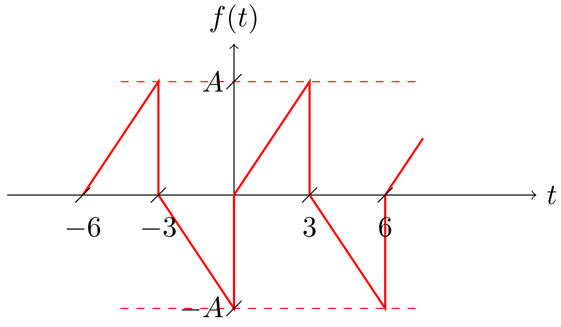


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 5. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.22}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(3, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{3} = a \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{3} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(3, 0)$ oraz $(6, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3 + b \\ -A = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 6 \cdot a - 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot (-\frac{A}{3}) = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{A}{3} \cdot t + A$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot t & for \quad t \in (0; 3) \\ -\frac{A}{3} \cdot t + A & for \quad t \in (3; 6) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) & for \quad t \in (0 + k \cdot 6; 3 + k \cdot 6) \\ -\frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) + A & for \quad t \in (3 + k \cdot 6; 6 + k \cdot 6) \end{cases} \wedge k \in I$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.23}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[\int_0^3 \frac{A}{3} \cdot t \cdot dt + \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right) \cdot dt \right] = \\ &= \frac{A}{18} \cdot \int_0^3 t \cdot dt - \frac{A}{18} \cdot \int_3^6 t \cdot dt + \frac{A}{6} \cdot \int_3^6 dt = \\ &= \frac{A}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^3 - \frac{A}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_3^6 + \frac{A}{6} \cdot t|_3^6 = \\ &= \frac{A}{36} \cdot \left(3^2 - 0^2 \right) - \frac{A}{36} \cdot \left(6^2 - 3^2 \right) + \frac{A}{6} \cdot (6 - 3) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{36}\cdot 9 - \frac{A}{36}\cdot 27 + \frac{A}{6}\cdot 3 = \\
&= \frac{9\cdot A}{36} - \frac{27\cdot A}{36} + \frac{18\cdot A}{36} = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.24}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{6}\cdot\left[\int_0^3 \frac{A}{3}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t\right)\cdot dt + \int_3^6\left(-\frac{A}{3}\cdot t + A\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t\right)\cdot dt\right] = \\
&= \frac{A}{9}\cdot\int_0^3 t\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{A}{9}\cdot\int_3^6 t\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt + \frac{A}{3}\cdot\int_3^6 cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{9}\cdot\left[t\cdot\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_0^3 - \int_0^3\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt\right] - \\
&- \frac{A}{9}\cdot\left[t\cdot\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6 - \int_3^6\frac{3}{k\cdot 3\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt\right] + \\
&+ \frac{A}{3}\cdot\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6 = \\
&= \frac{3\cdot A}{9\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right) - 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 0\right) + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_0^3\right] - \\
&- \frac{3\cdot A}{9\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right) - 3\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right) + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6\right] + \\
&+ \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right) - sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)\right] = \\
&= \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot sin\left(k\cdot\pi\right) - 0 + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 0\right)\right] - \\
&- \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) - 3\cdot sin\left(k\pi\right) + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)\right] + \\
&+ \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(k\cdot\pi\right)\right] = \\
&= \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot 0 + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(0\right)\right] - \\
&- \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot 0 - 3\cdot 0 + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)\right] + \\
&+ \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[0 - 0\right] = \\
&= \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 1\right] -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 1-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)\right]=\\
&=\frac{A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)-\frac{A}{k^2\cdot\pi^2}-\frac{A}{k^2\cdot\pi^2}+\frac{A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)=\\
&=\frac{2\cdot A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\pi\right)-1\right)=\\
&=\frac{2\cdot A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\left((-1)^k-1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\left((-1)^k-1\right)$
Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.25}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
b_k&=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&=\frac{2}{6}\cdot\left[\int_0^3\frac{A}{3}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t\right)\cdot dt+\int_3^6\left(-\frac{A}{3}\cdot t+A\right)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t\right)\cdot dt\right]=\\
&=\frac{A}{9}\cdot\int_0^3 t\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt-\frac{A}{9}\cdot\int_3^6 t\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt+\frac{A}{3}\cdot\int_3^6 sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)dt=\\
&=\begin{Bmatrix}u&=t&dv&=sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt\\ du&=dt&v&=-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\end{Bmatrix}=\\
&=\frac{A}{9}\cdot\left[t\cdot\frac{-3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_0^3-\int_0^3\frac{-3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt\right]-\\
&-\frac{A}{9}\cdot\left[t\cdot\frac{-3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6-\int_3^6\frac{-3}{k\cdot 3\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\cdot dt\right]+\\
&+\frac{A}{3}\cdot\frac{-3}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6=\\
&=\frac{-3\cdot A}{9\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)-0\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 0\right)-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_0^3\right]+\\
&+\frac{3\cdot A}{9\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)-3\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot t\right)\Big|_3^6\right]-\\
&-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)-cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)\right]=\\
&=\frac{-A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)-0-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)+\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 0\right)\right]+\\
&+\frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)-3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)+\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)\right]-\\
&-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[cos\left(k\cdot 2\pi\right)-cos\left(k\cdot\pi\right)\right]=\\
&=\frac{-A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\pi\right)+\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(0\right)\right]+\\
&+\frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6\cdot 1-3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)-\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right)+\frac{3}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\pi\right)\right]-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right] = \\
&= \frac{-A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 0 + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 0\right] + \\
&+ \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6 - 3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) - \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 0 + \frac{3}{k\cdot\pi}\cdot 0\right] - \\
&- \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right] = \\
&= \frac{-A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)\right] + \frac{A}{3\cdot k\cdot\pi}\cdot\left[6-3\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)\right] - \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left[1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right] = \\
&= \frac{-A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) + \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi} - \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) - \frac{A}{k\cdot\pi} + \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) = \\
&= \frac{-A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) + \frac{A}{k\cdot\pi} = \\
&= \frac{-A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-1\right)^k + \frac{A}{k\cdot\pi} = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1-\left(-1\right)^k\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1-\left(-1\right)^k\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_k &= \frac{2\cdot A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\left(\left(-1\right)^k-1\right) \\
b_k &= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1-\left(-1\right)^k\right)
\end{aligned}
$$

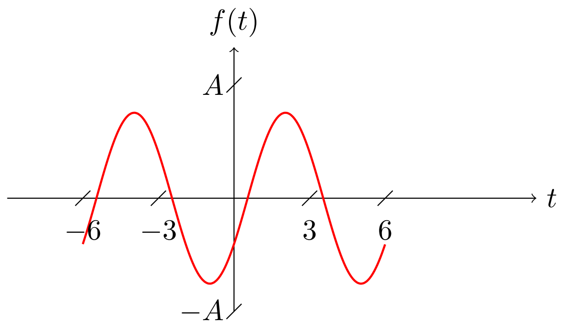
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	$\frac{-4\cdot A}{\pi^2}$	0	$\frac{-4\cdot A}{9\cdot\pi^2}$	0	$\frac{-4\cdot A}{25\cdot\pi^2}$	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	0

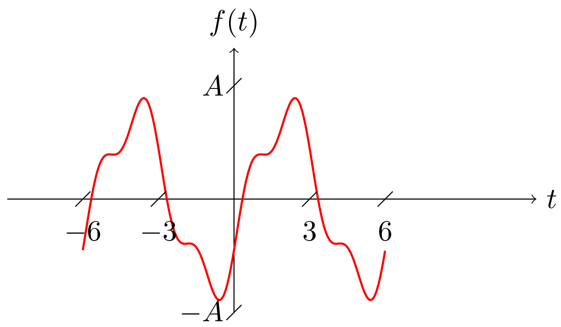
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) + b_k\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right] \\
f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot A}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\left(\left(-1\right)^k-1\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) + \left(\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1-\left(-1\right)^k\right)\right)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

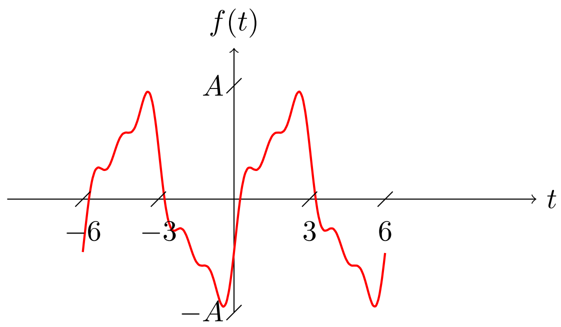
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



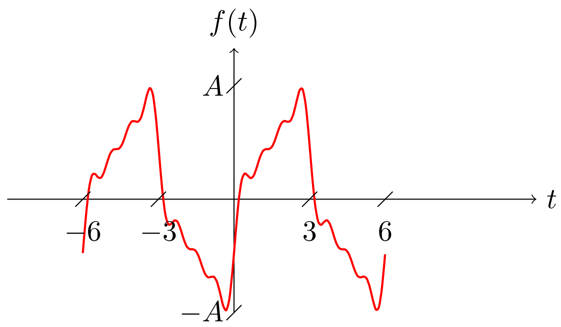
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



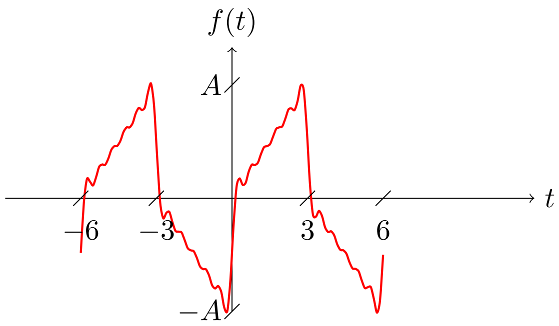
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



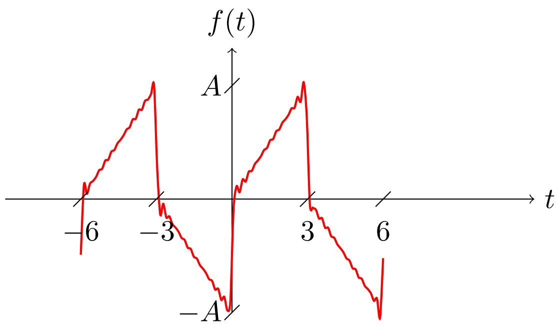
W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

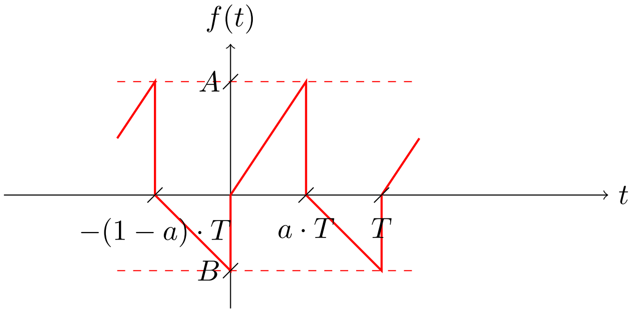


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 6. Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{2.27}$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T - a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T \cdot (1-a)} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T \cdot (1-a)} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.28}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a \right) \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot dt + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\int_{a\cdot T}^{T} dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{a\cdot T} - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_{a\cdot T}^{T} + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot t|_{a\cdot T}^{T}\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(\frac{(a\cdot T)^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\frac{T^2}{2}-\frac{(a\cdot T)^2}{2}\right) + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot(T-a\cdot T)\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(\frac{a^2\cdot T^2}{2}-\frac{0}{2}\right) - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(\frac{T^2}{2}-\frac{a^2\cdot T^2}{2}\right) + \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot T\cdot(1-a)\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(\frac{a^2\cdot T^2}{2}\right) - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot T^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) + B\cdot a\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\left(\frac{a\cdot T}{2}\right) - \frac{B}{1-a}\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-a^2\right) + B\cdot a\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\frac{a\cdot T}{2} - \frac{B}{1-a}\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot(1+a) + B\cdot a\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot a\cdot T\cdot\frac{1}{2} - B\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+a) + B\cdot a\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot a\cdot T\cdot\frac{1}{2} - B\cdot T\cdot\frac{1}{2} - B\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot a + B\cdot a\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot a\cdot T\cdot\frac{1}{2} - B\cdot T\cdot\frac{1}{2} + B\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot a\right) = \\
&= A\cdot a\cdot\frac{1}{2} - B\cdot\frac{1}{2} + B\cdot\frac{1}{2}\cdot a = \\
&= A\cdot a\cdot\frac{1}{2} - B\cdot\frac{1}{2}(1-a) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot A\cdot a - \frac{1}{2}\cdot B\cdot(1-a)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{1}{2}\cdot A\cdot a - \frac{1}{2}\cdot B\cdot(1-a)$.

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{2.29}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{a\cdot T}\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T}\left(-\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot t + \frac{B}{1-a}\cdot a\right)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{a\cdot T}\frac{A}{a\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} -\frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left.+ \int_{a\cdot T}^{T}\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\int_0^{a\cdot T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt - \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\int_{a\cdot T}^{T} t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \right.\\
&\left.+ \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\int_{a\cdot T}^{T} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(z\right) \cdot dz \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \, sin\left(z\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \, sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_0^{a \cdot T} - \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_{a \cdot T}^{T} - \int_{a \cdot T}^{T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_{a \cdot T}^{T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) +$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(sin\left(k \cdot 2\pi\right) - sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot -\right) \right) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} sin\left(z\right) \cdot dz \right) +$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot dz \right) +$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(0 - sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - 0 \right) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(-cos\left(z\right)\right)\Big|_0^{a \cdot T} \right) +$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi\right) - a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(-cos\left(z\right)\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} \right) +$$

$$\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(-sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)\Bigg|_0^{a \cdot T} \right) +$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 - a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)\Bigg|_{a \cdot T}^{T} \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) + cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) +$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(0 - a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\ + \right.\\
&- \left.\frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot a\cdot T\right)\right)\right) + \\
&- \frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\Bigg) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot\left(a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) + cos\left(0\right)\right)\right) + \right.\\
&- \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot\left(-a\cdot\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{T^2}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\right) + cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \\
&- \left.\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a\cdot T}\cdot T^2\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) + 1\right)\right) + \right.\\
&- \frac{B}{(1-a)\cdot T}\cdot T^2\left(-a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(-1 + cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \\
&- \left.\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) = \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{a}\cdot T\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \right.\\
&+ \frac{B}{1-a}\cdot T\left(a\cdot\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \\
&- \left.\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{a}\left(\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \\
&+ \frac{2\cdot B}{1-a}\left(\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right)\right) + \\
&- \frac{2\cdot B}{1-a}\cdot\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{a}\cdot\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{2\cdot A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) + \\
&+ \frac{2\cdot B}{1-a}\cdot\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) - \frac{2\cdot B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 4\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{2\cdot B}{1-a}\cdot\frac{a}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) = \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) + \\
&- \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right) + \\
&- \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) + \\
&- \frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)\right) \\
&= \left\{\ \tfrac{1}{2}\cdot\left(1 - cos\left(x\right)\right) = sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\ \right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) + \\
&- \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot sin^2\left(k \cdot \pi \cdot a\right)$.

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.30}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^{T} -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\left. + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}}\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_{a \cdot T}^{T} sin\left(z\right) \cdot dz\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} cos\left(z\right)\Big|_{a \cdot T}^{T}\right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.
\end{aligned}
$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T}\Bigg) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi}\left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} + \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} + \int_{a \cdot T}^{T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi}\left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi}\left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{a \cdot T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} cos\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_{a \cdot T}^{T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(z\right) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi}\left(cos\left(k \cdot 2\pi\right) - cos\left(k \cdot 2\pi \cdot a\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(-a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) + 0 \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} cos\left(z\right) \cdot dz \right) +$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^{T} cos\left(z\right) \cdot dz \right) +$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + 0 \right) + \right.\right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (sin\,(z))|_0^{a \cdot T} \right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi) + a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (sin\,(z))|_{a \cdot T}^{T} \right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right.\right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Bigg|_0^{a \cdot T} \right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot 1 + a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Bigg|_{a \cdot T}^{T} \right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right.\right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) - sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right. \\
&\left.+ \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right.\right. \\
&\left.+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) - sin\,(0)) \right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right. \\
&\left.+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (sin\,(k \cdot 2\pi) - sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) - 0)\Big) +$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right.$$

$$\left. + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (0 - sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\right) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\Big) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) + \right.$$

$$- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$\left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a))\right) =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$- \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$- \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) =$$

$$= \frac{A}{a} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a)\right) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) =$$

$$= -\frac{A}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (1 - cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a)) =$$

$$= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$+ \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} - \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot a \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) =$$

$$= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot cos\,(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$+ \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot sin\,(k \cdot 2\pi \cdot a) +$$

$$+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}-\frac{B}{1-a}\cdot a\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}=$$
$$=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+$$
$$+\frac{B}{1-a}\cdot\frac{1}{k\cdot\pi}\cdot(1-a)=$$
$$=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\frac{B}{k\cdot\pi}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{B}{k\cdot\pi}-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0=\frac{1}{2}\cdot A\cdot a-\frac{1}{2}\cdot B\cdot(1-a)$$
$$a_k=\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot\pi^2}\cdot sin^2\left(k\cdot\pi\cdot a\right)$$
$$b_k=\frac{B}{k\cdot\pi}-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{k^2\cdot 2\pi^2}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\cdot a\right)$$

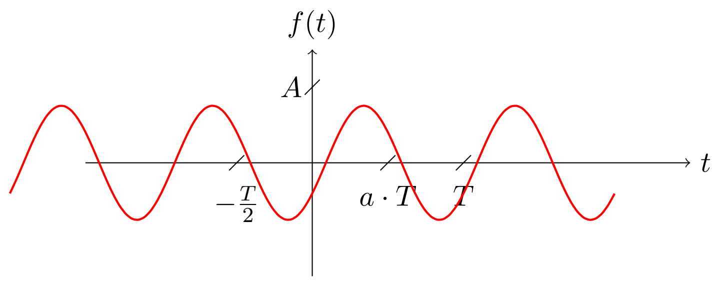
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k:

k	a_k	b_k
1	$\frac{A}{\pi}\cdot sin\left(2\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot sin^2\left(\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{\pi}-\frac{A}{\pi}\cdot cos\left(2\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{2\pi^2}\cdot sin\left(2\pi\cdot a\right)$
2	$\frac{A}{2\pi}\cdot sin\left(4\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot sin^2\left(2\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{2\pi}-\frac{A}{2\pi}\cdot cos\left(4\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{8\pi^2}\cdot sin\left(4\pi\cdot a\right)$
3	$\frac{A}{3\pi}\cdot sin\left(6\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{9\pi^2}\cdot sin^2\left(3\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{3\pi}-\frac{A}{3\pi}\cdot cos\left(6\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{18\pi^2}\cdot sin\left(6\pi\cdot a\right)$
4	$\frac{A}{4\pi}\cdot sin\left(8\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{16\pi^2}\cdot sin^2\left(4\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{4\pi}-\frac{A}{4\pi}\cdot cos\left(8\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{32\pi^2}\cdot sin\left(8\pi\cdot a\right)$
5	$\frac{A}{5\pi}\cdot sin\left(10\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{25\pi^2}\cdot sin^2\left(5\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{5\pi}-\frac{A}{5\pi}\cdot cos\left(10\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{50\pi^2}\cdot sin\left(10\pi\cdot a\right)$
6	$\frac{A}{6\pi}\cdot sin\left(12\pi\cdot a\right)-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{36\pi^2}\cdot sin^2\left(6\pi\cdot a\right)$	$\frac{B}{6\pi}-\frac{A}{6\pi}\cdot cos\left(12\pi\cdot a\right)+\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{1-a}\right)\cdot\frac{1}{72\pi^2}\cdot sin\left(12\pi\cdot a\right)$

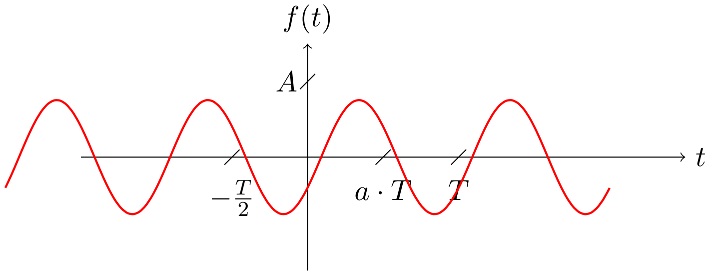
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)+b_k\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right] \tag{2.31}$$

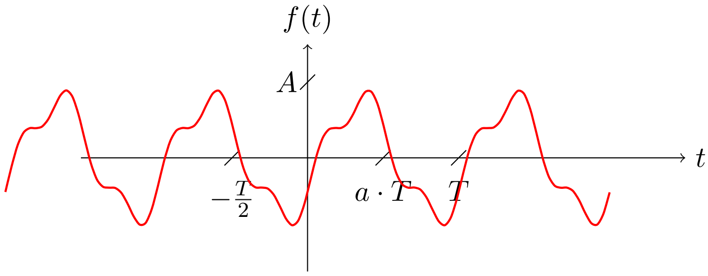
W przypadku sumowania do $k_{max}=1$ otrzymujemy:



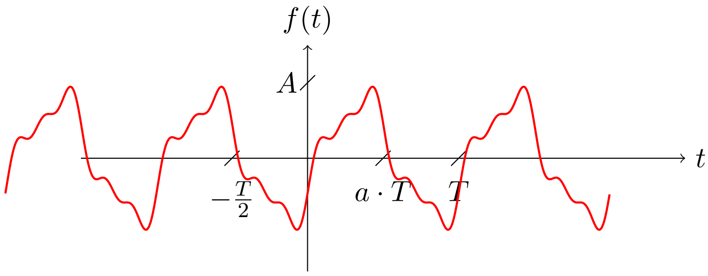
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



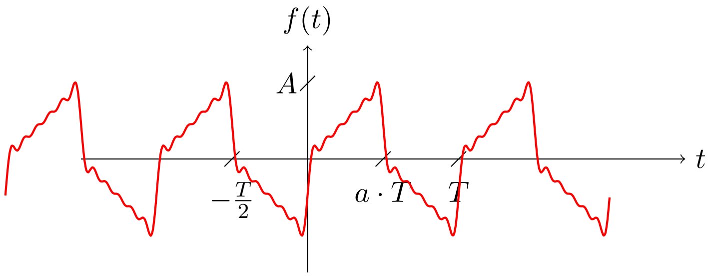
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



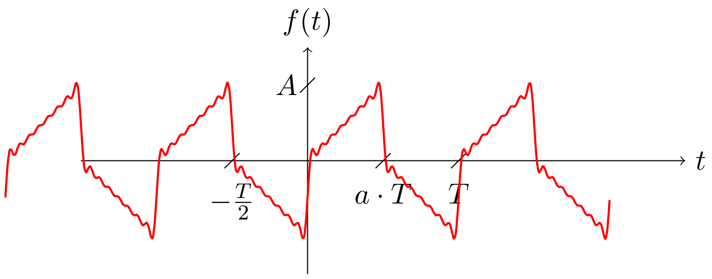
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



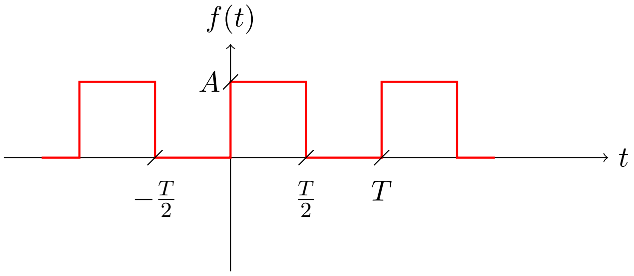
W przypadku sumowania do $k_{max} = 16$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.32}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.33}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.35}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \begin{Bmatrix} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^{0}\right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

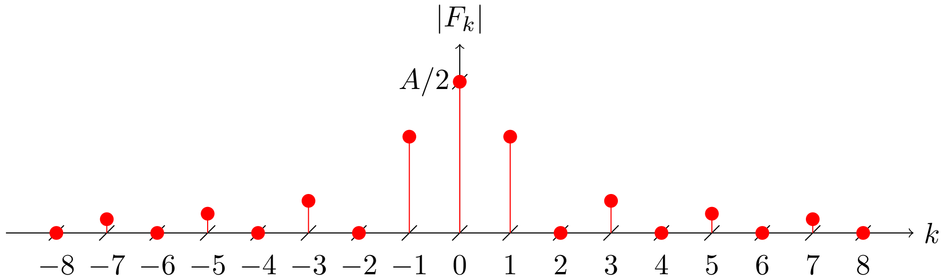
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left[\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^k - 1\right)\right]\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

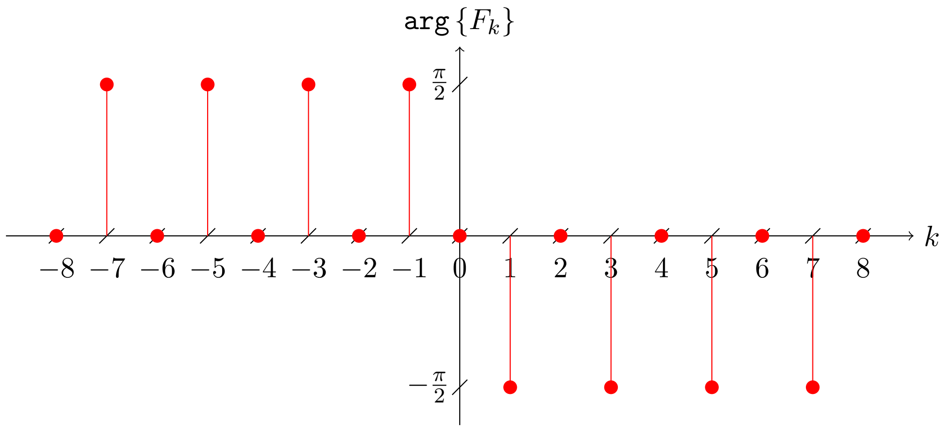
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



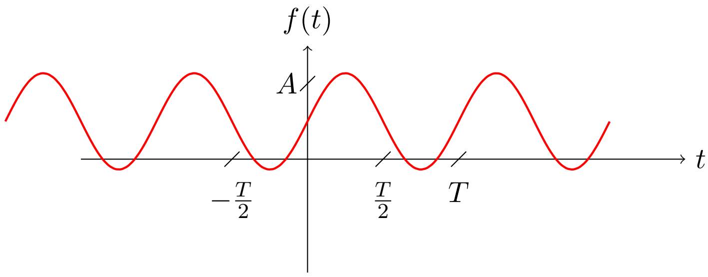
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

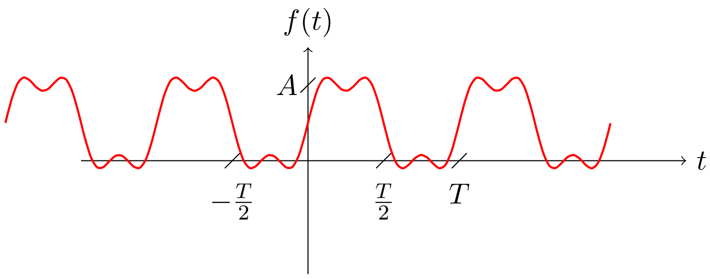


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

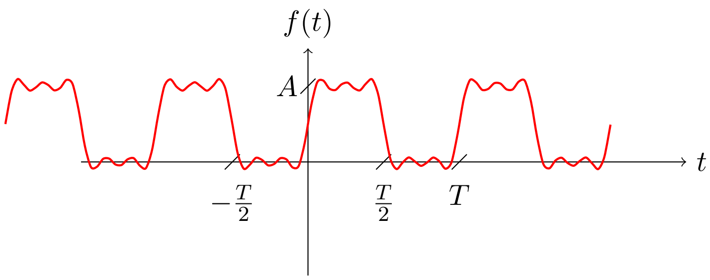
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



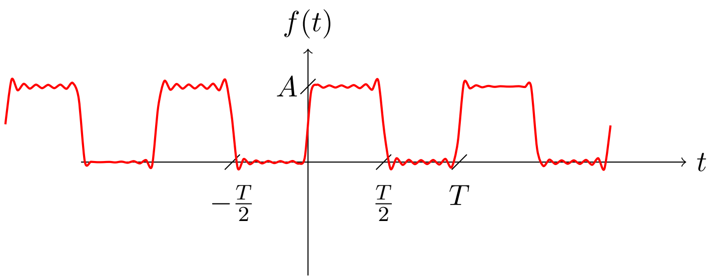
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



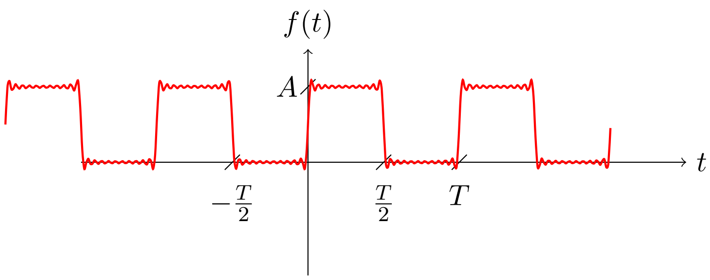
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

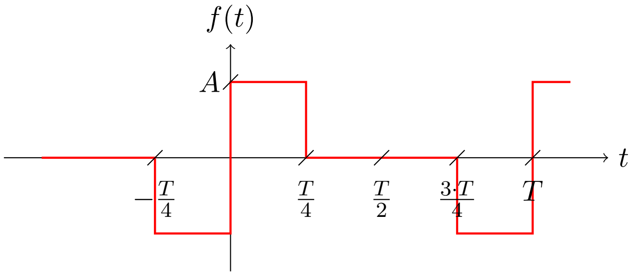


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \quad \wedge k \in C \tag{2.37}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.38}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_{0}^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_{0}^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.40}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(-\frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot dz + \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dz\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(e^{z}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{z}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + 1\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(2 - \left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot 2\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\pi}\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = \\
&= \left\{cos(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
&F_0 = 0 \\
&F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

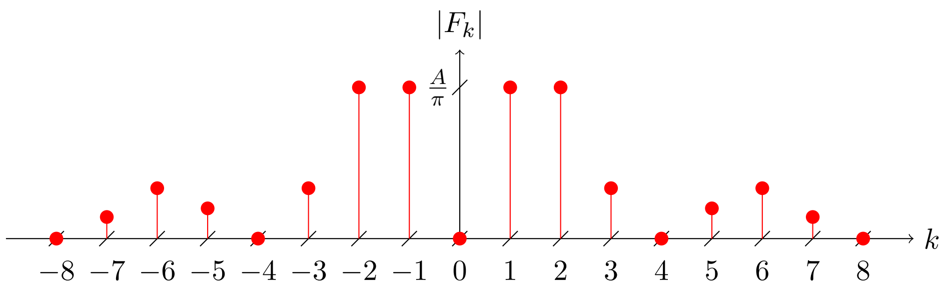
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
&f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

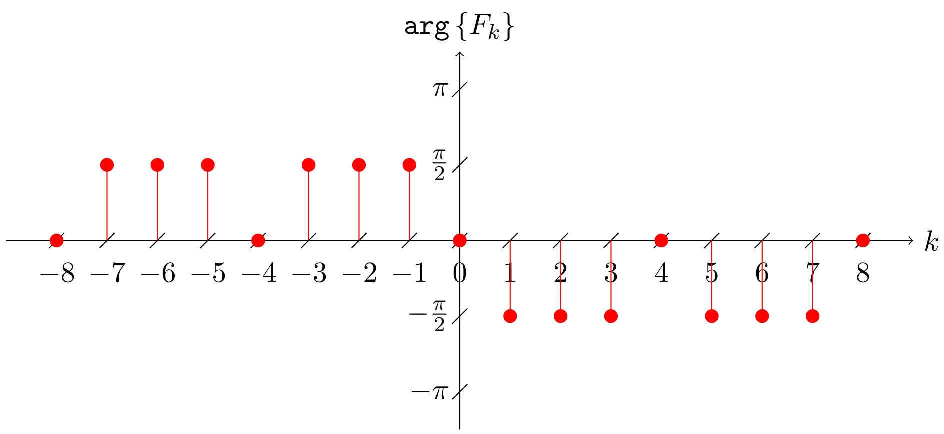
k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$
$Arg\{F_k\}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



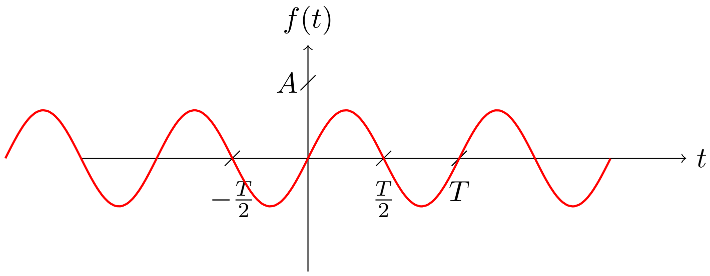
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

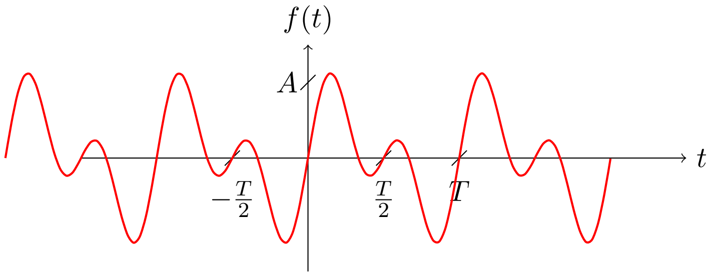


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

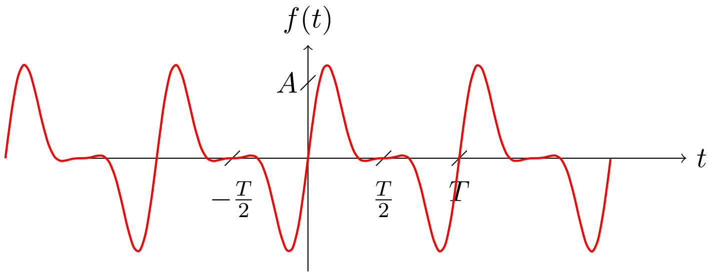
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



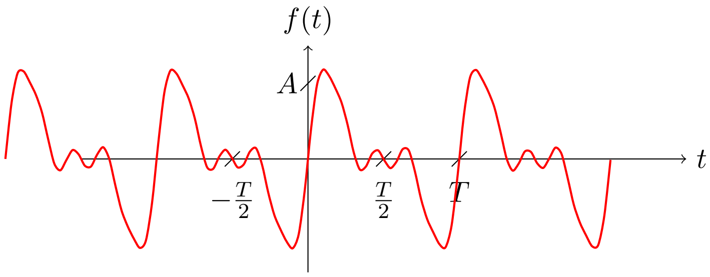
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



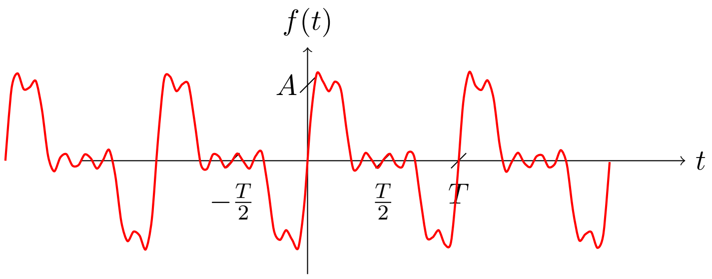
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



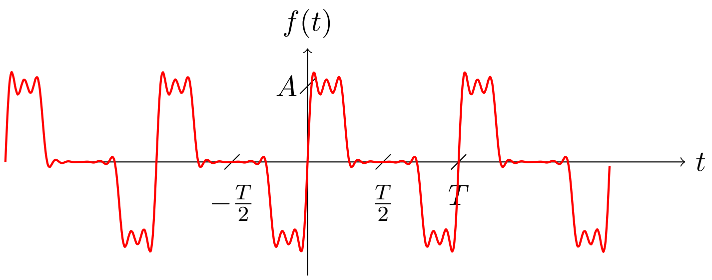
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



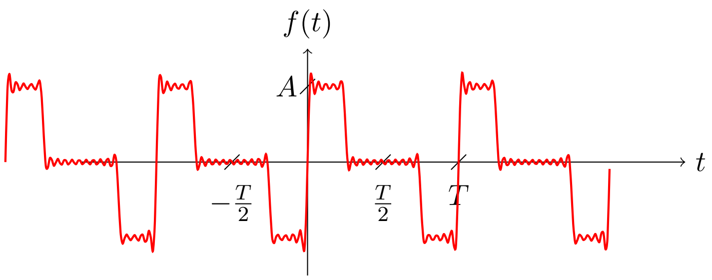
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

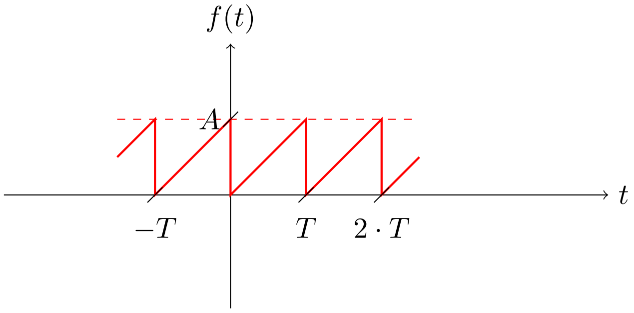


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.43}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \tfrac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \quad t \in (0 + k \cdot T; T + k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.44}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{2.45}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - 0\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T^2}{\left(-\jmath\cdot k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T\right) = \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} + \frac{T^2}{-\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - e^0\right)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot(1-1)\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot 0\right) = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - 0\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{-\jmath \cdot k \cdot 2\pi} =$$
$$= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

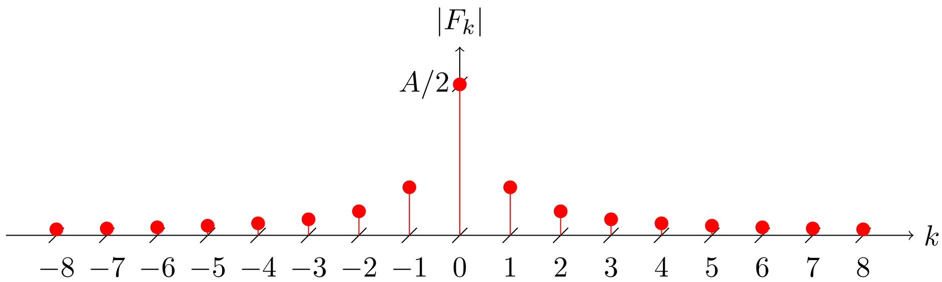
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\ f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

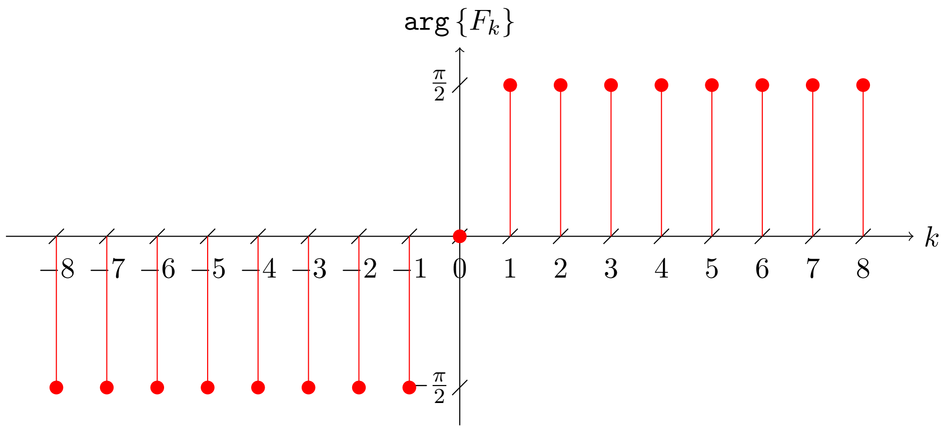
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg\,(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



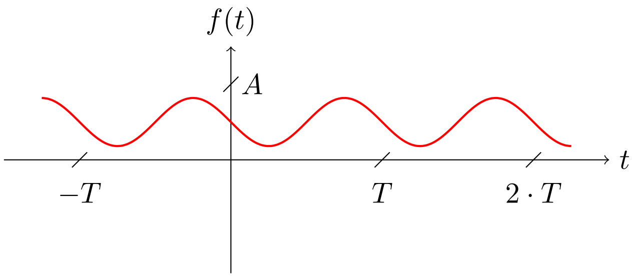
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\,\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

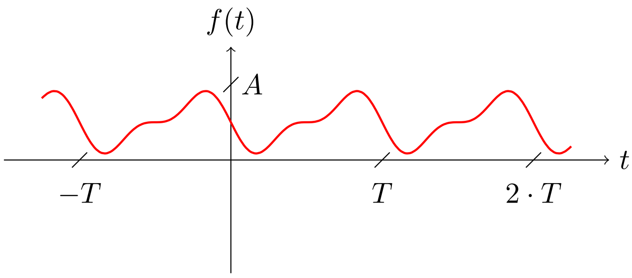


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

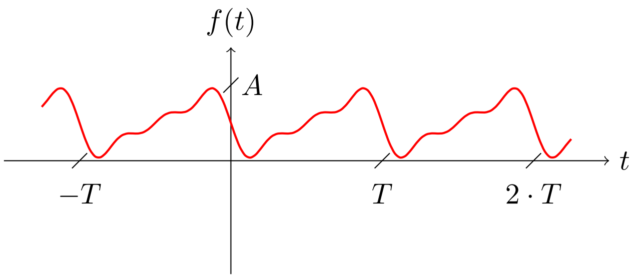
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



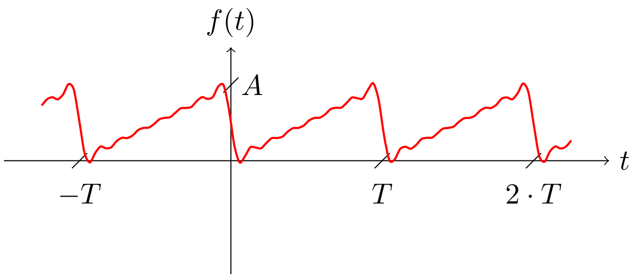
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



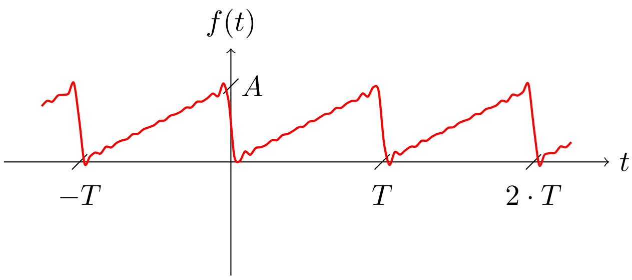
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy:

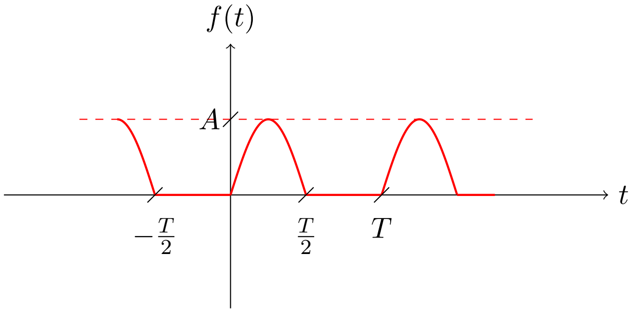


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.47}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.48}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1-1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$.
Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.49}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt & = \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 2}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2} \right) =$$
$$= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2} \right)$$
$$= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2} \right)$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2} \right)$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1:

$$F_1 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) =$$

$$= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} z & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(t|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4\jmath} = \\
&= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $-\jmath \cdot \frac{A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1}:

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= -\frac{A}{4\jmath} = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_{-1} &= \jmath \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -\jmath \cdot \frac{A}{4} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}
$$

Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako

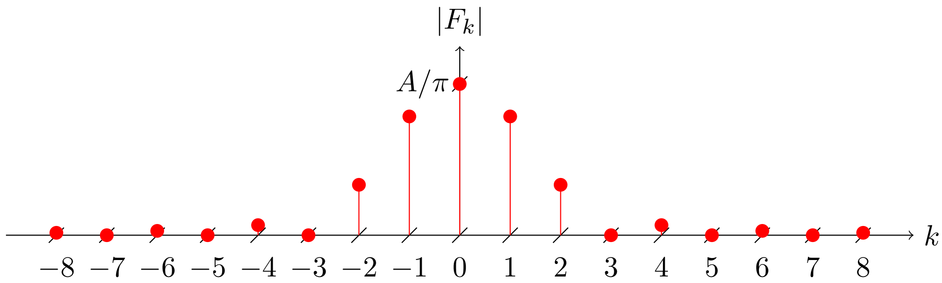
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \jmath \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - \jmath \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{2.50}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

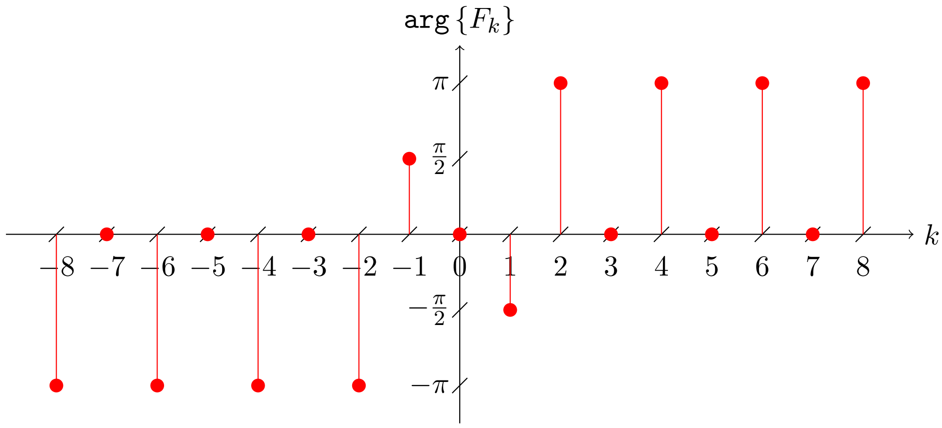
F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$-\frac{A}{3\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{35\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$Arg\{F_k\}$	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	-$\frac{\pi}{2}$	π	0	π	0	π

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



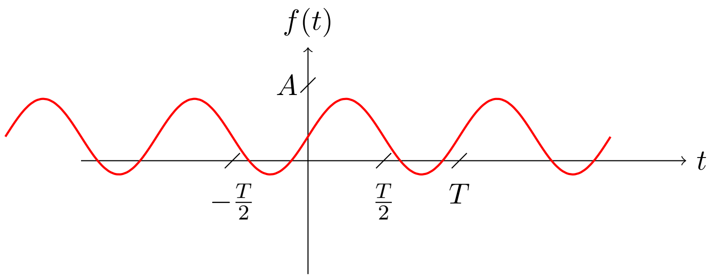
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

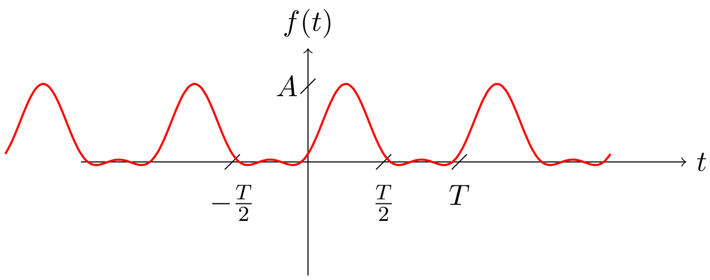


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

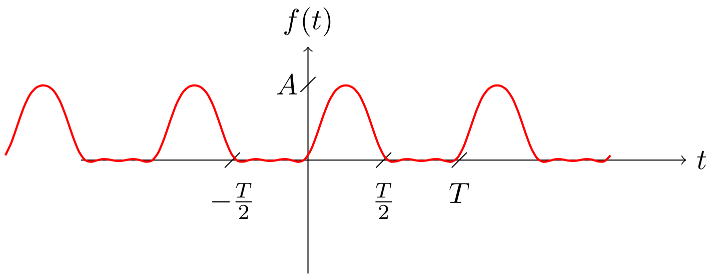
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



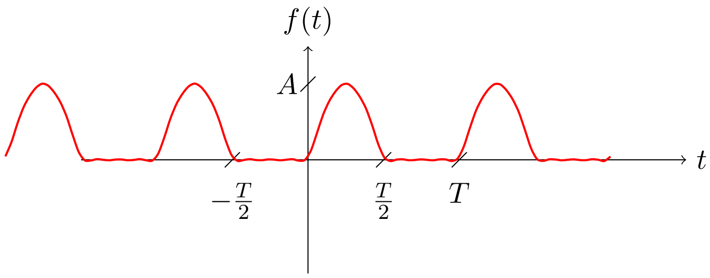
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



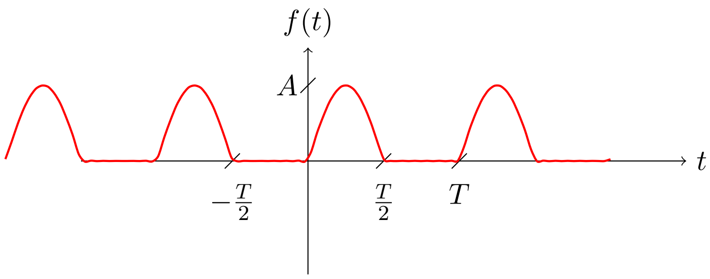
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:

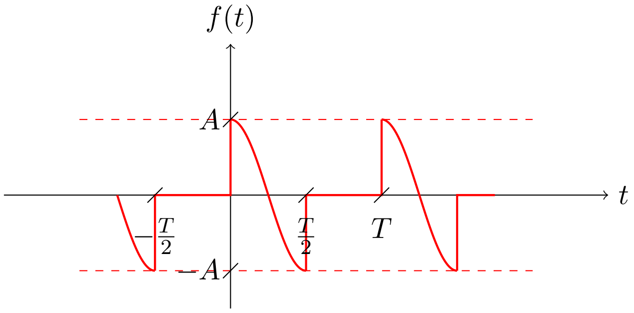


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 5. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.51}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.52}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt & = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (sin\,(pi) - sin\,(0)) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.53}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} z_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^{0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{1-k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1-k^2} \right) = \\
&= -\frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1-k^2} \right) \\
&= \jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2} \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2} \right)$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1-1)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t}\right)\cdot dt=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}e^{0}\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}1\cdot dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)=\\
&= \left\{\begin{matrix} z=-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\\ dz=-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt\\ dt=\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\end{matrix}\right\}=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\int_0^{\frac{T}{2}}e^{z}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}}dt+\frac{1}{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}e^{z}\cdot dz\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(t\big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\big|_0^{\frac{T}{2}}\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}-0\right)-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right)\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\pi}-e^{0}\right)\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1)\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{T}{2}-0\right)=\\
&= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{2}=\\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k=-1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1}:

$$
F_{-1}=\frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt=
$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) =$$

$$= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-1+1)\cdot t}\right)\cdot dt =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0}\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot dt\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} z = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2}-0\right)\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right) + \frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1) + \frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0 + \frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\left(0+\frac{T}{2}\right) =$$
$$= \frac{A}{2\cdot T}\cdot\frac{T}{2} =$$
$$= \frac{A}{4}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = \frac{A}{4}$$
$$F_{-1} = \frac{A}{4}$$
$$F_k = \jmath\cdot\frac{A\cdot k}{2\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)$$

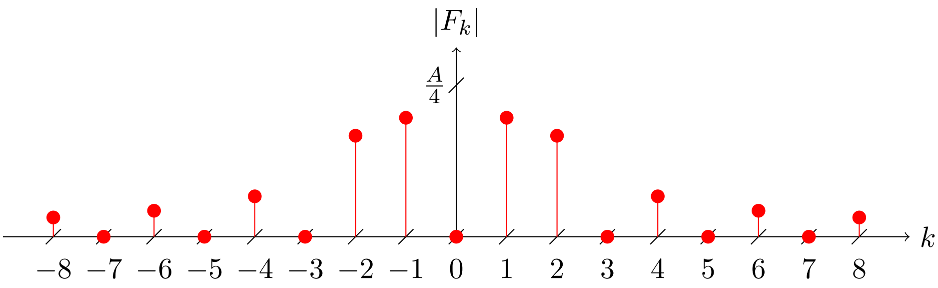
Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\\
f(t) &= \frac{A}{4}\cdot e^{\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+\frac{A}{4}\cdot e^{\jmath\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0\\k\neq -1\wedge k\neq 1}}^{\infty}\left[\jmath\cdot\frac{A\cdot k}{2\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\right]\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\\
f(t) &= \frac{A}{2}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0\\k\neq -1\wedge k\neq 1}}^{\infty}\left[\jmath\cdot\frac{A\cdot k}{2\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\right]\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k:

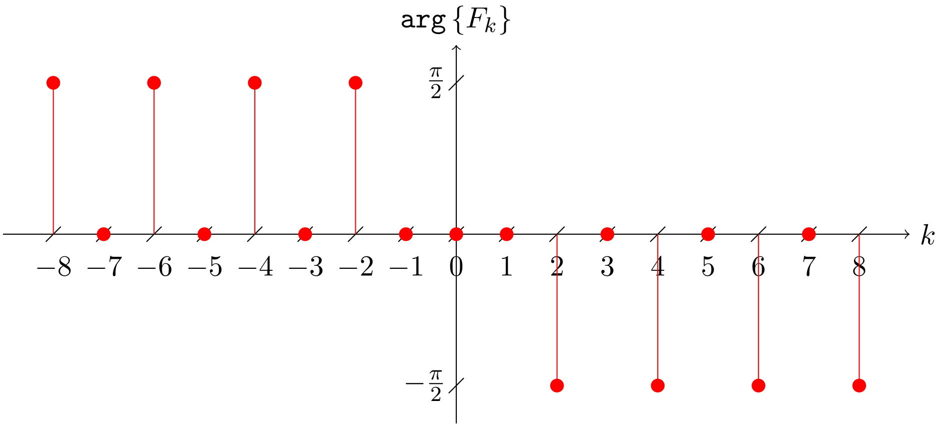
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$\jmath\cdot\frac{4\cdot A}{15\cdot\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-\jmath\cdot\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{4\cdot A}{15\cdot\pi}$	0
$\lvert F_k\rvert$	0	$\frac{4\cdot A}{15\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{4\cdot A}{15\cdot\pi}$	0
$Arg\left\{F_k\right\}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



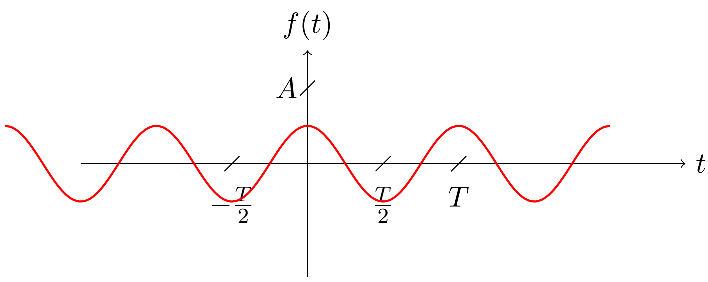
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

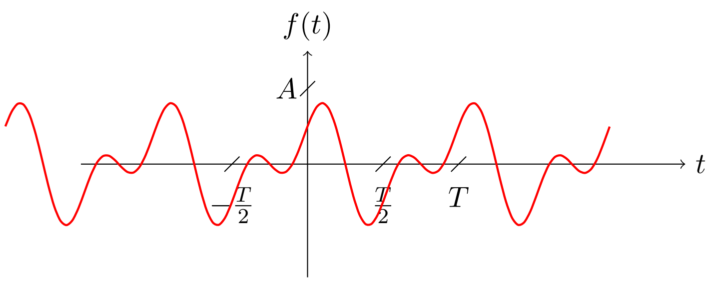


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

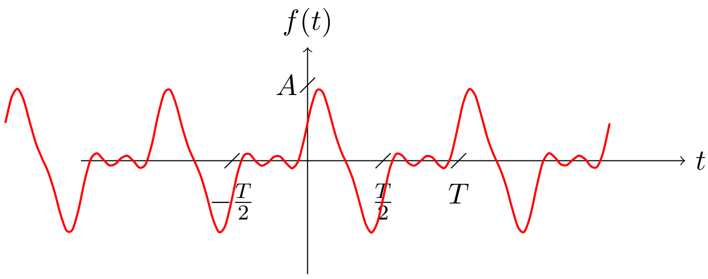
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



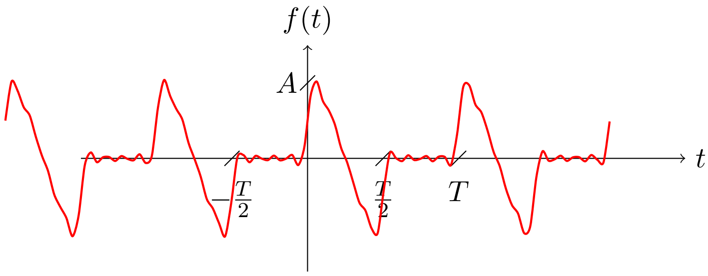
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



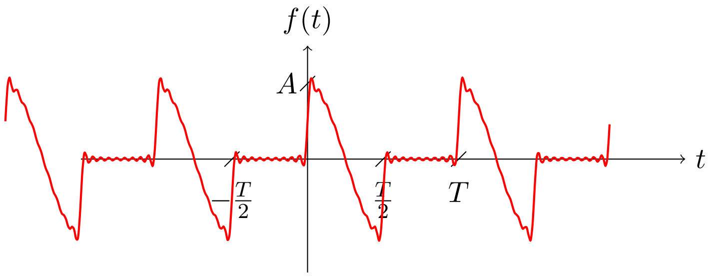
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy:

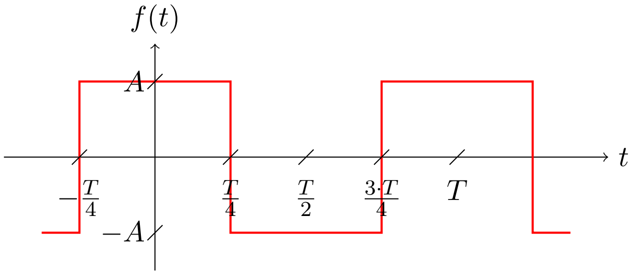


W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 6. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3\cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.55}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \tag{2.56}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt = \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} (-A)\cdot dt\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} dt - A\cdot\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} dt\right) = \\ &= \frac{A}{T}\left(t|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - t|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}}\right) = \\ &= \frac{A}{T}\cdot\left[\left(\frac{T}{4} - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) - \left(\frac{3\cdot T}{4} - \frac{T}{4}\right)\right] = \\ &= \frac{A}{T}\cdot\left[\frac{T}{4} + \frac{T}{4} - \frac{3\cdot T}{4} + \frac{T}{4}\right] = \\ &= \frac{A}{T}\cdot[0] = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{2.58}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} (-A)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt - A\cdot\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{A}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{A}{T}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\right] = \\
&= \frac{-A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dz - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} e^{z}\cdot dz\right] = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left[e^{z}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - e^{z}\Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}}\right] = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left[e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}}\right] = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(-\frac{T}{4}\right)} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3\cdot T}{4}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{3\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= \left\{e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{3\pi}{2}} = e^{-\jmath\cdot k\cdot\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} = 1\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right\} = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(2\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - 2\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_k &= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

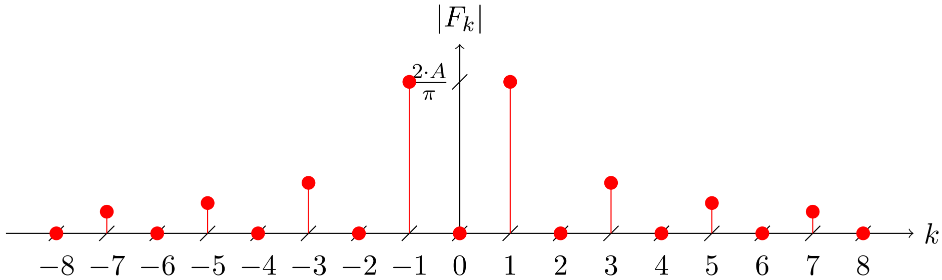
Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi}\left(sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k:

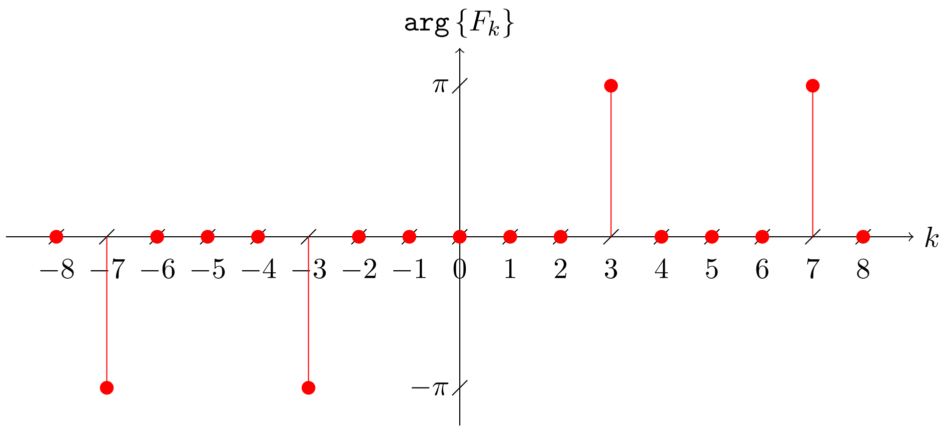
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	0	$-\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$-\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$
$\|F_k\|$	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	0	0	$-\pi$	0	0	0	0	0	π	0	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



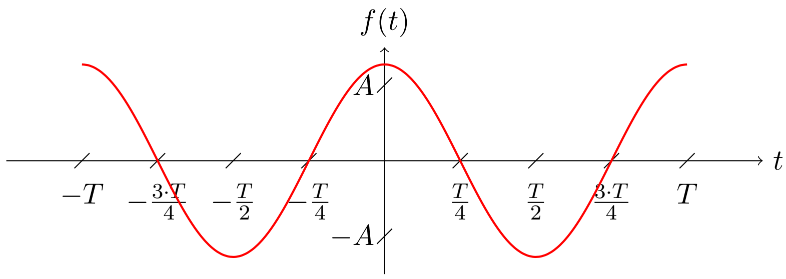
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\left\{F_k\right\}$ sygnału $f(t)$.

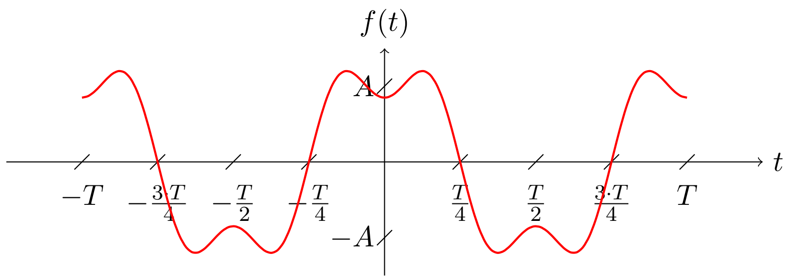


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

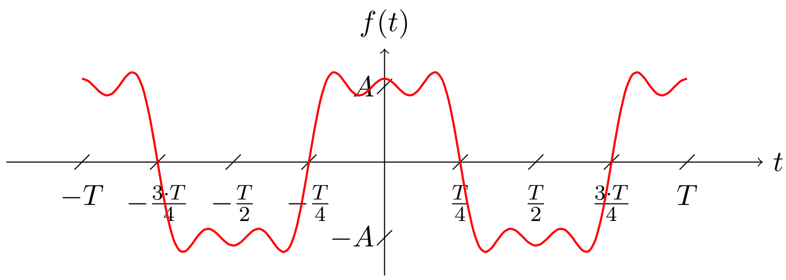
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



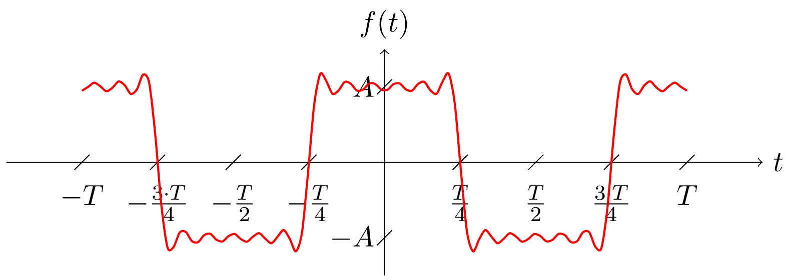
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



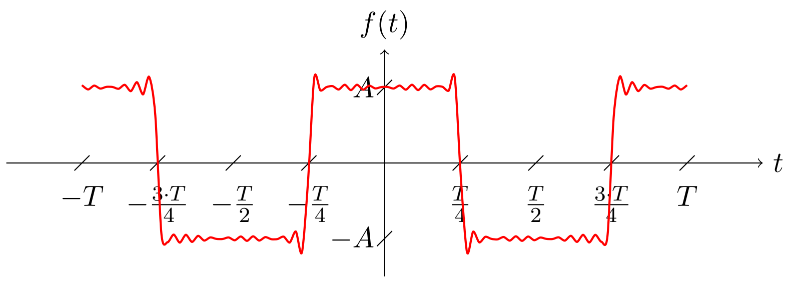
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

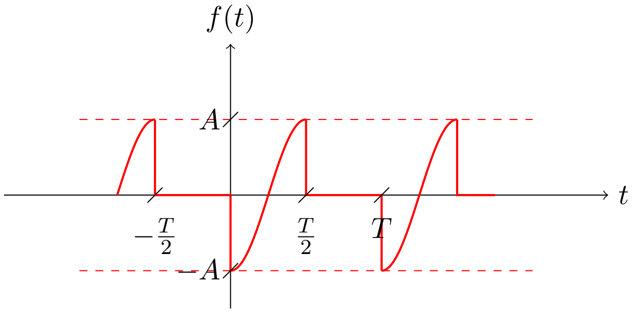


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 7. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.60}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.61}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt & = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\
&= \frac{-A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos\,(z) \cdot dz = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot sin\,(z)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot (sin\,(pi) - sin\,(0)) = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.62}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^{0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - k}{1-k^2} \right) = \\
&= \frac{-A}{\jmath \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1-k^2} \right) = \\
&= \frac{A \cdot k}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} + 1}{1-k^2} \right) \\
&= -\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2} \right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2} \right)$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt\right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} z = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0\right) - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1-1)\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{-A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{-A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1}:

$$
F_{-1} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =
$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot(-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) =$$
$$= \frac{1}{T}\left((-A)\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) =$$
$$= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{T}\left((-A)\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(1+1)\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-1+1)\cdot t}\right)\cdot dt =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 2\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t}\cdot dt\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0}\cdot dt\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot dt\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$
$$= \left\{\begin{array}{c} z = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz = \jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz \end{array}\right\} =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2}-0\right)\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T}{2}\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\pi} - e^{0}\right) + \frac{T}{2}\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot(1-1) + \frac{T}{2}\right) =$$
$$= \frac{-A}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot 0 + \frac{T}{2}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{-A}{4}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{-A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= \frac{-A}{4} \\
F_{-1} &= \frac{-A}{4} \\
F_k &= -\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2}\right)
\end{aligned}
$$

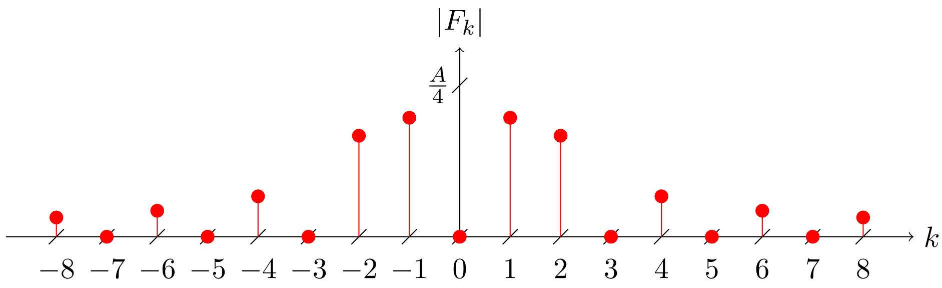
Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= -\frac{A}{4} \cdot e^{\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - \frac{A}{4} \cdot e^{\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[-\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2}\right)\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= -\frac{A}{2} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[-\jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2}\right)\right] \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k:

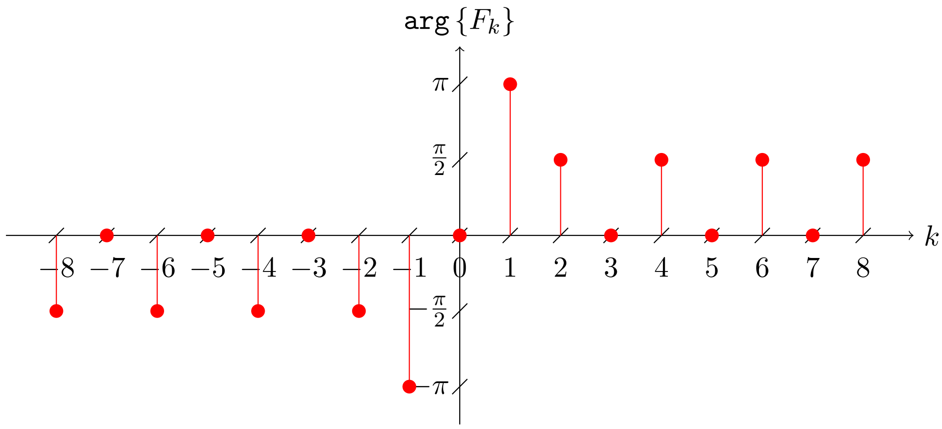
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$-\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{-A}{4}$	0	$\frac{-A}{4}$	$\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$\|F_k\|$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



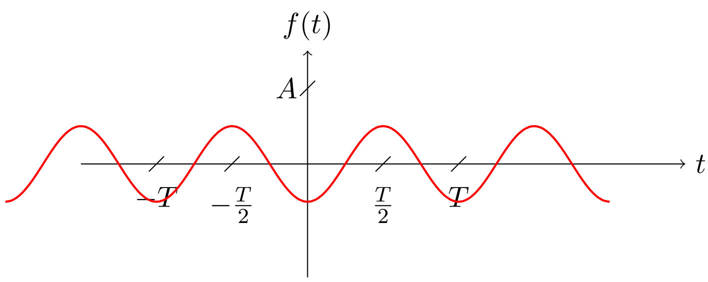
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie n podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\texttt{arg}\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

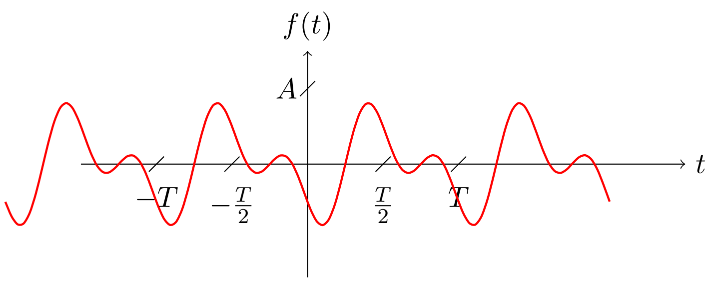


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

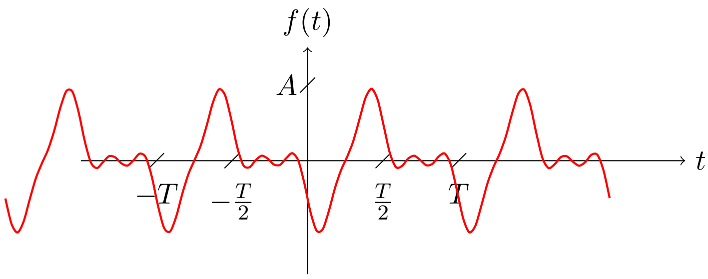
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



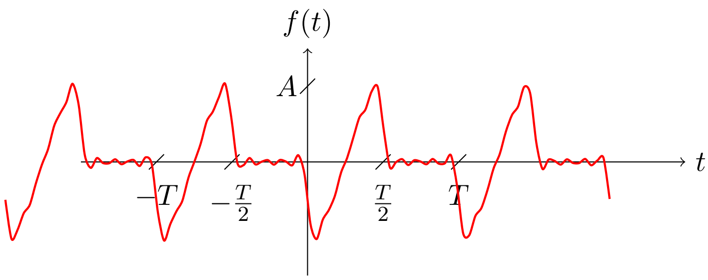
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



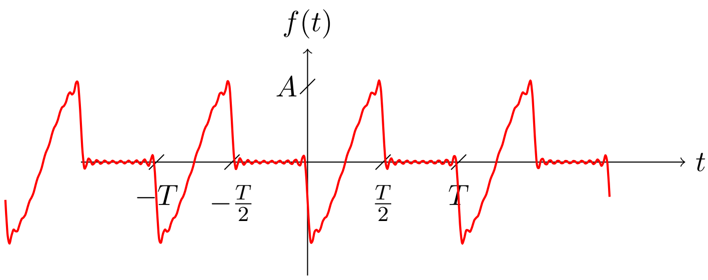
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy:

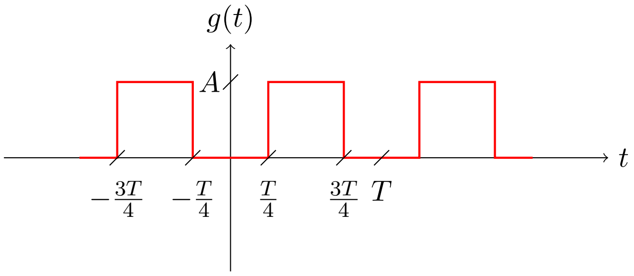


W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 8. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \wedge k \in C \\ 0 & t \in \left(\frac{3T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \tag{2.64}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest przesuniętą o $\frac{1}{4}T$ w czasie wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$g(t) = f\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ przesunętego w czasie o t_0 jako:

$$g(t) = f(t - t_0)$$
$$G_k = F_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy:

$$\begin{aligned} G_k &= F_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} = \\ &= \left\{ \ t_0 = \tfrac{T}{4} \ \right\} = \\ &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{4}} \\ &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \jmath \cdot \frac{A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^k - 1 \Big)$$

Podobnie dla G_0 podstawiając F_0 otrzymujemy

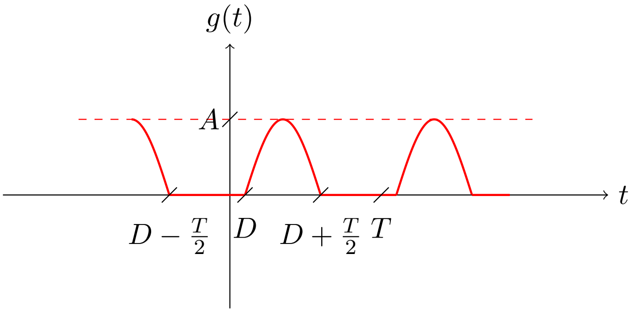
$$\begin{aligned} G_0 &= F_0 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t_0} = \\ &= F_0 \cdot e^0 = \\ &= F_0 \cdot 1 = \\ &= F_0 = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika dla $k = 0$ nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia sygnału w czasie $G_0 = F_0$. Warto zauważyć iż wartość współczynnika dla $k = 0$ jest utożsamiana z wartością średnią sygnału, a ta nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia w dziedzinie czasu.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{A}{2} \\ G_k &= \jmath \cdot \frac{A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^k - 1 \Big) \end{aligned}$$

Zadanie 9. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 4



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$g(t) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t-D)\right) & t \in \left(D + k\cdot T; D + \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(D + \frac{T}{2} + k \cdot T; D + T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.65}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest przesuniętą w czasie wersją sygnału $f(t)$ z zadania 4

$$g(t) = f\left(t - D\right)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 4 wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{\pi} \\ F_{-1} &= \jmath \cdot \frac{A}{4} \\ F_1 &= -\jmath \cdot \frac{A}{4} \\ F_k &= \frac{A}{2\cdot\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2}\right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t - t_0) \\ G_k &= F_k \cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot t_0} \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$G_k = F_k \cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot t_0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot t_0} = \\
&= \left\{\ t_0 = D\ \right\} = \\
&= \frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot D}
\end{aligned}$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot D}$, dla $k\neq 1\wedge k\neq -1$. Oznacza to iż współczynnik dla $k=1$ i $k=-1$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_1

$$\begin{aligned}
G_1 &= F_1\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 1\cdot t_0} = \\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t_0} = \\
&= \left\{\ t_0 = D\ \right\} = \\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot D}
\end{aligned}$$

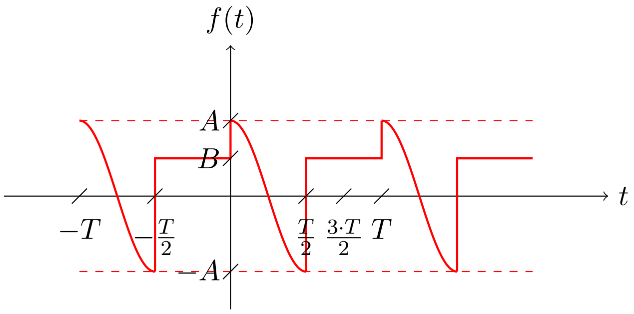
Podobnie wyznaczmy G_{-1}:

$$\begin{aligned}
G_{-1} &= F_{-1}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-1)\cdot t_0} = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t_0} = \\
&= \left\{\ t_0 = D\ \right\} = \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot D}
\end{aligned}$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{A}{\pi} \\
G_{-1} &= \jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot D} \\
G_1 &= -\jmath\cdot\frac{A}{4}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot D} \\
G_k &= \frac{A}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k\cdot D}
\end{aligned}$$

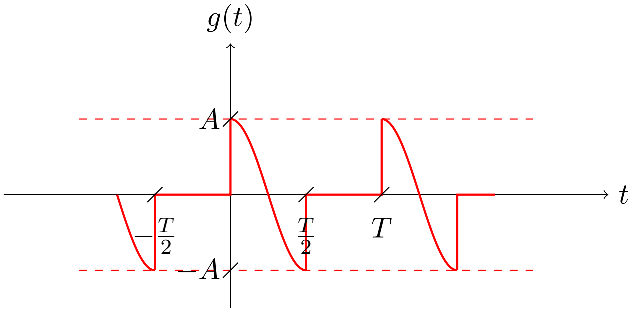
Zadanie 10. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj więdzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera.

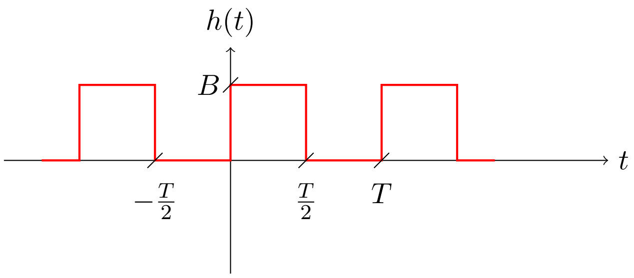


W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ B & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.66}$$

Jeśli przyjrzeć się dokładniej sygnałowi $f(t)$, można zauważyć, że składa się on z sygnałów $g(t)$ i $h(t)$, dla których już wcześniej obliczyliśmy współczynniki zesolonego szeregu Fourira.





Dokładnie rzecz ujmując, sygnał $f(t)$ jest sumą sygnałów: $g(t)$ i $h(t)$ przesuniętego w czasie o pół okresu ($\frac{T}{2}$):

$$f(t) = g(t) + h\left(t - \frac{T}{2}\right) \tag{2.67}$$

Wykorzystując więdzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera możemy napisać, że:

$$
\begin{aligned}
F_k &= G_k + H_k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \\
F_k &= G_k + H_k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} \\
F_k &= G_k + H_k \cdot (-1)^k
\end{aligned}
$$

Na podstawie wcześniej obliczonych zadań, współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnałów $g(t)$ i $h(t)$ wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
G_0 &= 0 \\
G_1 &= \frac{A}{4} \\
G_{-1} &= \frac{A}{4} \\
G_k &= \jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \frac{B}{2} \\
H_k &= \jmath \cdot \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^k - 1 \Big)
\end{aligned}
$$

Teraz możemy wyznaczyć współczynniki dla sygnału $f(t)$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= G_k + H_k \cdot (-1)^k = \\
&= \jmath \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) + \jmath \cdot \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^k - 1 \Big) \cdot (-1)^k = \\
&= \jmath \cdot \left[\frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) + \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big(1 - (-1)^k \Big) \right]
\end{aligned}
$$

Podobnie dla współczynnika F_0:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= G_0 + H_0 \cdot (-1)^0 = \\
&= 0 + \frac{B}{2} \cdot 1 = \\
&= \frac{B}{2}
\end{aligned}
$$

Podobnie dla współczynników F_1 i F_{-1}:

$$\begin{aligned}
F_1 &= G_1 + H_1 \cdot (-1)^1 = \\
&= \frac{A}{4} + \jmath \cdot \frac{B}{1 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^1 - 1\Big) \cdot (-1) = \\
&= \frac{A}{4} + \jmath \cdot \frac{B}{\pi}
\end{aligned}$$

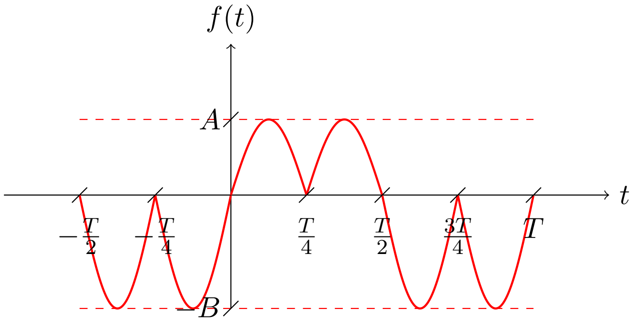
$$\begin{aligned}
F_{-1} &= G_{-1} + H_{-1} \cdot (-1)^{-1} = \\
&= \frac{A}{4} + \jmath \cdot \frac{B}{(-1) \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^{-1} - 1\Big) \cdot (-1) = \\
&= \frac{A}{4} - \jmath \cdot \frac{B}{\pi}
\end{aligned}$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnału $f(t)$ wynoszą:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{B}{2} \\
F_1 &= \frac{A}{4} + \jmath \cdot \frac{B}{\pi} \\
F_{-1} &= \frac{A}{4} - \jmath \cdot \frac{B}{\pi} \\
F_k &= \jmath \cdot \left[\frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2}\right) + \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big(1 - (-1)^k\Big)\right]
\end{aligned}$$

Zadanie 11.

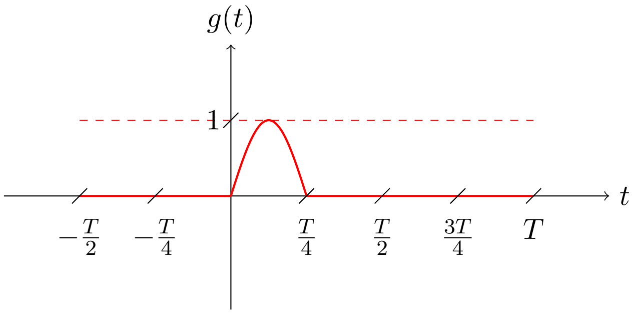
Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj więdzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ -A \cdot sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -B \cdot sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \\ B \cdot sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{3T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.68}$$

Współczynniki F_k możemy wzynaczyć bezpośrednio z definicji. Ponieważ mamy sygnał okresowy, w którym każdy okres składa się z czterech odcinków, to trzeba będzie obliczyć po jednej całce dla każdego z odcinków. Można również zauważyć, że sygnał $f(t)$ da się przedstawić jako liniową kombinację poprzesuwanego w czasie sygnału $g(t)$ przedstawionego poniżej:



Jest to funkcja odcinkowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$g(t) = \begin{cases} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.69}$$

Dla tak zdefiniwanego sygnału $g(t)$, sygnał $f(t)$ można przedstawić jako:

$$g(t) = A \cdot g\left(t\right) + A \cdot g\left(t - \frac{T}{4}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{T}{2}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{3T}{4}\right) \tag{2.70}$$

Teraz wystarczy wyznaczyć współczynniki rozwinięcia w zespolony szerg Fouriera dla sygnału $g(t)$. Następnie, na podstawie twierdzenia o liniowości oraz wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera będziemy mogli obliczyć współczynniki F_k dla sygnału $f(t)$.

Współczynnik G_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$G_0 = \frac{1}{T}\int_T g(t) \cdot dt \tag{2.71}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{T}\int_T g(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{T} 0 \cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\
&= \frac{1}{T \cdot \frac{4\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right) \cdot dz = \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\pi\right) - cos\left(0\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(-1 - 1\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(-2\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika G_0 wynosi $\frac{1}{2\pi}$.

Współczynniki G_k wyznaczamy ze wzoru

$$G_k = \frac{1}{T}\int_T g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.72}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
G_k &= \frac{1}{T}\int_T g(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{1}{2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(2-k)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(2+k)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(2-k)}\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(2+k)}\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix} z_1 & = \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)\cdot t & z_2 & = -\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)\cdot t \\ dz_1 & = \jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)\cdot dt & dz_2 & = -\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)\cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)} & dt & = \frac{dz_2}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)}\end{matrix}\right\} = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1}\cdot\frac{dz_1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)} - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2}\cdot\frac{dz_2}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)}\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1}\cdot dz_1 - \frac{1}{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2}\cdot dz_2\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath\cdot\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(\frac{1}{2-k}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{2+k}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2}\cdot dz_2\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{2-k}\cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{2+k}\cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{2-k}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{2+k}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{2-k}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)\cdot\frac{T}{4}}-e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2-k)\cdot 0}\right) + \frac{1}{2+k}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)\cdot\frac{T}{4}}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(2+k)\cdot 0}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{2-k}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2-k)}-e^{0}\right) + \frac{1}{2+k}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2+k)}-e^{0}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{2+k}{(2-k)\cdot(2+k)}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2-k)}-1\right) + \frac{2-k}{(2-k)\cdot(2+k)}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2+k)}-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(2+k)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2-k)}-1\right)}{(2-k)\cdot(2+k)} + \frac{(2-k)\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2+k)}-1\right)}{(2-k)\cdot(2+k)}\right) = \\
&= \frac{1}{-4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{(2+k)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2-k)}-1\right)+(2-k)\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2+k)}-1\right)}{(2-k)\cdot(2+k)}\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - k + 2 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - 2 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} + k}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 4 + k \cdot e^{\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} + 2 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)}}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} + 2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} e^{\jmath \cdot \pi} &= cos\left(\pi\right) + \jmath \cdot sin\left(\pi\right) = -1 \\ e^{-\jmath \cdot \pi} &= cos\left(\pi\right) - \jmath \cdot sin\left(\pi\right) = -1 \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 + k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} + 2 \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - 2 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} + k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-4 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{4 \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} + 4}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot 4 \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}} + 1}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) =$$

$$= \frac{1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi\left(4 - k^2\right)}$$

Wartość współczynnika G_k wynosi $\frac{1+e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi(4-k^2)}$ dla $k \neq 2 \wedge k \neq -2$.

Współczynnik G_k dla $k = 2$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji G_2:

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) =$$
$$= \begin{Bmatrix} z & = -\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z} \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z} \cdot dz \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(t\Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{4} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-\jmath \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) \right) =$$
$$= \left\{ e^{-\jmath \cdot 2\pi} \quad = cos\left(2\pi\right) - \jmath \cdot sin\left(2\pi\right) = 1 \right\} =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot (1-1) \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot 0 \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{4} + 0 \right) =$$
$$= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{4} =$$
$$= \frac{1}{8\jmath} =$$
$$= \frac{-\jmath}{8}$$

Wartość współczynnika G_2 wynosi $\frac{-\jmath}{8}$.

Współczynnik G_k dla $k = -2$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji G_{-2}:

$$
\begin{aligned}
G_{-2} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot(-2)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot(-2)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0\cdot e^{-\jmath\cdot(-2)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{T} 0\cdot dt\right) = \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath} \right\} = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + 0\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{1}{2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}\right)\cdot dt = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot 2}\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\cdot 0}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}\cdot t}\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{0}\cdot dt\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}\cdot t}\cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} 1\cdot dt\right) = \\
&= \left\{\begin{aligned} z &= \jmath\cdot\tfrac{8\pi}{T}\cdot t \\ dz &= \jmath\cdot\tfrac{8\pi}{T}\cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}} \end{aligned}\right\} = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dz}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{4}} dt\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dz - \int_0^{\frac{T}{4}} dt\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}}\cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{4}} - t\Big|_0^{\frac{T}{4}}\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{4}} - \left(\frac{T}{4}-0\right)\right) = \\
&= \frac{1}{T\cdot 2\jmath}\cdot\left(\frac{1}{\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}-e^{-\jmath\cdot\frac{8\pi}{T}\cdot 0}\right) - \frac{T}{4}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \left\{ e^{-\jmath \cdot 2\pi} \quad = cos\left(2\pi\right) - \jmath \cdot sin\left(2\pi\right) = 1 \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot (1-1) - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(0 - \frac{T}{4} \right) = \\
&= -\frac{1}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{4} = \\
&= -\frac{1}{8\jmath} = \\
&= \frac{\jmath}{8}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika G_{-2} wynosi $\frac{\jmath}{8}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji $g(t)$ przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{2\pi} \\
G_2 &= \frac{-\jmath}{8} \\
G_{-2} &= \frac{\jmath}{8} \\
G_k &= \frac{1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi \left(4 - k^2\right)}
\end{aligned}
$$

Teraz możemy wrócić do sygnału $f(t)$ opisanego za pomocą poprzesuwanych w czasie sygnałów $g(t)$:

$$
f(t) = A \cdot g\left(t\right) + A \cdot g\left(t - \frac{T}{4}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{T}{2}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{3T}{4}\right) \tag{2.73}
$$

Przypomnijmy twierdzenie o liniowości i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki zespolonego szeferu Fouriera:

$$
\begin{aligned}
n(t) &\rightarrow N_k \\
m(t) &= A \cdot n(t - t_0) \\
M_k &= A \cdot N_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0}
\end{aligned}
$$

Stasując powyższe twierdzenia do sygnału $f(t)$ otrzymujemy:

$$
F_k = A \cdot G_k + A \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{4}} - B \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{2}} - B \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{3T}{4}} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= A \cdot G_k + A \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}} - B \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \pi} - B \cdot G_k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}} = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot \left(e^{-\jmath \cdot k\pi} + e^{-\jmath \cdot \frac{3k\pi}{2}}\right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} e^{-\jmath \cdot k\pi} & = cos\left(k\pi\right) + \jmath \cdot sin\left(k\pi\right) = (-1)^k \\ e^{-\jmath \cdot \frac{3 \cdot k\pi}{2}} & = e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2 \cdot k\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)} = e^{-\jmath \cdot \frac{2 \cdot k\pi}{2}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}} = (-1)^k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}} \end{matrix} \right\} = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot \left((-1)^k + (-1)^k \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot (-1)^k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) = \\
&= G_k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Podstawiając wartości współczynników G_k do wzoru na F_k otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
F_k &= G_k \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right) = \\
&= \frac{1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi \left(4 - k^2\right)} \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right) = \\
&= \frac{\left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}\right)^2}{\pi \left(4 - k^2\right)} \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Analogicznie wyznaczmy wzpółczynnik F_0:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= G_0 \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{0 \cdot \pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^0\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(1 + e^0\right) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot (1 + 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot (2) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{A - B}{\pi}
\end{aligned}
$$

Analogicznie wyznaczmy wzpółczynnik F_2:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= G_2 \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{2 \cdot \pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^2\right) = \\
&= \frac{-\jmath}{8} \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \pi}\right) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \left\{ e^{-\jmath \cdot \pi} \quad = cos\left(\pi\right) - \jmath \cdot sin\left(\pi\right) = -1 \right\} = \\
&= \frac{-\jmath}{8} \cdot (1 - 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{-\jmath}{8} \cdot (0) \cdot (A - B) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

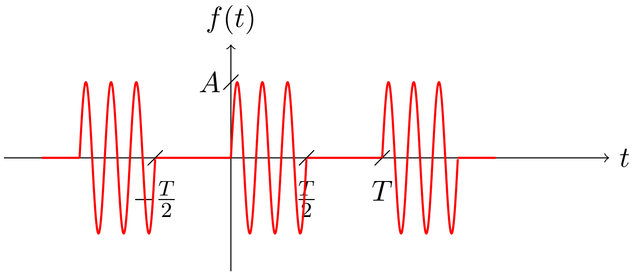
Analogicznie wyznaczmy wzpółczynnik F_{-2}:

$$
\begin{aligned}
F_{-2} &= G_{-2} \cdot \left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{(-2)\cdot\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^{-2}\right) = \\
&= \frac{\jmath}{8} \cdot (1 + e^{\jmath \cdot \pi}) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \left\{ e^{\jmath \cdot \pi} \quad = cos\,(\pi) + \jmath \cdot sin\,(\pi) = -1 \right\} = \\
&= \frac{\jmath}{8} \cdot (1 - 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{\jmath}{8} \cdot (0) \cdot (A - B) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji $f(t)$ przyjmują wartości:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A - B}{\pi} \\
F_2 &= 0 \\
F_{-2} &= 0 \\
F_k &= \frac{\left(1 + e^{-\jmath \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}\right)^2}{\pi\,(4 - k^2)} \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.74}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \ \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g^1(t) &= f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\ G_k^1 &= F_{k-k_0} \end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\ g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\ G_k &= G_k^1 - G_k^2 \end{aligned}$$

$$G_k = \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right)$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$\begin{aligned} e^{\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t} &= e^{\jmath\cdot\frac{2\ cdot 6\pi}{T}\cdot t} \\ &= e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 6\cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t} &= e^{-\jmath\cdot\frac{2\ cdot 6\pi}{T}\cdot t} \\ &= e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 6\cdot t} \\ &= e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-6)\cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -6 \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$\begin{aligned}
G_k &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^1)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^1}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^2)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^2}-1\right)\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k-(-6))\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-(-6)}-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k+6}-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{6}-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{k-6} - \frac{1}{k+6}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6}{(k-6)\cdot(k+6)} - \frac{k-6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6-k+6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) = \\
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{12}{k^2-36}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) = \\
&= \frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{k^2-36}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)$, dla $k \neq 6 \wedge k \neq -6$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 6$ i $k = -6$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_6

$$\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{6-k_0^1} - F_{6-k_0^2}\Big) = \\
&= \Big\{ \; k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \; \Big\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{6-6} - F_{6-(-6)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} (F_0 - F_{6+6}) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} (F_0 - F_{12})
\end{aligned}$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_{12}

$$\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_0 - F_{12)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\frac{A}{2} - \jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^{12} - 1\Big)\right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{A}{2} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^{12} - 1\Big) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (1 - 1) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (0) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot 0 = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath} - 0 = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \jmath}
\end{aligned}$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-6}

$$\begin{aligned}
G_{-6} &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{-6-k_0^1} - F_{-6-k_0^2}\Big) = \\
&= \Big\{ \; k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \; \Big\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \Big(F_{-6-6} - F_{-6-(-6)}\Big) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} (F_{-12} - F_{-6+6}) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} (F_{-12} - F_0)
\end{aligned}$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-12} oraz F_0

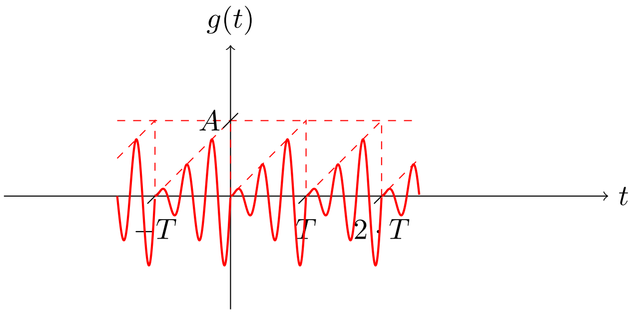
$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{-12} - F_{0)} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{-12 \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{-12} - 1 \right) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (1 - 1) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(\jmath \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (0) - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(0 - \frac{A}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(-\frac{A}{2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \frac{A}{2} = \\
&= -\frac{A}{4 \cdot \jmath}
\end{aligned}
$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_{-6} &= -\frac{A}{4 \cdot \jmath} \\
G_6 &= \frac{A}{4 \cdot \jmath} \\
G_k &= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 3



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał w pierwszym okresie za pomocą wzoru.

$$g(x) = \frac{A}{T} \cdot t \cdot sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \tag{2.75}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 3

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \; sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \; \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera a_k i b_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 3 wynoszą:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

Korzystając z zależności miedzy współczynnikami F_k zespolonego szeregu Fouriera i współczynnikami a_k i b_k trygonometrycznego szeregu Fourier możemy wyznaczyć współczynniki F_k zespolonego szeregu Fouiera

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \\ F_k &= a_k - \jmath \cdot b_k \end{aligned}$$

a wiec dla sygnału $f(t)$ z zadania 3 współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wynoszą:

$$\begin{aligned}
F_0 &= a_0 = \frac{A}{2} \\
F_k &= a_k - \jmath \cdot b_k = \\
&= 0 - \jmath \cdot \left(-\frac{A}{k \cdot \pi}\right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi}
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned}
g^1(t) &= f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\
G_k^1 &= F_{k-k_0}
\end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\
g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\
G_k &= G_k^1 - G_k^2 \\
G_k &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right)
\end{aligned}$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$\begin{aligned}
e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{\jmath \cdot \frac{2\ cdot 3\pi}{T} \cdot t} \\
&= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{-\jmath \cdot \frac{2\ cdot 3\pi}{T} \cdot t} \\
&= e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \\
&= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-3) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -3
\end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$G_k = \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^1)\cdot\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^2)\cdot\pi}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-3)\cdot\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k-(-3))\cdot\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{k-3} - \frac{1}{k+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\left(\frac{k+3}{(k-3)\cdot(k+3)} - \frac{k-3}{(k+3)\cdot(k-1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{k+3-(k-3)}{(k-3)\cdot(k+3)} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{k+3-k+3}{k^2-9} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{6}{k^2-9} = \\
&= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}
\end{aligned}
$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}$, dla $k \neq 3 \wedge k \neq -3$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 3$ i $k = -3$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_3

$$
\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{3-k_0^1} - F_{3-k_0^2}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{3-3} - F_{3-(-3)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_{3+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_6\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_6

$$
\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_6\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\frac{A}{2} - \jmath\cdot\frac{A}{6\cdot\pi}\right) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{2\cdot 6\cdot\pi} = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{12\cdot\pi} = \\
&= -\frac{A}{12\cdot\pi} + \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-3}

$$
\begin{aligned}
G_{-3} &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-3-k_0^1} - F_{-3-k_0^2}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-3-3} - F_{-3-(-3)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-6} - F_{-3+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-6} - F_{0}\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-6} oraz F_0

$$
\begin{aligned}
G_{-3} &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-6} - F_{0)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{-6\cdot\pi} - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{-12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath} = \\
&= -\frac{A}{12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

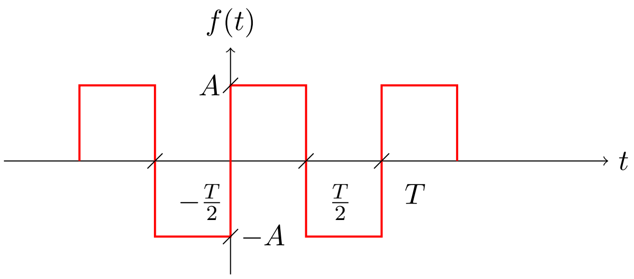
Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_{-3} &= -\frac{A}{12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_{3} &= -\frac{A}{12\cdot\pi} + \frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_{k} &= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}
\end{aligned}
$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Wyznacz udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_1}{P} = ? \tag{2.76}$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.77}$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{2.78}$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} |-A|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + A^2 \cdot \int_{\frac{T}{2}}^{T} dt \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t|_0^{\frac{T}{2}} + t|_{\frac{T}{2}}^{T} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 + T - \frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot (T) = \\ &= A^2 \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się A^2.

Moc podstawowej (pierwszej) harmonicznej to (na podstawie twierdzenia Parsevala):

$$P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2 \tag{2.79}$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \tag{2.80}$$

W związku z tym, należy obliczyć wartość współczynnika F_1. Można to zrobić bezpośrednio ze wzoru na F_k podstawiając $k = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{2.81}$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na F_1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -A \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^z \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_{\frac{T}{2}}^{T} e^z \cdot dz \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^z \Big|_{\frac{T}{2}}^{T} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{\frac{T}{2}}^{T} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi} - e^0 - e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} + e^{-\jmath \cdot \pi} \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\jmath \cdot 2 \cdot \pi} & = cos(2\pi) - \jmath \cdot sin(2\pi) = 1 \\ e^{-\jmath \cdot \pi} & = cos(\pi) - \jmath \cdot sin(\pi) = -1 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot (-1 - 1 - 1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{\jmath \cdot 2\pi} \cdot (-4) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \pi} = \\
&= -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 to $-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}$

Podstawiając wartość współczynnika F_1 do wzoru na moc podstawowej harmonicznej otrzymujemy:

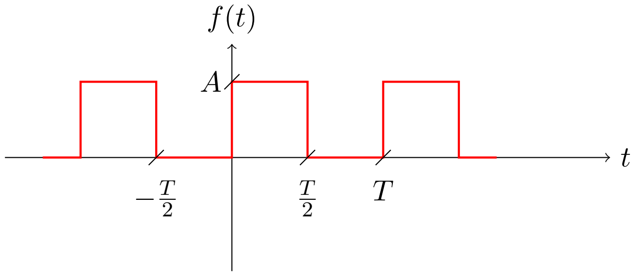
$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \cdot |F_1|^2 = \\ &= 2 \cdot \left| -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \right|^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{\pi} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\pi^2} = \\ &= \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Moc podstawowej harmonicznej równa się $P_1 = \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}$.

Teraz można wyznaczyć udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}}{A^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx 81\% \tag{2.82}$$

Zadanie 2. Wyznacz udział mocy wyższych harmonicznych ($k > 1$) w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_{>1}}{P} = ? \tag{2.83}$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.84}$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{2.85}$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} |0|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się $\frac{A^2}{2}$.
Na podstawie twierdzenia Parsevala, moc wyższych harmonicznych to:

$$P_{>1} = P - P_0 - P_1 \tag{2.86}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= |F_0|^2 \\
P_1 &= |F_1|^2 + |F_{-1}|^2
\end{aligned}
$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$
P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \tag{2.87}
$$

W związku z tym, należy obliczyć wartości współczynników F_0 i F_1. Współczynniki F_k wyznaczyliśmy już w zadaniu 1 is wynoszą:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^k - 1\Big)
\end{aligned}
$$

Teraz możemy obliczyć P_0 oraz P_1:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= |F_0|^2 \\
&= \left|\frac{A}{2}\right|^2 \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 2 \cdot |F_1|^2 \\
&= 2 \cdot \left|\jmath \cdot \frac{A}{1 \cdot 2\pi} \cdot \Big((-1)^1 - 1\Big)\right|^2 \\
&= 2 \cdot \left|\jmath \cdot \frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1)\right|^2 \\
&= 2 \cdot \left|\jmath \cdot \frac{A}{2\pi} \cdot (-2)\right|^2 \\
&= 2 \cdot \left|\jmath \cdot \frac{-A}{\pi}\right|^2 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \\
&= 2 \cdot \frac{A^2}{\pi^2}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie, moc wyższych harmonicznych to:

$$\begin{aligned}
P_{>1} &= P - P_0 - P_1 \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4} - 2 \cdot \frac{A^2}{\pi^2} \\
&= \frac{2 \cdot A^2 \cdot \pi^2}{4\pi^2} - \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4\pi^2} - \frac{8 \cdot A^2}{4\pi^2} \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi^2 - 8 \cdot A^2}{4\pi^2} \\
&= \frac{A^2 \cdot \left(\pi^2 - 8\right)}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

Moc wyższych harmonicznych równa się $P_{>1} = \frac{A^2 \cdot \left(\pi^2 - 8\right)}{4\pi^2}$.

Teraz można wyznaczyć udział mocy wyższych harmonicznych w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

$$\frac{P_{>1}}{P} = \frac{\frac{A^2 \cdot \left(\pi^2 - 8\right)}{4\pi^2}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{A^2 \cdot \left(\pi^2 - 8\right)}{4\pi^2} \cdot \frac{2}{A^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} =\approx 9\% \tag{2.88}$$

Zadanie 3. Współczynniki rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera pewnego rzeczywistego sygnału okresowego wynoszą:

$$F_k = \frac{A}{\jmath \cdot k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \wedge k > 0 \tag{2.89}$$

Wyznacz wartość średnią sygnału ($\bar{f}$) wiedząc, że wartość skuteczna $U = \frac{A\sqrt{6}}{60}$. W trakcie onliczeń wykorzystaj wiedzę, że:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{2.90}$$

Z teorii wiemy, że:

$$F_0 = \bar{f}$$
$$U = \sqrt{P}$$

Dlatego, aby wyznaczyć wartość średnią $\bar{f}$ musimy obliczyć wartość współczynnika F_0. Niestety znamy wartości F_k ale tylko dla $k > 0$.

Jednakże, z twierdzenia Parsevala wiemy, że moc sygnału to:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \tag{2.91}$$

Powyższe równanie można przepisać jako:

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\
P &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k|^2 + |F_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= P - \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2
\end{aligned}$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_k| = |F_{-k}|$, dlatego:

$$\begin{aligned}
|F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= P - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2
\end{aligned}$$

Teraz możemy już wyliczyć F_0:

$$
\begin{aligned}
|F_0|^2 &= P - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= U^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= \left(\frac{A\sqrt{6}}{60}\right)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{A}{\jmath \cdot k^2 \cdot 4 \cdot pi^2}\right|^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2 \cdot 6}{3600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{A}{\jmath \cdot k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2}\right|^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2}\right)^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^2}{k^4 \cdot 16 \cdot \pi^4} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \frac{A^2}{16 \cdot \pi^4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - \frac{A^2}{8 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{90} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - \frac{A^2}{720} \\
|F_0|^2 &= \frac{720 \cdot A^2}{600 \cdot 720} - \frac{600 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{720 \cdot A^2 - 600 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{120 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{5 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{3600} \\
|F_0| &= \sqrt{\frac{A^2}{3600}} \\
|F_0| &= \frac{A}{60} \\
F_0 &= \pm\frac{A}{60}
\end{aligned}
$$

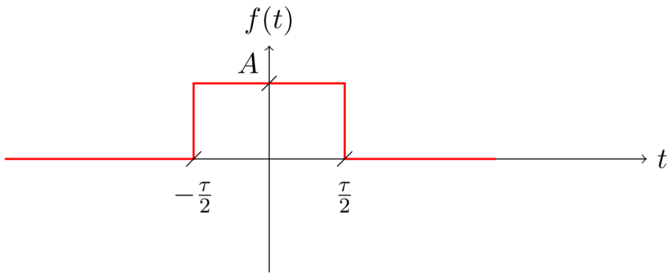
Wartość średnia wynosi $\bar{f} = \pm\frac{A}{60}$.

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \tag{3.1}$$

Co można wyrazić jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \left(-\infty; -\frac{\tau}{2}\right) \\ A & \text{dla } t \in \left(-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{dla } t \in \left(\frac{\tau}{2}; \infty\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.3}$$

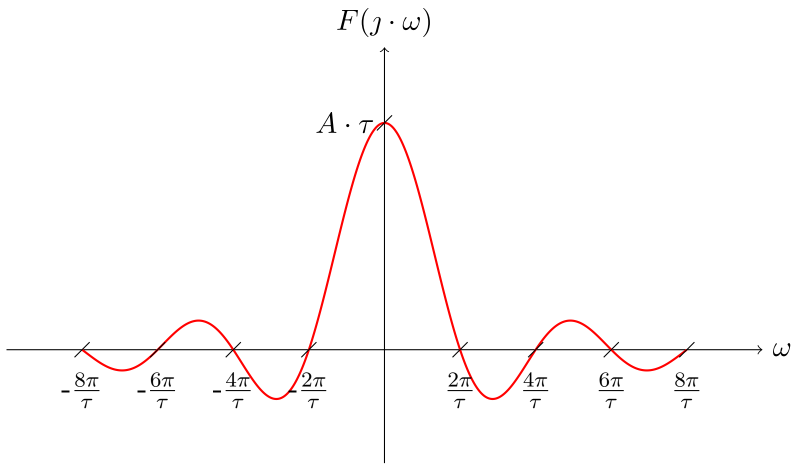
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau}) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z & = -\jmath \cdot \omega \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \omega \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot dz \end{matrix} \right\} = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{z} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{z}|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= A \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= \frac{A}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-\frac{\tau}{2})}\right) = \\
&= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot\frac{\tau}{2}} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{\tau}{2}}\right) = \\
&= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) = \\
&= \left\{ \frac{sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\
&= A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)$.

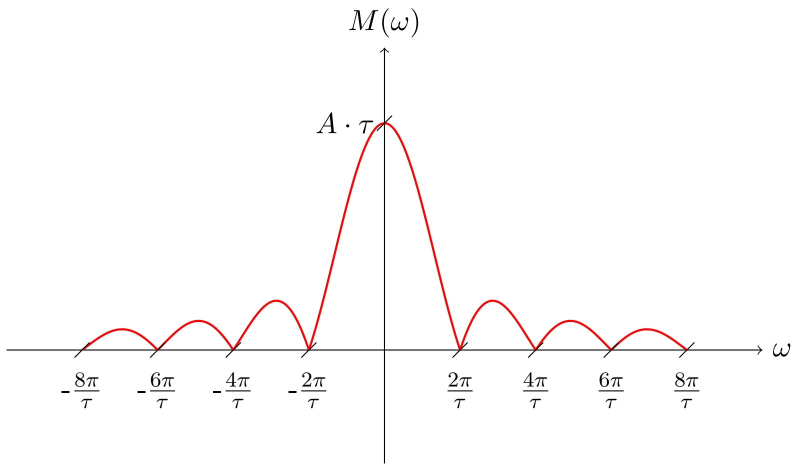
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) \tag{3.4}$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

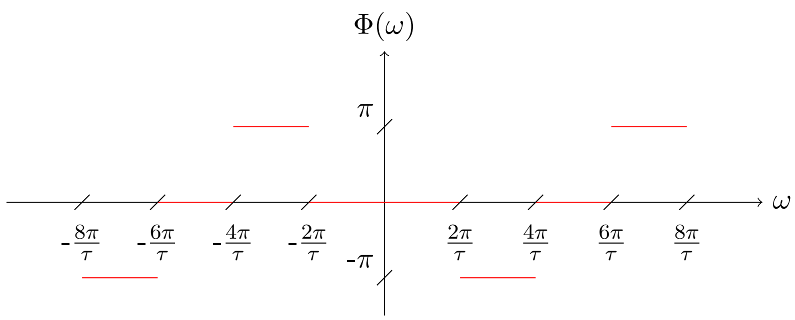
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.5}$$



Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

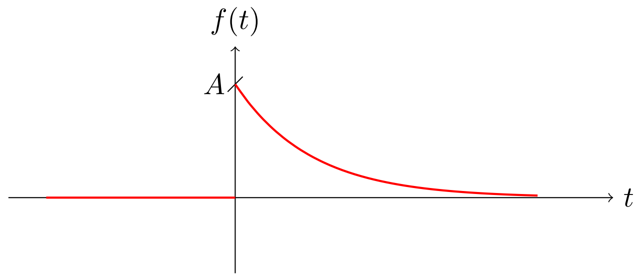
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}\right) \tag{3.6}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.7}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.8}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot t \\ dz & = -(a + \jmath \cdot \omega) \cdot dt \\ dt & = \frac{1}{-(a+\jmath \cdot \omega)} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A \cdot \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{z}\Big|_{0}^{\tau} = \\
&= \frac{A}{-(a + \jmath \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \to \infty} e^{-(a+\jmath \cdot \omega) \cdot t}\Big|_{0}^{\tau} =
\end{aligned}$$

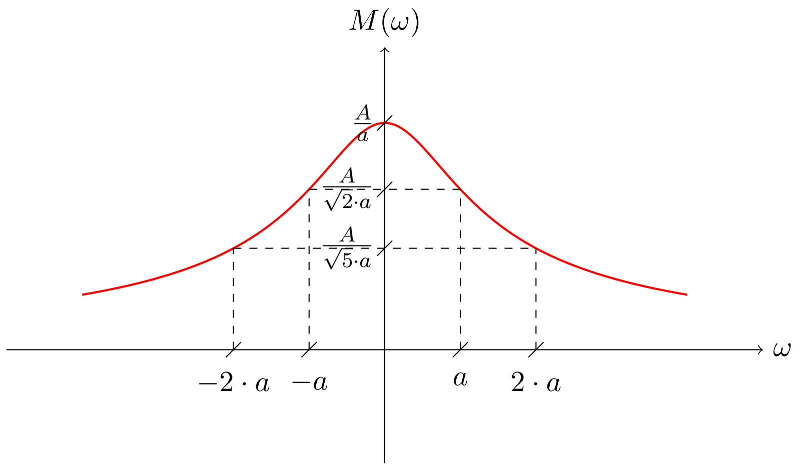
$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{0}\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-(a+\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau+\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{-a\cdot\tau}\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{\jmath\cdot\omega\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{A}{-(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot(0-1)= \\
&= \frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{A}{a+\jmath\cdot\omega}$.
Wyznaczmy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}= \\
&= \frac{A}{(a+\jmath\cdot\omega)}\cdot\frac{(a-\jmath\cdot\omega)}{(a-\jmath\cdot\omega)}= \\
&= \frac{A\cdot(a-\jmath\cdot\omega)}{(a^2+\omega^2)}= \\
&= \frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}-\jmath\cdot\frac{A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

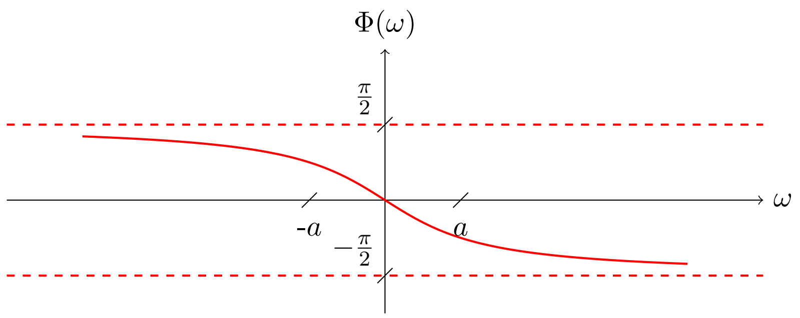
$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)|= \\
&= \sqrt{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)^2+\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)^2}= \\
&= \sqrt{\frac{A^2\cdot(a^2+\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}}= \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2+\omega^2)}}= \\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}
\end{aligned}
$$



Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

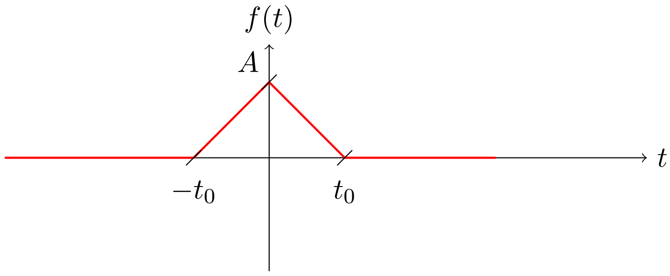
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= arctg(\frac{Im\{F(\jmath\omega)\}}{Re\{F(\jmath\omega)\}}) = \\ &= arctg\left(\frac{\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\right)}{\left(\frac{A\cdot a}{(a^2+\omega^2)}\right)}\right) = \\ &= arctg\left(\frac{-A\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)}\cdot\frac{(a^2+\omega^2)}{A\cdot a}\right) = \\ &= arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.9}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.10}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$.

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.11}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = m \cdot t_0 \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.12}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$+A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)=$$

$$-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}-\int_0^{t_0}\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\cdot dt\right)=$$

$$+A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-(-t_0)\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}+\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)\right)=$$

$$+\frac{A}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)=$$

$$-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}+\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right)\right)=$$

$$+\frac{A}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(0-t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right)=$$

$$-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(1-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)=$$

$$-\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0-\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\right)=$$

$$-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-1\right)=$$

$$=-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}=$$

$$+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}-\frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{\jmath\cdot\omega}=$$

$$=-\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}+\frac{A}{t_0\cdot\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)=$$

$$=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}-\frac{A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)=$$

$$=\left\{cos(x)=\tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}=$$

$$=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}-\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot cos(\omega\cdot t_0)=$$

$$=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot(1-cos(\omega\cdot t_0))=$$

$$=\begin{Bmatrix}sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos(2\cdot x)\\ cos(2\cdot x)=1-2\cdot sin^2(x)\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{2\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot(1-1+2\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2}))=$$

$$=\frac{4\cdot A}{t_0\cdot\omega^2}\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})=$$

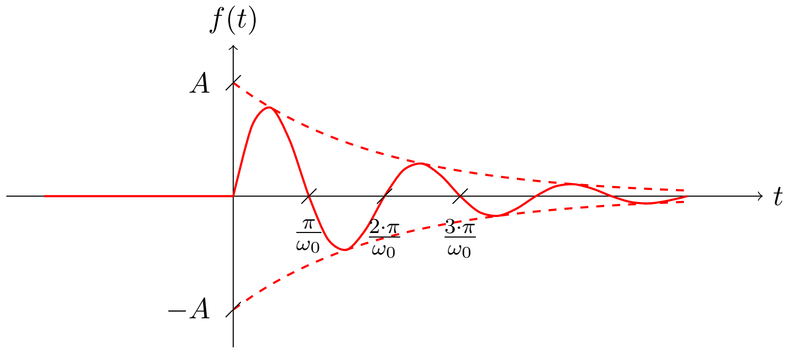
$$=\frac{A\cdot t_0}{\frac{t_0^2\cdot\omega^2}{4}}\cdot sin^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})=$$

$$=\left\{\tfrac{sin(x)}{x}=Sa(x)\right\}=$$

$$=A\cdot t_0\cdot Sa^2(\frac{\omega\cdot t_0}{2})$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$.

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.13}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.14}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot \left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot\jmath} \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= 0 + \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{-a\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \left(\int_{0}^{\tau} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt - \int_{0}^{\tau} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{lcllcl} z &=& (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t & w &=& (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t \\ dz &=& (-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt & dw &=& (-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot dt \\ dt &=& \frac{1}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dz & dt &=& \frac{1}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot dw \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot \frac{dz}{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} - \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\cdot\jmath} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot \frac{dw}{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{z} \cdot dz - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{w} \cdot dw = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{z}\big|_0^{\tau} - \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{w}\big|_0^{\tau} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau\to\infty} e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^{\tau} +
\end{aligned}$$

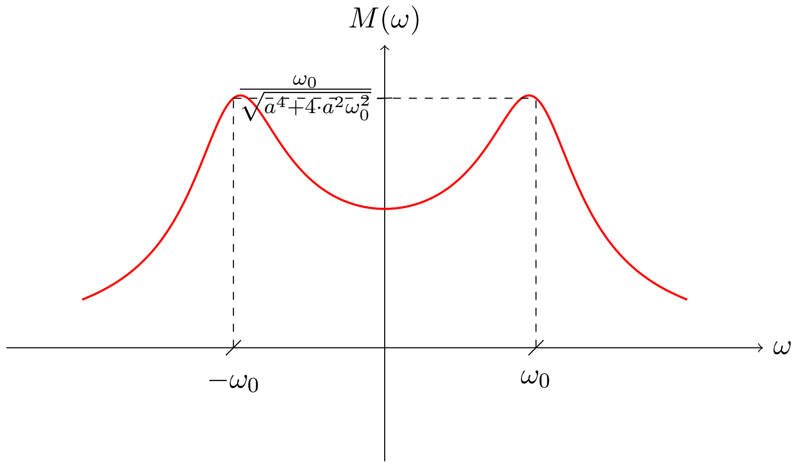
$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty} e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^\tau \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)+ \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-e^{(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 0}\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)+ \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}\right)-\lim_{\tau\to\infty}1\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)+ \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(\lim_{\tau\to\infty}(e^{-a\cdot\tau})\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)+ \\
&- \frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}\cdot\left(0\cdot\lim_{\tau\to\infty}e^{(-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot\tau}-1\right)= \\
&= \frac{-1}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}+\frac{1}{2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}= \\
&= \frac{-(2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega))+2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}{2\cdot\jmath\cdot(-a+\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)\cdot 2\cdot\jmath\cdot(-a-\jmath\cdot\omega_0-\jmath\cdot\omega)}= \\
&= \frac{2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0+2\cdot\jmath^2\cdot\omega-2\cdot\jmath\cdot a+2\cdot\jmath^2\cdot\omega_0-2\cdot\jmath^2\cdot\omega}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+a\cdot\jmath\cdot\omega_0+a\cdot\jmath\cdot\omega-a\cdot\jmath\cdot\omega_0-\jmath^2\cdot\omega_0^2-\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+a\cdot\jmath\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega_0\cdot\omega+\jmath^2\cdot\omega^2)}= \\
&= \frac{4\cdot\jmath^2\cdot\omega_0}{4\cdot\jmath^2\cdot(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\jmath^2\cdot\omega_0^2+\jmath^2\cdot\omega^2)}= \\
&= \frac{\omega_0}{a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+\omega_0^2-\omega^2}= \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2)}= \\
&= \frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}$.

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(a+\jmath\cdot\omega)^2}\right| = \\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega+(\jmath\cdot\omega)^2}\right| = \\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2+a^2+2\cdot a\cdot\jmath\cdot\omega-\omega^2}\right| = \\
&= \left|\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega}\right| = \\
&= \left\{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right\} = \\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2-\omega^2+a^2+\jmath\cdot 2\cdot a\cdot\omega|} =
\end{aligned}
$$

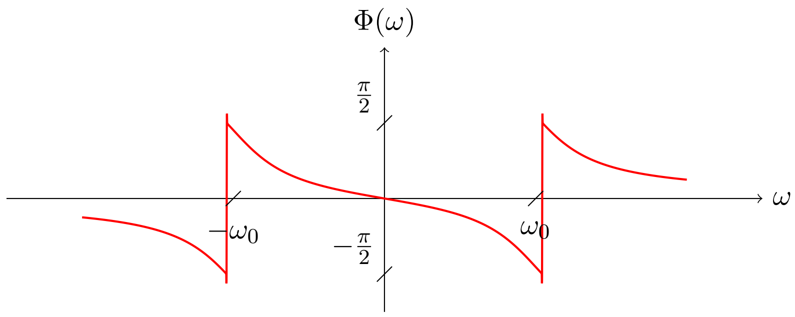
$$= \left\{ |a + \jmath \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} =$$
$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \omega\right)^2}}$$



Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

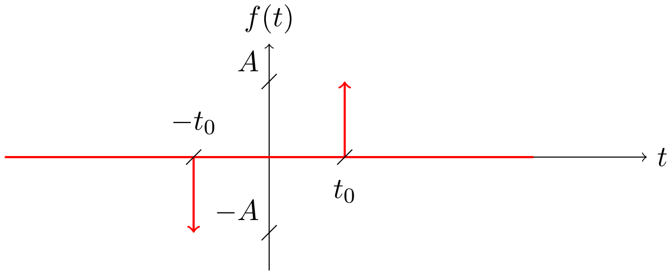
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + \jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega + (\jmath \cdot \omega)^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \jmath \cdot \omega - \omega^2}\right) = \\
&= arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega}\right) = \\
&= \left\{ arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) = arg\left(z_1\right) - arg\left(z_2\right) \right\} = \\
&= arg\left(\omega_0\right) - arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + \jmath \cdot 2 \cdot a \cdot \omega\right) = \\
&= \left\{ arg\left(a + \jmath \cdot b\right) = arctg(\tfrac{b}{a}) \right\} = \\
&= arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= arctg\left(0\right) - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= -arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \tag{3.15}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.16}$$

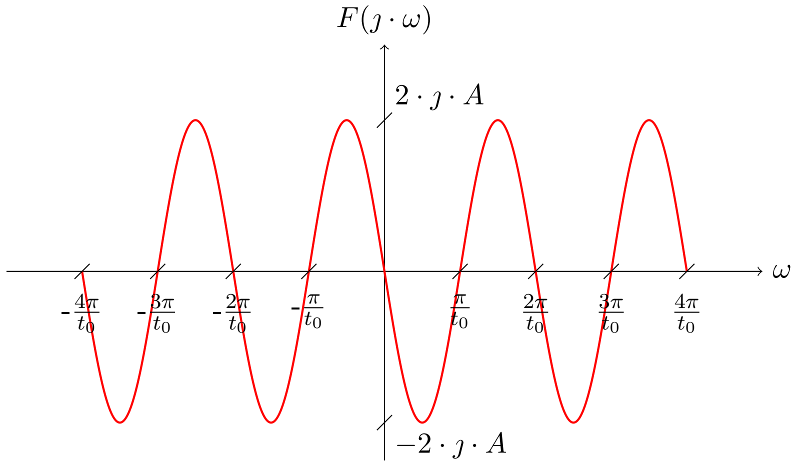
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= -A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0)$.

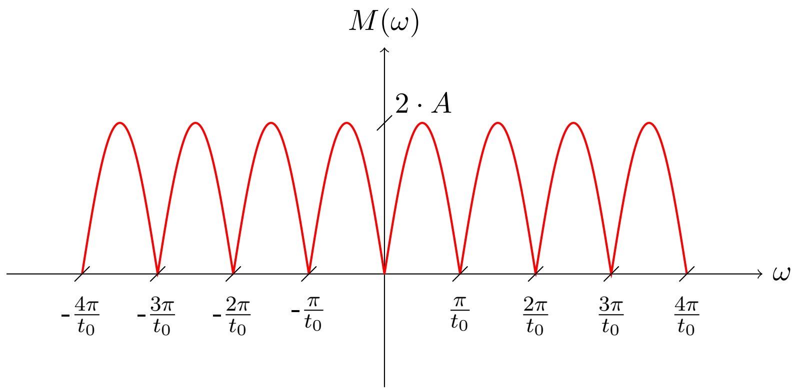
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = -2 \cdot \jmath \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0) \tag{3.17}$$



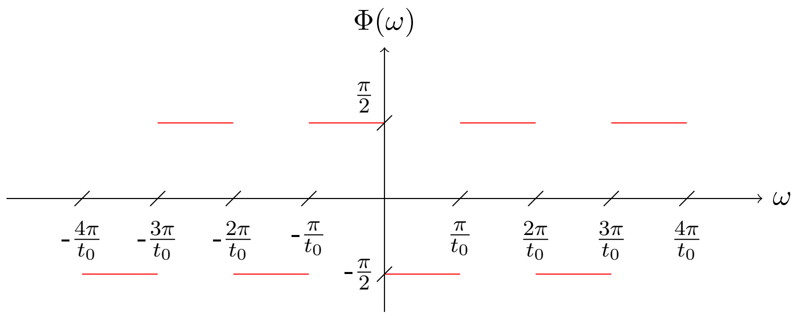
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= |F(j \cdot \omega)| \\ &= \sqrt{(-2 \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t_0))^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot A^2 \cdot sin^2(\omega \cdot t_0)} \\ &= 2 \cdot A \cdot |sin(\omega \cdot t_0)| \end{aligned}$$

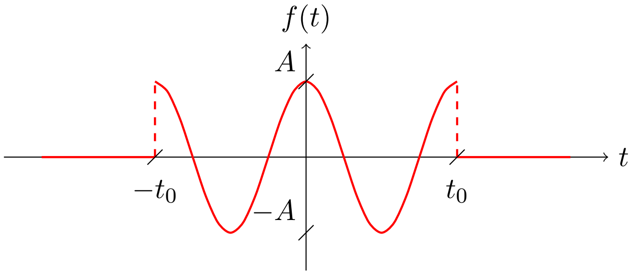


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}\right) \tag{3.18}$$


$\Phi(\omega)$
$\frac{\pi}{2}$
ω
-$\frac{4\pi}{t_0}$
-$\frac{3\pi}{t_0}$
-$\frac{2\pi}{t_0}$
-$\frac{\pi}{t_0}$
$\frac{\pi}{t_0}$
$\frac{2\pi}{t_0}$
$\frac{3\pi}{t_0}$
$\frac{4\pi}{t_0}$
-$\frac{\pi}{2}$

Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.19}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.20}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ cos(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cdot t - \jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} z_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t & z_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = \jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt & dz_2 = -\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{matrix} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{z_1}|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{z_2}|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} \right) =$$

$$= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) =$$

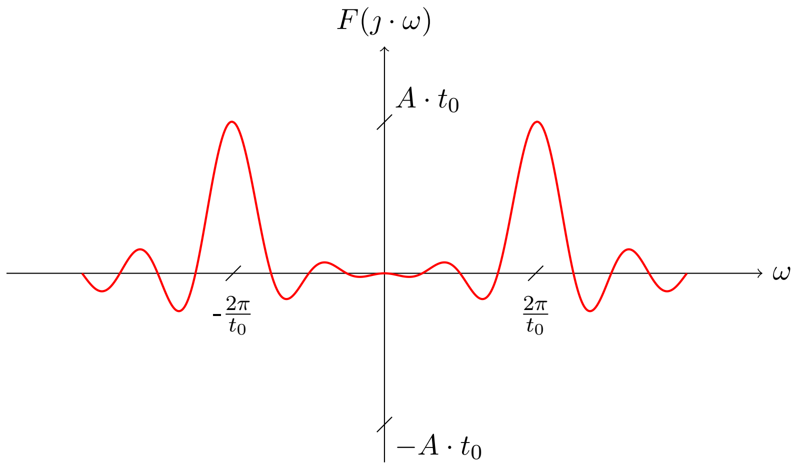
$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \cdot sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) =$$
$$= \left\{ Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \right\} =$$
$$= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) =$$
$$= A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right)$$

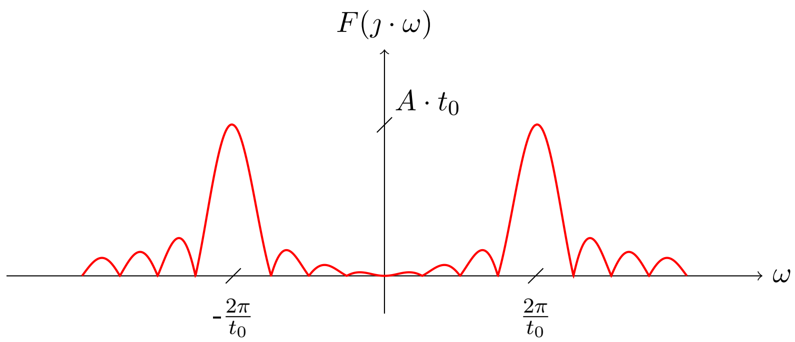
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right)$.
Narysujmy widmo sygnału $f(t$ czyli:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) \tag{3.21}$$



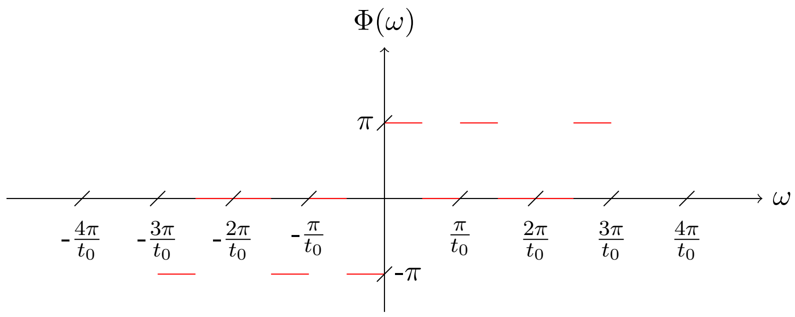
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \tag{3.22}$$



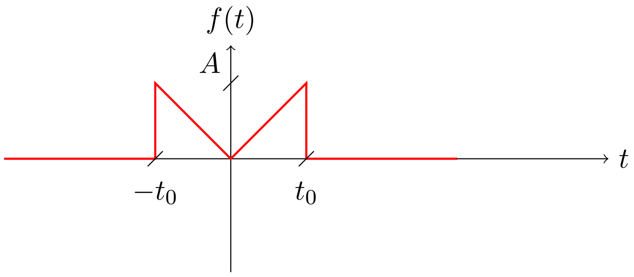
Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}\right) \tag{3.23}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.24}$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$.

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.25}$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (t_0, A). Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla} \quad t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla} \quad t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla} \quad t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.26}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

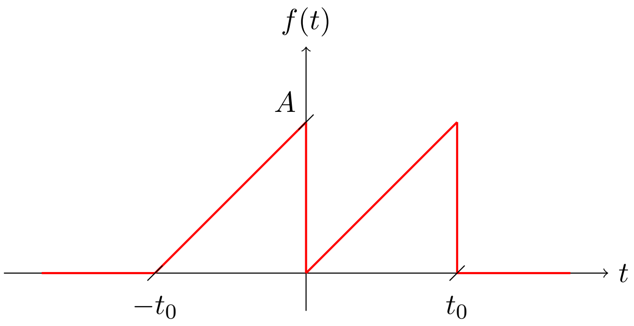
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&+ \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= \begin{Bmatrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \end{Bmatrix} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} - \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \Big|_{0}^{t_0} - \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0}\cdot\left(0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - (-t_0)\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)\right) +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} + \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\left(\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right)\right) =\\
&= -\frac{A}{t_0}\cdot\left(0 - t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right) +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 0 - \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\right) =\\
&= \frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right) +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\left(-t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{0}\right)\right) =\\
&= \frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(1 - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right) +\\
&- \frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 1\right)\right) =\\
&= \frac{A}{t_0}\cdot t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(1 - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right) +\\
&- \frac{A}{t_0}\cdot t_0\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 1\right) =\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(1 - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right) - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 1\right) =\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2} =\\
&= \frac{2\cdot A}{2\cdot\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2} + \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} =\\
&= \frac{2\cdot A}{\omega}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} +\\
&+ 2\cdot\frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) =\\
&= \frac{2\cdot A}{\omega}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot\left(2 - \frac{2}{2}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)\right) =\\
&= \frac{2\cdot A}{\omega}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} +\\
&+ \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{\jmath^2\cdot\omega^2}\cdot\left(2 - 2\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2}\right) =\\
&= \left\{\begin{matrix} \sin(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \\ \cos(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2} \end{matrix}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) =$$
$$= \left\{sin^2\left(x\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot cos\left(2 \cdot x\right)\right\} =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} =$$
$$= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0}\right)^2 =$$
$$= \left\{Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} =$$
$$= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$.

Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.27}$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.28}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A\right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-t_0} 0dt + \int_{-t_0}^{0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{0} A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^{0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{0}^{t_0} t \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \\ du & = dt & v & \frac{1}{-\jmath\cdot\omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{-t_0}^{0} + \int_{-t_0}^{0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) + \\
&+ A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \Big|_{0}^{t_0} + \int_{0}^{t_0} \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left(0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0} + t_0 \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} \right) + \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) + \\
&+ A \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt +
\end{aligned}$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)+\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_0^{t_0}e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\cdot dt\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} z & =-\jmath\cdot\omega\cdot t\\ dz & =-\jmath\cdot\omega\cdot dt\\ dt & =\frac{dz}{-\jmath\cdot\omega}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(\left(0+t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)+\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_{-t_0}^{0}e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot\omega}\right)+$$

$$+A\cdot\int_{-t_0}^{0}e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot\omega}+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-0\right)+\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_0^{t_0}e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot\omega}\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_{-t_0}^{0}e^{z}\cdot dz\right)+$$

$$+A\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_{-t_0}^{0}e^{z}\cdot dz+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot\int_0^{t_0}e^{z}\cdot dz\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot e^{z}\big|_{-t_0}^{0}\right)+$$

$$-A\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{z}\big|_{-t_0}^{0}+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot e^{z}\big|_{0}^{t_0}\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}\right)+$$

$$-A\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-t_0}^{0}+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t}\Big|_{0}^{t_0}\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)\right)+$$

$$-A\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)}\right)+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot 0}\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{0}-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)\right)+$$

$$-A\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(e^{0}-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot\left(t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-e^{0}\right)\right)=$$

$$=\frac{A}{t_0}\cdot t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(1-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)+$$

$$-A\cdot\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\left(1-e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right)+$$

$$+\frac{A}{t_0}\cdot t_0\cdot\frac{1}{-\jmath\cdot\omega}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}+\frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{-1\cdot\omega^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}-1\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(1 - e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) + \\
&- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} + \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \\
&- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - 1\right) = \\
&= -\frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} + \\
&- \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} = \\
&= \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) - \frac{A}{\jmath \cdot \omega}\left(1 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= \frac{A \cdot 2 \cdot \jmath}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} - \frac{A}{\jmath \cdot \omega}\left(1 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega}\left(1 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(\jmath\omega) = \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega}\left(1 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)$.
Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$ czyli:

$$
M\left(\omega\right) = \left|F(\jmath\omega)\right| \tag{3.29}
$$

Podstawmy wzór na obliczoną transformatę Fouriera.

$$
\begin{aligned}
M\left(\omega\right) &= \left|F(\jmath\omega)\right| = \\
&= \left|\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega}\left(1 + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right)\right| = \\
&= \left\{ e^{\jmath \cdot x} = cos\left(x\right) + \jmath \cdot sin\left(x\right) \right\} = \\
&= \left|\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega}\left(1 + cos\left(-\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot sin\left(-\omega \cdot t_0\right)\right)\right| = \\
&= \left|\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega}\left(1 + cos\left(\omega \cdot t_0\right) - \jmath \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)\right)\right| = \\
&= \left|\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \frac{A}{\omega} + \jmath \cdot \frac{A}{\omega} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right) - \jmath \cdot \frac{A}{\omega} \cdot \jmath \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)\right| = \\
&= \left|\jmath \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{\omega} + \frac{A}{\omega} \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right) + \frac{A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)\right| = \\
&= \left|\frac{A}{\omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \frac{A}{\omega} \cdot \left(1 + cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)\right)\right| = \\
&= \left|\frac{A}{\omega} \cdot \left(sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + 1 + cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)\right)\right| = \\
&= \left|\frac{A}{\omega}\right| \cdot \left|sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \jmath \cdot \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + 1 + cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)\right| = \\
&= \frac{A}{\left|\omega\right|} \cdot \sqrt{sin^2\left(\omega \cdot t_0\right) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + 1 + cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Wyznaczmy gdzie znajdują się miejsca zerowe modułu transformaty Fouriera

$$M(w) = \frac{A}{|\omega|} \cdot \sqrt{sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t_0) + 1 + cos(\omega \cdot t_0)\right)^2} = 0 \parallel \cdot \frac{|\omega|}{A}$$
$$\sqrt{sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t_0) + 1 + cos(\omega \cdot t_0)\right)^2} = 0 \parallel (\cdot)^2$$
$$sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t_0) + 1 + cos(\omega \cdot t_0)\right)^2 = 0$$

Suma kwadratów może być równa zero wtedy i tylko wtedy gdy oba czynniki sa równe zero a wiec:

$$sin^2(\omega \cdot t_0) = 0$$
$$sin(\omega \cdot t_0) = 0$$
$$sin(\omega \cdot t_0) = sin(\pi \cdot k)$$
$$\omega \cdot t_0 = \pi \cdot k$$
$$\omega = \frac{\pi}{t_0} \cdot k$$

oraz

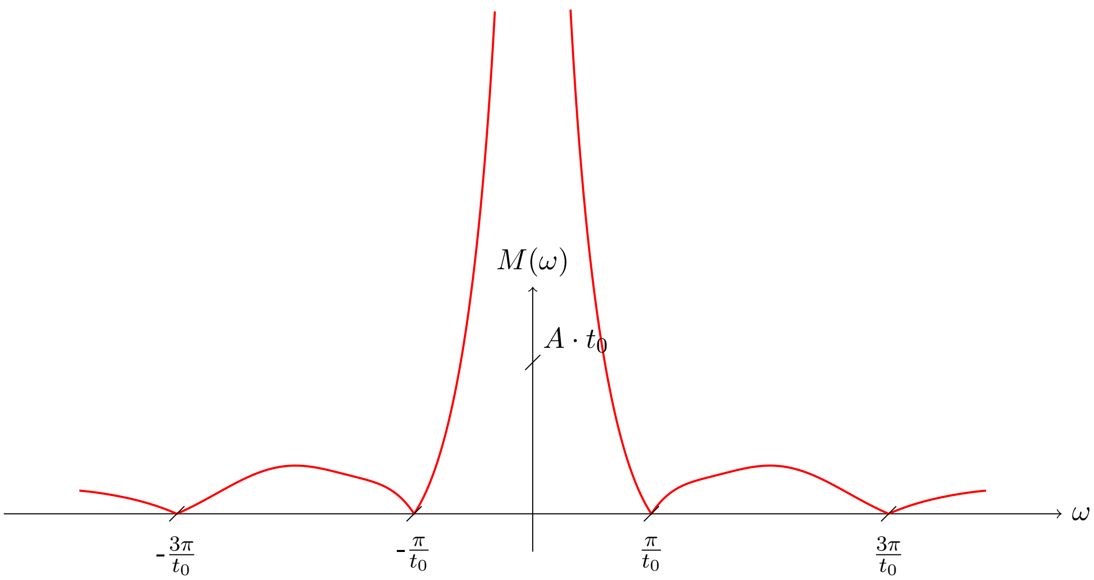
$$\left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t_0) + 1 + cos(\omega \cdot t_0)\right)^2 = 0$$
$$\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t_0) + 1 + cos(\omega \cdot t_0) = 0$$
$$\left\{\begin{matrix} 1 + cos(x) = 2 \cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \end{matrix}\right\}$$
$$2 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = 0$$

Ponownie suma funkcji może być zerem wtedy i tylko wtedy gdy obie sa równe zero a wiec

$$2 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) = 0$$
$$Sa(\omega \cdot t_0) = 0$$
$$Sa(\omega \cdot t_0) = Sa(\pi \cdot k)$$
$$\omega \cdot t_0 = \pi \cdot k$$
$$\omega = \frac{\pi}{t_0} \cdot k$$

$$2 \cdot cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = 0$$
$$cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = 0$$
$$cos\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = 0$$
$$cos\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$$
$$\frac{\omega \cdot t_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$$
$$\omega \cdot t_0 = \pi + 2 \cdot \pi \cdot k$$
$$\omega = \frac{\pi + 2 \cdot \pi \cdot k}{t_0}$$

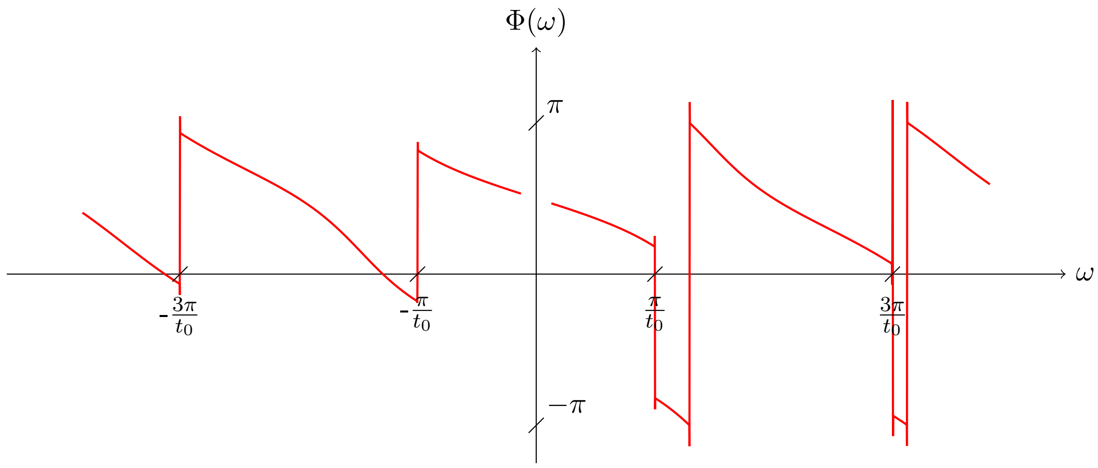
A wiec ostatecznie miejsca zerową znajdują się w miejscach: $\omega = \frac{\pi+2\cdot\pi\cdot k}{t_0}$A wiec widmo amplitudowe wygląda następująco



Widmo aplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

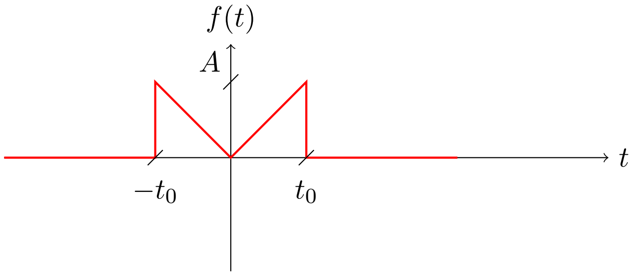
$$\Phi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\{F(\jmath \cdot \omega)\}}{Re\{F(\jmath \cdot \omega)\}}\right) \tag{3.30}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \left(\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \tag{3.31}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = A \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \tag{3.32}$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right)$$
$$f_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2 \cdot t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2 \cdot t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2 \cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot t_0}{2}\right)$$

$$\Pi(\frac{t}{2\cdot t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\cdot t_0\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 2\cdot t_0\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right) \tag{3.33}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha\cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|}\cdot Sa^2\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Lambda(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

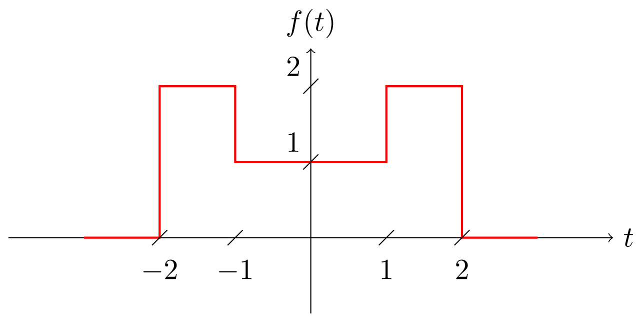
$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = t_0\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right) \tag{3.34}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A\cdot\left(2\cdot t_0\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right) - t_0\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = A\cdot\Pi\left(\frac{t}{2\cdot t_0}\right) - A\cdot\Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = 2\cdot A\cdot t_0\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right) - A\cdot t_0\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\cdot t_0}{2}\right)$.

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Podaj co najmniej 2 sposoby opisu sygnału $f(t)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \tag{3.35}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = 2 \cdot f_1(t) - f_2(t) \tag{3.36}$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$f_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{4}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{4}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) \tag{3.37}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = 2 \cdot Sa\left(\omega\right) \tag{3.38}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2 \cdot (4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right)) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right) = 8 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ to $F(\jmath\omega) = 8 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$.
Inne możliwości opisu sygnał $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$
$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

SPOSÓB II:

Rozważmy następujący opis sygnału $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Pi\left(\frac{t}{4}\right) \\ f_2(t) &= \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ f_3(t) &= \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\ f_1(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi(\frac{t}{4}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{4}}}{2}\right) \\ \Pi(\frac{t}{4}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right) \\ \Pi(\frac{t}{4}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) \tag{3.39}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = G(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} \tag{3.40}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $f_3(t)$, czyli $F_3(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_3(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(\jmath\omega) = G(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}$$
$$\Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_3(t)$ to:

$$F_3(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f_3(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} \tag{3.41}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} &= 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} = \\ &= 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} + e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}}\right) = \\ &= 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}} + e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{3}{2}}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} =$$
$$= 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot 2 \cdot cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$ to $F(\jmath\omega) = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)$.

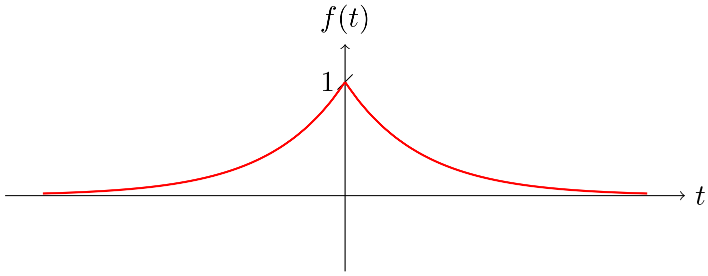
Uwagi końcowe:

Rozwiązania uzyskane sposobem I i II to odpowiednio:

$$F(\jmath\omega) = 8 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) - 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$
$$F(\jmath\omega) = 4 \cdot Sa\left(2 \cdot \omega\right) + 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)$$

Można wykazać, że jest to ta sama transformata (mimo, iż uzyskane równania opisujące transformatę są różne).

Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = e^{-|t|}$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = \frac{A}{a+\jmath \cdot \omega}$.

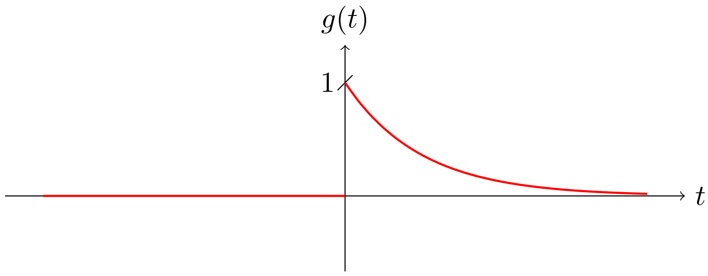


W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} e^{t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{3.42}$$

Oznaczmy sygnał $\mathbb{1}(t) \cdot e^{-t}$ jako $g(t)$:

$$g(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-t} \tag{3.43}$$



Teraz sygnał $f(t)$ możemy wyrazić jako liniową kombinację sygnałów $g(t)$ oraz $g(-t)$:

$$f(t) = g(t) + g(-t) \tag{3.44}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów.

Wyznaczmy transformtę sygnału $g(t)$, czyli $G(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że:

$$\mathcal{F}\{A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = \frac{A}{a + \jmath \cdot \omega} \tag{3.45}$$

Podstawiając $A = 1$ oraz $a = 1$ otrzymujemy wprost transformatę sygnału $g(t)$, czyli $G(\jmath\omega)$:

$$A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{a + \jmath \cdot \omega}$$
$$\left\{ \begin{matrix} A = 1 \\ a = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$g(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + \jmath \cdot \omega} = G(\jmath\omega)$$

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali, możemy obliczyć transformatę sygnału $g(-t)$:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

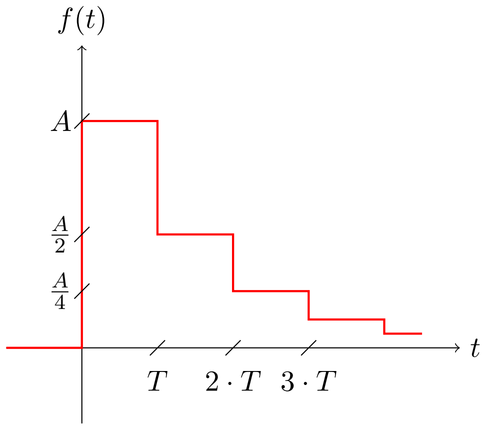
$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + \jmath \cdot \omega}$$
$$g(-1 \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{1 + \jmath \cdot \frac{\omega}{-1}}$$
$$g(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 - \jmath \cdot \omega}$$
$$g(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \jmath \cdot \omega}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{1 + \jmath \cdot \omega} + \frac{1}{1 - \jmath \cdot \omega}$$
$$F(\jmath\omega) = \frac{1 - \jmath \cdot \omega + 1 + \jmath \cdot \omega}{(1 + \jmath \cdot \omega) \cdot (1 - \jmath \cdot \omega)}$$
$$F(\jmath\omega) = \frac{2}{1 - \jmath^2 \cdot \omega^2}$$
$$F(\jmath\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Transformata sygnału $f(t) = e^{-|t|}$ to $F(\jmath\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzesuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowość transformaty fouriera

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

możemy napisać że:

$$F(\jmath\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega)$$

gdzie $H_n(\jmath\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zacznijmy od skali.

Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ = \Pi\left(\frac{1}{T}\cdot t\right) = \\ = g\left(\frac{1}{T}\cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}}\cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{1}{T}}\right) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}}\cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) = \\ &= T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$
Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\begin{aligned} h_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(\jmath\omega) \\ h(t) = h_n(t-t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = H_n(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(\jmath\omega) &= H(\jmath\omega)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\ &= T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot H_n(\jmath\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\left(\frac{T}{2}+n\cdot T\right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n}\cdot T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}T\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot\frac{A}{2^n}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot n\cdot T} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n =$$
$$= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

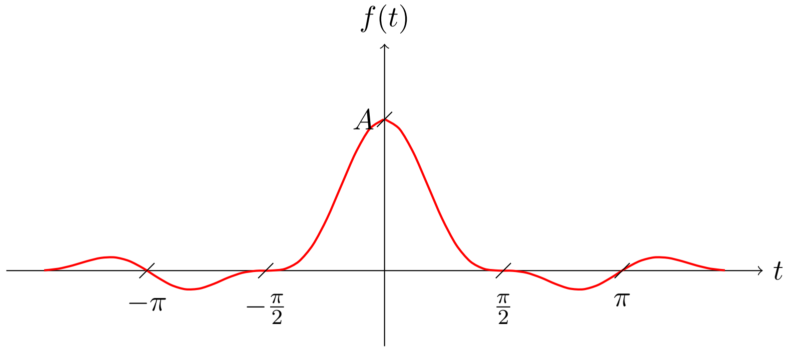
$$F(\jmath\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n =$$
$$= \left\{ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right\} =$$
$$= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(\jmath\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}$$

Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$..

$$f(t) = A \cdot \frac{cos^2(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} \cdot sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$$



Przepismy wzór naszej funkcji następująco

$$\begin{aligned}
f(t) &= A \cdot \frac{cos^2(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} \cdot sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\
&= A \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) \frac{sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} = \\
&= A \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) \frac{2 \cdot sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{2 \cdot \omega_0 \cdot t} = \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= A \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) \, 2 \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\
&= 2 \cdot A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)
\end{aligned}$$

Nasz sygnał jest iloczynem pewnej funkcji $h(t)$ oraz cosinusów

$$f(t) = 2 \cdot A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) =$$
$$f(t) = 2 \cdot A \cdot h(t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$$

gdzie

$$h(t) = Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $h(t)$. Z treści zadania wiemy że transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h(t)$, funkcja różni się skalą. Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) = \\ &= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{1}{T}}\right) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$ Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$h_n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(\jmath\omega)$$
$$h(t) = h_n(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = H_n(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(\jmath\omega) &= H(\jmath\omega) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \left(\frac{T}{2} + n \cdot T\right)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(\jmath\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \left(\frac{T}{2} + n \cdot T\right)} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot n \cdot T} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{A}{2^n} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot n \cdot T} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n
\end{aligned}
$$

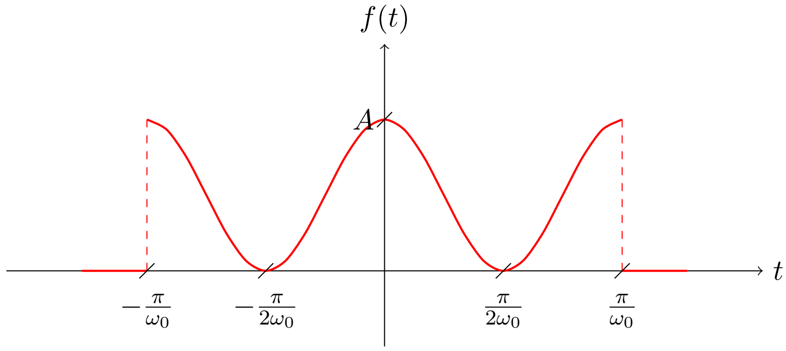
Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}\right)^n = \\
&= \left\{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\right\} = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$
F(\jmath\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot T}}
$$

Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Zacznijmy od napisania wzoru sygnału przedstawionego na rysunku

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{\omega_0}\right) \\ A \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) & t \in \left(-\frac{\pi}{\omega_0}; \frac{\pi}{\omega_0}\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{\pi}{\omega_0}; \infty\right) \end{cases}$$

Co możemy zapisać za pomocą sygnałów elementarnych jako

$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t)$$

Nasz sygnał jest iloczynem pewnej funkcji $h(t)$ oraz cosinusów

$$\begin{aligned} f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\ = A \cdot h(t) \cdot cos^2(\omega_0 \cdot t) = \end{aligned}$$

gdzie

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right)$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $h(t)$. Z treści zadania wiemy że transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h(t)$, funkcja różni się skalą. Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

a wiec otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) = \\ &= \Pi\left(t \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}\right) = \\ &= g\left(t \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

a więc

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) &= \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} \cdot G\left(\frac{\jmath\omega}{\frac{\omega_0}{2\pi}}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot G\left(\frac{\jmath\omega \cdot 2\pi}{\omega_0}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega \cdot 2\pi}{\omega_0}}{2}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right) \end{aligned}$$

A więc transformata sygnału $h(t)$ jest równa $H(\jmath\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right)$
Wróćmy do wzoru sygnału i przedstawmy go następująco

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot cos^2\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= A \cdot h(t) \cdot cos^2\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= A \cdot h(t) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= A \cdot k(t) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) = \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} k(t) &= h(t) \cdot cos\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\ &= \left\{cos\left(x\right) = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2}\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h(t)\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}=\\
&=\frac{1}{2}\left(h(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+h(t)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)
\end{aligned}
$$

Wyznaczmy transformatę sygnału $k(t)$. Korzystając z twierdzenia o modulacji mamy

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)\\
k(t)=h(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} K(\jmath\omega)=H(\jmath\,(\omega-\omega_0))
\end{aligned}
$$

a wiec transformata sygnału $k(t)$ wynosi:

$$
\begin{aligned}
K(\jmath\omega)&=\frac{1}{2}\left(H(\jmath\,(\omega-\omega_0))+H(\jmath\,(\omega+\omega_0))\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)=\\
&=\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Wróćmy do wzoru sygnału $f(t)$

$$
\begin{aligned}
f(t)&=A\cdot\Pi\left(\frac{t\cdot\omega_0}{2\pi}\right)\cdot cos^2\left(\omega_0\cdot t\right)=\\
&=A\cdot h(t)\cdot cos^2\left(\omega_0\cdot t\right)=\\
&=A\cdot h(t)\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)=\\
&=A\cdot k(t)\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)=\\
&=\left\{cos\left(x\right)=\tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}=\\
&=A\cdot k(t)\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}=\\
&=\frac{A}{2}\left(k(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+k(t)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)
\end{aligned}
$$

Znając transformatę sygnału $k(t)$ i korzystając z twierdzenia o modulacji możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

$$
\begin{aligned}
k(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} K(\jmath\omega)\\
f(t)=k(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)=K(\jmath\,(\omega-\omega_0))
\end{aligned}
$$

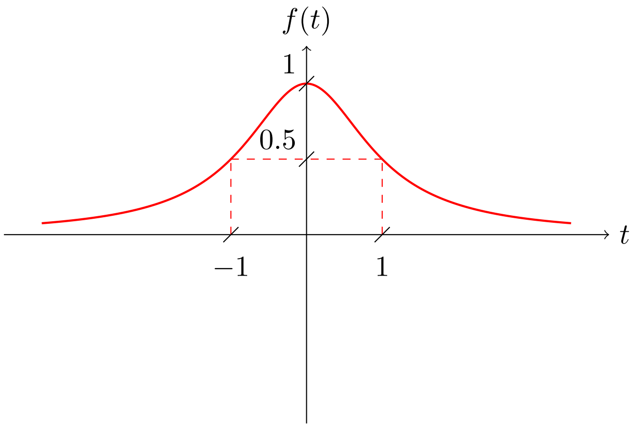
a więc transformata sygnału $f(t)$ wynosi

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega)&=\frac{A}{2}\left(K(\jmath\,(\omega-\omega_0))+K(\jmath\,(\omega+\omega_0))\right)=\\
&=\frac{A}{2}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-\omega_0-\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-\omega_0+\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+\omega_0-\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+\omega_0+\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\Bigg)=$$
$$=\frac{A}{2}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)=$$
$$=\frac{A}{2}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega-2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+2\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{\omega_0}\cdot Sa\left((\omega+2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)=$$
$$=\frac{A\cdot\pi}{2\cdot\omega_0}\left(Sa\left((\omega-2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+2\cdot Sa\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+Sa\left((\omega+2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(\jmath\omega)=\frac{A\cdot\pi}{2\cdot\omega_0}\left(Sa\left((\omega-2\cdot\omega_0)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+2\cdot Sa\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)+Sa\left((\omega+\right.\right.$

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$.



Z treści zadania wiemy, że:

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2} \tag{3.46}$$

Oznaczmy $g(t) = e^{-|t|}$ oraz $G(\jmath\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.
Na podstawie twierdzenia o symetrii możemy wyznaczyć następującą transformatę:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$h(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$$

$$\begin{aligned} H(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega) &= \\ = 2\pi \cdot e^{-|-\omega|} &= \\ = 2\pi \cdot e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

Niestety sygnał $h(t) = \frac{2}{1+t^2}$ nie jest równy sygnałowi $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, ale:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot h(t) \tag{3.47}$$

Z twierdzenia o liniowości transformaty możemy obliczyć:

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot H(\jmath\omega)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+t^2}$$

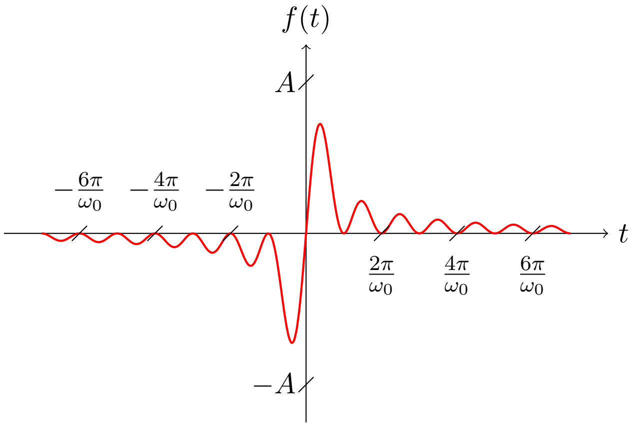
$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot e^{-|\omega|} =$$
$$= \pi \cdot e^{-|\omega|}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ jest równa $F(\jmath\omega) = \pi \cdot e^{-|\omega|}$.

Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right)$ wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{3.48}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.49}$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned}
f(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t\right) = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\
&= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \cdot \left(f_1(t) - f_2(t)\right)
\end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = G(\jmath\,(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$
$$g(t) = H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)$$

Tak wiec zacznijmy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczymy transformatę funkcji Sa.

$$h(t) = \Pi(t) \xrightarrow{F} H(\jmath\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$g_1(t) = H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{F} G_1(\jmath\omega) = 2\pi \cdot h(-\jmath\omega) = 2\pi \cdot \Pi\,(-\omega) = 2\pi \cdot \Pi\,(\omega)$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned}
g(t) &= Sa\,(\omega_0 \cdot t) = \\
&= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\
&= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) = \\
&= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) = \\
&= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} = \\
&= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) = \\
&= g_1(a \cdot t)
\end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)$$
$$g(t) = g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha}) = \\
&= \left\{\alpha = 2 \cdot \omega_0\right\} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot G_1(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}) = \\
&= \left\{G_1(\jmath\omega) = 2\pi\cdot\Pi\left(\omega\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\omega_0}\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Tak wiec transformata sygnału $g(t) = Sa\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)$
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\\
f_2(t) &= Sa\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)\\
f_1(t) = g(t)\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = G(\jmath\left(\omega-\omega_0\right))
\end{gathered}
$$

otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega-\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= G\left(\jmath\left(\omega+\omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

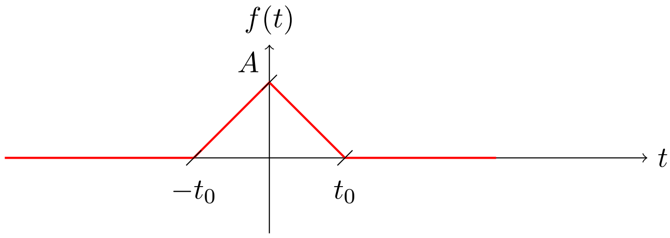
$$
\begin{gathered}
f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)\\
f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)\\
f(t) = \alpha\cdot f_1(t) + \beta\cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha\cdot F_1(\jmath\omega) + \beta\cdot F_2(\jmath\omega)
\end{gathered}
$$

otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0\cdot t\right)\cdot sin\left(\omega_0\cdot t\right)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+}{2\cdot}\right.\right.$

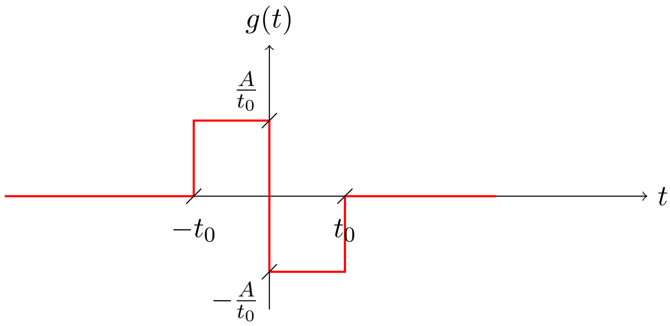
Zadanie 9. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.50}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{3.51}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.52}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.53}$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \tag{3.54}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów prostokątnych, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \tag{3.55}$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0})$$
$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0})$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{3.56}$$

Teraz wyznaczmy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(\jmath\omega)$.

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{t_0}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t - (\frac{t_0}{2})}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\frac{A}{t_0} \cdot \Pi(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \tag{3.57}$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = A \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) - A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\\
G(\jmath\omega) = A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right)\\
G(\jmath\omega) = A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right)\\
\left\{sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}\right\}\\
G(\jmath\omega) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)
\end{aligned}$$

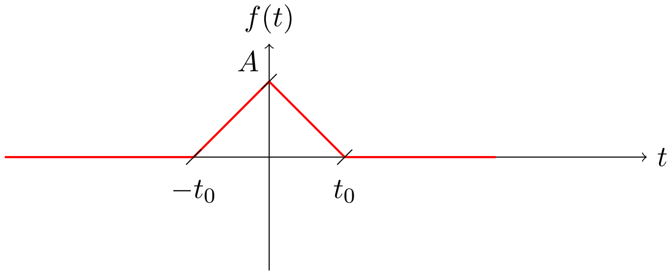
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) =\\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) =\\
&= \left\{\begin{array}{l}
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right)\\
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa(0) \cdot sin(0)\\
G(0) = A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot 1 \cdot 0\\
G(0) = 0
\end{array}\right\} =\\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) =\\
&= \left\{\tfrac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} =\\
&= \frac{A \cdot 2 \cdot t_0}{\omega \cdot t_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) =\\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) =\\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

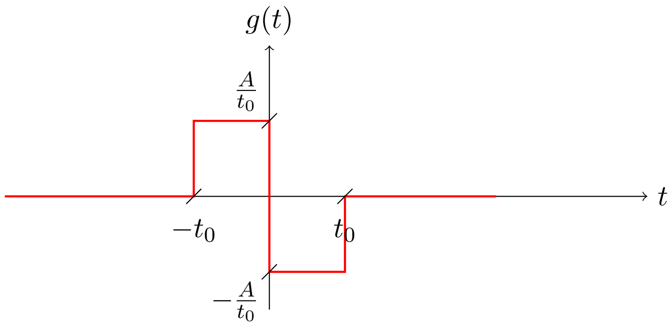
Zadanie 10. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj wiedzę o właściwościach próbkujących delty Diraca.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0}) \tag{3.59}$$

Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

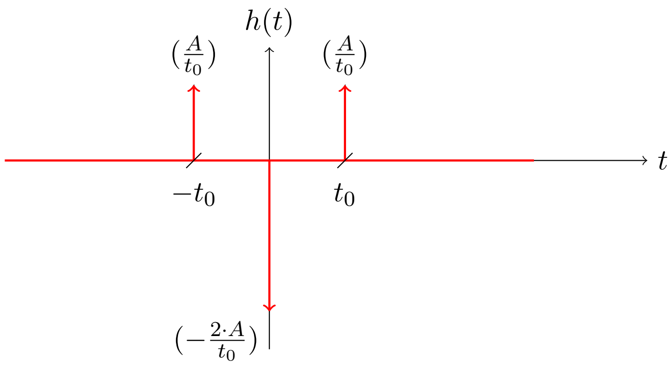
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.60}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.61}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{3.62}$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{3.63}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $h(t)$ otrzymamy sygnał $g(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x) \cdot dx \tag{3.64}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $g(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $h(t)$:

$$G(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \tag{3.65}$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \tag{3.66}$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = & \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (-t_0))\right\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t - (t_0))\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \end{array}\right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - 2 + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{cos(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= \frac{A}{t_0}\cdot(2\cdot cos(\omega\cdot t_0)-2) = \\
&= \frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1)
\end{aligned}
$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$H(\jmath\omega) = \frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1) \tag{3.67}$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę $G(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot H(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot H(0) = \\
&= \left\{\begin{array}{l}
H(0) = \frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(cos(0\cdot t_0)-1) \\
H(0) = \frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(cos(0)-1) \\
H(0) = \frac{2\cdot A}{t_0}\cdot(1-1) \\
H(0) = 0
\end{array}\right\} = \\
&= \frac{2\cdot A}{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1)
\end{aligned}
$$

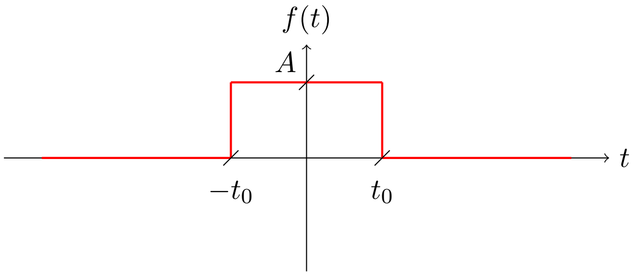
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\frac{2\cdot A}{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0) = \\
&= \left\{\begin{array}{l}
G(0) = \frac{2\cdot A}{\jmath\cdot 0\cdot t_0}\cdot(cos(0\cdot t_0)-1) \\
G(0) = \frac{0}{0}!!! \\
G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot dt = \int_{-t_0}^{0}\frac{A}{t_0}\cdot dt+\int_{0}^{t_0}(-\frac{A}{t_0})\cdot dt \\
G(0) = \frac{A}{t_0}\cdot(0-(-t_0))-\frac{A}{t_0}\cdot(t_0-0) = A-A \\
G(0) = 0
\end{array}\right\} = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\frac{2\cdot A}{\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1) = \\
&= \frac{2\cdot A}{\jmath^2\cdot\omega^2\cdot t_0}\cdot(cos(\omega\cdot t_0)-1) = \\
&= \frac{2\cdot A}{\omega^2\cdot t_0}\cdot(1-cos(\omega\cdot t_0)) = \\
&= \left\{\begin{array}{l}
sin^2(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos(2\cdot x) \\
cos(2\cdot x) = 1-2\cdot sin^2(x)
\end{array}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot sin^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = \\
&= \left\{\frac{sin(x)}{x} = Sa(x)\right\} = \\
&= A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 11. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



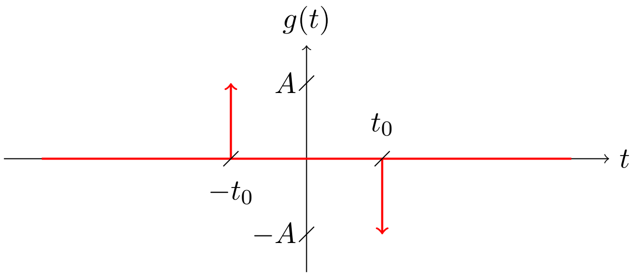
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.68}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.69}$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.70}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.71}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= A \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - A \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{2\cdot\jmath}{2\cdot\jmath} = \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2\cdot\jmath} = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= A \cdot 2 \cdot \jmath \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) = \\
&= \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(\jmath\omega) = \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

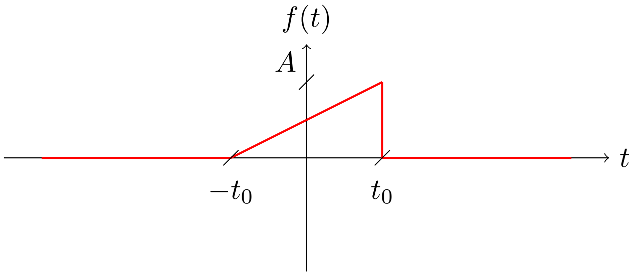
$$
\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{gathered}
$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $G(\jmath\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(\jmath\omega)$ sygnału $f(t)$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega} \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(0 \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(0\right) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot \jmath \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} + 0 = \\
&= \left\{ Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$.

Zadanie 12. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.
W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$
Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.72}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz (t_0, A). Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = \frac{b}{t_0} \cdot t_0 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = 2 \cdot b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{A}{2 \cdot t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

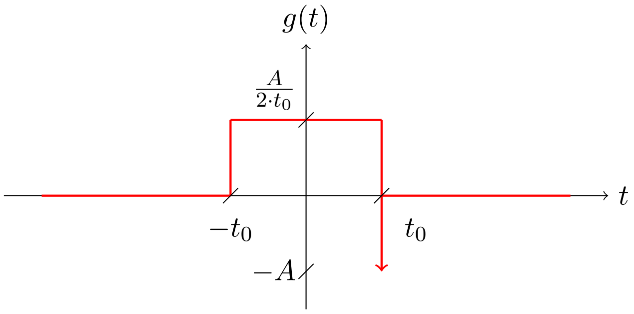
$$f(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2}$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0}\cdot t + \frac{A}{2} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.73}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - A\cdot\delta(t - t_0) \tag{3.74}$$

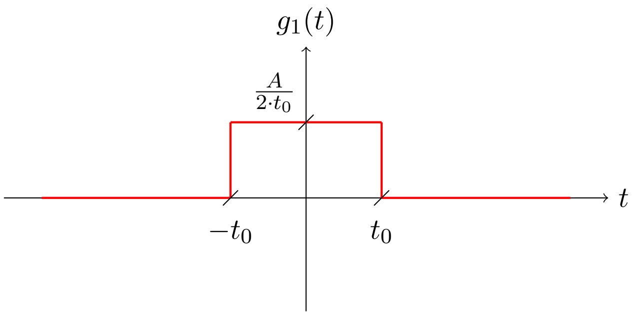


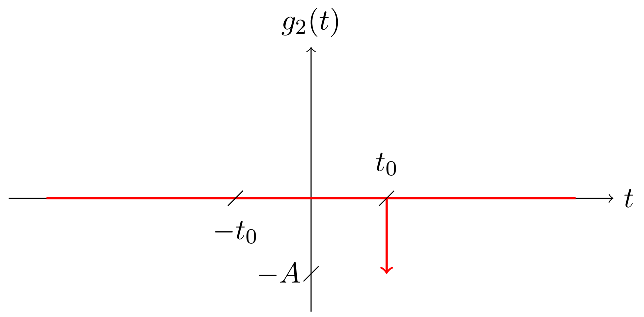
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{3.75}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2\cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.76}$$

$$g_2(t) = -A\cdot\delta(t - t_0) \tag{3.77}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delty diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.78}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= -A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= -A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}
\end{aligned}$$

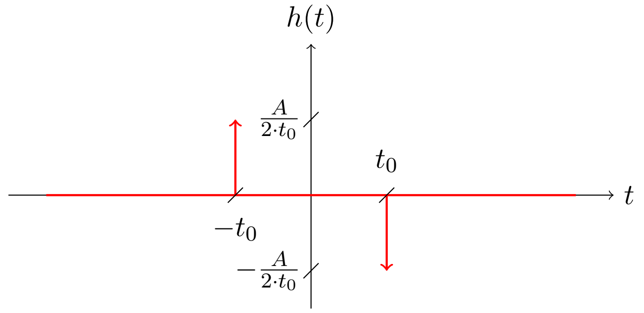
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = -A \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t - t_0) \tag{3.79}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0}\delta(t - t_0) \tag{3.80}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.81}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{\jmath}{\jmath} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} - e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{ sin\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} - e^{-\jmath\cdot x}}{2\cdot\jmath} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = \jmath \cdot \frac{A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot H(0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right)+\pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(0\cdot t_0\right)=\\
&= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(\omega\cdot t_0\right)+\pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot sin\left(0\right)=\\
&= A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0}+\pi\cdot\delta(0)\cdot\jmath\cdot\frac{A}{t_0}\cdot 0=\\
&= A\cdot\frac{sin\left(\omega\cdot t_0\right)}{\omega\cdot t_0}+0=\\
&= \left\{Sa\left(x\right)=\tfrac{sin(x)}{x}\right\}=\\
&= A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega)=A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)\\
g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(\jmath\omega)\\
g(t)=\alpha\cdot g_1(t)+\beta\cdot g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)=\alpha\cdot G_1(\jmath\omega)+\beta\cdot G_2(\jmath\omega)
\end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega)+G_2(\jmath\omega)=\\
&= A\cdot Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-A\cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}=\\
&= A\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)\\
f(t)=\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)=\frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot G(0)
\end{aligned}$$

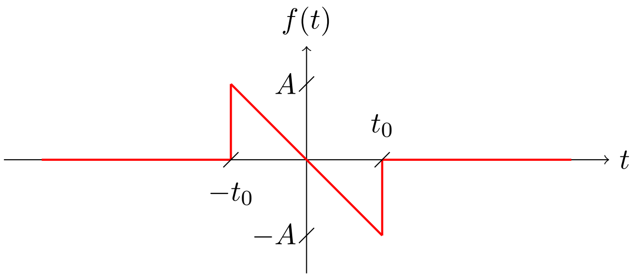
Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot G(\jmath\omega)+\pi\cdot\delta(0)\cdot G(0)=\\
&= \frac{1}{\jmath\cdot\omega}\cdot A\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)+\pi\cdot\delta(0)\cdot A\cdot\Big(Sa\left(0\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot 0\cdot t_0}\Big)=\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)+\pi\cdot\delta(0)\cdot A\cdot\Big(Sa\left(0\right)-e^{0}\Big)=\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)+\pi\cdot\delta(0)\cdot A\cdot(1-1)=\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot\omega}\cdot\Big(Sa\left(\omega\cdot t_0\right)-e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}\Big)+\pi\cdot\delta(0)\cdot A\cdot 0=
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right) + 0 =$$
$$= \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{A}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} \right)$.

Zadanie 13. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{3.82}$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b.

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równianie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

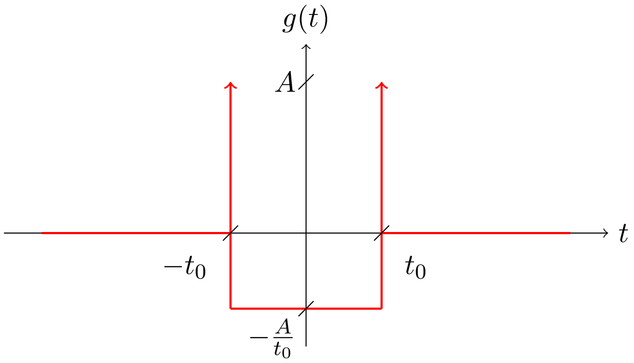
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnal $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.83}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodna sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.84}$$

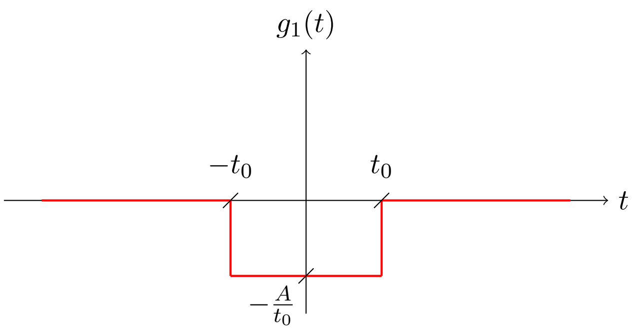


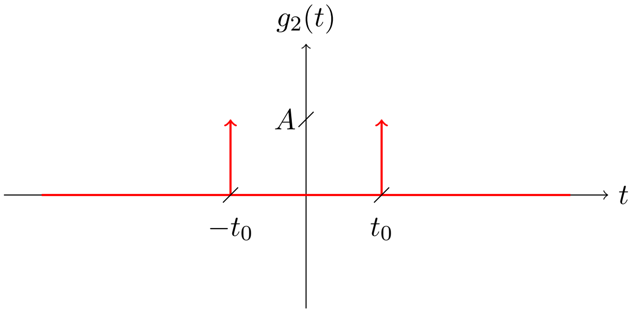
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{3.85}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \tag{3.86}$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.87}$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \tag{3.88}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t+t_0) + A \cdot \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot \left(e^{-\jmath\cdot\omega\cdot(-t_0)} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) = \\
&= A \cdot \left(e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} = \\
&= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{\jmath\cdot\omega\cdot t_0} + e^{-\jmath\cdot\omega\cdot t_0}}{2} = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2} \right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

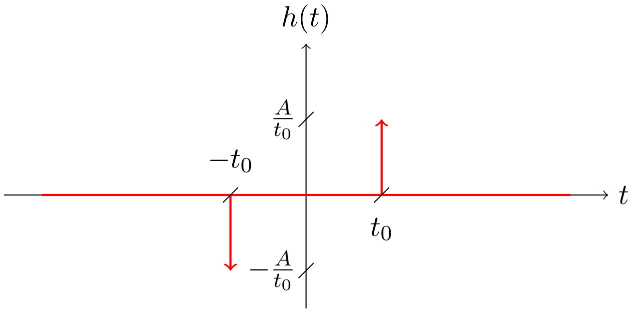
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(\jmath\omega) = 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak wiec wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{3.89}$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0}\delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0}\delta(t-t_0) \tag{3.90}$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.91}$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0)\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t}\right) \cdot dt = \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)\right\} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0} = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}\right) \cdot \frac{2 \cdot \jmath}{2 \cdot \jmath} = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t_0}}{2 \cdot \jmath} = \\
&= \left\{sin\,(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath}\right\} = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \jmath \cdot sin\,(\omega \cdot t_0) = \\
&= -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(\jmath\omega) = -\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\,(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczona wcześniej transformatę $H(\jmath\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(\jmath\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned}
G_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right)\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \left(-\jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(0 \cdot t_0\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(\omega \cdot t_0\right) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot sin\left(0\right) = \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \jmath \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 0 = \\
&= -2 \cdot A \cdot \frac{sin\left(\omega \cdot t_0\right)}{\omega \cdot t_0} - 0 = \\
&= \left\{Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x}\right\} = \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(\jmath\omega) = -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{gathered}
g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega) \\
g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(\jmath\omega) \\
g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \alpha \cdot G_1(\jmath\omega) + \beta \cdot G_2(\jmath\omega)
\end{gathered}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(\jmath\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= G_1(\jmath\omega) + G_2(\jmath\omega) = \\
&= -2 \cdot A \cdot Sa\left(\omega \cdot t_0\right) + 2 \cdot A \cdot cos\left(\omega \cdot t_0\right) = \\
&= -2 \cdot A \cdot \left(Sa\left(\omega \cdot t_0\right) - cos\left(\omega \cdot t_0\right)\right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(\jmath\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{gathered}$$

Podstawiając otrzymujemy

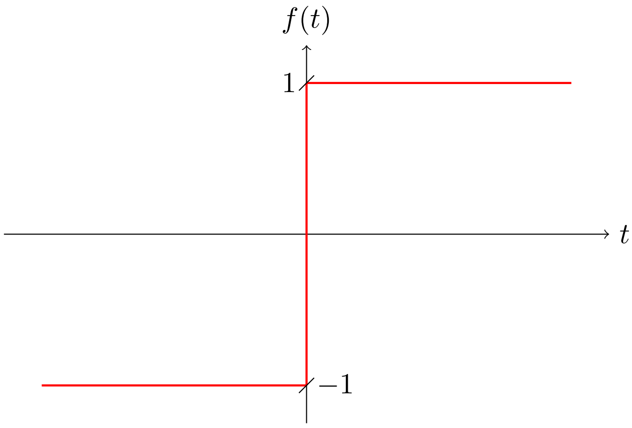
$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa\,(0 \cdot t_0) - cos\,(0 \cdot t_0))) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa\,(0) - cos\,(0)) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0)) - 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = -\frac{2 \cdot A}{\jmath \cdot \omega} \cdot (Sa\,(\omega \cdot t_0) - cos\,(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 14.

Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = sgn(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera.

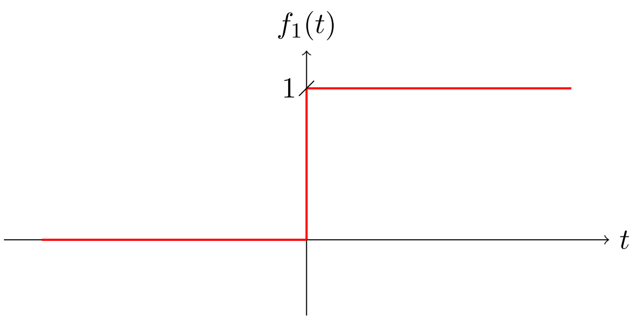


Opiszmy sygnał za pomocą skoków jednostkowych.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= sgn(t) = \\
&= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) = \\
&= f_1(t) - f_2(t)
\end{aligned}
$$

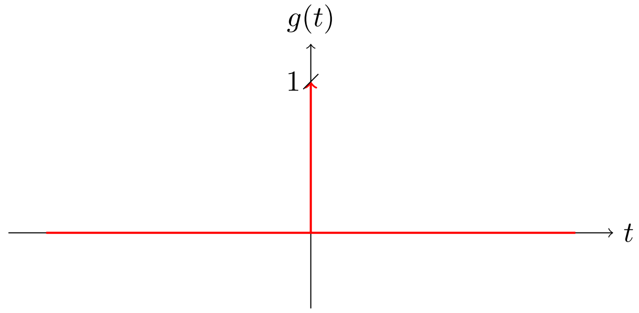
gdzie:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= \mathbb{1}(t) \\
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t)
\end{aligned}
$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodnią $f_1'(t)$:

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



Dla sygnału $g(t) = \delta(t)$ w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} = \\
&= e^0 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(\jmath\omega) = 1$.
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)$$

$$\begin{aligned}
F_1(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

A więc transformatą skoku jednostkowego jest $F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$.
Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) = \\
&= \mathbb{1}(-1 \cdot t) = \\
&= f_1(-1 \cdot t)
\end{aligned}$$

A wiec transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) = f_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
F_2(\jmath\omega) &= \frac{1}{|a|} \cdot F_1(\jmath\frac{\omega}{a}) = \\
&= \Big\{a = -1\Big\} = \\
&= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{\jmath \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta(\frac{\omega}{-1}) = \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) = \\
&= -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
\end{aligned}$$

Transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(\jmath\omega) = -\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$.
Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega)$$
$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \alpha \cdot F_1(\jmath\omega) + \beta \cdot F_2(\jmath\omega)$$

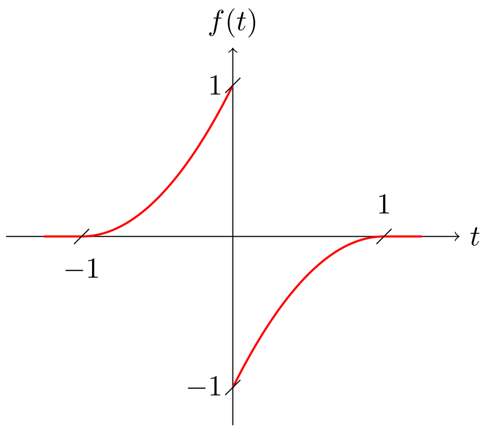
$$\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) - F_2(\jmath\omega) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \Big(-\frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\Big) = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) = \\
&= \frac{2}{\jmath \cdot \omega}
\end{aligned}$$

Transformata funkcji $f(t) = sgn(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath \cdot \omega}$.

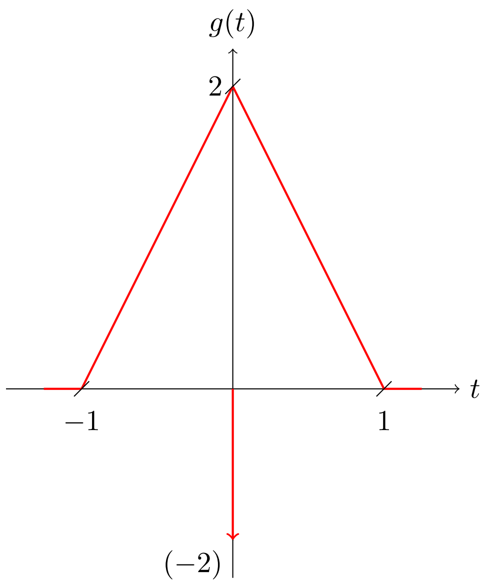
Zadanie 15. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ podanego poniżej za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -1) \\ (t+1)^2 & \text{dla } t \in (-1; 0) \\ -(t-1)^2 & \text{dla } t \in (0; 1) \\ 0 & \text{dla } t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.92}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.93}$$



Wyznaczmy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = 2 \cdot \Lambda(t) - 2 \cdot \delta(t) \tag{3.94}$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.95}$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.96}$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(\jmath\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$.

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$g(t) = 2 \cdot (g_1(t) - g_2(t)) \tag{3.97}$$

gdzie:

$$g_1(t) = \Lambda(t)$$
$$g_2(t) = \delta(t)$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.98}$$

Wyznaczmy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(\jmath\omega)$. Dla sygnału $g_2(t) = \delta(t)$ w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
G_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 0} = \\
&= e^0 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g_2(t) = \delta(t)$ jest $G_2(\jmath\omega) = 1$.

Transformatę funkcji $g(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(\jmath\omega)$$
$$g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(\jmath\omega)$$

$$g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \alpha \cdot G_1(\jmath\omega) + \beta \cdot G_2(\jmath\omega)$$

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \cdot (g_1(t) - g_2(t)) \\ G(\jmath\omega) &= 2 \cdot (G_1(\jmath\omega) - G_2(\jmath\omega)) = \\ &= 2 \cdot \left(Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

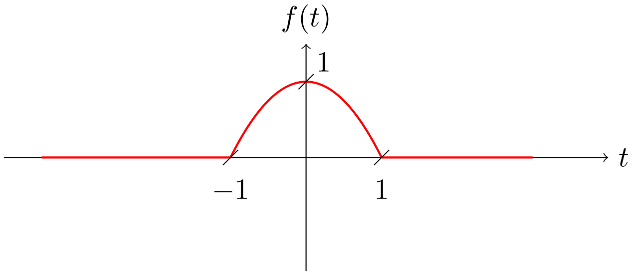
Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę $F(\jmath\omega)$:

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot 2 \cdot \left(Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = 2 \cdot \left(Sa^2\left(\frac{0}{2}\right) - 1 \right) \\ G(0) = 2 \cdot \left(Sa^2\left(0\right) - 1 \right) \\ G(0) = 2 \cdot (1 - 1) \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

Transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{2}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \right)$.

Zadanie 16.

Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące własciwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

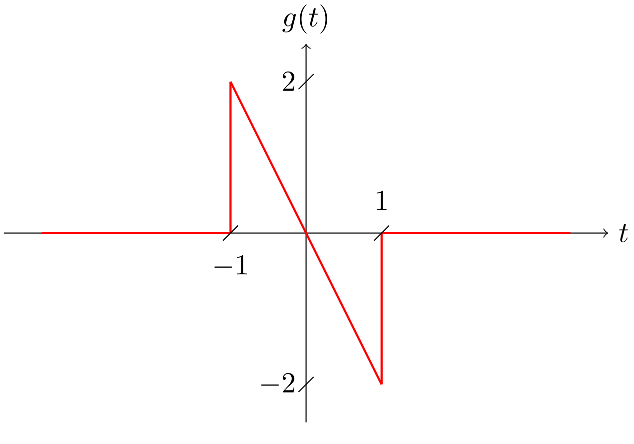


Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.99}$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \tag{3.100}$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x) \cdot dx \tag{3.101}$$

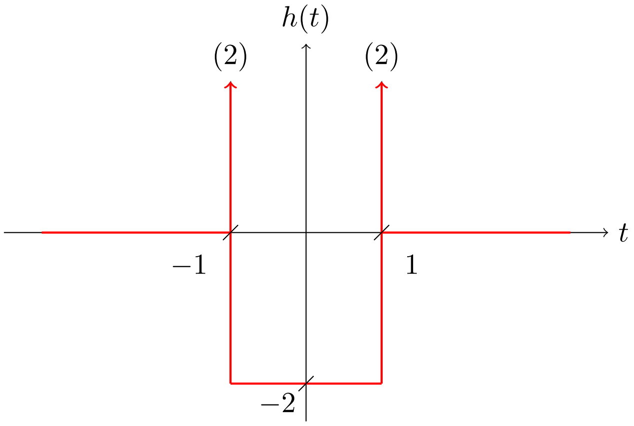
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ mozna wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \tag{3.102}$$

Pytanie, czy można dalej uprościc sygnał $g(t)$ dokonując jego rózniczkowania. Wyznaczmy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \tag{3.103}$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{3.104}$$



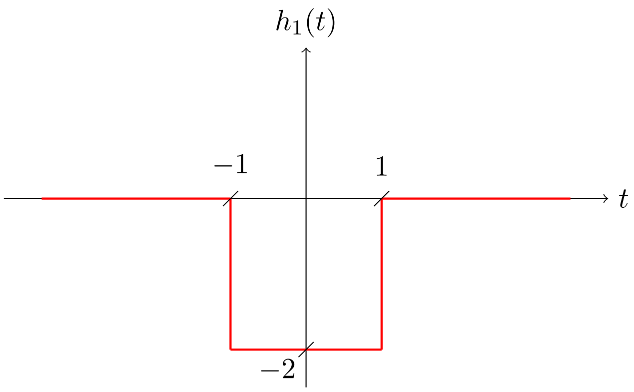
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$:

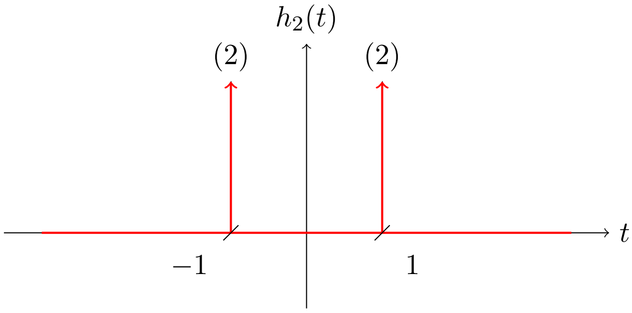
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{3.105}$$

gdzie:

$$h_1(t) = -2 \cdot \Pi(\frac{t}{2}) \tag{3.106}$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \tag{3.107}$$





Wyznaczmy transformtę sygnału $h_1(t)$, czyli $H_1(\jmath\omega)$.
Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\jmath\omega)$$
$$h_1(t) = x(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot X(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{1}{2} \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{2}}}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2}{2}\right)$$
$$\Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$
$$-2 \cdot \Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} -2 \cdot 2 \cdot Sa\left(\omega\right)$$
$$-2 \cdot \Pi(\frac{t}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} -4 \cdot Sa\left(\omega\right)$$

Transformata sygnału $h_1(t)$ to:

$$H_1(\jmath\omega) = \mathcal{F}\{H_1(t)\} = -4 \cdot Sa\left(\omega\right) \tag{3.108}$$

Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned} H_2(\jmath\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= 2 \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \omega \cdot (-1)} + e^{-\jmath \cdot \omega \cdot 1} \right) = \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) = \\
&= 2 \cdot \left(e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega} \right) \cdot \frac{2}{2} = \\
&= 4 \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \omega} + e^{-\jmath \cdot \omega}}{2} = \\
&= \left\{ cos\,(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= 4 \cdot cos\,(\omega)
\end{aligned}
$$

Transformata sygnału $h_2(t)$ to $H_2(\jmath\omega) = 4 \cdot cos\,(\omega)$.

Korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$
\begin{aligned}
h_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(\jmath\omega) \\
h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_2(\jmath\omega) \\
h(t) = \alpha \cdot h_1(t) + \beta \cdot h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) = \alpha \cdot H_1(\jmath\omega) + \beta \cdot H_2(\jmath\omega)
\end{aligned}
$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $H(\jmath\omega)$ funkcji $h(t)$

$$
\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= H_1(\jmath\omega) + H_2(\jmath\omega) = \\
&= -4 \cdot Sa\,(\omega) + 4 \cdot cos\,(\omega) = \\
&= 4 \cdot (cos\,(\omega) - Sa\,(\omega))
\end{aligned}
$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(\jmath\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyc transformatę $G(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\
g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot H(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} H(0) = 4 \cdot (cos\,(0) - Sa\,(0)) \\ H(0) = 4 \cdot (1-1) \\ H(0) = 4 \cdot 0 \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(4 \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right)\right) + 0 = \\
&= \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $g(t)$ jest równa $G(\jmath\omega) = \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right)$.

Mamy wyznaczoną transformatę $G(\jmath\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(\jmath\omega)$:

$$
\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\jmath\omega) &= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot G(\jmath\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \left\{
\begin{array}{l}
G(0) = \frac{4}{\jmath \cdot 0} \cdot \left(cos\left(0\right) - Sa\left(0\right)\right) \\
G(0) = \frac{0}{0}!!! \\
G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-1}^{1} (-2) \cdot t \cdot dt = (-2) \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \\
G(0) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-2) \cdot 0 \\
G(0) = 0
\end{array}
\right\} = \\
&= \frac{1}{\jmath \cdot \omega} \cdot \frac{4}{\jmath \cdot \omega} \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right) + 0 = \\
&= \frac{4}{\jmath^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right) = \\
&= \frac{4}{(-1) \cdot \omega^2} \cdot \left(cos\left(\omega\right) - Sa\left(\omega\right)\right) = \\
&= \frac{4}{\omega^2} \cdot \left(Sa\left(\omega\right) - cos\left(\omega\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{4}{\omega^2} \cdot \left(Sa\left(\omega\right) - cos\left(\omega\right)\right)$.

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Oblicz energię sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \tag{3.110}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.111}$$

Energię sygnału można wyznaczyc ze wzoru:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{3.112}$$

Podstawiając dany sygnał $f(t)$ do wzoru na energie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt = \\
&= \left\{ \quad Sa\left(x\right) = \tfrac{sin(x)}{x} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{sin\left(\omega_0 \cdot t\right)}{\left(\omega_0 \cdot t\right)}\right|^2 \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^2\left(\omega_0 \cdot t\right)}{\left(\omega_0 \cdot t\right)^2} \cdot dt = \\
&= ....
\end{aligned}$$

Próbując obliczyc energię tym sposobem musimy obliczyć całkę cykliczną. A może jest łatwiejszy sposób?

Spróbumy wykorzystać twierdzenie Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.113}$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(\jmath\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.114}$$

Na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$\begin{gathered}
g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) \\
f(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)
\end{gathered}$$

otrzymujemy:

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 2 \cdot \omega_0$:

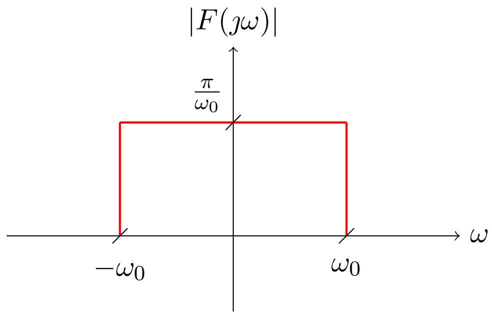
$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)$$
$$g(t) = f(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$
$$Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0})$$
$$Sa\left(\omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0})$$

Energię wyznaczymy ze wzoru Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.115}$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.



$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Wyznaczmy też $|F(\jmath\omega)|^2$:

$$|F(\jmath\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawmy wyznaczone dane do wzoru Parsevala:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) = \\ &= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) = \\ &= \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = Sa\left(\omega_0 \cdot t\right)$ równa się $E = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Zadanie 2. Oblicz, jaka część energi sygnału $f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \tag{3.116}$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.117}$$

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} = ? \tag{3.118}$$

Ponieważ musimy obliczyć energię tylko dla pewnego zakresu pulsacji, to wykorzystamy twierdzenie Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.119}$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(\jmath\omega)$.

Ponieważ możemy korzystać tylko ze znanych twierdzeń oraz wiedzy o transformacie sygnału $\Pi(t)$, to spróbujmy przekształcić sygnał $f(t)$ do postaci, w której wprost możemy zastosować twierdzenia. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
f(t) &= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) = \\
&= \left\{cos\left(x\right) = \tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^2 = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{(e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t})^2 + 2 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + (e^{-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t})^2}{4}\right) = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 2 \cdot e^{2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t-2\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right) = \\
&= A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + 2 \cdot e^{0} + e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right) = \\
&= \frac{A}{4} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} + \frac{A}{2} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) + \frac{A}{4} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot e^{-4\cdot\jmath\cdot\omega_0\cdot t} = \\
&= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)
\end{aligned}$$

Korzystając z liniowości przekształcenia Fouriera możemy niezależnie obliczyć transformaty dla sygnałów $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$, a następnie zsumować te transformaty. Zacznijmy od sygnału $f_2(t)$:

Skoro wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.120}$$

to, na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\jmath\omega)$$

$$f_2(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$$

otrzymujemy:

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 4 \cdot \omega_0$:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = f(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F(\jmath\frac{\omega}{\alpha})$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$
$$Sa\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{4 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_2(t) = \frac{A}{2} \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_2(\jmath\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_2(t)$ to $F_2(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Zauważmy, że $f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_1(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$
$$f_1(t) = f_2(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\jmath\omega) = F_2(\jmath\left(\omega - \omega_0\right))$$

otrzymujemy:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$$
$$f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_1(\jmath\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_1(t)$ to $F_1(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Podobnie, zauważmy, że $f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_3(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\jmath\omega)$$

$$f_3(t) = f_2(t) \cdot e^{\jmath \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(\jmath\omega) = F_2(\jmath(\omega - \omega_0))$$

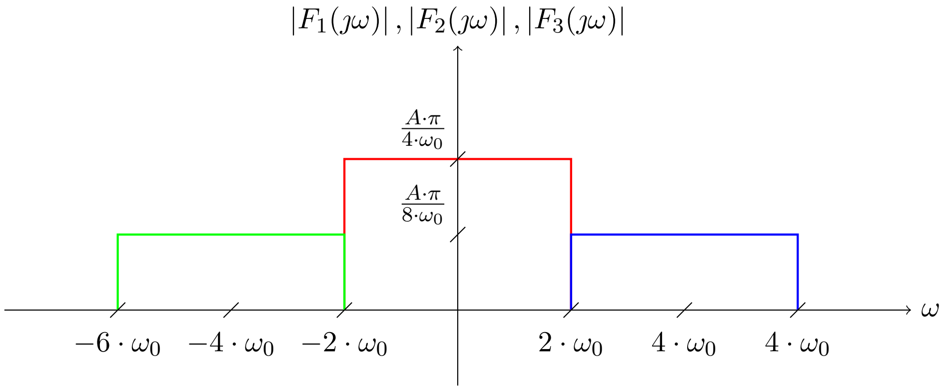
otrzymujemy:

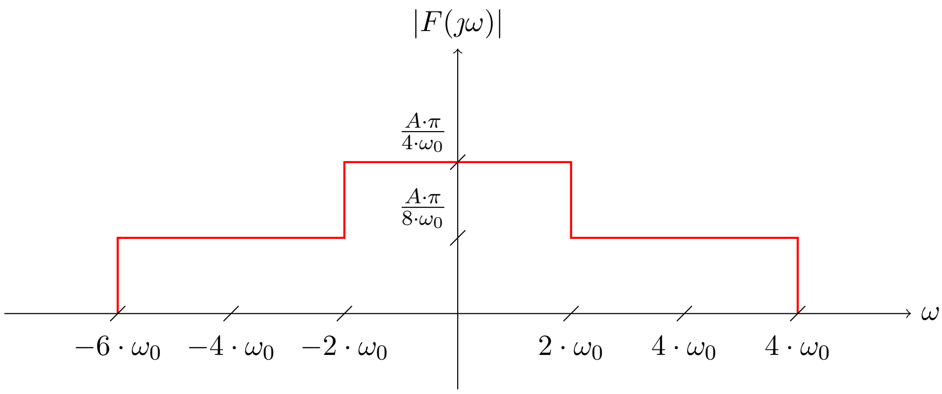
$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot \jmath \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_3(\jmath\omega) \end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_3(t)$ to $F_3(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.
Teraz możemy podać transformatę sygnału $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$,

$$\begin{aligned} F(\jmath\omega) &= F_1(\jmath\omega) + F_2(\jmath\omega) + F_3(\jmath\omega) = \\ &= \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.





$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0} & \omega \in (-6\cdot\omega_0; -2\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (-2\cdot\omega_0; 2\cdot\omega_0) \\ \frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0} & \omega \in (2\cdot\omega_0; 6\cdot\omega_0) \\ 0 & \omega \in (6\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Ponieważ energię wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.121}$$

to wyznaczmy $|F(\jmath\omega)|^2$:

$$|F(\jmath\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-6\cdot\omega_0; -2\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-2\cdot\omega_0; 2\cdot\omega_0) \\ \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 & \omega \in (2\cdot\omega_0; 6\cdot\omega_0) \\ 0 & \omega \in (6\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-6\cdot\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0} \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} \left(\frac{A\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0} \left(\frac{A\cdot\pi}{8\cdot\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{6\cdot\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot \int_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0} d\omega + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} d\omega + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot \int_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0} d\omega + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot \omega|_{-6\cdot\omega_0}^{-2\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2} \cdot \omega|_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot \omega|_{2\cdot\omega_0}^{6\cdot\omega_0} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot (-2\cdot\omega_0 - (-6\cdot\omega_0)) + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2} \cdot (2\cdot\omega_0 - (-2\cdot\omega_0)) + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot (6\cdot\omega_0 - 2\cdot\omega_0) \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot 4\cdot\omega_0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2} \cdot 4\cdot\omega_0 + \frac{A^2\cdot\pi^2}{64\cdot\omega_0^2} \cdot 4\cdot\omega_0 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{4\cdot\omega_0} + \frac{A^2\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A^2\cdot\pi^2}{4\cdot\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{A^2\cdot\pi}{8\cdot\omega_0} \cdot \left(\frac{2}{4} + 1 \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) =$$
$$= \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$

Energia sygnału $f(t) = A \cdot Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \cdot cos^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$ równa się $E = \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsevala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega|<2\cdot\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.122}$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega|<2\cdot\omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} \left|\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot \int_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2}\right) \cdot \omega\Big|_{-2\cdot\omega_0}^{2\cdot\omega_0} = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot \left(2 \cdot \omega_0 - \left(-2 \cdot \omega_0\right)\right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot \left(4 \cdot \omega_0\right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} =? \tag{3.123}$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega|<2\cdot\omega_0}}{E} = \frac{\frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}}{\frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \frac{16 \cdot \omega_0}{3 \cdot A^2 \cdot \pi} = \frac{2}{3} \approx 66\%$$

Na pulsacje z zakresu $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ przypada około 66% energii sygnału.

Zadanie 3.

Oblicz, jaka część energi sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t) \tag{3.124}$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.125}$$

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = ? \tag{3.126}$$

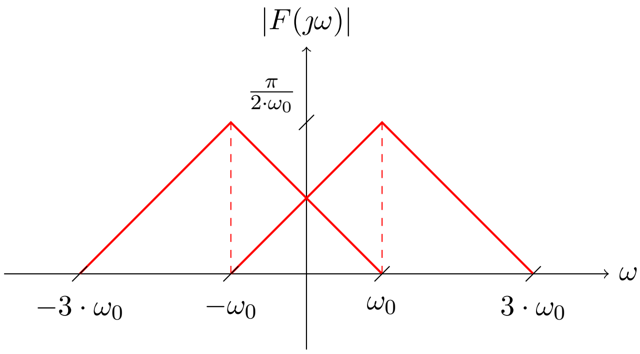
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala:

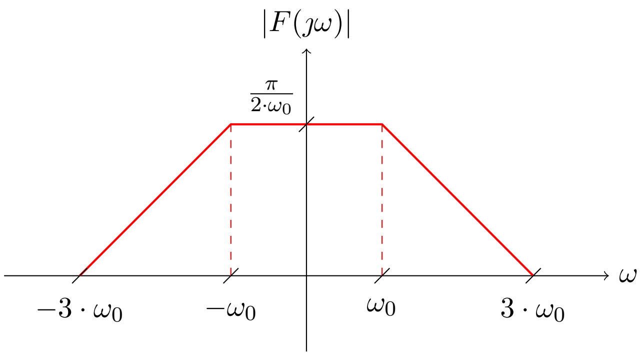
$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\jmath\omega)|^2 \cdot d\omega \tag{3.127}$$

W tym celu musimy wyznaczyc transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(\jmath\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(\jmath\omega)|$.





$$|F(\jmath\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3\cdot\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (-3\cdot\omega_0; -\omega_0\rangle \\ \frac{\pi}{2\cdot\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0\rangle \\ -\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3\cdot\omega_0\rangle \\ 0 & \omega \in (3\cdot\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\int_{-\infty}^{-3\cdot\omega_0}|0|^2\cdot d\omega + \int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left|\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega +\right.$$

$$\left.+\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left|-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega + \frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega + \int_{3\cdot\omega_0}^{\infty}|0|^2\cdot d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[0 + \int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\left(\left(\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2 + 2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega + \left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega +\right.$$

$$\left.+\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\left(\left(-\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\right)^2\cdot\omega^2 - 2\cdot\frac{\pi}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\omega + \left(\frac{3\cdot\pi}{4\cdot\omega_0}\right)^2\right)\cdot d\omega + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega^2\cdot d\omega + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}\omega\cdot d\omega + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0}d\omega + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0} +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega^2\cdot d\omega - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\omega\cdot d\omega + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\int_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{-3\cdot\omega_0}^{-\omega_0} + \frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0 - (-\omega_0)) +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left.\frac{\omega^3}{3}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0} - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot\omega|_{\omega_0}^{3\cdot\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(-\frac{\omega_0^3}{3} - \left(-\frac{27\cdot\omega_0^3}{3}\right)\right) + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{9\cdot\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(-\omega_0 - (-3\cdot\omega_0)) +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0 + \frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\left(\frac{27\cdot\omega_0^3}{3} - \frac{\omega_0^3}{3}\right) - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(\frac{9\cdot\omega_0^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot(3\cdot\omega_0 - \omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3} + \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\left(-\frac{8\cdot\omega_0^2}{2}\right) + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0 + \frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0} +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{16\cdot\omega_0^4}\cdot\frac{26\cdot\omega_0^3}{3} - \frac{6\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^3}\cdot\frac{8\cdot\omega_0^2}{2} + \frac{9\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0^2}\cdot 2\cdot\omega_0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0} - \frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0} + \frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0} + \frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0} + \frac{26\cdot\pi^2}{48\cdot\omega_0} - \frac{48\cdot\pi^2}{32\cdot\omega_0} + \frac{18\cdot\pi^2}{16\cdot\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} + 1 + \frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24} - \frac{96}{16} + \frac{36}{8} + 1\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{52}{24}-6+\frac{108}{24}+1\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-5\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{160}{24}-\frac{120}{24}\right]=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\left[\frac{40}{24}\right]=\\
&= \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}
\end{aligned}
$$

Podsumowując, całkowita energia sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0\cdot t)\cdot cos(\omega_0\cdot t)$ to $E = \frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyc z twierdzenia Parsevala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega \tag{3.128}$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
E_{|\omega|<\omega_0} &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(\jmath\omega)|^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left|\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right|^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)^2\cdot\int_{-\omega_0}^{\omega_0}d\omega=\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4\cdot\omega_0^2}\right)\cdot\omega|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(\omega_0-(-\omega_0))=\\
&= \frac{\pi}{8\cdot\omega_0^2}\cdot(2\cdot\omega_0)=\\
&= \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}
\end{aligned}
$$

Podsumowując $E_{|\omega|<\omega_0} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = ? \tag{3.129}$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega|<\omega_0}}{E} = \frac{\frac{\pi}{4\cdot\omega_0}}{\frac{5\cdot\pi}{12\cdot\omega_0}} = \frac{\pi}{4\cdot\omega_0}\cdot\frac{12\cdot\omega_0}{5\cdot\pi} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 60\%$$

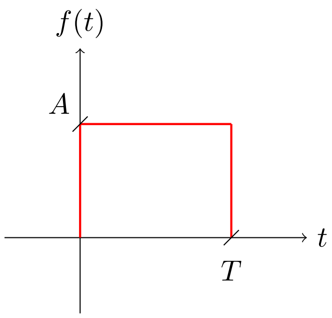
Na pulsacje z zakresu $|\omega| < \omega_0$ przypada 60% energi sygnału.

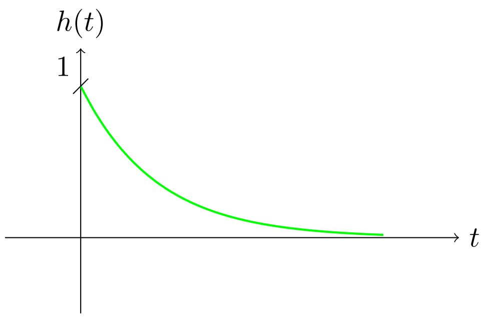
Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$ i $h(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$





Wzór na slot sygnałów

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \tag{4.1}$$

Wzory sygnałów pod całką

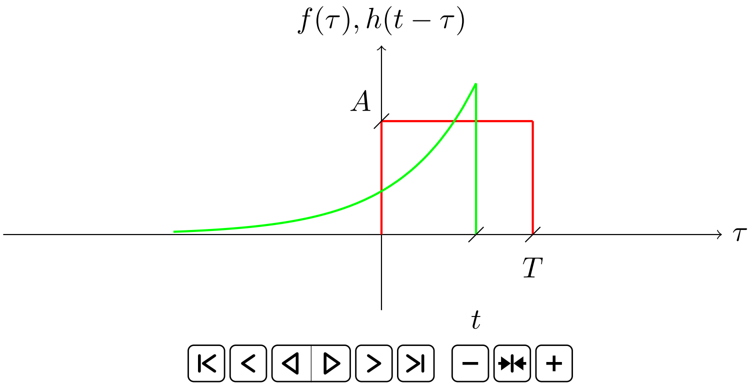
$$f(\tau) = A \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$h(t-\tau) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot (t-\tau)}$$

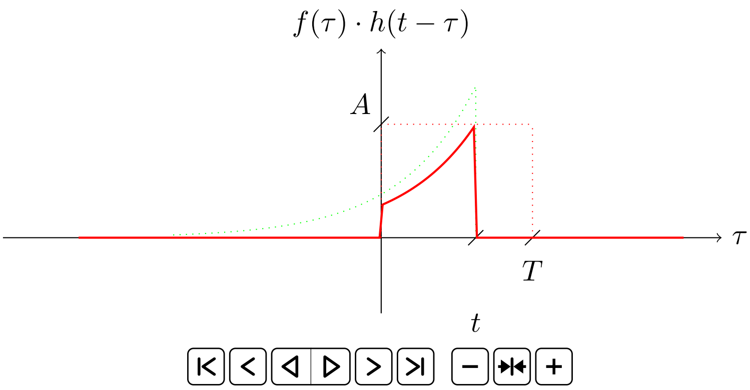
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a \cdot (t-\tau)} & \tau \in (-\infty; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji w dziedzinie τ dla różnych wartości t:

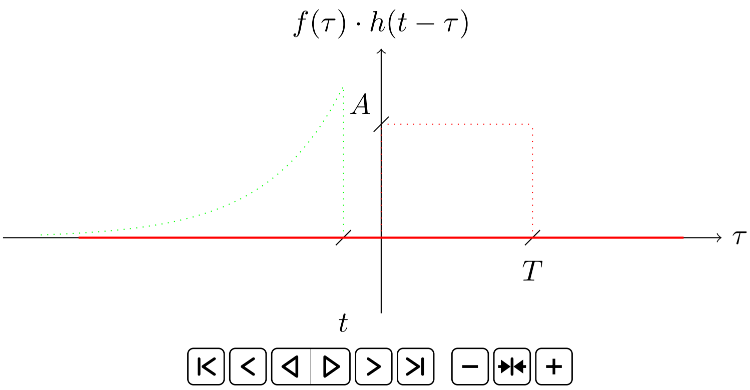


Po wymnożeniu obu funkcji, dla przykładowych wartości t, otrzymujemy (ciągła, czerwona linia):



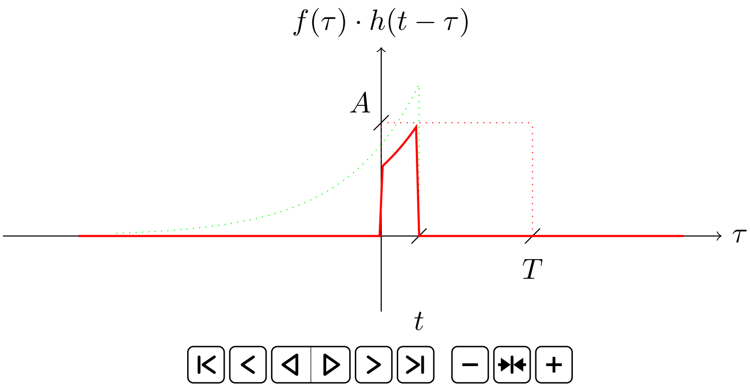
Z wykresu widać, że dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot h(t-\tau)$. W związku z tym, wyznaczymy splot oddzielnie dla poszczególnych przedziałów wartości t

Przedział 1 Dla wartości t spełniających warunek $t < 0$ otrzymujemy:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau =$$
$$= 0$$

Przedział 2 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq 0$ i $t < T$ otrzymujemy

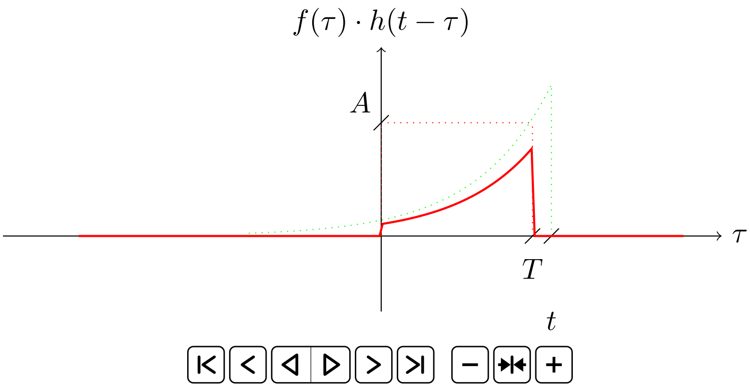


$$f(\tau) \cdot h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} & \tau \in (0; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{t} \left(A \cdot e^{-a\cdot(t-\tau)} \right) \cdot d\tau + \int_{t}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 + A \cdot \int_{0}^{t} \left(e^{-a\cdot t} \cdot e^{a\cdot\tau} \right) \cdot d\tau + 0 = \\ &= A \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \int_{0}^{t} \left(e^{a\cdot\tau} \right) \cdot d\tau = \\ &= A \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a\cdot\tau}\Big|_{0}^{t} = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \left(e^{a\cdot t} - e^{a\cdot 0} \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a\cdot t} \cdot \left(e^{a\cdot t} - 1 \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{a\cdot t} \cdot e^{-a\cdot t} - 1 \cdot e^{-a\cdot t} \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{a\cdot t - a\cdot t} - e^{-a\cdot t} \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \left(e^{0} - e^{-a\cdot t} \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot t} \right) \end{aligned}$$

Przedział 3 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq T$ otrzymujemy



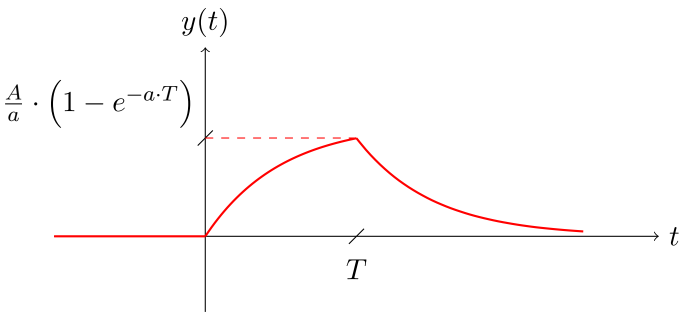
$$f(\tau) \cdot h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot (t-\tau)} & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{T} \left(A \cdot e^{-a \cdot (t-\tau)} \right) \cdot d\tau + \int_{T}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 + A \cdot \int_{0}^{T} \left(e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot \tau} \right) \cdot d\tau + 0 = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_{0}^{T} \left(e^{a \cdot \tau} \right) \cdot d\tau = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \tau} \Big|_{0}^{T} = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left(e^{a \cdot T} - e^{a \cdot 0} \right) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left(e^{a \cdot T} - 1 \right) \end{aligned}$$

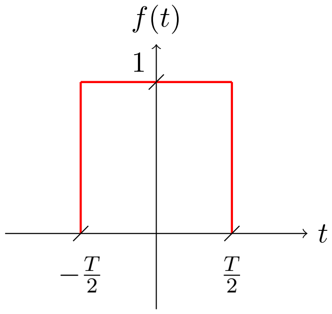
Podsumowując:

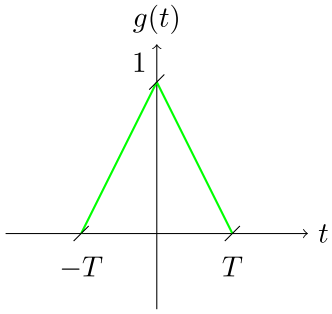
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; 0) \\ \frac{A}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right) & t \in (0; T) \\ \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left(e^{a \cdot T} - 1 \right) & t \in (T; \infty) \end{cases}$$



$y(t)$
$\frac{A}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot T}\right)$
t
T

Zadanie 2. Oblicz splot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$





Wzór na slot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \tag{4.2}$$

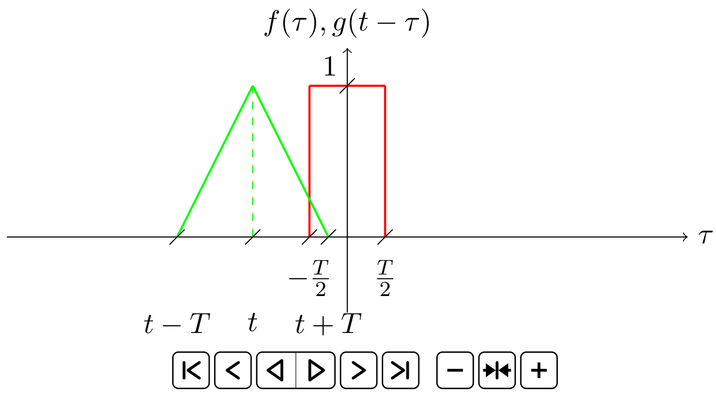
Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$
$$g(t-\tau) = \Lambda\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

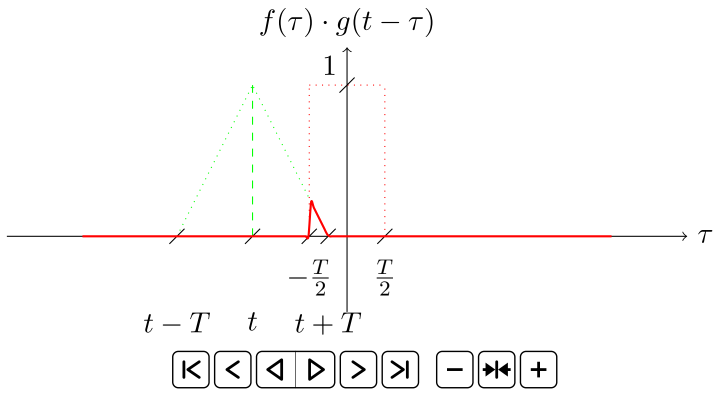
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ A & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t-T)\,; \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t-T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t+T) \\ 0 & \tau \in (t+T; \infty)\,; \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

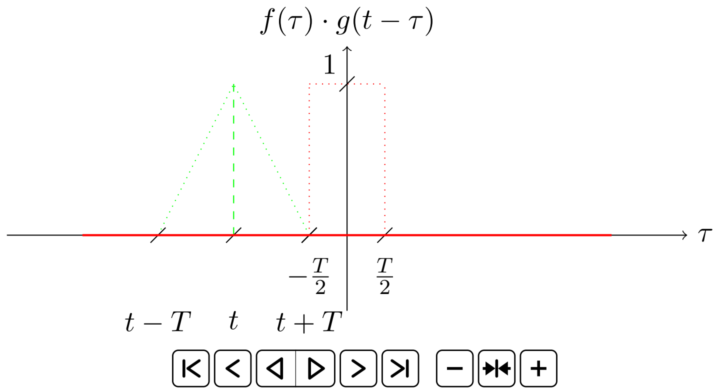


Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy



Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t-\tau)$.

Przedział 1 .



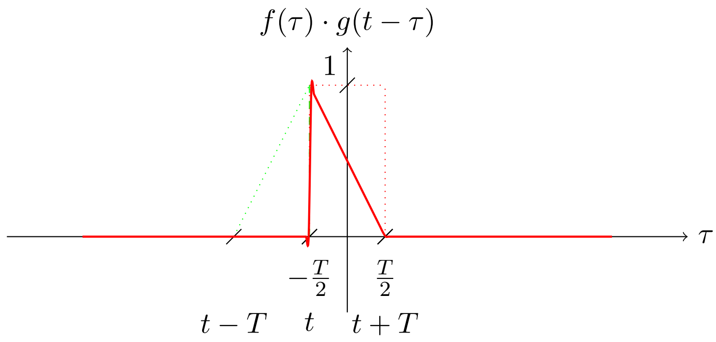
Dla wartości t spełniających warunek $t+T < -\frac{T}{2}$

$$
\begin{aligned}
t+T &< -\frac{T}{2} \\
t &< -\frac{T}{2} - T \\
t &< -\frac{3}{2} \cdot T
\end{aligned}
$$

w wyniku mnożenia otrzymyjemy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Przedział 2 .



Dla wartości t spełniających warunki $t+T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned}
t+T &\geq -\frac{T}{2} && \wedge && t < -\frac{T}{2}\\
t &\geq -\frac{T}{2} - T && \wedge && t < -\frac{T}{2}\\
t &\geq -\frac{3}{2}\cdot T && \wedge && t < -\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

a więc $t \in \left\langle -\frac{3}{2}\cdot T, -\frac{T}{2}\right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t+T\right)$.

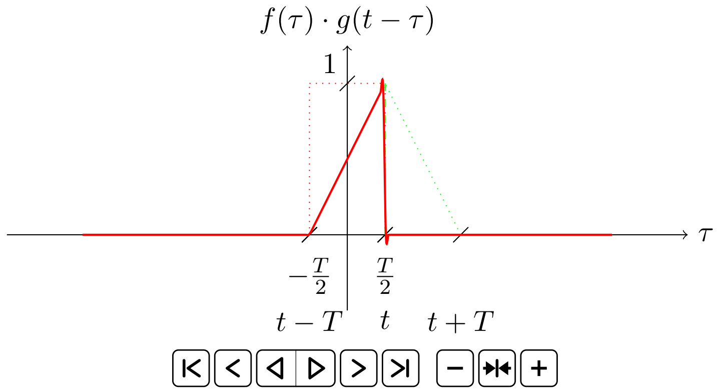
$$f(\tau)\cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t+T\right) \\ 0 & \tau \in (t+T; \infty) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{T}{2}} 0\cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0\cdot d\tau = \\
&= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\frac{1}{T}\cdot\tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\frac{t+T}{T}\cdot d\tau + 0 = \\
&= -\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t+T}\tau\cdot d\tau + \frac{t+T}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau = \\
&= -\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T}\cdot(\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} = \\
&= -\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(t+T-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+T^2-\frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(t+T+\frac{T}{2}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{t+T}{T}\cdot\left(t+\frac{3}{2}\cdot T\right)=\\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{T}\cdot\left(t^2+\frac{3}{2}\cdot t\cdot T+t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)=\\
&= -\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+2\cdot t\cdot T+\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{5}{2}\cdot t\cdot T+\frac{3}{2}\cdot T^2\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2\right)+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-t^2-2\cdot t\cdot T-\frac{3}{4}\cdot T^2+2\cdot t^2+5\cdot t\cdot T+3\cdot T^2\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+3\cdot t\cdot T+2\frac{1}{4}\cdot T^2\right)=\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{1}{2\cdot T}\cdot 3\cdot t\cdot T+\frac{1}{2\cdot T}\cdot\frac{9}{4}\cdot T^2=\\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2+\frac{3}{2}\cdot t+\frac{9}{8}\cdot T
\end{aligned}
$$

Przedział 3 .



Dla wartości t spełniających warunki $t\geq -\frac{T}{2}$ i $t<\frac{T}{2}$

$$
t\geq -\frac{T}{2} \qquad \wedge \qquad t<\frac{T}{2}
$$

a więc $t\in\left\langle -\frac{1}{2}\cdot T, \frac{1}{2}\cdot T\right)$

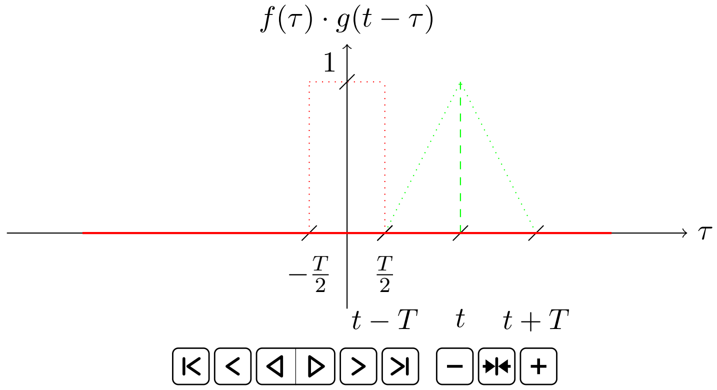
w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t\in\left(-\frac{T}{2}, t\right)$ oraz $t\in\left(t, \frac{T}{2}\right)$.

$$
f(\tau)\cdot g(t-\tau)=\begin{cases}
0 & \tau\in\left(-\infty; -\frac{T}{2}\right)\\
\frac{1}{T}\cdot\tau-\frac{t-T}{T} & \tau\in\left(-\frac{T}{2}; t\right)\\
-\frac{1}{T}\cdot\tau-\frac{-t-T}{T} & \tau\in\left(t; \frac{T}{2}\right)\\
0 & \tau\in\left(\frac{T}{2}; \infty\right)
\end{cases}
$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0\cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\left(\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{-t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0\cdot d\tau = \\
&= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\frac{1}{T}\cdot\tau\cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\frac{t-T}{T}\cdot d\tau + \int_{t}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{1}{T}\cdot\tau\right)\cdot d\tau - \int_{t}^{\frac{T}{2}}\frac{-t-T}{T}\cdot d\tau + 0 = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\tau\cdot d\tau - \frac{t-T}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{t} d\tau - \frac{1}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}}\tau\cdot d\tau + \frac{t+T}{T}\cdot\int_{t}^{\frac{T}{2}} d\tau = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{t-T}{T}\cdot\tau|_{-\frac{T}{2}}^{t} - \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{t}^{\frac{T}{2}} + \frac{t+T}{T}\cdot\tau|_{t}^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2-\left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \frac{t+T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t-T)\cdot\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \frac{2}{2\cdot T}\cdot(t+T)\cdot\left(\frac{T}{2}-t\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t\cdot T - \frac{1}{2}\cdot T^2\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2\right) + \\
&+ \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot T - t^2 + \frac{1}{2}\cdot T^2 - t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2\right) + \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot T^2 + t^2\right) + \\
&+ \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t\cdot T - 2\cdot t^2 + T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\cdot T^2 - 2\cdot t^2 - t\cdot T + 2\cdot t\cdot T + T^2 - \frac{1}{4}\cdot T^2 + t^2 + t\cdot T - 2\cdot t^2 + T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-2\cdot t^2 + 2\cdot T^2\right) = \\
&= \frac{1}{T}\cdot\left(-t^2+T^2\right) = \\
&= -\frac{1}{T}\cdot t^2 + T
\end{aligned}
$$

Przedział 4 .



Dla wartości t spełniających warunki $t-T \geq -\frac{T}{2}$ i $t-T < \frac{T}{2}$

$$\begin{aligned} t-T &\geq -\frac{T}{2} & \wedge && t-T &< \frac{T}{2} \\ t &\geq -\frac{T}{2}+T & \wedge && t &< \frac{T}{2}+T \\ t &\geq \frac{1}{2}\cdot T & \wedge && t &< \frac{3}{2}\cdot T \end{aligned}$$

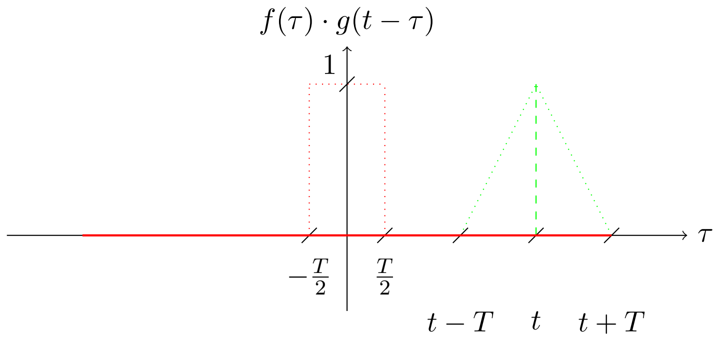
a więc $t \in \left\langle \frac{1}{2}\cdot T, \frac{3}{2}\cdot T\right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t-T, \frac{T}{2}\right)$.

$$f(\tau)\cdot g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t-T) \\ \frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(t-T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{t-T} 0\cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T}\cdot\tau - \frac{t-T}{T}\right)\cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0\cdot d\tau = \\ &= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} frac1T\cdot\tau\cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t-T}{T}\cdot d\tau + 0 = \\ &= \frac{1}{T}\cdot\int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau\cdot d\tau - \frac{t-T}{T}\cdot\int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau = \\ &= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t-T}{T}\cdot\tau|_{t-T}^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - (t-T)^2\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - (t-T)\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - \left(t^2 - 2\cdot t\cdot T + T^2\right)\right) - \frac{t-T}{T}\cdot\left(\frac{T}{2} - t + T\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot T^2 - t^2 + 2\cdot t\cdot T - T^2\right) - \frac{1}{T}\cdot(t-T)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot T - t\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot T^2 - t^2 + 2\cdot t\cdot T\right) - \frac{2}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot t\cdot T - t^2 - \frac{3}{2}\cdot T^2 + t\cdot T\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot T^2 - t^2 + 2\cdot t\cdot T\right) - \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{6}{2}\cdot t\cdot T - 2\cdot t^2 - \frac{6}{2}\cdot T^2 + 2\cdot t\cdot T\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot T^2 - t^2 + 2\cdot t\cdot T - \frac{6}{2}\cdot t\cdot T + 2\cdot t^2 + \frac{6}{2}\cdot T^2 - 2\cdot t\cdot T\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot T^2 - 3\cdot t\cdot T + t^2\right) = \\ &= \frac{1}{2\cdot T}\cdot\frac{9}{4}\cdot T^2 - \frac{1}{2\cdot T}\cdot 3\cdot t\cdot T + \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2 = \\ &= \frac{9}{8}\cdot T - \frac{3}{2}\cdot t + \frac{1}{2\cdot T}\cdot t^2 \end{aligned}$$

Przedział 5 .



Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} t - T &\geq \frac{T}{2} \\ t &\geq \frac{T}{2} + T \\ t &\geq \frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

a więc $t \in \left\langle \frac{3}{2} \cdot T, \infty \right)$
w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

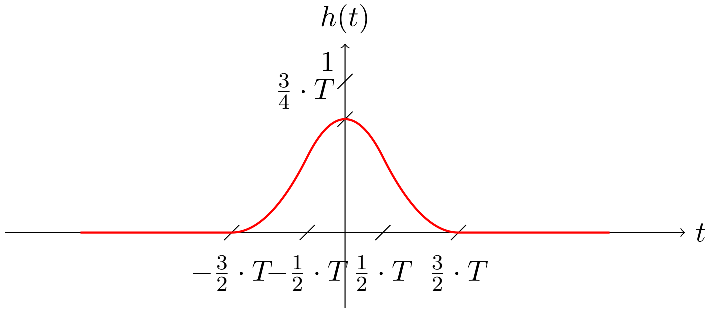
$$f(\tau) \cdot g(t-\tau) = 0$$

a więc wartość splotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik splotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

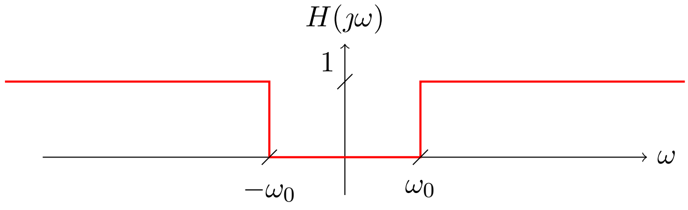
$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + \frac{3}{4} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases} \end{aligned}$$


$h(t)$
1
$\frac{3}{4} \cdot T$
t
$-\frac{3}{2} \cdot T$
$-\frac{1}{2} \cdot T$
$\frac{1}{2} \cdot T$
$\frac{3}{2} \cdot T$

4.2 Filtry

Zadanie 1.

Na układ LTI o transmitancji podanej poniżej, podano sygnał $u(t) = A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right)$. Wyznacz odpowiedź układu $y(t)$ wiedząc, że $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



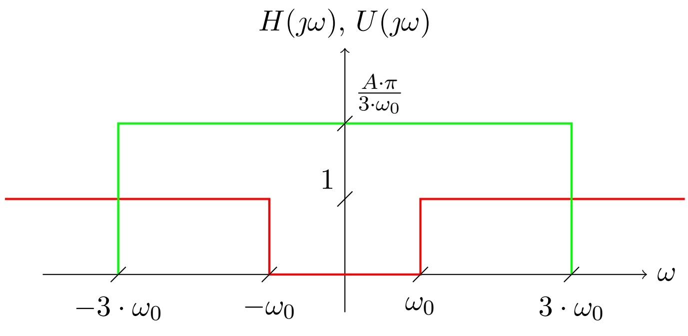
Wiemy, że odpowiedź układu LTI można obliczyć z zależności $y(t) = u(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ jest odpowiedzią impulsową układu. Wiemy także, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$.

Ponieważ wyznaczenie splotu liniowego sygnałów jest bardziej skomplikowane niż operacja mnożenia, dlatego spróbujemy skorzystać z tej drugie zależności, czyli mnożenia transformat. W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$, czyli $U(\jmath\omega)$.

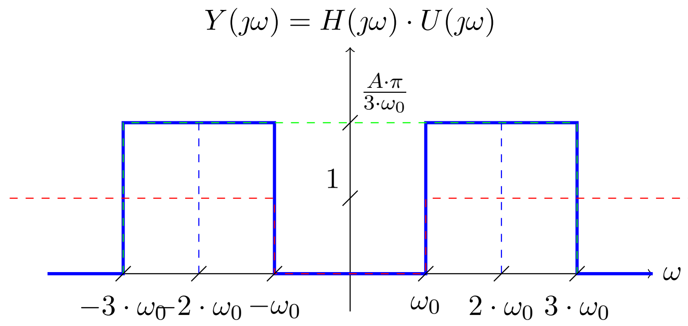
$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$
$$Sa\left(6 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|6 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$$
$$A \cdot Sa\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$$

Transformata sygnału wejściowego $u(t)$ to $U(\jmath\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$.

Transformatę sygnału wyjściowego, czyli $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ wyznaczymy graficznie, W tym celu na wykresie transmitancji $H(\jmath\omega)$ dodamy transformatę $U(\jmath\omega)$:



Teraz dokonujmy operacji mnożenia transformat $U(\jmath\omega)$ przez $H(\jmath\omega)$



$$Y(\jmath\omega) = \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)+\frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right) \tag{4.3}$$

Skoro zanmy transformatę sygnału wyjściowego, to spróbujmy wyznaczyć sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu wykorzystując wcześniejsze obliczenia. Transformata $Y(\jmath\omega)$ to suma dwóch przeskalowanych prostokątów, przesuniętych na osi pulsacji. W takim razie można wnioskować, że sygnał w dziedzinie czasu to będzie suma dwóch zmodulowanych i przeskalowanych funkcji $Sa(t)$.

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\cdot\Pi(-\omega)\\
Sa\left(2\cdot\omega_0\cdot\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|2\cdot\omega_0|}\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2\cdot\omega_0}\right)\\
e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega-(-2\cdot\omega_0)}{2\cdot\omega_0}\right)\\
\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A\cdot\pi}{3\cdot\omega_0}\cdot\Pi\left(\frac{\omega+2\cdot\omega_0}{2\cdot\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

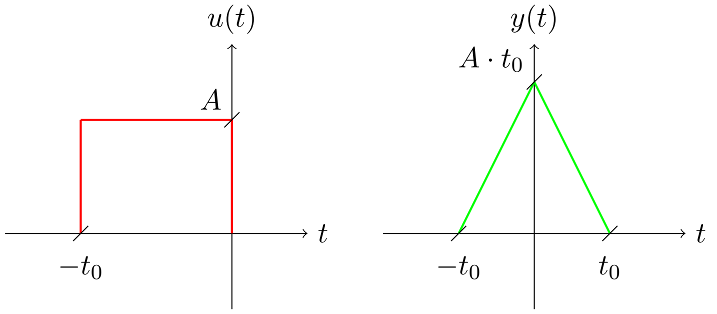
Podsumowując sygnał wyjściowy $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)+\frac{A}{3}\cdot e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\cdot Sa(\omega_0\cdot t) =\\
&= \frac{A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot\left(e^{(\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t)}+e^{(\jmath\cdot(-2\cdot\omega_0)\cdot t)}\right) =\\
&= \left\{cos\left(x\right)=\tfrac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} =\\
&= \frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right))
\end{aligned}$$

Odpowiedź układu to $y(t)=\frac{2\cdot A}{3}\cdot Sa(\omega_0\cdot t)\cdot cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right))$.

Zadanie 2.

Wyznacz odpowiedź implusową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wygladają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(\jmath\omega) = U(\jmath\omega) \cdot H(\jmath\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega)$. W związku z tym $H(\jmath\omega) = \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(\jmath\omega)$.

W pierwszym kroku wyznaczmy transformaty sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \\
U(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{u(t)\} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
\Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \\
Y(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
\Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\Lambda\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Skoro zanmy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyc transmitancję układu, czyli $H(\jmath\omega)$.

$$
\begin{aligned}
H(\jmath\omega) &= \frac{Y(\jmath\omega)}{U(\jmath\omega)} = \\
&= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}} = \\
&= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}
\end{aligned}
$$

Teraz możemy wyznaczć odpowiedź implusową układu $h(t)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\jmath\omega) \\
? &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$$
$$\Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \omega \cdot \frac{t_0}{2}}$$

Odpowiedź implusowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

ISBN 978-83-939620-1-3