

PROBLÈMES CORRIGÉS D'ÉLECTROTECHNIQUE

- ▶ Niveaux de difficulté progressifs
- ▶ Corrigés détaillés

Pierre Mayé

Professeur de physique appliquée à Arras

DUNOD

Illustration de couverture : © *digitalvision*

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-057895-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE I • TRANSFORMATEURS ET LIGNES	1
Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires	3
Chapitre 2 • Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent	15
Chapitre 3 • Transformateur triphasé – Association en parallèle – Fonctionnement en régime déséquilibré	27
Chapitre 4 • Auto-transformateur	51
Chapitre 5 • Ligne triphasée	65
PARTIE II • GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES TOURNANTES	83
Chapitre 6 • Dimensionnement mécanique d'un moteur	85
Chapitre 7 • Comportement thermique d'une machine	101
Chapitre 8 • Bobinage d'une machine à courant alternatif	113
Chapitre 9 • Répartition du courant dans un conducteur à l'intérieur d'une encoche	127
Chapitre 10 • Grandeurs complexes spatiales	139
PARTIE III • MACHINES SYNCHRONES	153
Chapitre 11 • Alternateur à entrefer constant – Diagramme de Behn-Eschenburg	155
Chapitre 12 • Turboalternateur – Diagramme de Potier	173
Chapitre 13 • Alternateur à pôles saillants – Diagramme à deux réactances synchrones	187
Chapitre 14 • Moteur synchrone double étoile	201
Chapitre 15 • Groupe électrogène	213
Chapitre 16 • Modélisation de la machine synchrone avec la transformation de Park	223
PARTIE IV • MACHINES ASYNCHRONES	251
Chapitre 17 • Moteur asynchrone – Schéma monophasé équivalent	253
Chapitre 18 • Moteur asynchrone – Effet de la valeur efficace des tensions	269

Table des matières

Chapitre 19 • Moteur asynchrone – Fonctionnement en régime déséquilibré	283
Chapitre 20 • Machine asynchrone – Auto-amorçage	303
Chapitre 21 • Modélisation de la machine asynchrone dans un repère diphasé tournant	313
PARTIE V • MACHINES À COURANT CONTINU	331
Chapitre 22 • Moteur à courant continu en régime permanent	333
Chapitre 23 • Moteur à courant continu en régime transitoire	347

Partie I

Transformateurs et lignes

1. Transformateur monophasé à plusieurs secondaires	3
2. Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent	15
3. Transformateur triphasé – Association en parallèle – Fonctionnement en régime déséquilibré	27
4. Autotransformateur	51
5. Ligne triphasée	65

TRANSFORMATEUR MONOPHASÉ À PLUSIEURS SECONDAIRES



Niveau de difficulté : * Application simple du cours accessible à tous.

Le problème s'intéresse au transformateur d'entrée d'une locomotive électrique roulant sous caténaire 25 kV, 50 Hz (qui équipe la partie du réseau français alimentée en alternatif). La traction ferroviaire est en effet un des rares domaines d'emploi de transformateurs monophasés de forte puissance. L'étude fait appel au modèle du transformateur avec résistances et inductances de fuites ramenées au secondaire. On commence par déterminer les éléments du modèle à partir des essais classiques et on étudie ensuite un fonctionnement en charge en traçant un diagramme de Fresnel et en procédant à un bilan de puissances.

ÉNONCÉ

Le transformateur monophasé étudié comporte un enroulement primaire et quatre enroulements secondaires indépendants identiques (figure 1.1). Cette disposition permet d'alimenter quatre ponts monophasés à commutation forcée dont les commandes sont décalées afin de limiter les harmoniques du courant en ligne.

La valeur efficace nominale de la tension au primaire est $U_{1n} = 25,0$ kV et la fréquence nominale est $f_n = 50,0$ Hz. La puissance apparente nominale est $S_n = 5,60$ MVA.

Le transformateur est caractérisé par son modèle avec résistances et inductances de fuites ramenées au secondaire (figure 1.2).

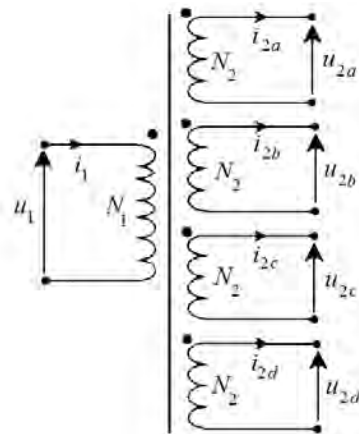


Figure 1.1 - Transformateur à quatre secondaires.

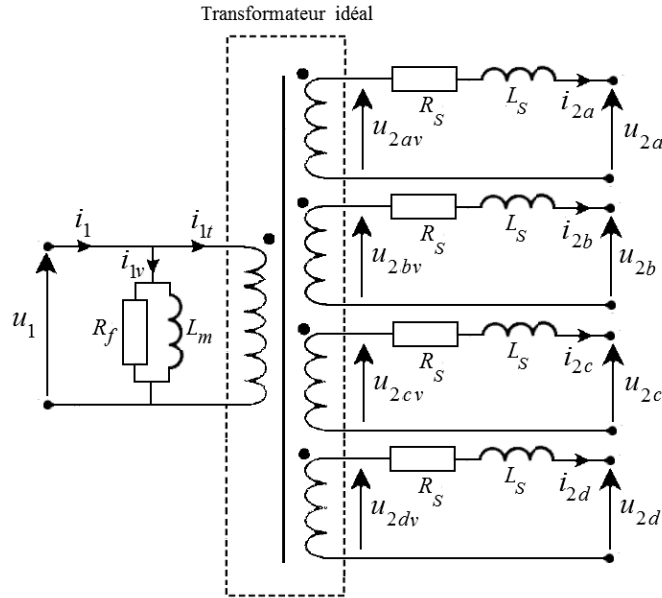


Figure 1.2 - Modèle du transformateur.

Un essai à vide a été effectué avec une tension au primaire de valeur efficace nominale et de fréquence nominale. On a mesuré la valeur efficace de la tension aux bornes d'un enroulement secondaire, $U_{2v} = 1,36$ kV, l'intensité efficace du courant appelé au primaire, $I_{1v} = 1,25$ A et la puissance active consommée par le transformateur, $P_{1v} = 6,80$ kW.

Un essai en court-circuit (tous les enroulements secondaires étant court-circuités) a été réalisé sous une tension réduite telle que l'intensité efficace I_{2c} du courant dans un enroulement secondaire soit égale à sa valeur nominale. La tension réduite de court-circuit est de 37,1 % et la puissance active mesurée au primaire est $P_{1c} = 25,0$ kW.

A. DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU MODÈLE

- A.1** Quelle est la signification des points placés à une extrémité de chaque enroulement sur le schéma du transformateur ?
- A.2** Calculer le rapport de transformation m de l'appareil (pour un enroulement secondaire).
- A.3** Déterminer l'intensité efficace nominale I_{2n} du courant au secondaire et l'intensité efficace nominale I_{1n} du courant au primaire.
- A.4** Calculer le facteur de puissance à vide $\cos \varphi_{1v}$ puis le déphasage φ_{1v} du courant au primaire à vide par rapport à la tension au primaire. Tracer le diagramme vectoriel des tensions et des courants à vide en y indiquant l'angle d'avance hystérétique α . Calculer la valeur de α et préciser sa signification.

- A.5** Calculer la puissance réactive Q_{1v} dans l'essai à vide.
- A.6** Calculer la résistance R_f et l'inductance L_m du modèle du transformateur. À quoi correspondent ces deux paramètres ?
- A.7** Préciser l'intensité efficace I_{2c} du courant dans un enroulement secondaire lors de l'essai en court-circuit. Quelle est alors la valeur efficace U_{1c} de la tension au primaire ? Calculer la résistance R_S et l'inductance L_S du modèle du transformateur.
- A.8** L'inductance L_S a une valeur élevée afin de constituer l'inductance de lissage à l'entrée des ponts monophasés. Après avoir comparé les valeurs de R_S et de $X_S = L_S\omega$ (ω étant la pulsation qui correspond à la fréquence f), proposer une simplification du modèle du transformateur. Cette approximation sera utilisée dans la suite du problème.

B. ÉTUDE DU FONCTIONNEMENT NOMINAL

La tension primaire est nominale et la charge connectée à chaque enroulement secondaire appelle un courant d'intensité efficace $I_2 = 1,03$ kA avec un facteur de puissance $\cos \varphi_2$, le courant étant en avance sur la tension. On souhaite que le courant i_{2k} dans le secondaire repéré par l'indice k ($k = a, b, c$ ou d) soit en phase avec la tension à vide u_{2kv} de ce même secondaire.

- B.1** Construire le diagramme de Fresnel correspondant en y faisant apparaître la tension en charge u_{2k} .
- B.2** Déterminer le déphasage φ_2 du courant i_{2k} par rapport à la tension en charge u_{2k} . En déduire le facteur de puissance $\cos \varphi_2$ de la charge.
- B.3** Calculer la valeur efficace U_2 de la tension aux bornes d'un secondaire.
- B.4** Déterminer la puissance réactive Q_2 appelée par la charge de chaque secondaire puis la puissance réactive Q_1 appelée au primaire du transformateur.
- B.5** Déterminer la puissance active P_2 appelée par la charge de chaque secondaire puis la puissance active P_1 appelée au primaire du transformateur.
- B.6** Vérifier que le facteur de puissance $\cos \varphi_1$ du primaire est pratiquement égal à 1.
- B.7** Calculer le rendement η du transformateur.

SOLUTION

A. DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU MODÈLE

A.1 Les points repèrent les bornes homologues des enroulements. Ce pointage permet de connaître le sens de bobinage relatif du primaire et des secondaires sans avoir besoin d'une représentation détaillée du circuit magnétique et des enroulements. Pour les différentes bobines, les tensions entre l'extrémité pointée et l'autre extrémité ont même polarité instantanée. Par ailleurs,

Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires

dans la relation d'Hopkinson, les forces magnétomotrices sont précédées d'un signe + si la flèche d'orientation du courant entre par une extrémité pointée et d'un signe – dans le cas contraire.

A.2 Le rapport de transformation m est égal au quotient de la valeur efficace U_{2v} de la tension aux bornes d'un secondaire à vide de la valeur efficace U_{1n} et de la tension au primaire :

$$m = \frac{U_{2v}}{U_{1n}}$$

Application numérique :

$$m = \frac{1,36}{25,0} = 5,44 \times 10^{-2}$$



Il y a plusieurs définitions possibles pour le rapport de transformation. Nous avons choisi la plus courante et la plus logique, mais certains utilisent l'inverse (quotient de la valeur efficace de la tension au primaire et de la valeur efficace de la tension aux bornes d'un secondaire à vide). Ces deux définitions supposent que le rôle des deux enroulements (primaire et secondaire) a été défini, mais un transformateur peut être utilisé dans les deux sens. C'est pourquoi les normes adoptent une définition du rapport de transformation indépendante du rôle des deux enroulements : c'est le rapport de la haute tension à la basse tension. Il s'agit alors d'un nombre supérieur ou égal à 1.

A.3 La puissance apparente nominale S_n est égale à quatre fois le produit de la valeur efficace U_{2v} de la tension aux bornes d'un secondaire à vide et de l'intensité efficace nominale I_{2n} du courant au secondaire :

$$S_n = 4U_{2v}I_{2n}$$

Nous en déduisons :

$$I_{2n} = \frac{S_n}{4U_{2v}}$$

Application numérique :

$$I_{2n} = \frac{5,60 \times 10^6}{4 \times 1,36 \times 10^3} = 1,03 \text{ kA}$$

L'intensité efficace nominale I_{1n} du courant au primaire est égale à quatre fois le produit du rapport de transformation m et de l'intensité nominale I_{2n} du courant au secondaire car le courant à vide est négligeable devant le courant de travail pour le fonctionnement nominal :

$$I_{1n} = 4mI_{2n}$$

Application numérique :

$$I_{1n} = 4 \times 5,44 \times 10^{-2} \times 1,03 \times 10^3 = 224 \text{ A}$$

A.4 Dans le fonctionnement à vide, le courant au primaire n'est pas sinusoïdal en raison de la non-linéarité du circuit magnétique, mais on considère un courant sinusoïdal fictif qui a les mêmes effets énergétiques que le courant réel et donc la même intensité efficace I_{1v} .

La puissance active P_{1v} dans l'essai à vide s'exprime par :

$$P_{1v} = U_{1n} I_{1v} \cos \varphi_{1v}$$

Nous en déduisons le facteur de puissance $\cos \varphi_{1v}$ au primaire du transformateur à vide :

$$\cos \varphi_{1v} = \frac{P_{1v}}{U_{1n} I_{1v}}$$

Application numérique :

$$\cos \varphi_{1v} = \frac{6,80 \times 10^3}{25,0 \times 10^3 \times 1,25} = 0,218$$

Le déphasage à vide φ_{1v} vaut alors :

$$\varphi_{1v} = \arccos(\cos \varphi_{1v})$$

Application numérique :

$$\varphi_{1v} = \arccos 0,218 = 77,4^\circ$$

Le facteur de puissance d'un transformateur à vide est faible et le déphasage est un peu inférieur à 90° (figure 1.3).

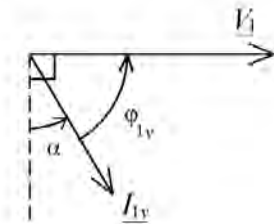


Figure 1.3 - Diagramme vectoriel pour le fonctionnement à vide.

L'angle d'avance hystérétique α est le déphasage du flux par rapport au courant sinusoïdal fictif, donc le complémentaire du déphasage du courant par rapport à la force électromotrice. La chute de tension au primaire étant négligeable, cet angle est pratiquement le complémentaire de φ_{1v} :

$$\alpha = 90^\circ - \varphi_{1v}$$

Application numérique :

$$\alpha = 90 - 77,4 = 12,6^\circ$$

L'angle d'avance hystérétique est lié à la présence des pertes ferromagnétiques.

Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires



Malgré son nom, l'angle d'avance hystérétique correspond à l'ensemble des pertes ferromagnétiques et pas seulement aux pertes par hystérésis.

A.5 Comme nous avons chiffré le déphasage à vide ϕ_{1v} à la question précédente, nous pouvons calculer la puissance réactive Q_{1v} dans l'essai à vide par sa définition :

$$Q_{1v} = U_{1n} I_{1v} \sin \phi_{1v}$$

Application numérique :

$$Q_{1v} = 25,0 \times 10^3 \times 1,25 \times \sin 77,4^\circ = 30,5 \text{ kvar}$$



Une autre méthode consiste à calculer la puissance réactive Q_{1v} à partir de la puissance apparente S_{1v} et de

la puissance active P_{1v} : $Q_{1v} = \sqrt{S_{1v}^2 - P_{1v}^2} = \sqrt{(U_{1n} I_{1v})^2 - P_{1v}^2}$.

A.6 Dans l'essai à vide, la puissance active P_{1v} est consommée par la résistance R_f (avec le modèle utilisé qui ramène la résistance des enroulements au secondaire) :

$$P_{1v} = \frac{U_{1n}^2}{R_f}$$

Nous en déduisons l'expression de R_f :

$$R_f = \frac{U_{1n}^2}{P_{1v}}$$

Application numérique :

$$R_f = \frac{(25,0 \times 10^3)^2}{6,80 \times 10^3} = 91,9 \text{ k}\Omega$$

La résistance R_f modélise les pertes ferromagnétiques du transformateur.

La puissance réactive Q_{1v} est consommée par la bobine d'inductance L_m , soit, en utilisant la réactance X_m correspondante :

$$Q_{1v} = \frac{U_{1n}^2}{X_m}$$

Nous en déduisons :

$$X_m = \frac{U_{1n}^2}{Q_{1v}}$$

Application numérique :

$$X_m = \frac{(25,0 \times 10^3)^2}{30,5 \times 10^3} = 20,5 \text{ k}\Omega$$

La réactance X_m d'une bobine d'inductance L_m à la pulsation ω correspondant à la fréquence f s'exprime par :

$$X_m = L_m \omega = L_m 2\pi f$$

L'inductance L_m est alors :

$$L_m = \frac{X_m}{2\pi f}$$

Application numérique :

$$L_m = \frac{20,5 \times 10^3}{2\pi \times 50,0} = 65,2 \text{ H}$$

La bobine d'inductance L_m modélise la puissance réactive nécessaire à la magnétisation du circuit magnétique du transformateur.

A.7 L'essai en court-circuit a été effectué au courant nominal :

$$I_{2c} = I_{2n}$$

La tension réduite de court-circuit étant de 37,1 %, la valeur efficace U_{1c} de la tension au primaire dans l'essai en court-circuit vaut :

$$U_{1c} = 0,371 \times 25,0 \times 10^3 = 9,28 \text{ kV}$$

La puissance active P_{1c} appelée au primaire du transformateur en court-circuit est la somme de la puissance dans la résistance R_f et des puissances dans les quatre résistances R_S :

$$P_{1c} = \frac{U_{1c}^2}{R_f} + 4R_S I_{2n}^2$$

Dans de nombreux cas, le premier terme est négligeable devant le second car la tension de court-circuit est beaucoup plus faible que la tension nominale. Ce n'est pas vrai ici, la tension réduite de court-circuit étant de 37,1 %. Il faut donc calculer la résistance R_S avec la formule complète :

$$R_S = \frac{P_{1c} - \frac{U_{1c}^2}{R_f}}{4I_{2n}^2}$$

Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires

Application numérique :

$$R_S = \frac{25,0 \times 10^3 - \frac{(9,28 \times 10^3)^2}{91,9 \times 10^3}}{4 \times (1,03 \times 10^3)^2} = 5,67 \text{ m}\Omega$$

La puissance réactive Q_{1c} appelée au primaire du transformateur en court-circuit est la somme de la puissance réactive dans la bobine d'inductance L_m (réactance X_m) et des puissances réactives dans les quatre bobines d'inductance L_S (réactance X_S) :

$$Q_{1c} = \frac{U_{1c}^2}{X_m} + 4X_S I_{2n}^2$$

La réactance X_S est ainsi donnée par la formule :

$$X_S = \frac{Q_{1c} - \frac{U_{1c}^2}{X_m}}{4I_{2n}^2}$$

La puissance réactive Q_{1c} peut être obtenue à partir de la puissance apparente S_{1c} et de la puissance active P_{1c} :

$$Q_{1c} = \sqrt{S_{1c}^2 - P_{1c}^2} = \sqrt{(U_{1c} I_{1c})^2 - P_{1c}^2}$$

Application numérique :

$$Q_{1c} = \sqrt{(9,28 \times 10^3 \times 224)^2 - (25,0 \times 10^3)^2} = 2,08 \text{ Mvar}$$

Nous en déduisons la réactance de fuites ramenée au secondaire :

$$X_S = \frac{2,08 \times 10^6 - \frac{(9,28 \times 10^3)^2}{20,5 \times 10^3}}{4 \times (1,03 \times 10^3)^2} = 489 \text{ m}\Omega$$

Une autre méthode consiste à exprimer l'impédance à partir du schéma équivalent d'un secondaire (figure 1.4).

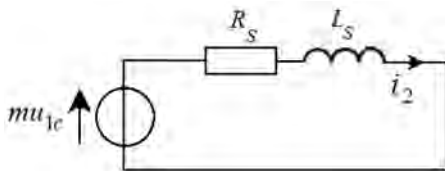


Figure 1.4 - Schéma équivalent d'un secondaire court-circuité.

Le module Z_S de l'impédance peut être calculé par :

$$Z_S = \frac{mU_{1c}}{I_{2n}}$$

Application numérique :

$$Z_S = \frac{5,44 \times 10^{-2} \times 9,28 \times 10^3}{1,03 \times 10^3} = 490 \text{ m}\Omega$$

Le module de l'impédance pour le circuit série formé par R_S et X_S est :

$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_S^2}$$

Cela conduit à l'expression de la réactance :

$$X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

Application numérique :

$$X_S = \sqrt{490^2 - 5,67^2} = 490 \text{ m}\Omega$$



Les valeurs de Z_S et de X_S se confondent avec trois chiffres significatifs.

L'inductance de fuites ramenée au secondaire est alors :

$$L_S = \frac{X_S}{\omega} = \frac{X_S}{2\pi f}$$

Application numérique :

$$L_S = \frac{490 \times 10^{-3}}{2\pi \times 50,0} = 1,56 \text{ mH}$$

A.8 La résistance R_S est environ 86 fois plus petite que la réactance X_S . Il est donc légitime de négliger R_S devant X_S , c'est-à-dire de considérer que l'impédance ramenée au secondaire est purement réactive.

B. ÉTUDE DU FONCTIONNEMENT NOMINAL

B.1 Le diagramme de Fresnel représente la relation complexe :

$$\underline{U}_{2k} = \underline{U}_{2kv} - jX_S \underline{I}_{2k}$$

Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires

En prenant \underline{I}_{2k} comme origine des phases, on commence par tracer \underline{U}_{2kv} dans la même direction puis $jX_S \underline{I}_{2k}$ dans la direction orthogonale (figure 1.5).

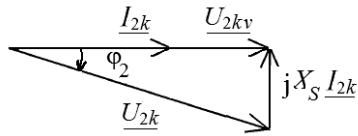


Figure 1.5 - Diagramme de Fresnel.

B.2 Le déphasage φ_2 du courant i_{2k} dans la charge connectée à chaque enroulement secondaire par rapport à la tension u_{2k} est :

$$\varphi_2 = -\arctan \frac{X_S I_2}{U_{2n}}$$

Application numérique :

$$\varphi_2 = -\arctan \frac{0,490 \times 1,03 \times 10^3}{1,36 \times 10^3} = -20,4^\circ$$

Le facteur de puissance de la charge vaut alors :

$$\cos \varphi_2 = \cos(-20,4^\circ) = 0,937$$

B.3 Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle des tensions du diagramme de Fresnel :

$$U_2^2 = U_{2v}^2 + (X_S I_2)^2$$

Cela conduit à :

$$U_2 = \sqrt{U_{2v}^2 + (X_S I_2)^2}$$

Application numérique :

$$U_2 = \sqrt{(1,36 \times 10^3)^2 + (0,490 \times 1,03 \times 10^3)^2} = 1,45 \text{ kV}$$

B.4 La puissance réactive Q_2 consommée par la charge d'un enroulement secondaire est :

$$Q_2 = U_2 I_2 \sin \varphi_2$$

Application numérique :

$$Q_2 = 1,45 \times 10^3 \times 1,03 \times 10^3 \times \sin(-20,4^\circ) = -521 \text{ kvar}$$



Le résultat est négatif puisque la charge fournit en réalité de la puissance réactive.

La puissance réactive Q_1 appelée par le primaire du transformateur est la somme de la puissance magnétisante Q_{1v} (puissance réactive à vide), de quatre fois la puissance réactive consommée par l'inductance de fuites L_S d'un secondaire et de quatre fois la puissance réactive Q_2 consommée par la charge d'un enroulement secondaire :

$$Q_1 = Q_{1v} + 4X_S I_2^2 + 4Q_2$$

Les deux derniers termes se compensent puisque i_{2k} est en phase avec u_{2kv} . Il ne reste donc que la puissance magnétisante :

$$Q_1 = 30,5 \text{ kvar}$$

B.5 La puissance active P_2 consommée par la charge d'un enroulement secondaire est :

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

Application numérique :

$$P_2 = 1,45 \times 10^3 \times 1,03 \times 10^3 \times 0,937 = 1,40 \text{ MW}$$

La puissance active P_1 appelée par le primaire du transformateur est la somme des pertes ferromagnétiques P_{1v} (puissance active à vide), de quatre fois la puissance active consommée par la résistance R_S d'un secondaire et de quatre fois la puissance active P_2 consommée par la charge d'un enroulement secondaire :

$$P_1 = P_{1v} + 4R_S I_2^2 + 4P_2$$

Application numérique :

$$P_1 = 6,80 \times 10^3 + 4 \times 5,67 \times 10^{-3} \times (1,03 \times 10^3)^2 + 4 \times 1,40 \times 10^6 = 5,63 \text{ MW}$$

B.6 Le facteur de puissance au primaire du transformateur est :

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}}$$

Application numérique :

$$\cos \varphi_1 = \frac{5,63 \times 10^6}{\sqrt{(5,63 \times 10^6)^2 + (30,5 \times 10^3)^2}} = 1,00$$

Chapitre 1 • Transformateur monophasé à plusieurs secondaires



Il ne faut pas calculer la puissance apparente par la formule $S_1 = U_1 I_1$ car la détermination de l'intensité efficace du courant a été faite avec une formule approchée et comme S_1 et P_1 sont très proches l'un de l'autre, la petite erreur commise sur I_1 suffit à donner un facteur de puissance légèrement supérieur à 1, ce qui est évidemment absurde.

Le facteur de puissance en ligne est très proche de 1 : c'est l'objectif de la commande du pont monophasé. Le résultat était attendu : le courant i_{2k} dans chaque secondaire étant en phase avec la tension à vide u_{2kv} correspondante, le courant de travail i_{1t} (courant au primaire du transformateur idéal du modèle) est en phase avec la tension u_1 et comme le courant à vide i_{1v} est faible, le courant i_1 au primaire est pratiquement en phase avec la tension u_1 .

B.7 Le rendement η du transformateur est le rapport de la puissance totale $4P_2$ fournie aux charges des quatre secondaires et de la puissance P_1 appelée par le primaire :

$$\eta = \frac{4P_2}{P_1}$$

Application numérique :

$$\eta = \frac{4 \times 1,40 \times 10^6}{5,63 \times 10^6} = 0,995$$



Le rendement est excellent, ce qui est normal pour un transformateur de forte puissance.

TRANSFORMATEUR TRIPHASÉ – COUPLAGE – SCHÉMA MONOPHASÉ ÉQUIVALENT



Niveau de difficulté : * Application simple du cours accessible à tous.

Ce problème simple constitue une bonne introduction aux notions de base concernant le transformateur triphasé : représentation normalisée, couplage et indice horaire, schéma monophasé équivalent.

ÉNONCÉ

On considère un transformateur triphasé décrit par sa représentation normalisée (figure 2.1).

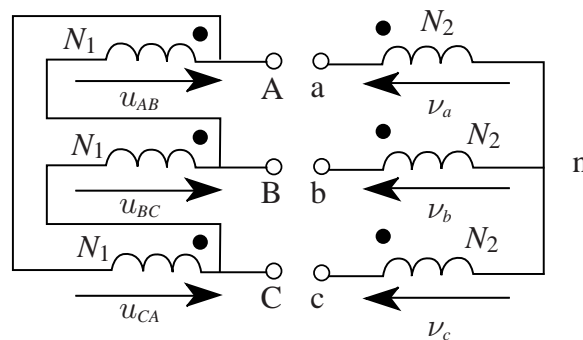


Figure 2.1 - Représentation normalisée du transformateur.

On applique au primaire du transformateur un système triphasé équilibré direct de tensions composées sinusoïdales u_{AB} , u_{AC} et u_{CA} de valeur efficace U_1 et on obtient au secondaire un système triphasé équilibré direct de tensions composées sinusoïdales u_{ab} , u_{bc} et u_{ca} de valeur efficace U_2 .

Chapitre 2 • Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent

Les intensités efficaces des courants en ligne au primaire et au secondaire sont notées respectivement I_1 et I_2 .

Les caractéristiques nominales du transformateur sont les suivantes :

- puissance apparente nominale $S_n = 250$ kVA ;
- valeur efficace nominale des tensions composées au primaire $U_{1n} = 5,20$ kV ;
- fréquence nominale $f_n = 50,0$ Hz.

On néglige les pertes ferromagnétiques.

Deux essais ont été réalisés :

- un essai à vide avec des tensions composées au primaire de valeur efficace nominale U_{1n} : les tensions composées au secondaire ont alors une valeur efficace $U_{2v} = 400$ V ;
- un essai en court-circuit avec des tensions composées au primaire de valeur efficace $U_{1c} = 600$ V : les courants en ligne au secondaire ont une intensité efficace $I_{2c} = 350$ A et la puissance appelée au primaire est $P_{1c} = 7,35$ kW.

A. COUPLAGE ET SCHÉMA MONOPHASÉ ÉQUIVALENT

A.1 Quelle est la signification des points placés à une extrémité de chaque enroulement sur le schéma du transformateur ?

A.2 Calculer le rapport de transformation m du transformateur.

A.3 Pour le fonctionnement à vide du transformateur, représenter sur le même diagramme vectoriel le système triphasé direct des tensions composées au primaire (u_{AB} , u_{AC} , u_{CA}), le système des tensions simples au secondaire (v_a , v_b , v_c) et le système des tensions composées au secondaire (u_{ab} , u_{bc} , u_{ca}) sans respecter les échelles (seules l'allure du diagramme et les valeurs des angles nous intéressent).

A.4 En déduire l'indice horaire H du transformateur et donner le symbole normalisé de l'appareil.

A.5 Exprimer le rapport de transformation m en fonction des nombres de spires N_1 de chaque enroulement primaire et N_2 de chaque enroulement secondaire.

A.6 En déduire la valeur du rapport de transformation par colonne $m_c = \frac{N_2}{N_1}$.

A.7 Le transformateur est constitué de trois noyaux ayant chacun une section $S = 5,00$ dm². L'amplitude du champ magnétique dans le circuit magnétique est $B_M = 1,20$ T. Calculer le nombre de spires N_1 de chaque enroulement primaire. En déduire le nombre de spires N_2 de chaque enroulement secondaire.

A.8 Le transformateur est décrit par son schéma monophasé équivalent avec résistances et inductances de fuites ramenées au secondaire. Donner le modèle de Thévenin vu du secondaire.

A.9 Calculer la résistance des enroulements ramenée au secondaire R_S et la réactance de fuites ramenée au secondaire X_S .

B. FONCTIONNEMENT EN CHARGE

Le primaire du transformateur est alimenté par un système de tensions composées de valeur efficace nominale U_{1n} . Une charge triphasée symétrique est branchée au secondaire (figure 2.2). Chaque phase comporte une résistance $R = 554 \text{ m}\Omega$ et une bobine d'inductance $L = 3,05 \text{ mH}$.

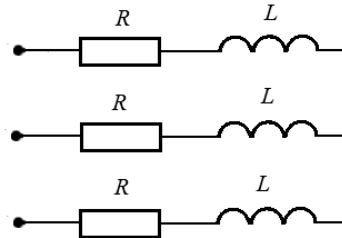


Figure 2.2 - Charge branchée au secondaire du transformateur.

- B.1** Calculer le facteur de puissance $\cos \varphi_2$ de cette charge.
- B.2** Tracer le diagramme vectoriel des tensions correspondant au schéma monophasé équivalent. En déduire l'intensité efficace I_2 des courants en ligne ainsi que la valeur efficace U_2 des tensions composées au secondaire. On peut utiliser une approximation en la justifiant.
- B.3** Calculer la puissance P_2 fournie par le transformateur à la charge.
- B.4** Calculer le rendement η du transformateur.
- B.5** On utilise maintenant une autre charge triphasée symétrique (figure 2.3).

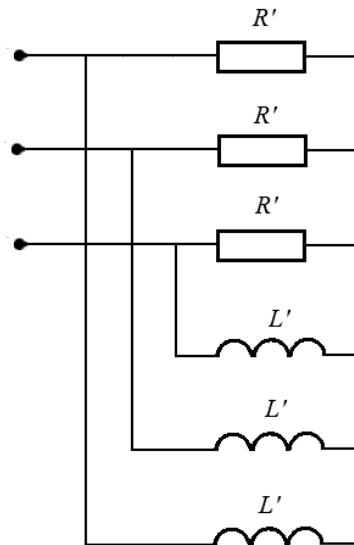


Figure 2.3 - Autre charge branchée au secondaire du transformateur.

Calculer la résistance R' et l'inductance L' pour que cette charge soit équivalente à la précédente.

SOLUTION

A. COUPLAGE ET SCHÉMA MONOPHASÉ ÉQUIVALENT

A.1 Comme pour le transformateur monophasé, les points repèrent les bornes homologues des enroulements. Ce pointage permet de connaître le sens de bobinage relatif des phases du primaire et du secondaire sans avoir besoin d'une représentation détaillée du circuit magnétique et des enroulements. Avec un transformateur triphasé, la différence est que les enroulements sont répartis sur trois noyaux. Pour les bobines d'une même colonne, les tensions entre l'extrémité pointée et l'autre extrémité ont même polarité instantanée. Par ailleurs, dans la relation d'Hopkinson, pour un contour donné, les forces magnétomotrices sont précédées d'un signe + si la flèche d'orientation du courant entre par une extrémité pointée et d'un signe – dans le cas contraire.

A.2 Le rapport de transformation est égal au quotient de la valeur efficace U_{2v} des tensions composées au secondaire à vide et de la valeur efficace U_{1n} des tensions composées au primaire :

$$m = \frac{U_{2v}}{U_{1n}}$$

Application numérique :

$$m = \frac{400}{5,20 \times 10^3} = 7,69 \times 10^{-2}$$



Comme en monophasé, le rapport de transformation peut être défini de façon différente (voir le problème n° 1).

A.3 Compte tenu du couplage (triangle au primaire et étoile au secondaire) et du pointage des bobines, les tensions simples au secondaire (v_a, v_b, v_c) sont en phase avec les tensions composées correspondantes au primaire (u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}) (figure 2.4).

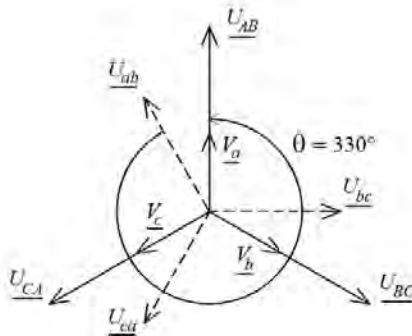


Figure 2.4 – Diagramme vectoriel des tensions au primaire et au secondaire.

Les tensions composées au secondaire sont obtenues par les relations :

$$u_{ab} = v_a - v_b$$

$$u_{bc} = v_b - v_c$$

$$u_{ca} = v_c - v_a$$



Comme nous sommes en régime triphasé équilibré, il suffit de construire le vecteur correspondant à la tension d'une phase puis de compléter le système équilibré direct pour les autres phases.

A.4 Le déphasage d'une tension composée au secondaire (basse tension) par rapport à la tension composée homologue au primaire (haute tension) est $\theta = 330^\circ$. L'indice horaire du transformateur est :

$$H = \frac{330}{30} = 11$$

Le diagramme permet de voir rapidement l'indice horaire. En effet, en considérant le cadran d'une montre à aiguilles et en plaçant le vecteur représentant la haute tension u_{AB} sur le nombre 12, le vecteur représentant la basse tension u_{ab} pointe l'heure qui correspond à l'indice horaire (figure 2.5).

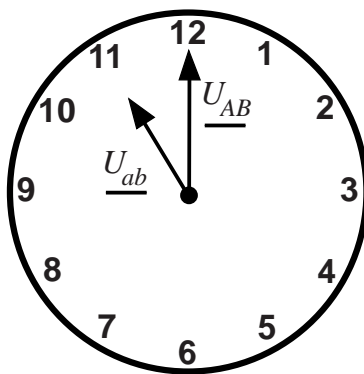


Figure 2.5 - Indice horaire.

Le symbole normalisé du transformateur est Dy11 puisque :

- l'enroulement haute tension (désigné par une majuscule) est couplé en triangle (lettre *D*) ;
- l'enroulement basse tension (désigné par une minuscule) est couplé en étoile (lettre *y*) ;
- l'indice horaire du transformateur est 11.

Chapitre 2 • Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent

A.5 La valeur efficace V_{2v} des tensions simples au secondaire est égale au produit du rapport $\frac{N_2}{N_1}$ des nombres de spires et de la valeur efficace U_1 des tensions composées au primaire :

$$V_{2v} = \frac{N_2}{N_1} U_1$$

La valeur efficace U_{2v} des tensions composées au secondaire est alors :

$$U_{2v} = \sqrt{3} V_{2v} = \sqrt{3} \frac{N_2}{N_1} U_1$$

Le rapport de transformation m s'exprime donc par :

$$m = \sqrt{3} \frac{N_2}{N_1}$$

A.6 La formule précédente permet d'obtenir le rapport de transformation par colonne :

$$m_c = \frac{m}{\sqrt{3}}$$

Application numérique :

$$m_c = \frac{7,69 \times 10^{-2}}{\sqrt{3}} = 4,44 \times 10^{-2}$$

A.7 La formule de Boucherot exprime la valeur efficace U_1 de la tension aux bornes d'une phase du primaire (tension composée puisque le primaire est couplé en triangle) en fonction de l'amplitude B_M du champ magnétique, du nombre de spires N_1 d'une phase du primaire, de la section S du noyau et de la fréquence f :

$$U_1 = \pi \sqrt{2} B_M N_1 S f$$

Le nombre de spires N_1 d'une phase du primaire est ainsi :

$$N_1 = \frac{U_1}{\pi \sqrt{2} B_M S f}$$

Application numérique :

$$N_1 = \frac{5,20 \times 10^3}{\pi \sqrt{2} \times 1,20 \times 5,00 \times 10^{-2} \times 50,0} = 390$$

Le rapport de transformation par colonne chiffré à la question précédente permet d'obtenir le nombre de spires N_2 d'une phase du secondaire :

$$N_2 = m_c N_1$$

Application numérique :

$$N_2 = 4,44 \times 10^{-2} \times 390 = 17$$

A.8 La force électromotrice du modèle de Thévenin de la sortie du schéma monophasé équivalent est la tension à vide v_{2v} . L'impédance interne comprend la résistance des enroulements ramenée au secondaire R_S et l'inductance de fuites ramenée au secondaire L_S (figure 2.6).

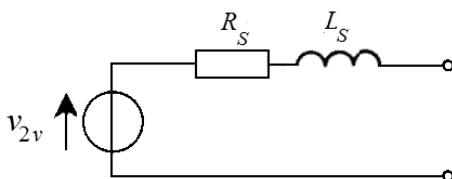


Figure 2.6 - Modèle de Thévenin vu du secondaire.

A.9 Dans l'essai en court-circuit, comme les pertes ferromagnétiques sont négligeables, la puissance active P_{1c} appelée par le transformateur est égale aux pertes par effet Joule qui correspondent à trois fois la puissance dissipée dans la résistance R_S du schéma monophasé équivalent :

$$P_{1c} = 3R_S I_{2c}^2$$

Nous en déduisons la résistance R_S :

$$R_S = \frac{P_{1c}}{3I_{2c}^2}$$

Application numérique :

$$R_S = \frac{7,35 \times 10^3}{3 \times 350^2} = 20,0 \text{ m}\Omega$$

Nous pouvons ensuite calculer le module Z_S de l'impédance de R_S et L_S :

$$Z_S = \frac{mV_{1c}}{I_{2c}} = \frac{mU_{1c}}{I_{2c}\sqrt{3}}$$

Application numérique :

$$Z_S = \frac{7,69 \times 10^{-2} \times 600}{350 \times \sqrt{3}} = 76,1 \text{ m}\Omega$$

Ce module s'écrit également :

$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_S^2}$$

Chapitre 2 • Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent

Nous en déduisons la valeur de la réactance X_S :

$$X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

Application numérique :

$$X_S = \sqrt{(76,1 \times 10^{-3})^2 - (20,0 \times 10^{-3})^2} = 73,4 \text{ m}\Omega$$

B. FONCTIONNEMENT EN CHARGE

B.1 Le facteur de puissance $\cos \varphi_2$ de la charge est le quotient de la résistance R et du module Z de l'impédance d'une phase :

$$\cos \varphi_2 = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L2\pi f)^2}}$$

Application numérique :

$$\cos \varphi_2 = \frac{554 \times 10^{-3}}{\sqrt{(554 \times 10^{-3})^2 + (3,05 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 50,0)^2}} = 0,501$$

B.2 Le diagramme vectoriel des tensions (figure 2.7) traduit :

- la relation obtenue pour le secondaire du schéma monophasé équivalent qui s'écrit, avec les grandeurs complexes :

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_{2v} - R_S \underline{I}_2 - jX_S \underline{I}_2$$

- la relation due à la charge :

$$\underline{V}_2 = (R + jL\omega) \underline{I}_2$$

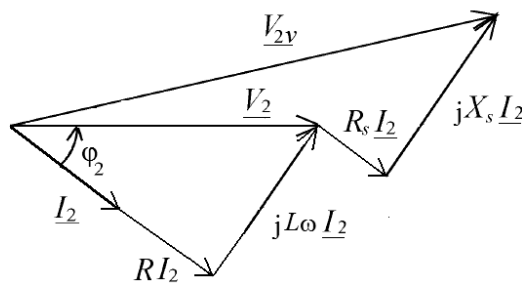


Figure 2.7 - Diagramme vectoriel des tensions.

Égalons les deux expressions de \underline{V}_2 précédentes :

$$\underline{V}_{2v} - R_S \underline{I}_2 - jX_S \underline{I}_2 = (R + jL\omega) \underline{I}_2$$

Nous en déduisons l'intensité complexe du courant au secondaire :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_{2v}}{R_S + jX_S + R + jL\omega}$$

L'intensité efficace I_2 des courants en ligne au secondaire est obtenue en prenant le module de cette expression :

$$I_2 = \frac{V_{2v}}{\sqrt{(R_S + R)^2 + (X_S + L\omega)^2}} = \frac{U_{2v}}{\sqrt{3} \sqrt{(R_S + R)^2 + (X_S + L2\pi f)^2}}$$

Application numérique :

$$I_2 = \frac{400}{\sqrt{3} \sqrt{[(20,0 + 554) \times 10^{-3}]^2 + (73,4 \times 10^{-3} + 3,05 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 50,0)^2}} = 196 \text{ A}$$

Pour obtenir la valeur efficace U_2 des tensions composées au secondaire, on peut d'abord chiffrer la chute de tension simple définie par :

$$\Delta V_2 = V_{2v} - V_2$$

La chute de tension composée ΔU_2 est obtenue à partir de la chute de tension simple ΔV_2 :

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \Delta V_2$$

Si les chutes de tension résistive $R_S I_2$ et inductive $X_S I_2$ sont suffisamment petites devant la valeur efficace V_{2v} de la tension à vide, la chute de tension simple peut être calculée par la formule approchée :

$$\Delta V_2 = R_S I_2 \cos \varphi_2 + X_S I_2 \sin \varphi_2$$

Ici, nous avons :

$$R_S I_2 = 20,0 \times 10^{-3} \times 196 = 3,92 \text{ V}$$

$$X_S I_2 = 73,4 \times 10^{-3} \times 196 = 14,4 \text{ V}$$

$$V_{2v} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231 \text{ V}$$

Chapitre 2 • Transformateur triphasé – Couplage – Schéma monophasé équivalent

Nous pouvons estimer que les conditions de l'approximation sont vérifiées et calculer la chute de tension composée par la formule approchée :

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} (R_s I_2 \cos \varphi_2 + X_s I_2 \sin \varphi_2)$$

Le déphasage φ_2 des courants en ligne par rapport aux tensions simples correspondantes est positif puisque la charge est inductive. Nous pouvons donc calculer son sinus :

$$\sin \varphi_2 = \sin(\arccos 0,501) = 0,865$$

La chute de tension composée ΔU_2 vaut ainsi :

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} (20,0 \times 10^{-3} \times 196 \times 0,501 + 73,4 \times 10^{-3} \times 196 \times 0,865) = 24,9 \text{ V}$$

La valeur efficace des tensions composées au secondaire est alors :

$$U_2 = U_{2v} - \Delta U_2$$

Application numérique :

$$U_2 = 400 - 24,9 = 375 \text{ V}$$



Il existe une formule plus précise (mais aussi plus compliquée) pour chiffrer la chute de tension, mais son usage est rarement nécessaire. Dans notre cas, la différence n'apparaît que sur le deuxième chiffre après la virgule, ce qui est parfaitement négligeable compte tenu de la précision des données.

B.3 La puissance P_2 fournie par le transformateur à la charge est :

$$P_2 = \sqrt{3} U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

Application numérique :

$$P_2 = \sqrt{3} \times 375 \times 196 \times 0,501 = 63,8 \text{ kW}$$

B.4 Comme les seules pertes sont dues à l'effet Joule, le rendement η du transformateur est :

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + 3R_s I_2^2}$$

Application numérique :

$$\eta = \frac{63,8 \times 10^3}{63,8 \times 10^3 + 3 \times 20,0 \times 10^{-3} \times 196^2} = 0,965$$

B.5 Les résistances et les bobines de la nouvelle charge formant deux récepteurs en étoile, elles sont soumises aux tensions simples du secondaire du transformateur.

Les deux charges sont équivalentes si elles consomment la même puissance active et la même puissance réactive :

$$3 \frac{V_2^2}{R'} = 3 R I_2^2$$

$$3 \frac{V_2^2}{L' \omega} = 3 L \omega I_2^2$$

Nous en déduisons :

$$R' = \frac{V_2^2}{R I_2^2} = \frac{U_2^2}{3 R I_2^2}$$

$$L' = \frac{V_2^2}{L \omega^2 I_2^2} = \frac{U_2^2}{3 L (2\pi f)^2 I_2^2}$$

Application numérique :

$$R' = \frac{375^2}{3 \times 554 \times 10^{-3} \times 196^2} = 2,20 \Omega$$

$$L' = \frac{375^2}{3 \times 3,05 \times 10^{-3} \times (2\pi \times 50,0)^2 \times 196^2} = 4,05 \text{ mH}$$

