Compléments d'algèbre linéaire

Rappels:

Soit $A \equiv (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, $B \equiv (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$.
- La matrice transposée de A est définie par $A^t \equiv (a_{ji})$.
- La matrice adjointe de A est définie par $A^* \equiv (\overline{a_{ji}})$
- On a les propriétés suivantes (si les membres des égalités sont définies):

$$\begin{cases} (A^t)^t = A, \\ (A+B)^t = A^t + B^t, \\ (\lambda A)^t = \lambda A^t, \\ (AB)^t = B^t A^t, \\ (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-t}, \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \end{cases},$$

Si A est carrée alors
- A est singulière si elle n'est pas inversible,
- A est symétrique si elle est réelle et $A^t = A$,
- A est ortogonale si elle est réelle et $A^{-1} = A^t$,
- A est unitaire si $A^* = A^{-1}$,
- A est normale si $AA^* = A^*A$,
- $Tr(A) = a_{11} + ... + a_{nn}$,
- le polynôme caractéristique de A est défini par $P_A(X) = \det(A - XI)$,
- les valeurs propres de A sont les racines complexes de $P_A(X)$,
- le spectre de A c'est l'ensemble $Sp(A) = \{\lambda \text{ t.q } \lambda \text{ v.p. de } A\}$
- le rayon spectrale de A c'est $\rho(A) = \max\{|\lambda| \text{ t.q. } \lambda \text{ v.p. de } A\}$

Matrices particulières

Matrices diagonales et triangulaire

Définition:
- A est dite diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ et on note $A = diag(a_{ii})$.
- A est triangulaire

  $\rightarrow$ inférieure si $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$.

  $\rightarrow$ supérieure si i $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.

Proposition: Si A est diagonale (résp. triangulaire sup. ou inf). Alors $detA = \prod\limits_{1\leq i\leq n} a_{ii}$

Proposition: Si A est diagonale (résp. triangulaire sup. ou inf) inversible. Alors son inverse l'est aussi.

Matrices à diagonale dominante

On dit que A est à diagonale
- strictement dominante par ligne si $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $\forall 1 \leq i \leq n$

• strictement dominante par colonne si $|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \forall 1 \leq j \leq n$

Exemple: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ est à diagonale strictement dominante

Proposition: Si A est à diagonale strictement dominante par ligne ou par colonne. Alors tout les mineurs principaux sont différents de 0, c'est à dire

$$\det \Delta_k \neq 0.$$

Δ_k est la matrice extraite de A définie par $\Delta_k = (a_{ij})_{\substack{1\leq j\leq k \\ 1\leq j\leq k}}$.

Corollaire: Si A est à diagonale strictement dominante.par ligne ou par colonne, alors A est inversible.

Matrices hermitiennes et définies positives

Définition: On dit que

$\rightarrow$ A est hermitienne si $A = A^*$

$\rightarrow$ si A est hermitienne et réelle (donc $A^t = A$), on dit qu'elle est symétrique

Proposition: Si A une matrice hermitienne, alors $X^tAX \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{C}^n$.

Définition: Soit A une matrice hermitienne. On dit que A est

$\rightarrow$définie positive ssi $X^tAX > 0, \forall X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

$\rightarrow$semi définie positive ssi $X^tAX \geq 0$,

Exemple: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, A est symétrique. de plus:

on a: $X^tAX = +2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 > 0, \forall X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

Donc A est définie positive.

Proposition: Soit A une matrice hermicienne. Alors

$$\begin{cases} (1)\ A \text{ est définie positive} \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^* \\ (2)\ A \text{ est semi définie positive} \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Proposition (critère de sylvester): Soit A une matrice réelle symétrique. Alors,

$$(1)\ A \text{ est définie positive} \iff \det \Delta_k > 0.$$

Proposition: Soit A une matrice hermicienne définie positive, alors

• $a_{ii} > 0$

• A est inversible.

Exemple: la matrice $A = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix}$ n'est pas définie positive car $a_{22} < 0$

Proposition: Soit A une matrice hermitienne définie positive. Alors l'application $X \mapsto X^tAX$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$.

Normes matricielle

Définition: On appelle norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$, une application $\|\| : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui satisfait:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n} \\ (2)\ \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\| \\ (3)\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{array}\right\} \rightarrow \text{norme}$$

(4) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Définition: Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$. On appelle norme matricielle

subordonée (ou induite) à cette norme vectorielle la norme définie par

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

Proposition: On a: $\|A\| = \max\limits_{\|X\|\leq 1} \|AX\| = \max\limits_{0<\|X\|\leq 1} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \max\limits_{X\in(\mathbb{R}^n)^*} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Proposition: On a:

1) $\|A\|_1 \overset{déf}{=} \max\limits_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

2) $\|A\|_\infty \overset{déf}{=} \max\limits_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3) $\|A\|_2 \overset{déf}{=} \max\limits_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$.

Proposition: On a

$\rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$, $\forall$ la norme mat. sub. $\|\|$.

$\rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists$ une norme mat. sub. $\|\|_{\varepsilon,A}$ t.q. $\|A\|_{\varepsilon,A} < \rho(A) + \varepsilon$.

Proposition: Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors l'application $X \mapsto (X^tAX)^{\frac{1}{2}}$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$.

Limites et matrices

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a:

$$A^k \rightarrow 0 \Longleftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n, A^kY \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$