

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2016

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Тест | 2 |
| 1.1 | Введение в теорию автоматического управления | 2 |
| 2 | Методы анализа непрерывных систем | 19 |
| 2.1 | Понятие пространства состояний | 19 |
| 2.2 | Линеаризация исходных уравнений | 21 |
| 2.3 | Линейные системы, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши | 30 |
| 2.3.1 | Однородные дифференциальные уравнения | 30 |
| 2.3.2 | Решение неоднородных векторно-матричных дифференциальных уравнений | 35 |
| 2.4 | Некоторые сведения из теории матриц | 36 |
| 2.4.1 | Собственные числа, характеристический полином, присоединенная матрица | 36 |
| 2.4.2 | Собственные значения и собственные векторы транспонированной матрицы | 40 |
| 2.4.3 | Определение функции от матрицы через её левые и правые собственные векторы | 44 |

Глава 1

Тест

1.1 Введение в теорию автоматического управления

На рубеже XVIII-XIX веков в эпоху промышленного переворота в Европе начинается новый этап развития автоматики, связанный с внедрением ее в промышленность. 1765 год знаменуется постройкой регулятора уровня котла паровой машины И.И. Ползунова. В 1784 го-ду появляется центробежный регулятор скорости паровой машины Дж.Уатта.

В это время формируется ряд важных принципов автоматики: принцип регулирования по отклонению Ползунова - Уатта и принцип регулирования по нагрузке Понселе. Первый из них развился в концепцию обратной связи, второй - в теорию инвариантности (Г.В. Ши-панов, Н.Н. Лузин, Б.Н. Петров). Идея регулирования по нагрузке может быть проиллюстрирована на примере генератора с последова-тельным (сериесным) возбуждением (рис. 1.1). При изменении нагрузки меняется ток возбуждения, который соответствующим изменением магнитного потока компенсирует дополнительное падение напряжения на внутреннем сопротивлении якоря генератора. Однако если при этом по каким-либо причинам изменяется скорость вращения якоря генератора, то за-стабилизировать напряжение на нагрузке в этой схеме уже не удастся.

От этого недостатка свободна схема, приведенная на рис. 1.2 - именно вследствие использования принципа обратной связи. В этой схеме входной потенциометр служит для задания (коэффициент) величины стабилизируемого на-

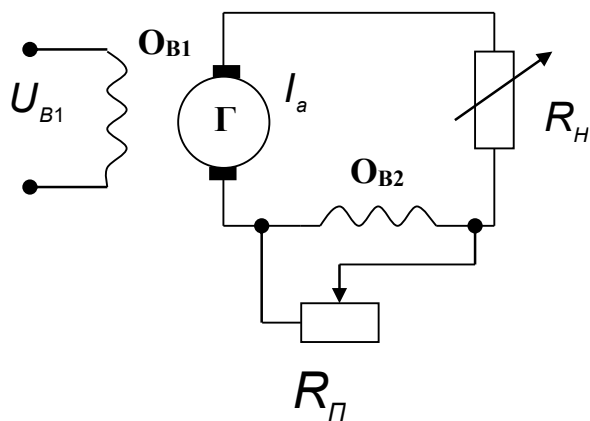


Рис. 1.1 – Пример регулирования по возмущению

пряжения; потенциометр, подключенный к якору генератора, позволяет регулировать коэффициент обратной связи. В этом случае, в отличие от систем регулирования по возмущению, не важно, какая именно причина вызвала изменение регулируемой величины. При изменении напряжения на щётках генератора в соответствии с электрической схемой изменяется напряжение на обмотке возбуждения. При отрицательном знаке обратной связи знак приращения напряжения возбуждения противоположен знаку изменения напряжения якоря генератора. В итоге результирующая величина отклонения напряжения генератора уменьшается по сравнению с соответствующим уходом напряжения в системе без обратной связи.

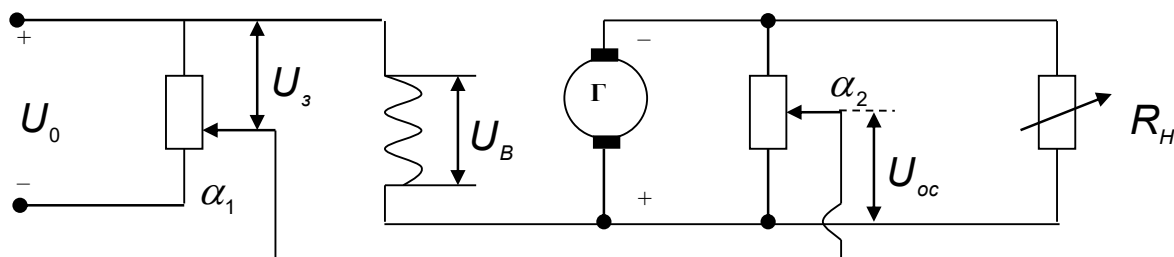


Рис. 1.2 – Стабилизация напряжения генератора с использованием обратной связи

На этом же принципе построена приведенная на рис. 1.3 система стабилизации скорости паровой машины Уатта. На рис. 1.4 представлена её функциональная схема. В данной системе с увеличением нагрузочного момента M_H падают обороты турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния $2r$ между

грузиками центробежного регулятора. Вследствие этого заслонка поднимается (увеличивается расстояние S) и растёт расход пара Q , подаваемого в турбину. Это приводит к росту числа оборотов турбины ω а следовательно, к компенсации нагрузочного момента M_H

При изменении нагрузки на валу паровой машины после окончания переходных процессов сохраняется так называемая статическая ошибка. Если бы это было не так, то грузики центробежного регулятора, а вместе с ними и заслонка заняли бы своё первоначальное положение, и не изменившееся в результате количество подаваемого в турбину пара не смогло бы уравновесить изменившийся момент нагрузки. Такая система называется статической. Работа её осуществляется именно за счёт наличия *статической* ошибки.

Рассматриваемая система относится к классу систем *прямого* действия, то есть таких, в которых для реализации регулятора не используются дополнительные источники энергии. В данном случае это плохо, потому что для мощных установок перемещение тяжёлой заслонки потребует неразумно громоздкого и тяжёлого центробежного регулятора.

Таким образом, система является статической системой прямого действия.

Введём следующие определения:

статистической системой называют систему, работающую за счет статической ошибки;

системой прямого действия называют систему, регулятор которой не имеет собственных источников энергии.

структурной схемой называется блок-схема, каждый элемент которой отображает некоторый математический оператор (группу операторов), описывающий рассматриваемую систему.

Использование функциональных и структурных схем позволяет более наглядно представить взаимосвязь между отдельными основными и промежуточными переменными объектов и систем управления

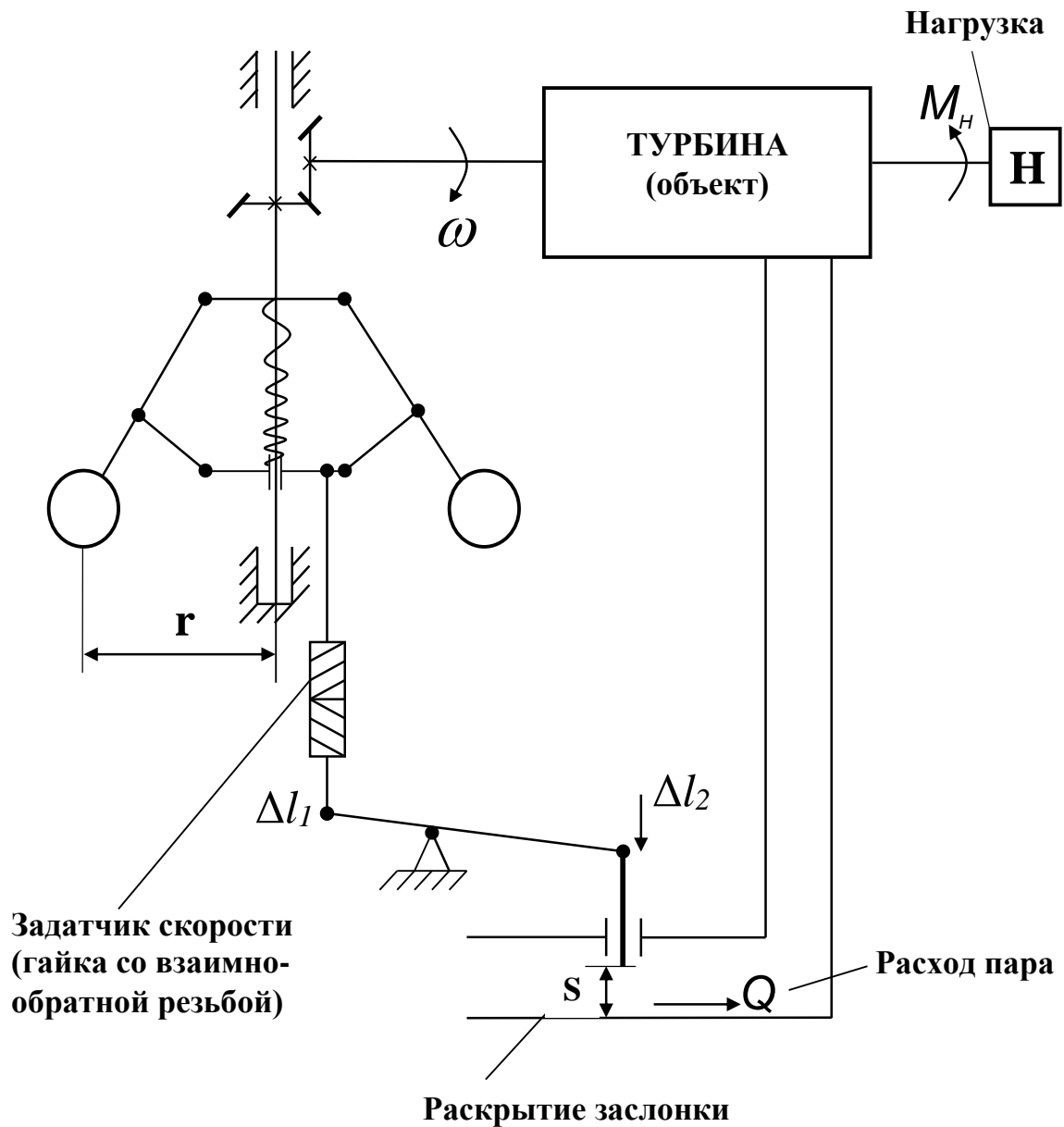


Рис. 1.3 – Система стабилизации скорости правой машины

Типовая функциональная схема системы автоматического управления (САУ) представлена на рис. 1.5,

где

u — управляющий сигнал;

y — управляемый сигнал;

f — возмущающее воздействие.

Кружок с четырьмя секторами является сумматором, причём сигнал, по-

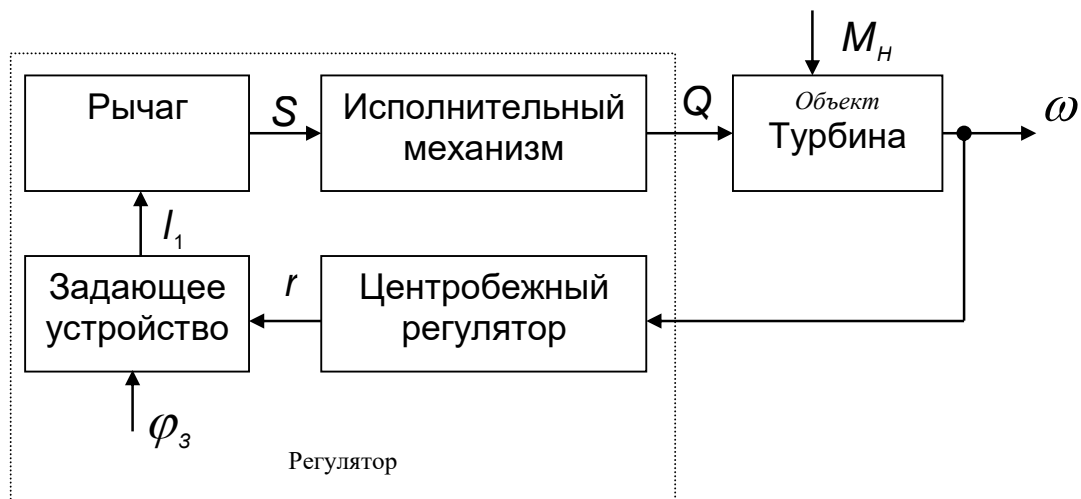


Рис. 1.4 – Функциональная схема системы стабилизации скорости турбины

ступающий на зачернённый сектор, изменяет свой знак (вычитается).

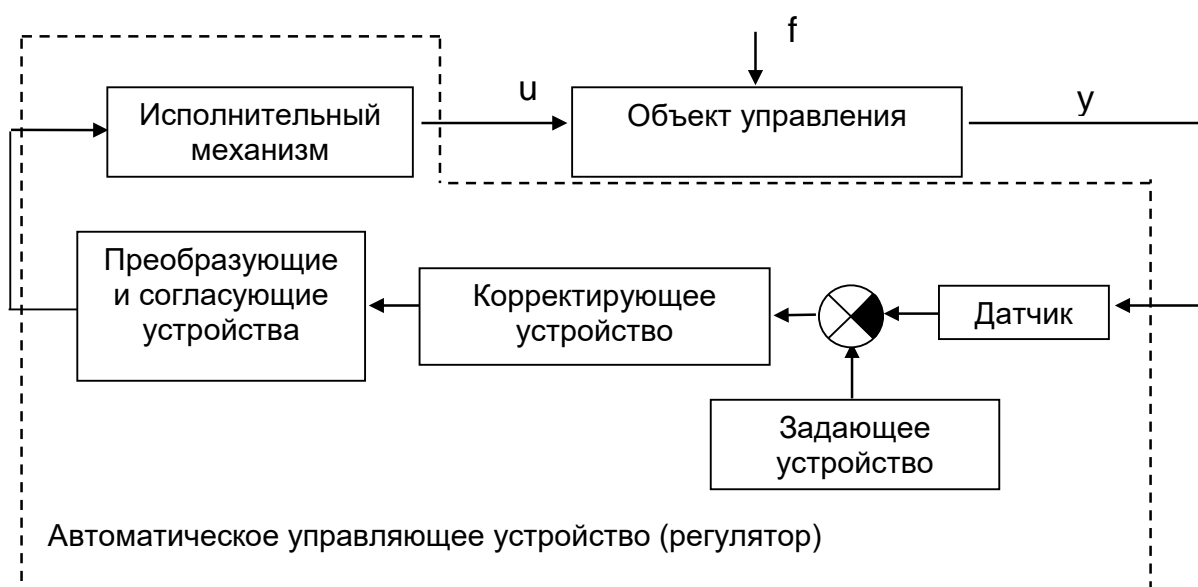


Рис. 1.5 – Типовая функциональная САУ

Рассмотрим вариант системы стабилизации скорости турбины, в котором сделана попытка устранить недостатки, присущие рассмотренной выше статической системе прямого действия. На рис. 1.6 показан регулятор для этой системы.

Для этого в систему введен гидравлический усилитель, включающий в себя золотник, силовой цилиндр и масляный насос. Такая система, в которой энергия регулятора потребляется от отдельного источника, называется *системой непрямого действия*.

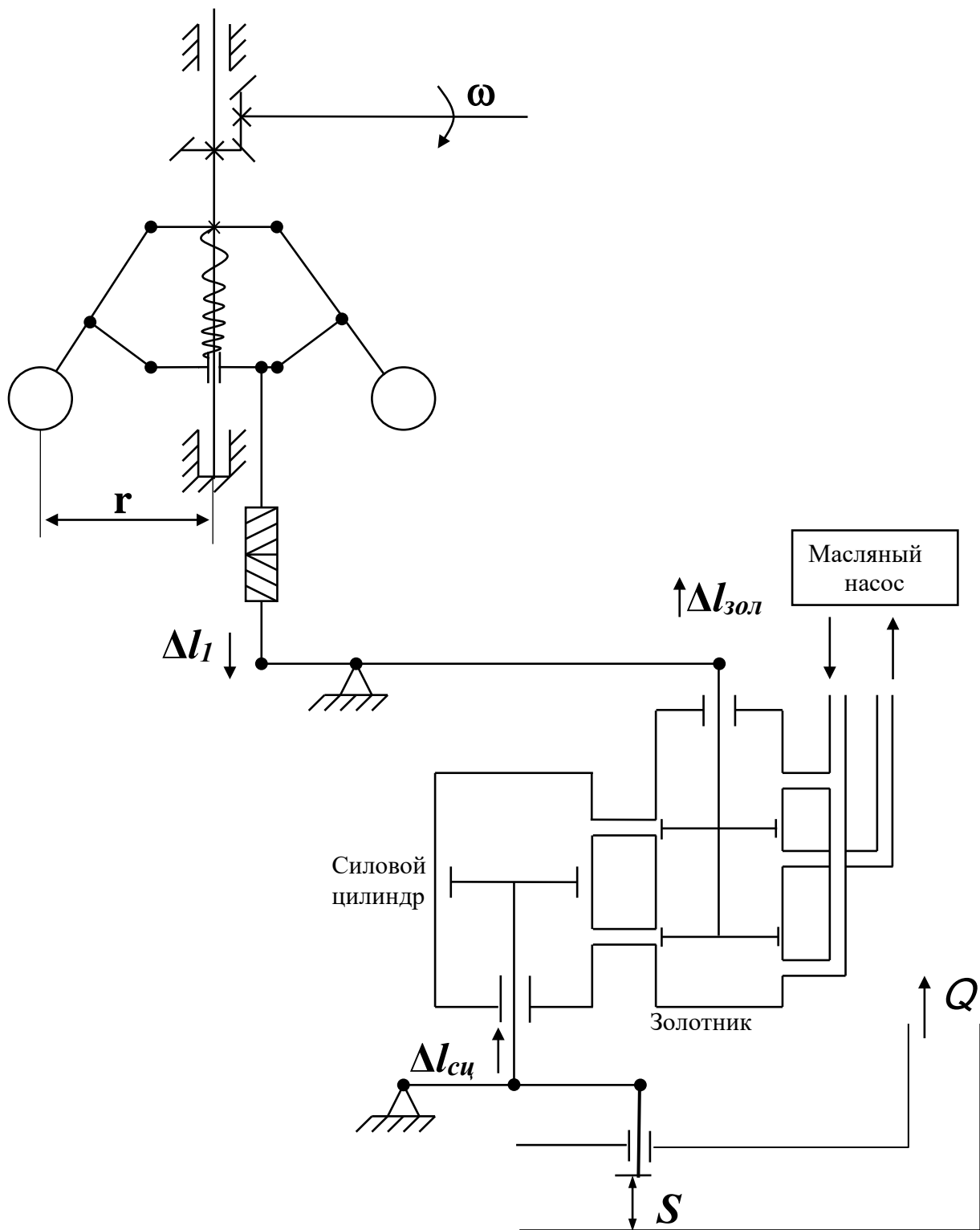


Рис. 1.6 – Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием гидравлического усилителя

При заданной скорости расстояние между грузиками центробежного регулятора равно номинальному значению ($r = r_0$), положение плеча золотника $l_{\text{зол}}$ также равно номинальному значению ($l_{\text{зол}} = l_{\text{зол}0}$), при этом поршень золотника полностью перекрывает выходные отверстия, следовательно, положение поршня силового цилиндра неизменно.

С увеличением нагрузочного момента $M_{\text{Н}}$ падают обороты турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния между грузиками центробежного регулятора. В результате изменяется положение поршенька золотника. Это, в свою очередь, приводит к перемещению поршня силового цилиндра, а следовательно, и к дополнительному приоткрытию заслонки S . Соответственно увеличивается расход пара, возрастает скорость оборотов турбины ω и увеличивается расстояние r . Статика (установившееся состояние) в системе возможна только тогда, когда $l_2 = l_{20}$, то есть когда полностью перекрыты перепускные отверстия золотникового устройства.

Теоретически в этой системе статическая ошибка равна нулю, то есть данная система является *астатической*. В ней отсутствует статическая связь между скоростью и положением заслонки.

Рассмотрим упрощенные уравнения системы. Начнём с уравнения объекта. Очевидно, что изменение скорости турбины может происходить лишь в тех случаях, когда нарушается равновесие между движущим моментом турбины $M_{\text{Т}}$ и моментом нагрузки $M_{\text{Н}}$:

$$J \frac{d\Delta\Omega}{dt} = \Delta M_{\text{Т}} - \Delta M_{\text{Н}} \quad (1.1.1)$$

где J — суммарный момент инерции, приведённый к валу турбины.

С целью упрощения в уравнении (1.1.1) использованы приращения скорости и моментов. Более подробно такой подход будет рассмотрен в разделе, посвященном линеаризации систем.

Будем полагать, что приращение момента турбины пропорционально приращению количества подаваемого пара

$$\Delta M_{\text{Т}} = K_{\text{Т}} \Delta Q$$

Запишем уравнение центробежного регулятора. Полагая, что сами отклонения скорости и вызванные ими приращения внутренних переменных регулятора малы, мы можем выразить все зависимости в линейном виде. Тогда приращения скорости раскрытия грузиков и изменение положения поршенька золотника будут связаны линейными зависимостями:

$$\Delta r = K_{\omega} \cdot \Delta \omega ; \quad (1.1.2)$$

$$\Delta l_{\text{зол}} = -K_r \cdot \Delta r.$$

Составляя уравнение гидравлического усилителя, учтём, что скорость перемещения поршня силового цилиндра пропорциональна величине открытия перепускных отверстий золотника, то есть приращению $l_{\text{зол}}$:

$$\frac{d\Delta l_{\text{сц}}}{dt} = K_{\text{зол}} \cdot \Delta l_{\text{зол}}. \quad (1.1.3)$$

Приращение координаты штока силового цилиндра повлечет за собой изменение положения заслонки и, следовательно, изменение количества подаваемого в турбину пара:

$$\Delta Q = K_{\text{сц}} \cdot \Delta l_{\text{сц}}. \quad (1.1.4)$$

Продифференцировав уравнение (1.1.4) и учитывая уравнения для центробежного регулятора (1.1.2) и гидравлического усилителя (1.1.3), получим уравнение для регулятора:

$$\frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega, \quad (1.1.5)$$

где $K_p = K_{\text{сц}} \cdot K_{\text{зол}} \cdot K_r \cdot K_{\omega}$ — коэффициент регулятора.

Запишем совместно уравнения объекта и регулятора

$$\begin{cases} \frac{d\Delta \Omega}{dt} = k_q \cdot \Delta - K_H \cdot \Delta M_H; \\ \frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega, \end{cases}$$

продифференцируем первое уравнение и подставим в него второе:

$$\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} = K_q(-K_p \cdot \Delta\Omega) - K_H \frac{d\Delta M_H}{dt}.$$

При условии постоянства нагрузки получаем уравнение свободного движения всей системы

$$\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} + K \cdot \Delta\omega = 0, \quad (1.1.6)$$

где

$$K = K_p \cdot K_q.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + K = 0,$$

его корни - $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K}$,

Таким образом, решение уравнения (1.1.6) имеет вид

$$\Delta\omega(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = A \sin(\sqrt{K} \cdot t + \varphi), \quad (1.1.7)$$

где A и φ определяются начальными условиями.

В результате решения получили, что в данной системе в принципе не существует установившегося (статического) состояния. Следовательно, система неработоспособна.

С целью успокоения незатухающих колебаний (1.1.7) введём в систему демпфер (рис. 1.7) и рассмотрим, что в ней происходит при изменении нагрузки. С увеличением нагрузочного момента M_H уменьшается скорость вращения турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния r между грузиками центробежного регулятора. Это влечет за собой изменение положения поршенька золотника $\Delta l_{\text{зол}}$, а следовательно, и изменение положения поршня силового цилиндра. При этом одновременно происходит два процесса.

Во-первых, вместе со штоком силового цилиндра опускаются поршень и цилиндр демпфера, уменьшая первоначальное изменение $\Delta l_{\text{зол}}$. Скорость перемещения поршня демпфера относительно его цилиндра невелика и регулируется с помощью специального дросселя Dp .

Во-вторых, приоткрывается заслонка, увеличивая количество подаваемого в турбину пара, и начинает расти скорость ω .

За счёт первого движения поршни золотника могут перекрыть перепускные отверстия ещё до восстановления номинального значения ω . В то же время пружины стремятся вернуть демпфер в исходное положение, и, в конечном итоге, Δl_2 стремится к нулю. Теперь уже перепускные отверстия золотника будут перекрыты только при номинальной скорости. Следовательно, система с демпфером, как и предыдущая, является астатической. Рассмотрим, как повлияло введение демпфера на незатухающие колебания, выявленные в предыдущем варианте системы. Считая отклонения от номинального режима малыми, запишем уравнения элементов регулятора. Как и раньше,

$$\Delta r = K_\omega \Delta \omega, \quad (1.1.8)$$

$$\Delta l_1 = -K \cdot \Delta r;$$

$$\frac{d}{dt} l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} \Delta l_{\text{зол}}. \quad (1.1.9)$$

В отличие от предыдущей системы, в данном случае положение штока золотника зависит не только от центробежного регулятора, но и от демпфера:

$$\Delta l_{\text{зол}} = K_1 \cdot \Delta l_1 - K_2 \cdot \Delta l_2. \quad (1.1.10)$$

Упрощенные уравнения демпфера основываются на равенстве сил пружин:

$$\Delta F_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \cdot \Delta l_2.$$

и сил, связанных с перемещением поршня демпфера относительно корпуса:

$$F_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{d(l_{\text{сц}} - l_2)}{dt},$$

или

$$\frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_2 = \frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_{\text{сц}}.$$

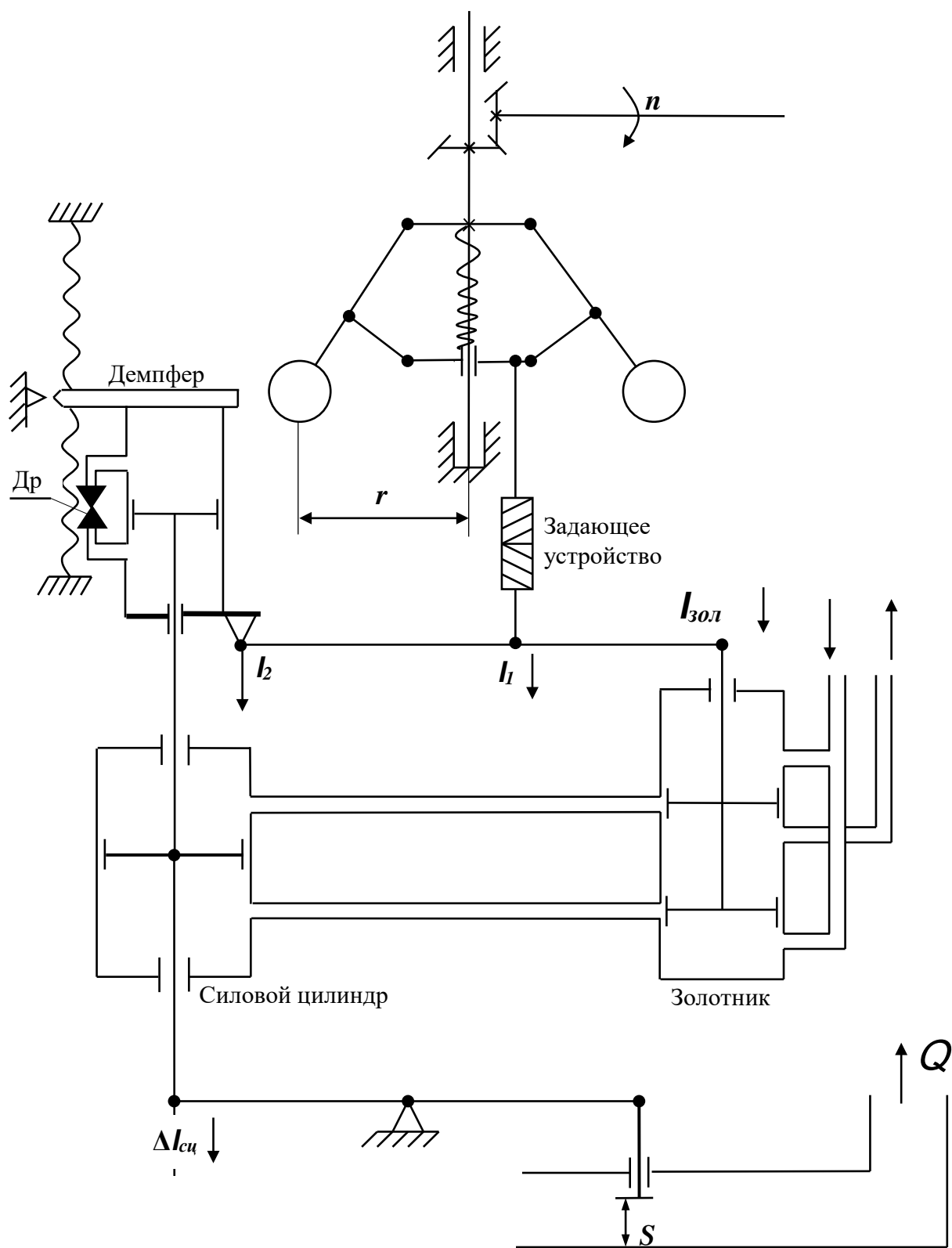


Рис. 1.7 – Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием успокоительного демпфера

Таким образом, изображения перемещений штока силового цилиндра и корпуса демпфера связаны соотношением

$$\Delta l_2 = \frac{T_d p}{T_d p + 1} \cdot \Delta l_{\text{сц}}, \quad (1.1.11)$$

где постоянная времени демпфера

$$T_d = K_d / K_{\text{пр}}.$$

Из (1.1.9) и (1.1.10) следует

$$p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} \cdot \left(K_1 \Delta l_1 - K_2 \frac{T_d p}{T_d p + 1} \Delta l_{\text{сц}} \right),$$

откуда

$$\left(1 + K_{\text{зол}} K_2 \frac{T_d}{T_d p + 1} \right) \cdot p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} K_1 \Delta l_1. \quad (1.1.12)$$

Используя равенства (1.1.8), (1.1.12) и (1.1.4), получим связь между входом регулятора $\Delta \Omega$ и его выходом ΔQ :

$$\frac{T_1 p + 1}{T_d p + 1} K_{q \text{ рег.}} p \Delta Q = K_{\text{зол}} K_1 (-K_r K_\omega) \Delta \Omega, \quad (1.1.13)$$

где

$$K_{q \text{ рег.}} = \frac{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}{K_{\text{сц}}}; \quad T_1 = \frac{T_d}{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}.$$

Если $T_1 \ll T_d$, то (1.1.13) упрощается:

$$\frac{K_{q \text{ рег.}} \cdot p}{T_d p + 1} = -K_{\omega \text{ рег.}} \Delta \omega$$

Это равенство можно решить относительно ΔQ :

$$\Delta Q = \frac{K_{\omega \text{ рег.}} T_d}{K_{q \text{ рег.}}}; \quad K_{\text{рег.интегр.}} = \frac{K_{\omega \text{ рег.}}}{K_{q \text{ рег.}}}$$

и окончательно получим уравнение регулятора, в котором выходная величина ΔQ формируется как сумма пропорциональной и интегральной составляющих

ошибки стабилизации $\Delta\omega$:

$$\Delta Q = -K_{\text{рег.пропорц.}} \cdot \Delta\omega - K_{\text{рег.интегр.}} \frac{\Delta\omega}{p} \quad (1.1.14)$$

Запишем уравнение объекта (турбины) относительно изображений по Лапласу его входной и выходной переменных:

$$p \cdot \Omega = K_q \Delta Q - K_H \Delta M_H. \quad (1.1.15)$$

Продифференцируем последнее равенство и подставим в него уравнение регулятора (1.1.14). В результате получим уравнение системы в целом:

$$p^2 \Delta\omega + K_q K_{\text{рег.пропорц.}} \cdot \Delta\omega + K_q K_{\text{рег.интегр.}} \Delta\omega = -K_H \cdot p \cdot \Delta M. \quad (1.1.16)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -0.5 K_q K_{\text{рег.пропорц.}} \pm \sqrt{(0.5 K_q K_{\text{рег.пропорц.}})^2 - K_q K_{\text{рег.интегр.}}}$$

всегда имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что в отличие от предыдущего случая свободная составляющая решения уравнения (1.1.16) с течением времени стремится к нулю. Таким образом, введение демпфера позволило получить устойчивую, работоспособную систему.

Разработчики первых систем автоматического регулирования столкнулись со случаями катастрофической неустойчивости, на первый взгляд, безукоризненных систем. В 1845 году братья Вильям и Вернер Сименсы предложили метод регулирования по производной. Существо их предложения можно пояснить на примере следящей системы, функциональная схема которой приведена на рис.1.8. На рис.1.9 представлен фрагмент переходных процессов по выходной координате $\varphi_{\text{вых}}$, рассогласованию (ошибке) ε и производной рассогласования $\dot{\varepsilon}$. Хотя в точках А1 и А2, В1 и В2 отклонения выходной координаты от входной соответственно равны, управляющие воздействия на объект должны быть различными, так как в точках А1 и В2 выходная координата движется к требуемому значению, а в точках В1 и А2 - удаляется от него. Учитывая инерционные свойства объекта, целесообразно в формирователе закона управления

реализовать управляющее воздействие U , пропорциональное сумме $\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \dot{\varepsilon}$. Добавление сигнала производной уменьшит абсолютную величину управления в точках А1 и В2 и увеличит её в точках В1 и А2.

Распространение автоматических регуляторов вызвало потребность в разработке теоретически обоснованных методов их расчета. В 1866 году выходит в свет статья Д.К.Максвелла "О регуляторах В 1876 году появилась работа, оказавшая большое влияние на науку о регулировании - труд профессора И.А. Вышнеградского "Об общей теории регуляторов В этой работе было выведено условие устойчивости для линейных систем третьего порядка и даны конкретные указания о том, как влияют конструктивные параметры на устойчивость. И.А. Вышнеградский явился основоположником классической теории регулирования. Работы Вышнеградского были продолжены словацким учёным А. Стодолой. По его просьбе швейцарский математик А. Гурвиц в 1895 году ввел алгебраические условия устойчивости для линейных систем любого порядка. Долгое время оставалась неизвестной инженерам аналогичная работа Е.Д.Рауса, выполненная им еще в 1877 году по просьбе Д.К.Максвелла.

Рис. 1.9. К введению производной ошибки в закон регулирования

Рис. 1.9. К введению производной ошибки

в закон регулирования

Большой вклад в теорию автоматического регулирования внес известный русский ученый Н.Е. Жуковский. В 1880 году вышла его работа "О прочности движения". Он читал лекции по теории регуляторов в Московском университете, Математическом обществе и Московском техническом училище. В 1909 году вышел его учебник по классической теории регулирования - "Теория регулирования хода машин".

Основы общей теории устойчивости динамических систем были заложены выдающимся русским учёным А.М. Ляпуновым. В своей докторской диссертации в 1892 году им впервые были сформулированы условия устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, дано строгое опреде-

ление понятия устойчивости, разработаны два основных метода исследования устойчивости: первый метод Ляпунова исследования устойчивости в малом и второй, прямой метод исследования устойчивости в большом.

В те годы, по-видимому, еще никто не подозревал о будущей роли теории А.М. Ляпунова в общей теории управления. Лишь в 40-50 годах его теоремы заработали в полную силу.

В 1932 году американский учёный Х.Найквист разработал теорию устойчивости усилителей с обратной связью. В 1936 году молодой советский ученый А.В. Михайлов распространил критерии Найквиста на системы автоматического регулирования и предложил свой собственный критерий устойчивости, который с тех пор называется его именем.

В 1937 году вышла большая работа советских учёных А.А. Андропова, С.Э. Хайкина и других по теории нелинейных колебаний, где впервые были введены понятия периодических режимов, автоколебаний, фазового пространства.

Сороковые годы нашего столетия отмечены бурным развитием частотных методов, и большую роль в их пропаганде и внедрении в практику проектирования в нашей стране сыграли профессор В.В. Солодовников и его ученики, в это же время Н. Винер и А.Н. Колмогоров создают теорию синтеза статистически оптимальных систем. В 1948 году К.Ф. Теодорчиком в СССР и в 1950 году В.Р.Ивенсом в США закладываются основы теории корневых годографов.

В 50-60 годы развивается новое перспективное направление - теория оптимального управления. У истоков этой теории стояли советские ученые А.А. Фельдбаум, Л.С. Понтрягин, А.М. Летов, Е.А. Барбашин, А.А. Красовский, Н.Н. Красовский, американские учёные Р. Беллман, Р. Калман и другие.

В 60-е годы М.А. Айзерманом и В.М. Поповым разрабатывается теория абсолютной устойчивости нелинейных систем. Большой вклад в теорию импульсных и цифровых систем автоматического управления внесли Ю.Ту, Я.З. Цыпкин, Л.Т. Кузин, Э. Джури. В.С. Пугачёв обогатил теорию управления разработкой вопросов статистической динамики. Родоначальником теории дифференциальных игр является академик Н.Н. Красовский. Продуктивную работу в области

распознавания образов и управления в условиях неопределённости ведут математики Екатеринбурга. Всемирно известны работы российских учёных Б.Н. Петрова и С.В. Емельянова в области теории и практики адаптивных систем.

Теория автоматического управления (ТАУ) – это наука, которая, абстрагируясь от конкретного исполнения различных объектов и систем АУ, изучает особенности установившихся и динамических режимов этих систем и предлагает методы проектирования управления, обеспечивающего выполнение требований, предъявляемых к ходу управляемого технологического процесса.

По принципу формирования управления системы автоматического управления (САУ) подразделяются на следующие:

- разомкнутые,
- замкнутые,
- комбинированные.

По цели управления САУ подразделяют на системы:

- стабилизации,
- программного управления,
- следящие.

ТАУ работает с математическими моделями объектов системы управления, сочетает анализ и синтез.

По математическому описанию и по свойствам САУ подразделяются на следующие типы:

- обыкновенные системы – системы, которые описываются дифференциальными или разностными уравнениями с сосредоточенными параметрами;
- системы с распределенными параметрами;

- непрерывные системы – системы, все координаты (переменные) которых являются непрерывными функциями времени;
- дискретные системы – системы, в которых хотя бы одна из координат (переменных) является импульсной (дискретной или решётчатой) функцией времени;
- детерминированные системы – системы с постоянными или изменяющимися известным (детерминированным) образом параметрами;
- стохастические системы – системы, параметры которых изменяются во времени случайным образом;
- линейные системы – системы, которые описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями;
- нелинейные системы – системы, которые описываются нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями;
- традиционные одноуровневые системы – системы с регулированием только основных переменных;
- системы с адаптивным управлением, в которых кроме основного контура с отрицательной обратной связью имеется контур, оценивающий текущие параметры управляемого объекта и соответствующим образом изменяющий управляющее воздействие или перестраиваемые параметры регулятора;
- оптимальные системы.

Более подробная и обстоятельная классификация систем автоматического управления приведена в обширной литературе по теории управления. В частности, можно порекомендовать учебник А.А. Красовского и Г.С. Поспелова [7].

Глава 2

Методы анализа непрерывных систем

2.1 Понятие пространства состояний

С точки зрения анализа и синтеза систем все переменные, характеризующие объект управления (рис.2.1) или имеющие к нему отношение, делятся на три группы.

1.Входные воздействия, представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемому объекту, и влияющие на его поведение. Внешние сигналы разделяют на сигналы управляющие - u_1, u_2, \dots, u_{n_u} и возмущающие - f_1, f_2, \dots, f_{n_f} .

2.Выходные переменные, или переменные, позволяющие описать некоторые аспекты поведения объекта, представляющие интерес для исследователя или потребителя результатов функционирования объекта - y_1, y_2, \dots, y_{n_y} .

3.Переменные состояния, или промежуточные переменные x_1, x_2, \dots, x_{n_x} , характеризующие динамическое поведение исследуемого объекта или системы.

Для удобства оперирования с многомерными величинами совокупность управляющих переменных представляют в виде вектора управления \vec{u} . Аналогичным образом вводятся понятия вектора возмущения \vec{f} , вектора выхода \vec{y} и вектора состояния \vec{x} :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n_u} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n_f} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n_y} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n_x} \end{pmatrix}.$$

Множество всех значений, которые может принять вектор \vec{u} в момент времени t , образует пространство управления. Аналогично вводятся понятия пространства возмущений, пространства выходов и пространства состояний.

В любой момент времени t состояние системы является функцией начального состояния $\vec{x}(t_0)$ и векторов $\vec{u}(t_0, t)$ и $\vec{f}(t_0, t)$. Если известно, как изменялись эти векторы на интервале $[t_0, t]$, то однозначно может быть определено состояние системы $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}(t) = F\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (2.1.1)$$

Вектор выхода в момент времени t является функцией тех же переменных:

$$\vec{y}(t) = \Psi\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (2.1.2)$$

Состояние системы отделяет будущее от прошлого, так что состояние содержит всю информацию, необходимую для определения реакции объекта на произвольный входной сигнал. Понятие состояния является основным исходным понятием и, следовательно, не может быть определено более полно, чем, например, слово "множество" в математике. Наибольшее, что можно сделать, это сформулировать свойства, какими должна обладать система, поведение которой отвечает понятию состояния.

Основным свойством состояния является то, что будущие значения его не зависят от характера достижения системой её текущего состояния. Состояние системы в данный момент времени, а также текущее и будущие значения её входов единственным образом определяют настоящее и будущие значения её состояния и выходов.

Уравнение (2.1.1) называют уравнением состояния системы, а уравнение

(2.1.2) - уравнением выхода. Если объект описывается дифференциальным уравнением, то уравнения (2.1.1) и (2.1.2) превращаются в

$$\vec{x}(t) = F\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{f}(t), t\}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0; \quad (2.1.3)$$

$$y(t) = \Psi\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), t, \vec{v}(t)\} \quad (2.1.4)$$

где дополнительно введён вектор ошибок измерений $\vec{v}(t)$.

Как правило, выбор состояния естественным образом следует из физического устройства системы, а уравнение (2.1.3)(2.1.3), называемое дифференциальным уравнением состояния, обычно следует из элементарных физических законов, которыми определяется её поведение.

2.2 Линеаризация исходных уравнений

Почти все реальные объекты и системы автоматического управления являются нелинейными. Однако среди нелинейных функций F и Ψ часто встречаются такие, которые при определённых допущениях в рабочей области функционирования системы могут быть заменены линейными. В качестве примера такого случая представлена элементарная функция на рис.2.2. В данном случае возможна линеаризация, так как если точка A перемещается на небольшие расстояния по кривой $V_2 = f(V_1)$, то этот участок кривой можно заменить отрезком прямой. В то же время нелинейная функция на рис.2.3 не допускает подобную замену, если в процессе работы системы происходит изменение уровня выходного сигнала V_2 . Системы с такого типа функциями называют *существенно нелинейными*. Их исследованию будет посвящён специальный раздел пособия. Ниже будет рассмотрен класс систем, допускающих линеаризацию.

Пусть режим функционирования объекта определяется некоторой траекторией по вектору управления $\vec{u}_0(t)$, а действительная реализация $\vec{u}(t)$ близка к

ней:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t). \quad (2.2.1)$$

При этом решение уравнения (2.1.3)(2.1.3) можно записать в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \quad (2.2.2)$$

где $\vec{x}_0(t)$ – решение уравнения (2.1.3)(2.1.3) при $\vec{u} = u_0(t)$.

Назовём функционирование объекта (системы) при $\vec{u} = u_0(t)$ *базовым режимом*. Переменные $\Delta\vec{x}(t)$, $\Delta\vec{u}(t)$, $\Delta\vec{f}(t)$ – это отклонения от соответствующих переменных в базовом режиме.

Подставим теперь выражения для $\vec{x}(t)$ и $\vec{u}(t)$ в исходное дифференциальное уравнение состояний

$$\dot{\vec{x}}_0(t) + \Delta\dot{\vec{x}}(t) = F\{\vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t), \vec{f}_0(t) + \Delta\vec{f}(t), t\}$$

и разложим функцию F в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_0(t) + \Delta\dot{\vec{x}}(t) = & F\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} + J_x\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{x} + \\ & + J_u\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{u} + J_f\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{f} + R. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Здесь R – остаточный член, содержащий высшие степени приращений, и им можно пренебречь; J_x , J_u , J_f – матрицы Якоби функции F для \vec{x} , \vec{u} и \vec{f} .

Элемент матрицы Якоби определяется как соответствующая частная производная. Например, для системы второго порядка соответствующее слагаемое в правой части (2.2.3)(2.2.3) имеет вид

$$J_x \cdot \Delta\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{bmatrix}.$$

Пренебрегая в (2.2.3)(2.2.3) остаточным членом R и учитывая уравнение

для базового режима, получим

$$\Delta \vec{x}(t) = J_x \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{x} + J_U \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{u} + J_f \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{f}. \quad (2.2.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A(t) &= J_x \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} ; \\ B(t) &= J_u \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} ; \\ G(t) &= J_f \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} . \end{aligned}$$

В результате получим:

линейное дифференциальное векторно-матричное уравнение с переменными параметрами (коэффициентами)

$$\Delta \vec{x}(t) = A(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + B(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + G(t) \cdot \Delta \vec{f}(t). \quad (2.2.5)$$

Аналогичным образом проведем линеаризацию уравнения выхода:

$$\Delta \vec{y}(t) = C(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + D(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + \Delta \vec{v}(t). \quad (2.2.6)$$

векторов. Таким образом, линеаризованные уравнения объекта (системы) примут вид

$$\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{u}(t) + G(t)\vec{f}(t); \quad (2.2.7)$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t) + D(t)\vec{u}(t) + \vec{v}(t). \quad (2.2.8)$$

На рис. 2.4 приведена структурная схема, являющаяся графическим изображением уравнений (2.2.7) и (2.2.8).

В качестве примера рассмотрим смесительный бак, который наполняется с помощью двух потоков, имеющих переменные мгновенные расходы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ (рис. 2.5). Оба входных потока содержат растворимое вещество с неизменными концентрациями C_1 и C_2 . Выходной поток имеет массовую скорость истечения

(мгновенный расход) $F(t)$. Предполагается, что содержимое бака перемешивается так, что концентрация выходного потока равна концентрации $C_{\text{out}}(t)$ в баке.

Запишем уравнения баланса масс в баке.

Для полной массы:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t). \quad (2.2.9)$$

Для массы растворённого вещества

$$\frac{d}{dt}\{C_{\text{out}}(t)V(t)\} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)F(t). \quad (2.2.10)$$

Мгновенный расход выходного потока при естественном истечении зависит от уровня жидкости в баке $h(t)$ следующим образом:

$$F(t) = k\sqrt{h(t)} \quad (2.2.11)$$

где k - некоторая константа. Это следует из уравнения Бернулли, которое описывает энергетический баланс жидкости перед сливным отверстием и после него. Потенциальная энергия жидкости перед сливным отверстием пропорциональна h . При истечении из бака энергия жидкости превращается в кинетическую энергию потока, пропорциональную квадрату скорости v^2 . Приравнявая эти энергии, получаем $v = k_v\sqrt{h}$. Расход F пропорционален произведению скорости истечения на площадь сливного отверстия, откуда и следует (2.2.11).

Если бак имеет постоянную по высоте площадь поперечного сечения S , то

$$F(t) = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}. \quad (2.2.12)$$

Тогда из (2.2.9) и (2.2.10) получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{\frac{V(t)}{S}},$$

$$\frac{d}{dt}\{C_{\text{out}}(t)V(t)\} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}.$$

Выберем в качестве базового режима установившееся состояние (статику), когда все величины являются постоянными - $F_{10}, F_{20}, F_0, C_0, V_0$. При этом из предыдущих уравнений получаем

$$0 = F_{10} + F_{20} - F_0,$$

$$0 = C_1F_{10} + C_2F_{20} - C_0F_0.$$

$$F_0 = k\sqrt{\frac{V_0}{S}}.$$

При известных F_{10} и F_{20} эти уравнения могут быть разрешены относительно F_0 , V_0 и C_0 :

$$F_0 = F_{10} + F_{20}; \quad V_0 = S\frac{F_0^2}{K^2}; \quad C_0 = \frac{C_1F_{10} + C_2F_{20}}{F_0}.$$

Предположим теперь, что возникли отклонения от установившегося состояния:

$$F_1(t) = F_{10} + \Delta_1(t),$$

$$F_2(t) = F_{20} + \Delta_2(t)$$

и, как следствие,

$$F(t) = F_0 + \Delta(t),$$

$$V(t) = V_0 + \Delta V(t),$$

$$C_{\text{out}}(t) = C_0 + \Delta C(t).$$

Если эти отклонения невелики, то можно провести линеаризацию нелинейных дифференциальных уравнений объекта.

Сначала линеаризуем уравнение для полной массы

$$\frac{d}{dt}\{V_0 + \Delta V(t)\} = F_{10} + \Delta F_1(t) + F_{20} + \Delta F_2(t) - k\sqrt{\frac{V_0 + \Delta V(t)}{S}}.$$

Используем разложение нелинейной функции в ряд Тейлора и учтём, что

$$\frac{d}{dV} \sqrt{V} |_{V=V_0} \cdot \Delta V_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V_0}} \Delta V.$$

Тогда

$$\Delta \dot{V}(t) = F_{10} + \Delta_1(t) + F_{20} + \Delta_2(t) - k \sqrt{\frac{V_0}{S}} - \frac{k}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\Delta V(t)}{2\sqrt{V_0}} + R(t).$$

Учитывая уравнение статики и пренебрегая остаточным членом, получим

$$\Delta \dot{V}(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t) - \frac{k}{2\sqrt{SV_0}} \cdot \Delta V(t). \quad (2.2.13)$$

Введём параметр $\Theta = \frac{V_0}{F_0}$, называемый временем заполнения бака. Тогда, учитывая (2.2.12)(2.2.13), получим

$$\frac{k}{2\sqrt{SV_0}} = \frac{1}{2\Theta}. \quad (2.2.14)$$

Кроме того, отметим, что

$$\frac{k}{2\sqrt{SV_0}} \Delta V = \frac{\Delta V}{2\Theta} = \Delta F. \quad (2.2.15)$$

Таким образом, вместо (2.2.13)(2.2.13) запишем

$$\Delta \dot{V}(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t) - \frac{1}{2\Theta} \cdot \Delta V(t). \quad (2.2.16)$$

Проведем аналогичные действия для уравнения баланса масс растворённого вещества.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ [C_0 + \Delta C(t)] [V_0 + \Delta V(t)] \} = \\ = C_1 [F_{10} + \Delta_1(t)] + C_2 [F_{20} + \Delta_2(t)] - [C_0 + \Delta C(t)] k \sqrt{\frac{V_0 + \Delta V(t)}{S}}. \end{aligned}$$

После разложения в ряд Тейлора получим

$$\begin{aligned} V_0 \Delta \dot{C}(t) + C_0 \Delta \dot{V}(t) = C_1 F_{10} + C_1 \Delta_1(t) + C_2 F_{20} + C_2 \Delta_2(t) - \\ - C_0 k \sqrt{\frac{V_0}{S}} - k \sqrt{\frac{V_0}{S}} \Delta C(t) - \frac{C_0 k}{2\sqrt{V_0 S}} \Delta V(t) - R(t). \end{aligned}$$

Учтём уравнения статики и отбросим остаточный член:

$$\begin{aligned} V_0 \Delta \dot{C}(t) + C_0 \Delta \dot{V}(t) = C_1 \Delta_1(t) + C_2 \Delta_2(t) - \\ - k \sqrt{\frac{V_0}{S}} \Delta C(t) - C_0 \frac{k}{2\sqrt{V_0}} \sqrt{\frac{V_0}{S}} \Delta V(t). \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение $\Delta \dot{V}(t)$ из (2.2.16). Получим

$$V_0 \Delta \dot{C} = C_1 \Delta_1(t) + C_2 \Delta_2(t) - F_0 \Delta C(t) - \\ - C_0 \Delta_1(t) - C_0 \Delta_2(t) .$$

Таким образом, в результате линеаризации мы получили систему следующих дифференциальных уравнений, которые описывают процессы в смешительном баке:

$$\begin{cases} \Delta \dot{V}(t) = \Delta F_2(t) + \Delta F_2(t) - \frac{1}{2\Theta} \Delta V(t), \\ \Delta \dot{C} = -\frac{1}{\Theta} \Delta C(t) + \frac{C_1 - C_0}{V_0} \Delta F_1(t) + \frac{C_2 - C_0}{V_0} \Delta F_2(t). \end{cases} \quad (2.2.17)$$

На этом завершён для данного примера первый этап разработки - составлено математическое описание объекта и в результате линеаризации получена его линейная модель. Далее это описание нужно представить в удобной форме - в виде векторно-матричных дифференциальных уравнений и в виде структурной схемы.

Представим математическое описание объекта в виде векторно-матричных дифференциальных уравнений. Введем обозначения:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta V(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} ; \quad \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) \\ \Delta_2(t) \end{bmatrix} ; \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta C \\ \Delta V \end{bmatrix} .$$

Теперь систему уравнений (2.2.17) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) , \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Theta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Theta} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Theta} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании полученных дифференциальных уравнений и структурной схемы можно провести предварительный анализ свойств объекта и сделать следующие выводы.

1. Изменение любой из входных переменных Δ_1 и переменных ΔV , Δ и ΔC . Это особенно наглядно следует из наличия перекрёстных связей на структурной схеме объекта.

2. При ступенчатом изменении любой из входных переменных каждая из выходных переменных изменяется по экспоненциальному закону, причём темп изменения концентрации ΔC вдвое медленнее темпа изменения объёма ΔV .

Предметом отдельного рассмотрения при проектировании системы управления (СУ) должен стать анализ диапазонов изменения переменных объекта, в которых сохраняется адекватность линейной модели.

Прежде, чем закончить рассмотрение данного примера, имеет смысл продемонстрировать некоторые последующие действия разработчика в части синтеза алгоритмов управления. Перед разработчиком среди прочих встанут следующие две задачи. Одна из них - обеспечение заданных требований по длительности и качеству процессов в системе, то есть её динамических свойств. Рассмотрению соответствующих вопросов посвящён третий раздел настоящего пособия.

Вторая задача - обеспечение возможности независимого управления объёмом (расходом) и концентрацией. Введём понятие командных сигналов по требуемым концентрации - Δr_c и объёму - Δr_v . В статике производные всех переменных должны быть равны нулю и, как следует из структурной схемы и дифференциальных уравнений объекта, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 - \frac{1}{2\Theta} \cdot \Delta V_{\text{уст}} &= 0; \\ -\frac{1}{\Theta} \Delta C_{\text{уст}} + \frac{C_1 - C_0}{V_0} \Delta_1 - \frac{C_0 - C_2}{V_0} \Delta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда, с учётом равенства $\Theta = \frac{V_0}{F_0}$, получаем

$$\Delta V_{\text{уст}} = 2\Theta(\Delta_1 + \Delta_2); \quad (2.2.18) \quad (2.2.18)$$

$$\Delta C_{\text{уст}} = \frac{C_1 - C_0}{F_0} \Delta_1 - \frac{C_0 - C_2}{F_0} \Delta_2. \quad (2.2.19) \quad (2.2.19)$$

Для компенсации перекрёстных связей в объекте введём перекрёстные связи в регуляторе:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_{\text{VF1}} \Delta r_V + a_{\text{CF1}} \Delta r_C; \\ \Delta_2 &= a_{\text{VF2}} \Delta r_V + a_{\text{CF2}} \Delta r_C.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (2.2.18)(2.2.18) и (2.2.19)(2.2.19):

$$\Delta V_{\text{уст}} = 2\Theta((a_{\text{VF1}} + a_{\text{VF2}}) \Delta r_V + (a_{\text{CF1}} + a_{\text{CF2}}) \Delta r_C); \quad (2.2.20) \quad (2.2.20)$$

$$\begin{aligned}\Delta C_{\text{уст}} &= \left(\frac{C_1 - C_0}{F_0} a_{\text{VF1}} - \frac{C_0 - C_2}{F_0} a_{\text{VF2}} \right) \Delta r_V + \\ &+ \left(\frac{C_1 - C_0}{F_0} a_{\text{CF1}} - \frac{C_0 - C_2}{F_0} a_{\text{CF2}} \right) \Delta r_C \quad (2.2.21) \quad (2.2.21)\end{aligned}$$

Для того чтобы установившееся значение объёма жидкости в баке $\Delta V_{\text{уст}}$ определялось только командным сигналом Δr_V и не зависело от Δr_C , а выходная концентрация $\Delta C_{\text{уст}}$ определялась только командным сигналом Δr_C и не зависела от Δr_V , в равенстве (2.2.20) приравняем к нулю коэффициент при Δr_C , а коэффициент при Δr_V приравняем к единице. В равенстве (2.2.21) приравняем к нулю коэффициент при Δr_V , а коэффициент при Δr_C приравняем к единице. В результате решения получившейся системы уравнений получим

$$\begin{aligned}
a_{VF1} &= \frac{1}{2\Theta} \frac{C_0 - C_2}{C_1 - C_2}; & a_{FV2} &= \frac{1}{2\Theta} \frac{C_1 - C_0}{C_1 - C_2} \\
a_{CF1} &= \frac{F_0}{C_1 - C_2}; & a_{CF2} &= -\frac{F_0}{C_1 - C_2}
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

В итоге получаем представленную на рис.2.7 структурную схему системы управления смесительным баком, в которой обеспечена развязка каналов. Последнее означает, что командный сигнал Δr_V влияет только на изменение объёма жидкости в баке, а командный сигнал Δr_C - только на изменение концентрации. Объём жидкости в баке связан с расходом выходного потока Δ коэффициентом пропорциональности 2Θ , поэтому регулирование первого можно рассматривать как регулирование второго.

2.3 Линейные системы, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши

2.3.1 Однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим прежде всего решение однородного векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t), \tag{2.3.1}$$

где каждому начальному условию $\vec{x}(t_0)$ соответствует одно и только одно решение дифференциального уравнения. Будем полагать, что матрица $A(t)$ непрерывна на промежутке $t \in [0, \infty]$. Множество всех решений образует n -мерное векторное пространство. Среди множества решений всегда может быть выбрано n линейно независимых.

Это может быть сделано следующим образом. Зададим начальные условия $\vec{x}_i(t_0)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, совпадающие с базисными векторами \vec{e}_i пространства R^n , то есть $\vec{x}_i(t_0) = \vec{e}_i$. Из свойства единственности решений дифференциальных уравнений (через любую точку пространства состояний проходит одна и только одна траектория) следует линейная независимость решений с указанными начальными условиями. Матрица $X(t)_{[n \times n]}$, столбцами которой являются n линейно независимых решений системы (2.3.1), называется фундаментальной матрицей этой системы дифференциальных уравнений.

Поскольку каждый столбец фундаментальной матрицы является решением системы (2.3.1), то фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t), \text{ при начальных условиях } X_0 = X(t_0). \quad (2.3.2)$$

По определению в любой момент времени столбцы этой матрицы линейно независимы, значит, ее определитель (определитель Вронского) не равен нулю на промежутке $t \in [0, \infty]$. Так как определитель матрицы X не равен нулю, то существует обратная матрица $X^{-1}(t)$.

Матрица

$$\Phi(t, t_0) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \quad (2.3.3) \quad \Phi$$

называется *переходной матрицей* уравнения (2.3.1) или переходной матрицей, соответствующей матрице $A(t)$. Переходная матрица является определяющей при анализе и решении дифференциальных уравнений и собственно в теории управления. Поэтому ниже приводятся основные её свойства, в основном непосредственно вытекающие из определения этой матрицы.

- 1). Переходная матрица при совпадающих значениях первого и второго аргумента становится единичной матрицей:

$$\Phi(t, t_0)|_{t=t_0} = \Phi(t_0, t_0) = X(t_0) \cdot X^{-1}(t_0) = E.$$

- 2). При любых значениях аргументов t_1, t_2 переходная матрица $\Phi(t_1, t_2)$ не вырождена и её определитель не равен нулю:

$$|\Phi(t_1, t_2)| \neq 0.$$

Φ

- 3). Обращение матрицы $\Phi(t, t_0)$ эквивалентно изменению порядка аргументов исходной матрицы:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = [X(t) \cdot X^{-1}(t_0)]^{-1} = X(t_0) \cdot X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t).$$

- 4). В соответствии с (2.3.3)

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{X}(t) \cdot X^{-1}(t_0) = A(t) \cdot X(t) \cdot X^{-1}(t_0) = A(t) \cdot \dot{\Phi}(t, t_0).$$

Это означает, что переходная матрица может быть определена как решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E. \quad (2.3.4)$$

- 5). Переходная матрица определяет решение однородного векторно-матричного дифференциального уравнения (2.3.1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{x}(t)|_{t=t_0} = \vec{x}(t_0)$:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0). \quad (2.3.5)$$

Это действительно так, ибо, во-первых, при $t = t_0$

$$\Phi(t_0, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0),$$

во-вторых, с учетом свойства (4):

$$\frac{d}{dt} \{ \Phi(t, t_0) \vec{x}(t_0) \} = \dot{\Phi}(t, t_0) \vec{x}(t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) \vec{x}(t_0) = A(t) \vec{x}(t).$$

- 6). Из предыдущего свойства следует один из способов определения переходной матрицы. Обозначим через $\varphi_{i,j}(t, t_0)$ элемент i -й строки и j -го столбца переходной матрицы и запишем равенство (2.3.5) в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_i(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) & \dots & \varphi_{1j}(t, t_0) & \dots & \varphi_{1n}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) & \dots & \varphi_{2j}(t, t_0) & \dots & \varphi_{2n}(t, t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i1}(t, t_0) & \varphi_{i2}(t, t_0) & \dots & \varphi_{ij}(t, t_0) & \dots & \varphi_{in}(t, t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t, t_0) & \varphi_{n2}(t, t_0) & \dots & \varphi_{nj}(t, t_0) & \dots & \varphi_{nn}(t, t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_j(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}, \quad \varphi$$

откуда следует выражение для i -й координаты вектора состояния:

$$x_i(t) = \varphi_{i,1}(t, t_0)x_1(t_0) + \dots + \varphi_{i,j}(t, t_0)x_j(t_0) + \dots + \varphi_{i,n}(t, t_0)x_n(t_0).$$

Если положить начальные условия по всем координатам вектора состояния, кроме j -й, нулевыми, а по j -й - единичными, то есть

$$x_k(t_0) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, n; \quad k \neq j \quad \text{и} \quad x_j = 1, \quad (2.3.6)$$

то элемент i -й строки и j -го столбца матрицы $\Phi(t, t_0)$ можно определить как процесс по i -й координате вектора состояния:

$$\varphi_{i,j}(t, t_0) = x_i(t). \quad (2.3.7)$$

1). К переходной функции применимо правило композиции:

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0). \quad (2.3.8)$$

Действительно, решение уравнения (2.3.1) в момент t_1 при начальных условиях $\vec{x}(t_0)$ имеет вид

$$\vec{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\vec{x}(t_0).$$

Если теперь этот результат принять за новые начальные условия, то к моменту времени t_2 будем иметь:

$$\vec{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\vec{x}(t_1) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0)\vec{x}(t_0).$$

2). Переходная матрица может быть вычислена с помощью ряда Пеано, или матрицианта матрицы A :

$$\Phi(t, t_0) = M(A) = E + Q(A) + Q(A \cdot Q(A)) + Q(A \cdot Q(A \cdot Q(A))) + \dots,$$

где

$$Q(A) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau.$$

Для того чтобы получить этот результат, проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.3.1):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \vec{x}(\tau_1) d\tau_1.$$

Теперь повторим эту процедуру многократно, учитывая, что

$$\vec{x}(\tau_1) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \vec{x}(\tau_2) d\tau_2.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \vec{x}(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d(\tau_3) d(\tau_2) d(\tau_1) \vec{x}(t_0) + \dots = \\ &= \left\{ E + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \right\} \vec{x}(t_0) \end{aligned}$$

Если объект – стационарный и матрица A состоит из постоянных и не зависящих от времени элементов, то матрициант матрицы A (или ряд Пеано) превращается в выражение для матричной экспоненты:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= E + A(t - t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots = \\ &= \exp(A(t - t_0)) = e^{A(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Очевидно, что в стационарном случае переходная матрица является уже функцией только одного аргумента, равного разности начального и текущего (конечного) времени:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A\Delta t}. \quad (2.3.10)$$

Переходная матрица для стационарного объекта обладает рядом дополнительных замечательных свойств, трансформирующихся из соответствующих свойств переходной матрицы для нестационарного объекта :

$$\text{из 1) - } \Phi(0) = E; \quad (2.3.11)$$

$$\text{из 3) - } \Phi^{-1}(\Delta t) = \Phi(-\Delta t) = e^{-A \cdot \Delta t}; \quad (2.3.12)$$

из 4) -

$$= A \cdot \Phi(t - t_0) = A \cdot e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)} \cdot A; \quad (2.3.13)$$

из 5) - решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{x}(t_0); \quad (2.3.14)$$

$$\text{из 7) - } \Phi(k \cdot \Delta t) = \Phi^k \cdot (\Delta t). \quad (2.3.15)$$

2.3.2 Решение неоднородных векторно-матричных дифференциальных уравнений

Ранее были получены выражения для определения решений однородного дифференциального уравнения нестационарной

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) \quad (2.3.5)$$

и стационарной

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{x}(t_0) \quad (2.3.16)$$

систем. Используем эти результаты для определения решения неоднородного линейного векторно-матричного уравнения, соответствующего (2.2.7):

$$\dot{\vec{x}} = A(t) \cdot \vec{x}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t). \quad (2.3.17)$$

Произведем замену:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{z}(t) \quad (2.3.18)$$

и продифференцируем это выражение:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot \vec{z}(t) + \Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t) = \\ &= A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \vec{z}(t) + \Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t). \end{aligned}$$

Сопоставляя это выражение с предыдущим, получим

$$\Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t) = B(t) \cdot \vec{u}(t),$$

откуда

$$\dot{\vec{z}}(t) = \Phi(t_0, t) \cdot B(t) \cdot \vec{u}(t),$$

или, интегрируя,

$$\vec{z}(t) = \vec{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) d\tau.$$

Из (2.3.18) видно, что

$$\vec{z}(t_0) = \vec{x}(t_0).$$

В итоге получаем выражение для решения векторно-матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения, известное под названием формулы Коши:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.3.19)$$

2.4 Некоторые сведения из теории матриц

2.4.1 Собственные числа, характеристический полином, присоединенная матрица

Умножение квадратной матрицы A на некоторый вектор \vec{x} дает новый вектор \vec{z} , который, в общем случае, иначе ориентирован в пространстве и имеет другую длину по сравнению с исходным вектором. Однако существуют и такие векторы, которые при выполнении этой операции меняют только свою длину, но не меняют направления, то есть

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad (2.4.1)$$

где λ - вещественная или комплексная скалярная величина, называемая собственным значением (характеристическим числом) матрицы A , а вектор \vec{v} - собственный вектор этой матрицы. В развёрнутом виде уравнение (2.4.1) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}v_1 + a_{12}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = \lambda v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_1 + \dots + a_{2n}v_n = \lambda v_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_1 + \dots + a_{nn}v_n = \lambda v_n \end{array} \right.$$

Очевидно, что для существования ненулевых v_i необходимо выполнение условия

$$\det(\lambda E - A) \equiv |\lambda E - A| = 0. \quad (2.4.2)$$

Это уравнение называют характеристическим, или вековым уравнением матрицы A . Левая часть этого уравнения называется характеристическим полиномом, степень его равна размеру n матрицы A :

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^1 + \alpha_n. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, каждая квадратная матрица A имеет n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые могут быть определены путём решения характеристического уравнения с использованием стандартного математического обеспечения на цифровых вычислительных машинах.

Алгебраическая кратность корня λ – это его кратность как корня характеристического уравнения. Геометрическая кратность корня λ – это количество линейно независимых векторов \vec{v} , связанных с данным λ .

Если λ не является собственным значением матрицы A , то существует матрица $(\lambda E - A)^{-1}$. По правилу определения обратных матриц

$$(\lambda E - A)^{-1} = \frac{I(\lambda)}{|\lambda E - A|}, \quad (2.4.4)$$

где $I(\lambda)$ - присоединённая матрица для матрицы A . Ее элементы определяются как алгебраические дополнения элементов матрицы $(\lambda E - A)^T$. Здесь символ T означает транспонирование. Присоединённая матрица - это матричный полином степени $n-1$:

$$I(\lambda) = E\lambda^{n-1} + I_1\lambda^{n-2} + \dots + I_{n-2}\lambda + I_{n-1}, \quad (2.4.5)$$

где E – единичная матрица $[n \times n]$.

Если все собственные числа матрицы A различны, то собственные векторы матрицы A могут быть выбраны пропорциональными любым ненулевым столбцам матрицы $I(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

ПРИМЕР 2.4.1. Пусть объект задан структурной схемой, приведённой на рис.2.8.

1-img017.png

Ему соответствует система уравнений

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + u,$$

или в матричном виде

$$\vec{\dot{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для этих исходных данных получаем характеристический полином

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6.$$

Ему соответствуют собственные числа

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3.$$

Найдем присоединенную матрицу

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \begin{bmatrix} (\lambda + 2)(\lambda + 1) & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & (\lambda + 3)(\lambda + 1) & \lambda + 3 \\ 0 & 0 & (\lambda + 3)(\lambda + 2) \end{bmatrix} = \\ &= E_3\lambda^2 + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы матрицы A :

$$I(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad I(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad I(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и можно выбрать

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный результат нетрудно проверить прямой подстановкой в (2.4.1).

Имеется ряд алгоритмов для определения коэффициентов характеристического полинома и присоединенной матрицы. Один из наиболее употребимых - это **алгоритм Ф аддеева - Леверье**. Он состоит в следующей последовательности вычислений:

$$\begin{aligned} A_1 &= A; \quad \alpha_1 = -\text{Sp}A_1; \quad I_1 = A_1 + \alpha_1 E; \\ A_2 &= AI_1; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\text{Sp}A_2; \quad I_2 = A_2 + \alpha_2 E; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= AI_{n-2}; \quad \alpha_{n-1} = -\frac{1}{n-1}\text{Sp}A_{n-1}; \quad I_{n-1} = A_{n-1} + \alpha_{n-1}E; \\ A_n &= AI_{n-1}; \quad \alpha_n = -\frac{1}{n}\text{Sp}A_n; \quad I_n = A_n + \alpha_n E = 0. \end{aligned}$$

Здесь через $\text{Sp}A$ обозначен след матрицы A , то есть сумма ее диагональных элементов

$$\text{Sp}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Последнее равенство процедуры используется для контроля точности вычислений.

Для объекта, приведенного в примере 2.4.1,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Если матрица A не вырождена, то из промежуточных результатов алгоритма Ф аддеева - Леверье, учитывая, что

$$A_n = -\alpha_n E,$$

получаем

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} I_{n-1}. \quad (2.4.6)$$

Для рассматриваемого примера

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

В вырожденном случае $\alpha_n = 0$. Иллюстрацией этого может служить объект, структурная схема которого приведена на рис.2.9.



2.4.2 Собственные значения и собственные векторы транспонированной матрицы

Собственные значения транспонированной матрицы - это такие λ , для которых система уравнений

$$A^T \vec{d} = \lambda \vec{d} \quad (2.4.1)$$

имеет нетривиальные решения, т.е. когда

$$|\lambda E - A^T| = 0. \quad (2.4.2)$$

Решение этого алгебраического уравнения дает n значений собственных чисел λ_1 , λ_2 , ..., λ_n . Так как определители квадратной матрицы и её транспонированной матрицы равны, то собственные числа матриц A и A^T также равны.

Таким образом, собственному числу λ_i соответствует собственный вектор \vec{v}_i матрицы A и собственный вектор \vec{d}_i матрицы A^T .

Если транспонировать обе части уравнения (2.4.7), то получим

$$\vec{d}^T A = \lambda \vec{d}^T. \quad (2.4.3)$$

В связи с этим вектор \vec{d} называют левым собственным вектором матрицы A , в отличие от \vec{v} , который, в таком случае, называют правым собственным вектором. Для i -го собственного числа и i -го левого собственного вектора соответственно

$$\vec{d}_i^T A = \lambda_i \vec{d}_i^T.$$

Умножим обе части этого равенства справа на вектор \vec{v}_j :

$$\vec{d}_i^T A \vec{v}_j = \lambda_i \vec{d}_i^T \vec{v}_j. \quad (2.4.10)$$

Учитывая свойства собственных векторов, в результате получаем уравнение

$$\vec{d}_i^T \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_i \vec{d}_i^T \vec{v}_j,$$

которое преобразуется к виду

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_j (\lambda_j - \lambda_i) = 0. \quad (2.4.11)$$

Полагаем, что все собственные числа матрицы A различны. Тогда для 1-img019.p имеем $\lambda_i \neq \lambda_j$ и из равенства (2.4.11) следует, что векторы \vec{d}_i^T и \vec{v}_j взаимно ортогональны:

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (2.4.12)$$

Это означает то, что \vec{d}_i ортогонален $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости с базисом, образованным векторами \vec{v}_j для всех $j \neq i$.

В качестве примера на рис. 2.10 показан один из вариантов взаимного расположения правых и левых собственных векторов некоторой матрицы A для случая $n = 3$. Здесь хорошо видно, что каждый из векторов \vec{d}_i ортогонален всем векторам \vec{v}_j при $j \neq i$.

1-img020.png

Теперь рассмотрим случай, когда $i = j$. При этом скалярные произведения векторов \vec{d}_i и \vec{v}_i не должны быть равны нулю. Если предположить, что $\vec{d}_i^T \vec{v}_i = 0$, то придется утверждать, что вектор \vec{d}_i ортогонален всему n – мерному пространству с базисом $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Но этого не может быть, так как вектор \vec{d}_i сам принадлежит этому пространству. Таким образом,

В связи с тем, что собственные векторы можно выбирать с точностью до постоянного (в том числе комплексного) сомножителя, то наборы, иначе говоря, базисы $\{\vec{v}\}$ и $\{\vec{d}\}$ формируют так, чтобы для $i = 1, 2, \dots, n$ выполнялось условие

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_i = 1 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.14)$$

Отметим ещё одно важное свойство собственных векторов:

Если матрица A не имеет кратных собственных чисел, то все её собственные векторы линейно независимы, то есть образуют базис в пространстве R^n .

Это нетрудно доказать. Действительно, предположим сначала, что среди собственных векторов матрицы A первые два являются линейно зависимыми, то есть

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \vec{v}_i = 0, \quad (2.4.15) \quad (2.4.7)$$

где ни один из коэффициентов γ_1 и γ_2 не равен нулю. Умножив это уравнение

слева на A , получим

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \lambda_i \vec{v}_i = 0. \quad (2.4.16) \quad (2.4.8)$$

Теперь умножим (2.4.7)(2.4.15) на λ_2 :

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \lambda_2 \vec{v}_i = 0. \quad (2.4.17) \quad (2.4.9)$$

Вычтем (2.4.17) из (2.4.16) и в результате получим

$$\gamma_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1 = 0.$$

Из того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\gamma_1 \neq 0$, следует $\vec{v}_1 = 0$, чего не может быть, следовательно, первые два собственных вектора не могут быть линейно зависимыми.

Теперь предположим, что число линейно зависимых векторов равно $r > 2$, то есть

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \vec{v}_i = 0, \quad \gamma_i \neq 0; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Умножив это уравнение слева на A , получим

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_i \vec{v}_i = 0. \quad (2.4.18)$$

Умножим (2.4.18) на λ_r :

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_r \vec{v}_i = 0. \quad (2.4.19)$$

Вычтем (2.4.19) из (2.4.18) и в результате будем иметь

$$\sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i (\lambda_i - \lambda_r) \vec{v}_i = 0.$$

Получается, что число линейно зависимых векторов $r - 1 < r$. Если согласиться с этим, то дойдём до $r = 2$, и круг замкнётся.

Таким образом, действительно, все собственные векторы матрицы A являются линейно независимыми, поэтому матрица $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$, построенная из векторов базиса $\{\vec{v}\}$, т.е. из правых собственных векторов матрицы A ,

является невырожденной. Эта матрица называется модальной матрицей. Из перечисленных выше свойств для правых и левых собственных векторов следует равенство

$$D^T V = E, \text{ или } D^T = V^{-1}, \quad (2.4.20)$$

где D^T - матрица, строки которой являются транспонированными векторами двойственного базиса $\{\vec{d}\}$, т.е. левыми собственными векторами матрицы A :

$$D^T = \begin{bmatrix} \vec{d}_1^T \\ \vec{d}_2^T \\ \dots \\ \vec{d}_n^T \end{bmatrix}. \quad (2.4.21)$$

2.4.3 Определение функции от матрицы через её левые и правые собственные векторы

Все n систем уравнений

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

могут быть записаны с использованием блочных матриц:

$$[A\vec{v}_1 A\vec{v}_2 \dots A\vec{v}_n] = [\lambda_1 \vec{v}_1 \lambda_2 \vec{v}_2 \dots \lambda_n \vec{v}_n].$$

Учтем, что

$$[A\vec{v}_1 A\vec{v}_2 \dots A\vec{v}_n] = AV$$

и

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{v}_1 & \lambda_2 \vec{v}_2 & \dots & \lambda_n \vec{v}_n \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = V\Lambda, \end{aligned}$$

где Λ - диагональная матрица собственных чисел.

Таким образом, получено равенство

$$AV = VA,$$

или

$$A = V\Lambda D^T. \quad (2.4.22)$$

Преобразование $A = TCT^{-1}$, где T - произвольная невырожденная матрица, называется преобразованием подобия. Одно из основных свойств этого преобразования заключается в том, что собственные числа подобных матриц (здесь - A и C) совпадают. Действительно,

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda TT^{-1} - TCT^{-1}| = |T||\lambda E - C||T^{-1}| = \varphi_C(\lambda).$$

Говорят, что матрица A приводится к диагональному виду преобразованием

$$\Lambda = V^{-1}AV = D^TAV. \quad (2.4.23)$$

Более высокие степени A приводятся к диагональному виду таким же способом:

$$\Lambda^2 = V^{-1}AVV^{-1}AV = V^{-1}A^2V$$

.....

$$\Lambda^l = V^{-1}A^lV \text{ или } A^l = V\Lambda^lV^{-1}.$$

Таким образом, если рассмотреть матричный многочлен

$$N(A) = A^l + C_1A^{l-1} + \dots + C_{l-1}A + C_lE,$$

то

$$N(A) = V \{ \Lambda^l + C_1\Lambda^{l-1} + \dots + C_{l-1}\Lambda + C_lE \} V^{-1},$$

или

$$N(A) = V \begin{bmatrix} N(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N(\lambda_l) \end{bmatrix} V^{-1}. \quad (2.4.24)$$

Если применить этот результат к характеристическому полиному, то полу-

чим

$$\varphi(A) = 0, \quad (2.4.25)$$

то есть каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому полиному. Это утверждение известно в теории матриц как *теорема Кэли-Гамильтона*.

Для любой функции от матрицы $f(A)$, которую можно представить в виде конечного или бесконечного степенного полинома, справедливо аналогичное выражение

$$f(A) = V \cdot \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot D^T \quad (2.4.26)$$

или эквивалентное ему

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \vec{v}_i \vec{d}_i^T. \quad (2.4.27)$$

Отсюда вытекает, например, один из способов определения матричной экспоненты или соответствующей переходной матрицы:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \vec{v}_i \vec{d}_i^T. \quad (2.4.28)$$

ПРИМЕР 2.4.2. Для объекта, представленного на рис.2.8 в примере 2.4.1, найдём левые собственные векторы. Если обозначить присоединённую матрицу к матрице A как $I\{A\}$, то очевидно равенство

$$I\{A^T\} = I^T\{A\}.$$

Поэтому

$$I^d(\lambda) = I\{A^T\} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 2 & 0 & 0 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 4\lambda + 3 & 0 \\ 1 & \lambda + 3 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3,$$

имеем

$$I^d(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} ; \quad I^d(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$I^d(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Рассчитаем левые собственные векторы. Учтем при этом (2.4.14). Таким образом, для первого собственного вектора \vec{d}_1 должны выполняться условия откуда

Аналогично получим

$$\vec{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} .$$

Теперь можно записать выражение для переходной матрицы. Из (2.4.28) имеем

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

и окончательно

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & 0.5e^{-t} - e^{-2t} + 0.5e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} .$$

Рассмотрим ещё несколько примеров.

Для

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_1 = -1 ; \quad \lambda_2 = -2 ; \quad \lambda_3 = -3$$

имеем

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} &= j \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= j \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Проведём проверку:

$$\begin{aligned}
&j^2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для той же матрицы найдём A^5 :

$$\lambda_1^5 = -1, \quad \lambda_2^5 = -32, \quad \lambda_3^5 = -243 \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}
A^5 &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 32 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 243 \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -243 & 211 & -90 \\ 0 & -32 & 31 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$