SUJET 2

ETUDE DE L'ALIMENTATION ELECTRIQUE D'UN AIRBUS A320

En vol, la génération électrique est assurée par deux alternateurs principaux de 90 kVA qui délivrent un système triphasé de tensions 115V/200V, 400Hz. La fréquence est maintenue constante grâce à une régulation hydraulique de la vitesse de rotation des alternateurs.
On s'intéressera tout d'abord aux turboalternateurs principaux :
– première partie : étude en fonctionnement non saturé ;
– deuxième partie : réglage de l'excitation.
Puis au fonctionnement du convertisseur de secours :
– troisième partie : étude des tensions de sortie dans deux cas de commande différents ;
– quatrième partie : calcul du filtre de sortie.
Les différentes parties, d'importances voisines, sont indépendantes.

Etude des turboalternateurs principaux

Partie A : Etude d'un alternateur non saturé

Le réseau de bord d'un avion est alimenté en 400 Hz. Pour l'Airbus A320 le constructeur donne :

Tension nominale V_N/U_N	115 V / 200 V
Nombre de phases	3
Puissance apparente nominale S_N	90 kVA
Fréquence nominale f_N	400 Hz
Vitesse de rotation nominale n_N	$12{,}0 \times 10^3$ tr/min
Facteur de puissance	$0{,}75 < \cos\varphi < 1$
Résistance d'induit (par phase) R_S	10 mΩ

L'induit est couplé en étoile.
On a effectué deux essais à vitesse nominale constante n_N :
– essai en génératrice à vide : la caractéristique à vide $E_V(I_e)$ où E_V est la valeur de la f.é.m. induite à vide dans un enroulement et I_e l'intensité du courant inducteur, est tracée sur la figure 1 donnée en annexe ;
– essai en court circuit : dans le domaine utile, la caractéristique de court circuit est la droite d'équation $I_{cc} = 3{,}07\ I_e$, où I_{cc} est la valeur efficace de l'intensité de court circuit dans un enroulement du stator.

I. On s'intéresse au fonctionnement nominal .

1. Calculer la pulsation des tensions de sortie de l'alternateur.

2. Déterminer le nombre de paires de pôles de la machine.

3. Calculer la valeur efficace du courant d'induit nominal I_N .

II. On suppose l'alternateur non saturé. Pour décrire son fonctionnement on utilise le modèle équivalent par phase représenté ci-dessous (figure 2).

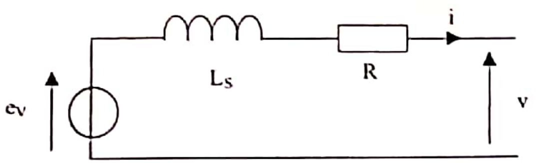


Figure 2

1. Calculer l'impédance synchrone Z_s de l'alternateur.

2. En déduire la réactance synchrone $X_s = L_S\omega$.

III. Dans toute la suite du problème, on néglige l'influence des résistances statoriques R_S.

1. Déterminer l'intensité I_{e0} du courant inducteur pour un fonctionnement à vide sous tension nominale.

2. La charge est triphasée équilibrée, l'alternateur fonctionne dans les conditions nominales, il débite son courant nominal I_N, en retard sur la tension.
   Pour un $\cos\varphi = 0{,}75$, représenter le diagramme vectoriel des tensions et en déduire la valeur de la f.é.m. induite E_v.

IV. On s'intéresse au réglage de l'excitation de l'alternateur lorsqu'il débite son courant nominal I_N.
Déterminer la valeur du courant d'excitation qui permet de maintenir $V = 115$ V pour un fonctionnement à $\cos\varphi = 0{,}75$.

Partie B : Etude du circuit d'excitation

La tension aux bornes de l'inducteur de l'alternateur principal est produite à l'aide d'un alternateur intermédiaire, appelé excitatrice, dont l'inducteur est fixe et l'induit, solidaire de l'arbre principal, tournant.
L'inducteur de l'alternateur intermédiaire est modélisé par sa résistance R_1 et son inductance L_1 ; il est parcouru par un courant $i_1(t)$ de valeur moyenne I_1.
L'excitatrice n'étant pas saturée on peut considérer que le courant I_e est proportionnel à I_1.
Le réglage du courant d'excitation principal I_e s'effectue donc par l'intermédiaire d'un hacheur qui contrôle I_1.

Schéma du circuit d'excitation de l'alternateur principal

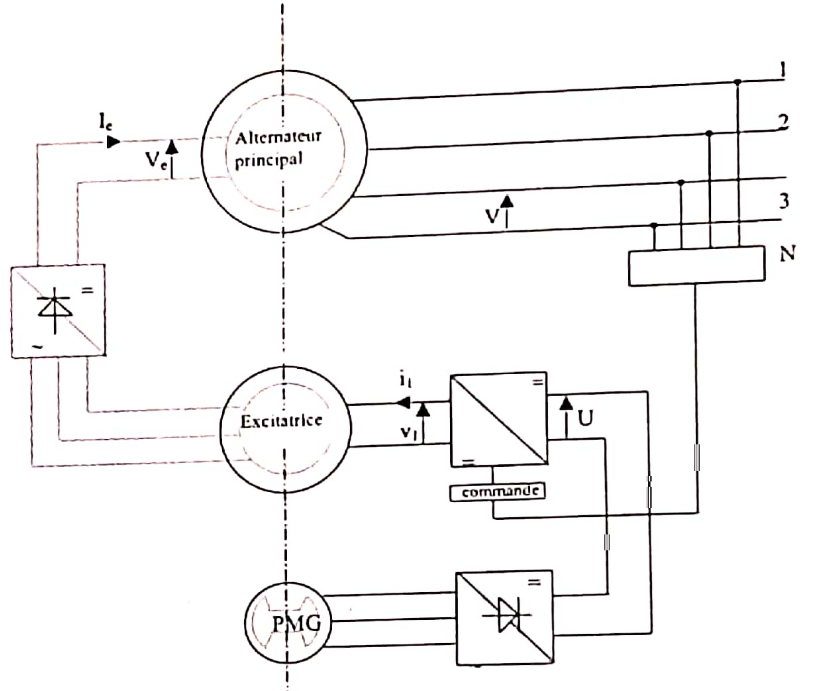
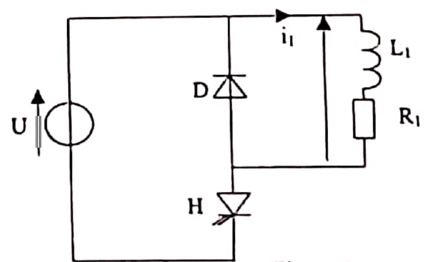


Figure 3

PMG : alternateur à aimants permanents

—— Partie fixe
------ Partie mobile
–·–·– Ligne d'arbre (liaison mécanique)

L'alternateur à aimants permanents et le redresseur à diodes qui alimentent le hacheur sont modélisés par un générateur, considéré comme une source de tension continue parfaite, fournissant une tension $U_0 = 140$ V.
Le schéma équivalent du système est celui de la figure 4.



$R_1 = 9{,}0\ \Omega$

$L_1 = 0{,}10$ H

Figure 4

On étudie le régime permanent où la conduction dans la charge (R_1, L_1) est ininterrompue.
Les semi-conducteurs qui composent le hacheur sont considérés comme parfaits.

L'interrupteur H est commandé à la fréquence $f = 2{,}0$ kHz et on note α son rapport cyclique.

Au cours d'une période T, l'interrupteur H est passant de 0 à αT, il est bloqué de αT à T.

I. Etude de l'inducteur de l'excitatrice

1. Tracer l'allure de la tension $v_1(t)$ lorsque α vaut 0,60.
2. Calculer V_1, valeur moyenne de $v_1(t)$, en fonction de α et U_0.
3. En déduire l'expression de I_1, valeur moyenne de $i_1(t)$, en fonction de α, U_0 et R_1. Faire l'application numérique pour $\alpha = 0{,}60$.

II. Etude des variations du courant

1. Ecrire les équations différentielles auxquelles satisfait $i_1(t)$ entre les dates 0 et αT, puis entre αT et T.
2. En remarquant que $\frac{L_1}{R_1} >> T$, représenter sans calcul l'allure du courant $i_1(t)$.

III. On définit l'ondulation du courant par l'expression $\Delta i_1 = \frac{I_M - I_m}{2}$.

Dans le cas où $\Delta i_1 << I_1$, on admet que l'ondulation peut s'exprimer sous la forme :

$$\Delta i_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)U_0}{2 L_1 f}$$

Pour quelle valeur de α l'ondulation Δi_1 est-elle maximale ? Justifier la réponse. Quelle est son expression dans ce cas ? Calculer sa valeur numérique sachant que $L_1 = 0{,}10$ H.

Etude de l'onduleur de secours

Dans le cas, extrêmement improbable, où les différents alternateurs seraient tous hors service, il est encore possible d'alimenter les organes essentiels de l'avion pendant une demi-heure par l'intermédiaire d'un onduleur autonome dit « convertisseur de dernier secours ». Celui ci permet de reconstituer un réseau alternatif 115 V / 400 Hz monophasé à partir d'une batterie délivrant une tension continue U_B.

Ce convertisseur indirect est constitué de deux étages :

– un onduleur en pont complet qui fournit la tension $v_{MN}(t)$ (figure 5),

– un filtre de sortie qui fournit la tension $v_S(t)$ (figure 6a).

Le schéma de principe de l'onduleur est celui de la figure 5

Cahier des charges de l'onduleur de secours muni de son filtre de sortie passe-bas :

Valeur efficace du fondamental de la tension de sortie du filtre : V_{S1}	115 V
Fréquence de sortie : f	400 Hz
Puissance apparente nominale de sortie : P_S	1,0 kVA
Facteur de puissance	$0{,}70 < \cos\varphi \leq 1$
Distorsion globale de la tension de sortie : d_g	< 5 %

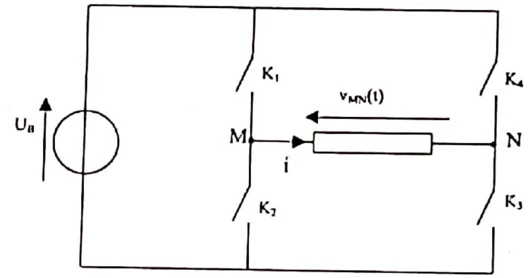


Figure 5

Partie C : Etude des tensions de sortie de l'onduleur

I. On envisage le cas d'une commande "pleine onde" selon la loi définie sur le document réponse 1a.

1. Tracer le graphe de la tension $v_{MN}(t)$ sur le document réponse 1a.
2. Exprimer la valeur efficace V_{MN} de $v_{MN}(t)$ en fonction de U_B.

II. La décomposition en série de Fourier de $v_{MN}(t)$ est la suivante :

$$v_{MN}(t) = \frac{4U_B}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$

1. Donner l'expression de $v_1(t)$, fondamental de $v_{MN}(t)$.
   En déduire l'expression de sa valeur efficace V_1 en fonction de U_B.
2. Quelle devrait être la valeur de U_B pour obtenir $V_1 = 115$ V ?
3. La distorsion globale de la tension de sortie $v_{MN}(t)$ dépend du taux d'harmoniques :
   Si V_1 est la valeur efficace du fondamental de $v_{MN}(t)$ et $V_2, V_3, V_4, \ldots V_n, \ldots$ les valeurs efficaces des autres harmoniques de cette tension (certaines de ces valeurs pouvant être nulles), la distorsion globale d_g est définie comme suit :

$$d_g = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 \cdots + V_n^2 + \cdots}}{V_1} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \quad (1)$$

Comme $V_{MN}^2 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 \ldots + V_n^2 + \ldots} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_1^2}$, on peut également écrire : $d_g = \frac{\sqrt{V_{MN}^2 - V_1^2}}{V_1}$ (2).

Calculer d_g dans le cas précédent.

III. Le montage effectivement réalisé est un onduleur à modulation de largeur d'impulsions (MLI). La commande des interrupteurs est définie sur le document réponse 1 b.

1. Tracer la tension $v_{MN}(t)$ correspondant à ce cas sur le document réponse 1 b.

2. Exprimer la valeur efficace V_{MN} de $v_{MN}(t)$ en fonction de U_B (on pourra pour cela effectuer un calcul d'aire).

3. La tension $v_{MN}(t)$ ne comporte pas d'harmonique de rang pair. Par ailleurs les angles α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sont choisis de manière à annuler les harmoniques de rang 3, 5, 7, 9 et 11. Il en résulte la décomposition en série de Fourier de $v_{MN}(t)$ suivante :

$$v_{MN}(t) = \frac{4U_B}{\pi} \times 0{,}802 \times \sin(\omega t) - \frac{4U_B}{13\,\pi} \times 2{,}01 \times \sin(13\,\omega t) - \frac{4U_B}{15\,\pi} \times 2{,}64 \times \sin(15\,\omega t) + \dots$$

– Donner l'expression de $v_1(t)$, fondamental de $v_{MN}(t)$.

– Donner l'expression de sa valeur efficace V_1 en fonction de U_B.

La distorsion globale qui correspond à ce deuxième cas est $d_g = 49\ \%$. Elle n'est donc pas meilleure que la précédente. Elle rend donc nécessaire la présence d'un filtre.

Partie D : Filtre de sortie de l'onduleur

La charge est assimilable à un circuit purement résistif R (figure 6a).

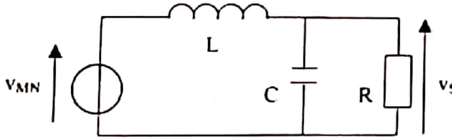


Figure 6a

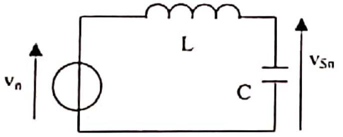


Figure 6b

I. Etude de l'action du filtre sur le fondamental de $v_{MN}(t)$

1. Calculer la valeur de R lorsque le filtre fournit 1,0 kW à la charge sous 115 V.
Pour la suite du problème on prend $R = 13\ \Omega$, $L = 0{,}47$ mH et $C = 22\ \mu$F.
Dans ces conditions, si l'on note V_1 le fondamental de $v_{MN}(t)$ et V_{S1} le fondamental de $v_s(t)$, le filtre de la figure 6a impose la relation : $\dfrac{V_{S1}}{V_1} = 1{,}06$.

2. On rappelle l'expression de la tension $v_{MN}(t)$ fournie par l'onduleur MLI, alimenté sous la tension U_B :

$$v_{MN}(t) = \frac{4U_B}{\pi} \times 0{,}802 \times \sin(\omega t) - \frac{4U_B}{13\,\pi} \times 2{,}01 \times \sin(13\,\omega t) - \frac{4U_B}{15\,\pi} \times 2{,}64 \times \sin(15\,\omega t) + \dots$$

Déterminer la valeur de U_B qui permet d'obtenir $V_{S1} = 115$ V.

Pour la suite du problème, on prendra $U_B = 150$ V.

II. Etude de l'action du filtre sur les harmoniques de $v_{MN}(t)$

1. Donner les expressions de $\underline{Z}_{L13}$ et $\underline{Z}_{C13}$, impédances complexes de la bobine et du condensateur vis-à-vis de l'harmonique de rang 13. Calculer les modules Z_{L13} et Z_{C13}

2. Montrer que pour l'harmonique 13, et, plus généralement, pour tous les harmoniques non nuls de $v_{MN}(t)$, le filtre de la figure 6a se ramène au filtre simplifié de la figure 6b.

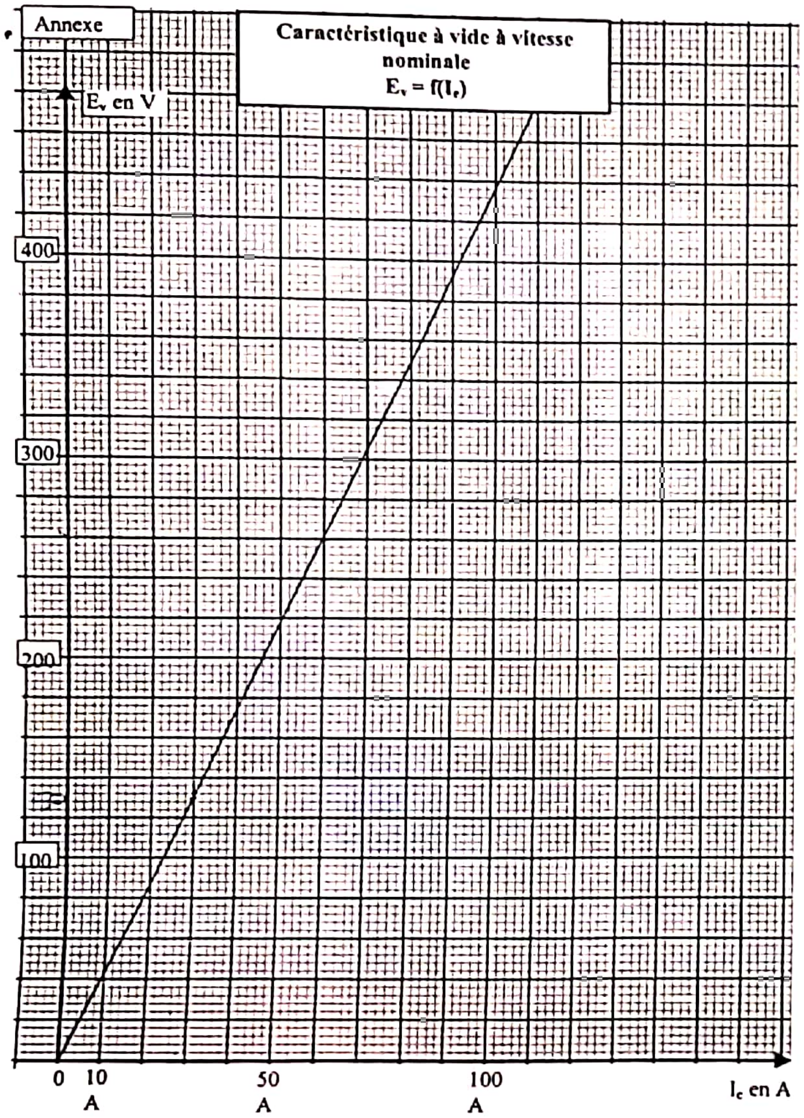
3. On note $\underline{V}_n$ le nombre complexe associé à l'harmonique de rang n de $v_{MN}(t)$ et V_n sa valeur efficace ; de même $\underline{V}_{Sn}$ est le nombre complexe associé à l'harmonique de rang n de v_S et V_{Sn} sa valeur efficace.

Démontrer que : $\dfrac{\underline{V}_{Sn}}{\underline{V}_n} = \dfrac{1}{1 - n^2 LC\omega^2}$.

4. En déduire l'égalité approchée $\dfrac{V_{S13}}{V_{13}} \approx \dfrac{1}{10}$, et, pour $n > 13$, les inégalités $\dfrac{V_{Sn}}{V_n} < \dfrac{1}{10}$.

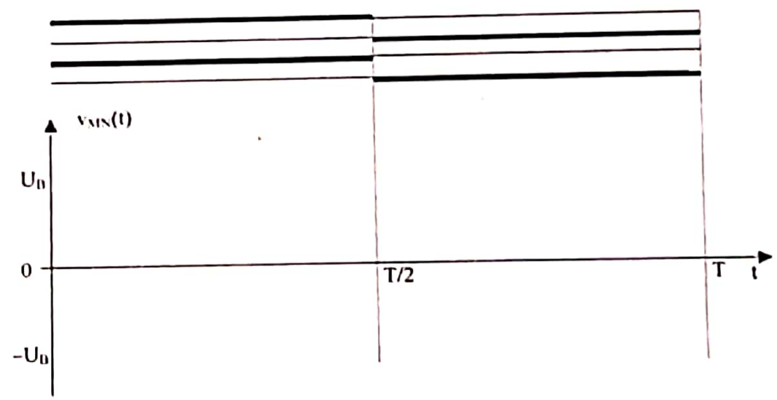
5. On rappelle que la distorsion globale $d_{g_{vMN}}$ de la tension $v_{MN}(t)$ fournie par l'onduleur MLI est égale à 49%. A partir de la définition (1) de d_g donnée à la question 3.2.3 pour $v_{MN}(t)$, donner l'expression de la distorsion globale $d_{g_{vS}}$ de la tension de sortie $v_S(t)$ du filtre.
En utilisant cette définition et les résultats des questions 4.1.1 et 4.2.4, montrer que $d_{g_{vS}}$ est inférieure à 5 %.

III. On revient à la solution pleine onde de la question 3.1 pour laquelle on utilise un filtre de même nature que celui de la figure 6a.
Dans ce cas, pour obtenir une distorsion globale $d_{g_{vS}} < 5\%$ de la tension $v_S(t)$, on trouve qu'il faut une valeur du produit LC environ 10 fois plus grande que celle qui est utilisée dans le filtre associé à l'onduleur MLI.
Quel est, de ce point de vue, l'intérêt de la commande MLI ?

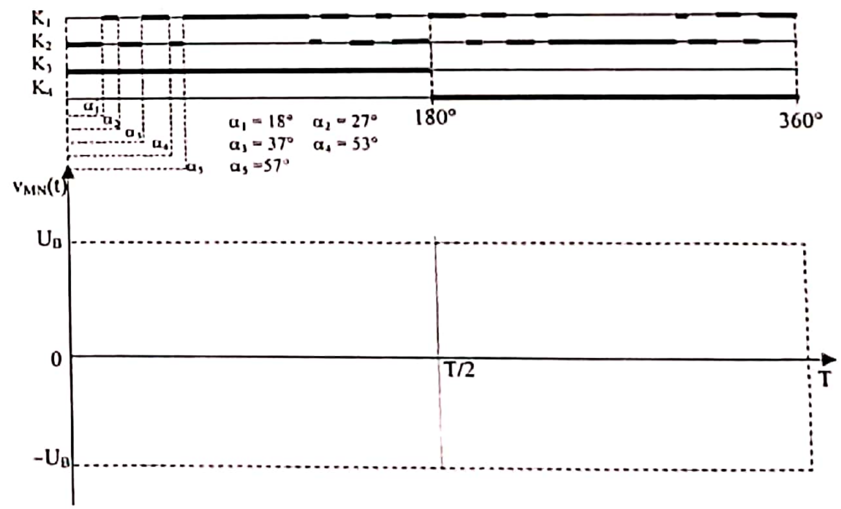


DOCUMENT REPONSE N° 1 a

Les parties en trait épais correspondent à l'état fermé des interrupteurs
Les parties en trait fin correspondent à l'état ouvert des interrupteurs.



DOCUMENT REPONSE N° 1 b



CORRIGE DU SUJET 2

Partie A : Etude d'un alternateur non saturé

I.

1. La relation entre la fréquence f est la pulsation ω est : $\omega = 2\pi f$. Soit pour la fréquence nominale f_N de 400 Hz : $\omega = 2\pi \times 400 = 2513 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\boxed{\omega = 2513 \text{ rad.s}^{-1}}$$

2. Pour une machine synchrone, on sait que la vitesse Ω (rad.s^{-1}) est liée à la pulsation et au nombre de paires de pôles p par la relation $\Omega = \dfrac{\omega}{p}$.

On rappelle que 1 tr.min^{-1} $= \dfrac{2\pi}{60}$ rad.s^{-1}. Pour la fréquence et la vitesse nominale, on obtient :

$$\boxed{p = \frac{\omega}{\Omega}}$$

Application numérique : $p = \dfrac{2\pi \times 400}{\dfrac{2\pi}{60} \times 12.10^3} = 2$

$$\boxed{p = 2}$$

3. La puissance apparente s'écrit : $S_N = \sqrt{3} U_N I_N$ où I_N est le courant de ligne et U_N la tension entre phases. Le courant vaut :

$$\boxed{I_N = \frac{S_N}{\sqrt{3} U_N}}$$

Application numérique : $I_N = \dfrac{90000}{\sqrt{3}.200} = 260\text{ A}$

$$\boxed{I_N = 260\text{ A}}$$

II.

1. Pour calculer l'impédance synchrone, on va utiliser les résultats de l'essai en court-circuit. La loi des mailles appliquée aux valeurs complexes associées au schéma de la figure 2 donne :

$$\underline{E}_v = \underline{V} + \underline{Z}_s \underline{I} \quad (1)$$

En court circuit, sachant que $\underline{I} = \underline{I}_{cc}$ et $\underline{V} = 0$, elle devient :

$$\underline{E}_v = \underline{Z}_s \underline{I}_{cc}$$

On obtient la même relation pour les modules $E_v = Z_s I_{cc}$, où I_{cc} et E_v sont les valeurs efficaces.
De plus, la figure 1 montre que E_v est proportionnelle à I_e et permet de calculer le coefficient de proportionnalité (pente de la droite) :

$$E_v = \frac{130}{30} I_e = 4{,}33 I_e$$

On obtient alors pour Z_s :

$$\boxed{Z_s = \frac{E_v}{I_{cc}} = \frac{4{,}33 I_e}{3{,}07 I_e}}$$

Application numérique :

$$\boxed{Z_s = 1{,}41\ \Omega}$$

2. L'impédance synchrone a pour expression $\underline{Z}_s = R_s + j\underline{X}_s$ avec $Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$.

On déduit la réactance synchrone : $\boxed{X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2}}$

Application numérique : $X_s = \sqrt{1{,}41^2 - 0{,}0001^2}$

$$\boxed{X_s = 1{,}41\ \Omega}$$

III. On néglige R_s.

1. A vide sous tension nominale, l'équation (1) devient :

$$\underline{E}_{vo} = \underline{V}_N + \underline{Z}_s \underline{I} = \underline{V}_N \quad (i = 0)$$

On a alors :

$$\boxed{E_{vo} = V_N = 4{,}33 I_{eo}}$$

Application numérique :

$$\boxed{I_{eo} = 26{,}5\text{ A}}$$

2. φ est le déphasage entre la tension simple et le courant de ligne. R_s étant négligeable, l'équation (1) devient :

$$\underline{E}_v = \underline{V}_N + j\underline{X}_s \underline{I}_N$$

Prenons la tension simple comme référence de phase :

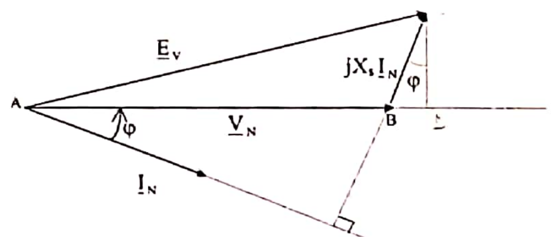


Figure 1

D'après le théorème de Pythagore : $E_v^2 = AD^2 + CD^2$. Exprimons CD et AD en utilisant les relations des triangles rectangles.

$$CD = X_s I_N \cos\varphi$$
$$AD = AB + BD = V_N + X_s I_N \sin\varphi$$

On a alors :

$$E_v^2 = (V_N + X_s I_N \sin\varphi)^2 + (X_s I_N \cos\varphi)^2 = V_N^2 + 2X_s I_N V_N \sin\varphi + X_s^2 I_N^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}$$

donc $\boxed{E_v = \sqrt{V_N^2 + 2X_s I_N V_N \sin\varphi + X_s^2 I_N^2}}$

.N : $E_v = \sqrt{115^2 + 2\times1{,}41\times260\times115\times\sin(\arccos 0{,}75) + 1{,}41^2\times260^2} = 436\,V$

$$\boxed{E_v = 436\ V}$$

V. On sait que : $E_v = \frac{130}{30} I_e = 4{,}33 I_e$ (cf. question II.1). Donc pour la valeur de E_v récédemment calculée, I_e vaut :

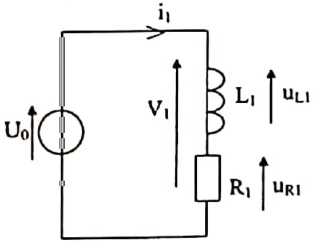
$$\boxed{I_e = \frac{436}{4{,}33} = 101\,A}$$

Partie B : Etude du circuit d'excitation

. Etude de l'inducteur de l'excitatrice

.

- Entre 0 et αT, l'interrupteur parfait H est passant et la diode D bloquée. Le schéma de a figure 4 est équivalent au schéma suivant :

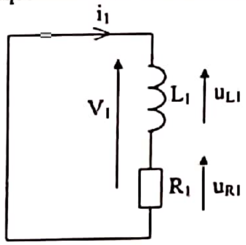


$\boxed{V_1 = U_0}$

Figure 2

- Entre αT et T, l'interrupteur parfait H est bloqué et la diode D passante. Le schéma de a figure 4 est donc équivalent au schéma suivant :

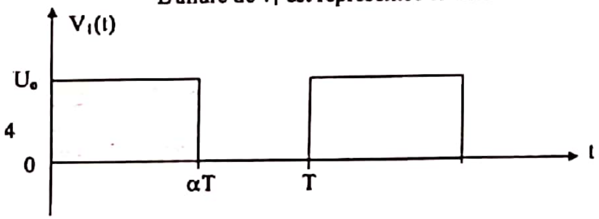
Figure 3



$\boxed{V_1 = 0}$

L'allure de v_1 est représentée ci-dessous

Figure 4



. On va utiliser la formule de la valeur moyenne utilisant l'aire (partie grise sur la igure 4) :

$$\boxed{V_1 = \frac{Aire}{T} = \frac{\alpha T U_o}{T} = \alpha U_o}$$

Application numérique : $V_1 = 0{,}6\times140 = 84\ V$

$$\boxed{V_1 = 84\ V}$$

3. La loi des mailles aux bornes du dipôle R_1 et L_1 s'écrit :

$$v_1(t) = u_{R1} + u_{L1} = R_1 i_1(t) + u_{L1} \qquad (2)$$

Si l'on passe aux valeurs moyennes, on obtient :

$$\langle v_1(t)\rangle = V_1 = \langle R_1 i_1(t)\rangle + \langle u_{L1}\rangle = R_1 I_1$$

car la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance est nulle. En remplaçant V_1 par la valeur trouvée au I.2, on a : $V_1 = \alpha U_o = R_1 I_1$ soit :

$$\boxed{I_1 = \frac{\alpha U_o}{R_1}}$$

Application numérique : $I_1 = \frac{0{,}6\times140}{9} = 9{,}3\,A$

$$\boxed{I_1 = 9{,}3\ A}$$

II. Etude des variations du courant

1.

– Entre 0 et αT : $V_1 = U_0$. L'équation (2) s'écrit :

$$v_1(t) = u_{R1} + u_{L1} = R_1 i_1(t) + u_{L1} = R_1 i_1(t) + L_1\frac{di_1(t)}{dt} = U_o$$

En divisant les deux membres de l'équation par R_1, on obtient :

$$\boxed{\frac{L_1}{R_1}\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \frac{U_o}{R_1}} \quad (3)$$

– Entre αT et T : $V_1 = U_0$. L'équation (2) s'écrit :

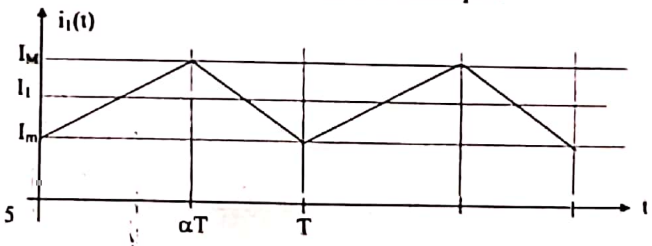
$$v_1(t) = u_{R1} + u_{L1} = R_1 i_1(t) + u_{L1} = R_1 i_1(t) + L_1\frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

En divisant les deux membres de l'équation par R_1, on obtient :

$$\boxed{\frac{L_1}{R_1}\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = 0} \quad (4)$$

2. Si $\frac{L_1}{R_1} >> T$, alors le courant évolue linéairement entre $[0, \alpha T]$ et $[\alpha T, T]$ entre une valeur minimum I_m et maximum I_M autour de sa valeur moyenne I_1 (cf. figure 5). La conduction est ininterrompue donc le courant ne s'annule pas.

Figure 5



III. L'ondulation est une fonction de α. Pour trouver la valeur de α pour laquelle l'ondulation Δi_1 est maximale, il faut trouver la valeur de α pour laquelle la dérivée de Δi_1 par rapport à α s'annule, ce qui correspond à : $\frac{d(\Delta i_1)}{d\alpha} = 0$. Soit :

$$\frac{d(\Delta i_1)}{d\alpha} = \frac{(1-\alpha)U_o - \alpha U_o}{2L_1 f} = \frac{(1-2\alpha)U_o}{2L_1 f}$$

L'expression s'annule pour : $1 - 2\alpha = 0$. Le rapport cyclique α est égal à :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

La valeur maximale de l'ondulation s'obtient en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans l'expression de Δi_1.

On trouve : $\boxed{\Delta i_1 = \frac{U_o}{8L_1 f}}$

A.N : $\Delta i_1 = \frac{115}{8 \times 0{,}1 \times 2000} = 0{,}072\,A$

$$\boxed{\Delta i_1 = 0{,}072\ A}$$

Δi_1 est effectivement très petit devant I_1. On peut considérer que le courant est bien lissé par l'inductance.

Partie C : Etude des tensions de sortie de l'onduleur

I.

1.

– Quand K_1 et K_3 sont fermés, c'est-à-dire entre 0 et $\frac{T}{2}$: $v_{MN}(t) = U_B$.

– Quand K_2 et K_4 sont fermés, entre $\frac{T}{2}$ et T : $v_{MN}(t) = -U_B$.

On obtient alors une tension alternative en créneau (cf. document réponse 1.a).

2. Le carré de la valeur efficace est la valeur moyenne de $v_{MN}^2(t)$.
Or $v_{MN}^2(t) = U_B^2$ = constante sur toute la période. Donc : $\langle v_{MN}^2(t)\rangle = U_B^2$. On a alors :

$$\boxed{V_{MN} = \sqrt{\langle v_{MN}^2(t)\rangle} = U_B}$$

II.
1. Le fondamental correspond à la sinusoïde de même fréquence que le signal soit :

$$\boxed{v_1(t) = \frac{4U_B}{\pi}\sin(\omega t)}$$

Sa valeur efficace vaut :

$$\boxed{V_1 = \frac{4U_B}{\sqrt{2}\pi}}$$

2. Il suffit d'injecter $V_1 = 115$ V dans la formule précédente. On obtient :

$$U_B = \frac{\sqrt{2} \times \pi \times 115}{4} = 128\,V$$

$$\boxed{U_B = 128\ V}$$

3. On va appliquer la formule (2) donnée dans le texte, avec $V_1 = 115$ V et $V_{MN} = 128$ V. Ce qui donne : $d_g = \frac{\sqrt{128^2 - 115^2}}{115}$

$$\boxed{d_g = 0{,}48}$$

III.
1. Cf. document réponse 1b.

2. Comme on l'a vu question 1.2 de la 3ème partie, le carré de la valeur efficace est la valeur moyenne de $v_{MN}^2(t)$. Sur le document 1b, on a représenté $v_{MN}(t)$. On constate que $v_{MN}^2(t)$ est paire et de plus symétrique par rapport à $\frac{T}{4}$. On a alors :

$$\langle V_{MN}^2\rangle = \frac{4\,\text{Aire}(\text{entre } 0 \text{ et } \frac{T}{4})}{T} = \frac{4}{T}U_B^2\big((90-\alpha_5)+(\alpha_4-\alpha_3)+(\alpha_2-\alpha_1)\big)\frac{T}{360}$$

Rappel : l'intervalle de temps correspondant à un angle α est $\frac{\alpha T}{360}$ (s) (car les angles sont en degrés). On a donc :

$$\boxed{V_{MN} = \sqrt{\langle v_{MN}^2(t)\rangle} = 2U_B\sqrt{\frac{(90+\alpha_2+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_5)}{360}}}$$

3. Le fondamental est la sinusoïde de même fréquence que le signal soit :

$$v_1(t) = \underbrace{\frac{4U_B}{\pi} \times 0{,}802}_{\text{valeur max}}\sin(\omega t)$$

On obtient la valeur efficace V_1 en divisant la valeur max par $\sqrt{2}$, d'où :

$$\boxed{V_1 = \frac{4U_B}{\sqrt{2}\pi} \times 0{,}802}$$

Partie D : Filtre de sortie de l'onduleur

I. Etude de l'action du filtre sur le fondamental
1. La tension aux bornes de la résistance R vaut 115V, la puissance dissipée est :

$$P = 1\,kW = \frac{115^2}{R}$$

On en déduit : $\boxed{R = \frac{115^2}{1000} = 13{,}2\,\Omega}$

2. V_{s1} est la valeur efficace du fondamental de V_s. Le filtre LC impose pour le fondamental la relation $V_{s1} = 1{,}06\,V_1$. De plus, on a établi dans la 3ème partie, question

III.3 : $V_1 = \frac{4U_B}{\sqrt{2}\pi} \times 0{,}802$. Il résulte de ces deux égalités que :

$$V_{s1} = 1{,}06 \frac{4U_B}{\sqrt{2}\pi} 0{,}802$$

Soit :

$$\boxed{U_B = \frac{\sqrt{2}\pi V_{s1}}{0{,}802 \times 4 \times 1{,}06}}$$

Application numérique : $U_B = \frac{\sqrt{2} \times \pi \times 115}{0{,}802 \times 4 \times 1{,}06}$

$$\boxed{U_B = 150\ \text{V}}$$

II. Etude de l'action du filtre sur V_{MN}

1. La pulsation du fondamental vaut : $\omega = 2\pi.400 = 2513\ \text{rad.s}^{-1}$. Celle du 13ème harmonique vaut : $13\omega = 32673\ \text{rad.s}^{-1}$. Les expressions des impédances sont :

$$\underline{Z}_{C13} = \frac{1}{j13C\omega} \text{ et } \underline{Z}_{L13} = j13L\omega$$

$$\boxed{Z_{C13} = \frac{1}{13C\omega} = 1{,}4\ \Omega \ ; \ Z_{L13} = 13L\omega = 15{,}3\ \Omega}$$

2. On constate que $Z_{C13} << R$ donc la capacité " court-circuite " la résistance pour la fréquence du 13ème harmonique et à fortiori toutes les fréquences supérieures. On peut donc considérer que le schéma de la figure 6a est effectivement équivalent à celui de la figure 6b pour tous les harmoniques de rang supérieur ou égal à 13.

3. Appliquons le principe du diviseur de tension aux impédances du schéma de la figure 6b :

$$\frac{\underline{V}_{sn}}{\underline{V}_n} = \frac{\underline{Z}_{Cn}}{\underline{Z}_{Cn} + \underline{Z}_{Ln}} = \frac{\frac{1}{jCn\omega}}{\frac{1}{jCn\omega} + jLn\omega} = \frac{1}{1 + j^2n^2LC\omega^2} = \frac{1}{1 - n^2LC\omega^2}$$

Le rapport est un réel. Le rapport des valeurs efficaces est donc la valeur absolue de ce nombre.

4. Il suffit de prendre la valeur absolue de la formule établie précédemment (question II.3) pour n = 13. On obtient :

$$\frac{V_{s13}}{V_{13}} = \left|\frac{1}{1 - 13^2.0{,}47 10^{-3}.22 10^{-6}.(2\pi.400)^2}\right| \approx \frac{1}{10}$$

Pour n > 13 : $\frac{V_{sn}}{V_n} = \left|\frac{1}{1 - n^2LC\omega^2}\right| \approx \frac{1}{n^2LC\omega^2} < \frac{1}{13^2LC\omega^2} \approx \frac{1}{10}$

5. On a par définition : $d_{g_{V_s}} = \frac{\sqrt{V_s^2 - V_{s1}^2}}{V_{s1}} = \frac{\sqrt{\sum_{n>1} V_{sn}^2}}{V_{s1}}$.

Sachant que $\frac{V_{sn}}{V_n} < \frac{1}{10}$ pour n ≥ 13, on peut considérer que $V_{sn}^2 < \frac{V_n^2}{100}$ donc que :

$$\sqrt{\sum_{n>1} V_{sn}^2} < \sqrt{\sum_{n>1} \frac{V_n^2}{100}} = \frac{\sqrt{\sum_{n>1} V_n^2}}{10}$$

Comme $V_{s1} \approx V_1$ ($V_{s1} = 1{,}06\ V_1$), on a

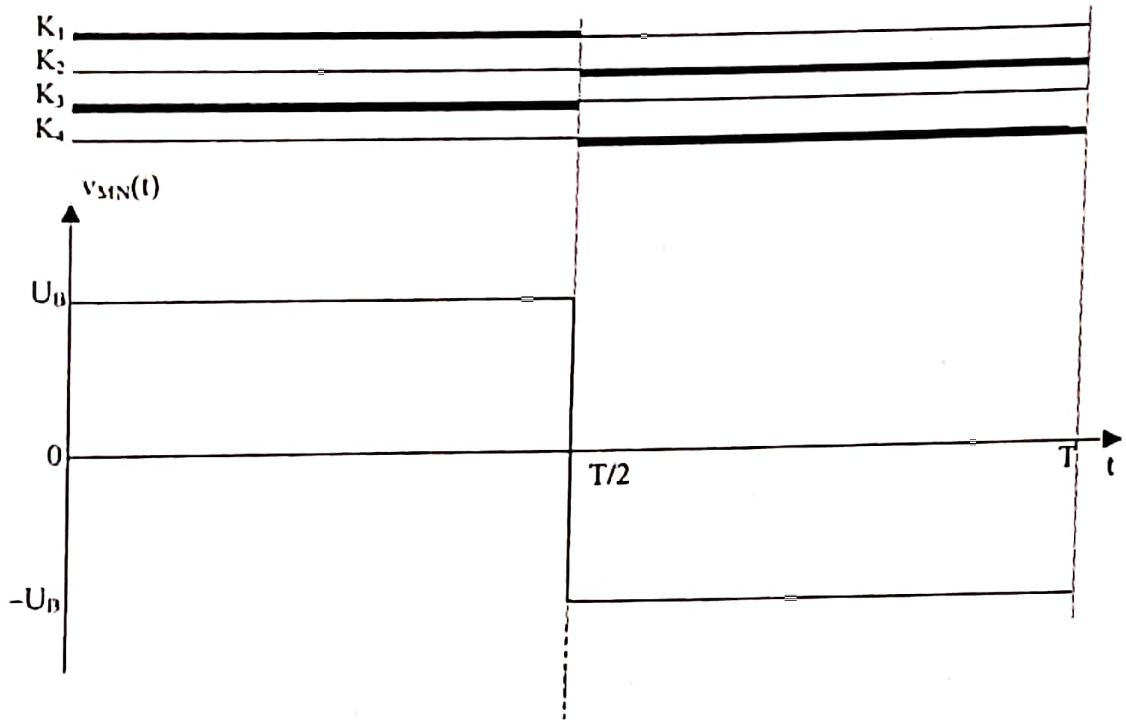
$$d_{g_{V_s}} = \frac{\sqrt{\sum_{n>1} V_{sn}^2}}{V_{s1}} \approx \frac{\sqrt{\sum_{n>1} V_{sn}^2}}{V_1} < \frac{\sqrt{\sum_{n>1} V_n^2}}{10V_1} = \frac{d_g}{10} \approx \frac{0{,}49}{10} = 0{,}049$$

On a bien : $d_{g_{V_s}} < 5\%$.

6. Si le produit LC est dix fois plus grand, cela va nécessiter une inductance et une capacité plus grandes et donc un plus gros encombrement du dispositif, d'où l'avantage de la MLI.

DOCUMENT REPONSE N° 1 a

Les parties en trait épais correspondent à l'état fermé des interrupteurs
Les parties en trait fin correspondent à l'état ouvert des interrupteurs.



DOCUMENT REPONSE N° 1 b