Université de Paris Cité
L3 MIASHS - OPTIMISATION

Projet 10

Présenter par

Ying YE : 71803144
Hengze WANG : 71806536

Avril 2022

Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus aborable, se vend à 10 $ pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 30 $. Le coût de fabrication, exprimé en $, est donné par la fonction suivante :

$$c(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 160x - 80y$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sonnt tous écoulés sur le marché.

1) Donner le profit p(x,y) de l'entreprise lorsqu'elle a venndu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y. La fonction p est-elle convexe / concave sur $\mathbb{R}_+^2$?

Soit le coût de vente noté $v(x, y)$, on a que $v(x, y) = 10x + 30y$. Donc on sait que le profit

$$\begin{aligned} p(x, y) &= v(x, y) - c(x, y) \\ &= 10x + 30y - (5x^2 + 5y^2 - 2xy - 160x - 80y) \\ &= -5x^2 + 170x + 2xy - 5y^2 + 110y \end{aligned}$$

On calcule le gradient de $p(x, y)$, on a :

$$\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} -10x + 2y + 170 \\ -10y + 2x + 110 \end{pmatrix}$$

En suite, on calcule son matrice hessienne, on a :

$$\mathbb{H}p(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

on obtient que

$$\begin{aligned} &Tr(\mathbb{H}p(x, y)) = -20 < 0, \\ &det(\mathbb{H}p(x, y)) = 96 > 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{H}p(x, y) \prec 0 \end{aligned}$$

Le determinant de la Hessienne vaut 96 et la trace vaut -20, ainsi, les valeurs propres sont de même signes et sont strictement négatives. La fonction p est donc fortement concave, donc elle possède un unique point de maximum sur $\mathbb{R}_+^2$.

2) La capacité de production de l'entreprise est au total 25 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition maximale entre les modèles de type X et Y permettrant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé.

L'entreprise est au total 25 jouets par jour , alors $x + y \leq 25$ Pour trouver la répartition maximale, on doit trouver les maxima de la fonction

$$p(x, y) = -5x^2 + 170x + 2xy - 5y^2 + 110y$$

sous la contrainte $x + y \leq 25$. Le gradient de la fonction $p(x, y)$ est

$$\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} -10x + 2y + 170 \\ -10y + 2x + 110 \end{pmatrix}$$

La contrainte peut s'écrire $g(x, y) \leq 0$, où $g(x, y) = x + y - 25$. Le gradient de la fonction $g(x, y)$ est

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche un minimum (x^*, y^*) de p sur l'ensemble $K = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$. On distingue deux situations :
- Le point est à l'intérieur dans $K = \{(x, y) : g(x, y) < 0\}$ i.e. la contrainte est inactive. Alors

$$\nabla p(x, y) = 0$$

dont la solution est

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{55}{3} \\ 0 < y < \frac{20}{3} \\ x + y < 25 \end{cases}$$

Donc il n'y a pas de solution.
- Le point est sur le bord $\partial K = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ i.e. la contrainte est active. Dans ce cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla p(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

On peut réécrire cette condition sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} -10x + 2y + 170 = \lambda \\ -10y + 2x + 110 = \lambda \\ x + y - 25 = 0 \end{cases}$$

On trouve que

$$\begin{cases} x = 20 - \frac{1}{8}\lambda \\ y = 15 - \frac{1}{8}\lambda \end{cases}$$

Maintenant, on élimine λ en utilisant la conntrainte qui dit que

$$0 = g(x, y) = g(20 - \frac{1}{8}\lambda, 15 - \frac{1}{8}\lambda) = 10 - \frac{1}{4}\lambda$$

Donc $\lambda = 40$. On injecte cela dans les expressions de x, y trouvées au dessus pour obtenir

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$$

Observons que $p(15, 10) = 2325$

Donc la répartition maximale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien : - Produire 15 voitures du modèle X et 10 voitures du modèle Y, dans ce cas le profit réalisé est 2325 \$.

3) Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration?

On cherche

$$sup_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2} p(x,y)$$

On a déjà que

$$\nabla p(x,y) = \begin{pmatrix} -10x + 2y + 170 \\ -10y + 2x + 110 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{H}p(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

La fonction est donc concave, elle possède dont un unique point de maximum sur $\mathbb{R}_+^2$, on calcule en annulant le gradient, Donc on a :

$$\begin{cases} -10x + 2y + 170 = 0 \\ -10y + 2x + 110 = 0 \end{cases}$$

Dont l'unique solution est :

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases}$$

Ainsi,

$$max\ p = p(20, 15) = 2525$$

Dans ce cas, le profit va être 2525 \$.
Donc, à notre avis, on va conseiller le conseil d'administration de l'entreprise de produire 20 voitures de modèle X et 15 voitures de modèle Y par jour pour avoir le profit maximum.

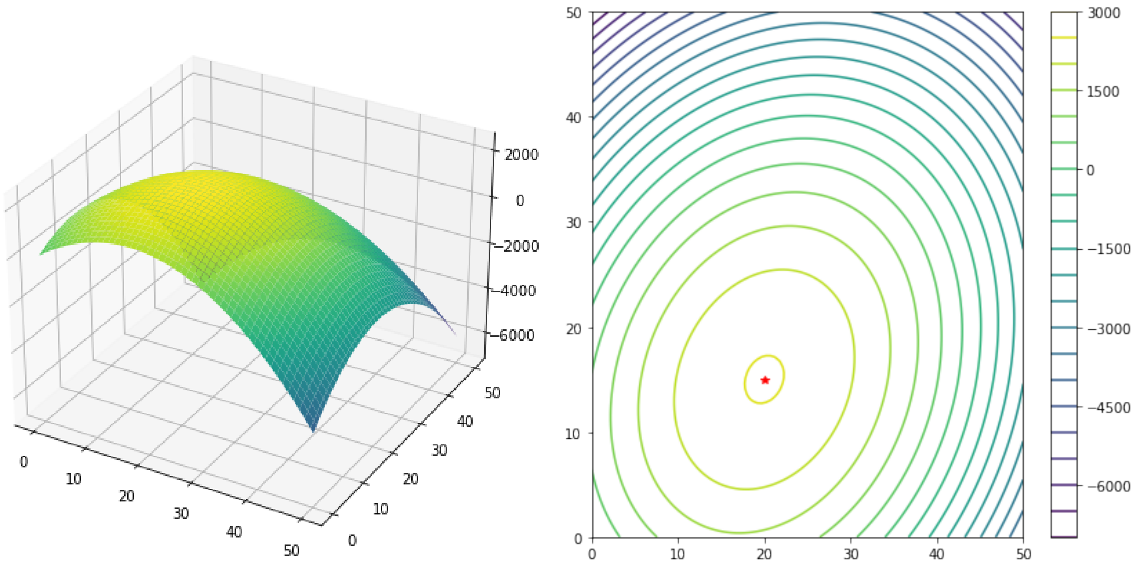
4) Ecrire un programme Python qui :

a) affiche le graphe de la surface associé à la fonction bénéfice p et ses lignes de niveau;

```python
# Rajouter ici toutes les librairies necessaires

import numpy as np
from numpy import exp, sin, cos, sqrt

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d

import scipy
from scipy import optimize as opt

from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"
```

```python
#la fonction du cout de production c
def c(x):
    return 5*x[0]**2+5*x[1]**2 -2*x[0]*x[1]-160*x[0]-80*x[1]
#la fonction du chiffre d'affaires v
def v(x):
    return 10*x[0] + 30*x[1]
#la fonction du profil p
def p(x):
    return v(x)-c(x)

#maillage pour le graphe
x = np.linspace(0,50,100)
y = np.linspace(0,50,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = p([X,Y])
#trace
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z,cmap = 'viridis')
#affichage de contours
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
plt.contour(X,Y,Z,20)
plt.plot(20,15, 'r*')
plt.colorbar()
```

Figure 1: La graphe de la fonction de production et ses liignes de niveau



b) trouve et affiche les extrema de la fonction bénéfice sans contrainte,à l'aide de "opt.minimize";

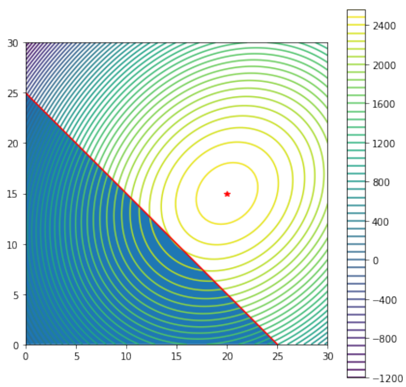
```python
#car on ne peut pas utiliser la fonction opt.minimize
#pour chercher le point maximum,
#donc on minimise -p qui note par "negp"
def negp(x):
    return -(v(x)-c(x))

x0 = [5,5]
res = opt.minimize(negp,x0)
maxp = -(res.fun)
maxp
```

```
2524.9999999999627
```

c) affiche les lignes de niveau, l'ensemble de contrainte(s)

```python
#maillage pour le graphe
x = np.linspace(0,30,100)
y = np.linspace(0,30,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = p([X,Y])
#affichage de contours
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
plt.contour(X,Y,Z,50)
plt.axis('square')
plt.plot(20,15,'r*')
plt.plot(x,-x+25,'r-')
plt.colorbar()
#affichage des contraintes
plt.fill("time", "signal",
         data={"time": [0, 25, 0], "signal": [0, 0, 25]})
```

Figure 2: les lignes de niveau, l'ensemble de contrainte(s)de p



d) trouve et affiche l’extrema sous contrainte de la fonction bénéfice.

```python
#gradient de p
def gradp(x):
    return [-10*x[0] -2 *x[1] + 170, -10*x[1]-2*x[0]+110]
#contrainte
cons = ({'type': 'ineq',
         'fun': lambda x: np.array(x[0]+x[1]-25)})
#meme raison que la question precedent,
#on doit minimise son negatif
negcons = ({'type': 'ineq',
         'fun': lambda x: np.array(-(x[0]+x[1]-25))})

ressc = opt.minimize(negp,x0,constraints=negcons)

maxpsc = -(ressc.fun)
maxpsc
```

```
2324.999999999965
```

Figure 3: l’extrema sous contrinte