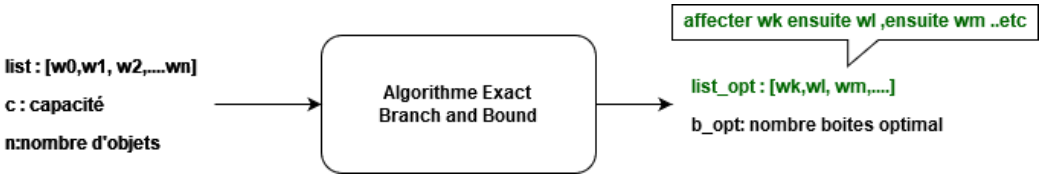
Dans cette partie, nous allons présenter la conception détaillée des méthodes exactes sur lesquelles notre choix d'implementation s'est porté:

1. Le branch and bound
2. Une version améliorée du branch and bound
3. La recherche exhaustive
4. La programmation dynamique

Dans le but de montrer l'applicabilité de ces méthodes, comparer leurs performances et montrer leurs limites, nous effectuerons des tests empiriques et comparatifs sur des benchmarks d'un coté, et sur des instances générées par notre propre générateur d'instances d'un autre coté.

1 Branch and bound

- L'algorithme Branch-and-Bound (B &B) que nous avons implémenté tente de ranger un objet à la fois en fonction de l'ordre initial des objets.
- Au niveau j de l'arbre, B &B crée un noeuds fils pour chaque boite ouverte et range l'objet j dans cette boîte si c'est possible. il crée aussi un noeuds supplémentaire qui représente l'ouverture d'une nouvelle boîte, et il range l'objet j dans cette boîte.
- En pratique, au niveau 1 de l'arbre l'objet 1 est rangé dans la boîte 1 , au niveau 2 l'objet 2 est rangé dans la boîte 1 ou dans une nouvelle boîte 2 ,...etc
- A chaque noeud, on résout un sous problème de taille (n-k) du bin packing, où les k premiers objets ont déjà été emballés.
- L'opération du rangement d'un objet i au niveau k consiste à permuter entre les éléments list(K) et list(i). On va avoir comme sortie une liste d'objets ordonnées selon l'ordre de rangement, il suffit ensuite de remplir les boîtes par les objets dans leur nouvel ordre pour générer la solution (l'emplacement de chaque objet dans les boîtes)



1.1 Pseudo-Code

Soient:

- n : le nombre d'articles
- list[0... n-1] : la liste des articles en entrées
- opt_list: la list ordonnée fournissant la solution optimale en sortie
- opt_cost: le nombre de boîtes optimal
- C:la capacité maximale d'une boîte.

L'algorithme proposé est une fonction récursive packBins ayant comme paramètres:

- k:l'ordre de l'élément à être ranger (le niveau dans l'arbre).
- sumwt:la somme des poids des éléments restants à être rangés
- bcount:la somme cumulée des boîtes déjà utilisées (depuis la racine jusqu'à ce nœud)
- capa_restante:l'espace libre restant dans la boîte ouverte.

Algorithm 1 Branch & Bound

if $n = k$ **then**
  //noeud feuille (n objets rangés)
  if *bcount* $<$ *opt_cost* **then**
    //solution exacte obtenue par cette branche est meilleure que celle trouvée auparavant
    màj du coût optimal $opt\_cost = bcount$.
    sauvegarder la solution liste $opt\_list = liste$.
  else
    continuer le parcours (monter d'un niveau dans l'arbre).
  end if
else
  //L'ensemble des articles restants sont dans les positions list[k... n-1].

  //chaque nœud fils i signifie qu'on a rangé le ième article parmi les articles restants (ayant la position k+i dans la liste list) à la position k.

  for chaque nœud fils i **do**
    Mettre l'article list[k+i] dans une boîte en permutant l'article[k+i] avec l'article[k] : permuter(k+i,k) .
    Incrémenter le nombre de boîtes utilisées (bcount) si on a ouvert une nouvelle boite.
    Mettre à jour la capacité restante (capa_restante).
    Mettre à jour la somme des volume des articles restants à être ranger (Sumwt)
    Calculer l'évaluation du nœud fils courant (borne L1) : $Bound = bcount + \frac{(sumwt - capa\_restante)}{C}$
    Comparer l'évaluation du nœud avec la solution optimale courante :
    if *bcount* $\geq$ *opt_cost* **then**
      //solution exacte obtenue par cette branche est meilleure que celle trouvée auparavant
      le nœud est éliminé. Dans ce cas on re-permute pour revenir à l'état précédant (permute (k+i,k)).
      sauvegarder la solution liste $opt\_list = liste$
    else
      on exploite le nœud courant encore, en faisant un appel récursif à la fonction avec la valeur k+1 dans le 1 paramètre,en utilisant les nouvelles valeurs des autres paramètres.
    end if
  end for
end if

1.2 Evaluation d'un noeud (Borne L1)

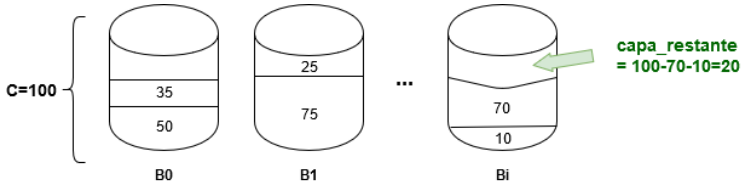
L'évaluation d'un nœud est calculée en sommant 2 parties, le nombre de boîtes déjà utilisées bcount et une estimation du nombre de boîtes qu'on va ouvrir encore pour contenir les objets restants. Cette estimation est obtenue en divisant la somme des poids restants sumwt sur la capacité d'une boîte. On soustrait de la somme des poids restants, l'espace vide restant dans la dernière boîte ouverte, car ce dernier peut contenir des objets. On obtient ainsi la formule suivante :

$$bound = bcount + \frac{capa_{restante} - sumwt}{C}$$

Nombre de boîtes ouvertes

Estimation du nombre de boites à ouvrir encore

exemple 1: List= 10,50,25,80,70,75,35,70 ; C = 100



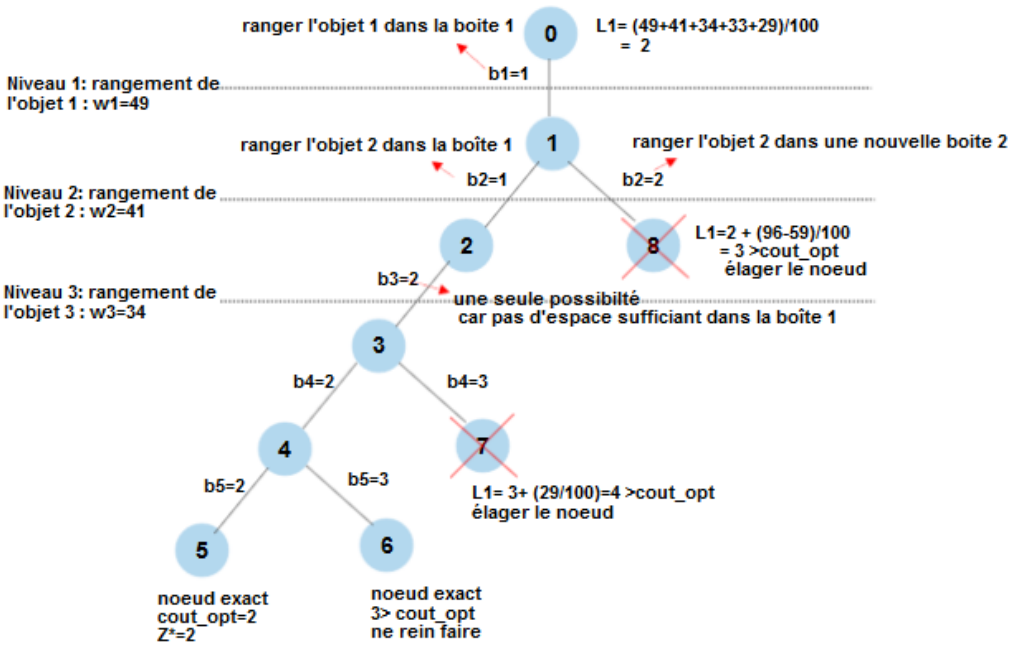
bound =((80+70)-20)/100)=2

exemple 2: n= 5 ; W_j=49,41,34,33,29 ; c=100 on pose : b_j= le numéro de boîte qui contient l'objet j.

2 Branch and bound amélioré

Une version améliorée de l'algorithme Branch and Bound présenté ci-dessus. L'amélioration s'est faite en 2 étapes:

1. Utilisation de l'heuristique WFD (Worst Fit Decreasing) pour initialiser la solution optimale.
2. Changement de la borne L1 utilisée par une autre borne plus puissante appelée L2.



2.1 Evaluation d'un noeud (Borne L2)

Il a été prouvé que la borne L1 n'est efficace que quand les poids des objets sont petits, c'est à dire qu'on peut mettre plusieurs objets dans la même boîte. Si ce n'est pas le cas, et que les objets ont de grands poids (proches de C) , cette borne n'aura aucun effet et l'algorithme fera une recherche exhaustive. C'est pour cela que la borne L2 à été proposée par Martello et Toth ,pour remédier à ce problème. on rappelle la formule de la borne L2, qui a été déjà présentée dans l'état de l'art:

rappel Soit α un entier tels que :

$$0 \leq \alpha \leq C/2$$

On definie des classes d'articles suivantes:

$$C_1 = \{a_i, \quad C - \alpha < v_i\}$$

$$C_2 = \{a_i, \quad C/2 < v_i \leq C - \alpha\}$$

$$C_3 = \{a_i, \quad \alpha < v_i \leq C/2\}$$

$BI(I)$ est donnée par la formule suivante:

$$BI(I) = max\{L(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq C/2\}$$

Avec

$$L(\alpha) = |C_1| + |C_2| + max(0, \lceil \frac{\sum_{j \in C_3} v_j - (|C_2| * C - \sum_{j \in C_2} v_j)}{C} \rceil)$$

Explication de la formule : Etant donnée que les objets des classes C_1 et C_2 ont un poids supérieur à $C/2$ chacun d'eux sera placé dans une boîte séparée pour le contenir, donc $|C_1| + |C_2|$boîtes sont utilisées quelque soit la solution. De plus,aucun objet de l'ensemble C_3 ne peut être rangé dans une boîte contenant un objet de C_1 (à cause de la contrainte de capacité). La capacité résiduelle (espace libre) des $|C_2|$ boîtes est de : $C^* = |C_2| * c - \sum_{j \in C_2} w_j$ Donc dans le meilleur des cas, cette capacité résiduelle va être remplie par les objets de C_3, et dans ce cas le nombre de nouvelles boîtes qu'on doit ouvrir est de : $\frac{\sum_{j \in C_3 - C^*} w_j}{c}$ (cette dernière formule utilise le même principe que la borne L1).

2.2 Pseudo-Code

Algorithm 2 Branch and bound amélioré

Appliquer WFD sur l'instance pour initialiser le coût optimal: cout_opt=WFD(problème)
Appliquer l'algorithme Branch and Bound sur le problème en utilisant la borne L2

3 Recherche exhaustive

Dans cette 3ème solution, on a implémenté une recherche exhaustive, qui consiste à parcourir l'ensemble des nœuds et leurs fils, sans aucun élagage de nœuds. Donc on aura le même algorithme que celui du branch and bound, en supprimant l'étape de l'évaluation du nœud pour décider de son élagage.

4 La programmation dynamique

principe Étant donnée une liste L de N articles à ranger et la capacité d'une boîte C :

structure de donnée :

- La table de vérité m : une matrice de (C+1) colonnes, et N lignes, tel que m[i][j] désigne si l'article i peut être rangé dans une capacité j.

Etapes :

1. Remplir la table de vérité correspondante au problème actuel (L,C), puis ouvrir une nouvelle boite
2. En parcourant la table de vérité, choisir les articles à mettre dans cette nouvelle boite.
3. Ranger les articles choisis dans la boîte, et mettre à jour la liste L (retirer ces articles de L).
4. Réitérer le processus jusqu'à avoir rangé tous les articles (N=0)

4.1 Pseudo-Code

4.1.1 Méthodes utilisées :

la méthode : get_truth_table(capacité, items):

paramètres:

- capacité : la capacité d'une boîte
- items : la liste des articles de poids W_j à ranger

Rôle : Création et initialisation de la table de vérité

Algorithm 3 get_truth_table(capacité, items)

```
Initialiser toutes les cases de la table de vérité m à "true"
Parcourir les articles un à un //les lignes de la matrice m
for chaque article i do
  for chaque colonne j do
    ///parcourir la capacité une unité par une unité
    if i = 0 then
      //premier article
      if j > 0etj ≠ W_j then
        //c'est à dire cette capacité ne pourra pas accueillir l'article courant
        Mettre "faux" dans la case
        //revient à remplir la première ligne par "false", sauf la case1 et la case qui correspond au volume de l'article
      end if
    else
      //pour le reste des articles, utiliser la relation suivante sur la table
      if j < W_j then
        m[i][j] = m[i-1][j] //la valeur de la case en dessus
      else
        m[i][j] = m[i − 1][j] ∨ m[i − 1][j − (W_i)]
      end if
    end if
  end for
end for
return m
```

_pick_items(m)

paramètres:

- m : table de vérité

Rôle : Choisir les articles à mettre dans la boîte

Algorithm 4 _pick_items(m)

K = (nombre de lignes de m) - 1 // indice de la dernière ligne
Initialiser la liste des indices des articles choisis à la liste vide : picked_items_indices = []
if $k \geq 0$ **then**
  $k = max(jtelquem[k][j] = true)$ //prendre la plus grande capacité totale
end if
while $k \geq 0$ **do**
  //tant qu'il nous reste encore de lignes à visite
  if $k = 0 et j > 0$ **then**
    //première ligne
    ajouter l'article k à picked_items_indices
  else
    if $m[k-1][j] = false$ **then**
      ajouter l'article k à picked_items_indices
      j = j - W_k
    end if
  end if
  $k = k - 1$ //allez à la ligne de dessus
end while
return picked_items_indices

la méthode : _move_items_to_bin(list_of_items_indices, bin_index)

paramètres:

- list_of_items_indices : liste des indices des articles de poids W_j
- bin_index : le numéro de la boîte de destination

Rôle : Ranger les articles dans la boîte

Algorithm 5 _move_items_to_bin(list_of_items_indices, bin_index)

for chaque article à indice dans list_of_items_indices **do**
  Ranger l'article dans la boîte ayant l'indice bin_index
end for

4.1.2 Méthode principale :

La méthode: Pack_items()

Rôle : ranger les articles dans un nombre min de boîte , en retournant la solution optimale et son coût (nombre de boîtes utilisées)

Algorithm 6 _move_items_to_bin(list_of_items_indices, bin_index)

while il reste encore des articles à ranger dans la liste L **do**
Construire la table de vérité m : m=get_truth_table(capacité, items)
bin_index = Ouvrir une nouvelle boîte
Ajouter la nouvelle boîte à la liste des boîtes
picked_items = _pick_items(m) // choix des avrticles à ranger dans la boîte i
_move_items_to_bin(picked_items, bin_index) // ranger les articles dans la boîte i
Mettre à jour la liste L, en retirant les articles rangés
end while

Exemple :

Capacité=5;Articles=1,5,2

première itération : Construction de la table de vérité:

	C=0	C=1	C=2	C=3	C=4	C=5
w0=1	true	true	false	false	false	false
w1=5	true	true	false	false	false	true
w2=2	true	true	true	true	false	true

- Ouvrir une nouvelle boîte B_0 avec une capacité = 5
- Choisir les articles à mettre dedans : il choisit l'article W_1=5
- Mettre l'article W_1 choisi dans la boîte B_0
- Enlever l'article rangé de la liste des articles à ranger.

deuxième itération : Construction de la table de vérité:

	C=0	C=1	C=2	C=3	C=4	C=5
w0 =1	true	true	false	false	false	false
w2 = 2	true	true	true	true	false	false

- Ouvrir une nouvelle boîte B_1 avec une capacité = 5
- Choisir les articles à mettre dedans : il choisit l'article W_0=1 et l'article W_2=2
- Mettre les articles W_0 et W_2 choisis dans la boîte B_1
- Enlever les articles rangés de la liste des articles à ranger.

troisième itération :

- Liste vide

ARRÊT DE L'ALGORITHME

La solution optimale:

- B_0 contiendra l'article W_1 avec un taux d'occupation=$5/5 = 100\%$
- B_1 contiendra les articles W_0 et W_2 avec un taux d'occupation=$(1 + 2)/5 = 60\%$