ECOLE SUPERIEURE DE GENIES (ESGE-SA)

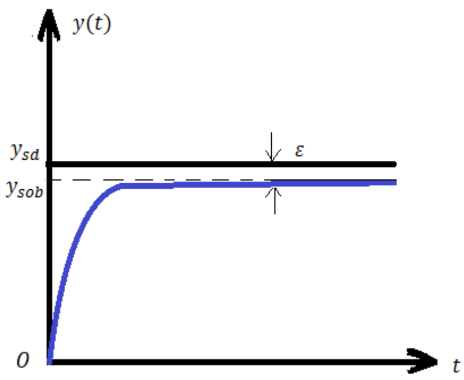
CHAPITRE 6 : ETUDE DE LA PRECISION DES SYSTEMES

M. Oumar DIOR;ESGE
Ingénieur Electromécanicien

Chapitre 6: ÉTUDE DE LA PRECISION DES SYSTEMES

6.1) Définition

Un système est dit précis si au régime stationnaire sa réponse obtenue est égale à sa réponse que l'on désirait obtenir.



y_{sd} : la réponse désirée au régime stationnaire,

y_{sob} : la réponse obtenue au régime stationnaire.

Figure 6.1 : exemple de réponse d'un système

La précision est caractérisée par l'erreur $\varepsilon = y_{sd} - y_{sob}$ que peut presenter le système.

Plus le système est précis, plus ε est plus petite.

Pour un système à 100% précis $\varepsilon = 0 \quad donc \quad y_{sd} = y_{sob}$

La précision peut être exprimée en pourcentage.

$$\varepsilon = \frac{y_{sd} - y_{sob}}{y_{sd}} \times 100$$

NB : la précision peut être déterminée :

- ✓ à la sortie du système, s'il s'agit des systèmes régulés c'est-à-dire sans boucle de retour,
- ✓ à l'entrée du système, s'il s'agit des systèmes asservis c'est-à-dire avec boucle de retour.

6.2) Les différents types de précision

La précision peut être exprimée de différentes manières :

- ✓ Sous la forme opérationnelle :

- $\varepsilon(P) = E(P) - R(P)$; s'il s'agit des systèmes asservis

Où $E(P)$: l'entrée opérationnelle,

$R(P)$: le retour opérationnel.

- $\varepsilon(P) = S_d(P) - S_{ob}(P)$ s'il s'agit des systèmes régulés

Où $S_d(P)$: la sortie opérationnelle désirée,

$S_{ob}(P)$: la sortie opérationnelle réellement obtenue.

- ✓ Sous forme dynamique $\varepsilon(t)$

$\varepsilon(t)$ étant l'original de $\varepsilon(P)$. Elle est alors appelée la précision dynamique.

- ✓ Sous la forme statique $\varepsilon = cste$

On appelle la précision statique, la précision qui est déterminée soit à l'état final $\varepsilon_{+\infty}$, soit à l'état initial ε_0

$$\varepsilon_{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{t \to 0} \varepsilon(t)$$

<u>NB</u> : ces précisions statiques peuvent être déterminées à partir de $\varepsilon(P)$ en appliquant respectivement les théorèmes des valeurs finale et initiale.

<u>Théorème de la valeur finale</u>

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \to 0} P.\varepsilon(t) = \varepsilon_{+\infty}$$

<u>Théorème de la valeur initiale</u>

$$\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = \lim_{P \to +\infty} P.\varepsilon(t) = \varepsilon_0$$

6.3) **<u>Les différents types de systèmes et leurs précisions</u>**

Il existe deux types de systèmes :

- Les systèmes à une entrée,

- Les systèmes à une entrée et une perturbation.

6.3.1) **Les systèmes à une entrée**

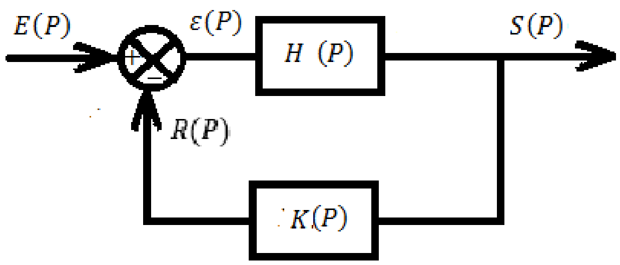


Figure 6.2 : schéma bloc d'un système asservi avec seulement le signal d'entrée

Démontrons que la précision d'un tel système s'exprime par l'expression suivante :

$$\varepsilon(P) = \frac{1}{1 + K(P).H(P)}.E(P)$$

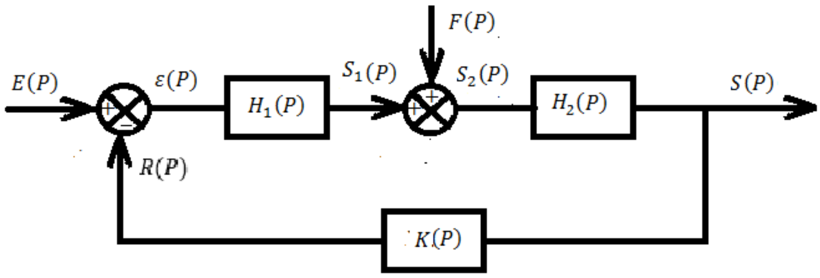
$K(P) = \frac{R(P)}{S(P)} \Longrightarrow R(P) = K(P).S(P)$ et que $H(P) = \frac{S(P)}{\varepsilon(P)} \Longrightarrow S(P) = \varepsilon(P).H(P)$

Alors $R(P) = K(P).H(P).\varepsilon(P).$

Ainsi $\varepsilon(P) = E(P) - R(P) = E(P) - K(P).H(P).\varepsilon(P)$

$\varepsilon(P)[1 + K(P).H(P)] = E(P)$ alors $\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+K(P).H(P)}$

6.3.2) Les systèmes à une entrée et une perturbation



$E(P)$: l'entrée

$F(P)$: la perturbation

Figure 6.3 : schéma bloc d'un système asservi avec un le signal d'entrée et un signal de perturbation

Démontrer que la précision du système est exprimée par la relation suivante

$$\varepsilon(P) = \frac{1}{1 + H_1(P).H_2(P).K(P)}.E(P) - \frac{H_2(P).K(P)}{1 + H_1(P).H_2(P).K(P)}.F(P)$$

$$\varepsilon(P) = \varepsilon_E(P) - \varepsilon_F(P)$$

Où

$\varepsilon_E(P) = \frac{1}{1+H_1(P).H_2(P).K(P)}.E(P)$ précision due à l'entrée $E(P)$

$\varepsilon_F(P) = \frac{H_2(P).K(P)}{1+H_1(P).H_2(P).K(P)}.F(P)$ précision due à la perturbation $F(P)$

$$R(P) = R_E(P) - R_F(P)$$

Solution :

$\varepsilon(P) = E(P) - R(P)$ avec $R(P) = K(P).S(P)$

$S(P) = H_2(P).S_2(P)$ où $S_2(P) = S_1(P) + F(P)$

D'où $S(P) = H_2(P).S_1(P) + H_2(P).F(P)$

$S_1(P) = H_1(P).\varepsilon(P)$ donc $S(P) = H_2(P).H_1(P).\varepsilon(P) + H_2(P).F(P)$

Alors $R(P) = K(P).S(P) = K(P).H_2(P).H_1(P).\varepsilon(P) + K(P).H_2(P).F(P)$

En remplaçant l'expression de $R(P)$ dans $\varepsilon(P)$, nous obtenons :

$\varepsilon(P) = E(P) - R(P) = E(P) - K(P).H_2(P).H_1(P).\varepsilon(P) + K(P).H_2(P).F(P)$

En transposant, nous avons :

$$\varepsilon(P) + K(P).H_2(P).H_1(P).\varepsilon(P) = E(P) - K(P).H_2(P).F(P)$$

$$\varepsilon(P).[1 + K(P).H_2(P).H_1(P)] = E(P) - K(P).H_2(P).F(P)$$

Alors $\varepsilon(P) = \frac{1}{1+K(P).H_2(P).H_1(P)}.E(P) - \frac{K(P).H_2(P)}{1+K(P).H_2(P).H_1(P)}.F(P)$

Application

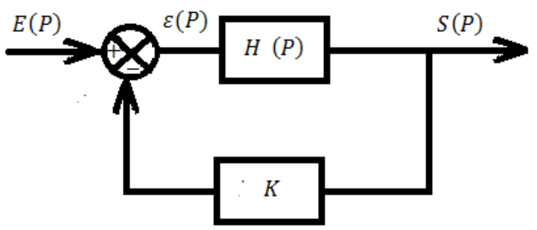
Soit un système de transmittance $H(P) = \frac{H_0}{1+\tau.P}$

On asservit ce système avec un retour proportionnel K.

1) Réaliser le schéma bloc de l'asservissement

2) Déterminer la précision $\varepsilon(P)$ et en déduire l'erreur ou la précision dynamique $\varepsilon(t)$.
3) De deux manières déterminer l'erreur statique à l'infini.

Solution :



$$E(P) = \frac{E}{P}$$

et que $\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+K.H(P)}$

$$\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+K.\frac{H_0}{1+\tau.P}} = \frac{E(P).(1+\tau.P)}{1+\tau.P+K.H_0} = \frac{E.(1+\tau.P)}{P(1+K.H_0).\left[1+\frac{\tau.P}{1+K.H_0}\right]}$$

Posons $\tau' = \frac{\tau}{1+K.H_0}$ Alors $\varepsilon(P) = \frac{E.(1+\tau.P)}{P(1+K.H_0).[1+\tau'.\mathrm{P}\,]} = \frac{\tau.E.(P+\frac{1}{\tau})}{\tau'.P(1+K.H_0).\left[P+\frac{1}{\tau'}\right]}$

Or $\frac{\tau}{\tau'.(1+K.H_0)} = \frac{\tau}{\frac{\tau}{1+K.H_0}.(1+K.H_0)} = \frac{\tau}{\tau} = 1$

Alors $\varepsilon(P) = \frac{E.(P+\frac{1}{\tau})}{P.\left[P+\frac{1}{\tau'}\right]} = \frac{E.(P+\omega_0)}{P.[P+\omega_0'\,]}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et que $\omega_0' = \frac{1}{\tau'}$

<u>Déduisons l'erreur ou la précision dynamique</u>

$$\frac{(P+\omega_0)}{P.[P+\omega_0'\,]} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P+\omega_0'} = \frac{(A+B).P + A.\omega_0'}{P.(P+\omega_0')}$$

Par identification on a : $\begin{cases} A+B=1 \\ A.\omega_0' = \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A = \frac{\omega_0}{\omega_0'} \end{cases}$

Nous avons $A=\frac{\omega_0}{\omega_0'} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau'}} = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\frac{\tau}{1+K.H_0}}{\tau} = \frac{1}{1+K.H_0}$

$$B = 1 - A = 1 - \frac{1}{1+K.H_0} = \frac{1+K.H_0-1}{1+K.H_0} = \frac{K.H_0}{1+K.H_0}$$

$$\varepsilon(P) = \frac{E.(P+\omega_0)}{P.[P+\omega_0'\,]} = E.\left[\frac{A}{P} + \frac{B}{P+\omega_0'}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(P) = E.\left[\frac{\frac{1}{1+K.H_0}}{P} + \frac{\frac{K.H_0}{1+K.H_0}}{P+\omega_0{}'}\right] = \frac{E}{1+K.H_0}\left[\frac{1}{P} + \frac{K.H_0}{P+\omega_0{}'}\right]$$

Or $\frac{1}{P} \to e^{0.t} = e^0 = 1$ et que $\frac{K.H_0}{P+\omega_0{}'} \to K.H_0.e^{-\omega_0{}'t}$

$$\varepsilon(t) = \frac{E}{1+K.H_0}.\left[1 + K.H_0.e^{-\omega_0{}'t}\right]$$

<u>Déterminons de deux manières l'erreur statique à l'infini</u>

$\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{P\to 0} \frac{E}{1+K.H_0}\left[1 + K.H_0.e^{-\omega_0{}'t}\right] = \frac{E}{1+K.H_0}$

$\lim\limits_{P\to 0} P.\varepsilon(P) = \lim\limits_{P\to 0} \frac{P.E.(P+\omega_0)}{P.[P+\omega_0{}']} = \lim\limits_{P\to 0} \frac{E.(P+\omega_0)}{[P+\omega_0{}']} = E.\frac{\omega_0}{\omega_0{}'} = E.\frac{\tau'}{\tau} = \frac{E}{1+K.H_0}$

Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{P\to 0} P.\varepsilon(P) = \frac{E}{1+K.H_0}$

donc le théorème est vérifié