ECOLE SUPERIEURE DE GENIES (ESGE)

CHAPITRE 4 : ETUDES DES SYSTEMES ASSERVIS OU BOUCLES

M. Oumar DIOR, ESGE

Ingénieur Electromécanicien

Chapitre 4 : ETUDE DES SYSTEMES ASSERVIS OU BOUCLES

4.1 Définition et organisation

Un système est dit asservi si son signal de sortie ou une partie de ce signal est ramené à l'entrée à l'aide d'un capteur pour le comparer à la consigne (signal d'entrée). Il est constitué de deux chaines :

- ✓ d'une chaine directe ou chaine d'action qui comporte l'organe (processus) à asservir,
- ✓ d'une chaine de retour ou chaine de réaction comportant le capteur , qui capte le signal de sortie et qui le transforme en un signal analogique au signal d'entrée auquel il est comparé à l'aide d'un comparateur. Le comparateur n'existe pas physiquement, il constitue une somme algébrique de signaux qui sont le signal d'entrée, le signal de retour fournit par le capteur et le signal d'erreur envoyé au correcteur.

Si le signal de sortie obtenu est celui qu'on désirait obtenir, alors le signal d'erreur est nul.

Si le signal de sortie obtenu est différent de celui qu'on désirait obtenir, alors l'erreur est différente de zéro.

Dans tous les cas, il revient au collecteur de corriger, d'amplifier et de transformer l'erreur en un signal que doit recevoir le processus fournissant le signal de sortie. Chaque élément des deux chaines est représenté par sa transmittance sous forme de rectangle et l'ensemble est appelé schéma bloc.

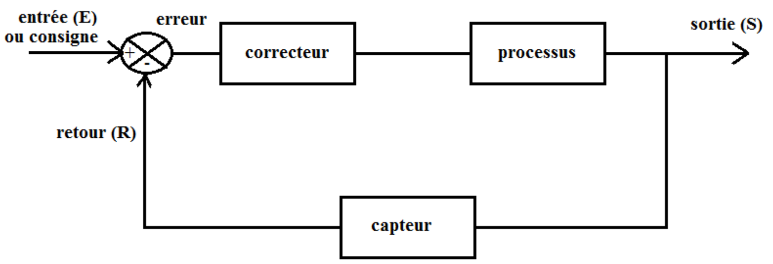


Figure 4.1 : organisation d'un système asservi

$E - R = \Sigma$: résultat de la comparaison effectuée par le comparateur

Soient $H_1(P)$: la transmittance du correcteur,

$H_2(P)$: la transmittance du processus,

$K(P)$: la transmittance du capteur.

Ainsi on a le schéma bloc suivant

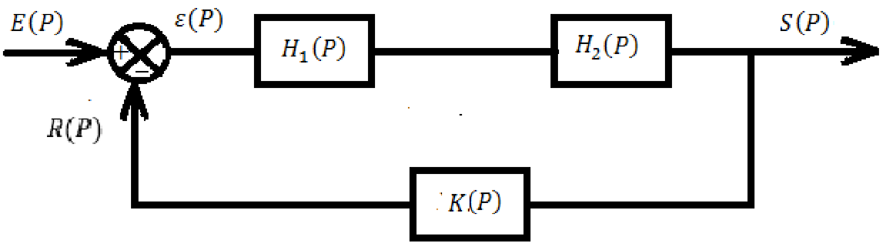


Figure 4.2 : schéma bloc d'un système asservi

<u>Exemple</u>

Soit l'asservissement de la vitesse d'un moteur :

<u>Cas du moteur à courant continu</u>

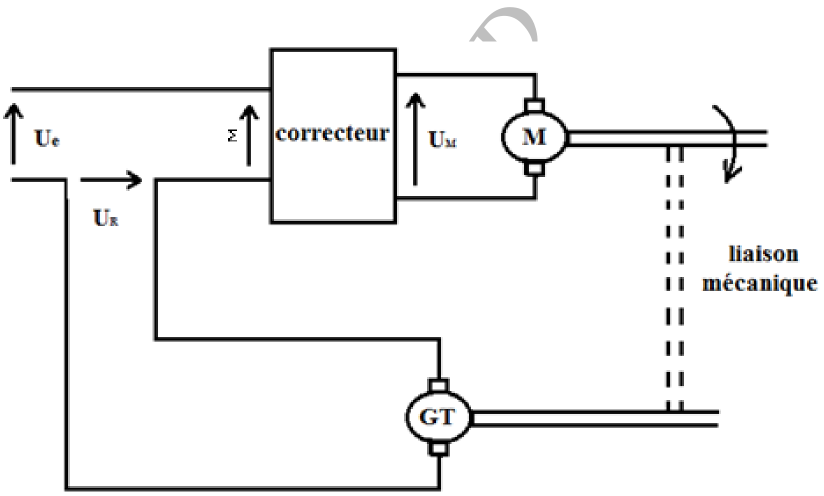


Figure 4.3 : schéma synoptique de l'asservissement de la vitesse d'un moteur à courant continu

Un générateur tachymétrie qui est à courant continu qui fournit U_r

$U_r - U_r = \Sigma$: la tension d'alimentation du correcteur,

U_M : la tension du moteur fournie par le correcteur,

U_e : le signal d'entrée ou la consigne,

Le moteur M représente le processus à asservir,

GT représente le générateur tachymétrique représente le capteur

4.2 La fonction de transfert d'un système asservi : formule de Black

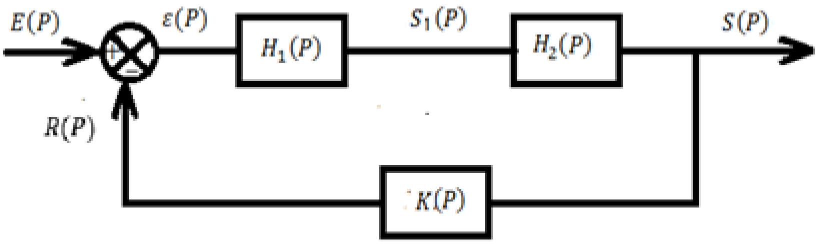


Figure 4.4 : schéma bloc d'un système asservi

$$T(P) = \frac{S(P)}{E(P)} \qquad (0)$$

$$S(P) = ?$$

$$H_2(P) = \frac{S(P)}{S_1(P)} \quad \Rightarrow \quad S(P) = H_2(P).S_1(P) \qquad (1)$$

$$H_1(P) = \frac{S_1(P)}{\varepsilon(P)} \quad \Rightarrow \quad S_1(P) = H_1(P).\varepsilon(P) \qquad (2)$$

(2) dans (1) $\qquad S(P) = H_2(P).H_1(P).\varepsilon(P) \qquad$ (3)

$E(P) = ?$

$$E(P) = \varepsilon(P) + R(P) \qquad (4)$$

$$K(P) = \frac{R(P)}{S(P)} \quad \Rightarrow \quad R(P) = K(P).S(P) \qquad (5)$$

(3) dans (5) $\qquad R(P) = K(P).H_1(P).H_2(P).\varepsilon(P) \qquad$ (6)

(6) dans (4) $\qquad E(P) = \varepsilon(P) + K(P).H_1(P).H_2(P).\varepsilon(P)$

$$= \varepsilon(P).[1 + K(P).H_1(P).H_2(P)] \qquad (7)$$

(3) et (7) dans (0) $\qquad T(P) = \frac{H_1(P).H_2(P).\varepsilon(P)}{\varepsilon(P).[1+K(P).H_1(P).H_2(P)]}$

$$T(P) = \frac{H_1(P).H_2(P)}{1+K(P).H_1(P).H_2(P)}$$

La fonction de transfert à boucle fermée FTBF est égale au produit des transmittances de la chaine directe sur un plus le produit des transmittances des chaines directe et de retour.

4.3 Effet de la réaction sur les amplifications

4.3.1 Effet de la réaction sur l'amplitude statique et la fréquence de coupure

Soit un amplificateur opérationnel (AOP) de transmittance

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{et} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad A(jf) = \frac{A_0}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

A_0 est l'amplitude statique de l'AOP sans asservissement (sans réaction),

f est la fréquence variable de l'AOP,

f_0 est la fréquence de coupure de l'AOP sans asservissement (sans réaction)

A cet amplificateur on introduit une réaction : (on l'asservit l'AOP)

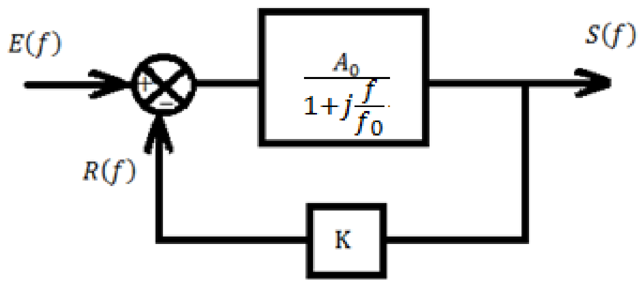


Figure 4.5 : schéma bloc de l'AOP asservi avec un retour proportionnel à la sortie

$$H(jf) = \frac{\frac{A_0}{1+j\frac{f}{f_0}}}{1+\frac{K.A_0}{1+j\frac{f}{f_0}}} = \frac{\frac{A_0.f_0}{f_0+jf}}{1+\frac{K.A_0.f_0}{f_0+jf}} = \frac{\frac{A_0.f_0}{f_0+jf}}{\frac{f_0+jf+K.A_0.f_0}{f_0+jf}} = \frac{A_0.f_0}{f_0+jf+K.A_0.f_0}$$

$$H(jf) = \frac{A_0.f_0}{f_0+jf+K.A_0.f_0} = \frac{A_0.f_0}{f_0\left(1+j\frac{f}{f_0}+K.A_0\right)} = \frac{A_0.}{1+j\frac{f}{f_0}+K.A_0}$$

$$H(jf) = \frac{A_0}{(1+K.A_0).\left[1+j\frac{f}{f_0.(1+K.A_0)}\right]}$$

On pose $\quad H_0 = \frac{A_0}{1+K.A_0}$: l'amplitude statique avec réaction,

$f_c = f_0.(1 + K.A_0)$: la fréquence de coupure avec réaction,

$$H(jf) = \frac{H_0}{1 + j.\frac{f}{f_c}}$$

❖ Si $|1 + K.A_0| > 1$; $\quad H_0 = \frac{A_0}{1+K.A_0}$

$$\frac{1}{|1+K.A_0|} < 1 \implies \frac{A_0}{|1+K.A_0|} < A_0 \implies H_0 < A_0$$

$$f_c = f_0.(1 + K.A_0) \implies f_c > f_0$$

<u>Conclusion</u>

Si $|1 + K.A_0| > 1 \implies$ la réaction diminue les amplitudes statiques des systèmes, mais augmente leurs fréquences de coupure.

❖ Si $|1 + K.A_0| < 1 \implies H_0 > A_0 \implies f_c < f_0$ donc la réaction augmente les amplitudes statiques des systèmes, mais diminue leurs fréquences de coupure.

4.3.2 <u>Effet sur l'impédance d'entrée des amplifications</u>

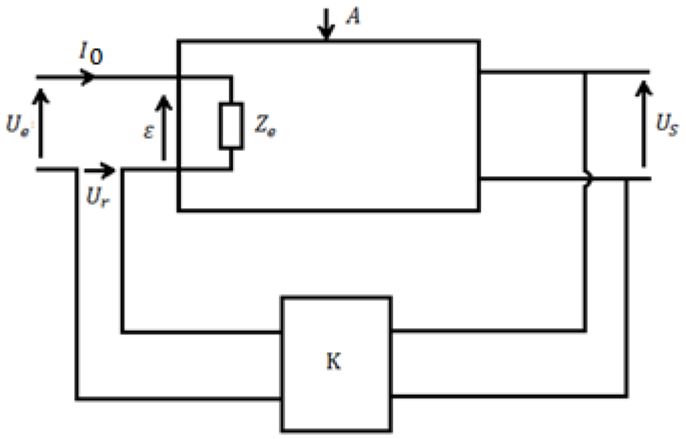


Figure 4.6 : schéma synoptique d'un AOP asservi faisant apparaitre l'impédance d'entrée.

A : la transmittance de l'AOP

Z_e : l'impédance d'entrée sans réaction

K: la transmittance due à la réaction

Soit Z_e': l'impédance d'entrée avec réaction. Démontrons que $Z_e' = Z_e.(1 + KA)$

Sans réaction $U_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad U_e = \varepsilon$

$$\varepsilon = Z_e . I_e \quad \Longrightarrow \quad Z_e = \frac{\varepsilon}{I_0}$$

$$\Longrightarrow \quad Z_e{}' = \frac{U_e}{I_0}$$ avec réaction c.-à-d. $U_r \neq 0$

$$U_e = U_r + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{U_s}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad U_s = \mathrm{A}\varepsilon \text{ et } U_r = \mathrm{K}.U_s \quad \Longrightarrow \quad U_r = \mathrm{K.A}\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad U_e = K\mathrm{A}\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(1 + \mathrm{KA})$$

$$Z_e' = \frac{\varepsilon(1+\mathrm{KA})}{I_e} = Z_e(1 + \mathrm{KA}) \quad \Longrightarrow \quad Z_e' = Z_e(1 + \mathrm{KA})$$

Si $|1 + K.A| > 1 \;\Longrightarrow\; Z_e' > Z_e$, la réaction augmente l'impédance d'entrée de l'AOP.

Si $|1 + K.A| < 1 \;\Longrightarrow\; Z_e' < Z_e$, la réaction diminue l'impédance d'entrée de l'AOP.

4.3.3 Effet sur l'impédance de sortie des amplifications

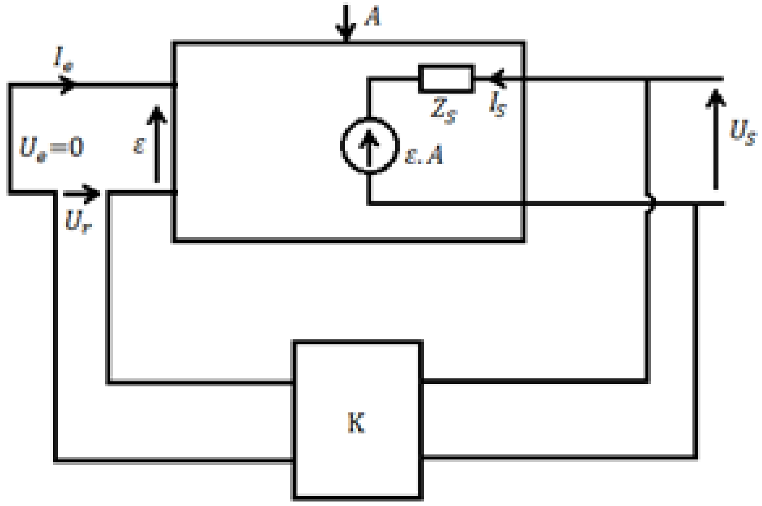


Figure 4.7 : schéma synoptique de l'AOP faisant apparaitre l'impédance de sortie.

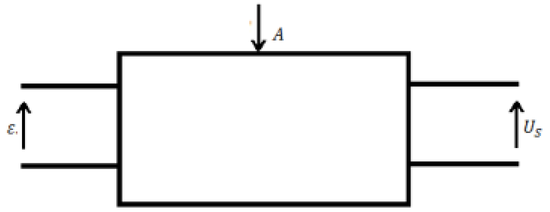
A : la transmittance de l'AOP

Z_s : l'impédance de sortie sans réaction

K: la transmittance due à la réaction

Soit $Z_s{}'$ L'impédance de sortie avec réaction

Démontrons que $Z_S' = \frac{Z_S}{1+KA}$



sans réaction

$U_R = 0$

Figure 4.8 : schéma synoptique de l'AOP sans réaction.

Avec figure 4.8 $\Rightarrow$ $A = \frac{U_S}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $U_s = \varepsilon A$ (1)

Avec la maille de sortie de la figure 4.7, on a $\varepsilon A + ZI_s = U_s$ (2)

À la maille d'entrée de la figure 4.7, on a

$-\varepsilon - U_R = 0 \implies U_R = -\varepsilon \implies \varepsilon = -U_R$ (3)

$\implies U_s = -U_R A + Z_S . I_s$ (4)

(3) dans (2) on a $U_s = -U_R A + Z_S . I_s$ (4) or $U_R = K . U_s$ (5)

(5) dans (4) on a : $U_s = -KU_s A + Z_S . I_s \implies U_s(1 + KA) = Z_S . I_s$ (6)

L'impédance de sortie avec réaction $Z_S' = \frac{U_S}{I_S}$ (7)

Dans (6) on tire $U_S = \frac{Z_S . I_S}{1+KA}$ (8)

(8) dans (7) donne $Z_S' = \frac{\frac{Z_S . I_S}{1+KA}}{I_S}$ alors $Z_S' = \frac{Z_S}{1+KA}$.

Si $|1 + K.A| > 1 \implies Z_S > Z_S{}'$, la réaction diminue l'impédance de sortie.

Si $|1 + K.A| < 1 \implies Z_S < Z_S{}'$, la réaction augmente l'impédance de sortie.

Exercice 1

On se propose de commander la vitesse d'un moteur à excitation séparée en agissant sur le circuit inducteur.

1) Etablir les équations électriques et mécaniques permettant d'assurer cette régulation
2) A partir des équations trouver la transmittance de chaque bloc et en déduire d'abord le schéma bloc et ensuite la fonction de transfert à

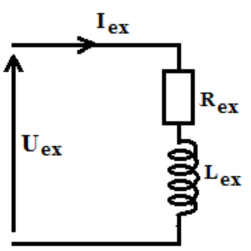
$$\mathrm{T(P)} = \frac{\theta(P)}{U_{ex}(P)} \quad \text{où } U_{ex} \text{ est la tension d'excitation}$$

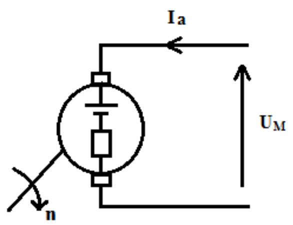
Solution

1) Pour démarrer un moteur, il faut créer un couple moteur $\mathrm{T}_M = \frac{PN}{2\pi a}\Phi I_a$ et que la commande est faite à partir de l'inducteur.

$I_a = cste \quad \Longrightarrow \quad \Phi$ doit être variable.

i_{ex} qui fait varier le flux $\Phi = \mathrm{K}_\Phi i_{ex}$, i_{ex} est créé par l'application de U_{ex} aux bornes de l'enroulement de l'inducteur.





Inducteur du moteur

Induit du moteur au flux et le flux crée le couple T_M

Le signal d'entrée U_{ex} donne naissance à i_{ex}, i_{ex} donne naissance au flux Φ donne naissance à T_M, T_M donne naissance à Ω, Ω donne naissance à θ.

Equation électrique

$$U_{ex} = R_{ex} i_{ex} + L_{ex}\frac{di_{ex}}{dt}$$

$$U_{ex}(P) = R_{ex}.I_{ex}(P) + L_{ex}.P.I_{ex}(P) = (R_{ex} + L_{ex}P)I_{ex}(P)$$

Equations mécaniques

$$T_M = \frac{PN}{2\pi a} K_\Phi i_{ex} I_a = \frac{PN}{2\pi a} K_\Phi I_a = K = cste \text{ ; avec } K_\Phi i_{ex} = \Phi$$

$$T_M = Ki_{ex} \quad \Longrightarrow \quad T_M(P) = KI_{ex}(P) \quad (T_M \text{ - couple moteur}) \qquad (1)$$

$T_j + T_f = T_r$ - couple résistant

Où $T_j = \frac{Jd\Omega}{dt}$: le couple d'inertie

$T_f = f\Omega$: le couple des frottements

Au point de fonctionnement la vitesse estconstante et nous obtenons : $T_M = T_r$

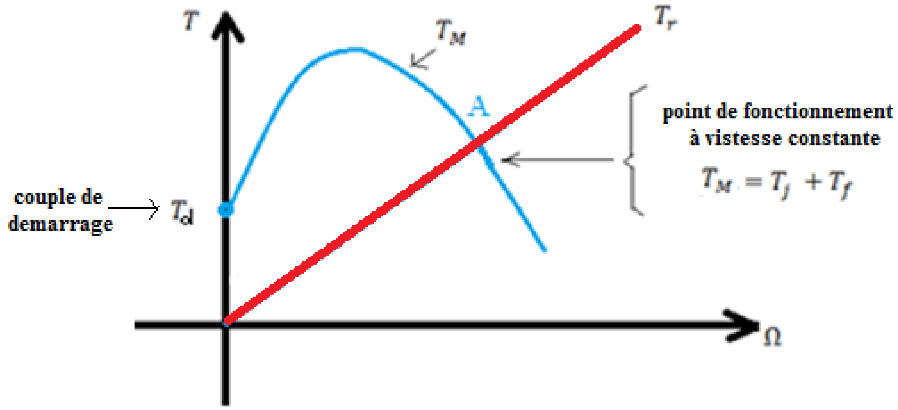


Figure 4.8 : caractéristiques mécaniques du moteur au démarrage

Au démarrage le couple moteur croit rapidement. Parallèle se développe le couple résistant T_r qui s'oppose à la progression de T_M. T_M diminue, alors que T_r augmente. A l'égalité de T_M et T_r, nous atteignons le point de fonctionnement A du moteur. On obtient l'équation dynamique du moteur: $T_M = T_j + T_f = \frac{Jd\Omega}{dt} + f\Omega$

Où Ω : la vitesse,

J : le moment d'inertie

f : le coefficient de frottement

$$T_M(P) = JP\Omega(P) + f\Omega(P) = (JP + f)\Omega(P) \qquad (2)$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \Omega(P) = P\theta(P) \qquad (3)$$

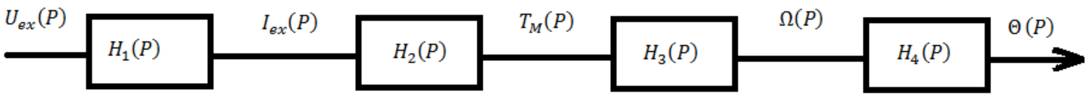
où θ est la position de l'arbre du moteur.

2) $$H_1(P) = \frac{I_{ex}(P)}{U_{ex}(P)} = \frac{\cancel{I_{ex}(P)}}{(R_{ex}L_{ex}P)\cancel{I_{ex}(P)}} = \frac{1}{R_{ex}L_{ex}P}$$

$$H_2(P) = \frac{T_M(P)}{I_{ex}(P)} = \frac{K\cancel{I_{ex}(P)}}{\cancel{I_{ex}(P)}} = K$$

$$H_3(P) = \frac{\Omega(P)}{T_M(P)} = \frac{\cancel{\Omega(P)}}{(JP+f)\cancel{\Omega(P)}} = \frac{1}{JP+f}$$

$$H_4(P) = \frac{\theta(P)}{\Omega(P)} = \frac{\theta(P)}{P\theta(P)} = \frac{1}{P}$$



$$T(P) = \frac{\theta(P)}{U_{ex}(P)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta(P) = \Omega(P)H_4(P) \\ \Omega(P) = T_M(P)H_3(P) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \theta(P) = T_M(P)H_3(P)H_4(P) \\ T_M(P) = I_{ex}(P)H_2(P) \end{array}$$

$$\theta(P) = I_{ex}(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)$$

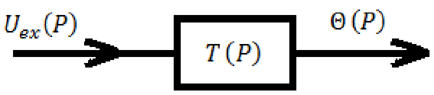
$$I_{ex}(P) = U_{ex}(P)H_1(P)$$

$$\theta(P) = U_{ex}(P)H_1(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)$$

$$T(P) = \frac{\cancel{U_{ex}(P)}H_1(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)}{\cancel{U_{ex}(P)}}$$

$$T(P) = H_1(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)$$

$$T(P) = \frac{1}{R_{ex}+L_{ex}P}.K.\frac{1}{JP+f}.\frac{1}{P}$$



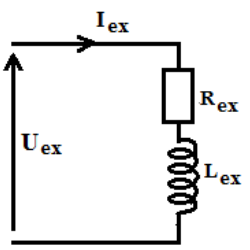
Déterminer $\Omega(t)$ si on suppose que f est négligeable

Exercice 2

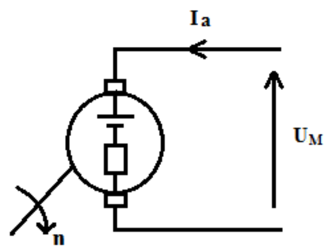
On répond aux mêmes questions que l'exercice 1. Si au lieu de commander le moteur par son inducteur on le commande à partir de son induit. Déterminer la fonction de transfert T(P).

$\mathrm{T(P)} = \frac{\theta(P)}{U_M(P)}$ où U_M la tension de alimentation du moteur.

Solution



inducteur



induit

1) Commander par l'induit veut dire $\mathrm{I}_{ex} = cste \iff \Phi = cste$; I_a varie

$\mathrm{E}_a - U_M + \mathrm{R}_a\mathrm{I}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad U_M = \mathrm{E}_a + \mathrm{R}_a\mathrm{I}_a$

$U_M - \mathrm{E}_a = \mathrm{R}_a\mathrm{I}_a = \varepsilon$

$U_M - \mathrm{E}_a = \varepsilon$

$$U_M(P) - \mathrm{E}_a(P) = \varepsilon(P) = \mathrm{R}_a\mathrm{I}_a(P) \qquad (1)$$

Donc la machine reçoit une tension $\varepsilon(P)$ qui fournit un courant $\mathrm{I}_a(P)$.

La présence de $\mathrm{I}_a(P)$ donne un couple moteur T_M.

$$\mathrm{T}_M(\mathrm{P}) = \frac{PN}{2\pi a}\Phi I_a(P) \quad \text{avec} \quad \frac{PN}{2\pi a}\Phi = \mathrm{cste} = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{T}_M(\mathrm{P}) = \mathrm{K}I_a(P) \qquad (2)$$

La présence du couple moteur entraine l'apparition de la vitesse $\Omega(\mathrm{rad/s})$.

La création de la vitesse entraine la naissance du couple d'inertie $T_j = \frac{J d\Omega}{dt}$ et du couple de frottement $T_f = f\Omega$, qui s'oppose à la croissance du couple moteur. La vitesse devient constante lorsque la somme des couples résistants égalise le couple moteur c'est-à-dire $T_M = j\frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$.

$$T_M(P) = JP\Omega(P) + f\Omega(P) = (JP + f)\Omega(P) \qquad (3)$$

Par ailleurs la création de la vitesse entraine la naissance de la f.é.m. $E_a = \frac{PN}{60a}\Phi n$ avec $n\,(tours/mn)$ que l'on convertie en rad/s.

$$\Omega = \frac{PN}{60a} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{60\Omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow E_a = \frac{PN}{\cancel{60}a}\Phi\frac{\cancel{60}\Omega}{2\pi} = \frac{PN}{2\pi a}\Phi\Omega$$

$$E_a = K\Omega \quad \Rightarrow \quad E_a(P) = K\Omega(P) \qquad (4)$$

L'apparition de la vitesse entraine également la variation de la position θ de l'arbre du moteur qui est liée à la vitesse Ω par la relation $\Omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \Omega(P) = P\theta(P)$ (5).

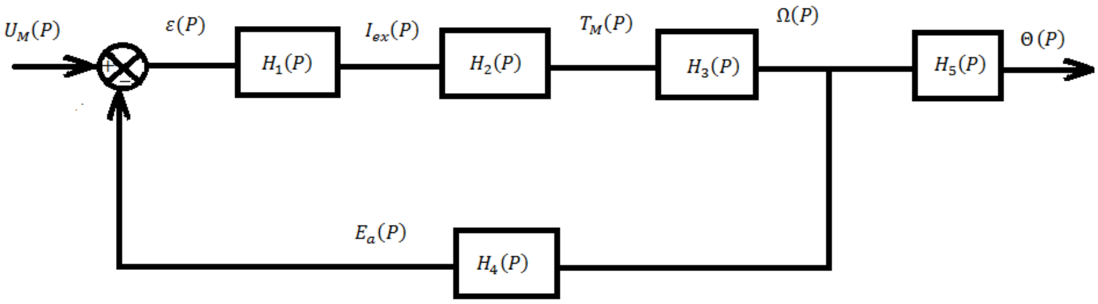
2) $H_1(P) = \frac{I_a(P)}{\varepsilon(P)} = \frac{\cancel{I_a(P)}}{R_a\cancel{I_a(P)}} = \frac{1}{R_a}$

$$H_2(P) = \frac{T_M(P)}{I_a(P)} = \frac{K\cancel{I_a(P)}}{\cancel{I_a(P)}} = K$$

$$H_3(P) = \frac{\Omega(P)}{T_M(P)} = \frac{\cancel{\Omega(P)}}{(JP+f)\cancel{\Omega(P)}} = \frac{1}{JP+f}$$

$$H_4(P) = \frac{E_a(P)}{\Omega(P)} = \frac{K\cancel{\Omega(P)}}{\cancel{\Omega(P)}} = K$$

$$H_5(P) = \frac{\theta(P)}{\Omega(P)} = \frac{\cancel{\theta(P)}}{P\cancel{\theta(P)}} = \frac{1}{P}$$



$$\mathrm{T(P)} = \frac{\theta(P)}{\mathrm{U}_M(P)} = \frac{\Omega(P)}{\mathrm{U}_M(P)} \times \frac{\theta(P)}{\Omega(P)}$$

$$\frac{\Omega(P)}{\mathrm{U}_M(P)} = \frac{\mathrm{H_1(P)H_2(P)H_3(P)}}{\mathrm{1+H_1(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)}}$$

$$\frac{\theta(P)}{\Omega(P)} = \mathrm{H_5(P)}$$

$$T(P) = \frac{\mathrm{H_1(P)H_2(P)H_3(P)}}{\mathrm{1+H_1(P)H_2(P)H_3(P)H_4(P)}} \times \mathrm{H_5(P)}$$

$$T(P) = \frac{\frac{1}{R_a} \times K \times \frac{1}{JP+f}}{1+\frac{1}{R_a} \times K \times \frac{1}{JP+f} \times K} \times \frac{1}{\mathrm{P}}$$

$$T(P) = \frac{K}{R_aJP+R_af+K^2} \times \frac{1}{\mathrm{P}}$$

$$T(P) = \frac{K}{(R_af+K^2)\left(1+\frac{R_aJ}{R_af+K^2}P\right)} \times \frac{1}{\mathrm{P}}$$

Posons $T_0 = \frac{K}{R_af+K^2}$ et $\tau = \frac{R_aJ}{R_af+K^2}$

$$T(P) = T_0 \times \frac{1}{1+\tau P} \times \frac{1}{P}$$

$$T(P) = \frac{T_0}{(1+\tau P)P}$$

Déterminer $\Omega(P)$ $pour$ $U_M = cste$