Les nombres complexes

I Méthodes de calcul

On appelle nbre complexe Z toute expression de la forme $Z = a + ib$

a et b des réels et i l'unité imaginaire.

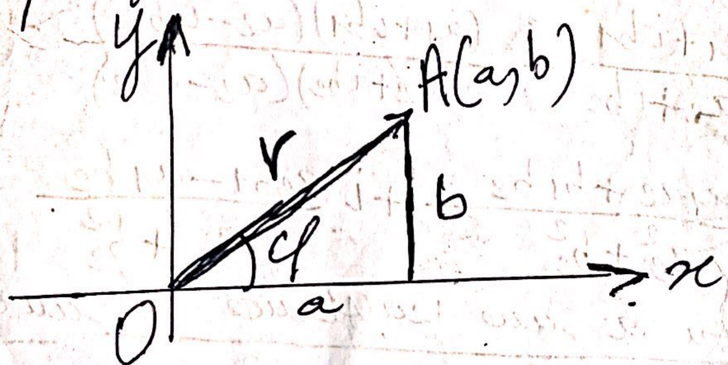
$i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$

a est la partie réelle et b la partie imaginaire du complexe Z ; $a = \mathrm{Re}\,Z$ et $b = \mathrm{Im}\,Z$.

- Deux complexes qui ne diffèrent que par le signe sont dits conjugués ($Z = a + ib$ et $\bar{Z} = a - ib$).

- Forme Trigonométrique

Désignons par φ et r ($r \geq 0$) les coordonnées polaires du point $A(a,b)$, en prenant l'origine des coordonnées pour pôle et le sens positif de l'axe Ox pour axe polaire.



$a = r.\cos\varphi$

$b = r.\sin\varphi$

$Z = a + ib$

Ainsi nous avons $Z = r.\cos\varphi + ir\sin\varphi$

$$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

r est appelé module du complexe Z et φ argument de Z, et notés $r = |Z|$, $\varphi = \arg Z$.

$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a}$

② Opérations sur les complexes:

a) addition :

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

b) Soustraction

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$$
$$= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

c) Multiplication :

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$

Considérons $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i$

En général $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$

Ainsi $Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i b_1 a_2 + i a_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$

$$\Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

En forme trigonométrique, on a :

$$Z_1 Z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

d) Division

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

2 Elevation à une puissance d'un complexe

$$\left[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{(formule de Moivre)}$$

3 Extraction de la racine

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

si $\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Pour 2 complexes égaux leurs modules sont égaux et la ≠ce de leurs arguments est un multiple de 2π : ce qui nous permet d'écrire :

$\rho^n = r \quad n\psi = \varphi + 2k\pi$

$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ et $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

Par conséquent :

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

ex $\quad x^4 = 1$

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

Pour $k = 0, 1, 2, 3$ nous avons :

$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$x_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$

$x_3 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1$

$x_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i$

4 Fonctions exponentielles à exposant complexe et ses propriétés

Soit U une fonction de la variable complexe Z

$u = f(Z)$ ou $u(Z)$.

Considérons $u = e^Z \Leftrightarrow u = e^{x+iy}$

$e^{x+y} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\Leftrightarrow u(Z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

- $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}\cdot e^{Z_2}$
- $e^{Z_1-Z_2} = \dfrac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}}$
- Si m est un nbre entier $(e^Z)^m = e^{mZ}$
- $e^{Z+2\pi i} = e^Z$

$(e^{Z+2\pi i} = e^Z\cdot e^{2\pi i} = e^Z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^Z$

- $(e^{kx})^n = k^n\cdot e^{kx}$

③ Formule d'Euler : Forme exponentielle d'un nbre complexe

- soit $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ (formule d'Euler)

$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

$\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\qquad \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

- Forme exponentielle :

soit $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

où r est le modul et φ l'argument du complexe z

En vertu de la formule d'Euler : $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Par conséquent tout complexe peut ~~s~~ s'écrire sous forme exponentielle $\quad z = re^{i\varphi}$.

<u>ex</u> Mettre les nbres $1, i, -2$ et $-i$ sous forme ~~complexe~~ exponentielle

$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{\pi i}$

$-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

<u>exo d'application</u>

Déterminer la somme $\underline{C}$ des nbres $\underline{A} = 10e^{i45°}$ et $B = 6e^{-i30°}$

$\underline{A} = 10e^{i45°} = 10\cos 45° + i\,10\sin 45° = 7{,}07 + i\,7{,}07$

$\underline{B} = 6e^{-i30°} = 6\cos 30° - i\,6\sin 30° = 5{,}2 - i\,3$

$\Longrightarrow \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (7{,}07 + i\,7{,}07) + (5{,}2 - i\,3) = 12{,}27 + i\,4{,}07$

Modul de $\underline{C}$: $C = \sqrt{12{,}27^2 + 4{,}07^2} = 12{,}9$

~~tg~~ Soit φ l'argument de $\underline{C}$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4{,}07}{12{,}27} = 0{,}331 \Longrightarrow \varphi = 18°20'$

ce qui nous donne comme forme ~~polaire~~ exponentielle de $\underline{C}$

$\underline{C} = 12{,}9\, e^{i18°20'}$