Toutes les réponses doivent être portées sur **un seul cahier.**

N.B : Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (7 pts)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f_{a,b}$ un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique de $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & a \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

1- Déterminer suivant les paramètres a et b une base de $\ker f_{a,b}$ et le rang de $f_{a,b}$ (**dans tout l'exercice il n'est pas demandé de déterminer l'expression de** $f_{a,b}$).

Solution : On échelonne la matrice $A_{a,b}$, on trouve : $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & b-1 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt)**, on en déduit :

Cas 1 : $b \neq 1$, $rgf_{a,b} = rgA_{a,b} = 3$ pour tout réel a **(0,25 pt)** et
$\ker f = \{0\}$ donc $\ker f$ admet $\varnothing$ comme base. **(0,5 pt)**

Cas 2 : $b = 1$, $rgf_{a,b} = rgA_{a,b} = 2$ pour tout réel a **(0,25 pt)**;
Si on pose : $w_1 = f_{a,b}(e_1)$, $w_2 = f_{a,b}(e_2)$, $w_3 = f_{a,b}(e_3)$ alors $(0,0,0) = f_{a,b}((a-1, 2a-3, 1))$ d'où $(w = (a-1, 2a-3, 1))$ est une base de $\ker f$. **(0,5 pt)**

2- Pour quelles valeurs de a et b la matrice $A_{a,b}$ est-elle inversible.

Solution : $A_{a,b}$ est inversible ssi $rgA_{a,b} = 3$ ssi $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{1\}$. **(0,25 pt)**

3- On pose $a = 2$ et $b = 1$ et notons $f_{2,1}$ par f et $A_{2,1}$ par A.

i/- Soit la famille de vecteurs $B' = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,1), v_3 = (1,2,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\det_B (v_1, v_2, v_3)$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} \det_B (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(on remplace } v_2 \text{ par } v_2 - 2v_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{(on développe par rapport la colonne 2)} \\ &= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad \textbf{(0,5 pt)} \end{aligned}$$

.

ii/- En déduire que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : $\det_B(v_1, v_2, v_3)$ étant non nul la famille B' est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0,25 pt)**

iii/ Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base B'.

Solution : On calcule : $A \cdot^t v_1$, $A \cdot^t v_2$ et $A \cdot^t v_2$ on obtient :

$$\begin{aligned} A \cdot^t v_1 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(0,25 pt)} \\ A \cdot^t v_2 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -^t v_2 \quad \textbf{(0,25 pt)} \\ A \cdot^t v_3 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =^t v_3 \quad \textbf{(0,25 pt)} \end{aligned}$$

On en déduit : $f(v_1) = 0$, $f(v_2) =$ -v_2 et $f(v_3) = v_3$ **(0,25 pt)**

iv/ En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$.

Solution : Des résultats de **iii/,** on déduit : $A' = M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt)**

v/ Déterminer la matrice P de passage de B vers B'.

Solution : Par définition : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,25 pt)**

vi/ Calculer P^{-1}.

Solution : On peut calculer l'inverse, par exemple, en exprimant les vecteurs de la base canonique dans B' , on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

vii/ En déduire une relation entre A et A'.

Solution : On a : $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (ou une égalité équivalente) **(0,25 pt)**

viii/ Calculer $A^{2016.}$

Solution : De la question précédente on obtient : $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$ d'où : $A^{2016} = P \cdot (A')^{2016} \cdot P^{-1}$ **(0,25 pt)**

Or : $(A')^{2016} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,25 pt)**

Ainsi après calcul on obtient :

$$\begin{aligned} A^{2016} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,5 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 pts) (Les questions suivantes sont indépendantes)

1- Soit λ un nombre réel et soit l'endomorphisme définie par :

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], \quad u\left(a + bX + cX^2 + dX^3\right) = -a + (2a+b)\,X + (a + 2b + \lambda c)\,X^2 + \left(a + b + \lambda^2 d\right) X^3$$

Calculer $\det u$.

Solution : Avec les notation du cours : $\det u = \det_B (u(B))$ ou bien $\det u = \det M_B(u)$ où, dans les deux cas, B est une base quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$. Si on utilise la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, on obtient :

$$\det u = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 \ \ \text{(produit des élements diagonaux)} \ \ \textbf{(1 pt)}$$

2- Donner dans S_5 deux permutations (différentes de l'identité et qui ne sont pas des transpositions) dont l'une est de signature positive et l'autre négative. Justifier.

Solution : On peut prendre :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{2,4} \cdot \tau_{3,4} \text{ (composition de deux transpositions)} \\ \text{et } \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4} \cdot \tau_{2,4} \cdot \tau_{2,3} \text{ (composition de trois transpositions)} \end{aligned}$$

de signatures respectives 1 et -1. **(0,5 pt + 0,5 pt).**

3- Montrer, pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), que : $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (se ramener aux endomorphismes par l'association canonique).

Solution : On associe canoniquement aux matrices A et B deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$ relativement à la base canonique C. Autremet dit ;

$$A = M_C(u) \text{ et } B = M_C(v).$$

On a : $\det A = \det u$ et $\det B = \det v$. Or $M_C(u \circ v) = A \cdot B$, ainsi :

$$\det(A \cdot B) = \det M_C(u \circ v) = \det(u \circ v) = \det u . \det v = \det A . \det B \quad \textbf{(1 pt)}$$