

Approche itérative pour le problème de l'arbre couvrant à nombre minimal de sommets de branchement

Lamiaa EL OUATILI

January 17, 2026

1 Introduction

Le problème du *Minimum Branching Vertices Spanning Tree* (MBVST) consiste à déterminer un arbre couvrant d'un graphe $G = (V, E)$ minimisant le nombre de sommets de branchement, c'est-à-dire les sommets de degré strictement supérieur à 2. Formellement, il s'agit de trouver un arbre $T = (V, E_T)$ tel que $|E_T| = |V| - 1$ et minimisant le nombre de sommets $v \in V$ vérifiant $\deg_T(v) > 2$.

Ce problème est combinatoire et difficile à résoudre exactement pour des graphes de grande taille. Ce travail propose une approche itérative combinant une formulation en programmation linéaire et des heuristiques de réparation basées sur la reconnexion des composantes et la suppression des cycles.

2 Formulation en programmation linéaire

On associe les variables de décision suivantes :

- $x_e \in \{0, 1\}$ pour chaque arête $e \in E$, indiquant si l'arête est sélectionnée.
- $y_v \in \{0, 1\}$ pour chaque sommet $v \in V$, indiquant si v est un sommet de branchement.

La fonction objectif est :

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

Cette formulation permet de favoriser des structures avec peu de sommets de degré élevé, mais ne garantit ni la connexité ni l'absence de cycles.

3 Approche heuristique itérative

La solution proposée repose sur une procédure itérative alternant résolution du modèle linéaire et réparations du graphe obtenu.

À chaque itération :

1. le modèle linéaire est résolu sur l'ensemble des arêtes ;

2. un graphe est construit à partir des arêtes sélectionnées ;
3. les solutions trop fragmentées sont écartées ;
4. les composantes connexes sont reconnectées de manière gloutonne en minimisant l'apparition de nouveaux sommets de branchement ;
5. les cycles sont supprimés en retirant préférentiellement les arêtes incidentes à des sommets de fort degré ;
6. la solution est évaluée et la meilleure est conservée.

Cette approche permet d'explorer plusieurs solutions faisables et de sélectionner celle offrant le meilleur compromis qualité / temps de calcul.

4 Résultats et interprétation

Les performances de l'heuristique sont comparées à deux méthodes exactes :

- une formulation exacte basée sur un modèle de flot (**Flow**) ;
- une formulation exacte alternative proposée par Martin (**Martin**).

Les comparaisons portent sur la qualité des solutions (nombre de sommets de branchement) et sur le temps de calcul.

4.1 Résumé des résultats

Le tableau 1 présente les résultats moyens par taille de graphe. Les colonnes *Flow*, *Martin* et *Heuristique* indiquent respectivement le nombre moyen de sommets de branchement et le temps moyen de calcul (en secondes).

Table 1: Comparaison des performances moyennes par taille de graphe

$ V $	Flow (obj)	Flow (s)	Martin (obj)	Martin (s)	Heuristique (obj)	Heuristique (s)
20	1	0.15	1	0.23	3	1.36
50	6	0.15	6	0.59	8	2.10
100	16	0.28	16	2.83	19	3.88
200	41	0.57	41	13.36	48	6.93
300	79	0.93	79	68.76	92	9.71
500	142	1.63	162	107.05	165	14.23

4.2 Analyse des performances

Les résultats montrent clairement que la méthode exacte basée sur le flot fournit systématiquement les meilleures solutions en un temps raisonnable pour les tailles considérées. L'heuristique ne surpasse donc pas la méthode Flow en termes de qualité ou de temps.

En revanche, la comparaison avec la méthode de Martin met en évidence l'intérêt de l'approche heuristique. Bien que Martin fournisse parfois des solutions optimales, son temps de calcul augmente très fortement avec la taille du graphe. À partir de graphes

moyens, l'heuristique produit des solutions de qualité comparable, tout en étant significativement plus rapide.

La Figure 3 illustre l'évolution du temps de calcul et de la qualité des solutions en fonction de la taille du graphe.

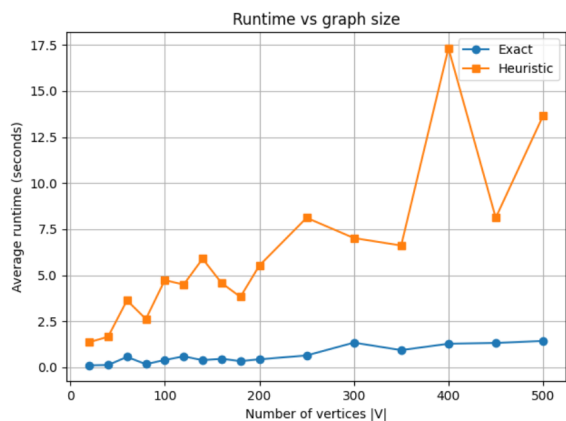


Figure 1: *

(a) Temps de calcul moyen

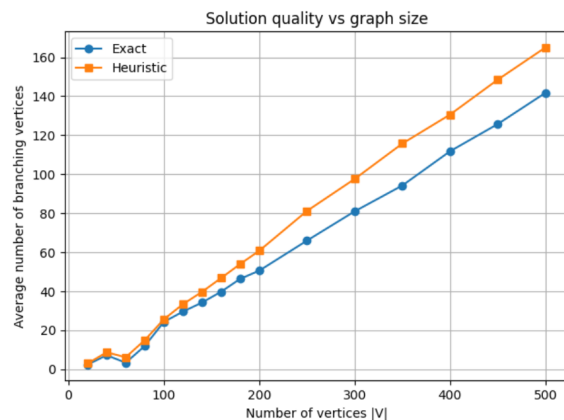


Figure 2: *

(b) Nombre moyen de sommets de branchement

Figure 3: Comparaison des performances et de la qualité des solutions

4.3 Discussion et perspectives

L'heuristique proposée constitue un bon compromis entre qualité de solution et temps de calcul. Elle n'atteint pas les performances de la formulation Flow, mais surpasse nettement la méthode de Martin dès que la taille des instances augmente.

Des améliorations sont possibles, notamment :

- l'introduction de contraintes supplémentaires pour limiter les cycles dès la résolution linéaire ;
- l'utilisation de stratégies adaptatives pour la reconnexion des composantes ;
- l'exploitation de solutions précédentes pour guider les itérations suivantes.

5 Conclusion

Ce travail a proposé une approche heuristique itérative pour le problème MBVST, combinant programmation linéaire et réparations de graphe. Les résultats expérimentaux montrent que l'heuristique offre une alternative efficace aux formulations exactes coûteuses, en particulier face au modèle de Martin, tout en maintenant une bonne qualité de solution.

Cette approche est particulièrement adaptée aux graphes de grande taille, pour lesquels les méthodes exactes deviennent difficilement applicables.