

Projet optimisation combinatoire
Etude et comparaison des méthodes de
résolution du problème du Bin Packing (BPP)

BACHI Yasmine (CdE) SAADI Fatma Zohra Khaoula
NOUALI Sarah MOUSSAOUI Meroua
MIHOUBI Lamia Zohra

25 juin 2020

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 4 |
| I Présentation du Problème de Bin Packing (BPP) | 5 |
| 1 Domaines d'Application | 6 |
| 2 Formulation Mathématique | 6 |
| II Etat de l'Art | 7 |
| 1 Méthodes Exactes | 8 |
| 1.1 Branche and Bound | 8 |
| 1.2 Programmation Dynamique | 10 |
| 2 Heuristiques | 11 |
| 2.1 Algorithmes ON-LINE : | 12 |
| 2.2 Algorithmes OFF-LINE : | 13 |
| 2.3 Algorithmes SEMI-ONLINE : | 14 |
| 2.4 Algorithmes d'Espace Borné (Bounded Space) : | 15 |
| 3 Métaheuristiques | 15 |
| 3.1 La recherche tabou : | 15 |
| 3.2 L'algorithme ILWOA (Improved Lévy WOA) : | 15 |
| 3.3 L'algorithme FFA (FireFly Algorithm) : | 16 |
| III Méthodes Exactes | 17 |
| 1 Branch and bound | 18 |
| 1.1 Pseudocode | 19 |
| 1.2 Evaluation d'un noeud (Borne L1) | 21 |
| 2 Branch and bound amélioré | 21 |
| 2.1 Evaluation d'un noeud (Borne L2) | 22 |
| 2.2 Pseudocode | 23 |
| 3 Recherche exhaustive | 23 |

| | | |
|-----|--------------------------------|----|
| 4 | Tests et Resultats | 23 |
| 4.1 | Instances générées : | 24 |
| 4.2 | Scholl Benchmark : | 26 |

IV Worst Case Analysis 29

V Méthodes Heuristiques 31

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Next Fit (NF) | 33 |
| 1.1 | Principe | 33 |
| 1.2 | Pseudocode | 33 |
| 2 | Next Fit Decreasing (NFD) | 33 |
| 2.1 | Principe | 33 |
| 2.2 | Pseudocode : | 33 |
| 3 | First Fit (FF) | 34 |
| 3.1 | principe | 34 |
| 3.2 | Pseudocode | 34 |
| 4 | First Fit Decreasing (FFD) | 35 |
| 4.1 | Principe | 35 |
| 4.2 | Pseudocode | 35 |
| 5 | Best Fit (BF) | 36 |
| 5.1 | principe | 36 |
| 5.2 | Pseudocode | 37 |
| 6 | Best Fit Decreasing (BFD) | 37 |
| 6.1 | principe | 37 |
| 6.2 | Pseudocode | 37 |
| 7 | Tests et résultats | 39 |
| 7.1 | Analyse des résultats par rapport au temps d'exécution | 39 |
| 7.2 | Analyse des résultats par rapport à la qualité de la solution | 43 |
| 7.3 | Conclusion | 46 |

VI Méthodes Métaheuristiques 47

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Calibrage Automatique des Paramètres | 48 |
| 1.1 | F-Race | 49 |
| 1.2 | Approche par Course (Racing) | 49 |
| 1.3 | I/F-Race (F-Race Itéré) | 50 |
| 1.4 | Le package IRace | 50 |
| 2 | Réduit Simulé | 50 |

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Pseudocode | 51 |
| 2.2 | Les paramètres du recuit simulé | 53 |
| 2.3 | Tests et résultats | 54 |
| 3 | Whale Optimization Algorithm (WOA) | 58 |
| 3.1 | Représentation mathématique | 58 |
| 3.2 | Ingrédients du WOA | 60 |
| 3.3 | Paramètres du WOA | 61 |
| 3.4 | Application de l'algorithme au problème du bin packing : . | 61 |
| 3.5 | Pseudocode | 63 |
| 3.6 | Test et résultats | 63 |
| 4 | Improved Lévy Whale Optimization Algorithm (ILWOA) . . . | 66 |
| 4.1 | Fonction à dynamique chaotique | 67 |
| 4.2 | La distribution vol de Lévy | 68 |
| 4.3 | Phase de mutation | 68 |
| 4.4 | Pseudocode | 70 |
| 4.5 | Test et résultats | 70 |
| 5 | L'Algorithme Génétique | 73 |
| 5.1 | Pseudocode | 74 |
| 5.2 | Application du AG au problème du BP | 74 |
| 5.3 | Tests et Résultats | 79 |
| 6 | Comparaison en Les Métaheuristiques | 85 |
| 6.1 | Comparaison par rapport au temps d'exécution | 86 |
| 6.2 | Comparaison par rapport à la qualité de la solution . . . | 87 |
| 7 | Conclusion | 88 |

VII Conclusion

89

Introduction

Le problème du bin packing, dans lequel un ensemble de N objets de différents poids doivent être rangés dans un nombre minimum de boîtes identiques, de capacité C , est un problème NP-difficile, c'est à dire qu'il n'y a aucune chance de trouver une méthode de résolution qui fournit la solution exacte en un temps polynomiale, sauf si l'égalité $NP=P$ est prouvée. Durant le dernier siècle, divers efforts ont été consacrés pour étudier ce problème, dans le but de trouver des algorithmes heuristiques rapides pour fournir de bonnes solutions approximatives. Dans ce projet, nous allons mettre en place une plateforme de résolution du problème du Bin Packing. pour cela , nous implémenterons 3 types de méthodes :

1. *Méthodes exactes* : fournissant la solution optimale, mais qui sont très limitées par la taille du problème.
2. *Heuristiques* : qui sont des méthodes approchées spécifiques au problème.
3. *Métaheuristiques* : qui sont des méthodes approchées génériques.

Nous commencerons par la présentation du problème, sa formulation mathématique, et une étude des méthodes de résolutions existantes dans la littérature.[Etat de l'Art]. Ensuite, nous présenterons la conception détaillée de chaque méthode implémentée, ainsi que les résultats des tests de ces méthodes effectuées sur des benchmarks connus.[Conception & Tests] On distingue 2 types de tests :

1. *Les tests empiriques* : dont le but est de trouver la meilleure configuration des paramètres des méthodes implémentées.
2. *Les tests comparatifs* : où on doit comparer les résultats obtenus par les méthodes implémentées et sélectionner la meilleure méthode de résolution pour chaque instance. La comparaison se fait en terme de la qualité de la solution et du temps d'exécution.

Première partie

Présentation du Problème de Bin Packing (BPP)

1 Domaines d'Application

Le BPP a de nombreuses applications dans le domaine industriel, informatique, etc. Parmi lesquelles on cite :

- Chargement de conteneurs.
- Placement des données sur plusieurs disques.
- Planification des travaux.
- Emballage de publicités dans des stations de radio / télévision de longueur fixe.
- Stockage d'une grande collection de musique sur des cassettes / CD, etc.

2 Formulation Mathématique

Etant donné m boîtes de capacité C et n articles de volume v_i chacun. Soient :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{article } j \text{ rangé dans la boîte } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{boîte } i \text{ utilisée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La formulation du problème donne ainsi le programme linéaire suivant

$$(PN) \begin{cases} Z(\min) = \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^n v_j x_{ij} \leq C y_i \\ y_i \in \{0, 1\} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

La première contrainte signifie qu'un article j ne peut être placé qu'en une seule boîte La deuxième fait qu'on ne dépasse pas la taille d'une boîte lors du rangement

Deuxième partie

Etat de l'Art

Après une étude ciblée des travaux existants sur le problème du Bin Packing, nous avons abouti à une synthèse des méthodes de résolution les plus connues –dans chacune des trois catégories : méthodes exactes, et méthodes approchées : heuristiques et métaheuristiques– que nous allons exposer dans ce qui suit.

1 Méthodes Exactes

Les méthodes exactes permettent d’avoir des solutions optimales, cependant le temps de calcul peut être très lent pour certaines instances du problème. Il n’existe pas un grand nombre de méthodes exactes pour résoudre le problème du Bin Packing, nous allons présenter dans ce qui suit la méthode MTP (basée sur le Branch and Bound) et une méthode de programmation dynamique DP-flow.

1.1 Branche and Bound

Cette méthode a été utilisée pour la première fois dans les années cinquante pour résoudre qui a été modélisé par un programme linéaire en nombres entiers. Afin de rendre le processus de résolution plus rapide, cet algorithme utilise une borne inférieure. Plusieurs techniques ont été proposées pour obtenir cette dernière.

1.1.0.1 Borne inférieure évidente : Soient C la capacité des boîtes utilisées,

A l’ensemble des articles a_i de volumes v_i de l’instance I .

$$BI(I) = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{C}$$

1.1.0.2 Borne de Martello and Toth L_2 : Soit α un entier tels que :

$$0 \leq \alpha \leq C/2$$

On définit les classes d’articles suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{a_i, \quad C - \alpha < v_i\} \\ C_2 &= \{a_i, \quad C/2 < v_i \leq C - \alpha\} \\ C_3 &= \{a_i, \quad \alpha < v_i \leq C/2\} \end{aligned}$$

$BI(I)$ est donnée par la formule suivante :

$$BI(I) = \max\{L(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq C/2\}$$

Avec

$$L(\alpha) = |C_1| + |C_2| + \max(0, \left\lceil \frac{\sum_{j \in C_3} v_j - (|C_2| * C - \sum_{j \in C_2} v_j)}{C} \right\rceil)$$

cette borne est calculée en un temps $o(n \log n)$.

1.1.0.3 Borne inférieure L_3 : Une autre technique a été utilisée dans l'algorithme de résolution MTP pour déterminer une borne inférieure. Soient n_1 le nombre de boîtes obtenues après la première application de la technique de réduction MTP qui consiste à réduire l'instance du problème en rangeant l'article le plus petit, soit Ir^1 l'instance résiduelle de l'instance I après cette première application ie l'ensemble des articles restants après l'opération de réduction

$$L'_1 = n_1 + L_2(Ir^1) \geq L_2(I)$$

On refait ce processus jusqu'à ce que l'instance résiduelle soit vide (i.e. : tous les articles ont été rangés). A l'itération k , on obtiendra :

$$L'_K = \sum_{i=1}^k n_i + L_2(Ir^k)$$

La borne inférieure L_3 est obtenue en appliquant la formule suivante , par la suite :

$$L_3 = \max\{L'_1, L'_2, \dots, L'_{kmax}\}$$

Un des algorithmes proposés pour cette méthode est l'algorithme MTP :

L'algorithme MTP (Martello and Toth Procédure) :

Le meilleur algorithme existant pour trouver la solution optimale du problème Bin Packing est celui proposée par *Martello et Toth (Martello & Toth 1990a ; 1990b)* [1] le principe est le suivant : Les articles sont initialement triés selon des poids décroissants. À chaque nœud de décision, le premier élément libre est attribué, à son tour, aux boîtes existantes qui peuvent le contenir (on parcourt les boîtes par ordre de création) et à une nouvelle boîte. À chaque nœud de l'arbre de recherche

- a. Une borne inférieure L_3 de la solution restante est calculée et utilisée pour élaguer le nœud de l'espace de recherche et réduire le problème actuel.
 - Si la borne inférieure du nœud actuel est supérieure à la borne inférieure du problème d'origine (nœud racine), le nœud est supprimé. Sinon (b)
- b. Des algorithmes approximatifs FFD, BFD et WFD (qu'on présentera dans la partie Méthodes approximatives) sont appliqués au problème actuel, et chacune des solutions approximatives obtenues est comparée à la borne inférieure L_3 .
 - Si le nombre de boîtes utilisées par l'une des solutions approximatives est égal à la borne inférieure du nœud actuel, aucune autre recherche n'est effectuée sous ce nœud.
 - Si le nombre de boîtes utilisées dans une solution approximative est égal à la borne inférieure L_3 du problème d'origine (nœud racine), l'algorithme se termine, renvoyant cette solution comme optimale.

De plus, La principale source d'efficacité de l'algorithme de Martello et Toth est une méthode pour réduire la taille des sous-problèmes restants, appelée **critère de dominance**.

1.2 Programmation Dynamique

La programmation dynamique est une méthode algorithmique pour résoudre des problèmes d'optimisation. Le concept a été introduit au début des années 1950 par Richard Bellman. Elle consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes, puis à résoudre les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires. Elle s'appuie sur *le principe d'optimalité de Bellman* : une solution optimale d'un problème s'obtient en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes. Un modèle pseudo-polynomial simple, pour résoudre le problème bin-packing, est obtenu en associant des variables aux décisions prises dans une table de programmation dynamique (DP) classique.

DP-flow :

Dans le modèle BPP proposé par *Cambazard et O'Sullivan* [2], connu sous le nom de DP-flow, les états DP sont représentés par un graphique dans lequel un chemin qui commence à partir d'un nœud initial et se termine à un nœud terminal représente un remplissage possible d'une boîte. Notons

(j, d) ($j = 0, \dots, n$ et $d = 0, \dots, c$) un état DP où les articles de 0 à j ont déjà été étudiés (les décisions de placer les articles de 0 à j dans la boîte ou non ont déjà été reprises) et entraînent un remplissage partiel de la boîte de d unités. Notons également par $((j, d), (j+1, e))$ un arc reliant les états (j, d) et $(j+1, e)$. Un tel arc exprime la décision d'emballer ou non l'article $j+1$ à partir de l'état actuel (j, d) : l'état atteint par l'arc est $(j+1, d + w_j + 1)$ si l'article $j+1$ est emballé, et $(j+1, d)$ sinon. Soit A l'ensemble de tous les arcs. Comme un remplissage réalisable d'une boîte est représenté par un chemin qui commence à partir du nœud $(0, 0)$ et se termine au nœud $(n+1, c)$, le BPP consiste à sélectionner le nombre minimum de chemins qui contiennent tous les éléments.

Pour cette instance BPP, une solution optimale est produite par les deux chemins mis en évidence dans la figure ci-dessous, à savoir

$[(0, 0), (1, 4), (2, 4), (3, 7), (4, 7), (5, 9), (6, 9), (7, 9)]$

et $[(0, 0), (1, 0), (2, 4), (3, 4), (4, 7), (5, 7), (6, 9), (7, 9)]$.

Example: $n = 6, c = 9, w = (4, 4, 3, 3, 2, 2)$:

$[j, d]$ ($j = 0, \dots, n; d = 0, \dots, c$): [decisions taken up to item j , partial bin filling d units]

Figure 1 DP-flow graph construction for Example 1

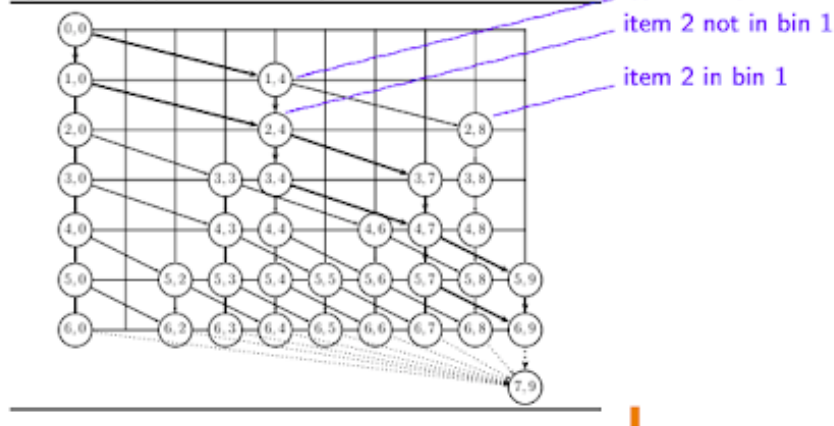


FIGURE 1 – Exemple de l'algorithme DP-flow

2 Heuristiques

Les méthodes heuristiques sont classées en plusieurs catégories :

2.1 Algorithmes ON-LINE :

Ces algorithmes considèrent l'hypothèse que les articles arrivent un à la fois en un ordre connu, chaque article doit être rangé avant de passer à l'article suivant.

2.1.1 Next Fit (NF) :

Lors du rangement de l'article a , NF vérifie s'il tient dans la même boîte que le dernier article (Soit la boîte du dernier article rangé B_j). Si c'est le cas, il place l'article dans la boîte B_j , laissant cette boîte ouverte. Sinon, il ferme la boîte B_j et place l'article a dans une nouvelle boîte B_{j+1} , qui devient maintenant la boîte ouverte.

Remarque :

Il existe des variants pour cet algorithme, permettant d'améliorer ses performances :

- **Next-KFIT (NFk)** : autorise k boîtes ouvertes à la fois, c'est à dire qu'il vérifie dans les K boîtes ouvertes s'il y a assez d'espace pour ranger l'article a , sinon il ouvre une nouvelle boîte. Si $K=1$ on retombe sur l'algorithme NF.

2.1.2 First Fit (FF) :

Lors du rangement de l'article a , NF vérifie s'il tient dans la même boîte que le dernier article (Soit la boîte du dernier article rangé B_j). Si c'est le cas, il place l'article dans la boîte B_j , laissant cette boîte ouverte. Sinon, il ferme la boîte B_j et place l'article a dans une nouvelle boîte B_{j+1} , qui devient maintenant la boîte ouverte.

2.1.3 Best Fit (BF) :

L'article a est rangé dans une des boîtes ouvertes de sorte que le plus petit espace vide soit laissé. Si l'article ne tient dans aucune boîte existante, il sera placé dans une nouvelle boîte.

Remarque :

Il existe des variants pour cet algorithme, permettant d'améliorer ses performances :

- **K-Bounded Best Fit (BBFk)** : utilise le même principe que Best Fit, sauf qu'il restreint le nombre de boîtes ouvertes à k boîtes. ie : l'article a est rangé dans une des k -boîtes ouvertes de sorte que le plus petit espace vide soit laissé.

2.1.4 Worst Fit (WF) :

L'article a est rangé dans la boîte avec le plus grand espace vide, si cette dernière ne peut pas contenir l'article, il sera placé dans une nouvelle boîte.

Remarque :

Il existe des variants pour cet algorithme, permettant d'améliorer ses performances :

- **Almost Worst Fit (AWF)** : l'article a est rangé dans la 2ème boîte la plus vide, jusqu'à ce qu'il reste qu'une seule boîte qui peut contenir l'article. Dans ce cas il est placé dans cette boîte. Si l'article ne tient dans aucune boîte existante, il sera placé dans une nouvelle boîte.

2.1.5 Harmonic K (Hk) :

Cet algorithme est basé sur une partition de l'intervalle $[0, 1]$ en K sous-intervalles I_k , où $I_k =]\frac{1}{K+1}; \frac{1}{K}]$, à chacun de ces sous-intervalles correspond une seule boîte ouverte, et seuls les articles appartenant à ce sous-intervalle (i.e. : $v_i/C \in I_k$ avec v_i le volume d'un article) sont regroupés dans cette boîte. Si un nouvel article arrive et ne rentre pas dans sa boîte ouverte correspondante, la boîte est fermée et une nouvelle boîte est ouverte.

Remarque :

Il existe des variants pour cet algorithme, permettant d'améliorer ses performances :

- **Simplified HarmonicK (SHk)** : se base sur une structure d'intervalle qui est plus compliquée.

2.1.6 Autres algorithmes :

- **ABFk** : utilise le principe de rangement du Best Fit avec le principe de fermeture des boîtes du First Fit.
- **AFBk** : utilise le principe de rangement du First Fit avec le principe de fermeture des boîtes du Best Fit.

Remarque :

Dans le cas où $K = 1$, ces algorithmes sont équivalents à l'algorithme Next Fit.

2.2 Algorithmes OFF-LINE :

Dans ce type d'algorithmes on a accès à tous les articles avant de commencer le rangement dans les boîtes. *Quelques algorithmes off-line :*

2.2.1 First Fit Decreasing (FFD) :

Ordonner les articles par ordre décroissant des poids, ensuite appliquer l'algorithme First Fit.

2.2.2 Best Fit Decreasing (BFD) :

Ordonner les articles par ordre décroissant des poids, ensuite appliquer l'algorithme Best Fit

2.3 Algorithmes SEMI-ONLINE :

Les algorithmes dits semi-en ligne (SOL) se situent entre les online et les offline. Ils relâchent la prescription online de manière à permettre quelques opérations supplémentaires où l'algorithme a un peu de connaissance de l'avenir, au moins une des opérations suivantes est autorisée : comme reconditionner un nombre fini d'articles déjà emballés, prétraiter les articles en les commandant en fonction des tailles ou en tamponnant certains articles avant de les emballer. *Quelques algorithmes semi-online :*

2.3.1 MMP (Mostly Myopic Helps) : Fully Dynamic Algorithm

Dans cet algorithme [3], en partant de l'hypothèse que l'emballage peut être réarrangé arbitrairement pour accueillir les articles arrivant et partant, on suppose :

- l'emballage d'un article se fait en une abstraction totale des articles déjà emballés d'une taille plus petite (c'est à dire, on suppose que leurs places dans les boîtes sont vides, où le nouvel article pourra être affecté dans cet espace, et ces articles de petites tailles pourront être réarrangés).
- Regroupement des articles plus petits dans des lots (un groupe d'articles plus petit que ϵ peut être déplacé comme un seul article).
- Le nombre d'articles uniques ou de lots de très petits articles qui doivent être réarrangés est délimité par une constante.

Cet algorithme nécessite du temps $\Theta(\log n)$ par opération (c'est-à-dire pour une insertion ou une suppression d'un article). Il est presque aussi bon que celui des meilleurs algorithmes offline pratiques.

2.3.2 Harmonic Fit avec (4 ou 6) partitions :

Le HF avec 4 partitions [4], en utilisant une structure de données appropriée, permet de traiter de grandes collections de petits articles en :

- Les groupant et les déplaçant tous à la fois en un temps constant.
- Les classifiant en quatre types par taille.
- Ne permettant au plus que les déplacements de trois lots d'articles ou d'un seul article lorsqu'un nouvel article doit être attribué.

Le HF avec 6 partitions [4] utilise :

- Six types d'articles classés par taille
- Au plus sept mouvements de lots/articles par nouvel article

2.4 Algorithmes d'Espace Borné (Bounded Space) :

Les algorithmes décident où un élément doit être rangé sur la base du contenu actuel d'un nombre fini k de boîtes, où k est un paramètre de l'algorithme. Notez que FF et BF ne sont pas des algorithmes d'espace bornés, mais NF l'est, avec $k = 1$.

3 Métaheuristiques

3.1 La recherche tabou :

Une méthode de résolution a été proposée par Fernandes Muritiba Et al.[5], qui prend en entrée une population initiale obtenue par une heuristique et applique un opérateur de croisement sur ces solutions. Chaque solution obtenue est améliorée par la suite en utilisant une recherche tabou, qui consiste à se déplacer dans un espace de recherche contenant des solutions réalisables partielles où certains articles ne sont pas affectés à des boîtes. L'amélioration consiste de passer d'une solution partielle de valeur K à une solution complète de la même valeur. La fonction objective utilisée est basée sur la somme pondérée des tailles des articles. Pour la diversification de l'espace de recherche, On utilise une procédure basée sur un opérateur de croisement.

3.2 L'algorithme ILWOA (Improved Lévy WOA) :

L'algorithme WOA (Whale Optimization Algorithm) [6] est basé sur une méthode inspirée de la nature plus exactement d'une stratégie d'alimentation des baleines à bosse, où la recherche des proies représente l'exploration de l'espace de recherche et la libération des bulles représente l'exploitation. Une amélioration de cet algorithme a été proposée par Abdel-Basset, M., Manogaran, G., Abdel-Fatah, L. et al [7]. Il s'agit de l'utilisation de fonctions logistiques et d'autres méthodes probabilistes pour assurer une convergence plus rapide

3.3 L'algorithme FFA (FireFly Algorithm) :

L'algorithme FireFly (FFA) [8] est une métaheuristique génétique, inspirée par le comportement clignotant des lucioles. Le but principal du flash d'une luciole est d'agir comme un système de signal pour attirer d'autres lucioles. Il y a trois règles. La première règle, chaque luciole attire toutes les autres lucioles avec des flashes plus faibles. Deuxièmement, l'attractivité est proportionnelle à leur luminosité qui est inversement proportionnelle à leurs distances. Pour deux lucioles clignotantes, la moins brillante se déplacera vers la plus brillante. L'attractivité est proportionnelle à la luminosité et elles diminuent toutes les deux à mesure que leurs distances augmentent. S'il n'y en a pas plus brillant qu'une luciole particulière, elle se déplacera de façon aléatoire. Enfin, aucune luciole ne peut attirer la luciole la plus brillante, cette dernière se déplace d'une façon aléatoire. Le FFA est construit par analogie, en appliquant ces trois règles sur une population de solutions initiale pour la faire évoluer en une population contenant la solution approchée.

Troisième partie

Méthodes Exactes

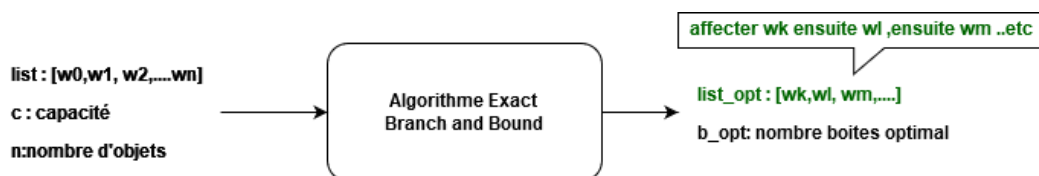
Dans cette partie, nous allons présenter la conception détaillée des méthodes exactes sur lesquelles notre choix d'implémentation s'est porté :

1. Le branch and bound
2. Une version améliorée du branch and bound
3. La recherche exhaustive

Dans le but de montrer l'applicabilité de ces méthodes, comparer leurs performances et montrer leurs limites, nous effectuerons des tests empiriques et comparatifs sur des benchmarks d'un côté, et sur des instances générées par notre propre générateur d'instances d'un autre côté.

1 Branch and bound

- L'algorithme Branch-and-Bound (B &B) que nous avons implémenté tente de ranger un objet à la fois en fonction de l'ordre initial des objets.
- Au niveau j de l'arbre, B &B crée un noeuds fils pour chaque boîte ouverte et range l'objet j dans cette boîte si c'est possible. il crée aussi un noeuds supplémentaire qui représente l'ouverture d'une nouvelle boîte, et il range l'objet j dans cette boîte.
- En pratique, au niveau 1 de l'arbre l'objet 1 est rangé dans la boîte 1 , au niveau 2 l'objet 2 est rangé dans la boîte 1 ou dans une nouvelle boîte 2 ,...etc
- A chaque noeud, on résout un sous problème de taille $(n-k)$ du bin packing, où les k premiers objets ont déjà été emballés.
- L'opération du rangement d'un objet i au niveau k consiste à permuter entre les éléments $list(K)$ et $list(i)$. On va avoir comme sortie une liste d'objets ordonnées selon l'ordre de rangement, il suffit ensuite de remplir les boîtes par les objets dans leur nouvel ordre pour générer la solution (l'emplacement de chaque objet dans les boîtes)



1.1 Pseudocode

Soient :

- n : le nombre d'articles
- $list[0 \dots n - 1]$: la liste des articles en entrées
- opt_list : la liste ordonnée fournissant la solution optimale en sortie
- opt_cost : le nombre de boîtes optimal
- C : la capacité maximale d'une boîte.

L'algorithme proposé est une fonction récursive `packBins` ayant comme paramètres :

- k : l'ordre de l'élément à être rangé (le niveau dans l'arbre).
- $sumwt$: la somme des poids des éléments restants à être rangés
- $bcount$: la somme cumulée des boîtes déjà utilisées (depuis la racine jusqu'à ce nœud)
- $capa_restante$: l'espace libre restant dans la boîte ouverte.

Algorithm 1 Branch & Bound

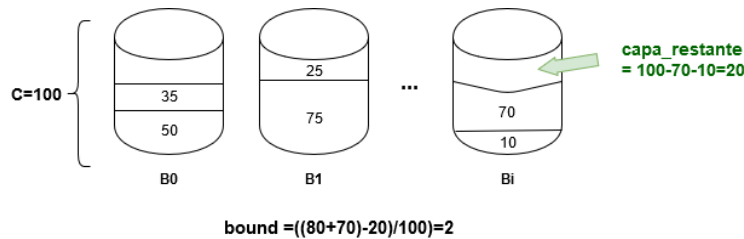
```
if  $n = k$  then
    //Noeud feuille (n objets rangés)
    if  $bcount < opt\_cost$  then
        //Solution exacte obtenue par cette branche est meilleure que celle
        //trouvée auparavant
        Mise à jour du coût optimal  $opt\_cost = bcount$  .
        sauvegarde de la solution liste  $opt\_list = liste$ .
    else
        Continuer le parcours (monter d'un niveau dans l'arbre).
    end if
else
    //L'ensemble des articles restants sont dans les positions list[k... n-1].
    //Chaque nœud fils i signifie qu'on a rangé le ième article parmi les
    //articles restants (ayant la position k+i dans la liste list) à la position k.
    for chaque nœud fils i do
        Mettre l'article list[k+i] dans une boîte en permutant l'article[k+i]
        avec l'article[k] :  $permuter(k+i,k)$  .
        Incrémenter le nombre de boîtes utilisées (bcount) si on a ouvert une
        nouvelle boîte.
        Mettre à jour la capacité restante ( $capa\_restante$ ).
        Mettre à jour la somme des volumes des articles restants à être rangés
        ( $Sumwt$ )
        Calculer l'évaluation du nœud fils courant (borne L1) :  $Bound =$ 
 $bcount + \frac{(sumwt - capa\_restante)}{C}$ 
        Comparer l'évaluation du nœud avec la solution optimale courante :
        if  $bcount \geq opt\_cost$  then
            //Solution exacte obtenue par cette branche est meilleure que celle
            //trouvée auparavant
            Le nœud est éliminé. Dans ce cas on re-permute pour revenir à l'état
            précédant ( $permuter(k+i,k)$ ).
            Sauvegarder la solution liste  $opt\_list = liste$ 
        else
            On exploite le nœud courant encore, en faisant un appel récursif à la
            fonction avec la valeur k+1 dans le premier paramètre, en utilisant
            les nouvelles valeurs des autres paramètres.
        end if
    end for
end if
```

1.2 Evaluation d'un noeud (Borne L1)

L'évaluation d'un nœud est calculée en sommant 2 parties, le nombre de boîtes déjà utilisées $bcount$ et une estimation du nombre de boîtes qu'on va ouvrir encore pour contenir les objets restants. Cette estimation est obtenue en divisant la somme des poids restants $sumwt$ sur la capacité d'une boîte. On soustrait de la somme des poids restants, l'espace vide restant dans la dernière boîte ouverte, car ce dernier peut contenir des objets. On obtient ainsi la formule suivante :

$$bound = \underbrace{bcount}_{\text{Nombre de boîtes ouvertes}} + \underbrace{\frac{capa_{restante} - sumwt}{C}}_{\text{Estimation du nombre de boîtes à ouvrir encore}}$$

1.2.0.1 exemple 1 : List= 10,50,25,80,70,75,35,70 ; C = 100

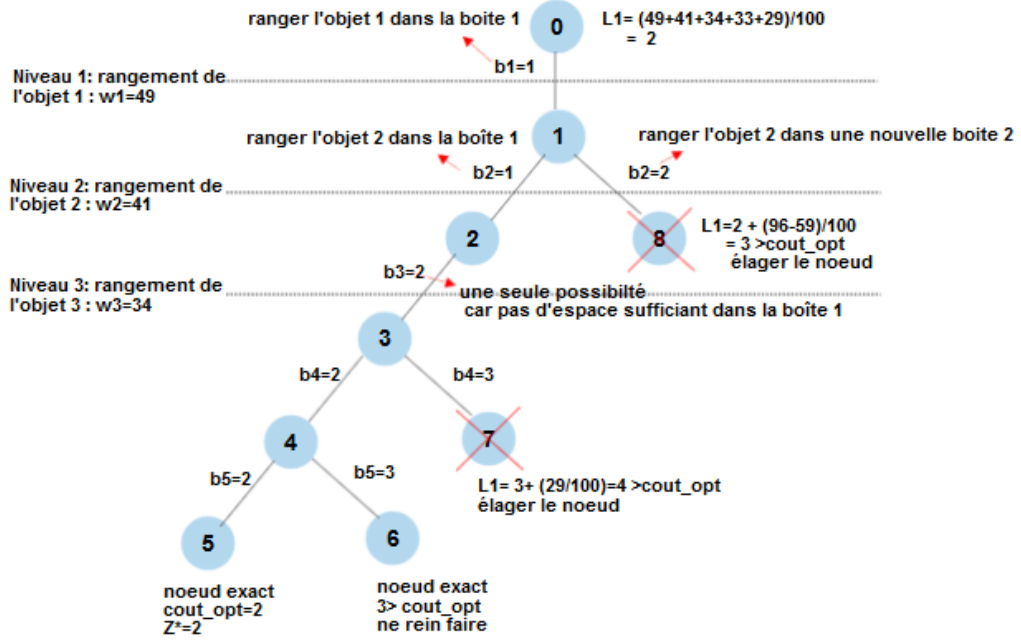


1.2.0.2 exemple 2 : n= 5 ; $W_j=49,41,34,33,29$; c=100 on pose : $b_j=$ le numéro de boîte qui contient l'objet j.

2 Branch and bound amélioré

Une version améliorée de l'algorithme Branch and Bound présentée ci-dessus. L'amélioration est faite en 2 étapes :

1. Utilisation de l'heuristique WFD (Worst Fit Decreasing) pour initialiser la solution optimale.
2. Changement de la borne L1 utilisée par une autre borne plus puissante appelée L2.



2.1 Evaluation d'un noeud (Borne L2)

Il a été prouvé que la borne L1 n'est efficace que quand les poids des objets sont petits, c'est à dire qu'on peut mettre plusieurs objets dans la même boîte. Si ce n'est pas le cas, et que les objets ont de grands poids (proches de C), cette borne n'aura aucun effet et l'algorithme fera une recherche exhaustive. C'est pour cela que la borne L2 a été proposée par Martello et Toth, pour remédier à ce problème. On rappelle la formule de la borne L2, qui a été déjà présentée dans l'état de l'art :

2.1.0.1 rappel Soit α un entier tels que :

$$0 \leq \alpha \leq C/2$$

On définit des classes d'articles suivantes :

$$C_1 = \{a_i, \quad C - \alpha < v_i\}$$

$$C_2 = \{a_i, \quad C/2 < v_i \leq C - \alpha\}$$

$$C_3 = \{a_i, \quad \alpha < v_i \leq C/2\}$$

$BI(I)$ est donnée par la formule suivante :

$$BI(I) = \max\{L(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq C/2\}$$

Avec

$$L(\alpha) = |C_1| + |C_2| + \max(0, \lceil \frac{\sum_{j \in C_3} v_j - (|C_2| * C - \sum_{j \in C_2} v_j)}{C} \rceil)$$

2.1.0.2 Explication de la formule : Etant donnée que les objets des classes C_1 et C_2 ont un poids supérieur à $C/2$ chacun d'eux sera placé dans une boîte séparée pour le contenir, donc $|C_1| + |C_2|$ boîtes sont utilisées quelque soit la solution. De plus, aucun objet de l'ensemble C_3 ne peut être rangé dans une boîte contenant un objet de C_1 (à cause de la contrainte de capacité). La capacité résiduelle (espace libre) des $|C_2|$ boîtes est de : $C^* = |C_2| * c - \sum_{j \in C_2} w_j$. Donc dans le meilleur des cas, cette capacité résiduelle va être remplie par les objets de C_3 , et dans ce cas le nombre de nouvelles boîtes qu'on doit ouvrir est de : $\frac{\sum_{j \in C_3 - C^*} w_j}{c}$ (cette dernière formule utilise le même principe que la borne L1).

2.2 Pseudocode

Algorithm 2 Branch and bound amélioré

Appliquer WFD sur l'instance pour initialiser le coût optimal :
 $\text{cout_opt} = \text{WFD}(\text{problème})$
Appliquer l'algorithme Branch and Bound sur le problème en utilisant la borne L2

3 Recherche exhaustive

Dans cette 3ème solution, on a implémenté une recherche exhaustive, qui consiste à parcourir l'ensemble des nœuds et leurs fils, sans aucun élagage de nœuds. Donc on aura le même algorithme que celui du branch and bound, en supprimant l'étape de l'évaluation du nœud pour décider de son élagage.

4 Tests et Resultats

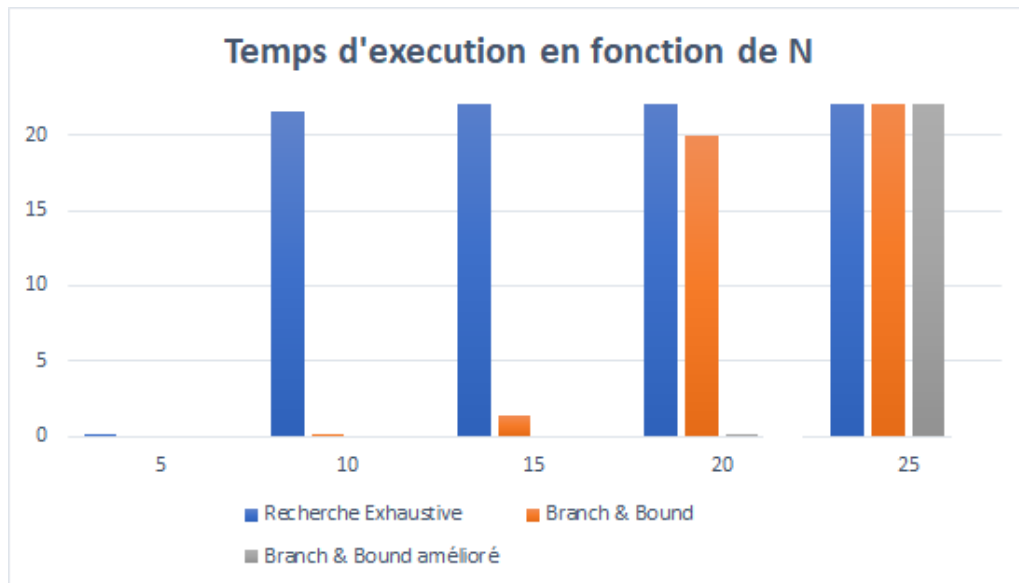
Dans cette partie, nous allons comparer les performances de nos algorithmes implémentés, pour cela, en premier lieu on va utiliser notre propre générateur d'instances pour comparer les 4 algorithmes : recherche exhaustive, Branch & Bound, Branch & Bound amélioré. ensuite on utilisera les instances du benchmark Scholl.

Remarque : Les algorithmes ont été développés en utilisant le langage de programmation Python, et exécutés sur un **HP probook [Intel Core i7-6500U CPU @2.50GHz, 8Go RAM]** en utilisant l'IDE IntelliJ pycharm. Le générateur d'instances utilise la fonction `random()` de la bibliothèque `random` de Python, cette fonction utilise le Mersenne Twister qui est un générateur de nombres pseudo-aléatoires, réputé pour sa qualité.

4.1 Instances générées :

On génère plusieurs instances du problème avec la valeur $C = 100$ pour la capacité de la boîte, et un nombre d'articles croissant : $N \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$. Les volumes des articles sont générés aléatoirement dans l'intervalle $]0, 100]$. Le tableau ci-dessous résume les résultats en termes de temps d'exécution en secondes de chacun des 4 algorithmes sur les instances générées.

| N (nombre d'articles) | Recherche Exhaustive | Branch & Bound | Branch & Bound amélioré |
|------------------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| 5 | 0.0156 | 0.0 | 0.0 |
| 10 | 21.5747 | 1.3121 | 0.0 |
| 15 | - | 0.0156 | 0.0 |
| 20 | - | - | 0.0624 |
| 25 | - | - | - |



4.1.1 Analyse des résultats :

1. On remarque d'un côté qu'en augmentant la taille du problème, le temps d'exécution augmente très rapidement.
2. D'un autre côté, le Branch and Bound amélioré est le performant, suivie du Branch & Bound classique, et enfin vient la recherche exhaustive qui prend un temps énorme pour résoudre des instances de taille petite.
3. Le Branch & Bound et la recherche exhaustive arrivent rapidement à leur limite, qui est de $N = 10$ et $N = 15$ respectivement, suivi du Branch & Bound amélioré pour $N = 20$ dans ces instances générées. Ceci signifie que ces méthodes ne sont pas efficaces pour de grandes instances.

4.1.2 Interprétation des résultats :

On justifie les résultats obtenus et la grande différence entre les temps d'exécution des 4 méthodes comme suit :

1. La recherche exhaustive, donne les temps d'exécution les plus lents, car cette dernière ne possède aucun mécanisme de réduction du problème, donc elle va parcourir toutes les permutations possibles des articles.
2. Le Branch & Bound, offre une petite amélioration par rapport à la recherche exhaustive, grâce à la borne inférieure $L1$ utilisée pour réduire quelques branches qu'on est sûr qu'elles ne contiennent pas la solution optimale, mais cet algorithme arrive à sa limite rapidement, car la borne

L1 n'est efficace que lorsque les volume des articles sont petits par rapport à la capacité de la boîte, sinon, on retombe sur une recherche exhaustive.

3. Le Branch & Bound amélioré, augmente les performances du Branch & Bound classique, à cause de la borne L2 qui couvre des cas de réduction plus large que la borne L1, de plus , l'utilisation des heuristiques permet d'accélérer le temps de trouver un noeud exacte.

4.2 Scholl Benchmark :

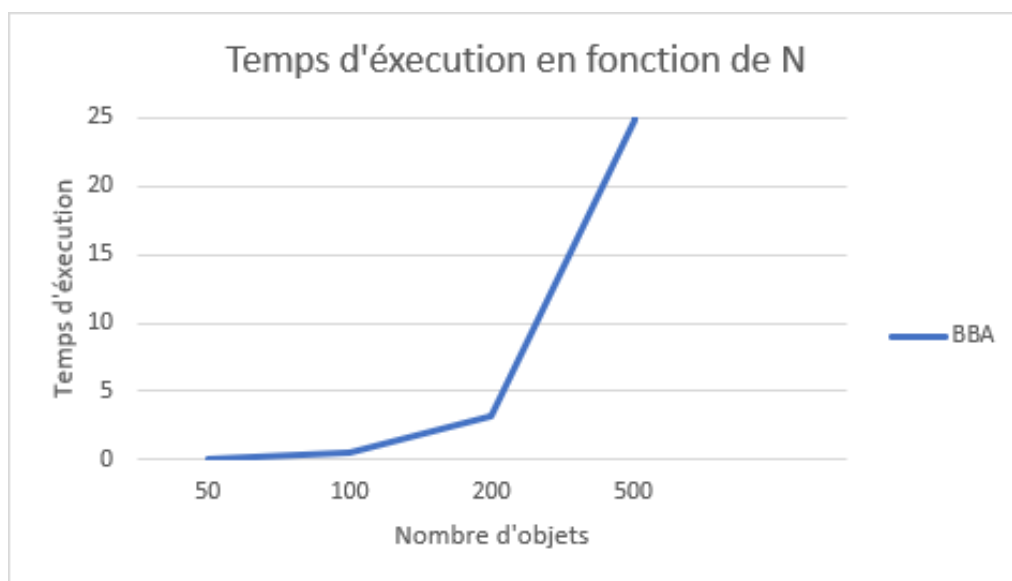
Le Scholl benchmark est composé de 3 différentes classes, les volume des articles sont uniformément distribués entre 50 et 500. la capacité C de la boîte est entre 100 et 150 dans la première classe (Scholl1), égale à 1000 dans la classe 2 (Scholl2) et égale à 100 000 dans la 3ème classe (Scholl3). Les deux algorithmes Recherche exhaustive et Branch & Bound sont incapables de résoudre les instances de ce benchmark à cause de leurs tailles et difficultés relativement élevées. Donc, dans cette partie nous allons étudier le Branch & Bound amélioré [BBA].

Pour chaque classe, on a 4 valeurs de N (50,100,200,500) et pour chaque couple (N,C) on prends 5 instances afin de calculer le temps d'exécution moyen, ceci est dû à la génération aléatoire des volumes des articles, ce qui peut rendre quelques instances plus difficiles que d'autres, même si elles ont la même valeur du couple (N,C). Les résultats en temps d'exécution sont présentés dans le tableau suivant :

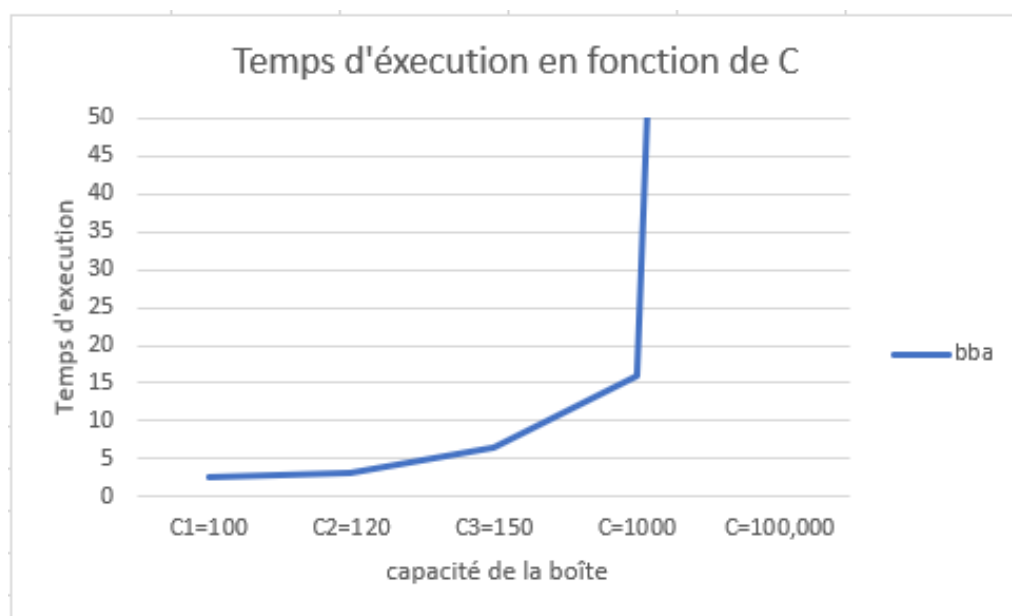
| Classe | N | Temps d'exécution (secondes) | | | | | | | |
|--------|-----------|------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| | | N1=50 | | N2=100 | | N3=200 | | N4=500 | |
| | | BBA | DP | BBA | DP | BBA | DP | BBA | DP |
| 1 | C1=100 | 0.04010 | 0.02318 | 0.16994 | 0.14423 | 1.83338 | 0.72787 | 8.87928 | 3.31377 |
| | C2=120 | 0.05078 | 0.02943 | 0.37584 | 0.10916 | 2.01203 | 0.48869 | 10.40025 | 3.369926 |
| | C3=150 | 0.06517 | 0.02437 | 0.57027 | 0.09249 | 2.91527 | 0.44331 | 22.92290 | 1.72647 |
| 2 | C=1000 | 0.10653 | 0.06642 | 0.83099 | 0.26568 | 6.25429 | 0.92168 | 56.91714 | 5.53843 |
| 3 | C=100.000 | - | - | - | - | - | - | - | 200 |

4.2.1 Analyse des résultats :

1. En augmentant N le nombre d'articles, le temps d'exécution augmente d'une façon exponentielle



2. En fixant le nombre d'articles, l'augmentation de la capacité C produit une augmentation dans les temps d'exécution



4.2.2 Conclusion méthodes exactes

Malgré les améliorations apportées aux algorithmes exactes (utilisation des heuristiques pour l'initialisation de la solution optimale, utilisation d'une

évaluation plus performante ..), ces derniers suivent toujours la courbe exponentielle en terme de temps d'exécution en augmentant la taille du problème. En d'autres termes, ces algorithmes arrivent rapidement à leurs limites, sans même pas pouvoir résoudre des instances de taille moyenne. De nos jours, les données étant d'une très grande taille (qui dépasse les milliers), l'utilisation des méthodes exactes, quelques soit leurs performances, est impossible même avec les ordinateurs les plus rapides du monde. C'est pour cela que les chercheurs se sont dirigés vers des méthodes approchées qui fournissent une solution proche de l'optimal mais en un temps polynomial. Ce qui fait l'objet des prochaines parties de notre projet.

Quatrième partie

Worst Case Analysis

Les méthodes approchées cherchent à trouver la solution la plus proche possible de la solution optimale. Pour mesurer la qualité de cette solution obtenue, nous utiliserons l'analyse du pire des cas "*worst Case analysis*".

Dans cette analyse, les performances d'un algorithme sont mesurées par l'écart de la solution du pire cas (l'instance où l'algorithme donne la pire solution) à la solution optimale. L'une des métriques les plus utilisées dans l'analyse du pire des cas est le *Worst Case Ratio*.

Worst Case Ratio

Ce rapport mesure la déviation maximal de la solution obtenue par l'heuristique, par rapport à la solution optimale.

Soit :

- **L** : une instance du bin packing.
- **A(L)** : le nombre de boîtes utilisées en appliquant l'heuristique *A* sur *L*.
- **OPT(L)** : le nombre de boîtes optimal.

Le rapport est donné par la formule suivante :

$$Ra \equiv \{r \geq 1 : \frac{A(L)}{OPT(L)} \geq r \text{ pour toute instance } L\}$$

Pour calculer le ratio, on calcule le rapport $A(L)/OPT(L)$ pour chaque instance, ensuite on prend le plus petit des majorants de ces rapports. Il est clair que la valeur idéale est un "1", ce qui correspond au cas où la solution obtenue est égale à la solution optimale pour toutes les instances, et dès que la solution obtenue s'éloigne de la solution optimale le rapport va augmenter.

Cinquième partie

Méthodes Heuristiques

Les heuristiques sont des méthodes spécifiques qui exploitent au mieux la structure du problème dans le but de trouver une solution raisonnable (non nécessairement optimale) en un temps réduit. L'utilisation de ce type d'algorithmes s'impose car les méthodes de résolution exactes sont de complexité exponentielle, et échouent à trouver la solution pour des instances de tailles moyennes voire petites, comme on l'a constaté lors du chapitre précédent. L'usage des heuristiques est donc pertinent pour surmonter ces limites.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la conception détaillée des heuristiques sur lesquelles notre choix d'implémentation s'est porté et qui sont :

1. Next Fit (NF)
2. Next Fit Decreasing (NFD)
3. First Fit (FF)
4. First Fit Decreasing (FFD)
5. Best Fit (BF)
6. Best Fit Decreasing (BFD)

Dans le but d'explorer ces méthodes, comparer leurs performances, montrer leurs avantages et découvrir leurs limites, nous effectuerons des tests empiriques et comparatifs sur le même benchmark utilisé pour les tests des méthodes exactes (Benchmark Scholl).

1 Next Fit (NF)

1.1 Principe

Si l'article tient dans la même boîte que l'article précédent, il est placé avec ce dernier. Sinon, on ouvre une nouvelle boîte et le mettre là-dedans.

— NF est un algorithme simple d'une complexité de $O(n)$.

1.2 Pseudocode

Algorithm 3 Next Fit

```
for Tous les articles  $i = 1, 2, \dots, n$  do  
  if l'article  $i$  s'inscrit dans la boîte actuelle then  
    Ranger l'article  $i$  dans la boîte actuelle  
  else  
    Créer une nouvelle boîte, en faire la boîte actuelle et ranger l'article  $i$   
    dedant.  
  end if  
end for
```

2 Next Fit Decreasing (NFD)

2.1 Principe

Le NFD est une amélioration de l'algorithme Next-Fit. Cet algorithme ordonne les articles par ordre décroissant des poids, puis applique l'algorithme NF.

2.2 Pseudocode :

Algorithm 4 Next Fit Decreasing

```
Triez les articles par ordre décroissant  
Appliquer Next-Fit à la liste triée
```

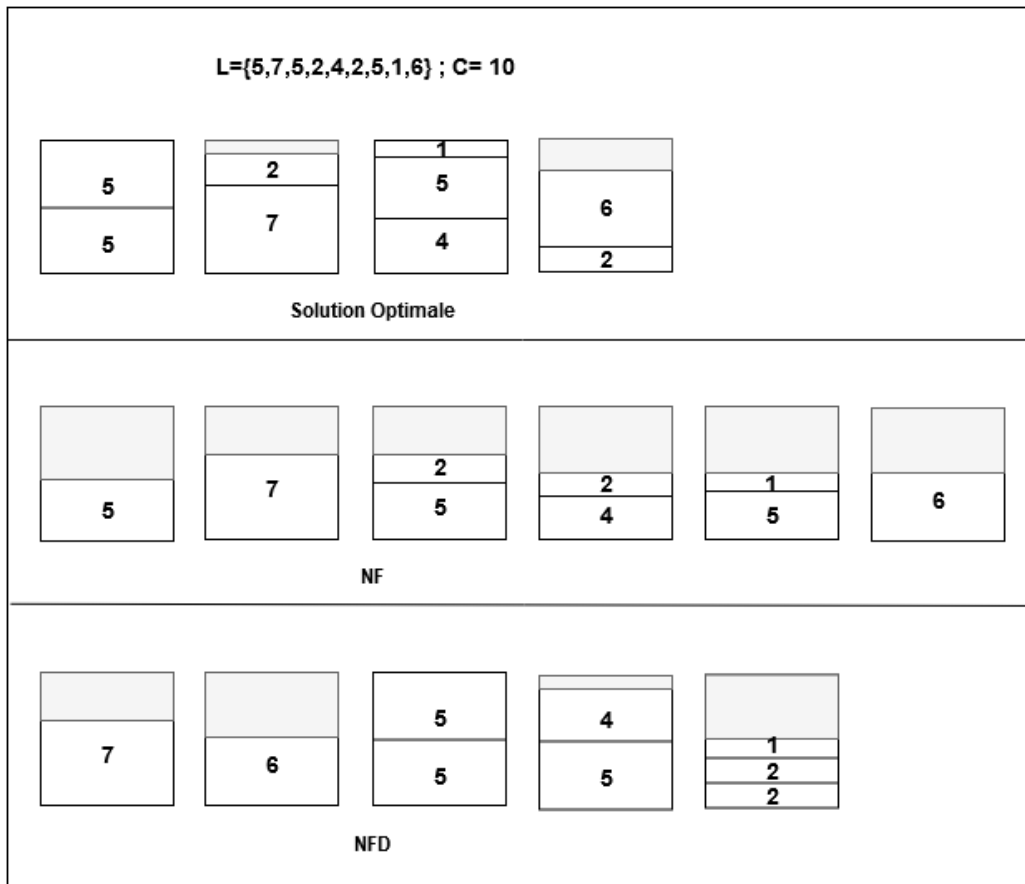


FIGURE 2 – Exemple NF et NFD

3 First Fit (FF)

3.1 principe

Ranger chaque article courant dans la première boîte, entre celles déjà ouvertes, qui peut le contenir sinon ouvrir une nouvelle boîte et on le range dedans.

— L'algorithme First Fit implémenté a une complexité de $O(n^2)$.

3.2 Pseudocode

Algorithm 5 First Fit

```
for Tous les articles  $i = 1, 2, \dots, n$  do
  for Toutes les boîtes  $j = 1, 2, \dots, m$  do
    if l'article  $i$  s'inscrit dans la boîte  $j$  then
      Ranger l'article  $i$  dans la boîte  $j$ 
      Quitter la boucle (passer à l'article suivant)
    end if
  end for
  if l'article  $i$  ne rentre dans aucune boîte disponible then
    Créer une nouvelle boîte et ranger l'article  $i$  dedans
  end if
end for
```

4 First Fit Decreasing (FFD)

4.1 Principe

Le FFD est une amélioration de l'algorithme First-Fit. Cet algorithme ordonne les poids dans un ordre décroissant puis leur applique l'algorithme FF.

- L'algorithme First Fit peut être implémenté en $O(n \log n)$ en utilisant les arbres de recherche binaires

4.2 Pseudocode

Algorithm 6 First Fit Decreasing

```
Triez les articles par ordre décroissant
Appliquer First-Fit à la liste triée
```

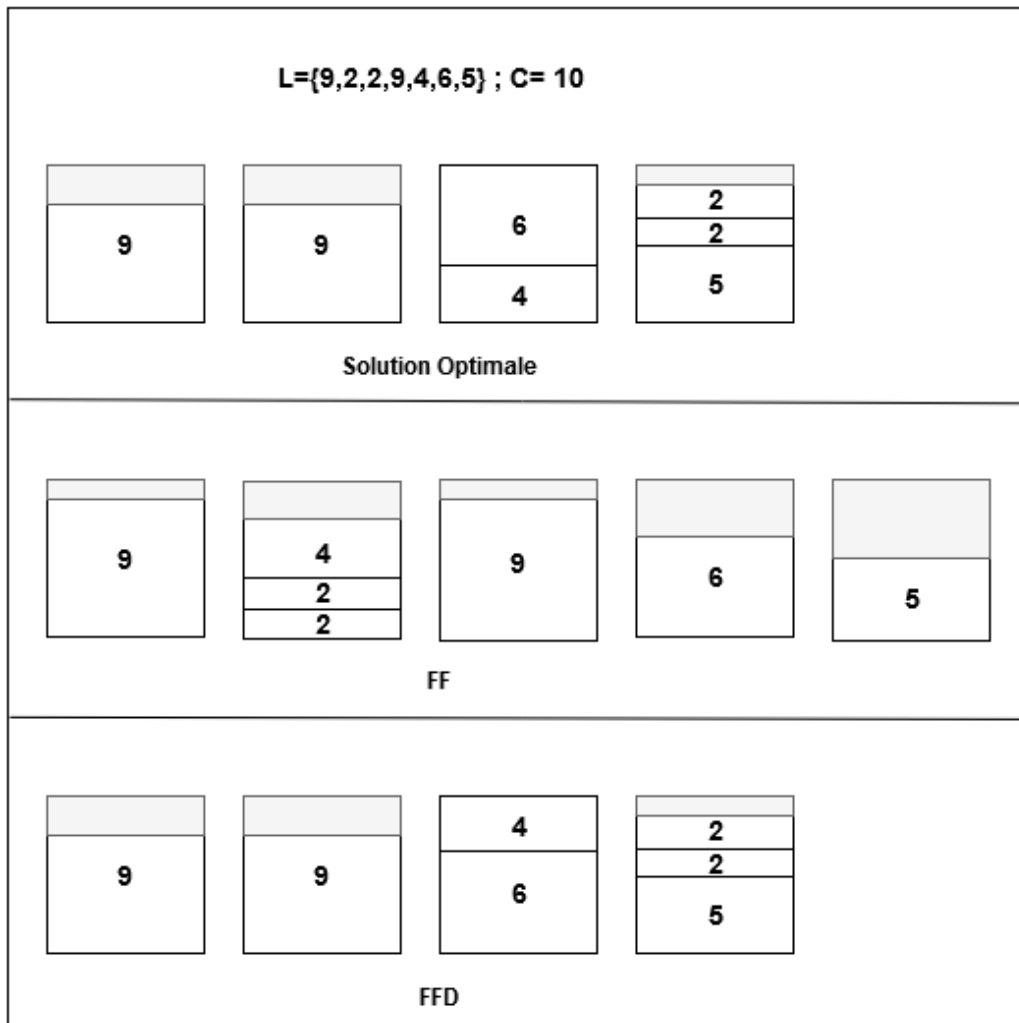


FIGURE 3 – Exemple FF et FFD

5 Best Fit (BF)

5.1 principe

Ranger chaque article courant dans la boîte la mieux remplie, entre celles déjà ouvertes, qui peut le contenir sinon ouvrir une nouvelle boîte et le ranger dedans.

— L'algorithme Best Fit implémenté a une complexité de $O(n^2)$.

5.2 Pseudocode

Algorithm 7 Best Fit

```
for Tous les articles  $i = 1, 2, \dots, n$  do
  for Tous les boîtes  $j = 1, 2, \dots, m$  do
    if l'article  $i$  s'inscrit dans la boîte  $j$  then
      Calculer la capacité restante dans la boîte  $j$ 
    end if
  end for
  Ranger l'article  $i$  dans la boîte  $j$ , où  $j$  est la boîte ayant la capacité
  restante minimale après avoir ajouté l'article (c'est-à-dire que "l'article
  lui convient le mieux").
  if une telle boîte n'existe pas ( l'article ne peut être rangé dans aucune
  boîte) then
    Créer une nouvelle boîte et ranger l'article  $i$  dedans
  end if
end for
```

6 Best Fit Decreasing (BFD)

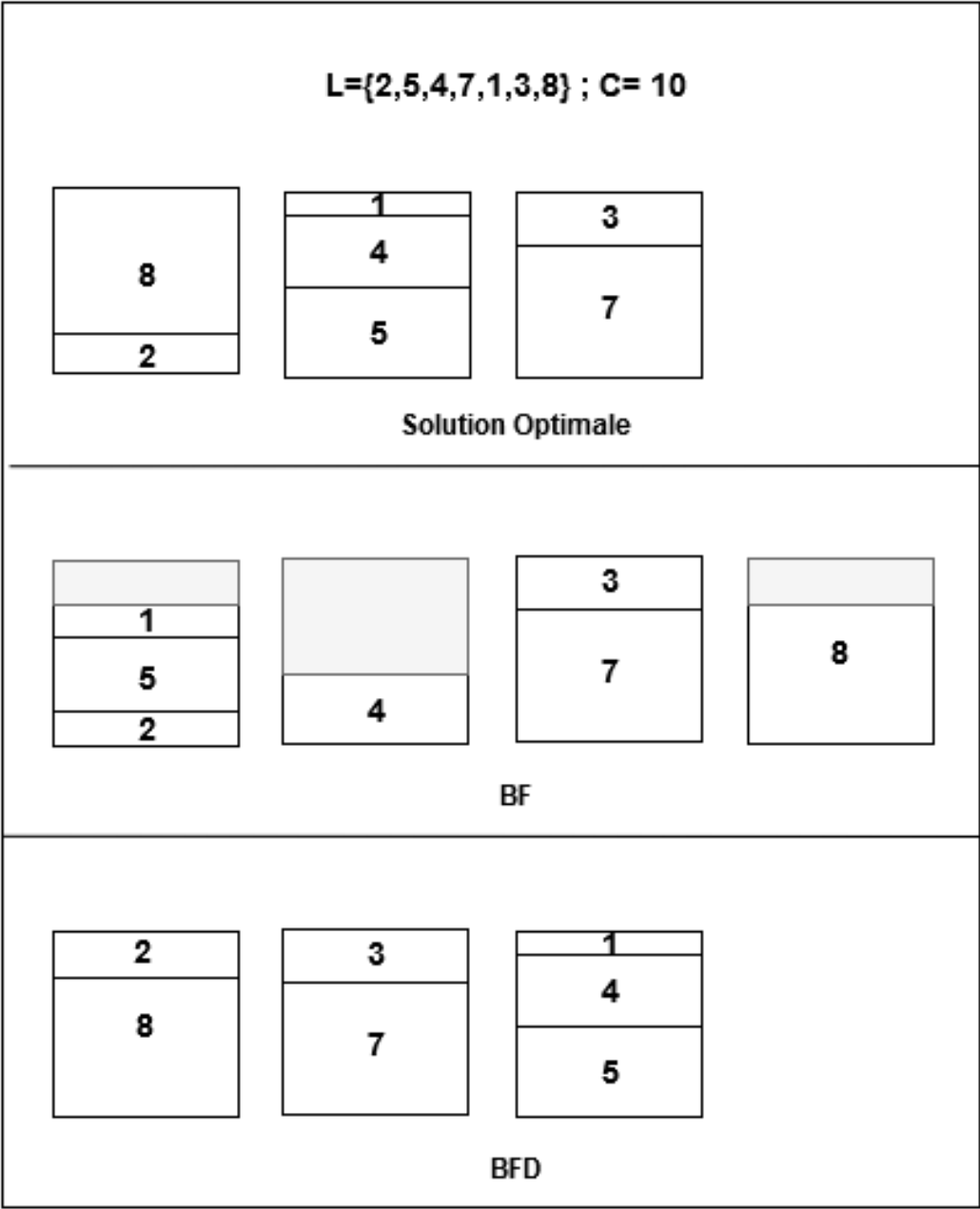
6.1 principe

Le BFD est une amélioration de l'algorithme Best-Fit. Cet algorithme ordonne les poids dans un ordre décroissant puis applique l'algorithme BF.

6.2 Pseudocode

Algorithm 8 Best Fit Decreasing

```
Triez les articles par ordre décroissant
Appliquer Best-Fit à la liste triée
```



1

5

2

3

4

3

7

8

2

8

3

7

1

4

5

FIGURE 4 – Exemple BF et BFD

7 Tests et résultats

Dans cette partie, nous allons comparer les performances de nos algorithmes implémentés : *Next-Fit(NF)*, *Next-Fit Decreasing(NFD)*, *First-Fit(FF)*, *First-Fit Decreasing(FF)*, *Best-Fit(BF)* et *Best-Fit Decreasing (BFD)*.

Pour pouvoir faire une bonne comparaison avec les autres méthodes de résolution du problème du Bin Packing, on a trouvé judicieux de prendre les mêmes instances du benchmark Scholl.

Remarque : Les algorithmes ont été développés en utilisant le langage de programmation Python, et exécutés sur un **HP probook [Intel Core i7-6500U CPU @2.50GHz, 8Go RAM]** en utilisant l'IDE IntelliJ pycharm. Le générateur d'instances utilise la fonction `random()` de la bibliothèque `random` de Python, cette fonction utilise le Mersenne Twister qui est un générateur de nombres pseudo-aléatoires, réputé pour sa qualité.

Pour pouvoir comparer entre les performances des différentes méthodes heuristiques, notre étude comportera 2 axes :

- Le temps d'exécution.
- La qualité de la solution.

7.1 Analyse des résultats par rapport au temps d'exécution

Les résultats en temps d'exécution sont présentés dans le tableau suivant :

| N | N=50 | | | | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| C | NF | NFD | FF | FFD | BF | BFD |
| 100 | 0.000144 | 0.000127 | 0.000190 | 0.000184 | 0.000241 | 0.000215 |
| 120 | 0.000124 | 0.000130 | 0.000160 | 0.000167 | 0.000198 | 0.000213 |
| 150 | 9.665489 | 9.436607 | 0.000126 | 0.000124 | 0.000150 | 0.000149 |
| 1000 | 0.000140 | 0.000116 | 0.000269 | 0.000216 | 0.000214 | 0.000225 |
| N | N=100 | | | | | |
| C | NF | NFD | FF | FFD | BF | BFD |
| 100 | 0.000464 | 0.000470 | 0.000713 | 0.000715 | 0.000793 | 0.000787 |
| 120 | 0.000494 | 0.000480 | 0.000644 | 0.000574 | 0.000695 | 0.000771 |
| 150 | 0.000329 | 0.000362 | 0.000402 | 0.000397 | 0.000483 | 0.000494 |
| 1000 | 0.000427 | 0.000361 | 0.000690 | 0.000760 | 0.000945 | 0.000751 |
| N | N=200 | | | | | |
| C | NF | NFD | FF | FFD | BF | BFD |
| 100 | 0.001325 | 0.001391 | 0.001916 | 0.001862 | 0.002066 | 0.002173 |
| 120 | 0.001197 | 0.001158 | 0.001533 | 0.001542 | 0.001815 | 0.001871 |
| 150 | 0.000745 | 0.000760 | 0.001045 | 0.001219 | 0.001976 | 0.001678 |
| 1000 | 0.000800 | 0.000801 | 0.001478 | 0.001676 | 0.001954 | 0.001746 |
| 100000 | 0.000739 | 0.000702 | 0.001153 | 0.001635 | 0.001162 | 0.001505 |
| N | N=500 | | | | | |
| C | NF | NFD | FF | FFD | BF | BFD |
| 100 | 0.007068 | 0.007047 | 0.010820 | 0.010633 | 0.011144 | 0.010667 |
| 120 | 0.006306 | 0.006812 | 0.008905 | 0.008931 | 0.010936 | 0.010151 |
| 150 | 0.003895 | 0.003845 | 0.006202 | 0.005959 | 0.006320 | 0.005925 |
| 1000 | 0.002363 | 0.002021 | 0.003468 | 0.003332 | 0.003123 | 0.003095 |

FIGURE 5 – Tableau des temps d'exécution des heuristiques

Pour faciliter la lecture des résultats, l'utilisation d'un graphique s'impose. Ci-dessous un histogramme représentant les temps d'exécution en fonction des instances pour chaque heuristique :

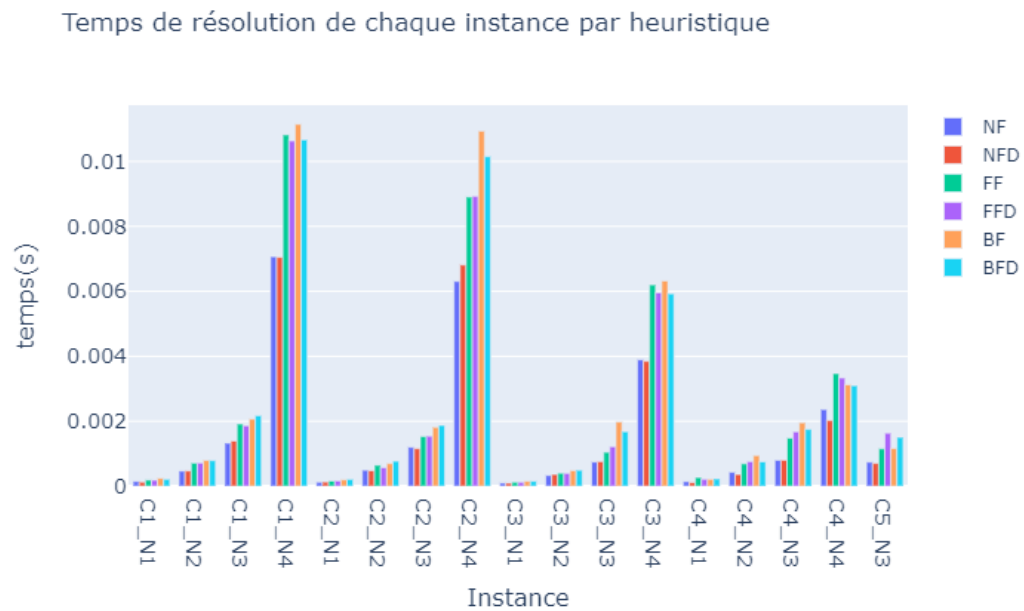


FIGURE 6 – Histogramme des temps d'exécution des heuristiques

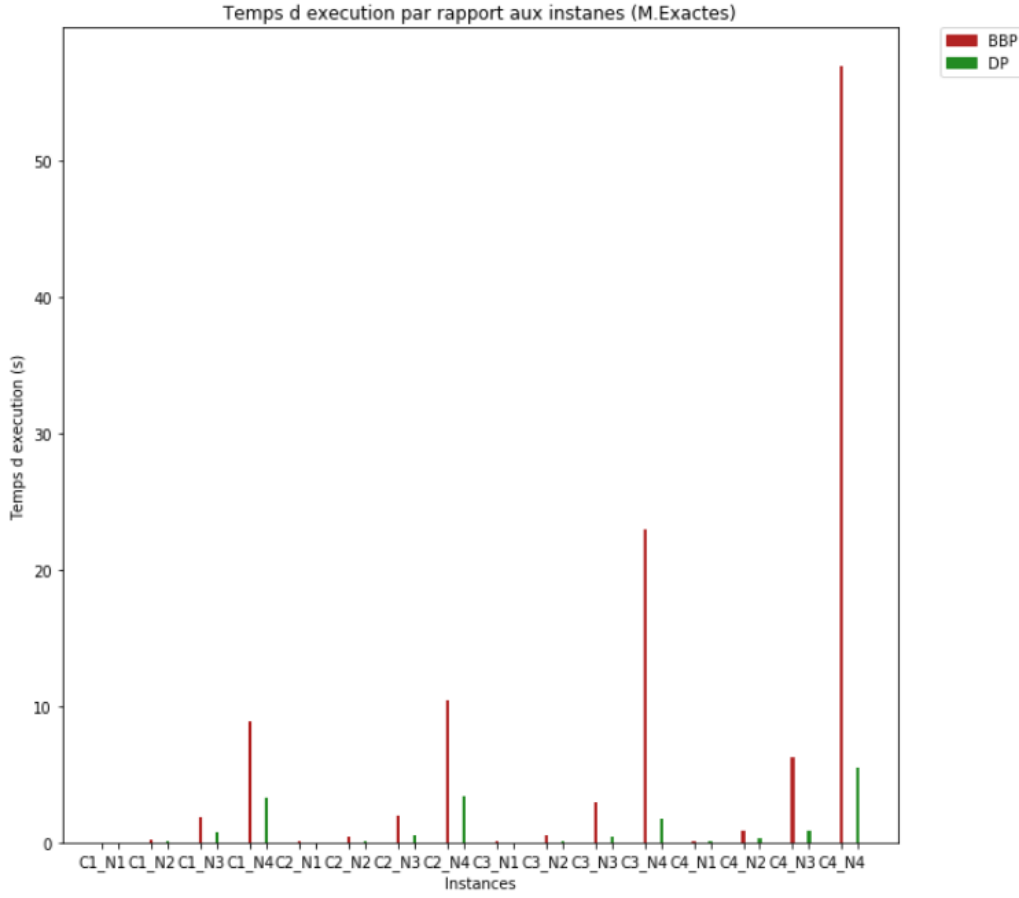


FIGURE 7 – Comparaison des temps d’exécution des heuristiques avec les méthodes exactes

7.1.1 Analyse des résultats

- En augmentant la complexité du problème (N et C), le temps d’exécution des heuristiques augmente, mais tout en restant incomparable avec celui des méthodes exactes [figure 06].
- Toutes les méthodes heuristiques arrivent rapidement à trouver une solution aux instances du problème pour les trois classes d’instances du Benchmark Scholl (moins de 0.012s).
- Les performances de NF et NFD sont meilleures que celles des autres méthodes, avec le BF et BFD qui consomment le plus de temps, dans la plupart des exécutions, pour trouver une solution.
- Les heuristiques FF et FFD s’exécutent en des temps légèrement meilleurs que BF et BFD mais moins rapides que NF et NFD.

7.1.2 Interprétation des résultats

- Les algorithmes BF et BFD nécessitent plus de temps car le principe de BF repose sur le fait qu'il faut d'abord parcourir toutes les boîtes déjà ouvertes avant de prendre une décision (ranger un article).
- Les algorithmes NF et NFD sont les plus rapides car le principe de NF repose sur le fait que la décision où mettre l'article concerne seulement la dernière boîte ouverte, donc on n'a pas à parcourir l'ensemble des boîtes pour chaque article.
- L'algorithme *FF* (resp *FFD*) impose de parcourir partiellement la liste des boîtes ouvertes jusqu'à trouver la 1ère boîte qui convient, ce qui justifie le temps d'exécution moyen (entre celui de BF et NF).

7.2 Analyse des résultats par rapport à la qualité de la solution

Pour cela, on utilisera la métrique Worst Case Ratio [voir Partie 01]

Remarque : Vu que les instances du benchmark Scholl contiennent des articles déjà ordonnés, les versions *online* (*NF, FF, BF*) et *offline* (*NFD, FF, BFD*) des heuristiques donnent exactement les mêmes résultats (car la différence entre les deux est l'étape d'ordonnancement des articles). Dans cette partie nous allons nous contenter d'étudier la qualité de la solution des algorithmes *onlines*.

Ci-dessous un tableau récapitulatif des ratios obtenus pour chaque heuristique sur l'ensemble des instances du benchmark [figure 07] , ainsi qu'une représentation graphique (en histogramme) de ces résultats [figure 08] :

| Instance | Ratio | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | BF | FF | NF |
| C1 N1 | 1.0625 | 1.0625 | 1.4375 |
| C1 N2 | 1.0 | 1.0 | 1.428571 |
| C1_N3 | 1.011494 | 1.011494 | 1.396825 |
| C1 N4 | 1.005988 | 1.005988 | 1.396449 |
| C2 N1 | 1.0 | 1.0 | 1.125 |
| C2_N2 | 1.071428 | 1.071428 | 1.190476 |
| C2 N3 | 1.0 | 1.0 | 1.137931 |
| C2_N4 | 1.0 | 1.0 | 1.098591 |
| C3 N3 | 1.072727 | 1.072727 | 1.178571 |

FIGURE 8 – Tableau des ratios obtenues par les heuristiques

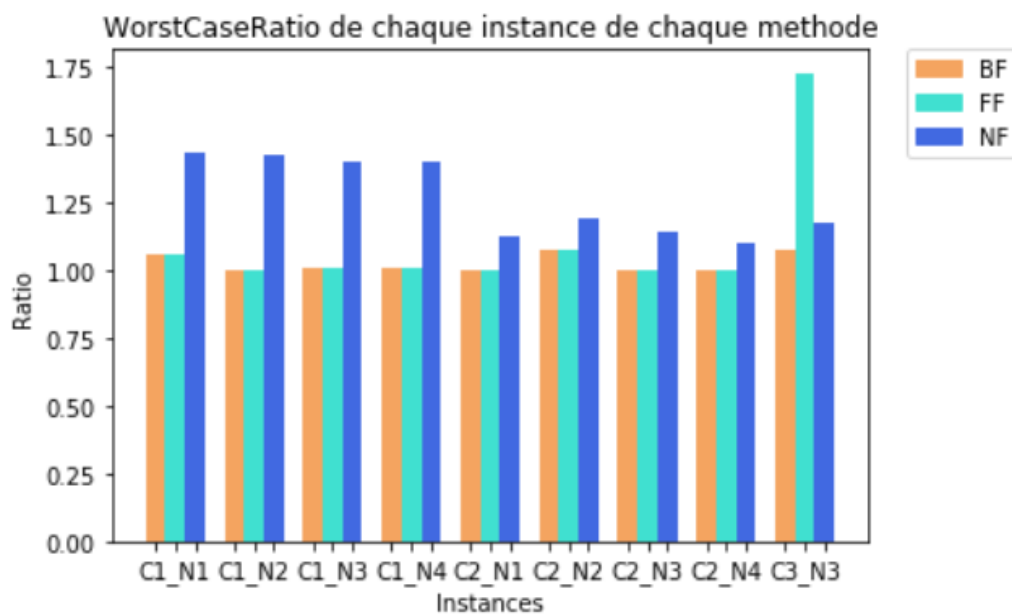


FIGURE 9 – Histogramme des ratios des heuristiques en fonction des instances

Ci-dessous une représentation graphique (en histogramme) qui représente

le ratio de toutes les instances du Benchmark *Scholl*, toutes classes confondues par heuristique (BF, FF et NF) :

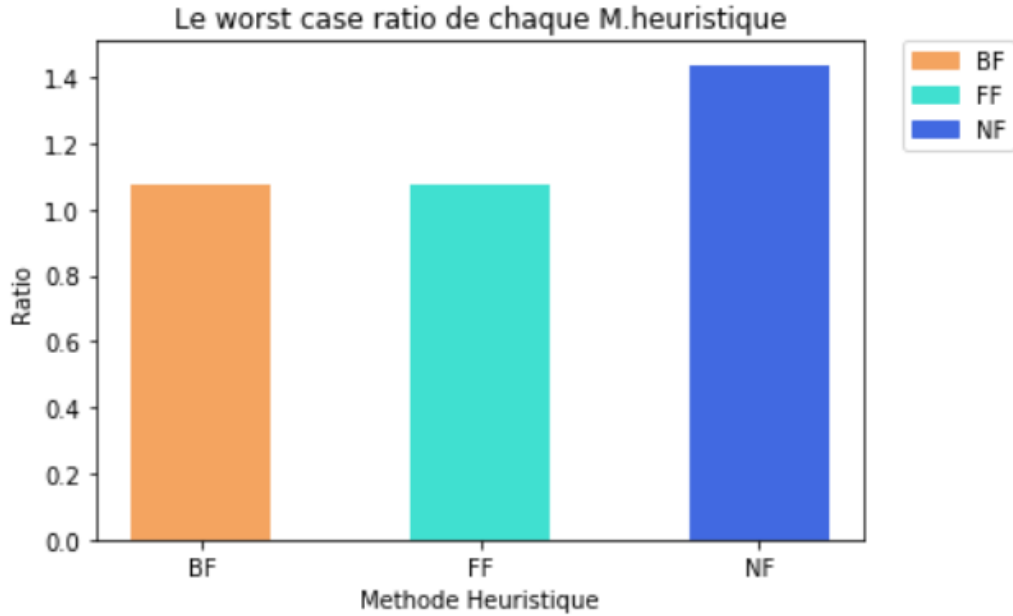


FIGURE 10 – Histogramme des ratios des heuristiques pour tout le benchmark Scholl

7.2.1 Analyse des résultats

- Les ratios obtenus pour *BF* et *FF* (*BFD* et *FF* resp) sont identiques et diffèrent de *NF* (*NFD*).
- Les heuristiques *BF*, *FF* (et respectivement *BFD*, *FF*) arrivent pour certains types d'instances à trouver la valeur optimale du problème (ratio égale 1), contrairement à *NF* (respectivement *NFD*) qui ne trouve pas assez souvent la solution (ratio supérieure à 1).

7.2.2 Interprétation des résultats

La différence dans la qualité de la solution obtenue est due aux nombres de boîtes considérées pour prendre une décision qui est plus large dans First Fit et Best Fit (toutes les boîtes ouvertes peuvent accueillir l'article), par contre dans Next Fit seulement la dernière boîte peut accueillir l'article.

7.3 Conclusion

En exécutant les heuristiques étudiées (FF , NF , BF et leurs versions *offline*) sur les instances du benchmark Scholl, on a trouvé que l'heuristique NF est la plus rapide à s'exécuter, mais elle donne la plus mauvaise qualité de solution. Par contre les heuristiques FF et BF sont moins rapides (avec BF légèrement moins rapide que FF) mais offrent une meilleure qualité.

Comme on a pu le constater durant ce chapitre, les méthodes heuristiques de type *online* (FF , NF , BF) et de type *offline* (FF , NFD , BFD) donnent de très bons résultats par rapport au temps d'exécution. Mais l'un des inconvénient avec les méthodes heuristiques c'est qu'elles n'assurent pas la qualité de la solution.

Ces algorithmes sont connus sous le nom d'algorithmes gloutons, c'est à dire qu'ils cherchent à trouver une solution dans un temps très réduit, mais ne donnent pas d'assurance sur la qualité de cette solution. C'est pour cela que ces méthodes sont généralement utilisées pour initialiser d'autres méthodes plus sophistiquées comme les métaheuristiques.

Sixième partie

Méthodes Métaheuristiques

Les métaheuristiques sont des méthodes d'optimisation approchées, caractérisées par leur généralité, c'est à dire qu'elles ne dépendent pas du problème à résoudre comme les heuristiques. En d'autres termes, une métaheuristique peut être considérée comme un cadre algorithmique qui peut être appliqué à différents problèmes d'optimisation avec relativement peu de modifications à apporter afin de l'adapter à un problème spécifique.

Les métaheuristiques sont caractérisées par leurs stratégies qui permettent de guider la recherche d'une solution, afin d'explorer l'espace de recherche efficacement pour déterminer des points (presque) optimaux, grâce à des mécanismes qui permettent d'éviter d'être bloqué dans des optima locaux, mais elles sont en général non déterministes et ne donnent aucune garantie d'optimalité. Les métaheuristiques se divisent sur deux méthodes :

- Les méthodes de voisinage.
- Les méthodes évolutionnaires (ou à population).

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode de calibrage automatique des paramètres que nous avons utilisée suivie de la conception détaillée des métaheuristiques sur lesquelles notre choix d'implémentation s'est porté :

- Méthodes de voisinage :
 1. Recuit simulé, s'inspirant des systèmes physiques (processus de refroidissement de matériau).
- Méthodes évolutionnaires :
 1. Algorithme génétique avec une nouvelle représentation du chromosome, s'inspirant des systèmes biologiques.
 2. WOA/ILWOA, s'inspirant du comportement des animaux, précisément les baleines bossues.

Dans le but d'explorer ces méthodes, comparer leurs performances, montrer leurs avantages et découvrir leurs limites , nous effectuerons des tests empiriques et comparatifs sur les mêmes benchmarks utilisés pour les tests des méthodes exactes et heuristiques.(Benchmark Scholl). Pour l'implémentation et les tests, les algorithmes ont été développés en utilisant le langage de programmation Python, et exécutés sur un **DELL Inspiron15 [Intel Core i7-8550U CPUTM @ 1.80GHz×8, 8Go]**.

1 Calibrage Automatique des Paramètres

Les métaheuristiques utilisées pour résoudre les problèmes d'optimisation difficiles ont généralement plusieurs paramètres qui doivent être définis de manière appropriée de sorte que certains aspects des performances

soient optimisés. Dans ce chapitre, nous passons en revue F-Race, un algorithme de course pour la configuration automatique des algorithmes. F-Race est basé sur une approche statistique pour sélectionner la meilleure configuration parmi un ensemble de configurations candidates sous évaluations stochastiques. Nous présentons également une extension de l'algorithme F-Race initial, qui conduit à une famille d'algorithmes appelée F-Race itérée (I-Race) que nous allons utiliser plus tard dans le calibrage automatiques de paramètres des métaheuristiques que nous avons implémentés.

1.1 F-Race

1.2 Approche par Course (Racing)

F-Race, qui s'inspire de l'algorithme Hoeffding race [49], [50] en machine learning pour la sélection de modèles, a été proposé dans [45] et étudié de manière approfondie dans [31]. L'idée essentielle de la méthode de course est :

- d'évaluer l'ensemble des configurations de manière incrémentale sur un flux d'instances.
- dès que des preuves (statistiques) suffisantes sont rassemblées contre certains candidats, ces configurations sont rejetées et la course continue sur les candidats survivants.
- Dans F-Race, après chaque cycle d'évaluation des configuration, le test de Friedman non paramétrique est utilisé pour vérifier s'il existe des preuves qu'au moins une des configurations candidates est significativement différente des autres en termes de mesures de performance.
 - Si l'hypothèse nulle d'absence de différences est rejetée :
 - des comparaisons par paires entre la configuration la mieux classée et les autres configurations candidates sont effectuées.
 - tous les candidats qui entraînent des performances nettement inférieures à la meilleure configuration sont éliminés et n'apparaîtront pas lors du prochain cycle d'évaluation [51].
- Le processus est répété jusqu'à ce qu'il ne reste que deux candidats, et le meilleur des deux est pris comme résultat pour un problème de calibrage automatique des paramètres.

F-Race utilise la puissance de calcul plus efficacement qu'une évaluation répétée dans une approche par force brute. Il peut également arrêter le processus de recherche par lui-même, c'est-à-dire s'arrêter lorsqu'il ne reste qu'une configuration. Cependant, si l'algorithme cible a un grand nombre de paramètres et / ou chaque paramètre a une large gamme de valeurs possibles, un

très grand nombre de configurations candidates doivent être évaluées pour obtenir des résultats de haute qualité. Dans de tels cas, l'adoption de F-Race pourrait devenir peu pratique ou prohibitive sur le plan des calculs.

1.3 I/F-Race (F-Race Itéré)

Pour atténuer ce problème, Balaprakash et al. [63] a proposé l'application itérative de la F-Race, qui est abrégée en F-Race itéré ou I / F-Race. F-Race itérée, comme son nom l'indique, utilise une procédure itérative pour trouver les configurations de paramètres optimales :

- A chaque itération :
 - tout d'abord, un ensemble de configurations est généré à partir de l'espace des paramètres selon un modèle probabiliste,
 - puis une course F standard est effectuée sur l'ensemble candidat
 - les candidats survivants sont utilisés pour mettre à jour le modèle probabiliste qui sera utilisé dans la prochaine itération.
- Ce cycle est répété jusqu'à ce que la condition d'arrêt, telle que le budget de calcul maximal, soit satisfaite.

Il est à espérer de concentrer les configurations autour de la région prometteuse dans l'espace des paramètres en utilisant des configurations élites choisies par F-Race à chaque itération pour biaiser l'échantillonnage de nouvelles configurations [38]. L'efficacité de la procédure de recherche est ainsi améliorée de cette manière.

1.4 Le package IRace

Le package irace implémente une procédure de course itérée, qui est une extension de la course F itérée (I / F-Race). L'utilisation principale d'irace est la configuration automatique des algorithmes d'optimisation et de décision, c'est-à-dire la recherche des paramètres les plus appropriés d'un algorithme étant donné un ensemble d'instances d'un problème. Il s'appuie sur le package de F-Race par Birattari et il est implémenté dans R. Le package irace est disponible auprès de ce CRAN. La version que nous avons utilisée est irace 3.4.1.

2 Recuit Simulé

Le recuit simulé (*Simulated annealing*), est une métaheuristique proposée par Kirkpatrick et al. [2] en 1983. cette méthode est inspirée du recuit en métallurgie, une technique impliquant le chauffage et le refroidissement contrôlé

d'un matériau pour augmenter la taille de ses cristaux et réduire leurs défauts. Les deux sont des attributs du matériau qui dépendent de son énergie thermodynamique. Le chauffage et le refroidissement du matériau affectent à la fois la température et l'énergie libre thermodynamique.

2.1 Pseudocode

Algorithm 9 Recuit simulé

```

Générer une solution initiale S aléatoirement.
Initialiser les paramètres Tinit , T0 et alpha
T=Tinit (T : température courante)
while T<T0 and Time < limite do
    température de gel n'est pas atteinte et temps limite n'est pas dépassé
    repeat
        Générer un voisin S' ∈ V(S)
        if F(S') ≤ F(S) then
            S=S' //une meilleure solution a été trouvée
        else
            S=S' avec une probabilité P de métropolis
        end if
        if f(S)<Best then
            Best = S //garder dans Best la meilleure solution en terme de
            nombre de boîte utilisées. f(S) étant le nombre de boîtes utilisées
            par S.
        end if
    until R itérations or R/2 sans amélioration
    T=αT //diminution de la température
end while

```

L'algorithme du recuit simulé pour le problème du bin packing est donné ci-dessus. L'algorithme commence par une température initiale T_{init} , cette température est progressivement diminuée par un facteur α jusqu'à l'atteinte d'un seuil minimal T_0 (Température de Gel). Dans chaque température T, le système (solution actuelle) est perturbé plusieurs fois (R fois). l'algorithme commence par une solution initiale S (affectation des articles aux boîtes), cette solution est générée aléatoirement, à chaque itération une solution voisine S' est générée aléatoirement en utilisant le processus expliqué dans la partie (1.1.3 Génération des voisins) . la valeur de la fonction objective $F(S')$ est calculée. Si le voisin S' a amélioré la valeur de la fonction objective ($F(S') > F(S)$) , la solution S' est acceptée comme la nouvelle

solution ($S=S'$) , sinon, elle est acceptée selon la probabilité de métropolis

$$P_{acceptation}(S') = e^{\frac{F(S')-F(S)}{T}}$$

L'algorithme s'arrête quand la température T_0 est atteinte, et retourne la meilleure solution trouvée, dans cette étape on prend la meilleure solution en terme de nombre de boîtes utilisées (gardée dans la variable Best).

2.1.1 Critère d'arrêt

L'algorithme s'arrête quand la température de gel T_0 est atteinte, et dans chaque température T le processus de recherche de voisinage est exécuté R fois.

2.1.2 Fonction objective

La fonction objective est utilisée pour accepter une solution voisine $S' = V(S)$, elle est donnée par la formule suivante :

$$\max F(S') = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{k_i} w_j)^2 \quad (1)$$

avec :

- m : nombre de boîtes utilisées dans S'
- k_i : nombre d'articles rangés dans la boîte i
- w_j : le volume de l'article j

Cette fonction permet de maximiser le taux de remplissage des boîtes utilisées dans la solution ce qui va nous mener vers une meilleure solution en terme de nombre de boîtes utilisées.

la raison de ne pas avoir utilisé la fonction objective définie dans le problème du bin packing (minimiser le nombre de boîtes utilisées) est que cette dernière donne la même valeur pour plusieurs solutions différentes et ne montre pas les changements au niveau du contenu des boîtes.

2.1.3 Génération des voisins

Pour chercher de nouvelles solutions à partir d'une solution S , l'algorithme utilise l'une des 2 techniques : Swap (0,1) , Swap (1,1).

- Swap(0,1) : Consiste à déplacer un article choisi aléatoirement d'une boîte à une autre en maximisant la fonction objective (ie augmenter le remplissage des boîtes). Il a été montré que cette technique est efficace dans les hautes températures ($T \geq T_{1/2}$) avec $T_{1/2} = \frac{T_{init}+T_0}{2}$

- $\text{Swap}(1,1)$: Consiste à permuter entre 2 articles choisis aléatoirement et qui sont dans 2 boîtes différentes, en maximisant la fonction objective (ie augmenter le remplissage des boîtes). Il a été montré que cette technique est efficace dans les basses températures ($T < T_{1/2}$)

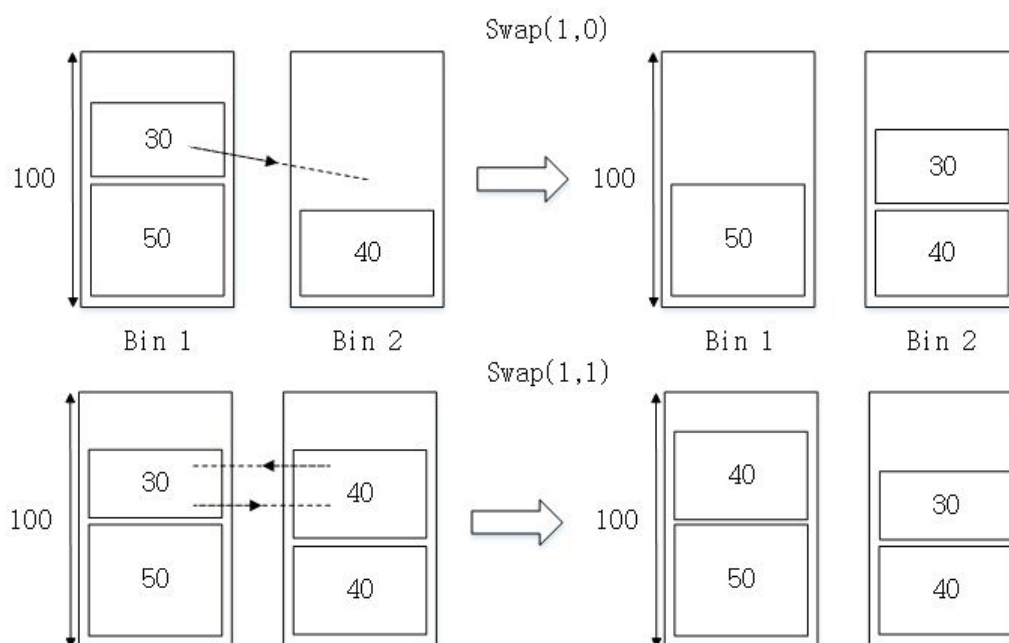


FIGURE 11 – fonctions $\text{swap}(1,0)$ et $\text{swap}(1,1)$

2.2 Les paramètres du recuit simulé

2.2.1 Le nombre d'itérations R

Signifie le nombre de fois à faire une recherche locale avant de diminuer la température. Dans notre cas cette valeur est fixée par calibrage de paramètres à $R = 1000$. De plus la boucle peut s'arrêter si après $R/2$ itérations on n'obtient aucune amélioration.

2.2.2 La température T

La température T décroît au cours des itérations et influe d'une façon directe sur la probabilité d'acceptation des solutions non améliorantes :

- Premières itérations : T élevée \implies acceptation fréquente des solutions non améliorantes (Diversification)

- Dernières itérations : T faible \implies acceptation rare des solutions non améliorantes (Intensification)

2.2.3 Valeur de T_{init}

La valeur initiale T_{init} doit permettre d'accepter initialement la plupart des solutions voisines (Diversification), généralement elle est fixée pour avoir une probabilité d'acceptation p_0 de 0.8. La valeur de la température initiale T_{init} dépend de la fonction objective et de l'instance du problème. Dans notre cas elle est estimée en effectuant une recherche initiale en acceptant toutes les solutions générées, et en calculant la moyenne des différences dans la fonction objective, elle est donnée donc par la formule suivante :

$$T_{init} = \frac{|\Delta F|}{\ln p_0} \quad (2)$$

2.2.4 Valeur de T_0

Cette valeur définit le nombre d'itération à effectuer, elle doit être suffisamment petite pour atteindre l'état de gèle, dans notre cas, elle est fixée à 0.1, mais l'algorithme peut s'arrêter si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Pas d'amélioration trouvée durant les R itérations d'une température T et la probabilité d'acceptation est assez petite (< 0.01).
- Le temps d'exécution limite est atteint.

2.2.5 Le facteur de diminution de la températures

Ce facteur définit le schéma de refroidissement de notre système, c'est à dire la vitesse de convergence vers la solution finale. sa valeur est généralement entre 0.8 et 1.

- Si α est très grand, la convergence est trop rapide, dans ce cas on aura une convergence prématurée (on reste dans un optimum local).
- Si α est très petit, la convergence est trop lente, dans ce cas on aura une exploration trop importante (temps d'exécution très élevé). Après calibrage de paramètres, cette valeur est fixée à 0.925.

2.3 Tests et résultats

Dans cette partie on présentera les résultats d'exécution de notre méthode du recuit simulé avec les paramètres défini précédemment $R = 1000, T_0 = 0.1, \alpha = 0.925$. Le tableau dans **figure 12** montre le temps d'exécution

moyen de chaque type d'instance (la moyenne d'exécution de 5 instances de même type) par la métaheuristique recuit simulé.

| | | Temps d'exécution moyen |
|-------------------|-----|-------------------------|
| Classe | N | |
| Classe 01 | 50 | 2.4369 |
| | 100 | 10.5735 |
| | 200 | 42.7212 |
| | 500 | 356.9223 |
| Classe 02 | 50 | 0.7101 |
| | 100 | 3.0479 |
| | 200 | 12.2010 |
| | 500 | 154.0767 |
| Classe 03 HARD | 200 | 28.3268 |

FIGURE 12 – tableau des temps d'exécution moyens du recuit simulé

L'histogramme *figure 17* présente les temps d'exécutions du recuit simulé en fonction des instances.



FIGURE 13 – histogramme des temps d'exécution du recuit simulé

La *figure 14* compare le nombre de boîtes obtenu par le recuit simulé

avec la solution optimale

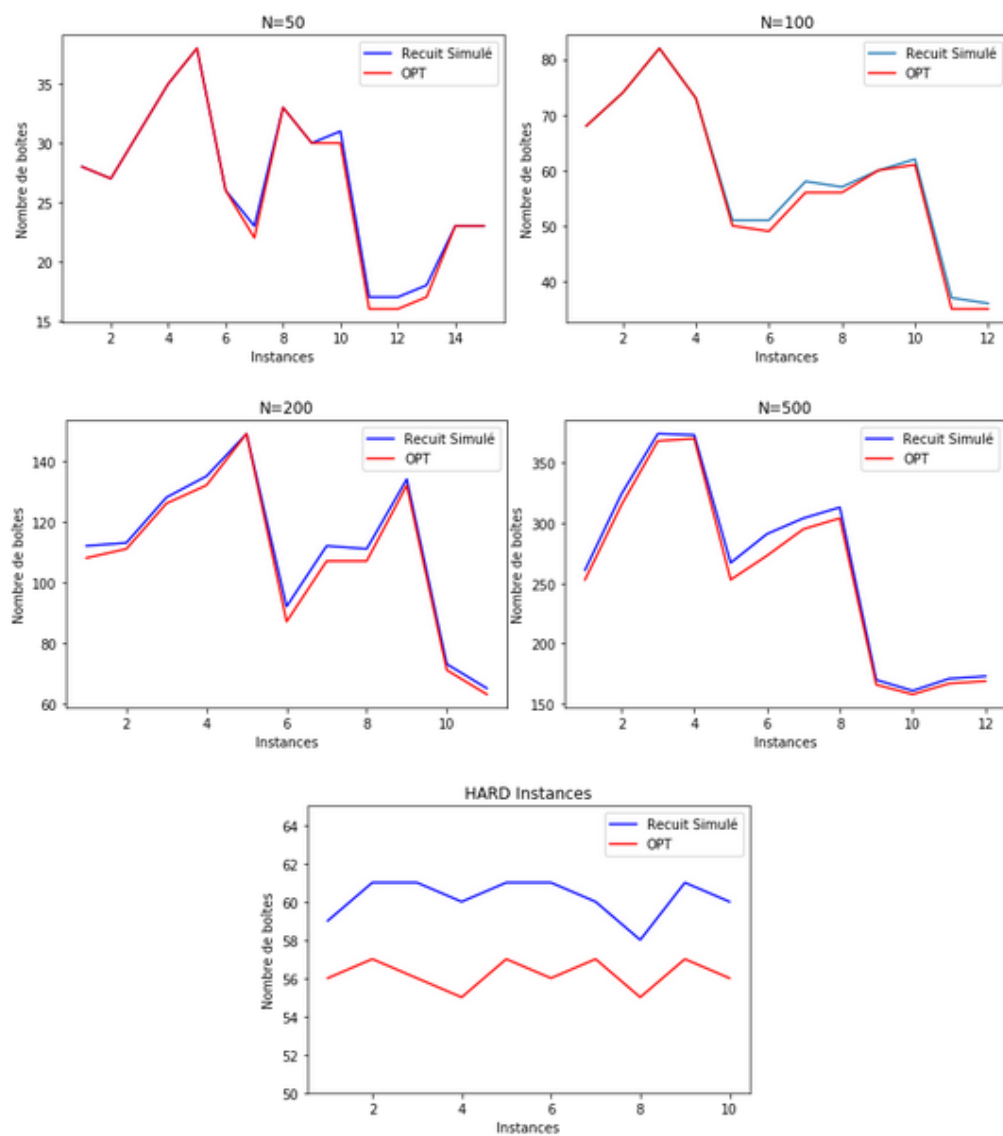


FIGURE 14 – le nombre de boîtes obtenues par le recuit simulé par rapport à la solution optimale

Dans le tableau et le graphe *figure 18* on donne la qualité de solution obtenue par le recuit simulé en utilisant la métrique du worse case ratio.

| Classe | N | Ratio |
|---------------------|-----|--------|
| | | RS |
| Classe 01 | 50 | 1.0625 |
| | 100 | 1.0571 |
| | 200 | 1.0574 |
| | 500 | 1.0553 |
| Classe 02 | 50 | 1.0 |
| | 100 | 1.0714 |
| | 200 | 1.034 |
| | 500 | 1.0 |
| Classe 03 (HARD) | 200 | 01.09 |

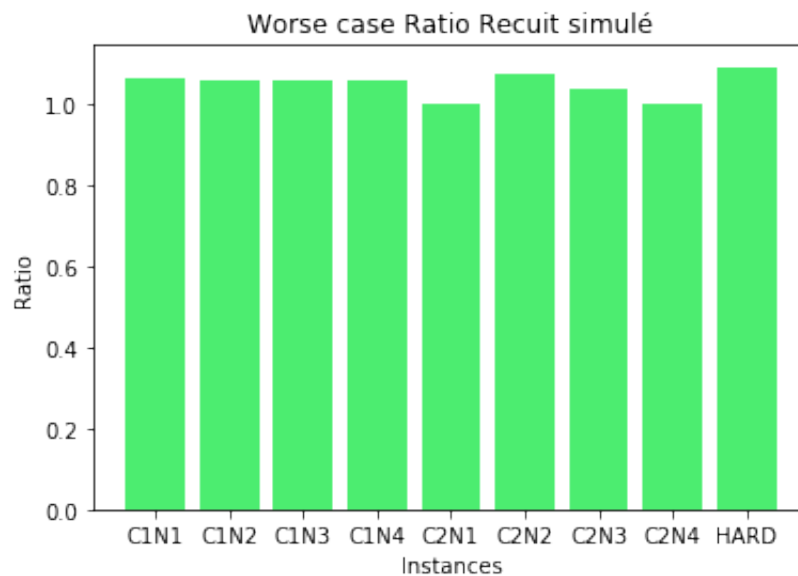


FIGURE 15 – worse case ratio du recuit simulé

2.3.1 Analyse et interprétation des résultats

- Le temps d'exécution du recuit simulé est très élevé, même avec les plus petites instances.
- Ce temps d'exécution augmente avec la taille du problème et varie de $0.7s$ pour $N=50$ (classe 2) , jusqu'à $357s$ pour $N=500$ (classe1),[**figure 12** , **figure 17**].
- le temps d'exécution correspond à l'exécution 10 fois du Recuit simulé, ceci était nécessaire à cause de la nature stochastique de l'algorithme, la

solution initiale générée aléatoirement et la variable aléatoire u utilisée pour accepter la solution non améliorante, influent sur les résultats obtenus.

- En terme de qualité de solution, le recuit simulé est capable de délivrer une bonne qualité de résultats pour le Scholl Benchmark, il arrive souvent à trouver la solution optimale pour les 2 premières classes du benchmark, et un peu moins pour la 3ème classe. [*figure 14*]
- Le Ratio obtenu par le recuit simulé est proche de 1 dans la plupart des cas, sauf dans le cas $N=4$ de la 1ere classe (C1N4), où on remarque une petite augmentation du ratio.
- Cela signifie qu'on a pas une grande déviation par rapport à la solution optimale, donc d'une façon générale, le recuit simulé fournit une bonne qualité de résultats même dans le pire des cas (les instances les plus difficiles), avec une qualité un peu moins bonne dans les instances C1N4. On justifie cette dégradation par la taille de ces instances ($N=500$ objets), le temps limité accordé au recuit simulé n'est pas suffisant pour lui permettre de bien explorer l'espace de recherche.

3 Whale Optimization Algorithm (WOA)

Le Whale Optimization Algorithm est une nouvelle métaheuristique introduite en 2016 par Mirjalili et Lewis basée sur l'intelligence en essaim. Cet algorithme est inspiré d'une stratégie d'alimentation des baleines à bosse connue sous le nom de *L'alimentation au filet à bulles*. Une tactique qui leur permet d'attraper le plus de poissons possibles en un seul coup. Après avoir détecté ses proies, la baleine libère des bulles en nageant dans un mouvement spirale vers la surface pour encercler la proie pour la capturer. Les bulles libérées peuvent prendre 2 formes : une forme de cercles rétrécissants ou une forme spirale *figure 16*. Dans cet algorithme, La recherche des proies représente l'exploration de l'espace de recherche et La libération des bulles représente l'exploitation.

3.1 Représentation mathématique

3.1.1 Encerclement avec bulles en cercles rétrécissants

Soient :

- $x^*(t)$ la meilleure solution courante.
- t le numéro de l'itération courante.

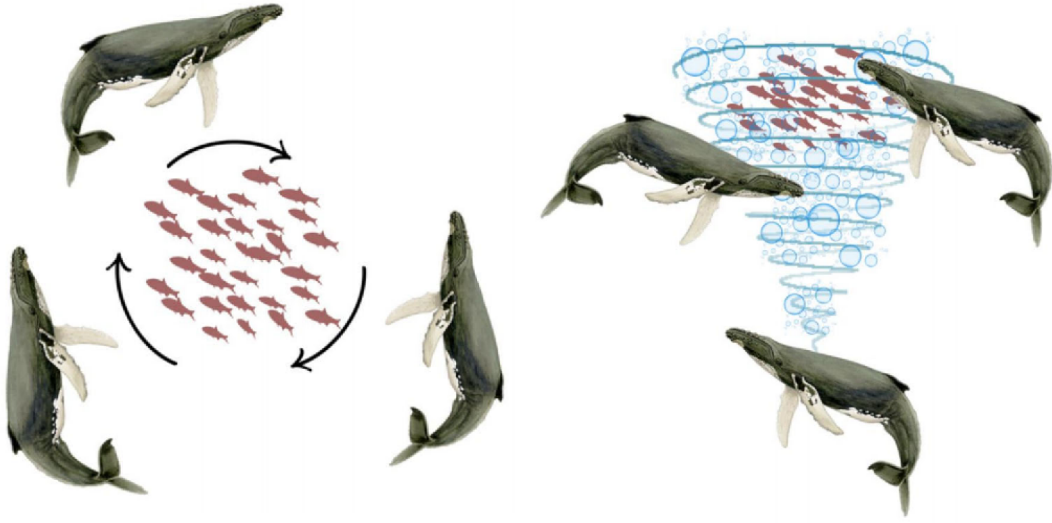


FIGURE 16 – Libération des bulles en cercles rétrécissants (à gauche), libération des bulles en spirale (à droite).

- \vec{D} indique la distance du i ème baleine (i ème solution candidate) à la proie (la meilleure solution actuelle).
- $x(t)$ une solution de la population à l'itération t , et $x(t+1)$ le résultat de sa mise à jour.
- $x_r(t)$ une solution choisie aléatoirement de la population courante.
- A et C des coefficients calculés par les formules suivantes :

$$A = 2ar - a$$

$$C = 2r$$

Avec r un nombre aléatoire appartenant à $[0, 1]$.

et a un nombre décrémenté linéairement à chaque itération de 2 à 0, de la façon suivante : $a = a_{init} - a_{init} * i / max_iter$ avec i numéro de l'itération courante, max_iter le nombre maximal des itération et a_{init} la valeur initiale de a .

Le processus d'encerclement de la proie peut être représenté par les équations suivantes :

$$\vec{D} = |Cx^*(t) - x(t)|$$

Si $|A| < 1$:

$$x(t+1) = x^*(t) - A\vec{D} \quad (3)$$

Sinon :

$$x(t+1) = x_r(t) - A\vec{D} \quad (4)$$

Le comportement de l'encerclement avec bulles en cercle rétrécissant est obtenu en diminuant la valeur de a de a_{init} à 0 au cours des itérations. La variation de A peut être utilisée pour rechercher des proies, c'est-à-dire la phase d'exploration. Par conséquent, A peut être utilisée avec des valeurs aléatoires supérieures à 1 ou inférieures à -1 pour forcer les solutions à s'éloigner de la solutions de référence (la meilleure solution $|A| < 1$ ou une solution aléatoire sinon).

3.1.2 Encerclement avec bulles sous forme spirale

Il est modélisé par les équations suivantes :

$$\vec{D} = |x^*(t) - x(t)| \quad (5)$$

$$x(t+1) = \vec{D}e^{bl} \cos(2\pi l) + x^*(t) \quad (6)$$

Où l est un nombre aléatoire appartenant à $[-1, 1]$ Et b une constante qui définit la forme de la spirale

Ces deux types définissent deux mécanismes d'exploration de l'espace de recherche, ce qui permet une meilleure diversification de l'espace de recherche. Dans chaque itération du WOA, un de ces deux mécanismes est choisi avec une probabilité p égale à 50% pour mettre à jour la population des solutions candidates comme suit :

$$x(t+1) = \begin{cases} x^*(t) - A\vec{D} & r < p \\ \vec{D}e^{bl} \cos(2\pi l) + x^*(t) & r \geq p \end{cases}$$

avec $x^*(t)$ est la meilleure solution actuelle au temps t , p est égale à 0,5 et r est un nombre aléatoire entre $[0, 1]$

3.2 Ingrédients du WOA

- Population initiale des solutions.
- Fonction d'évaluation qui permet de choisir la meilleure solution $x^*(t)$.
- Un mécanisme d'évolution :
 - Encerclement avec bulles en cercle rétrécissant.
 - Encerclement avec bulles sous forme de spirale.
- Critère d'arrêt du WOA : nombre maximal d'itérations.

3.3 Paramètres du WOA

- La taille de la population des solutions candidates à évaluer dans chaque itération.
- La constante b qui définit la forme de la spirale.
- Le nombre maximal d'itérations : max_iter .
- Le nombre a qui détermine le degré de diversification (exploration).

3.4 Application de l'algorithme au problème du bin packing :

3.4.1 Discrétisation de l'espace de recherche

Cet algorithme a été proposé pour la résolution de problèmes à espace de recherche continu. Afin de l'adapter à notre problème discret nous allons utiliser une méthode appelée LOV qui permet de passer d'une solution continue à une solution discrète :

Algorithm 10 Discrétisation de l'espace de recherche par LOV

Résultat en sortie : Solution discrète $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtenue à partir de la solution continue $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$

Ordonner les valeurs du vecteur de \tilde{X} par ordre décroissant

L'indice d'ordre de chaque valeur est stocké dans un vecteur $\theta = \{\theta_i = \text{ordre de l'élément } \tilde{x}_i\}$

3.4.2 Représentation d'une solution

Une solution est exprimée par un vecteur $x(t) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ représentant la distribution des articles dans les boîtes au moment t , avec n le nombre d'articles et a_i est un article d'ordre i . Les articles sont ordonnés selon les boîtes dans lesquelles ils sont rangés, i.e. l'article a_1 est rangé dans la première boîte, s'il y'en a de l'espace dans cette boîte alors l'article a_2 est y rangé, sinon a_2 est rangé dans la deuxième boîte...ainsi de suite. Une solution $x(t)$ appartient au domaine de recherche tant qu'elle respecte les contraintes du problème : un objet ne peut pas être rangé dans plus d'une boîte, donc pas de doublons dans $x(t)$, l'autre contrainte concernant le respect de la capacité d'une boîte est vérifiée trivialement par définition du vecteur $x(t)$.

3.4.3 La fonction objective

Afin de pouvoir évaluer les solutions, Nous avons opté pour la fonction suivante proposée par *Hyde et al* [add ref here], au lieu du nombre de boîtes utilisées, parce que avec cette dernière pour plusieurs solutions on peut avoir la même évaluation ce qui peut engendrer la stagnation de l'algorithme.

$$F_{min} = 1 - \frac{\sum_1^n (occup_i/c)^k}{n}$$

Avec :

- n nombre de boites utilisées.
- $ocup_i$ total des poids des objets rangés dans l'ième.
- c capacité des boites.

3.5 Pseudocode

Algorithm 11 Whale Optimization Algorithm

```
Initialiser la population de baleines aléatoirement (l'ensemble initial des
solutions candidates) :  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )
Évaluer les solutions de la population initiale
 $X^*$  = la meilleure solution actuelle
while  $t < max\_iter$  do
  for solution  $\in$  population do
    Mettre à jour  $a$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $l$  et  $r$ 
    if  $r < 0,5$  then
      if  $|A| < 1$  then
        Mettre à jour la solution par Eq.(1)
      else
        Sélectionnez une solution aléatoire  $X_r$ 
        Mettre à jour la solution par Eq.(2)
      end if
    else
      Mettre à jour la solution par l'Eq.(3)
    end if
  end for
  Vérifier si une solution dans la population dépasse l'espace de recherche
  et la modifier
  Appliquer la discretisation par LOV
  Évaluer la nouvelle population
  Mettre à jour  $X^*$ 
   $t = t + 1$ 
end while
```

3.6 Test et résultats

Dans cette partie nous allons tester les performances de la métaheuristique WOA sur les instances du benchmark Scholl. Ensuite nous allons effectuer une comparaison des résultats obtenus avec les résultats optimaux. Nous utiliserons pour chacune des trois classes du benchmark Scholl deux configurations de paramètres ; la première configuration est obtenue par tâtonnement après plusieurs essais manuels, la deuxième par calibrage automatique des paramètres utilisant le package *irace* qui implémente l'algorithme I/F-Race (voir section **Calibrage Automatique des Paramètres**). Pour pouvoir étudier les performances de WOA, notre étude se comportera 2 axes :

- Temps d'exécution.
- Qualité de la solution (ratio et comparaisons avec les solutions optimales)

3.6.1 Rappel des paramètres de WOA

- La taille de la population : nb_whales .
- Le nombre maximal d'itérations : max_iter .
- La constante de l'encerclement spirale b .
- La constante a qui détermine le degré d'exploration de l'espace de recherche.

3.6.2 Temps d'exécution

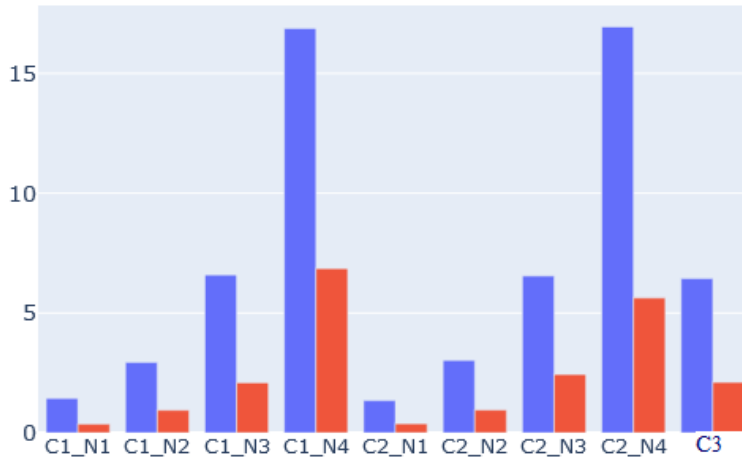


FIGURE 17 – Histogramme des temps d'exécutions moyens (en s) pour les deux configurations pour tout le benchmark Scholl. Configuration 1 en bleu. Configuration 2 en rouge.

Configurations de paramètres utilisées dans le graphe **figure 17** :

1. Configuration 1 (obtenue manuellement) : $nb_whales = 30, max_iter = 50, b = 1.5, a = 4$.
2. Configuration 2 (obtenue par calibrage automatique par IRACE) : $nb_whales = 30, max_iter = 117, b = 8.96, a = 10$.

3.6.3 Qualité de solution

3.6.3.1 Ratio : Configurations de paramètres utilisées dans le graphe **figure 18** :

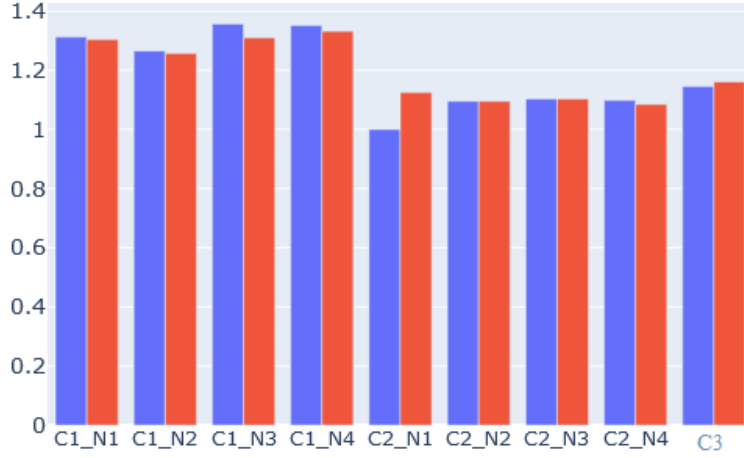


FIGURE 18 – Histogramme des ratios des deux configurations pour tout le benchmark Scholl. Configuration 1 en bleu. Configuration 2 en rouge.

1. Configuration 1 (obtenue manuellement) : $nb_whales = 30, max_iter = 50, b = 1.5, a = 4$.
2. Configuration 2 (obtenue par calibrage automatique par IRACE) : $nb_whales = 28, max_iter = 271, b = 7.64, a = 20$.

3.6.3.2 Comparaison avec la solution optimale : Configuration de paramètres utilisée dans les graphes **figure 19** (obtenue par calibrage automatique par IRACE) : $nb_whales = 28, max_iter = 271, b = 7.64, a = 20$.

3.6.4 Analyses des résultats

- WOA permet d'obtenir un ratio inférieur à 1.4 pour les benchmark Scholl, et un ratio de 1 pour les instances de la classe 2 de taille N1.
- Parmi les trois classes WOA est le plus performant dans le cas des instances difficiles (classe 3 : C3) et la classe 2.
- Le calibrage automatique permet généralement d'améliorer la qualité de la solution très légèrement sauf pour le cas des instances de la classe C2 de tailles N1 et N4 où la configuration manuelle donne de meilleurs résultats.
- Le calibrage automatique permet de réduire le temps d'exécution significativement surtout pour les instances de grande taille (N4) et les instances de la classe 3 (instances difficiles).
- Avec une configuration optimale des paramètres le temps de résolution des instances les plus difficiles et/ou volumineuses ne dépasse pas 8s.

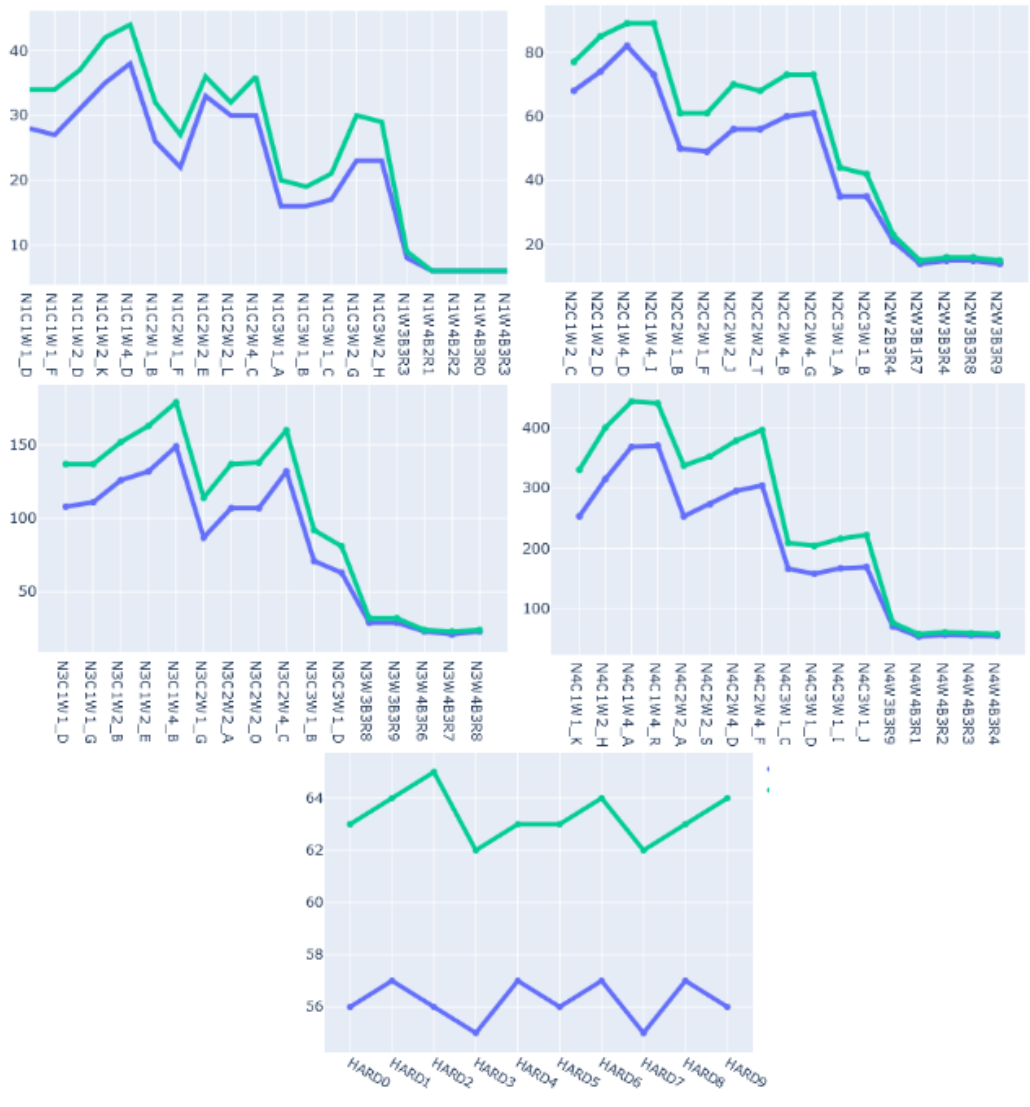


FIGURE 19 – le nombre de boîtes obtenu par WOA (en vert) par rapport à la solution optimale (en bleu) pour les instances de la classe 1 et 2 de taille respectivement de haut en bas, de gauche à droite : N1, N2, N3, N4 et les instances de la classe 3.

4 Improved Lévy Whale Optimization Algorithm (ILWOA)

Cette version de l'algorithme utilise une fonction à dynamique chaotique et la distribution vol de Lévy afin de garantir une convergence rapide. Une phase de mutation est aussi rajoutée à la fin de chaque itération

4.1 Fonction à dynamique chaotique

Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. On suppose que la dynamique associée est chaotique. Alors :

1. L'ensemble des points périodiques de f est partout dense dans I
2. f est sensible aux conditions initiales, ceci signifie que s'il y'a un petit changement dans la condition initiale x_0 , le changement correspondant de $x_t = f_t(x_0)$ croît avec la croissance de t

Ce sont des fonctions qui permettent d'avoir une suite de nombres aléatoires qui dépend d'une condition initiale. Il existe plusieurs types de fonctions chaotiques : fonction logistique, fonction de tchebychev. Après plusieurs tests, il a été remarqué qu'avec les fonctions logistiques nous obtenons une convergence plus rapide de la fonction objective. Le minimum de la fonction objective a été atteint en 5 itérations comme le montre le graphe (add refrence here) Du graphe, on peut voir qu'avec la fonction logistique la fonction objective

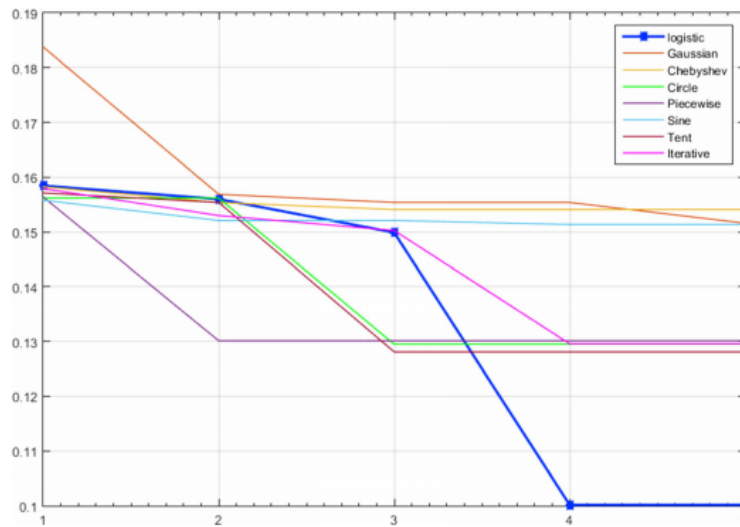


FIGURE 20 – convergence fonctions chaotiques

atteint le minimum à partir de la 5eme itération

4.1.1 Fonction logistique

La fonction logistique est définie par la formule suivante :

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), x \in [0, 1], 0 < a \leq 4$$

où a est une constante caractéristique de la fonction logistique que nous avons fixé à la valeur 1 après plusieurs simulations. La fonction logistique est utilisée dans l'algorithme pour générer la valeur p .

4.2 La distribution vol de Lévy

Le vol de Lévy est un modèle mathématique caractérisé par une moyenne et une variance infinies ce qui rend le mouvement plus lent permettant ainsi une meilleure exploration de l'espace de recherche (REFERENCE). Dans ILWOA, la variable C est remplacé par un pas aléatoire de la marche aléatoire Lévy donné par les formules suivantes :

$$Levy \rightsquigarrow \frac{\lambda \Gamma(\lambda) \sin(\pi\lambda/2)}{\pi} \frac{1}{s^{1+\lambda}}$$

$$s = \frac{U}{|V^{\lambda-1}|}, \quad U \rightsquigarrow N(0, \sigma_u^2), V \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\sigma_u^2 = \left[\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma((\lambda+1)/2)} \frac{\sin(\pi\lambda/2)}{2^{(\lambda-1)/2}} \right]^{1/\lambda}$$

4.3 Phase de mutation

Une phase de mutation a lieu à la fin de chaque itération. On vérifie d'abord si la solution atteinte est optimale. Dans ce cas la recherche s'arrête, sinon on applique la mutation sur cette dernière. Cette phase est composée de 3 opérations exécutées séquentiellement comme le montre la figure **figure 21** :

- Permutation : deux items de la solution sont choisis aléatoirement pour effectuer une permutation entre eux
- Déplacement : Un sous ensemble d'items choisi aléatoirement est déplacé vers une position qui est également choisie aléatoirement
- Inversion : On applique une inversion sur un sous ensemble d'items

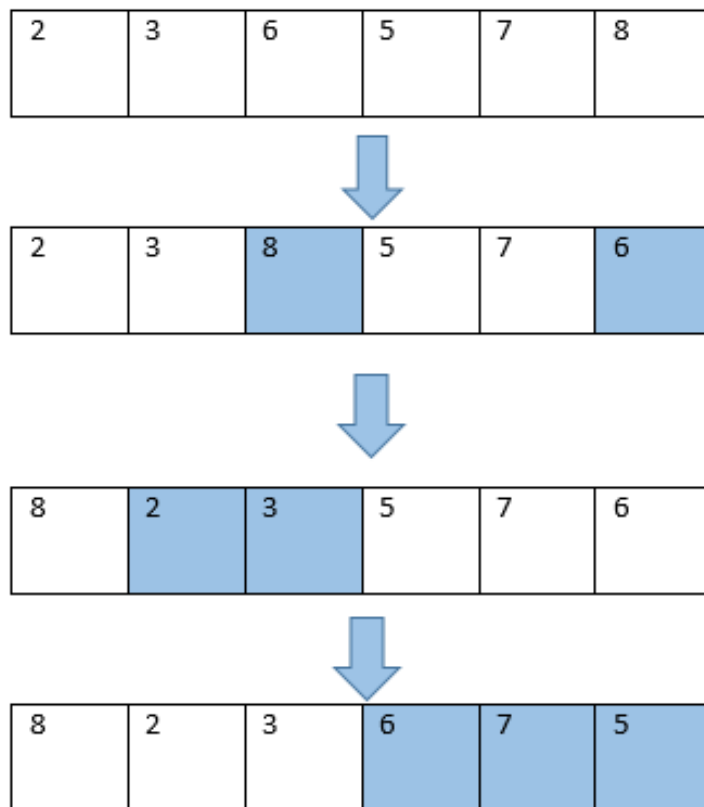


FIGURE 21 – Phase de mutation

4.4 Pseudocode

Algorithm 12 Improved Whale Optimization Algorithm

```
Initialiser la population de baleines (l'ensemble initial des solutions candi-
dates) :  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )
Évaluer les solutions de la population initiale
 $X^*$  = la meilleure solution actuelle
while  $t < max\_iter$  do
    for solution  $\in$  population do
        Mettre à jour  $a$ ,  $A$ ,  $C$  avec le vol de levy,  $l$  et  $p$  avec la fonction
        logistique
        if  $r < 0,5$  then
            if  $|A| < 1$  then
                Mettre à jour la solution par Eq.(1)
            else
                Sélectionner une solution aléatoire  $X_r$ 
                Mettre à jour la solution par Eq.(2)
            end if
        else
            Mettre à jour la solution par l'Eq.(3)
        end if
    end for
    Vérifier si une solution dans la population dépasse l'espace de recherche
    et la modifier
    Appliquer la discretisation par LOV
    Évaluer la nouvelle solution
    Mettre à jour  $X^*$  s'il existe une meilleure solution Sinon lancer la phase
    de mutation
    Evaluer la nouvelle solution, m à j de la meilleure solution
     $t = t + 1$ 
end while
```

4.5 Test et résultats

Pour montrer les performances de cet algorithme nous avons effectué une série de Test sur des instances du Benchmark «Scholl » composé de trois classes d'une difficulté qui varie d'une classe à une autre. En ce qui concerne les paramètres de l'algorithme, nous avons utilisé deux méthodes de calibrage : Un calibrage manuel et un calibrage automatique avec IRace ; Le tableau dans la *figure 1* indique les valeurs obtenues par chacune des deux mé-

thodes.

TABLE 1 – Configuration paramétrique de l'algorithme

| | a | b | beta | max_iter | nb_whales |
|-----------------------|---|------|------|----------------------------|-----------|
| Calibrage manuel | 8 | 0.99 | 1.5 | 391 | 13 |
| Calibrage automatique | 4 | 1.5 | 1 | 30(Hard),10(Classe 1 et 2) | 10 |

Nous allons dans l'analyse qui suit :

- comparer entre les résultats obtenus par les deux méthodes de calibrage ainsi montrer l'influence du choix des paramètres sur la performance de l'algorithme.
- Analyser les performances de l'algorithme et le comparer à l'algorithme WOA exécuté avec la configuration optimale suivante : $nb_whales = 28$, $max_iter = 271$, $b = 7.64$, $a = 20$.

4.5.1 Comparaison entre les résultats obtenus par calibrage automatique et les résultats obtenus par calibrage manuel :

Afin d'effectuer cela, nous avons exécuté l'algorithme avec les paramètres obtenus par calibrage automatique et les paramètres obtenus par calibrage manuel, sur les instances difficiles de la classe 3. Les tableaux dans la **figure 22** montrent que le calibrage automatique améliore la qualité de la solution ainsi que le temps d'exécution

| Résultats d'exécution sur des instances de la classe 3 avec les paramètres de calibrage manuel | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Instance | HARD0 | HARD1 | HARD2 | HARD3 | HARD4 | HARD5 | HARD6 | HARD7 | HARD8 | HARD9 |
| Solution | 64 | 62 | 60 | 61 | 60 | 59 | 60 | 59 | 60 | 60 |
| Temps d'exécution | 25.88 | 25.40 | 24.63 | 25.98 | 24.53 | 25.50 | 25.67 | 25.45 | 24.01 | 25.87 |

| Résultats d'exécution sur des instances de la classe 3 avec les paramètres obtenus par calibrage automatique | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Instance | HARD0 | HARD1 | HARD2 | HARD3 | HARD4 | HARD5 | HARD6 | HARD7 | HARD8 | HARD9 |
| Solution | 59 | 60 | 60 | 59 | 60 | 59 | 59 | 58 | 59 | 59 |
| Temps d'exécution | 5.68 | 7.48 | 5.60 | 4.93 | 4.54 | 4.58 | 4.41 | 4.34 | 4.34 | 4.46 |

FIGURE 22 – Résultats d'exécution des instances de la classe 3 avec calibrage manuel vs. calibrage automatique.

4.5.2 Analyse des performances de l'algorithme :

4.5.2.1 Analyse du temps d'exécution : A partir du graphes **figure 23**, on peut déduire que :

- Le temps d'exécution de ILWOA varie de 1 à quelques dizaines de secondes pour les grandes instances
- L'algorithme ILWOA est plus lent que WOA , on justifie ceci par le fait qu'en plus des instructions exécutées par le WOA , l'ILWOA comporte une phase de mutation et une initialisation par une heuristique

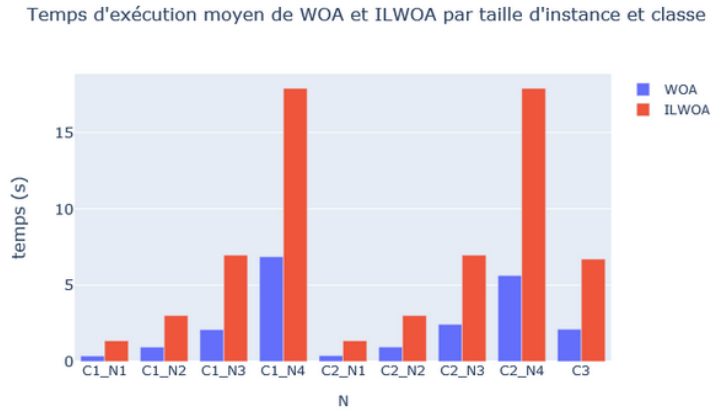


FIGURE 23 – temps d'exécution (en s) de ILWOA et WOA

4.5.2.2 Analyse de la qualité de solution : La qualité de solution a été mesurée par le ration dont on a cité la formule précédemment. A partir du graphes ci-dessous , on peut déduire que :

- Le Ratio obtenu par l'ILWOA est proche de 1 pour toutes les instances même pour les instance de la classe 3 ceci signifie qu'il donne de bons résultats quelque soit la difficulté de l'instance
- la solution obtenue avec l'algorithme ILWOA est très proche de la solution optimale voire même égale pour des instances des classes 1 et 2
- ILWOA améliore la qualité de solution par rapport à l'algorithme woa pour les instances des 3 classes confondues

4.5.3 Interprétation

- L'Algorithme ILWOA permet d'obtenir une bonne qualité de solution en un temps raisonnable
- Le caractère stochastique de l'algorithme WOA permet de mieux explorer l'espace de recherche, l'utilisation des fonctions logistiques et de la distribution du vol de lévy ont amélioré cela

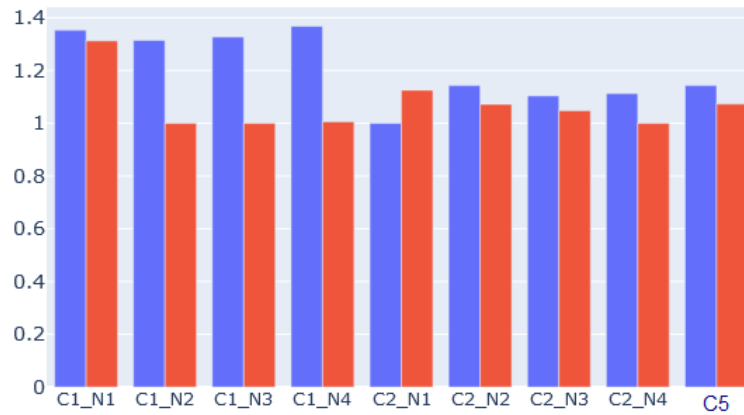


FIGURE 24 – ratio de ILWOA et WOA

- En analysant le nombre de search agents et d'itérations ainsi que la solution obtenue, On peut conclure que l'ajout d'une phase de mutation a permis d'améliorer la rapidité de convergence de l'algorithme
- Les améliorations effectuées ont permis d'augmenter la performance de l'algorithme
- La performance de l'algorithme dépend fortement des valeurs de ses paramètres d'où la nécessité du calibrage qui permet de trouver la meilleure configuration pour l'algorithme
- La valeur des paramètres peut dépendre de la nature de l'instance
- Le calibrage automatique est important du fait que ça permet de nous épargner une tâche tant fastidieuse, tout en assurant une meilleure qualité du résultat

5 L'Algorithme Génétique

Un algorithme génétique est une métaheuristique évolutionnaire à l'origine proposée par Holland [1]. Depuis lors, il est devenu une méthode puissante pour résoudre de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire difficiles, dont la liste peut être trouvée dans de nombreuses références, voir par exemple [2]. Les étapes générales de l'algorithme peuvent être décrites comme suit :

5.1 Pseudocode

Algorithm 13 Algorithme génétique

```
Générer une population initiale
while le critère d'arrêt n'est pas encore rencontré do
  Choisir des paires pour la reproduction
  Effectuer des croisements pour générer des descendants
  Faire des fluctuations dans les nouveaux descendants (mutation)
  Evaluer l'aptitude de nouveaux descendants
  Générer une nouvelle population
end while
```

Un élément clé de l'AG est la génération d'une population dont les composants sont appelés *chromosomes*, un terme emprunté à la génétique. Un *chromosome* est en fait une représentation codée d'une solution ; dont chaque composant est appelé *gène*

5.2 Application du AG au problème du BP

On représente une solution du Bin packing comme suit :

- On a **n** articles à ranger donc on utilisera **n** boîtes au pire des cas (un objet par boîte).
- On suppose que chaque boîte est composée de **n** cellules, où chaque cellule ne peut contenir qu'un seul article.
- Chaque cellule à un numéro unique dans la solution.
- Si la cellule de l'ordre **i** de la boîte **j** est remplie par un objet, alors on aura plus le droit de ranger un objet dans toutes les cellules de l'ordre **i** des autres boîtes.
- La cellule **zero** contient le nombre de boîtes utilisées dans cette solution.

Pour décrire cette représentation, considérons l'exemple suivant. Supposons que nous ayons quatre objets ($n=4$) de poids 2 , 2 , 4 et 4 respectivement, affectés à trois boîtes ($c0=3$) comme indiqué ci-dessous :

| Contenu | Cellules | Boîtes |
|---------|----------|--------|
| 3 | C0 | / |
| 2 | C1 | 1 |
| 2 | C2 | |
| 0 | C3 | |
| 0 | C4 | |
| 0 | C5 | |
| 0 | C6 | 2 |
| 4 | C7 | |
| 0 | C8 | |
| 0 | C9 | |
| 0 | C10 | 3 |
| 0 | C11 | |
| 4 | C12 | |

Avec c0 : contient le nombre de boîtes utilisées.
Le chromosome correspondant peut être défini comme suit :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Cependant, avec cette représentation, les chromosomes ont une longueur égale à $1 + n^2$ (un entier pour chaque cellule), alors pour les grands n , nous aurons besoin d'une grande quantité de mémoire pour les stocker. Pour cela, nous utiliserons une représentation plus compacte qui utilise des chromosomes de longueur $n + 1$ au lieu de $1 + n^2$. Cette dernière consiste à garder trace que des numéros des cellules remplies (ou utilisées). Dans l'exemple ci-dessus, nous avons utilisé les cellules (c1,c2,c7,c12) et la cellule c0, nous aurions donc la séquence

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| 3 | 1 | 2 | 7 | 12 |
|---|---|---|---|----|

qui a une longueur de $n + 1$, avec $n = 4$.

Dans la première cellule, cellule 0, on stocke le nombre de boîtes utilisées qui est de 3 boîtes. Les numéros suivants indiquent les numéros de cellules dans lesquels les objets sont placés.

Récupérer la solution depuis un chromosome :

1. Le nombre de boîtes utilisées est obtenu à partir de la cellule 0.

2. Pour obtenir dans quelle boîte chaque article a été affecté, on suit les étapes suivantes :

- On pose c le numéro de la cellule et n le nombre d'articles
- On calcule : $a = c \bmod (n)$ et $b = \lfloor c/n \rfloor$ où $c = bn + a$
- Si $a=0$ (c est divisible par n), alors :
 - Le numéro de l'article est **sa position dans le chromosome** et le numéro de la boîte où il est rangé est **b**.

Sinon :

- Le numéro de l'article est **sa position dans le chromosome** et le numéro de la boîte où il est rangé est **$b + 1$** .

Dans l'exemple ci-dessus, pour la cellule 7, nous avons : $7 = 1 \times 4 + 3$, le reste est $a = 3$ et $b = 1$, donc $b + 1 = 2$, donc l'objet 3 est placé dans la boîte 2. Pour la cellule 12, nous avons : $12 = 3 \times 4 + 0$, le reste est $a = 0$, et $b = 3$, donc l'objet 4 est placé dans la boîte 3

5.2.1 Initialisation

La génération de la population initiale en :

- Changeant l'ordre des objets aléatoirement.
- Génération du chromosome avec **First Fit**

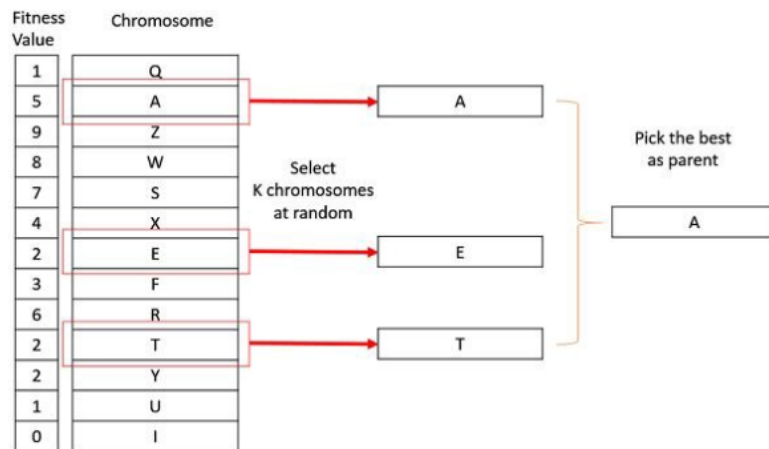
5.2.2 Selection (Choix d'une paire pour la reproduction)

C'est la phase qui consiste à choisir les individus à reproduire et ceux qui participent à la construction d'une nouvelle population. Nous avons opté pour la méthode du Tournament Selection.

5.2.3 Tournament Selection

Dans cette approche, un "tournoi, k " est organisé entre k chromosomes (solutions) choisis au hasard dans la population et celui avec la meilleure forme physique (Fitness Value) est sélectionné comme gagnant et sera autorisé à se reproduire.

Supposons que $k = 3$:

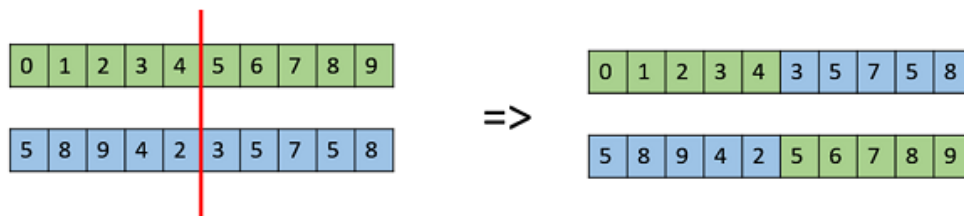


La pression de sélection (Une *pression de sélection* est une contrainte environnementale qui va **pousser** une espèce à évoluer dans une direction donnée.) peut être facilement ajustée en changeant la taille du tournoi (un k plus élevé augmente la pression de sélection). La sélection du tournoi est indépendante de la fonction Fitness. Parmi ces avantages, on cite la diminution le temps de calcul, et son fonctionnement sur les architectures parallèles.

5.2.4 Croisement

L'opérateur de croisement est analogue à la reproduction et au croisement biologique. Dans ce cas, plus d'un parent est sélectionné et un ou plusieurs descendants sont produits en utilisant le matériel génétique des parents. Le crossover est généralement appliqué dans une AG à forte probabilité p_c . L'opérateur choisi pour cet algorithme est le 'One Point Crossover' ou 'le croisement à un point'. Dans ce croisement, un point de croisement aléatoire est sélectionné et les queues de ses deux parents sont échangées pour obtenir de nouveaux descendants, ce qui revient à diviser l'ensemble des boîtes en deux fragments et échanger les objets de ces derniers.

Par exemple dans la figure suivante, nous avons le point de croisement = 5 :

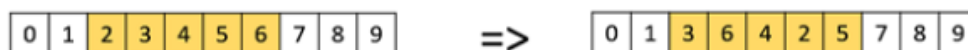


5.2.5 Mutation

La mutation peut être définie comme un petit ajustement aléatoire dans le chromosome, pour obtenir une nouvelle solution. Il est utilisé pour maintenir et introduire la diversité dans la population génétique et est généralement appliqué avec une faible probabilité pm . Si la probabilité est très élevée, l'AG se réduit à une recherche aléatoire.

La mutation est la partie de l'AG qui est liée à «l'exploration» de l'espace de recherche. Il a été observé que la mutation est essentielle à la convergence de l'AG alors que le croisement ne l'est pas.

L'opérateur de mutation choisi pour cette algorithme est : “**scramble mutation**” ou “**la mutation de brouillage**”, qui, à partir du chromosome entier, choisit aléatoirement un sous-ensemble de gènes dont le cardinal est un paramètre en entrée de la fonction, et ses valeurs sont brouillées ou mélangées au hasard.



5.2.6 Evaluation

Le choix du chromosome ayant la plus petite valeur de la cellule 0, c'est à dire le plus petit nombre de boîtes après avoir vérifié la validité de la solution (chromosome) i.e si le chromosome constitue réellement une solution acceptable.

5.2.7 Fitness et validation d'un chromosome

Cette fonction nous permet de vérifier si et combien un chromosome donné est “bon” ou “fit” à notre problème.

Pour cela il faut d'abord vérifier la validité de la solution : d'un côté vérifier si tous les articles ont effectivement été rangés dans des boîtes, et de l'autre, vérifier si le total des poids des articles dans chaque boîte est effectivement inférieur ou égal à la capacité d'une boîte.

Après avoir effectué ces vérifications on pourra prendre comme valeur de “*fitness*” du chromosome, le nombre de boîtes utilisées, stocké dans la 1ère cellule du chromosome.

5.2.8 Critère d'arrêt

L'algorithme s'arrête après un nombre d'itérations prédéfini, donné en paramètre.

L'Algorithme AG sera à son tour exécuté plusieurs fois, selon un paramètre en entrée (on a opté pour 10 fois), et à la fin la solution ayant le plus petit nombre de boîtes utilisées sera prise comme solution de l'instance.

5.3 Tests et Résultats

Après avoir finalisé notre code, on a commencé la phase des tests qui a été divisée en deux parties :

1. La partie des tests préliminaires.
2. La partie des tests après le calibrage des paramètres.

On a utilisé pour nos tests comme instances du problème BinPacking, comme pour les méthodes précédentes (Exactes et Heuristiques), les instances du benchmark Scholl. Les paramètres sur lesquels on a joué, sont :

- **nbrGen** : le nombre de populations générées.
- **k** : le paramètre de l'algorithme de sélection "*le k-tournament*"
- **popSize** : la taille d'une population

La probabilité de croisement a été fixée à 0.85, et la probabilité de mutation a été fixée à son tour à 0.1.

5.3.1 Les tests préliminaires

Dans cette partie, on a voulu tester les performances de notre programme , en essayant plusieurs combinaisons des paramètres :

- **nbrGen** : on a essayé 4, 50, 100, 200 et puis 500 qui lui, ne donnait pas de meilleurs résultats que ceux obtenus avec 200 itérations.
- **k** : on a essayé 4 et 25.
- **popSize** : on a essayé avec une population de 4 chromosomes, 8, et 10.

Au final, notre choix s'est porté sur le triplet : (**nbrGen**=200, **k**=25, **popSize**=10) car ils donnaient d'assez bons résultats.

5.3.2 Les tests après calibrage des paramètres

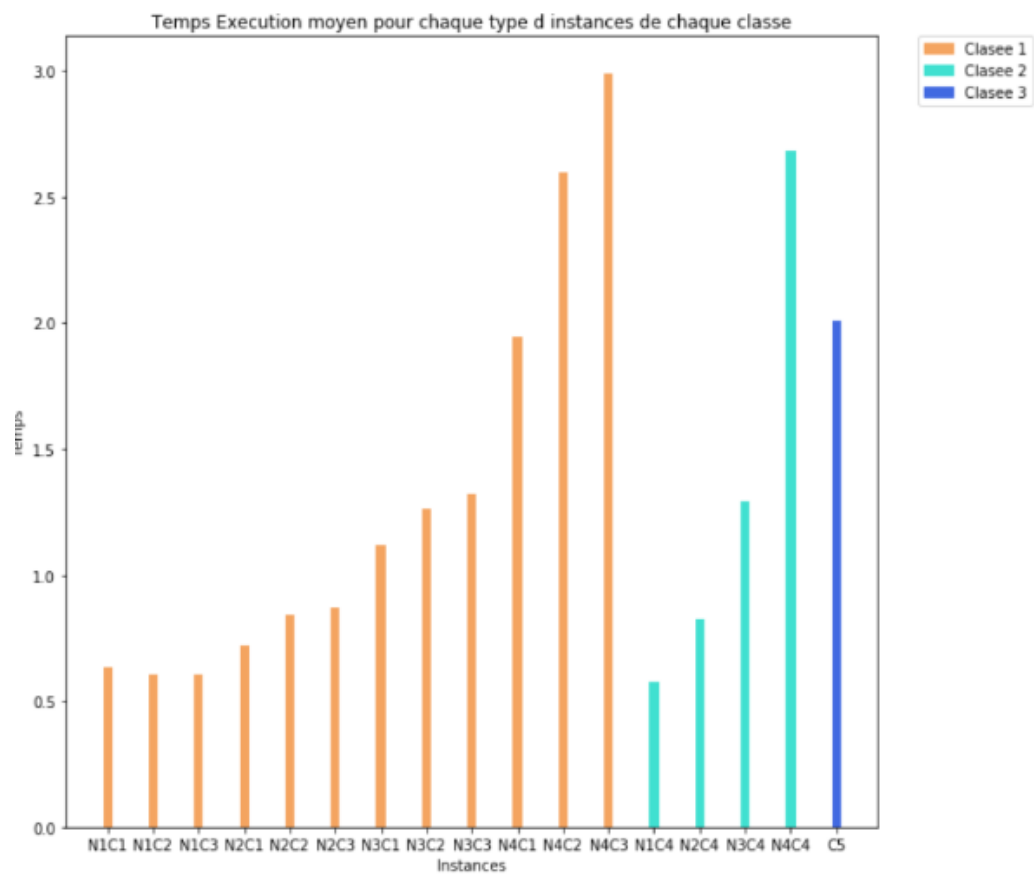
Pour pouvoir confirmer notre choix de paramètres on a vu nécessaire d'utiliser un outil de calibrage, on a utilisé l'outil **IRACE**.

Après avoir exécuté le code avec **IRACE**, on a obtenu cette combinaison des paramètres (**nbrGen**=200,**k**=25,**popSize**=10) en fixant , **probaCroisement**=0.85 et **probaMutation**=0.1, et qui est, en effet, la combinaison qui donne les meilleurs résultats dans le cas de notre programme. Ceci confirme nos résultats pour le choix des paramètres trouvés pendant les tests préliminaires.

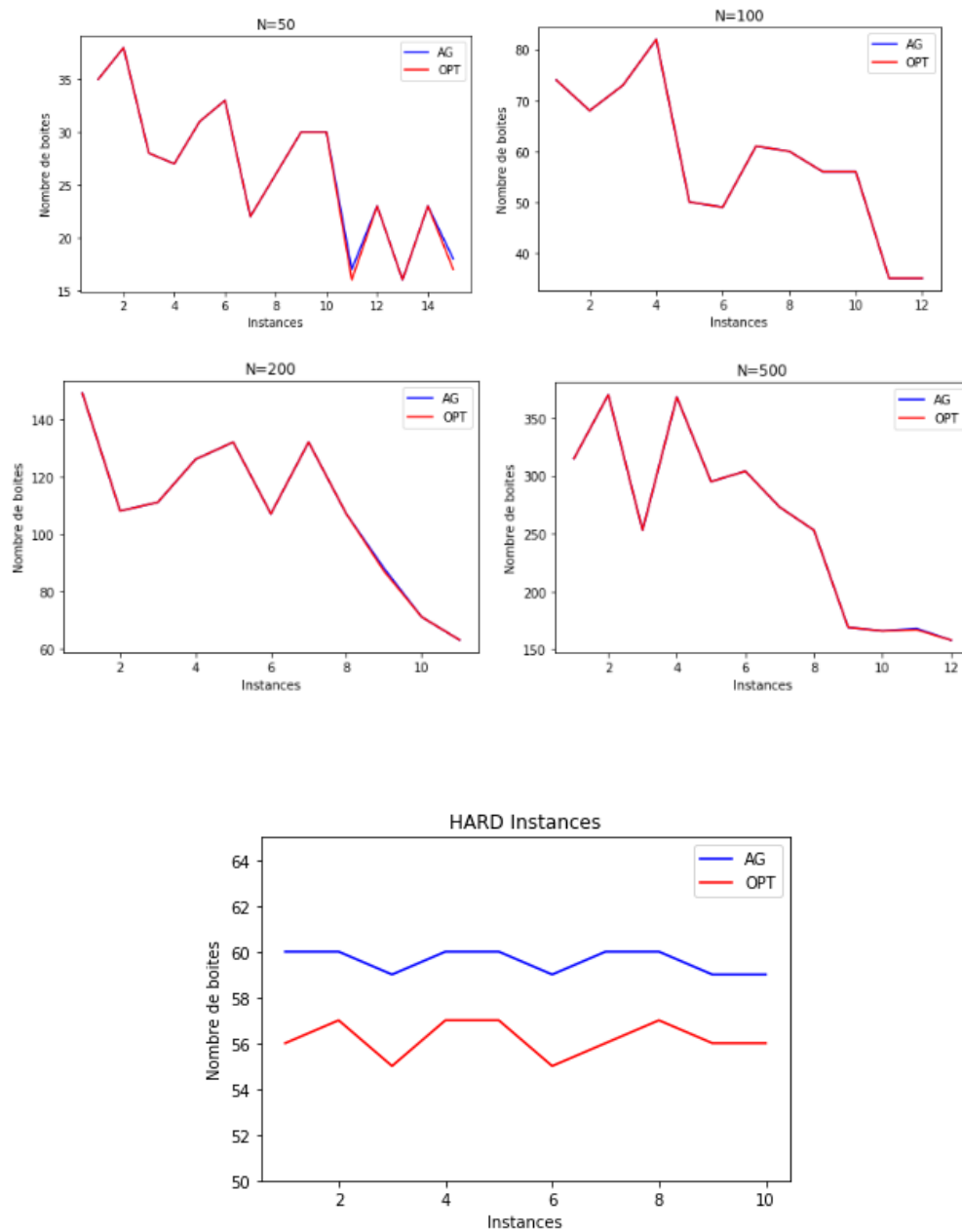
Dans ce qui suit on présentera les résultats d'exécution de notre algorithme génétique en prenant comme paramètres ceux trouvés par l'outil **IRACE** (**nbrGen**=200,**k**=25,**popSize**=10) avec **probaCroisement**=0.85 et **probaMutation**=0.1

Voici les résultats des exécutions, pour chaque classe :

Graphe 01 : Graphe représentant le temps d'exécution moyen de chaque type d'instance (la moyenne d'exécution de 5 instances de même type) des 3 classes de Scholl



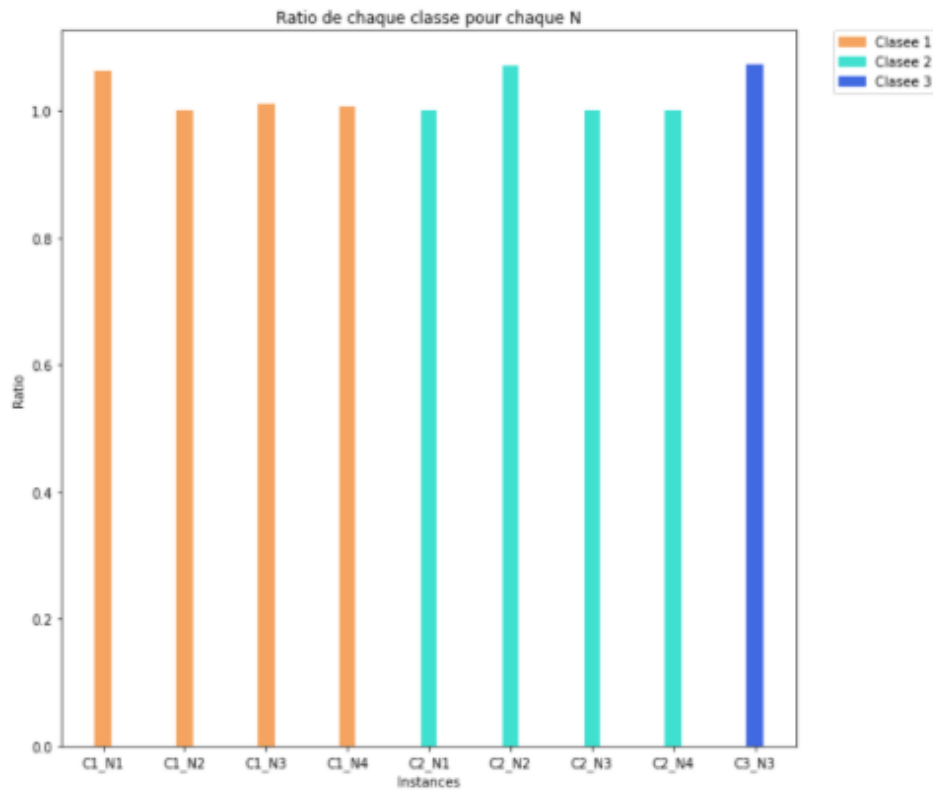
Graphe 02 : Les graphes suivants montrent la différence entre le nombre de boîtes utilisées par AG et la valeur optimale OPT



Voici les ratio obtenus par famille d'instances :

| Instances | Ratio AG |
|-----------|----------|
| C1_N1 | 1.0625 |
| C1_N2 | 1.0 |
| C1_N3 | 1.01149 |
| C1_N4 | 1.00598 |
| C2_N1 | 1.0 |
| C2_N2 | 1.07142 |
| C2_N3 | 1.0 |
| C2_N4 | 1.0 |
| C3_N3 | 1.07272 |

Grphe 03 : Et voici le graphe des ratio pour chaque nombre d'objets N des instances



Analyse et Interprétation des résultats :

- Le temps d'exécution correspond à dix exécutions du AG, ceci était nécessaire vu la nature stochastique de l'algorithme, la solution initiale générée aléatoirement (le trie aléatoire de la liste des objets avant d'effectuer FF) et les facteurs liés aux méthodes de croisement et de mutation, influent sur les résultats obtenus.
- En terme de qualité de solution (étudiée en utilisant le ratio), l'AG donne d'assez bons résultats pour les instances du benchmark scholl, surtout dans le cas des classes 1 et 2 , où il arrive souvent à trouver la solution optimale sinon une valeur très proche de cette dernière, mais avec une qualité moindre dans le cas de la 3ème classe. **[Graphe 03]**
- Le Ratio obtenu par l'AG est proche de 1 (Worst case ratio < 1.1 dans tous les cas). Ceci signifie que l'algorithme génétique donne une bonne qualité de résultats même dans le pire des cas (les instances les plus difficiles). **[Graphe 03]**

6 Comparaison en Les Métaheuristiques

Nous allons comparer les quatres métaheuristiques implémentées afin de voir l'apport de chaque méthode en terme de qualité de solution et de temps d'exécution.

Tout d'abord nous allons vous rappeler les métriques de cette comparaison, ainsi que la formule de chacune :

- **Temps d'exécution moyen** : la moyenne des temps d'exécution pour toutes les instances ayant la même valeur du N , le nombre d'objets.
- **La moyennes des écarts de la solution optimale** : pour chaque instance on calcule $(n_bins - opt) * 100/opt$ avec n_bins nombre de boîtes obtenu par la métaheuristique et opt nombre de boîtes dans la solution optimale, puis on calcule la moyenne de ces écarts pour les instances ayant le même nombre d'objets, hormis la classe HARD qui a été séparée des autres, vu le degré de difficulté de ces instances.

Il est à noter que les résultats des algorithmes AG, et RS sont le résultats de dix exécutions par instance, afin d'échapper à l'aspect aléatoires des fonctions intérieures à ces deux méthodes, où le temps d'exécution moyen et la meilleure solution parmi les dix obtenues ont été pris Dans ce qui suit on va comparer :

- Whale Optimization Algorithm (WOA).
- Improved Whale Optimization Algorithm (ILWOA).
- L'Algorithm Génétique (AG).
- Recuit Simulé (RS).

6.1 Comparaison par rapport au temps d'exécution

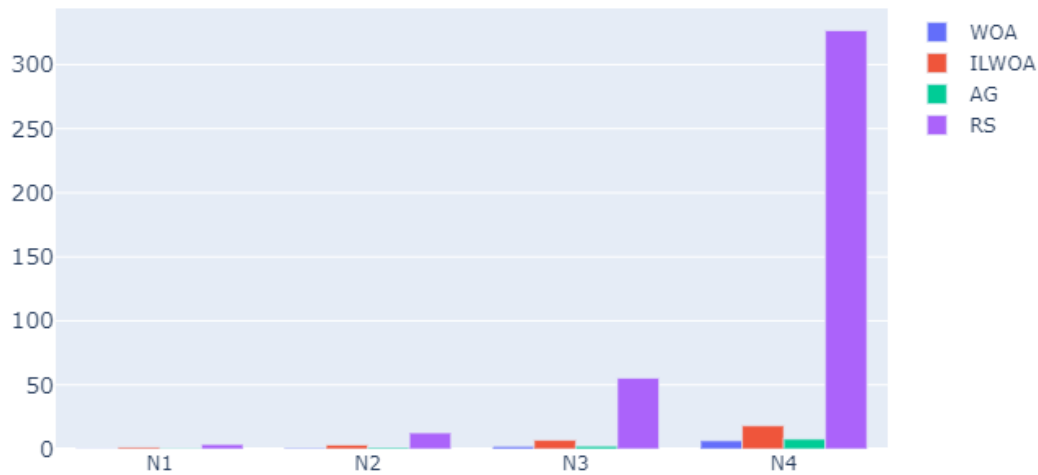


FIGURE 25 – la moyenne des temps d'exécution (en s) des métaheuristiques en fonction de la taille d'instance

6.1.1 Analyse et interprétation

- On peut clairement voir à partir du graphe ci-dessus que le recuit simulé (RS) est l'algorithme le plus lent des quatre algorithmes, et dont le temps d'exécution augmente avec l'augmentation de la taille des instances.
- l'algorithme génétique (AG) est la méthode la plus rapide suivi du WOA en deuxième position, et ILWOA juste derrière.
- Contrairement à ce que le graphe montre, l'algorithme ILWOA converge beaucoup plus rapidement que WOA. En effet, le temps d'exécution ne reflète pas exactement la vitesse de convergence d'un algorithme dans notre cas dû au choix de la condition d'arrêt qui est pour rappel le nombre d'itérations (section ILWOA).
- Le temps d'exécution des métaheuristiques est plus grand que le temps d'exécution des heuristiques, et ceci est triviale, à cause de la nature gloutonne des heuristiques, contrairement aux métaheuristiques qui sont des méthodes plus sophistiquées, utilisant plusieurs mécanismes d'intensification et diversification pour éviter les optimums locaux.

6.2 Comparaison par rapport à la qualité de la solution

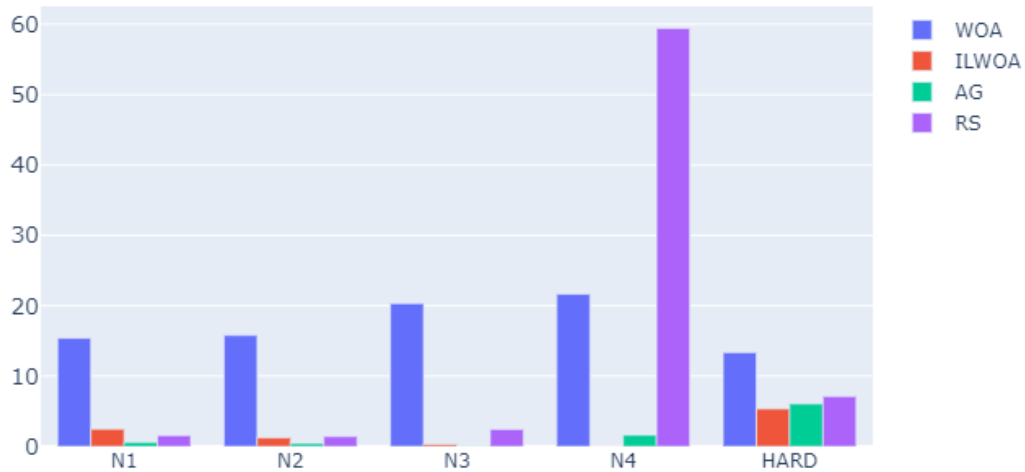


FIGURE 26 – la moyenne des écarts (en %) des métaheuristiques de la solution optimale en fonction de la taille d’instance

6.2.1 Analyse et interprétation

- On remarque que WOA dans tous les cas donne le plus grand écart par rapport à la solution optimale sauf dans le cas N4=500 où c’est RS qui trouve les solutions les plus écartées des solutions optimales (un écart de 60
- Pour la majorité des tailles des instances, AG donne les meilleurs résultats sauf dans le cas des instances Hard et N4 où ILWOA offre une légère amélioration. On peut donc conclure qu’en général AG donne de meilleurs solutions pour toutes les instances du benchmark. et ILWOA est celui qui arrive à améliorer les solutions des instances HARD.
- Les solutions obtenues sont généralement proches de celles retournées par les heuristiques, avec quelques instances où les métaheuristiques sont meilleures que les heuristique et vise versa.

Enfin, d’après ces deux graphes synthétiques, on conclut que AG donne de meilleurs résultats en faisant un compromis entre le temps d’exécution et la qualité de la solution, le ILWOA pas très loin derrière.

7 Conclusion

Pour synthétiser, l'Algorithme Génétique est la métaheuristique qui a donné le meilleur compromis qualité-coût pour notre benchmark, le Recuit Simulé, quant à lui, donne de très bons résultats aussi, mais avec un temps d'exécution très grand. ILWOA a permis d'améliorer WOA en terme de la converge rapide vers la solution optimale, ainsi qu'en terme de la qualité de la solution trouvée. Néanmoins, les résultats obtenues par les métaheuristiques sont très proches de ceux obtenues par les heuristiques, qui sont toujours les plus rapides. En d'autres termes, on a pas pu voir un grand apport des métaheuristiques en terme de qualité de solution, donc ce n'est pas intéressant d'arrêter notre étude à ce niveau, **raison pour laquelle on s'intéressera aux méthodes hybrides afin de combler les inconvénients d'une méthode par les avantages de l'autre et obtenir une meilleure qualité de solution en un temps d'exécution acceptable.**

Septième partie

Conclusion

Dans ce projet, nous avons effectué une étude comparative des différentes méthodes de résolution du problème de bin packing. Dans un premier temps nous nous sommes intéressées aux méthodes exactes où on a implémenté l'algorithme de Branch and Bound, une version améliorée de ce dernier ainsi qu'une recherche exhaustive. L'objectif de cette partie était de voir les limites de ce type de méthodes en terme de temps d'exécution qui était exponentiel, d'où la nécessité d'aller vers les méthodes approchées. Dans la 2ème partie du projet nous avons étudié et implémenté les différentes méthodes heuristiques relatives au problème étudié (FF, NF, BF, FFD, NFD, BF..), ainsi que quelques métaheuristiques qu'on a appliqué au problème (AG, Recuit Simulé, WOA, ILWOA), d'après cette étude on a conclu que les heuristiques fournissent de bon résultats en qualité de solution et en temps d'exécution pour les instances de petites et moyenne taille, par contre, on ne peut voir l'apport des métaheuristiques qu'au niveau des grandes instances. Finalement, pour pousser les métaheuristiques à mieux explorer l'espace de recherche, notre prochaine étape dans cette étude a été de proposer un schéma hybride permettant la collaboration entre plusieurs métaheuristiques afin d'obtenir de meilleures performances, ceci fera l'objet de notre article intitulé "Approche hybride pour résoudre le problème du Bin Packing".

On tiens à remercier notre professeur "Mme Bessedik Malika" pour son suivi régulier et sa disponibilité pour répondre à nos questions. Nous remercions également toute personne nous ayant apporté de l'aide pour réaliser ce travail, un merci à nos parents qui nous ont encouragé, motivé et fournit un environnement de travail à la maison durant cette situation exceptionnelle.