Nom : **Prénom :**

Groupe : **Matricule :**

N.B : Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Les réponses doivent être portées dans les champs qui leurs sont réservés.

Exercice 1 : (5 pts)
Soit m un nombre réel et soit l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad f\left(a + bX + cX^2\right) = ma - b + (a+c)\,X + (b+c)\,X^2$$

1- Déterminer $M_B(f) = A$, où B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. **(0,5 pt)**

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2- Soit B' une base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $B' = (P_1 = 1 + X + X^2,\ P_2 = X - X^2,\ P_3 = -X^2)$.Trouver la matrice de passage P de B vers B' et la matrice de passage Q de B' vers B. **(1pt + 2 pts)**

$$P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3-Donner l'expression de la matrice $A' = M_{B'}(f)$ en fonction de P, Q et A puis calculer A'. **(0,5pt + 1pt)**

$$A' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : (5 pts) (Répondre sur une double feuille)

1/ Soit E le s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$ où α, β sont réels. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E. **(1,5pts)**

2/ Calculer $A^2, B^2, A.B$ et $B.A$. **(0,25pt *4)**

3/ En déduire que E est un sous-anneau commutatif unitaire de $M_2(\mathbb{R})$. Est-il intègre? **(2pt + 0,5 pts)**

Bon courage