

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2016

Оглавление

1	Тест	2
1.1	Введение в теорию автоматического управления	2
2	Методы анализа непрерывных систем	19
2.1	Понятие пространства состояний	19
2.2	Линеаризация исходных уравнений	21
3	Тестовая зона	27
4	Тест нумерации уравнений	28
4.1	первая секция	28
4.1.1	Подсекция	28

Глава 1

Тест

1.1 Введение в теорию автоматического управления

На рубеже XVIII-XIX веков в эпоху промышленного переворота в Европе начинается новый этап развития автоматики, связанный с внедрением ее в промышленность. 1765 год знаменуется постройкой регулятора уровня котла паровой машины И.И. Ползунова. В 1784 го-ду появляется центробежный регулятор скорости паровой машины Дж.Уатта.

В это время формируется ряд важных принципов автоматики: принцип регулирования по отклонению Ползунова - Уатта и принцип регулирования по нагрузке Понселе. Первый из них развился в концепцию обратной связи, второй - в теорию инвариантности (Г.В. Ши-панов, Н.Н. Лузин, Б.Н. Петров). Идея регулирования по нагрузке может быть проиллюстрирована на примере генератора с последова-тельным (сериесным) возбуждением (рис. 1.1). При изменении нагрузки меняется ток возбуждения, который соответствующим изменением магнитного потока компенсирует дополнительное падение напряжения на внутреннем сопротивлении якоря генератора. Однако если при этом по каким-либо причинам изменяется скорость вращения якоря генератора, то за-стабилизировать напряжение на нагрузке в этой схеме уже не удастся.

От этого недостатка свободна схема, приведенная на рис. 1.2 - именно вследствие использования принципа обратной связи. В этой схеме входной потенциометр служит для задания (коэффициент) величины стабилизируемого на-

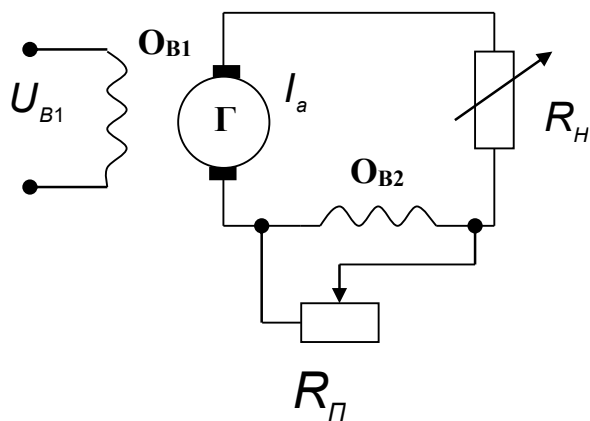


Рис. 1.1 – Пример регулирования по возмущению

пряжения; потенциометр, подключенный к якору генератора, позволяет регулировать коэффициент обратной связи. В этом случае, в отличие от систем регулирования по возмущению, не важно, какая именно причина вызвала изменение регулируемой величины. При изменении напряжения на щётках генератора в соответствии с электрической схемой изменяется напряжение на обмотке возбуждения. При отрицательном знаке обратной связи знак приращения напряжения возбуждения противоположен знаку изменения напряжения якоря генератора. В итоге результирующая величина отклонения напряжения генератора уменьшается по сравнению с соответствующим уходом напряжения в системе без обратной связи.

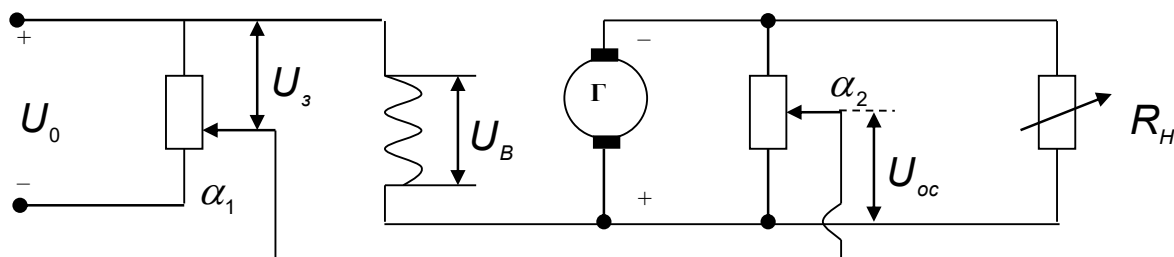


Рис. 1.2 – Стабилизация напряжения генератора с использованием обратной связи

На этом же принципе построена приведенная на рис. 1.3 система стабилизации скорости паровой машины Уатта. На рис. 1.4 представлена её функциональная схема. В данной системе с увеличением нагрузочного момента M_H падают обороты турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния $2r$ между

грузиками центробежного регулятора. Вследствие этого заслонка поднимается (увеличивается расстояние S) и растёт расход пара Q , подаваемого в турбину. Это приводит к росту числа оборотов турбины ω а следовательно, к компенсации нагрузочного момента M_H

При изменении нагрузки на валу паровой машины после окончания переходных процессов сохраняется так называемая статическая ошибка. Если бы это было не так, то грузики центробежного регулятора, а вместе с ними и заслонка заняли бы своё первоначальное положение, и не изменившееся в результате количество подаваемого в турбину пара не смогло бы уравновесить изменившийся момент нагрузки. Такая система называется статической. Работа её осуществляется именно за счёт наличия *статической* ошибки.

Рассматриваемая система относится к классу систем *прямого* действия, то есть таких, в которых для реализации регулятора не используются дополнительные источники энергии. В данном случае это плохо, потому что для мощных установок перемещение тяжёлой заслонки потребует неразумно громоздкого и тяжёлого центробежного регулятора.

Таким образом, система является статической системой прямого действия.

Введём следующие определения:

статистической системой называют систему, работающую за счет статической ошибки;

системой прямого действия называют систему, регулятор которой не имеет собственных источников энергии.

структурной схемой называется блок-схема, каждый элемент которой отображает некоторый математический оператор (группу операторов), описывающий рассматриваемую систему.

Использование функциональных и структурных схем позволяет более наглядно представить взаимосвязь между отдельными основными и промежуточными переменными объектов и систем управления

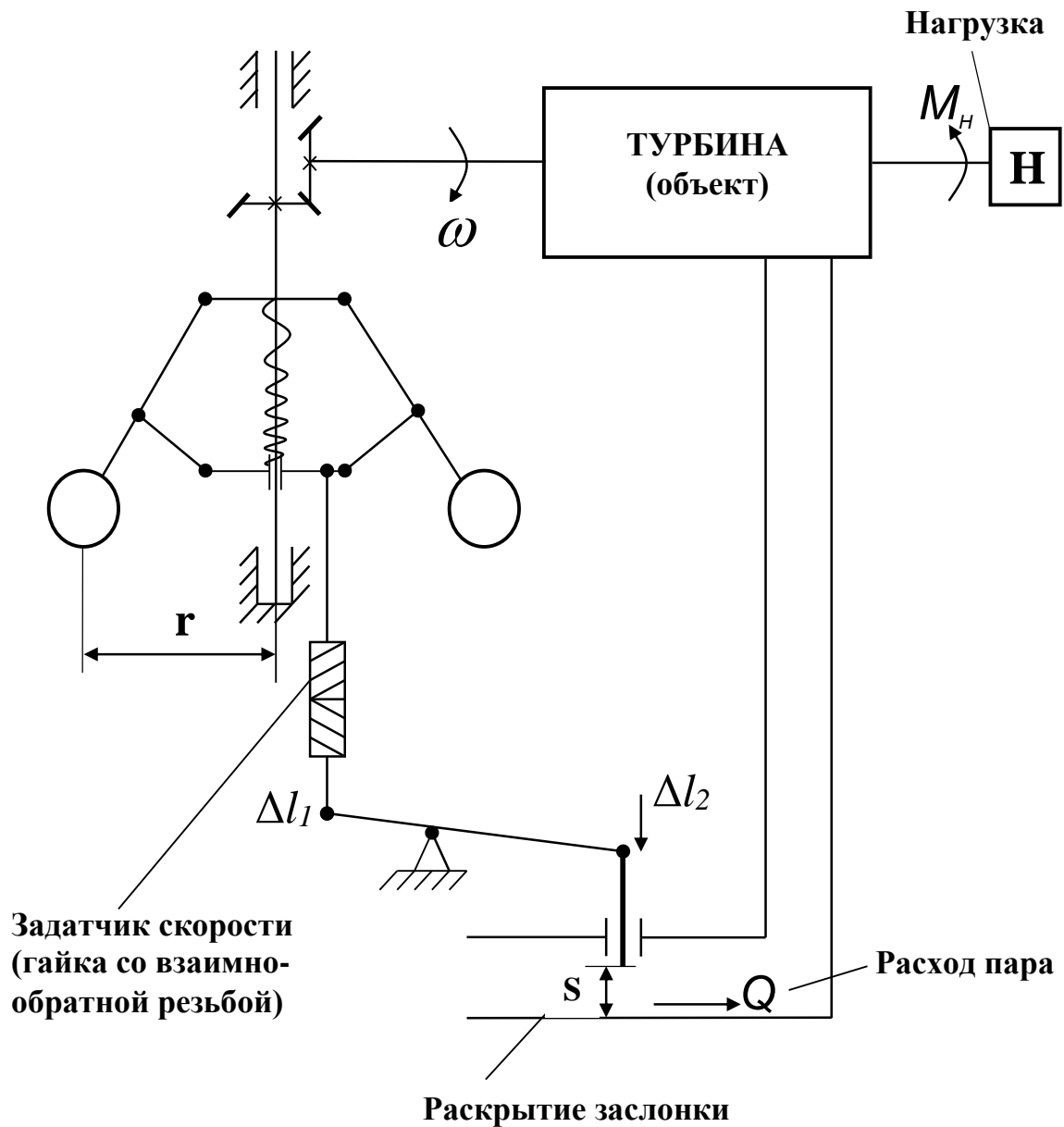


Рис. 1.3 – Система стабилизации скорости правой машины

Типовая функциональная схема системы автоматического управления (САУ) представлена на рис. 1.5,

где

u — управляющий сигнал;

y — управляемый сигнал;

f — возмущающее воздействие.

Кружок с четырьмя секторами является сумматором, причём сигнал, по-

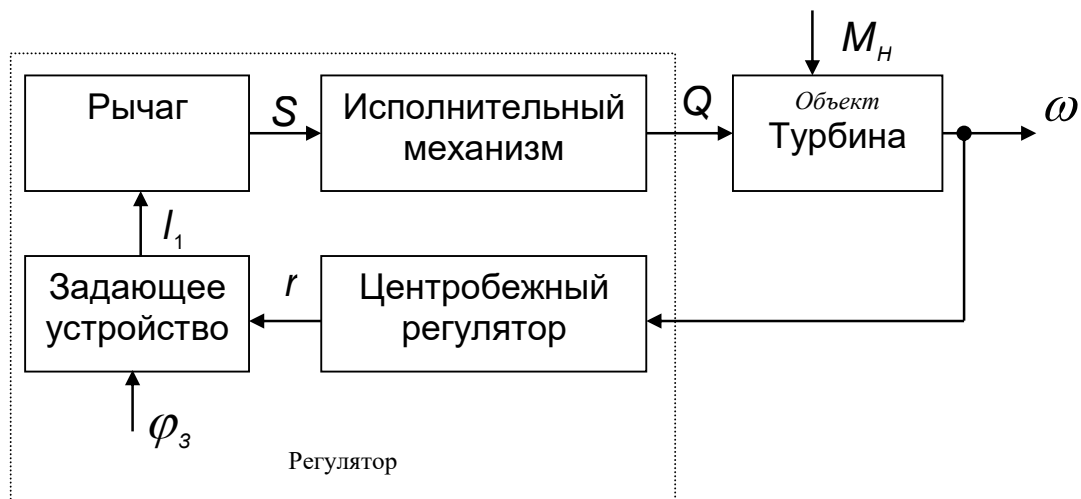


Рис. 1.4 – Функциональная схема системы стабилизации скорости турбины

ступающий на зачернённый сектор, изменяет свой знак (вычитается).

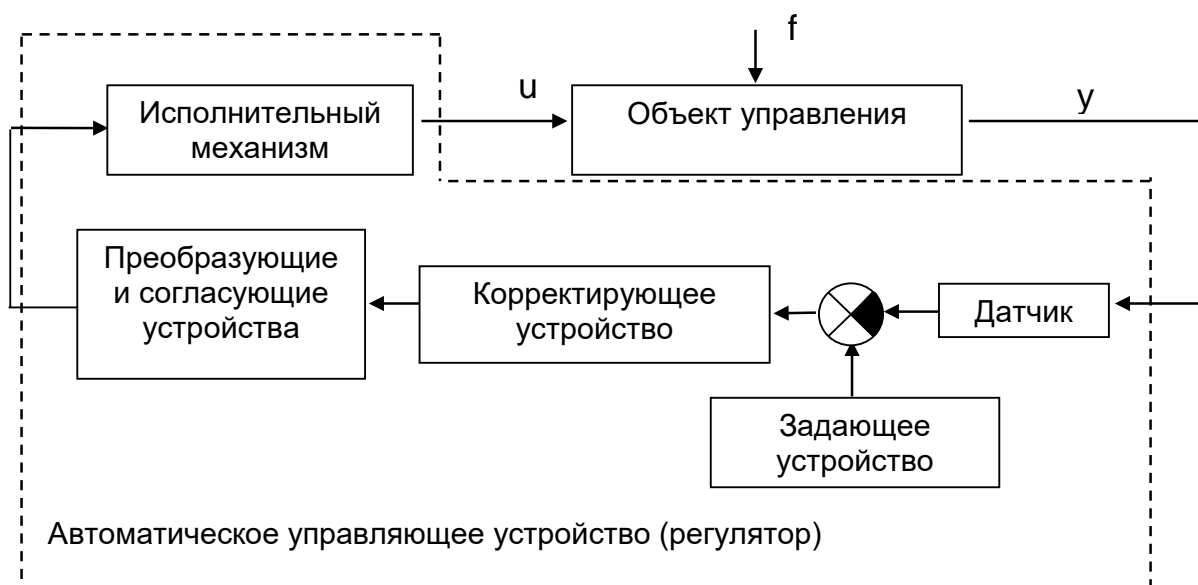


Рис. 1.5 – Типовая функциональная САУ

Рассмотрим вариант системы стабилизации скорости турбины, в котором сделана попытка устранить недостатки, присущие рассмотренной выше статической системе прямого действия. На рис. 1.6 показан регулятор для этой системы.

Для этого в систему введен гидравлический усилитель, включающий в себя золотник, силовой цилиндр и масляный насос. Такая система, в которой энергия регулятора потребляется от отдельного источника, называется *системой непрямого действия*.

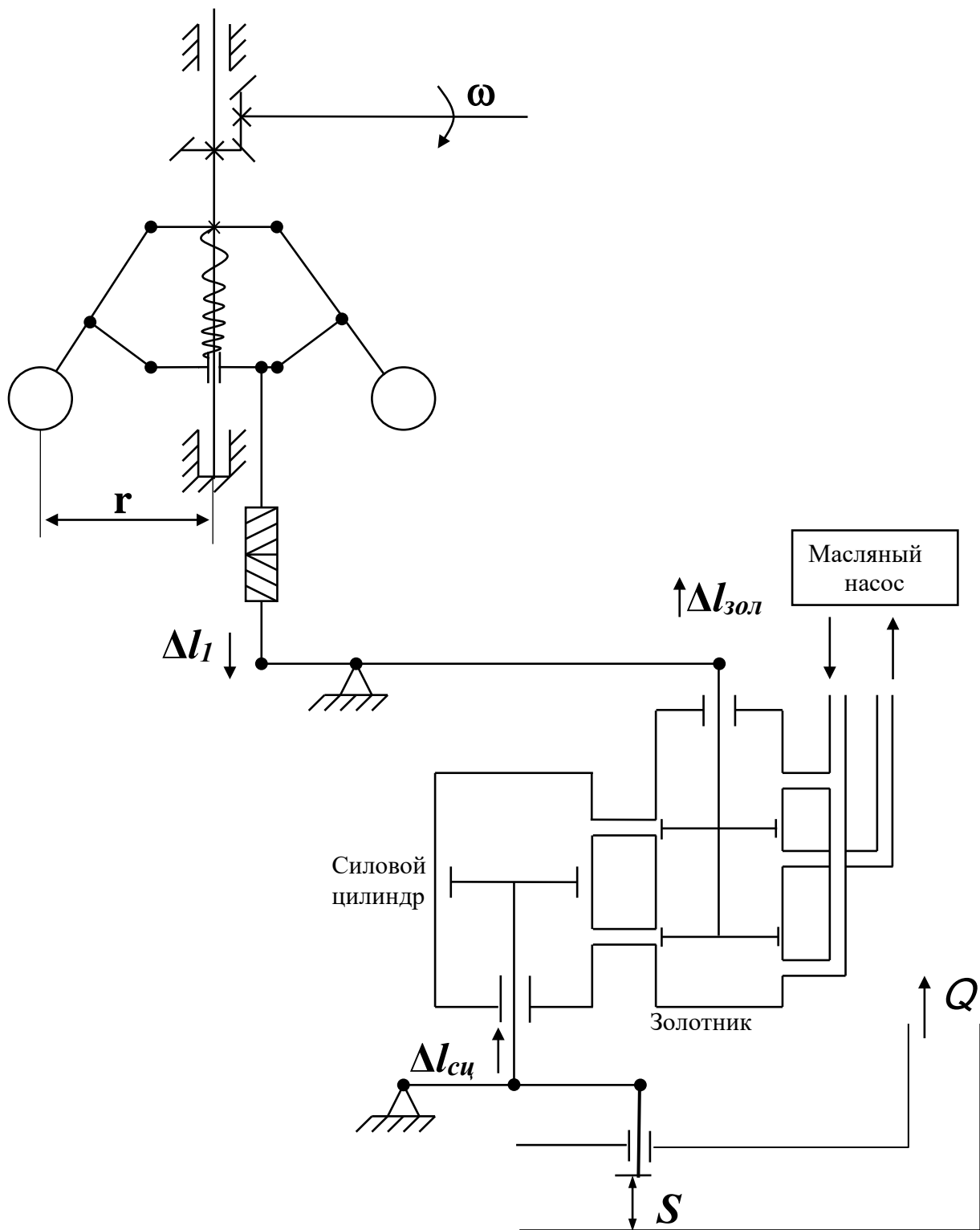


Рис. 1.6 – Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием гидравлического усилителя

При заданной скорости расстояние между грузиками центробежного регулятора равно номинальному значению ($r = r_0$), положение плеча золотника $l_{\text{зол}}$ также равно номинальному значению ($l_{\text{зол}} = l_{\text{зол}0}$), при этом поршень золотника полностью перекрывает выходные отверстия, следовательно, положение поршня силового цилиндра неизменно.

С увеличением нагрузочного момента $M_{\text{Н}}$ падают обороты турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния между грузиками центробежного регулятора. В результате изменяется положение поршенька золотника. Это, в свою очередь, приводит к перемещению поршня силового цилиндра, а следовательно, и к дополнительному приоткрытию заслонки S . Соответственно увеличивается расход пара, возрастает скорость оборотов турбины ω и увеличивается расстояние r . Статика (установившееся состояние) в системе возможна только тогда, когда $l_2 = l_{20}$, то есть когда полностью перекрыты перепускные отверстия золотникового устройства.

Теоретически в этой системе статическая ошибка равна нулю, то есть данная система является *астатической*. В ней отсутствует статическая связь между скоростью и положением заслонки.

Рассмотрим упрощенные уравнения системы. Начнём с уравнения объекта. Очевидно, что изменение скорости турбины может происходить лишь в тех случаях, когда нарушается равновесие между движущим моментом турбины $M_{\text{Т}}$ и моментом нагрузки $M_{\text{Н}}$:

$$J \frac{d\Delta\Omega}{dt} = \Delta M_{\text{Т}} - \Delta M_{\text{Н}} \quad (1.1.1)$$

где J — суммарный момент инерции, приведённый к валу турбины.

С целью упрощения в уравнении (1.1.1) использованы приращения скорости и моментов. Более подробно такой подход будет рассмотрен в разделе, посвященном линеаризации систем.

Будем полагать, что приращение момента турбины пропорционально приращению количества подаваемого пара

$$\Delta M_{\text{Т}} = K_{\text{Т}} \Delta Q$$

Запишем уравнение центробежного регулятора. Полагая, что сами отклонения скорости и вызванные ими приращения внутренних переменных регулятора малы, мы можем выразить все зависимости в линейном виде. Тогда приращения скорости раскрытия грузиков и изменение положения поршенька золотника будут связаны линейными зависимостями:

$$\Delta r = K_{\omega} \cdot \Delta \omega ; \quad (1.1.2)$$

$$\Delta l_{\text{зол}} = -K_r \cdot \Delta r.$$

Составляя уравнение гидравлического усилителя, учтём, что скорость перемещения поршня силового цилиндра пропорциональна величине открытия перепускных отверстий золотника, то есть приращению $l_{\text{зол}}$:

$$\frac{d\Delta l_{\text{сц}}}{dt} = K_{\text{зол}} \cdot \Delta l_{\text{зол}}. \quad (1.1.3)$$

Приращение координаты штока силового цилиндра повлечет за собой изменение положения заслонки и, следовательно, изменение количества подаваемого в турбину пара:

$$\Delta Q = K_{\text{сц}} \cdot \Delta l_{\text{сц}}. \quad (1.1.4)$$

Продифференцировав уравнение (1.1.4) и учитывая уравнения для центробежного регулятора (1.1.2) и гидравлического усилителя (1.1.3), получим уравнение для регулятора:

$$\frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega, \quad (1.1.5)$$

где $K_p = K_{\text{сц}} \cdot K_{\text{зол}} \cdot K_r \cdot K_{\omega}$ — коэффициент регулятора.

Запишем совместно уравнения объекта и регулятора

$$\begin{cases} \frac{d\Delta \Omega}{dt} = k_q \cdot \Delta - K_H \cdot \Delta M_H; \\ \frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega, \end{cases}$$

продифференцируем первое уравнение и подставим в него второе:

$$\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} = K_q(-K_p \cdot \Delta\Omega) - K_H \frac{d\Delta M_H}{dt}.$$

При условии постоянства нагрузки получаем уравнение свободного движения всей системы

$$\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} + K \cdot \Delta\omega = 0, \quad (1.1.6)$$

где

$$K = K_p \cdot K_q.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + K = 0,$$

его корни - $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K}$,

Таким образом, решение уравнения (1.1.6) имеет вид

$$\Delta\omega(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = A \sin(\sqrt{K} \cdot t + \varphi), \quad (1.1.7)$$

где A и φ определяются начальными условиями.

В результате решения получили, что в данной системе в принципе не существует установившегося (статического) состояния. Следовательно, система неработоспособна.

С целью успокоения незатухающих колебаний (1.1.7) введём в систему демпфер (рис. 1.7) и рассмотрим, что в ней происходит при изменении нагрузки. С увеличением нагрузочного момента M_H уменьшается скорость вращения турбины ω , что приводит к уменьшению расстояния r между грузиками центробежного регулятора. Это влечет за собой изменение положения поршенька золотника $\Delta l_{\text{зол}}$, а следовательно, и изменение положения поршня силового цилиндра. При этом одновременно происходит два процесса.

Во-первых, вместе со штоком силового цилиндра опускаются поршень и цилиндр демпфера, уменьшая первоначальное изменение $\Delta l_{\text{зол}}$. Скорость перемещения поршня демпфера относительно его цилиндра невелика и регулируется с помощью специального дросселя Dp .

Во-вторых, приоткрывается заслонка, увеличивая количество подаваемого в турбину пара, и начинает расти скорость ω .

За счёт первого движения поршни золотника могут перекрыть перепускные отверстия ещё до восстановления номинального значения ω . В то же время пружины стремятся вернуть демпфер в исходное положение, и, в конечном итоге, Δl_2 стремится к нулю. Теперь уже перепускные отверстия золотника будут перекрыты только при номинальной скорости. Следовательно, система с демпфером, как и предыдущая, является астатической. Рассмотрим, как повлияло введение демпфера на незатухающие колебания, выявленные в предыдущем варианте системы. Считая отклонения от номинального режима малыми, запишем уравнения элементов регулятора. Как и раньше,

$$\Delta r = K_\omega \Delta \omega, \quad (1.1.8)$$

$$\Delta l_1 = -K \cdot \Delta r;$$

$$\frac{d}{dt} l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} \Delta l_{\text{зол}}. \quad (1.1.9)$$

В отличие от предыдущей системы, в данном случае положение штока золотника зависит не только от центробежного регулятора, но и от демпфера:

$$\Delta l_{\text{зол}} = K_1 \cdot \Delta l_1 - K_2 \cdot \Delta l_2. \quad (1.1.10)$$

Упрощенные уравнения демпфера основываются на равенстве сил пружин:

$$\Delta F_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \cdot \Delta l_2.$$

и сил, связанных с перемещением поршня демпфера относительно корпуса:

$$F_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{d(l_{\text{сц}} - l_2)}{dt},$$

или

$$\frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_2 = \frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_{\text{сц}}.$$

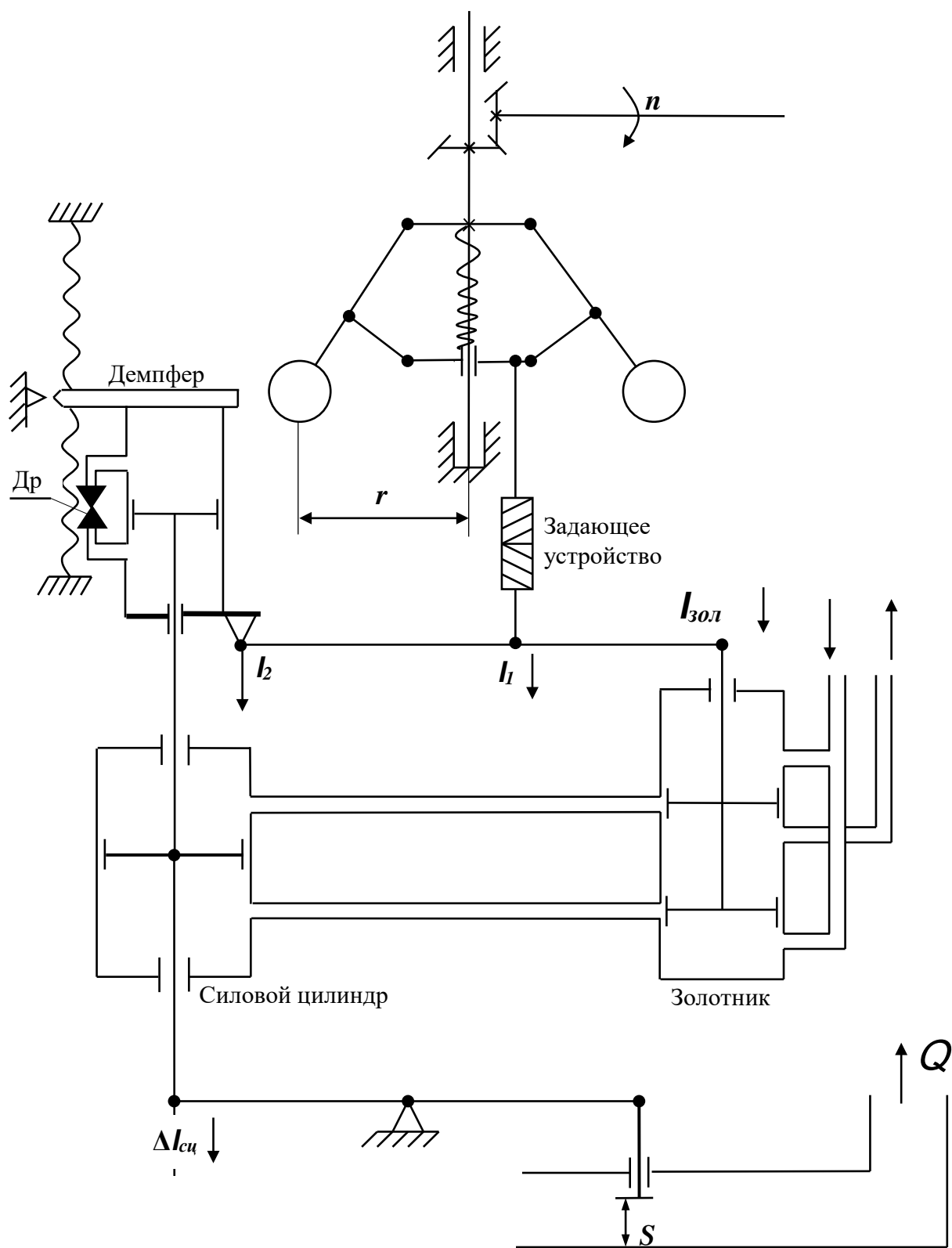


Рис. 1.7 – Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием успокоительного демпфера

Таким образом, изображения перемещений штока силового цилиндра и корпуса демпфера связаны соотношением

$$\Delta l_2 = \frac{T_d p}{T_d p + 1} \cdot \Delta l_{\text{сц}}, \quad (1.1.11)$$

где постоянная времени демпфера

$$T_d = K_d / K_{\text{пр}}.$$

Из (1.1.9) и (1.1.10) следует

$$p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} \cdot \left(K_1 \Delta l_1 - K_2 \frac{T_d p}{T_d p + 1} \Delta l_{\text{сц}} \right),$$

откуда

$$\left(1 + K_{\text{зол}} K_2 \frac{T_d}{T_d p + 1} \right) \cdot p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} K_1 \Delta l_1. \quad (1.1.12)$$

Используя равенства (1.1.8), (1.1.12) и (1.1.4), получим связь между входом регулятора $\Delta \Omega$ и его выходом ΔQ :

$$\frac{T_1 p + 1}{T_d p + 1} K_{q \text{ рег.}} p \Delta Q = K_{\text{зол}} K_1 (-K_r K_\omega) \Delta \Omega, \quad (1.1.13)$$

где

$$K_{q \text{ рег.}} = \frac{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}{K_{\text{сц}}}; \quad T_1 = \frac{T_d}{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}.$$

Если $T_1 \ll T_d$, то (1.1.13) упрощается:

$$\frac{K_{q \text{ рег.}} \cdot p}{T_d p + 1} = -K_{\omega \text{ рег.}} \Delta \omega$$

Это равенство можно решить относительно ΔQ :

$$\Delta Q = \frac{K_{\omega \text{ рег.}} T_d}{K_{q \text{ рег.}}}; \quad K_{\text{рег.интегр.}} = \frac{K_{\omega \text{ рег.}}}{K_{q \text{ рег.}}}$$

и окончательно получим уравнение регулятора, в котором выходная величина ΔQ формируется как сумма пропорциональной и интегральной составляющих

ошибки стабилизации $\Delta\omega$:

$$\Delta Q = -K_{\text{рег.пропорц.}} \cdot \Delta\omega - K_{\text{рег.интегр.}} \frac{\Delta\omega}{p} \quad (1.1.14)$$

Запишем уравнение объекта (турбины) относительно изображений по Лапласу его входной и выходной переменных:

$$p \cdot \Omega = K_q \Delta Q - K_H \Delta M_H. \quad (1.1.15)$$

Продифференцируем последнее равенство и подставим в него уравнение регулятора (1.1.14). В результате получим уравнение системы в целом:

$$p^2 \Delta\omega + K_q K_{\text{рег.пропорц.}} \cdot \Delta\omega + K_q K_{\text{рег.интегр.}} \Delta\omega = -K_H \cdot p \cdot \Delta M. \quad (1.1.16)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -0.5 K_q K_{\text{рег.пропорц.}} \pm \sqrt{(0.5 K_q K_{\text{рег.пропорц.}})^2 - K_q K_{\text{рег.интегр.}}}$$

всегда имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что в отличие от предыдущего случая свободная составляющая решения уравнения (1.1.16) с течением времени стремится к нулю. Таким образом, введение демпфера позволило получить устойчивую, работоспособную систему.

Разработчики первых систем автоматического регулирования столкнулись со случаями катастрофической неустойчивости, на первый взгляд, безукоризненных систем. В 1845 году братья Вильям и Вернер Сименсы предложили метод регулирования по производной. Существо их предложения можно пояснить на примере следящей системы, функциональная схема которой приведена на рис.1.8. На рис.1.9 представлен фрагмент переходных процессов по выходной координате $\varphi_{\text{вых}}$, рассогласованию (ошибке) ε и производной рассогласования $\dot{\varepsilon}$. Хотя в точках А1 и А2, В1 и В2 отклонения выходной координаты от входной соответственно равны, управляющие воздействия на объект должны быть различными, так как в точках А1 и В2 выходная координата движется к требуемому значению, а в точках В1 и А2 - удаляется от него. Учитывая инерционные свойства объекта, целесообразно в формирователе закона управления

реализовать управляющее воздействие U , пропорциональное сумме $\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \dot{\varepsilon}$. Добавление сигнала производной уменьшит абсолютную величину управления в точках А1 и В2 и увеличит её в точках В1 и А2.

Распространение автоматических регуляторов вызвало потребность в разработке теоретически обоснованных методов их расчета. В 1866 году выходит в свет статья Д.К.Максвелла "О регуляторах В 1876 году появилась работа, оказавшая большое влияние на науку о регулировании - труд профессора И.А. Вышнеградского "Об общей теории регуляторов В этой работе было выведено условие устойчивости для линейных систем третьего порядка и даны конкретные указания о том, как влияют конструктивные параметры на устойчивость. И.А. Вышнеградский явился основоположником классической теории регулирования. Работы Вышнеградского были продолжены словацким учёным А. Стодолой. По его просьбе швейцарский математик А. Гурвиц в 1895 году ввел алгебраические условия устойчивости для линейных систем любого порядка. Долгое время оставалась неизвестной инженерам аналогичная работа Е.Д.Рауса, выполненная им еще в 1877 году по просьбе Д.К.Максвелла.

Рис. 1.9. К введению производной ошибки в закон регулирования

Рис. 1.9. К введению производной ошибки

в закон регулирования

Большой вклад в теорию автоматического регулирования внес известный русский ученый Н.Е. Жуковский. В 1880 году вышла его работа "О прочности движения". Он читал лекции по теории регуляторов в Московском университете, Математическом обществе и Московском техническом училище. В 1909 году вышел его учебник по классической теории регулирования - "Теория регулирования хода машин".

Основы общей теории устойчивости динамических систем были заложены выдающимся русским учёным А.М. Ляпуновым. В своей докторской диссертации в 1892 году им впервые были сформулированы условия устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, дано строгое опреде-

ление понятия устойчивости, разработаны два основных метода исследования устойчивости: первый метод Ляпунова исследования устойчивости в малом и второй, прямой метод исследования устойчивости в большом.

В те годы, по-видимому, еще никто не подозревал о будущей роли теории А.М. Ляпунова в общей теории управления. Лишь в 40-50 годах его теоремы заработали в полную силу.

В 1932 году американский учёный Х.Найквист разработал теорию устойчивости усилителей с обратной связью. В 1936 году молодой советский ученый А.В. Михайлов распространил критерии Найквиста на системы автоматического регулирования и предложил свой собственный критерий устойчивости, который с тех пор называется его именем.

В 1937 году вышла большая работа советских учёных А.А. Андропова, С.Э. Хайкина и других по теории нелинейных колебаний, где впервые были введены понятия периодических режимов, автоколебаний, фазового пространства.

Сороковые годы нашего столетия отмечены бурным развитием частотных методов, и большую роль в их пропаганде и внедрении в практику проектирования в нашей стране сыграли профессор В.В. Солодовников и его ученики, в это же время Н. Винер и А.Н. Колмогоров создают теорию синтеза статистически оптимальных систем. В 1948 году К.Ф. Теодорчиком в СССР и в 1950 году В.Р.Ивенсом в США закладываются основы теории корневых годографов.

В 50-60 годы развивается новое перспективное направление - теория оптимального управления. У истоков этой теории стояли советские ученые А.А. Фельдбаум, Л.С. Понтрягин, А.М. Летов, Е.А. Барбашин, А.А. Красовский, Н.Н. Красовский, американские учёные Р. Беллман, Р. Калман и другие.

В 60-е годы М.А. Айзерманом и В.М. Поповым разрабатывается теория абсолютной устойчивости нелинейных систем. Большой вклад в теорию импульсных и цифровых систем автоматического управления внесли Ю.Ту, Я.З. Цыпкин, Л.Т. Кузин, Э. Джури. В.С. Пугачёв обогатил теорию управления разработкой вопросов статистической динамики. Родоначальником теории дифференциальных игр является академик Н.Н. Красовский. Продуктивную работу в области

распознавания образов и управления в условиях неопределённости ведут математики Екатеринбурга. Всемирно известны работы российских учёных Б.Н. Петрова и С.В. Емельянова в области теории и практики адаптивных систем.

Теория автоматического управления (ТАУ) – это наука, которая, абстрагируясь от конкретного исполнения различных объектов и систем АУ, изучает особенности установившихся и динамических режимов этих систем и предлагает методы проектирования управления, обеспечивающего выполнение требований, предъявляемых к ходу управляемого технологического процесса.

По принципу формирования управления системы автоматического управления (САУ) подразделяются на следующие:

- разомкнутые,
- замкнутые,
- комбинированные.

По цели управления САУ подразделяют на системы:

- стабилизации,
- программного управления,
- следящие.

ТАУ работает с математическими моделями объектов системы управления, сочетает анализ и синтез.

По математическому описанию и по свойствам САУ подразделяются на следующие типы:

- обыкновенные системы – системы, которые описываются дифференциальными или разностными уравнениями с сосредоточенными параметрами;
- системы с распределенными параметрами;

- непрерывные системы – системы, все координаты (переменные) которых являются непрерывными функциями времени;
- дискретные системы – системы, в которых хотя бы одна из координат (переменных) является импульсной (дискретной или решётчатой) функцией времени;
- детерминированные системы – системы с постоянными или изменяющимися известным (детерминированным) образом параметрами;
- стохастические системы – системы, параметры которых изменяются во времени случайным образом;
- линейные системы – системы, которые описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями;
- нелинейные системы – системы, которые описываются нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями;
- традиционные одноуровневые системы – системы с регулированием только основных переменных;
- системы с адаптивным управлением, в которых кроме основного контура с отрицательной обратной связью имеется контур, оценивающий текущие параметры управляемого объекта и соответствующим образом изменяющий управляющее воздействие или перестраиваемые параметры регулятора;
- оптимальные системы.

Более подробная и обстоятельная классификация систем автоматического управления приведена в обширной литературе по теории управления. В частности, можно порекомендовать учебник А.А. Красовского и Г.С. Поспелова [7].

Глава 2

Методы анализа непрерывных систем

2.1 Понятие пространства состояний

С точки зрения анализа и синтеза систем все переменные, характеризующие объект управления (рис.2.1) или имеющие к нему отношение, делятся на три группы.

1.Входные воздействия, представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемому объекту, и влияющие на его поведение. Внешние сигналы разделяют на сигналы управляющие - u_1, u_2, \dots, u_{n_u} и возмущающие - f_1, f_2, \dots, f_{n_f} .

2.Выходные переменные, или переменные, позволяющие описать некоторые аспекты поведения объекта, представляющие интерес для исследователя или потребителя результатов функционирования объекта - y_1, y_2, \dots, y_{n_y} .

3.Переменные состояния, или промежуточные переменные x_1, x_2, \dots, x_{n_x} , характеризующие динамическое поведение исследуемого объекта или системы.

Для удобства оперирования с многомерными величинами совокупность управляющих переменных представляют в виде вектора управления \vec{u} . Аналогичным образом вводятся понятия вектора возмущения \vec{f} , вектора выхода \vec{y} и вектора состояния \vec{x} :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n_u} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n_f} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n_y} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n_x} \end{pmatrix}.$$

Множество всех значений, которые может принять вектор \vec{u} в момент времени t , образует пространство управления. Аналогично вводятся понятия пространства возмущений, пространства выходов и пространства состояний.

В любой момент времени t состояние системы является функцией начального состояния $\vec{x}(t_0)$ и векторов $\vec{u}(t_0, t)$ и $\vec{f}(t_0, t)$. Если известно, как изменялись эти векторы на интервале $[t_0, t]$, то однозначно может быть определено состояние системы $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}(t) = F\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (2.1.1)$$

Вектор выхода в момент времени t является функцией тех же переменных:

$$\vec{y}(t) = \Psi\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (2.1.2)$$

Состояние системы отделяет будущее от прошлого, так что состояние содержит всю информацию, необходимую для определения реакции объекта на произвольный входной сигнал. Понятие состояния является основным исходным понятием и, следовательно, не может быть определено более полно, чем, например, слово "множество" в математике. Наибольшее, что можно сделать, это сформулировать свойства, какими должна обладать система, поведение которой отвечает понятию состояния.

Основным свойством состояния является то, что будущие значения его не зависят от характера достижения системой её текущего состояния. Состояние системы в данный момент времени, а также текущее и будущие значения её входов единственным образом определяют настоящее и будущие значения её состояния и выходов.

Уравнение (2.1.1) называют уравнением состояния системы, а уравнение

(2.1.2) - уравнением выхода. Если объект описывается дифференциальным уравнением, то уравнения (2.1.1) и (2.1.2) превращаются в

$$\vec{x}(t) = F\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{f}(t), t\}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0; \quad (2.1.3)$$

$$y(t) = \Psi\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), t, \vec{v}(t)\} \quad (2.1.4)$$

где дополнительно введён вектор ошибок измерений $\vec{v}(t)$.

Как правило, выбор состояния естественным образом следует из физического устройства системы, а уравнение (2.1.3)(2.1.3), называемое дифференциальным уравнением состояния, обычно следует из элементарных физических законов, которыми определяется её поведение.

2.2 Линеаризация исходных уравнений

Почти все реальные объекты и системы автоматического управления являются нелинейными. Однако среди нелинейных функций F и Ψ часто встречаются такие, которые при определённых допущениях в рабочей области функционирования системы могут быть заменены линейными. В качестве примера такого случая представлена элементарная функция на рис.2.2. В данном случае возможна линеаризация, так как если точка A перемещается на небольшие расстояния по кривой $V_2 = f(V_1)$, то этот участок кривой можно заменить отрезком прямой. В то же время нелинейная функция на рис.2.3 не допускает подобную замену, если в процессе работы системы происходит изменение уровня выходного сигнала V_2 . Системы с такого типа функциями называют *существенно нелинейными*. Их исследованию будет посвящён специальный раздел пособия. Ниже будет рассмотрен класс систем, допускающих линеаризацию.

Пусть режим функционирования объекта определяется некоторой траекторией по вектору управления $\vec{u}_0(t)$, а действительная реализация $\vec{u}(t)$ близка к

ней:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t). \quad (2.2.1)$$

При этом решение уравнения (2.1.3) можно записать в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \quad (2.2.2)$$

где $\vec{x}_0(t)$ – решение уравнения (2.1.3) при $\vec{u} = u_0(t)$.

Назовём функционирование объекта (системы) при $\vec{u} = u_0(t)$ *базовым режимом*. Переменные $\Delta\vec{x}(t)$, $\Delta\vec{u}(t)$, $\Delta\vec{f}(t)$ – это отклонения от соответствующих переменных в базовом режиме.

Подставим теперь выражения для $\vec{x}(t)$ и $\vec{u}(t)$ в исходное дифференциальное уравнение состояний

$$\dot{\vec{x}}_0(t) + \Delta\dot{\vec{x}}(t) = F\{\vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t), \vec{f}_0(t) + \Delta\vec{f}(t), t\}$$

и разложим функцию F в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_0(t) + \Delta\dot{\vec{x}}(t) = & F\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} + J_x\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{x} + \\ & + J_u\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{u} + J_f\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{f} + R. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Здесь R – остаточный член, содержащий высшие степени приращений, и им можно пренебречь; J_x , J_u , J_f – матрицы Якоби функции F для \vec{x} , \vec{u} и \vec{f} .

Элемент матрицы Якоби определяется как соответствующая частная производная. Например, для системы второго порядка соответствующее слагаемое в правой части (2.2.3) имеет вид

$$J_x \cdot \Delta\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{bmatrix}.$$

Пренебрегая в (2.2.3) остаточным членом R и учитывая уравнение

для базового режима, получим

$$\Delta \vec{x}(t) = J_x \{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} \Delta \vec{x} + J_U \{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} \Delta \vec{u} + J_f \{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} \Delta \vec{f}. \quad (2.2.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A(t) &= J_x \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} ; \\ B(t) &= J_u \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} ; \\ G(t) &= J_f \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\} . \end{aligned}$$

В результате получим:

линейное дифференциальное векторно-матричное уравнение с переменными параметрами (коэффициентами)

$$\Delta \vec{x}(t) = A(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + B(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + G(t) \cdot \Delta \vec{f}(t). \quad (2.2.5)$$

Аналогичным образом проведем линеаризацию уравнения выхода:

$$\Delta \vec{y}(t) = C(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + D(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + \Delta \vec{v}(t). \quad (2.2.6)$$

векторов. Таким образом, линеаризованные уравнения объекта (системы) примут вид

$$\vec{x}(t) = A(t) \vec{x}(t) + B(t) \vec{u}(t) + G(t) \vec{f}(t); \quad (2.2.7)$$

$$\vec{y}(t) = C(t) \vec{x}(t) + D(t) \vec{u}(t) + \vec{v}(t). \quad (2.2.8)$$

На рис. 2.4 приведена структурная схема, являющаяся графическим изображением уравнений (2.2.7) и (2.2.8).

В качестве примера рассмотрим смесительный бак, который наполняется с помощью двух потоков, имеющих переменные мгновенные расходы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ (рис. 2.5). Оба входных потока содержат растворимое вещество с неизменными концентрациями C_1 и C_2 . Выходной поток имеет массовую скорость истечения

(мгновенный расход) $F(t)$. Предполагается, что содержимое бака перемешивается так, что концентрация выходного потока равна концентрации $C_{\text{out}}(t)$ в баке.

Запишем уравнения баланса масс в баке.

Для полной массы:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t). \quad (2.2.9)$$

Для массы растворённого вещества

$$\frac{d}{dt}\{C_{\text{out}}(t)V(t)\} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)F(t). \quad (2.2.10)$$

Мгновенный расход выходного потока при естественном истечении зависит от уровня жидкости в баке $h(t)$ следующим образом:

$$F(t) = k\sqrt{h(t)} \quad (2.2.11)$$

где k - некоторая константа. Это следует из уравнения Бернулли, которое описывает энергетический баланс жидкости перед сливным отверстием и после него. Потенциальная энергия жидкости перед сливным отверстием пропорциональна h . При истечении из бака энергия жидкости превращается в кинетическую энергию потока, пропорциональную квадрату скорости v^2 . Приравнявая эти энергии, получаем $v = k_v\sqrt{h}$. Расход F пропорционален произведению скорости истечения на площадь сливного отверстия, откуда и следует (2.2.11).

Если бак имеет постоянную по высоте площадь поперечного сечения S , то

$$F(t) = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}. \quad (2.2.12)$$

Тогда из (2.2.9) и (2.2.10) получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{\frac{V(t)}{S}},$$

$$\frac{d}{dt}\{C_{\text{out}}(t)V(t)\} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}.$$

Выберем в качестве базового режима установившееся состояние (статику), когда все величины являются постоянными - $F_{10}, F_{20}, F_0, C_0, V_0$. При этом из предыдущих уравнений получаем

$$0 = F_{10} + F_{20} - F_0,$$

$$0 = C_1F_{10} + C_2F_{20} - C_0F_0.$$

$$F_0 = k\sqrt{\frac{V_0}{S}}.$$

При известных F_{10} и F_{20} эти уравнения могут быть разрешены относительно F_0 , V_0 и C_0 :

$$F_0 = F_{10} + F_{20}; \quad V_0 = S\frac{F_0^2}{K^2}; \quad C_0 = \frac{C_1F_{10} + C_2F_{20}}{F_0}.$$

Предположим теперь, что возникли отклонения от установившегося состояния:

$$F_1(t) = F_{10} + \Delta_1(t),$$

$$F_2(t) = F_{20} + \Delta_2(t)$$

и, как следствие,

$$F(t) = F_0 + \Delta(t),$$

$$V(t) = V_0 + \Delta V(t),$$

$$C_{\text{out}}(t) = C_0 + \Delta C(t).$$

Если эти отклонения невелики, то можно провести линеаризацию нелинейных дифференциальных уравнений объекта.

Сначала линеаризуем уравнение для полной массы

$$\frac{d}{dt}\{V_0 + \Delta V(t)\} = F_{10} + \Delta F_1(t) + F_{20} + \Delta F_2(t) - k\sqrt{\frac{V_0 + \Delta V(t)}{S}}.$$

Используем разложение нелинейной функции в ряд Тейлора и учтём, что

$$\frac{d}{dV}\sqrt{V}|_{V=V_0} \cdot \Delta V_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V_0}} \Delta V.$$

Тогда

$$\Delta \dot{V}(t) = F_{10} + \Delta_1(t) + F_{20} + \Delta_2(t) - k\sqrt{\frac{V_0}{S}} - \frac{k}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\Delta V(t)}{2\sqrt{V_0}} + R(t).$$

Учитывая уравнение статики и пренебрегая остаточным членом, получим

$$\Delta \dot{V}(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t) - \frac{k}{2\sqrt{SV_0}} \cdot \Delta V(t). \quad (2.2.13)$$

$$\frac{k}{2\sqrt{SV_0}} = \frac{1}{2}. \quad (2.2.14)$$

Глава 3

Тестовая зона

$$\Delta F_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \cdot \Delta l_2$$

$$\text{Тест русского языка} \quad (3.0.1)$$

Запишем уравнение центробежного регулятора. Полагая, что сами с

$$\left(1 + K_{\text{зол}} K_2 \frac{T_{\text{д}}}{T_{\text{д}} p + 1}\right) \cdot p \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} K_1 \Delta l_1 \quad (3.0.2)$$

$$\Delta l_{\text{зол}} = K_1 \cdot \Delta l_1 - K_2 \cdot \Delta l_2 \quad (3.0.3)$$

Глава 4

Тест нумерации уравнений

4.1 первая секция

Первое уравнение (4.1.1)

4.1.1 Подсекция

Уравнение подсекции (4.1.2)