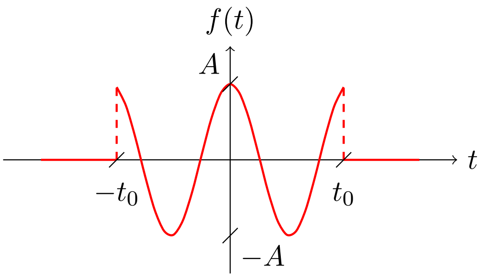
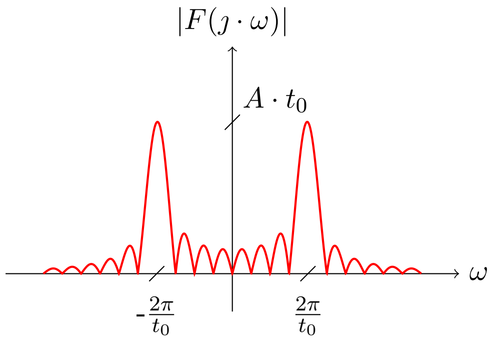
Teoria Sygnałów w zadaniach





$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(\jmath\omega) = A \cdot t_0 \cdot [\; Sa\,(\omega \cdot t_0 + 2\pi) \\ - Sa\,(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

29 kwietnia 2020

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

ISBN 978-83-939620-1-3
Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

1.1.2 Energia sygnału

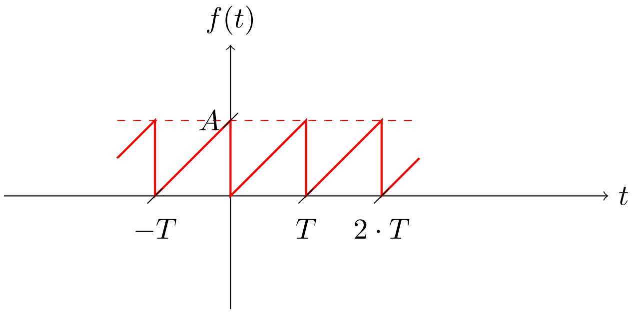
1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{2.1}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2.2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt = \\ &= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T^2 - 0^2\right) = \\ &= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.3}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{matrix}\right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot sin\left(k \cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(cos\left(k \cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot 0 =$$
$$= 0$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} u & = t & dv & = sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(- t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot cos\left(k \cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(-\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 1\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(sin\left(k \cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (0 - 0)\right) =$$
$$= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi}\right) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi}
\end{aligned}
$$

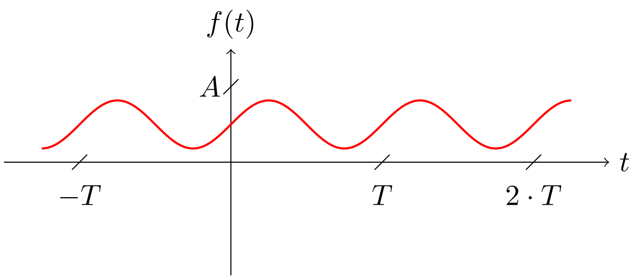
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{3 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{5 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{6 \cdot \pi}$

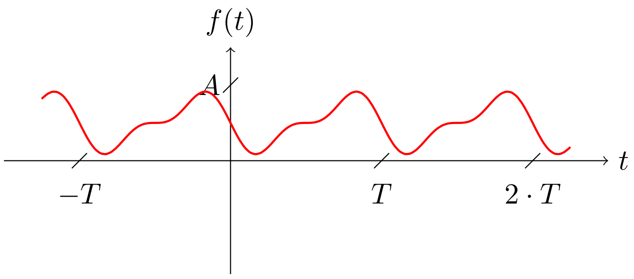
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{A}{k \cdot \pi}\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

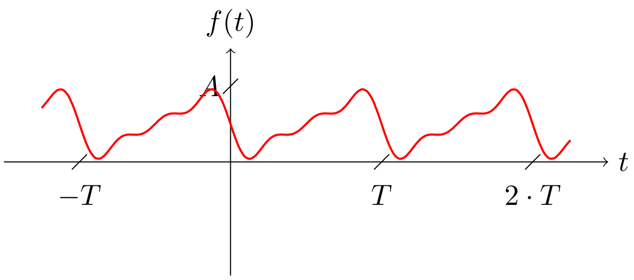
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



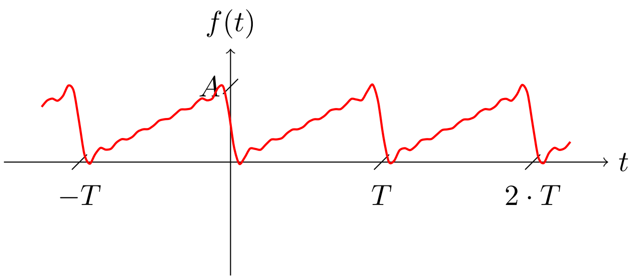
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



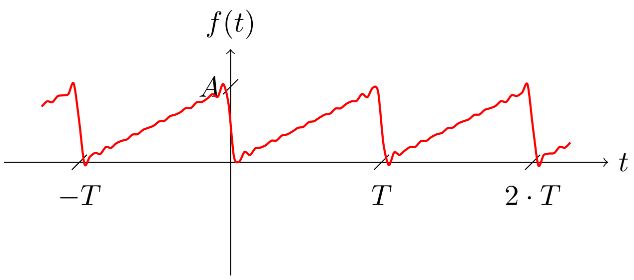
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy



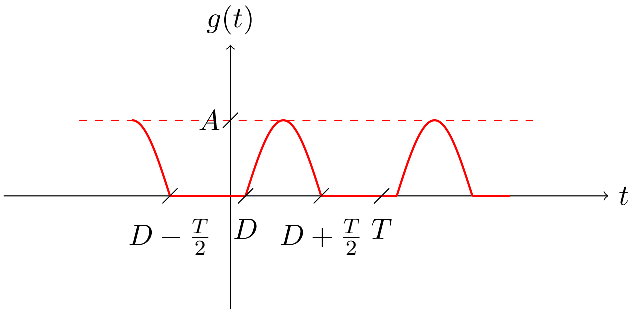
W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szerego Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu **??**



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{2.6}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania **??**

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ sin(x) = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu **??** wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g^1(t) &= f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\ G_k^1 &= F_{k-k_0} \end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2\cdot \jmath} f(t)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k_0^1\cdot t} - \frac{1}{2\cdot \jmath} f(t)\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot k_0^2\cdot t}\\
g(t) &= g^1(t) - g^2(t)\\
G_k &= G_k^1 - G_k^2\\
G_k &= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right)
\end{aligned}$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$\begin{aligned}
e^{\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t} &= e^{\jmath\cdot\frac{2\ cdot 6\pi}{T}\cdot t}\\
&= e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 6\cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\jmath\cdot\frac{12\pi}{T}\cdot t} &= e^{-\jmath\cdot\frac{2\ cdot 6\pi}{T}\cdot t}\\
&= e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 6\cdot t}\\
&= e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot(-6)\cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -6
\end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$\begin{aligned}
G_k &= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^1)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^1}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^2)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-k_0^2}-1\right)\right) =\\
&= \left\{\ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6\ \right\} =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k-(-6))\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-(-6)}-1\right)\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k+6}-1\right)\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{-6}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot(-1)^{6}-1\right)\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}\cdot 1-1\right)\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right) - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{k}-1\right)\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-6)\cdot 2\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k+6)\cdot 2\pi}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) =\\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{k-6} - \frac{1}{k+6}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) =\\
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6}{(k-6)\cdot(k+6)} - \frac{k-6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\left((-1)^{k}-1\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{k+6-k+6}{(k-6)\cdot(k+6)}\right)\cdot\Big((-1)^k-1\Big)= \\
&= \frac{A}{4\pi}\left(\frac{12}{k^2-36}\right)\cdot\Big((-1)^k-1\Big)= \\
&= \frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{k^2-36}\right)\cdot\Big((-1)^k-1\Big)= \\
&= \frac{3\cdot A}{\pi\cdot(k^2-36)}\cdot\Big((-1)^k-1\Big)
\end{aligned}
$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{3\cdot A}{\pi\cdot(k^2-36)}\cdot\Big((-1)^k-1\Big)$, dla $k\neq 6\wedge k\neq -6$. Oznacza to iż współczynnik dla $k=6$ i $k=-6$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_6

$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{6-k_0^1}-F_{6-k_0^2}\Big)= \\
&= \Big\{\ k_0^1=6\quad k_0^2=-6\ \Big\}= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{6-6}-F_{6-(-6)}\Big)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0-F_{6+6}\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0-F_{12}\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_{12}

$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_0-F_{12)}\Big)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\frac{A}{2}-\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot\Big((-1)^{12}-1\Big)\right)= \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\frac{A}{2}-\frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot\Big((-1)^{12}-1\Big)= \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}-\frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot(1-1)= \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}-\frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot(0)= \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}-\frac{A}{12\cdot 4\pi}\cdot 0= \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}-0= \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-6}

$$
\begin{aligned}
G_{-6} &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\Big(F_{-6-k_0^1}-F_{-6-k_0^2}\Big)= \\
&= \Big\{\ k_0^1=6\quad k_0^2=-6\ \Big\}=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-6-6} - F_{-6-(-6)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-12} - F_{-6+6}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-12} - F_{0}\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-12} oraz F_0

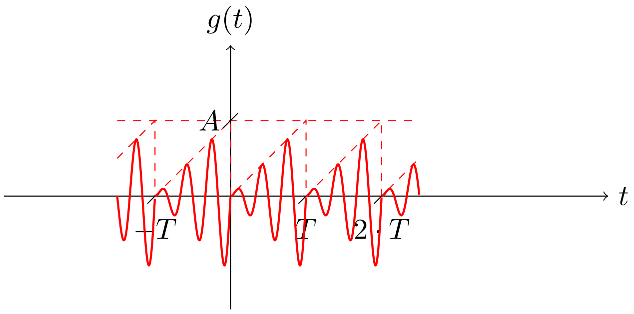
$$
\begin{aligned}
G_6 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{-12} - F_{0)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{-12\cdot 2\pi}\cdot\left((-1)^{-12} - 1\right) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot(1-1) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{12\cdot 2\pi}\cdot(0) - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(0 - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(-\frac{A}{2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\frac{A}{2} = \\
&= -\frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$
\begin{aligned}
G_{-6} &= -\frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_6 &= \frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_k &= \frac{3\cdot A}{\pi\cdot(k^2-36)}\cdot\left((-1)^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał w pierwszym okresie za pomocą wzoru.

$$g(x) = \frac{A}{T} \cdot t \cdot sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \tag{2.7}$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \ sin(x) = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2 \cdot \jmath} \ \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot \jmath} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \jmath}\left(f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera a_k i b_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

Korzystając z zależności miedzy współczynnikami F_k zespolonego szeregu Fouriera i współczynnikami a_k i b_k trygonometrycznego szeregu Fourier możemy wyznaczyć współczynniki F_k zespolonego szeregu Fouiera

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \\ F_k &= a_k - \jmath \cdot b_k \end{aligned}$$

a wiec dla sygnału $f(t)$ z zadania 1 współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wynoszą:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= a_0 = \frac{A}{2} \\
F_k &= a_k - \jmath \cdot b_k = \\
&= 0 - \jmath \cdot \left(-\frac{A}{k \cdot \pi} \right) = \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi}
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$
\begin{aligned}
g^1(t) &= f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\
G_k^1 &= F_{k-k_0}
\end{aligned}
$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot \jmath} f(t) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\
g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\
G_k &= G_k^1 - G_k^2 \\
G_k &= \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right)
\end{aligned}
$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2.

$$
\begin{aligned}
e^{\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{\jmath \cdot \frac{2 \ cdot 3\pi}{T} \cdot t} \\
&= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{-\jmath \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{-\jmath \cdot \frac{2 \ cdot 3\pi}{T} \cdot t} \\
&= e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \\
&= e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-3) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -3
\end{aligned}
$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$
G_k = \frac{1}{2 \cdot \jmath} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^1)\cdot\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k-k_0^2)\cdot\pi}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{(k-3)\cdot\pi} - \jmath\cdot\frac{A}{(k-(-3))\cdot\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\cdot\jmath\cdot\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{k-3} - \frac{1}{k+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\left(\frac{k+3}{(k-3)\cdot(k+3)} - \frac{k-3}{(k+3)\cdot(k-1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{k+3-(k-3)}{(k-3)\cdot(k+3)} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{k+3-k+3}{k^2-9} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\frac{6}{k^2-9} = \\
&= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}
\end{aligned}
$$

A wiec współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}$, dla $k \neq 3 \wedge k \neq -3$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 3$ i $k = -3$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zacznijmy od wyznaczenia G_3

$$
\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{3-k_0^1} - F_{3-k_0^2}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_{3-3} - F_{3-(-3)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_{3+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_6\right)
\end{aligned}
$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_6

$$
\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(F_0 - F_6\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\jmath}\left(\frac{A}{2} - \jmath\cdot\frac{A}{6\cdot\pi}\right) = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{2\cdot 6\cdot\pi} = \\
&= \frac{A}{4\cdot\jmath} - \frac{A}{12\cdot\pi} = \\
&= -\frac{A}{12\cdot\pi} + \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}
$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-3}

$$\begin{aligned}
G_{-3} &= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{-3-k_0^1} - F_{-3-k_0^2}\right) = \\
&= \left\{\ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3\ \right\} = \\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{-3-3} - F_{-3-(-3)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{-6} - F_{-3+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{-6} - F_{0}\right)
\end{aligned}$$

A wiec musimy podstawić wartość współczynników F_{-6} oraz F_0

$$\begin{aligned}
G_{3} &= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(F_{-6} - F_{0)}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot \jmath}\left(\jmath\cdot\frac{A}{-6\cdot\pi} - \frac{A}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{-12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath} = \\
&= -\frac{A}{12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath}
\end{aligned}$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
G_{-3} &= -\frac{A}{12\cdot\pi} + \frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_{3} &= -\frac{A}{12\cdot\pi} - \frac{A}{4\cdot\jmath} \\
G_{k} &= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{3}{k^2-9}
\end{aligned}$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera. Twierdzenie Parsevala

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

4.2 Filtry

ISBN 978-83-939620-1-3