ECOLE SUPERIEURE DE GENIES (ESGE)

CHAPITRE 3 : ETUDES DES SYSTEMES PAR LA METHODE HARMONIQUE OU FREQUENTIELLE

M. Oumar DIOR, ESGE

Ingénieur Electromécanicien

Chapitre 3: ETUDE DES SYSTEMES PAR LA METHODE HARMONIQUE OU FREQUENTIELLE

3.1. Introduction

Dans l'étude harmonique des systèmes, on étudie la variation des arguments et les gains des systèmes en fonction de la variation de leur pulsation donc de leur fréquence. Pour cela, on détermine d'abord la transmittance ou la fonction de transfert opérationnelle du système et l'opérateur P dans cette fonction est exprimé en fonction de la pulsation par la relation :

$$P = j\omega = j2\pi f$$

où ω : la pulsation du système en rad/s

f : la fréquence du système en Hz

3.2. La fonction de transfert ou transmittance

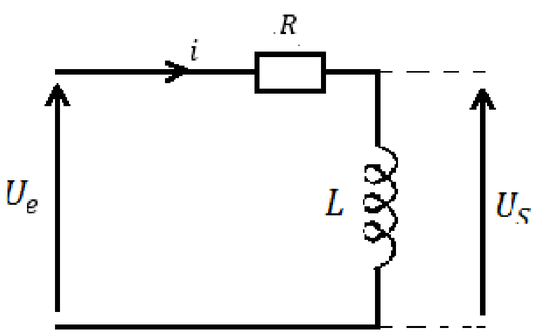
On appelle transmittance d'un système, le rapport de son signal de sortie et de son signal d'entrée. Elle est SYMBOLIS2E par des lettres majuscules comme H, T ou F, etc.

Figure 3.1 : modèle d'un système

où $Y(P)$: le signal de sortie $X(P)$: le signal d'entrée

$$H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$$

Exemple : Déterminer la transmittance opérationnelle du système représenté sur la figure 2.



U_s : le signal de sortie

U_e : le signal d'entrée

$$U_S = U_L = \frac{Ldi}{dt} = LPI(P)$$

$$U_e = Ri + \frac{Ldi}{dt}$$

Figure 3.2 : circuit RL alimenté par une tension continue

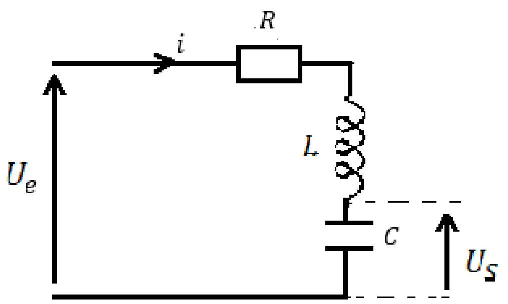
$$\Longrightarrow \quad U_e(P) = RI(P) + LPI(P) = (R + LP)I(P)$$

$$H(P) = \frac{U_S(P)}{U_e(P)} = \frac{LPI(P)}{(R+LP)I(P)}$$

$$= \frac{LP}{R+LP} = \frac{LP}{L\left(\frac{R}{L}+P\right)} = \frac{P}{\frac{R}{L}+P}$$

On sait que $\tau = \frac{L}{R}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ $\qquad H(P) = H_0 \frac{P}{P+\omega_0}$

<u>Exercice</u> :



$U_c \longrightarrow$ le signal de sortie

$U_e \longrightarrow$ le signal d'entrée

Soit le circuit RLC serie alimenté par une tension en continue

Déterminer la transmittance du système et en déduire une équation différentielle

<u>Solution</u> :

$$U_e = U_R + U_L + U_C$$

$$= Ri + Li\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

$$U_e(P) = RI(P) + LPI(P) + \frac{1}{C}I(P)$$

$$U_s = U_C = \frac{1}{C}\int idt \quad \Longrightarrow \quad U_s(P) = \frac{1}{CP}I(P)$$

$$H(P) = \frac{U_S(P)}{U_e(P)} = \frac{\cancel{I(P)}\frac{1}{CP}}{\cancel{I(P)}(R+LP+\frac{1}{CP})} = \frac{\frac{1}{CP}}{R+LP+\frac{1}{CP}}$$

$$H(P) = \frac{1}{CPR+CLP^2+1} = \frac{1}{CLP^2CPR++1}$$

$$H(P) = \frac{1}{LC\left(P^2+\frac{RC}{LC}P+\frac{1}{LC}\right)} = \frac{1}{LC\left(P^2+\frac{R}{L}P+\frac{1}{LC}\right)}$$

$$H(P) = \frac{H_0}{P^2+2m\omega_0P+\omega_0{}^2} = \frac{U_S(P)}{U_e(P)}$$

Par identification on a : $Y(P) = U_s(P) \quad X(P) = U_e(P)$

$$AY"+BY"+CY=X \qquad \Longrightarrow \qquad A\frac{d^2Y}{dt^2}+B\frac{dY}{dt}+CY=X$$

$$AP^2Y(P)+BPY(P)+CY(P)=X(P)$$

$$P^2Y(P)+\frac{B}{A}PY(P)+\frac{C}{A}Y(P)=\frac{1}{A}X(P)$$

$$P^2Y(P)+2m\omega_0PY(P)+{\omega_0}^2Y(P)=\propto X(P)$$

$$Y(P)(P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2)=\propto X(P) \quad \text{donc} \quad \frac{d^2U_s(t)}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dU_s(t)}{dt}+{\omega_0}^2U_s(t)=\propto U_e(t)$$

$$Y(P)=\frac{\propto X(P)}{P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2}$$

$$H(P)=\frac{Y(P)}{X(P)}=\frac{\frac{\propto X(P)}{P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2}}{X(P)}$$

$$H(P)=\frac{\propto}{P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2}=\frac{H_0}{P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2}\,;\ H_0=\propto$$

$$\propto=\frac{1}{LC} \quad ; \quad 2m\omega_0=\frac{R}{L}$$

$${\omega_0}^2=\frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\,; \quad \tau=\frac{1}{\omega_0}=\sqrt{LC}$$

$$2m\omega_0=\frac{R}{2\omega_0L}=\frac{R\sqrt{LC}}{2L}=\frac{R}{2}\times\sqrt{\frac{LC}{L^2}}$$

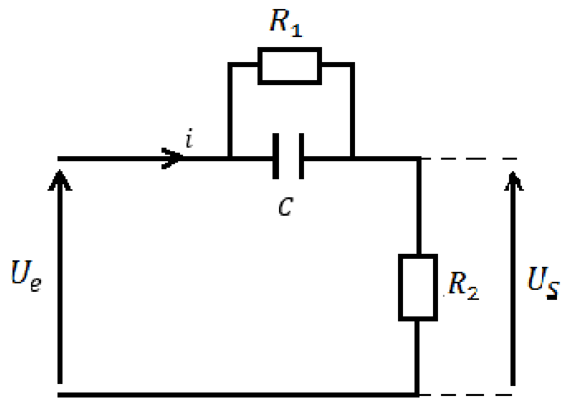
$$Y_s(t)=\frac{\propto}{{\omega_0}^2}X=\frac{1/LC}{1/LC}X=\left(\frac{1}{LC}\times\frac{LC}{1}\right)X=1X$$

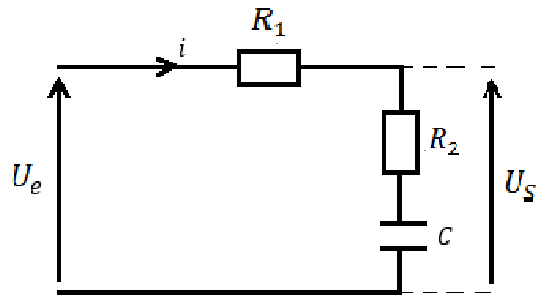
H_0

$$H(P)=\frac{\propto}{P^2+2m\omega_0P+{\omega_0}^2}$$

$$H(P)=\frac{\propto}{{\omega_0}^2\left[\left(\frac{P}{\omega_0}\right)^2+\frac{2m}{\omega_0}P+1\right]}=\frac{H_0}{\left(\frac{P}{\omega_0}\right)^2+\frac{2m}{\omega_0}P+1} \quad ; \quad \frac{\propto}{{\omega_0}^2}=H_0$$

Exercice :





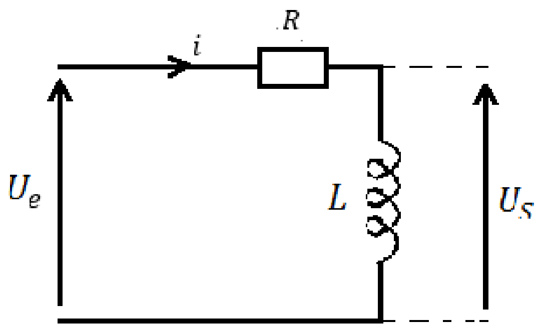
Soient les circuits de correcteurs. Déterminer $H(P) = \frac{U_S(P)}{U_e(P)}$ pour ces deux circuits.

3.3. La courbe de nyquist ou lieu de transfert de Nyquist

La courbe de Nyquist représente la variation des imaginaires de la fonction de transfert d'un système en fonction de ses réels $I_{mag} = [H(j\omega)] = f[R_e(H(j\omega))]$ pour les pulsations allant de 0 à $+\infty$ $(0 \leq \omega \leq +\infty)$.

Pour cela, il faut exprimer d'abord la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω en remplaçant $P = j\omega$ (où j est le vecteur unitaire de la partie imaginaire et ω la pulsation en rad/s).

Exemple :



Tracer la courbe de Nyquist du système ayant comme signal d'entrée U_e et signal de sortie U_S.

$$H(P) = \frac{U_S(P)}{U_e(P)}$$

Figure 3.3 : circuit RL serie alimenté par une tension continue

$$U_e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \Longrightarrow \quad U_e(P) = RI(P) + LPI(P) = (R + LP)I(P)$$

$$U_s = L\frac{di}{dt} \quad \Longrightarrow \quad U_s(P) = LPI(P)$$

$$H(P) = \frac{LPI(P)}{(R+LP)I(P)} = \frac{LP}{R+LP} \qquad \Longrightarrow \qquad H(P) = \frac{LP}{L(\frac{R}{L}+P)} = \frac{P}{\frac{R}{L}+P}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$

$$H(P) = \frac{P}{\omega_0+P} \qquad ; \qquad \text{on pose } P = j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0+j\omega} = \frac{j\omega}{\omega_0\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega(\omega_0+j\omega)}{(\omega_0+j\omega)(\omega_0+j\omega)} = \frac{j\omega\omega_0-j^2\omega^2}{{\omega_0}^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega^2+j\omega\omega_0}{{\omega_0}^2+\omega^2} = \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2+\omega^2} + j\,\frac{\omega\omega_0}{{\omega_0}^2+\omega^2}$$

$$R_e[H(j\omega)] = \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2+\omega^2} \qquad \text{et} \qquad I_{mag}[H(j\omega)] = \frac{\omega\omega_0}{{\omega_0}^2+\omega^2}$$

$$H(P) = \frac{LP}{R+LP} = \frac{LP}{R\left(1+\frac{L}{R}P\right)} = \frac{\tau P}{1+\tau P}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(j\omega) = \dfrac{j\tau\omega)}{1+j\tau\omega)} \\ \text{on pose} \quad \tau = \dfrac{1}{\omega_0} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad H(j\omega) = f(Re[H(j\omega)])$$

Dressons le tableau de valeurs $I_{mag}[H(j\omega)] = \frac{\omega\omega_0}{{\omega_0}^2+\omega^2}$

Tableau : valeur de $R_e[H(j\omega)]$ et $I_{mag}[H(j\omega)]$ en fonction de ω

ω	0	$\frac{\omega_0}{10}$	$\frac{\omega_0}{5}$	$\frac{\omega_0}{2}$	ω_0	$2\omega_0$	$5\omega_0$	$10\omega_0$	$+\infty$
$R_e[H(j\omega)]$	0	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{26}$	$\frac{100}{101}$	1
$I_{mag}[H(j\omega)]$	0	$\frac{10}{101}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{10}{101}$	0

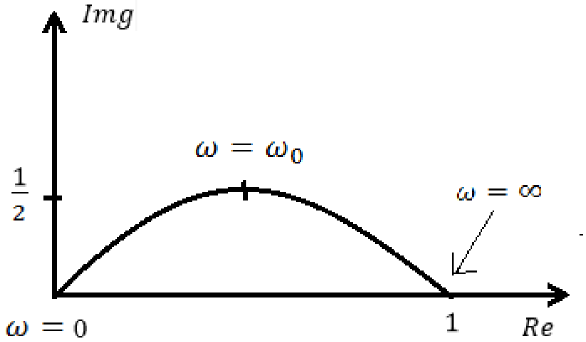


Figure 3.4 : courbe de Nyquist du circuit RL alimenté par une tension continue

3.3. La courbe de Bode ou lieu de transfert de Bode

On appelle courbe de Bode, la variation du gain de la fonction de transfert en fonction de la variation de la pulsation.

$G = 20\log|H(j\omega)|$ où $G \longrightarrow$ le gain en décibel (dB)

$\omega \longrightarrow$ le pulsation en radians par seconde (rad/s)

$H(j\omega) \longrightarrow$ la transmittance du système

La deuxième courbe de Bode est la courbe de l'argument. C'est la variation des arguments en fonction de la variation de la pulsation du système.

<u>Exemple</u> : Soit le système de l'exemple précédent

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad ; \quad G = 20\log\left|\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right|$$

- Si $\omega \ll \omega_0$ c.à.d. $\omega \longrightarrow 0$

$$1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad G = 20\log\left|\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1}\right| = 20\log\left|j\frac{\omega}{\omega_0}\right| = \lim_{\omega\to 0} 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\infty$$

$\omega \longrightarrow 0$: cela veut dire que la droite passant par $\omega = 0$ est asymptote verticale.

$$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- Si $\omega \gg \omega_0$ c.à.d. $\omega \longrightarrow +\infty$

$$1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx j\frac{\omega}{\omega_0} \quad 1 \quad \Rightarrow \quad G = 20\log\left|\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| = 20\log 1 = 0$$

$$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg\left(\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg 1 = 0$$

- Si $\omega \longrightarrow \omega_0$

$$1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 + j \qquad \Longrightarrow \qquad G = 20\log\left|\frac{j\frac{\omega_0}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega_0}{\omega_0}}\right|$$

$$G_0 = 20\log\left|\frac{j}{1+j}\right| = 20\log|j| - 20\log|1+j|$$

$$G_0 = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1^2+1^2} = 0 - 20\log\sqrt{2} = -20\log 2^{\frac{1}{2}}$$

$$G_0 = -\frac{1}{2}\times 20\log 2 = -10\log 2 = -10\log 2 = -3dB$$

$$\varphi_0 = \arg H(j\omega_0) = \arg\left(\frac{j\frac{\omega_0}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) = \arg\ (j) - \arg\ (1+j) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Traçons les courbes de Bode

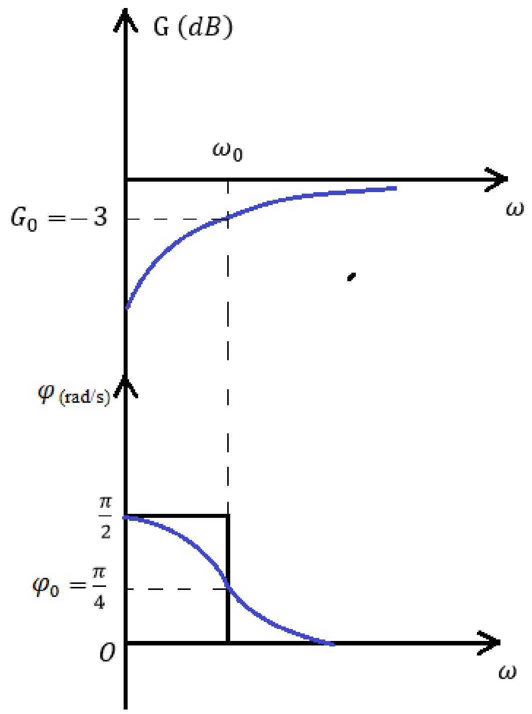


Figure 3.5 : courbe de Bode d'un circuit RL série alimenté par une tension continue

Exercice :

Soit la fonction de transfert d'un système : $H(P) = \frac{1}{P(P+2)}$

Tracer les courbes de Bode et de Nyquist