ECOLE SUPERIEURE DE GENIES (ESGE-SA)

CHAPITRE 5 : ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES

M. Oumar DIOR, ESGE
Ingénieur Electromécanicien

Chapitre 5 : **ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES**

5.1. Définition

Un système est dit stable s'il peut revenir à son état stationnaire en un temps très court après qu'il ait reçu une perturbation. Un système stable doit être rapide et précis.

5.2. Etude de la stabilité par utilisation de la fonction de transfert à boucle fermée (FTBF)

On appelle fonction de transfert à boucle fermé la transmittance d'un système bouclé ou asservi. Elle est égale au produit des transmissions de la chaine directe sur un plus le produit des transmittances des deux chaines du système.

5.2.1. Par la méthode des pôles

Procédure de la méthode

On détermine les pôles de la FTBF et on analyse leurs signes.

- Si un seul pôle est positif, on dit que le système est instable
- Si tous les pôles sont négatifs, on dit que le système est stable.

Exemple 1 :

$$H(P) = \frac{1}{(P-P_1)(P+P_2)} = \frac{y(P)}{E(P)}$$

$y(P) = H(P).E(P)$

Les pôles $P = P_1 > 0$ et $P = -P_2 < 0$

Si P_1 et P_2 tous des réels positifs

$$y(P) = \frac{E}{P(P-P_1)(P+P_2)}$$

$$E = \left(\frac{A}{P} + \frac{B}{P-P_1} + \frac{C}{P+P_2}\right)$$

$y(t) = EA + Be^{+P_1 t} + Ce^{-P_2 t}$

$\lim_{n\to\infty} y(t) = +\infty$

Le système est instable

Exemple 2 :

$$H(P) = \frac{1}{(P+P_1)(P+P_2)} = \frac{y(P)}{E(P)}$$

Les pôles $P = -P_1 < 0$ et $P = -P_2 < 0$

Si P_1 et P_2 tous des réels positifs

$$y(P) = \frac{E}{P(P-P_1)(P+P_2)}$$

$$E = \left(\frac{A}{P} + \frac{B}{P+P_1} + \frac{C}{P+P_2}\right)$$

$y(t) = EA + Be^{-P_1 t} + Ce^{-P_2 t}$

$\lim_{n\to\infty} y(t) = EA$

Le système est stable

5.2.1. Par les marges de stabilité absolue et relative

a) introduction

Pour qu'un stable soit stable, il doit être rapide et précis.

Un système rapide est très souvent non précis et un système précis est souvent pas rapide.

Il faut alors la juste limite entre la rapidité et la précision pour que le système soit stable. C'est l'objectif de l'introduction des marges de stabilité absolue et relative.

b) La marge de stabilité absolue

Cette marge de stabilité gère la rapidité des systèmes. Pour qu'un système soit rapide, il faut qu'il puisse atteindre 95% de sa valeur stationnaire à un temps $t = 3\tau$, où τ représente la constante de temps et est égale a l'inverse de la valeur absolue d'un pôle.

La marge de stabilité absolue délimite les pôles au réel -2. Tout système ayant tous ses pôles inferieurs à -2 doit être stable par la marge de stabilité absolue car toutes ses constantes sont inférieures à la constante de temps $\tau_0 = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Si un pôle du système est supérieur à -2, le système n'est pas stable par la marge de stabilité absolue car il aurait au moins une constante de temps supérieure à 0,5.

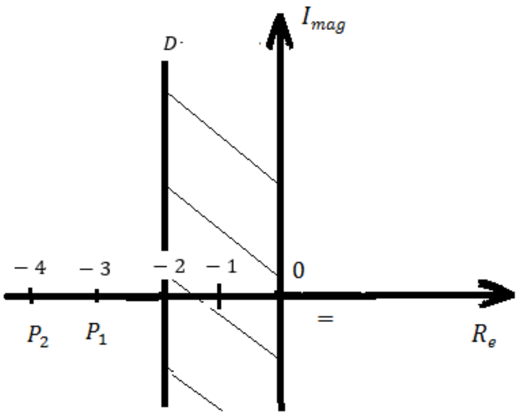
Exemple

Soient les deux systèmes suivants

Le système 1 a comme transmittance $H_1(P) = \frac{H_{01}}{(P+4)(P+3)}$

Ce système a comme pôles $P_1 = -3$ et $P_2 = -4$

Plaçons ces pôles dans le plan complexe ou plan d'Evan.



La droite D passant par -2 délimite les pôles négatifs des systèmes donnant une stabilité absolue, au réel -2.

La droite D passant par -2 ayant constante de temps $\tau_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

P_1 passant par -3 a comme constante de temps $\tau_1 = \frac{1}{|-3|} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

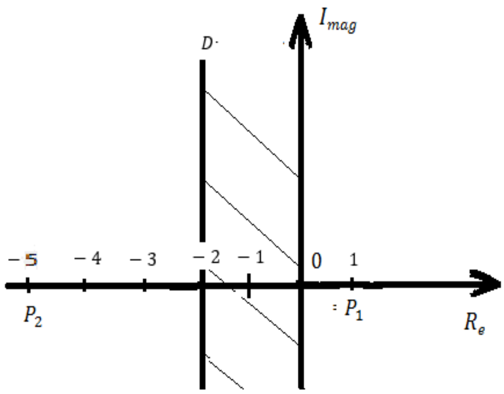
P_2 passant par -4 a comme constante de temps $\tau_2 = \frac{1}{|-4|} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Toutes les constantes de temps du système sont inférieures à $\frac{1}{2}$ donc le système est stable par la marge de stabilité absolue.

Le système 2 a comme transmittance $H_2(P) = \frac{H_{02}}{(P-1)(P+5)}$

Ce système a comme pôles $P_1 = 1$ et $P_2 = -5$

Plaçons ces pôles dans le plan complexe ou plan d'Evan.



Le pole P_1 se situant à droite de la verticale D passant par -2 ne peut pas avoir une constante $\tau_1 = \frac{1}{1} = 1$ inferieure à $\frac{1}{2}$.

Malgré que le pole P_2 soit placé à gauche de D et ayant une constante $\tau_2 = \frac{1}{|-5|} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, le système ne peut pas être stable par la marge de stabilité absolue.

c) La marge de stabilité relative

c.1) Analyse

Pour qu'un système soit précis, sa réponse désirée y_d doit être égale à sa réponse réellement obtenue y_{ob}.

Les systèmes les plus précis sont les systèmes oscillant qui ont un coefficient d'amortissement

$0 < m < 1$.

Ces systèmes malgré qu'ils soient précis, peuvent être instable car pouvant être très lent.

Pour lier la précision et la rapidité, on doit encore délimiter le coefficient m sur l'intervalle$]0\,,1[$. Ainsi pour un système précis et éventuellement rapide, le coefficient d'amortissement est calé de sorte que $m \in \left]\frac{1}{2}\,,1\right[$. Cette délimitation nous a été donnée par la marge de stabilité relative.

L'intérêt de délimiter ce coefficient m sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,,1\right[$ est de s'assurer que le système n'a pas un coefficient d'amortissement excessivement petit pour qu'il le puisse rendre très lent.

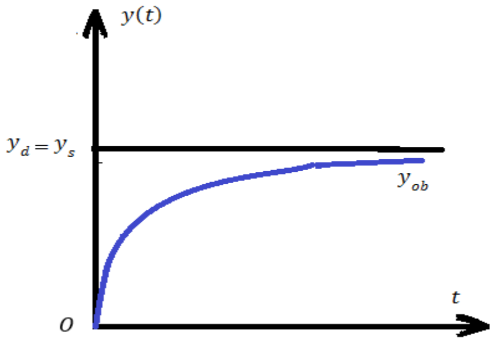


Figure 5.2.a : Système non precis, mais rapide avec un coefficient damortissement m 1

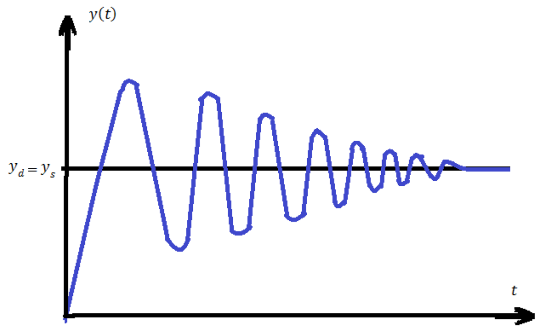


Figure 5.2.b : Système precis, mais lent Avec un coefficient d'amortissement m_2 où $0 < m_2 < \frac{1}{2}$

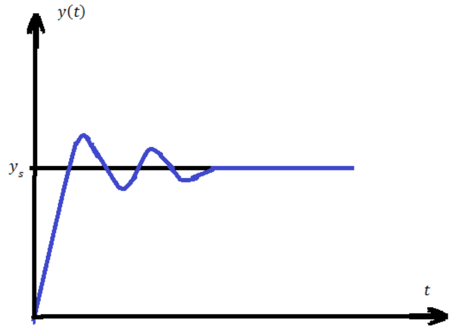


Figure 5.2.c : Système precis, rapide donc plus stable

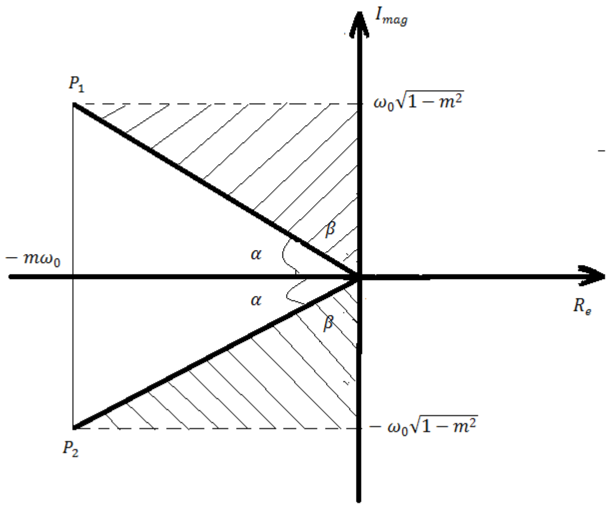
Avec un coefficient d'amortissement m_3 où $\frac{1}{2} < m_3 < 1$

Figure 5.1 : réponse des systèmes selon différentes valeurs du coefficient d'amortissement m.

c2) Démonstration de la limitation de m à $\frac{1}{2}$

Tous les systèmes oscillants ont des pôles complexes.

$$P_1 = m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1+m^2} \quad \text{et} \quad P_2 = m\omega_0 + j\omega 0_2\sqrt{1+m^2}$$



Les droites OP_1 et OP_2 délimitent les systèmes dans la marge de stabilité relative. Tous les systèmes ayant des pôles situés dans les parties hachurées ne sont pas stables à conditions que $0 < \alpha < 60°$

Figure 5.2 : représentation des pôles complexes dans le plan d'Evan

Pour que le système soit stable dans la marge de stabilité relative l'angle α est choisi de sorte que $\alpha = \alpha_{max} = 60°$.

$$cos\alpha = \frac{m\omega_0}{\sqrt{(m\omega_0)^2+\left(\omega_0\sqrt{1-m}\right)^2}} = \frac{m\omega_0}{\sqrt{m^2{\omega_0}^2+{\omega_0}^2-m^2{\omega_0}^2}} = m$$

$cos\alpha = m$ or $0 < cos\alpha < 1$

$0 < \alpha < 60°$ alors la fonction cos décroissante

$cos0° > cos\alpha > cos60°$ $\qquad$ $cos60° < cos\alpha < cos0°$

$\frac{1}{2} < cos\alpha < 1$ donc $\frac{1}{2} < m < 1$

d) Conclusion :

Pour qu'un système soit à 100% stable, il doit respecter les deux marges de stabilités absolue et relative, c'est-à-dire qu'il doit être stable selon les deux marges de stabilités absolue et relative.

5.3. Etude de la stabilité par utilisation de la fonction de transfert à boucle ouverte (FTBO)

5.3.1. Définition et détermination de la FTBO

La FTBO est la fonction de transfert obtenue après ouverture de la boucle d'un système asservi où une boucle a été introduite.

Elle est déterminée de la manière suivante :

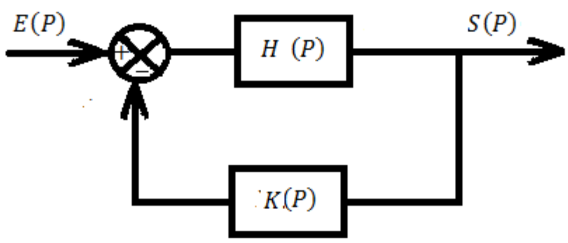


Figure 5.3 : schéma bloc d'un système sans introduction d'une boucle unitaire

On introduit une boucle unitaire dont la transmission est *1.*

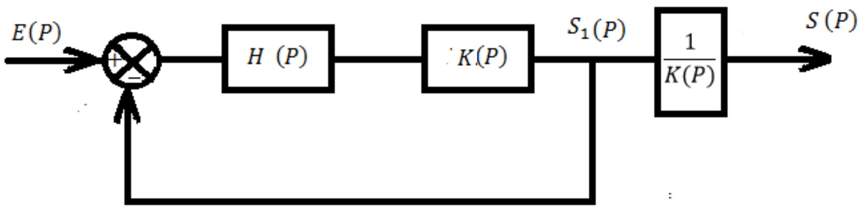


Figure 5.4 : schéma bloc d'un système avec introduction d'une boucle unitaire

Vérifions que l'introduction de la boucle unitaire ne modifie pas le système.

La figure 5.5 donne $T_1(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)}$

La figure 5.6 donne $T_2(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{S_1(P)}{E(P)}.\frac{S(P)}{S_1(P)} = T_2{}'(P).T_2{}''(P)$

$\frac{S_1(P)}{E(P)} = \frac{H(P).K(P)}{1+K(P).H(P)\times 1} = T_2{}'(P)$ $\qquad \frac{S(P)}{S_1(P)} = \frac{1}{K(P)} = T_2{}''(P)$

$$T_2(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{S_1(P)}{E(P)}.\frac{S(P)}{S_1(P)} = \frac{H(P).K(P)}{1+K(P).H(P)}.\frac{1}{K(P)} = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)}$$

Donc le système n'est pas modifié par l'introduction de la boucle unitaire.

→ Faisons la rupture de la boucle unitaire

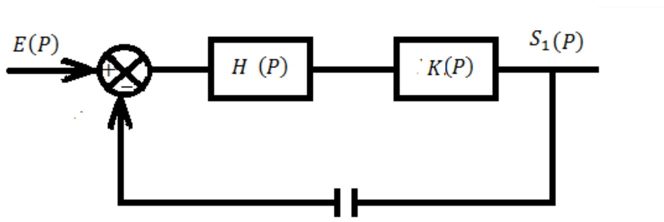


Figure 5.5 : schéma bloc d'un système à boucle unitaire rompue

Et on détermine la FTBO $F(P) = \frac{S_1(P)}{E(P)}$

$F(P) = \frac{H(P)K(P)}{1+0\times H(P)K(P)} = H(P)K(P)$ (Appliquer directement dans un exercice)

La FTBO est le produit des transmittances des deux chaines directe et retour d'un système asservi.

5.3.2. <u>Etude de la stabilité par les critères de Nyquist</u>

Procédure de la méthode

On trace la courbe de Nyquist de la FTBO, puis on identifie la position de cette courbe par rapport au réel (*-1*). C'est-à-dire le point d'intersection de la courbe avec l'axe des réels qui est identifié par rapport à (*-1*).

- Si la courbe coupe l'axe des réels à droite de (*-1*), on dit que le système est stable.
- Si la courbe coupe l'axe des réels à gauche de (*-1*), on dit que le système est instable
- Si la courbe coupe l'axe des réels à (*-1*), on dit que le système est oscillant.

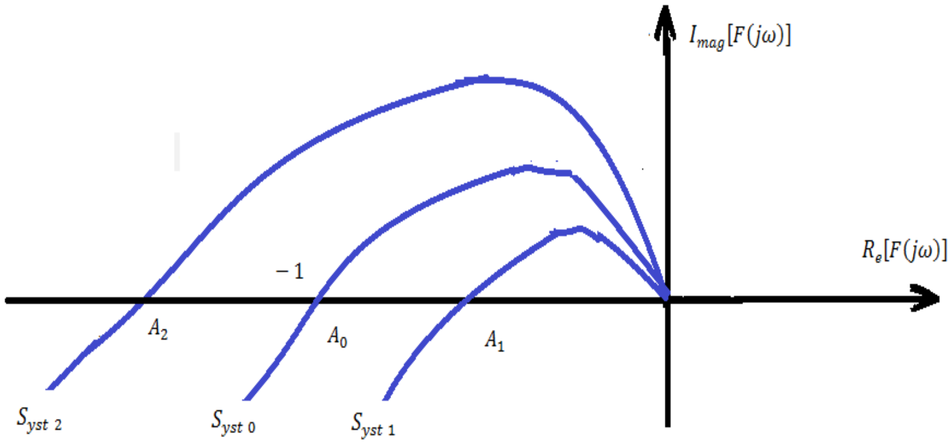


Figure 5.6 : les courbes de Nyquist indiquant ses trois critères de stabilité

Conclusion

- Système *1* = stable
- Système *2* = instable
- Système *0* = oscillant

NB : Pour trouver l'intersection de la courbe avec l'axe des réels on pose $I_m[F(j\omega)] = 0$. Soit ω_0 la solution de cette équation ; l'intersection $A = R_e[F(j\omega_0)]$ et on compare A et -1. Sans tracer la courbe on peut conclure sur la stabilité du système par les critères de Nyquist.

5.3.3. <u>Etude de la stabilité par les critères de Bode</u>

Procédure de la méthode

On détermine la pulsation ω_0 pour laquelle le gain de la FTBO est nul. On détermine :

❖ La pente $P_0 = 20\ log|F(10j\omega_0)|$ avec $F(j\omega)$: la FTBO.

- Si $-40\ dB < P_0 < 0\ dB$ → le système est stable
- Si $P_0 < -40\ dB$ → le système est instable

Si $P_0 = -40\ dB$ → le système est oscillant

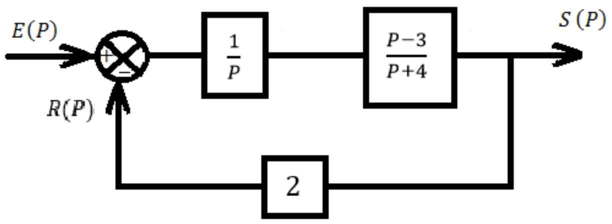
A la moindre perturbation, un système oscillant devient instable.

❖ L'argument $\varphi_0 = arg[F(j\omega_0)]$ avec $F(j\omega)$ - la FTBO.

- Si $-180° < \varphi_0 < 0$ $\rightarrow$ le système est stable
- Si $\varphi_0 < -180°$ $\rightarrow$ le système est instable
- Si $\varphi_0 = -180°$ $\rightarrow$ le système est oscillant

Exemple

Etudier la stabilité du système en utilisant les critères de Nyquist et Bode



Solution :

- Critère de Bode

Déterminer la FTBO, $F(P)$ du système

$F(P) = \frac{2(P-3)}{P(P+4)}$. On pose $P = j\omega$ alors $F(P) = \frac{2j\omega-6}{j\omega(j\omega+4)} = \frac{-6+2j\omega}{-\omega^2+4j\omega}$

$G = 20\log|F(j\omega)|$

On pose $G = 0$ $\rightarrow$ $20\log|F(j\omega)| = 0$; or $20 \neq 0$

$|F(j\omega)| = 1$ $\rightarrow$ $\left|\frac{2j\omega-6}{-\omega^2+4j\omega}\right| = 1$

$|2j\omega - 6| = |-\omega^2 + 4j\omega|$ $\rightarrow$ $\sqrt{4\omega^2 + 36} = \sqrt{\omega^4 + 16\omega^2}$

$4\omega^2 + 36 = \omega^4 + 16\omega^2$ $\rightarrow$ $\omega^4 + 16\omega^2 - 4\omega^2 - 36 = 0$

$\omega^4 + 12\omega^2 - 36 = 0$; On pose $\omega^2 = X$ $\rightarrow$ $X^2 + 12X - 36 = 0$

$\Delta = 144 + 144 = 288$ $\rightarrow$ $\sqrt{\Delta} = 12\sqrt{2}$

$X_1 = \frac{-12+12\sqrt{2}}{2} = -6 + 6\sqrt{2} = 2{,}48$ et $X_2 = \frac{-12-12\sqrt{2}}{2} = -6 - 6\sqrt{2} < 0$ (impossible)

Donc l'équation n'admet que X_1 $comme\ solution$

Revenons au changement de la variable

${\omega_0}^2 = X_1 = 2{,}48 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 1{,}57\ rad/s$ et ${\omega_0}^2 = X_2 = -2{,}48 \quad 0$ impossible

$\omega_0 = \sqrt{X_1} = \sqrt{2{,}48} = 1{,}57\ rad/s$

$$P_0 = 20\log|F(10j\omega_0)| = 20\log\left|\frac{-6 + 2jx(10\omega_0)}{-(10\omega_0)^2 + 4jx(10\omega_0)}\right|$$

$$P_0 = 20\log\left|\frac{-6 + 20j\omega_0}{-100{\omega_0}^2 + 40j\omega_0}\right| = 20\log|-6 + 20j\omega_0| - 20\log\left|-100{\omega_0}^2 + 40j\omega_0\right|$$

$$P_0 = 20\log\sqrt{36 + 400{\omega_0}^2} - 20\log\sqrt{10000{\omega_0}^4 + 1600{\omega_0}^2}$$

$P_0 = 20\log\sqrt{36 + 400 \times (2{,}48)} - 20\log\sqrt{10000 \times (2{,}48)^2 + 1600 \times (2{,}48)}$

$P_0 = 10\log(36 + 400 \times (2{,}48)) - 10\log(10000 \times (2{,}48)^2 + 1600 \times (2{,}48))$

$P_0 = -18{,}04\ dB$

$-40\ dB < P_0 < 0\ dB \quad \rightarrow$ donc le système est stable.

$\varphi_0 = \arg[F(j\omega_0)]$

$\varphi_0 = \arg\left[\frac{2j\omega_0 - 6}{-{\omega_0}^2 + 4j\omega_0}\right] = \arg[2j\omega_0 - 6] - \arg[-{\omega_0}^2 + 4j\omega_0]$

$\varphi_0 = \text{arctg}\left[\frac{2\omega_0}{-6}\right] - \text{arctg}\left[\frac{4\omega_0}{-{\omega_0}^2}\right] = \text{arctg}\left[\frac{\omega_0}{-3}\right] - \text{arctg}\left[\frac{4}{-\omega_0}\right]$

$$\varphi_0 = \text{arctg}\left[\frac{1{,}57}{-3}\right] - \text{arctg}\left[\frac{4}{-1{,}57}\right]$$

$\varphi_0 = -27{,}6 + 68{,}5 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 40{,}9°$

On ne peut pas apprécier la stabilité par l'argument, mais le système est stable car vérifié par le gain.

- Critères de Nyquist

$$F(P) = \frac{2}{P}\left(\frac{P-3}{P+4}\right)$$

$$\frac{2}{j\omega}\left(\frac{j\omega_0 - 3}{j\omega + 4}\right) = \frac{2j\omega_0 - 6}{-\omega_0{}^2 + 4j\omega_0} = \frac{(2j\omega_0 - 6)(-\omega_0{}^2 - 4j\omega_0)}{(-\omega_0{}^2 + 4j\omega_0)(-\omega_0{}^2 - 4j\omega_0)}$$

$$= \frac{14\omega_0{}^2 + (24j\omega_0 - 2j\omega_0{}^3)}{\omega_0{}^4 + 16\omega_0{}^2}$$

$$R_e[F(j\omega_0)] = \frac{14}{\omega_0{}^2+16} \quad ; \quad I_m[F(j\omega_0)] = \frac{24-2\omega_0{}^2}{\omega_0{}^3+16\omega_0}$$

$$I_m[F(j\omega_0)] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{24-2\omega_0{}^2}{\omega_0{}^3+16\omega_0} = 0 \quad \rightarrow \quad 24 - 2\omega_0{}^2 = 0$$

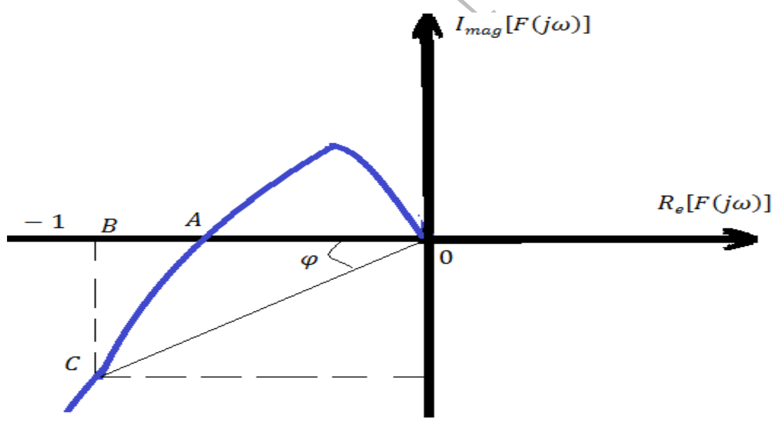
$$\rightarrow \quad \omega_0{}^2 = 12 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\sqrt{3}$$

$$A = R_e[F(j\omega_0)] = \frac{14}{12+16} = 0{,}5 > -1$$ $\rightarrow$ le système est stable

5.3.4. <u>Les marges de gain et de phase</u>

5.3.4.1. <u>Dans le plan de Nyquist</u>

a) **<u>Marge de gain</u>**



B est placé en (-1) de sorte que OB=-1

La marge de gain est déterminée par la méthode suivante :

$$M_G = 20\log\left|\frac{OB}{OA}\right| = 20\log\frac{|OB|}{|OA|} \qquad \text{avec} \quad |OB| = 1$$

$$|OA| = R_e[F(j\omega_0)]$$

où ω_0 la pulsation qui annule les imaginaires de la FTBO.

C'est-à-dire pour trouver ω_0, il faut poser $\quad I_m[F(j\omega)] = 0$

$$M_G = 20\log 1 - 20\log|R_e[F(j\omega)]|$$

$$\boldsymbol{M_G = -20\ log}\ |R_e[F(j\omega_0)]|$$

Le système est dit stable si $\quad \boldsymbol{10dB < M_G < 15dB}$

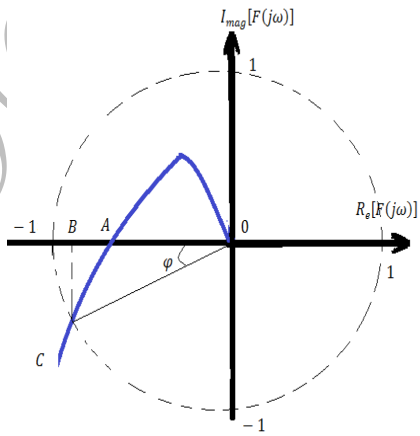
b) **Marge de phase**

On trace la courbe de Nyquist de la FTBO, puis on trace dans le plan de la courbe un cercle de rayon 1. On identifie l'intersection du cercle et de la courbe. Soit le point C cette intersection. L'angle que fait la droite (OC) avec l'axe des réels représente la marge de phase $M_\Phi = \varphi$ où O est l'intersection des axes des réels et des imaginaires.

Le système est dit stable si $\quad \boldsymbol{40° \leq M_\Phi \leq 50°}$.

$|OC| = 1 = |F(j\omega)| \quad \rightarrow \quad |F(j\omega)| = 1$

La résolution de cette équation donne ω_0.



$$tan\varphi = \frac{I_m[F(j\omega_0)]}{R_e[F(j\omega_0)]} \qquad\qquad M_\Phi = \varphi = arctg\left[\frac{I_m[F(j\omega)]}{R_e[F(j\omega)]}\right]$$

ω_0 est la solution de l'équation $|F(j\omega)| = 1$

5.3.4.2. **Dans le plan de Bode**

Les marges de gain et de phase dans le plan de Bode se déterminent simultanément.

- On trace les courbes de Bode (du gain et de l'argument)
- On identifie la pulsation ω_0 qui annule le gain
- On détermine l'argument φ_0 correspondant à ω_0.

- On détermine la marge de phase M_Φ dans le plan de Bode par la relation

$\boldsymbol{M_\Phi = \varphi + 180°}$. Le système est dit stable, si $40° < M_\Phi < 50°$.

- On détermine la pulsation ω_1 correspondant à l'argument $(-180°)$.
- On détermine le gain G_1 correspondant à la pulsation ω_1.

$$\boldsymbol{G_1 = 20 \log|F(j\omega_1)|}$$

- On détermine la marge de gain dans le plan de Bode par la relation $M_G = 0 - G_1 = -G_1$

$$\boldsymbol{M_G = -20 \log|F(j\omega_1)|}.$$

Le système est dit stable si $\boldsymbol{10dB < M_G < 15dB}$.

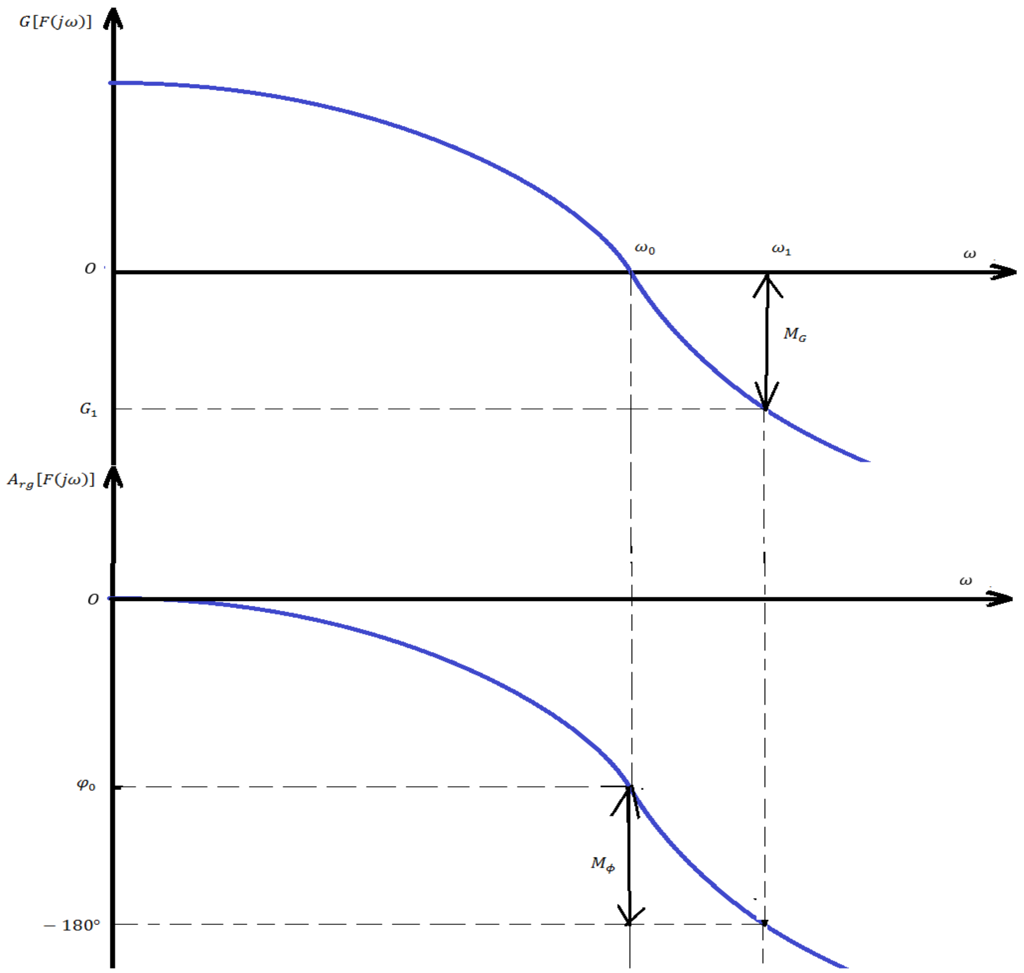
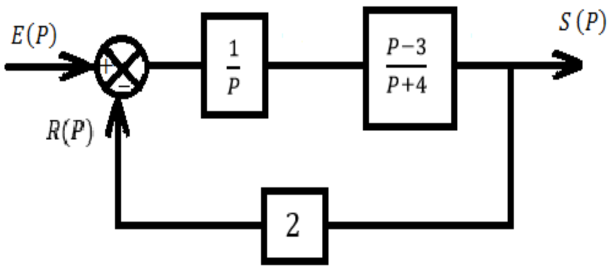


Figure 5.7 : les courbes de Bode pour la détermination des marges de phase et de gain

$M_\Phi = \varphi_0 - (-180°) = \varphi_0 + 180°$

$M_G = 0 - G_1$

Exercice :

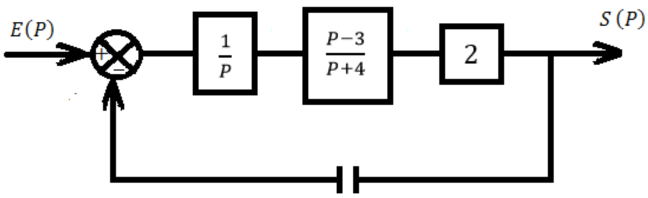


Étudier la stabilité du système en appliquant la méthode des marges de gain et de phase dans les plans de Nyquist et de Bode

Solution :

a) Le plan de Nyquist

Boucle ouverte



$$F(j\omega) = \frac{2}{P}\left(\frac{P-3}{P+4}\right)$$

$$F(j\omega) = \frac{2j\omega - 6}{-\omega^2 + 4j\omega}$$

Alors $\quad R_e[F(j\omega_0)] = \frac{14}{\omega^2+16}$ et $I_m[F(j\omega_0)] = \frac{-2\omega^2+24}{\omega^3+16\omega}$

On trouve ω_0 en posant $\left|\frac{2j\omega-6}{-\omega^2+4j\omega}\right| = 1$

On calcule ensuite $\varphi_0 = \text{arctg}\left[\frac{I_m[F(j\omega)]}{R_e[F(j\omega)]}\right] = \text{arctg}\left[\frac{\frac{-2\omega_0{}^2+24}{\omega_0{}^3+16\omega_0}}{\frac{14}{\omega_0{}^2+16}}\right]$

$$\varphi_0 = \text{arctg}\left[\frac{-2\omega_0{}^2+24}{\omega_0(\omega_0{}^2+16)}\, x\, \frac{\omega_0{}^2+16}{14}\right] = \text{arctg}\left[\frac{-2\omega_0{}^2+24}{14\omega_0}\right]$$

- Marge du gain

$I_m[F(j\omega_0)] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-2\omega^2+24}{\omega^3+16\omega} = 0$

$alors\ \ \omega^2 = 12$

$M_G = -20\log\frac{14}{12+16} \quad \rightarrow \quad M_G = 6{,}02\ dB$

Le système n'est pas stable car M_G n'est pas dans l'intervalle $10\ dB \leq M_G \leq 15\ dB$.

- Marge de phase

$|F(j\omega)| = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{|2j\omega-6|}{|-\omega^2+4j\omega|} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{4\omega^2+36}}{\sqrt{\omega^4+-16\omega^2}} = 1$

$\sqrt{4\omega^2+36} = \sqrt{\omega^4+16\omega^2} \quad \rightarrow \quad 4\omega^2+36 = \omega^4+16\omega^2$

$\omega^4 + 12\omega^2 - 36 = 0$; On pose $\omega^2 = X \rightarrow X^2 + 12X - 36 = 0$

$\Delta = 144 + 144 = 288 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{2}$

$$X_0 = \frac{-12+12\sqrt{2}}{2} = -6+6\sqrt{2} = 2{,}48$$

${\omega_0}^2 = 2{,}48 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 1{,}57\ rad/s$

$$\varphi_0 = \arg[F(j\omega_0)] = \arg\left[\frac{2j\omega_0-6}{-{\omega_0}^2+4j\omega_0}\right] = \arg[2j\omega_0-6] - \arg[-{\omega_0}^2+4j\omega_0]$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left[\frac{2\omega_0}{-6}\right] - \mathrm{arctg}\left[\frac{4\omega_0}{-{\omega_0}^2}\right]$$

$\varphi_0 = -27{,}6 + 68{,}5 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 40{,}9° \sim 41° \qquad \mathrm{M}_\Phi = 41°$

Donc le système est stable car $40° \leq \mathrm{M}_\Phi \leq 50°$