Teoria Sygnałów w zadaniach

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

30 kwietnia 2019

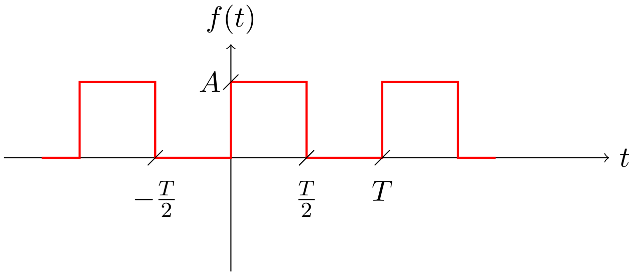
Politechnika Poznańska
Wydział Elektroniki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji Multimedialnej i Mikroelektroniki

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Książka współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{1}$$

Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

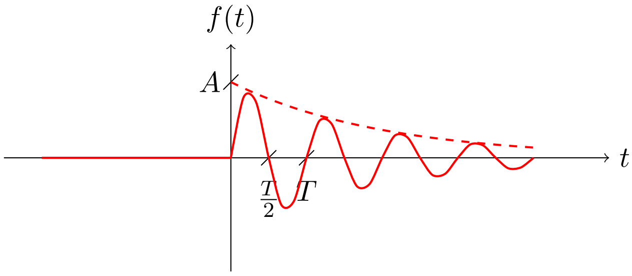
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{2}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$

Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \tag{4}$$

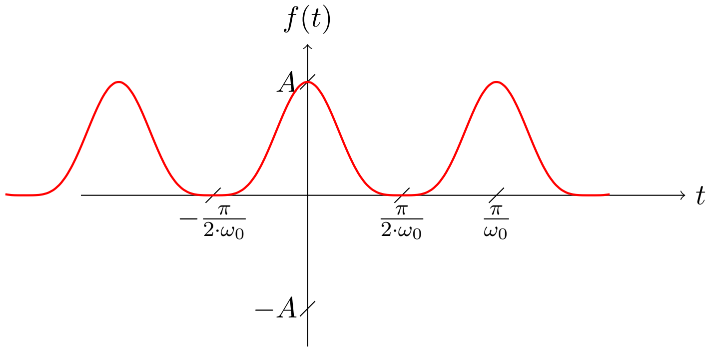
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} u = sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} u = cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) & dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \cdot dt & v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{Bmatrix} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Bigg|_{0}^{\frac{\tau}{2}} - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) \right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right)$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+0\right)\right.\right.$$
$$+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\left(\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a}\cdot 1\cdot 1\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\right)$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\right.$$
$$-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}$$
$$\left.+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)$$
$$=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\\ -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\ +\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt=\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\ =\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\\ =\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)}\\ =\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a\cdot t}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\end{array}\right\}$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(\frac{-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot e^{-a\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T}{2\pi}}{\left(1-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\right)}\right)$$
$$=0$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0

Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot cos^4(\omega_0 \cdot t)$ okresowego przedstawionego na rysunku



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \tag{5}$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot dt \\
&= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot cos\left(\omega_0\cdot t\right)^4\cdot dt \\
&= \left\{cos(x) = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\} \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} A\cdot\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^4\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}}{2}\right)^2\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{\left(e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+\left(e^{-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2}{2^2}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^{\jmath\cdot\omega_0\cdot t-\jmath\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2\cdot e^{0}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(\frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+2}{4}\right)^2\cdot dt \\
&= \frac{\omega_0}{\pi}\cdot A\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2+2\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}+e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)\cdot 2+2^2}{4^2}\cdot dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + \left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\right)^2 + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 2\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot 2 + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 2\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2\cdot e^{0} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \frac{e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 2 + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4}{16} \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} \left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t} + 6\right) \cdot dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot d\right.$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t & z_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t & z_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t \\ dz_1 = \jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_2 = -\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot dt & dz_3 = \jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt & dz_4 = -\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot\frac{dz_1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot\frac{dz_2}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_3}\cdot\frac{dz_3}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 4\cdot e^{z_4}\cdot\frac{dz_4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} 6\cdot dt\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_1}\cdot dz_1 + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_2}\cdot dz_2 + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_3}\cdot dz_3\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} e^{z_4}\cdot dz_4 + 6\cdot\int_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} dt\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_1}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{z_2}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_3}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{z_4}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} + 6\cdot t\Big|_{-\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{+\jmath\cdot 4\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\cdot\omega_0}}\right) + 6\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega_0} + \frac{\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot 2\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot 2\cdot\pi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{\jmath\cdot\pi} - e^{-\jmath\cdot\pi}\right) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot\pi} - e^{\jmath\cdot\pi}\right) + 6\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\omega_0}\right)\right)$$

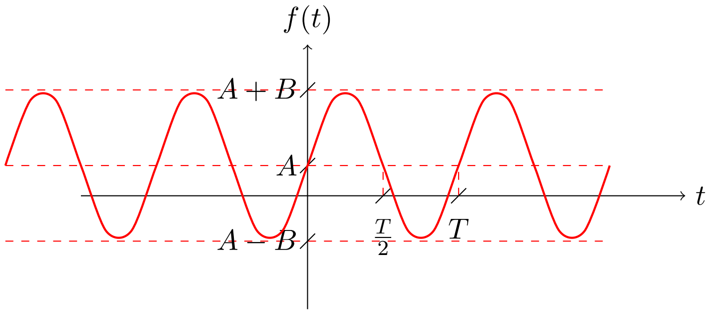
$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot(1-1) + \frac{1}{-\jmath\cdot 4\cdot\omega_0}\cdot(1-1)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot(-1-(-1)) + \frac{4}{-\jmath\cdot 2\cdot\omega_0}\cdot(-1-(-1)) + 6\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-\jmath \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-\jmath \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \\
&= \frac{A}{16} \cdot 6 \\
&= \frac{A}{8} \cdot 3 \\
&= \frac{3}{8} \cdot A
\end{aligned}
$$

Wartość średnią sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$

Oblicz energię sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku



Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{6}$$

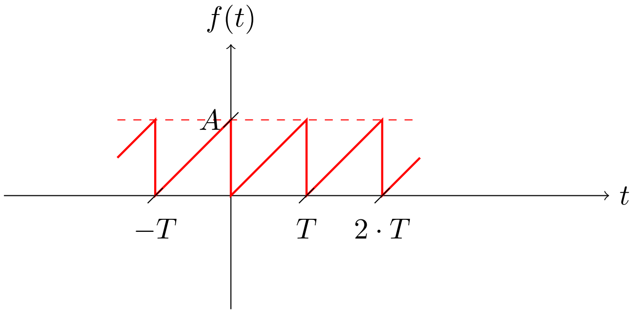
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left| A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(A + B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= \int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot \int_0^T dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} \\
&= A^2 \cdot t|_0^T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T sin\left(z\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + B^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot (T - 0) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T sin\left(z\right) \cdot dz + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \cdot dt \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(z\right)|_0^T\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt\right) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \end{array} \right\} \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Bigg|_0^T\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t|_0^T - \int_0^T cos\left(w\right) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw\right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T cos\left(w\right) \cdot dw\right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left(-cos\left(2\pi\right) + cos\left(0\right)\right) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -sin\left(w\right)|_0^T\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot (-1+1) + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^T \right) \\
&= A^2 \cdot T + 2 \cdot A \cdot B \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot 0 + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right)\right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (sin\,(4\pi) - sin\,(0))\right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0-0)\right) \\
&= A^2 \cdot T + B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (T) \\
&= A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $A^2 \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T$

Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{7}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{8}$$

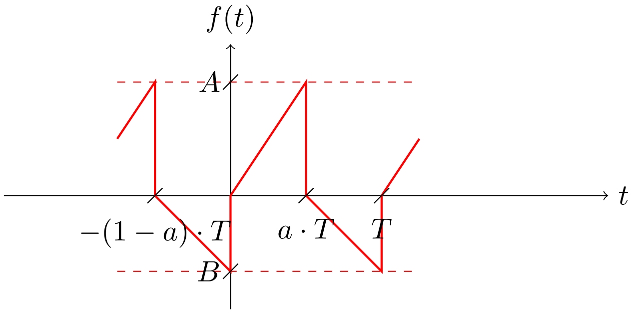
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt \\
&= \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) \\
&= \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot T
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot T$

Oblicz energię sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać za pomocą dwuch prostych. Ogólne równanie prostej:

$$f(t) = m \cdot t + b \tag{9}$$

W pierwszym okresie w pierwszej części wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry m i b.

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a\cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = -\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcje przedziałową

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a\cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in C$$

Energię sygnału okresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \tag{10}$$

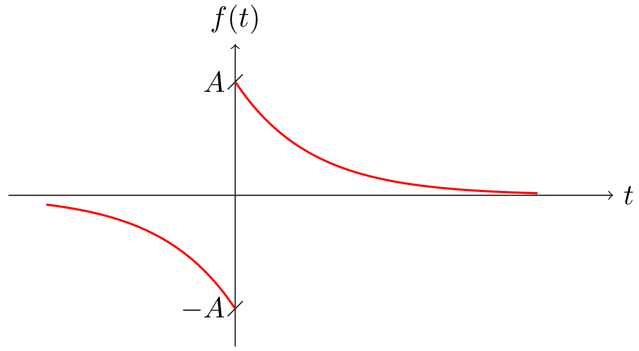
Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
E &= \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^{a\cdot T} \left|\frac{A}{a \cdot T} \cdot t\right|^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left|\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a\right|^2 \cdot dt \\
&= \int_0^{a\cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t\right)^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a\right)^2 \cdot dt \\
&= \int_0^{a\cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\left(\frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t\right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T - a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a\right)^2\right) \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \int_0^{a\cdot T} t^2 \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2\right) \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot dt\Big|_0^{a\cdot T}\right) + \int_{a\cdot T}^{T} \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt - \int_{a\cdot T}^{T} 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \int_{a\cdot T}^{T} \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3\Big|_0^{a\cdot T}\right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a\cdot T}^{T} t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a\cdot T}^{T} t \cdot dt + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a\cdot T}^{T} dt \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3\Big|_{a\cdot T}^{T}\right) - \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2\Big|_{a\cdot T}^{T}\right) \\
&+ \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t\big|_{a\cdot T}^{T}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0\right) + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3\right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2\right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) \\
&= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3\right) \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2\right) + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(1 - a^3\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(1 - a^2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot \left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T \\
&- \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot T - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 \cdot T \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6}\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\left(1 + a + a^2\right) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 2 \cdot a + a^2\right) \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{3} \cdot a \cdot T + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a) \cdot T$

Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & dla \quad t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & dla \quad t \in (0; \infty) \end{cases} \tag{11}$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy z wzoru

$$E = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \tag{12}$$

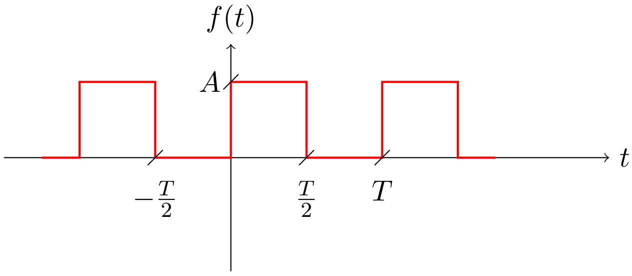
Podstawiamy do wzoru na enargie wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left| -A \cdot e^{a \cdot t} \right|^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left| A \cdot e^{-a \cdot t} \right|^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} \left(-A \cdot e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \left(A \cdot e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} (-A)^2 \cdot \left(e^{a \cdot t} \right)^2 \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot \left(e^{-a \cdot t} \right)^2 \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} \\
&= \lim_{\tau \to \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} e^{z} \cdot dz - \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} e^{w} \cdot dw \right) \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{z} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{w} \Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(e^{2\cdot a\cdot t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - e^{-2\cdot a\cdot dt}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}} \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{2\cdot a\cdot 0} - e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}}\right) - \left(e^{-2\cdot a\cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2\cdot a\cdot 0}\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(\left(e^{0} - e^{-a\cdot\tau}\right) - \left(e^{-a\cdot\tau} - e^{0}\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau} - e^{-a\cdot\tau} + 1\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot \left(2 - 2\cdot e^{-a\cdot\tau}\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{2\cdot a} \cdot 2 \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau}\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \frac{A^2}{a} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot\tau}\right) \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}
$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$

Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{13}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{14}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{16}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right)\cdot dz \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\, sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - sin\left(0\right)\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(sin\left(k\cdot\pi\right) - 0\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot sin\left(k\cdot\pi\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{18}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2\cdot A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{2\cdot A}{T\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\,cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\,cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)-cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\pi\right)-cos\left(0\right)\right) \\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}\left(cos\left(k\cdot\pi\right)-1\right) \\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k\cdot\pi}\left(1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2} \\
a_k &= 0 \\
b_k &= \frac{A}{k\cdot\pi}\left(1-cos\left(k\cdot\pi\right)\right)
\end{aligned} \tag{20}
$$

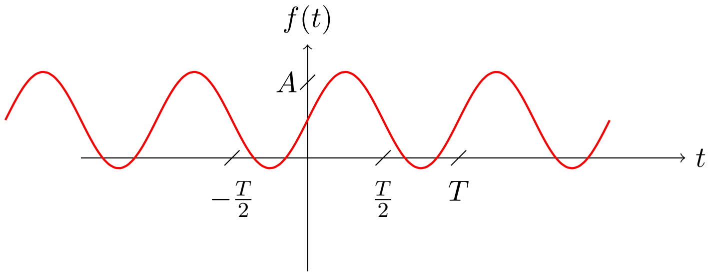
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	0

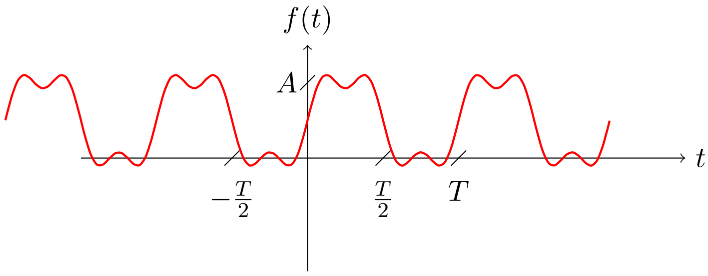
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)+b_k\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right] \tag{21}
$$

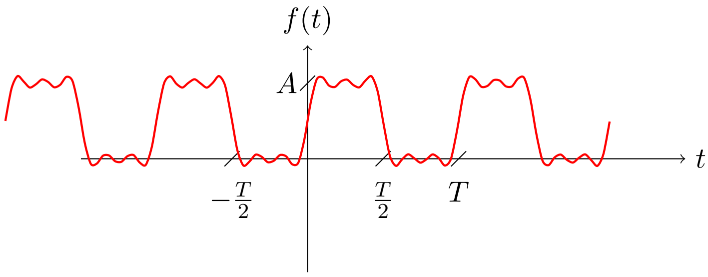
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



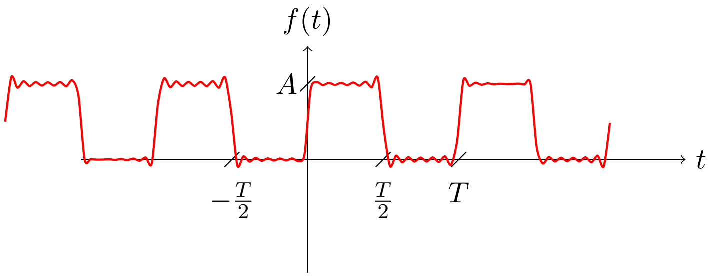
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



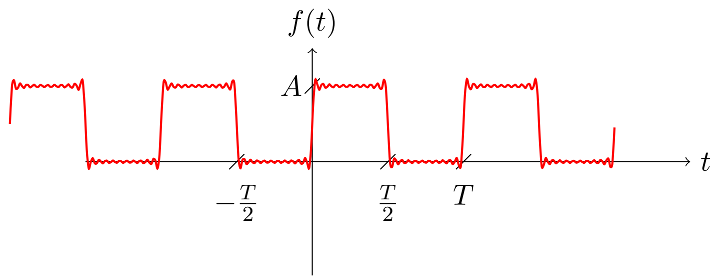
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

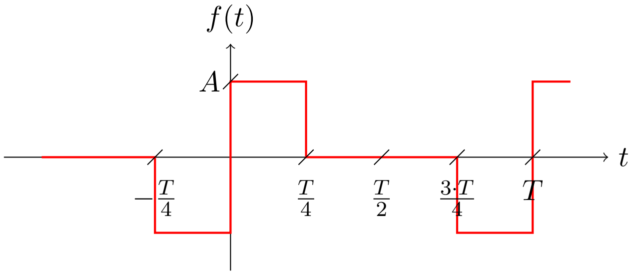


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3\cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{22}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{23}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_{0}^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_{0}^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{25}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt & = \frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot\frac{dt}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} cos\left(z\right)\cdot dt + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} cos\left(z\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\,sin\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\,sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} + sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(sin\left(0\right) - sin\left(-k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) - sin\left(0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\left(0 - sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(-sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot(0)\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{27}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{matrix} z & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz & = k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt & = \frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{2}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right)\\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(-\int_{-\frac{T}{4}}^{0} sin\left(z\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{T}{4}} sin\left(z\right)\cdot dz\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(z\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(z\right)\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{0} - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(0\right)\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(0\right) - cos\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(0\right)\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\right)\\
&= \frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(2 - 2\cdot cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_k &= 0\\
b_k &= \frac{2\cdot A}{k\cdot\pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

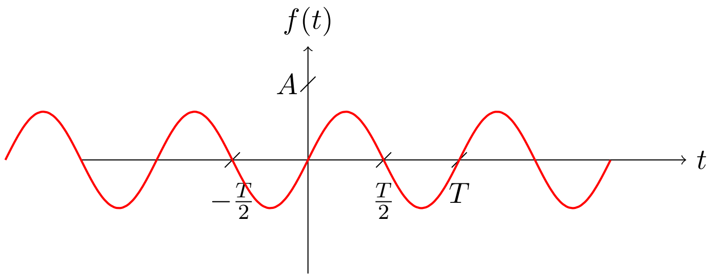
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$	0	$\frac{2\cdot A}{5\cdot\pi}$	$\frac{2\cdot A}{3\cdot\pi}$

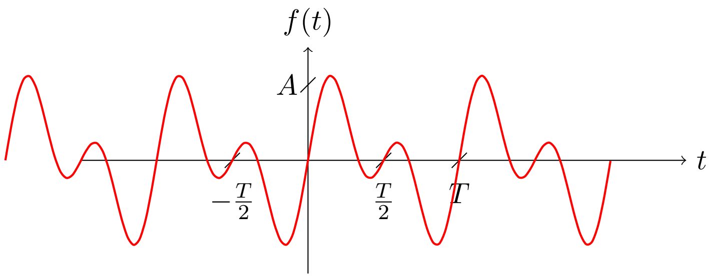
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{30}$$

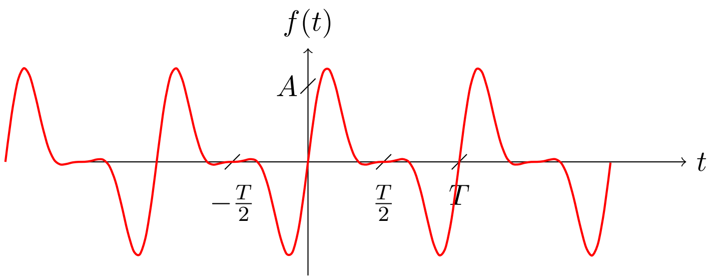
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



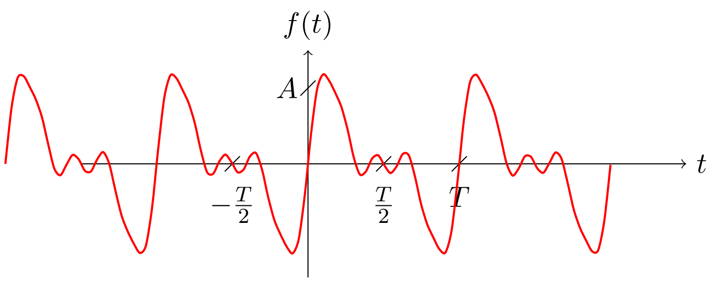
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



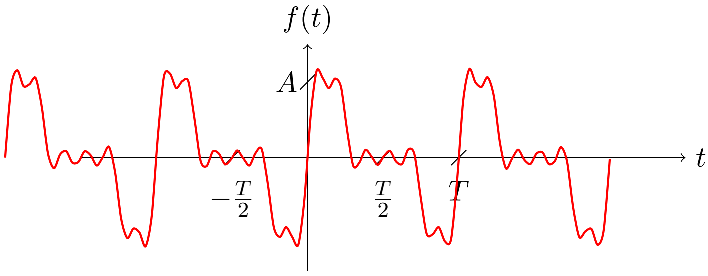
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



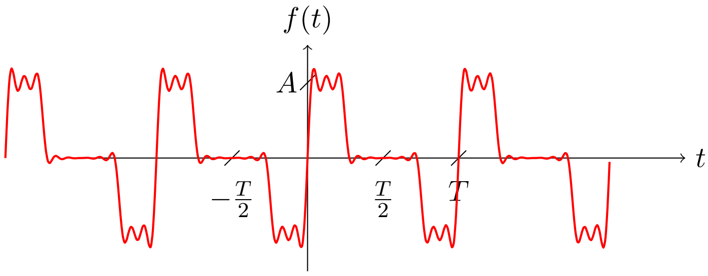
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



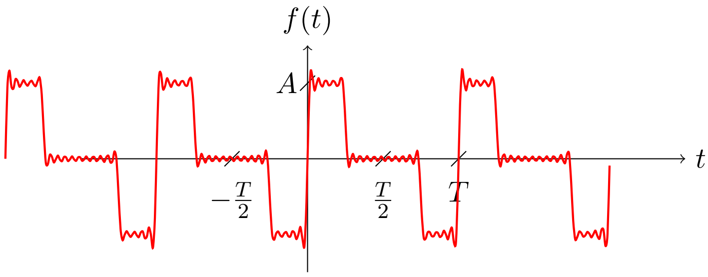
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

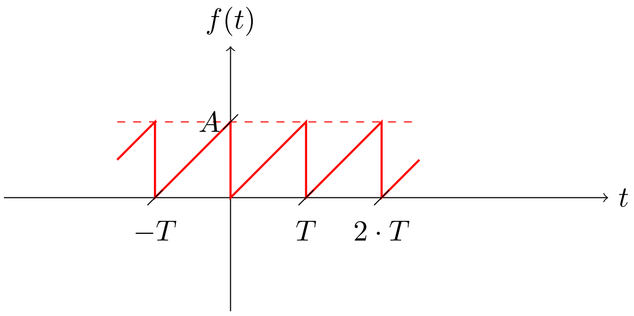


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{31}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{32}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right) \\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2 \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{33}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\ du & = dt & v & = \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^T\right) \\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right) \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot sin\left(k\cdot 2\pi\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(cos\left(k\cdot 2\pi\right) - cos\left(0\right)\right)\right) \\
&= 2\cdot A\cdot\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(1-1)\right) \\
&= 2\cdot A\cdot\left(0 + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right) \\
&= 2\cdot A\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{34}
$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \tag{35}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\\ du & = dt & v & = -\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-t\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^T + \int_0^T\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(T\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - 0\cdot\frac{T}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^T\right)\\
&= \frac{2\cdot A}{T^2}\cdot\left(-\left(\frac{T^2}{k\cdot 2\pi}\cdot cos\left(k\cdot 2\pi\right)\right) + \frac{T^2}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) - sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)\right)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\cdot 1\right) + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot\left(sin\left(k\cdot 2\pi\right) - sin\left(0\right)\right)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot(0-0)\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi} + \frac{1}{(k\cdot 2\pi)^2}\cdot 0\right)\\
&= 2\cdot A\cdot\left(-\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right)\\
&= -\frac{2\cdot A}{k\cdot 2\pi}\\
&= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned} \tag{36}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k\cdot\pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A}{2}\\
a_k &= 0\\
b_k &= -\frac{A}{k\cdot\pi}
\end{aligned} \tag{37}$$

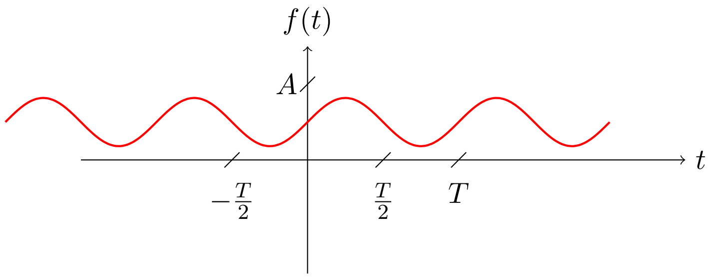
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2\cdot\pi}$	$-\frac{A}{3\cdot\pi}$	$-\frac{A}{4\cdot\pi}$	$-\frac{A}{5\cdot\pi}$	$-\frac{A}{6\cdot\pi}$

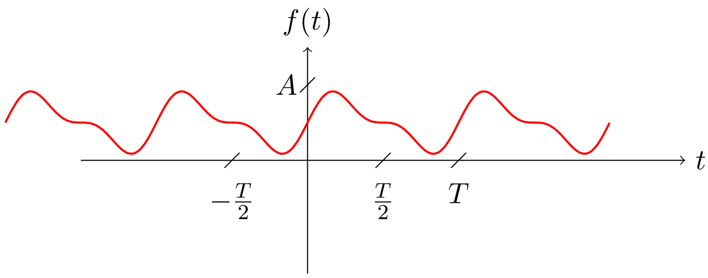
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{38}$$

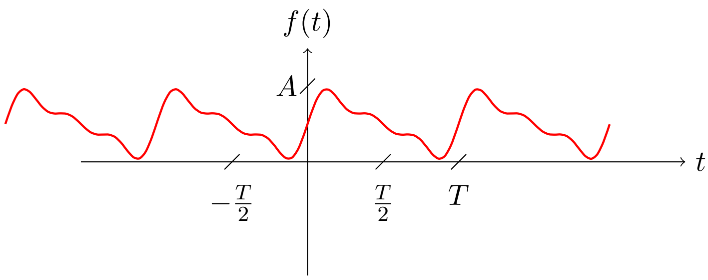
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



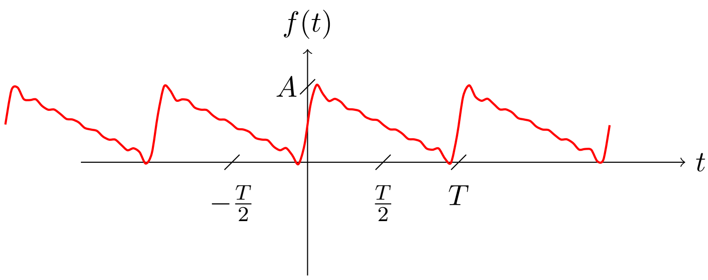
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



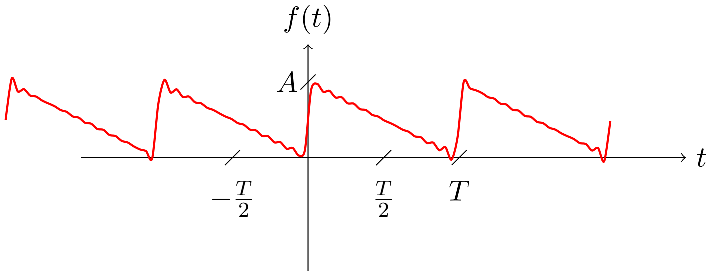
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

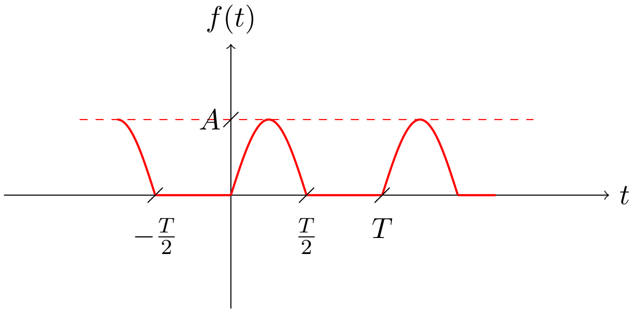


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki trygonometrzycznego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{39}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{40}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \tfrac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\,(\pi) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$
a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{41}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \begin{Bmatrix} cos\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} + e^{-\jmath \cdot x}}{2} \\ sin\,(x) & = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2\jmath} + \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2\jmath} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}
$$

$$= \left\{\begin{matrix} z_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)} \wedge k\neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)} \wedge k\neq 1 \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right)\cdot\frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right)\cdot\frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_1\right)\cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z_2\right)\cdot dz_2\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(-cos\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(-cos\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1+k)\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1-k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1-k)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) - cos\left(0\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(\pi\cdot(1-k)\right) - cos\left(0\right)\right)\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(cos\left(0\right) - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{1+k}\cdot\left(1 - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right) + \frac{1}{1-k}\cdot\left(1 - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1-k}{(1+k)\cdot(1-k)}\cdot\left(1 - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)\right) + \frac{1+k}{(1+k)\cdot(1-k)}\cdot\left(1 - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1 - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) - k + k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)} + \frac{1 - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right) + k - k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\frac{1 - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) - k + k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) + 1 - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right) + k - k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{(1+k)\cdot(1-k)}\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2 - cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) + k\cdot cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) - cos\left(\pi\cdot(1-k)\right) - k\cdot cos\left(\pi\cdot(1-k)\right)}{1-k^2}$$

$$= \left\{\begin{matrix} cos\left(\pi\cdot(1+k)\right) = cos\left(\pi + k\cdot\pi\right) = -cos\left(k\cdot\pi\right) \\ cos\left(\pi\cdot(1-k)\right) = cos\left(\pi - k\cdot\pi\right) = -cos\left(-k\cdot\pi\right) = -cos\left(k\cdot\pi\right) \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2 + cos\left(k\cdot\pi\right) - k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right) + cos\left(k\cdot\pi\right) + k\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}$$

$$= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{2 + 2\cdot cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}$$

$$= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{1 + cos\left(k\cdot\pi\right)}{1-k^2}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1+cos(k\cdot\pi)}{1-k^2}$ dla $k \neq 1$
a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost a_1

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) \\
&= \left\{\begin{matrix} cos\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}+e^{-\jmath\cdot x}}{2} \\ sin\left(x\right) & = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath}\end{matrix}\right\} \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2\jmath}\cdot\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}}{2}\cdot dt + 0\right) \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{2\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t+\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-1)}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+1)}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 0}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T\cdot 2\jmath}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}+e^{0}-e^{0}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}-e^{-\jmath\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2}}{2\jmath}\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot 2\right)\cdot dt \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T}\cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}}\end{matrix}\right\} \\
&= \frac{A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot\frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T\cdot\frac{4\pi}{T}}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(z\right)\cdot dz \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(z\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{A}{4\pi}\cdot\left(-cos\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (cos\,(2\pi) - cos\,(0)) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1-1) \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$
b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \tag{42}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\,(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}\right) \cdot dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right)\right) \cdot dt \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\begin{matrix} z_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k) & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k) \\ dz_1 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)\cdot dt & z_2 & = \frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)\cdot dt \\ dt & = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)} \wedge k \neq -1 & dt & = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)} \wedge k \neq 1 \end{matrix}\right\} \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right)\cdot\frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right)\cdot\frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_1\right)\cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z_2\right)\cdot dz_2\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(sin\left(z_1\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(sin\left(z_2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1+k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot(1-k)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1+k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1+k)\right)\right)\right. \\
&\left. -\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1-k)\right) - sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot(1-k)\right)\right)\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot\left(sin\left(\pi\cdot(1+k)\right) - sin\left(0\right)\right)\right. \\
&\left. -\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot\left(sin\left(\pi\cdot(1-k)\right) - sin\left(0\right)\right)\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot(0-0)\right. \\
&\left. -\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot(0-0)\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1+k)}\cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot(1-k)}\cdot 0\right) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot(0-0) \\
&= -\frac{A}{T}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost b_1

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\cdot\left(A\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\cdot dt\right) \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath\cdot x}-e^{-\jmath\cdot x}}{2\jmath} \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot dt + 0 \right)$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right)$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{0} - e^{0} \right) \cdot dt$$

$$= \frac{A}{T \cdot \jmath \cdot \jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{matrix} \right\}$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t|_0^{\frac{T}{2}} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} cos\left(z\right) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} sin\left(z\right)|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(sin\left(2\pi\right) - sin\left(0\right) \right) - \frac{T}{2} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(0 - 0 \right) - \frac{T}{2} \right)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right)$$

$$= \frac{A}{2}$$

A wiec wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + cos\left(k \cdot \pi\right)}{1 - k^2} \\ b_1 &= \frac{A}{2} \\ b_k &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

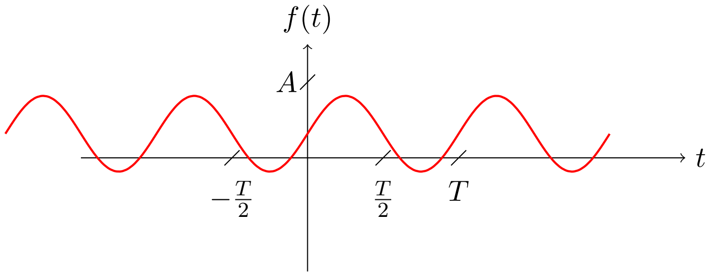
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15}\frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35}\frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

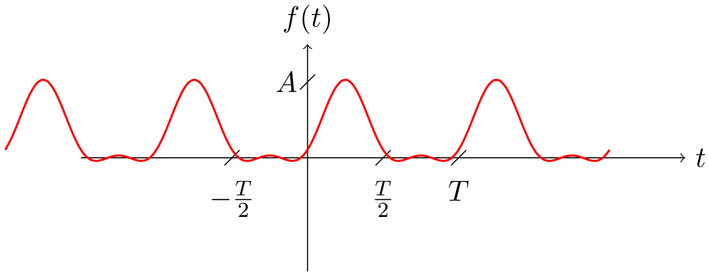
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right] \tag{44}$$

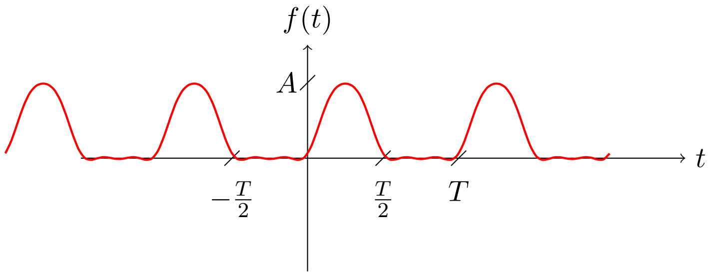
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



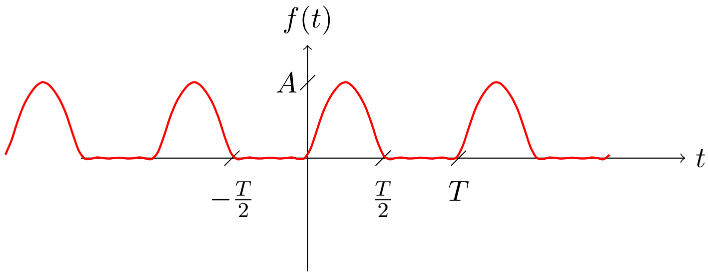
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



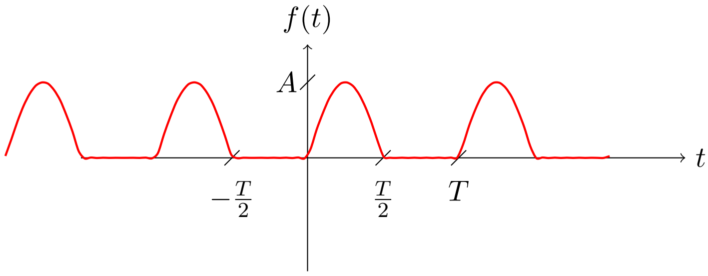
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy

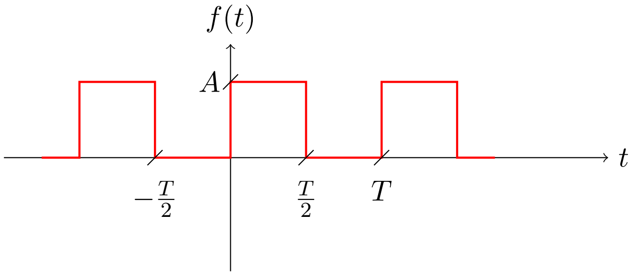


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{45}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{46}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \left(\frac{\cancel{T}}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \tag{47}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{48}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \\
&= \left\{\begin{matrix} z & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ dz & = -\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot\frac{dz}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} \\
&= -\frac{A}{T\cdot\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z}\cdot dz \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\, e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - e^{0}\right) \\
&= -\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right) \\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi} - 1\right)
\end{aligned} \tag{49}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi}-1\right)$

Współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\pi}-1\right)
\end{aligned} \tag{50}
$$

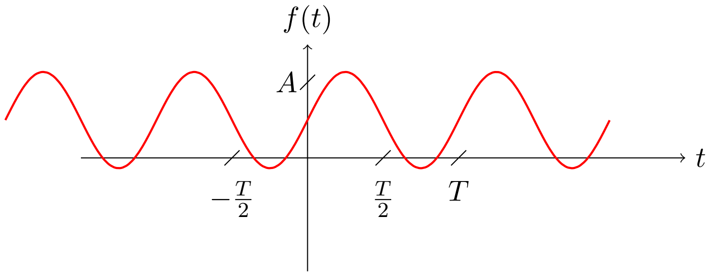
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath\cdot\frac{A}{5\pi}$
$\lvert F_k\rvert$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\left\{F_k\right\}$	π	0	π	0	π	0	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$

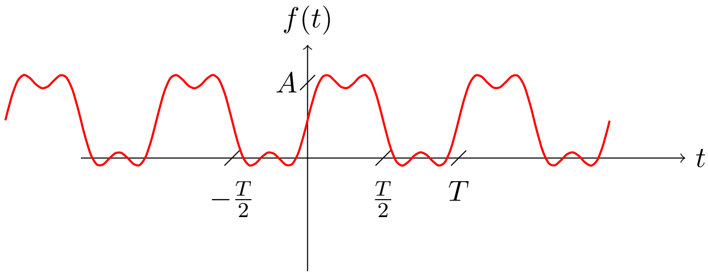
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\cdot e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t} \tag{51}
$$

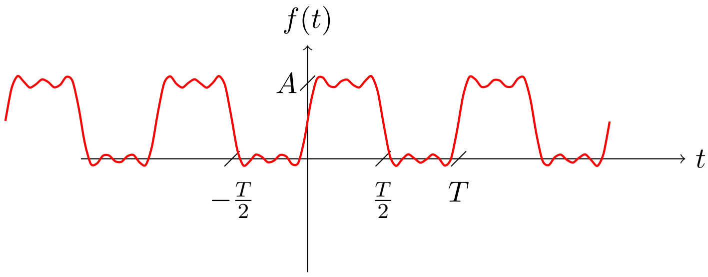
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



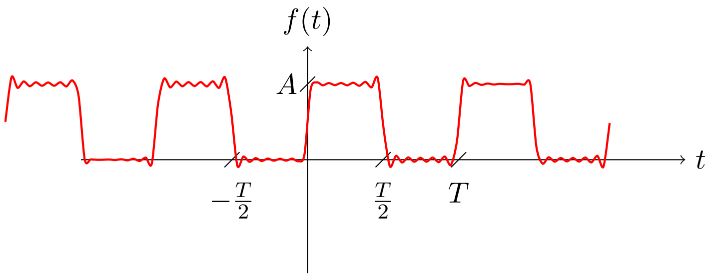
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



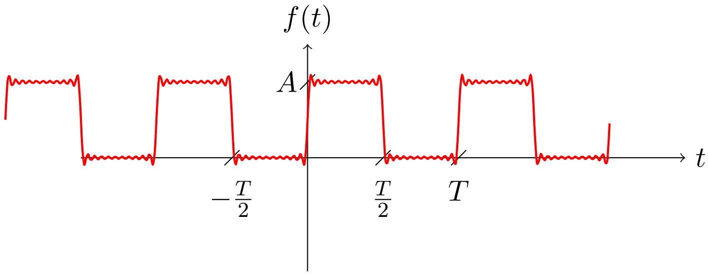
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

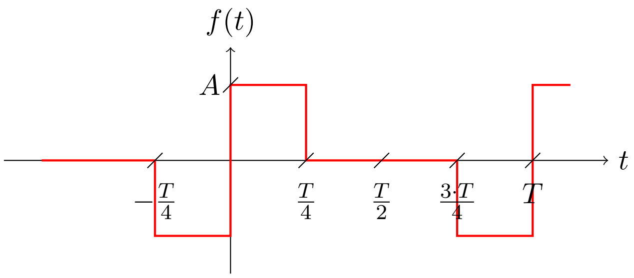


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3 \cdot T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{52}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{53}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{0} dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t|_{-\frac{T}{4}}^{0} + A \cdot t|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4}\right)\right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{55}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0} -A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{4}} A\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0\cdot dt\right)\\
&= \left\{\begin{aligned} z &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot t\\ dz &= -\jmath\cdot k\cdot\tfrac{2\pi}{T}\cdot dt\\ dt &= \tfrac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\end{aligned}\right\}\\
&= \frac{1}{T}\left(-A\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + A\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot\frac{dt}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}} + 0\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(-\frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{-\frac{T}{4}}^{0} e^{z}\cdot dt + \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{4}} e^{z}\cdot dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{A}{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(e^{z}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{z}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{0} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_{0}^{\frac{T}{4}}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(e^{0} - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}} - e^{0}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right) - \left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(1 - e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + 1\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(2 - \left(e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot 2\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot \pi}\cdot\left(1 - \frac{e^{\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\\
&= \left\{cos(x) \quad = \tfrac{e^{\jmath\cdot x} + e^{-\jmath\cdot x}}{2}\right\}\\
&= \frac{A}{\jmath\cdot k\cdot \pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= -\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot \pi}\cdot\left(1 - cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \jmath\cdot\frac{A}{k\cdot \pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath\cdot\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_k &= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

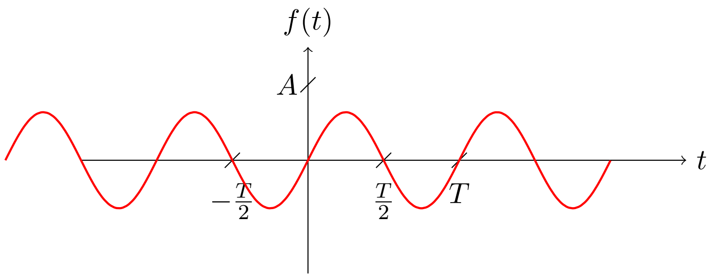
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-\jmath \cdot \frac{A}{5\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{3\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$

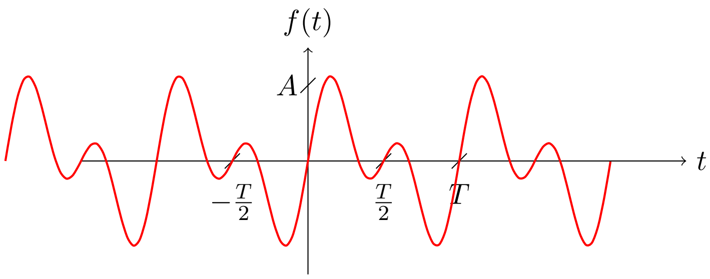
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\tag{57}
$$

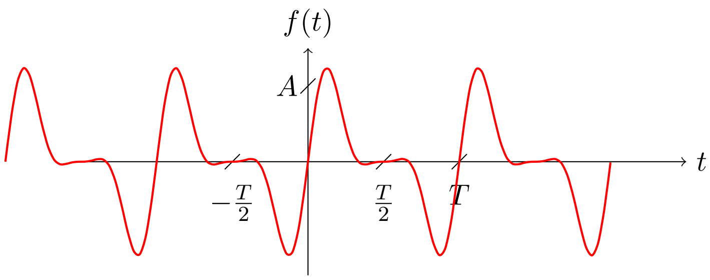
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



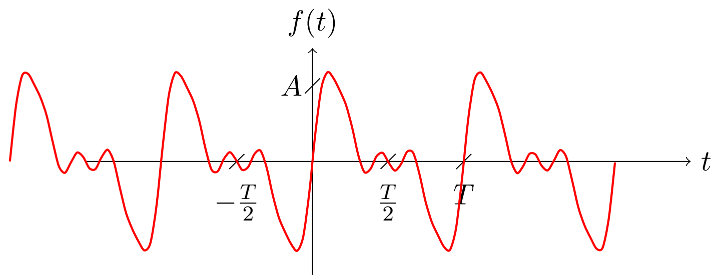
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



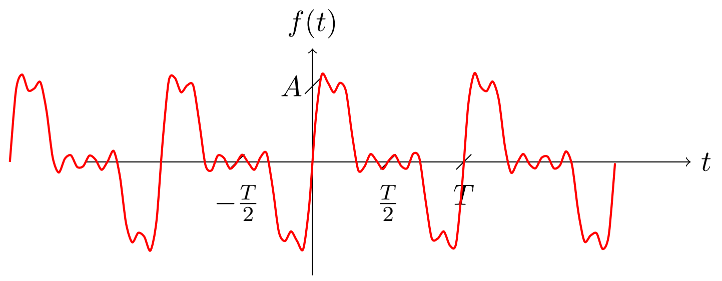
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



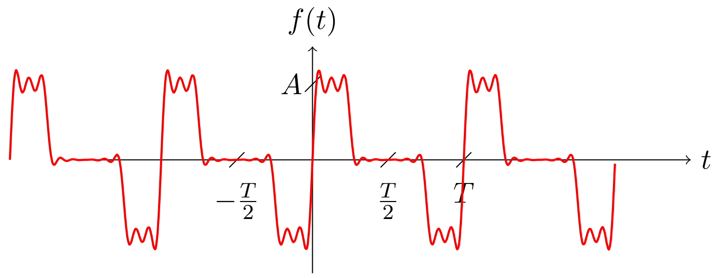
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



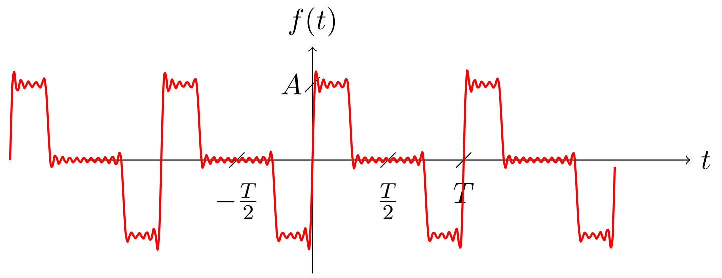
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

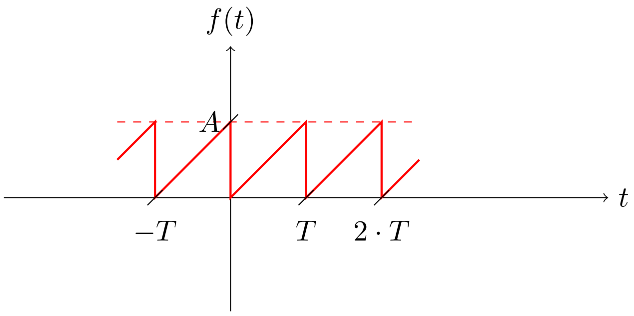


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa. W pierwszym okresie możemy ja opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \tag{58}$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A). Możemy wiec napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in C$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{59}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot dt\\
&= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_0^T\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T^2-0^2\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot T^2\\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$
F_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt \tag{60}
$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k=0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \frac{1\cdot A}{T^2}\int_0^T t\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\
&= \left\{\begin{matrix} u & = t & dv & = e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\\ du & = dt & v & = \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\end{matrix}\right\}\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(t\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot dt\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\left(T\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - 0\cdot\frac{T}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right) + \frac{T^2}{\left(-\jmath\cdot k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}\Big|_0^T\right)\\
&= \frac{A}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} + \frac{T^2}{-\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T} - e^{-\jmath\cdot k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot 0}\right)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}\cdot e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot\left(e^{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - e^0\right)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot(1-1)\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - \frac{1}{\left(k\cdot 2\pi\right)^2}\cdot 0\right)\\
&= A\cdot\left(\frac{1}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi} - 0\right)\\
&= \frac{A}{-\jmath\cdot k\cdot 2\pi}
\end{aligned}
$$

$$= \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$F_0 = \frac{A}{2}$$
$$F_k = \jmath \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \tag{61}$$

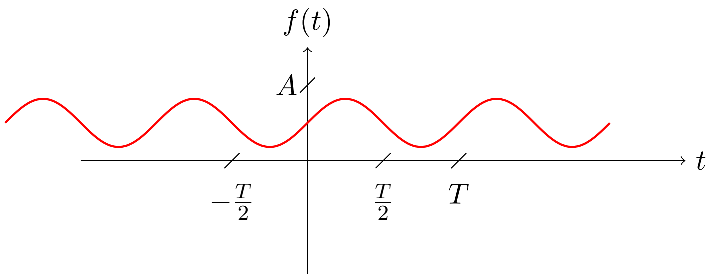
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\jmath \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg\,(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

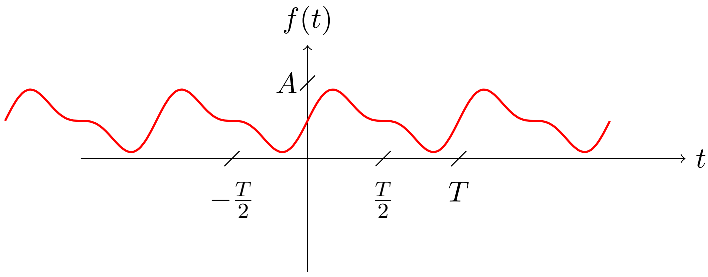
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{62}$$

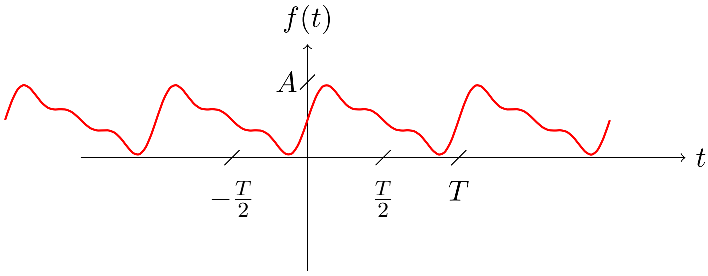
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



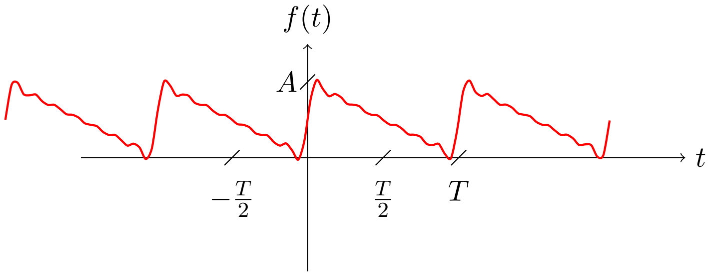
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



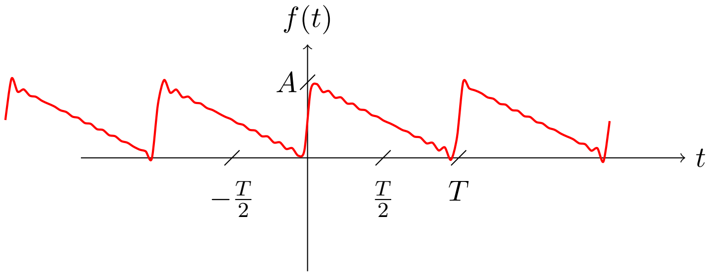
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

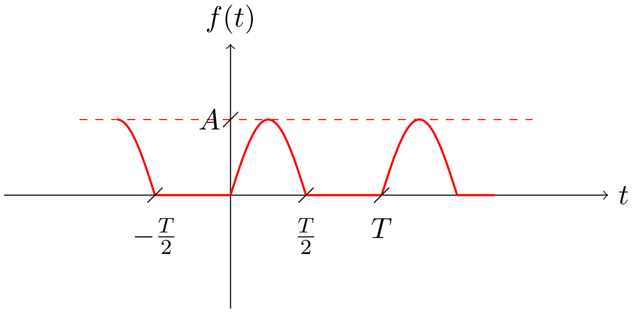


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in C \tag{63}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \tag{64}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \left\{ \begin{matrix} z & = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz & = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} sin\,(z) \cdot dz \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-cos\,(z)|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (cos\left(\pi\right) - cos\left(0\right)) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \tag{65}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{llll}
z_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\
dz_1 & = \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 & = -\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\
dt & = \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt & = \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)}
\end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath \cdot \jmath \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi} \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} - 2}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 2}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1-k^2}
\end{aligned}
$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k}+1}{1-k^2}$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć wspołczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_1

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \tfrac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz & = -\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt & = \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot dz \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(t\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^{0} \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1-1) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0\right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{A}{4\jmath} \\
&= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_1 wynosi $-\jmath \cdot \frac{A}{4}$

F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć współczynnik raz jeszcze tak wiec wyznaczmy wprost F_{-1}

$$
\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot e^{-\jmath \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ sin\left(x\right) \quad = \frac{e^{\jmath \cdot x} - e^{-\jmath \cdot x}}{2\jmath} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2\jmath} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + \jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\jmath \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0} \cdot dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= \jmath \cdot \tfrac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \jmath \cdot \tfrac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \tfrac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z} \cdot \frac{dz}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \big|_0^{\frac{T}{2}} - t \big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\jmath \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-\jmath \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(\frac{1}{\jmath \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= \frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2\jmath} \cdot \frac{T}{2} \\
&= -\frac{A}{4\jmath} \\
&= \jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
$$

A wiec wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\jmath \cdot \frac{A}{4}$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{-\jmath \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \\
F_{-1} &= \jmath \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -\jmath \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

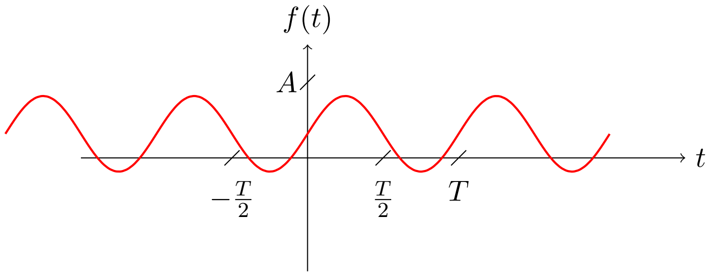
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$-\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\jmath \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$\lvert F_k \rvert$	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$

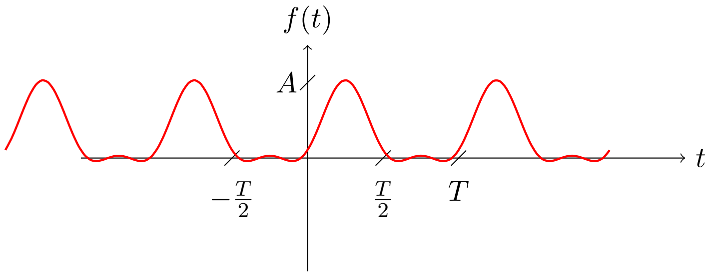
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{\jmath \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{67}
$$

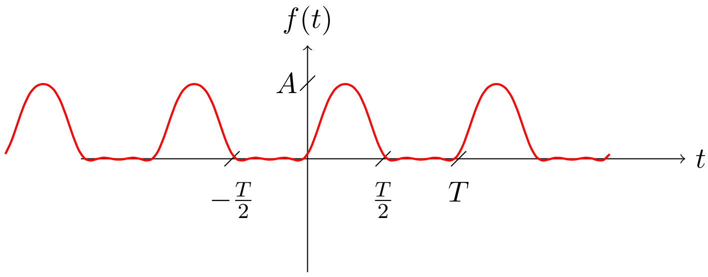
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



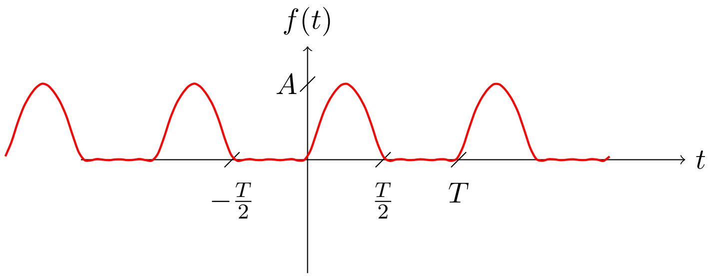
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



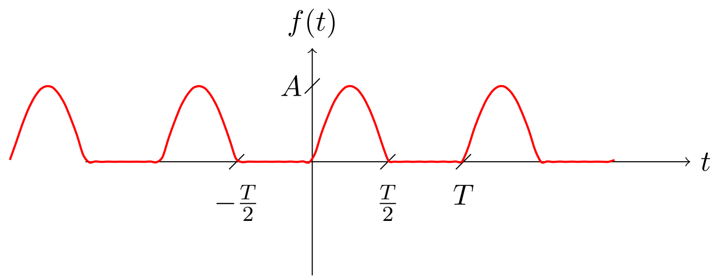
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy



W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.