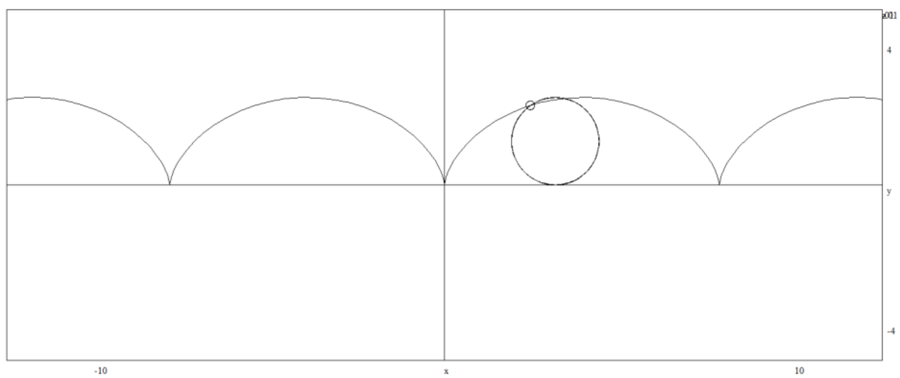
אנטגרלים קוויים מסוג הראשון ומסוג השני

שאלה 1

מצאו את אורך של ציקלואידה $C = \{(a(t-\sin t), a(1-\cos t)) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$.

פתרון

הקו הוא קשת אחת של מסלול התנועה של נקודה אשר נמצאת על גלגל עם רדיוס a והגלגל נע לאורך קו ישר (ראו את הקובץ Cycloid.dpg):



הקו הוא גרף של פונקציה וקטורית $\vec{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ והיא בעלת נגזרת רציפה

$$\vec{r}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$$

לכן אורך הקו ניתן לחשב באמצעות אינטגרל קווי מהסוג הראשון:

$$l(C) = \int_C 1 dl = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt$$

נחשב את האינטגרל:

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} dt = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt =$$

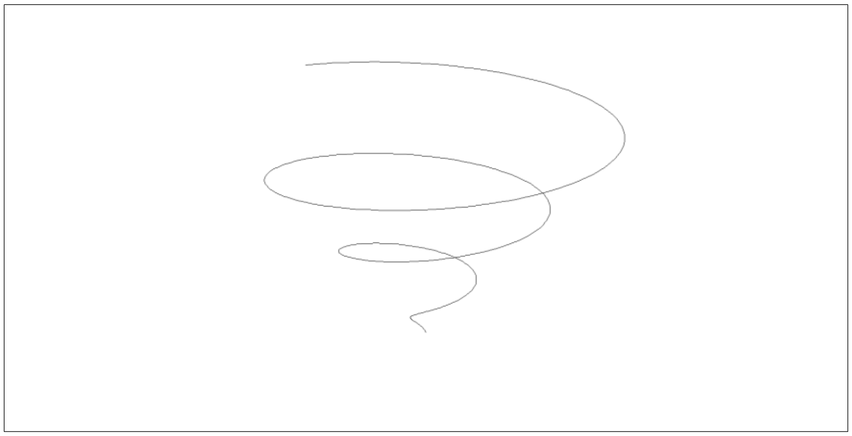
$$= \left[0 \le \frac{t}{2} \le \pi \Rightarrow \sin\frac{t}{2} \ge 0 \right] = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{2\pi}^{0} = 8a$$

שאלה 2

קו C הוא גרף של פונקציה ווקטורית $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. מצאו את מסת הקו, אם צפיפות החומר האורכית מוגדרת ע"י פונקציה $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

פתרון

הקו הוא סיבוב אחד של ספירלה הנמצאת על חרוט $x^2+y^2=z^2$ (ראו קובץ Spiral.dpg) :



הפונקציה הווקטורית הנתונה גזירה ברציפות:

$$\vec{r}'(t)=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,1)$$

פונקציה הצפיפות היא רציפה בכל המרחב, לכן

$$m(C)=\int_C \rho(x,y,z)dl=\int_0^{2\pi}\rho(\vec{r}(t))|\vec{r}'(t)|dt$$

נציב בנוסחה את הנתונים ונקבל:

$$m(C)=\int_C \sqrt{x^2+y^2+z^2}dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+t(\sin t)^2+t^2}\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}dt$$

נפתח את הביטויים:

$$\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2+t^2}=\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+t^2}=\sqrt{2t^2}=|t|\sqrt{2}\overset{t\geq 0}{=}t\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\cos^2 t-2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t+1}=\sqrt{2+t^2}$$

נחזור לאינטגרל ונחשב אותו באמצעות החלפת המשתנים:

$$m(C)=\int_0^{2\pi}t\sqrt{2}\sqrt{2+t^2}dt=\begin{bmatrix}u=2+t^2\\ du=2tdt\Rightarrow tdt=\dfrac{du}{2}\\ t=0\Rightarrow u=2\\ t=2\pi\Rightarrow u=2+4\pi^2\end{bmatrix}=\sqrt{2}\int_2^{2+4\pi^2}\frac{\sqrt{u}}{2}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_2^{2+4\pi^2}=$$

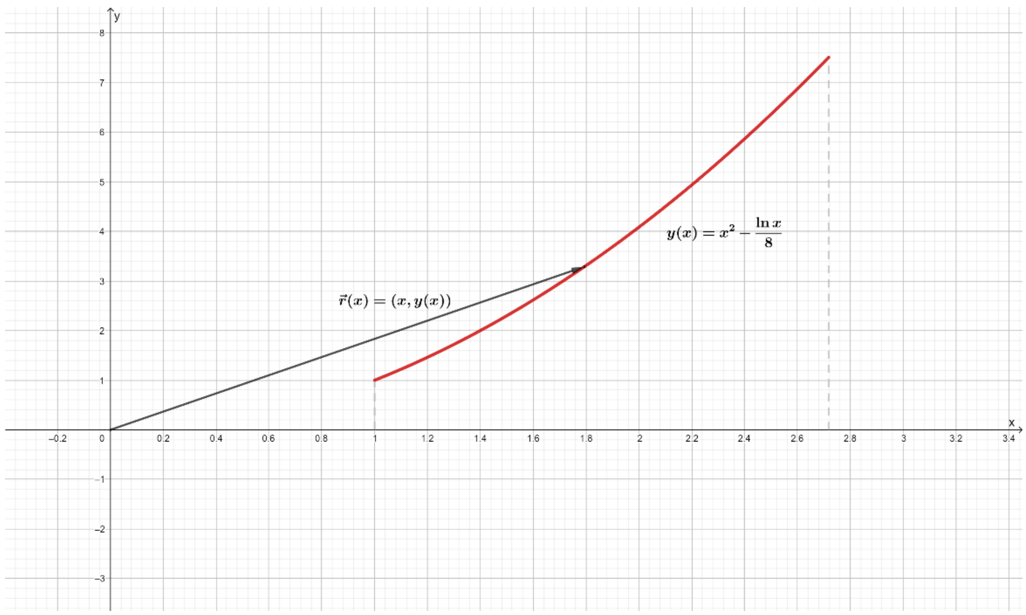
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{(2+4\pi^2)^3}-\sqrt{8}\right)$$

<u>שאלה 3</u>

חשבו את אורך הקשת של גרף פונקציה $y(x)=x^2-\frac{\ln x}{8}$, $1\le x\le e$.

<u>פתרון</u>

גרף של הפונקציה הוא גם גרף של פונקציה וקטורית $\vec{r}(x)=(x,y(x))=\left(x,x^2-\frac{\ln x}{8}\right)$ (ראו את האיור) :



פונקציה $y(x)$ גזירה ברציפות בקטע ההגדרה: $y'(x)=2x-\frac{1}{8x}$.

לכן אורך הקשת:

$$l(C)=\int_C 1dl=\int_1^e|\vec{r}'(x)|\,dx=\int_1^e\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx$$

נפתח את הביטוי שהוא מתחת לשורש:

$$1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2=1+(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}+\left(\frac{1}{8x}\right)^2=\left[\begin{array}{c}2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}=\frac{1}{2}\\ 1-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}=\frac{1}{2}\end{array}\right]=(2x)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{8x}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{1}{2}=2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}\right]=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}+\left(\frac{1}{8x}\right)^2=\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2$$

נחזור לחישוב האינטגרל:

$$l=\int_1^e\sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx=\int_1^e\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx=\left(x^2+\frac{\ln x}{8}\right)\Big|_1^e=\left(e^2+\frac{1}{8}\right)-(1+0)=e^2-\frac{7}{8}$$

שאלה 4

קו C הוא גרף של פונקציה ווקטורית $\vec{r}(t)=(t^3,t,t^2)$, $t\in\mathbb{R}$.

א) הוכיחו כי הקוו חותך את המישור $x+y-2z=0$ בשתי נקודות;

ב) מצאו $\int_{C_1}(9x+2y)\,dl$ כאשר C_1 קשת העקום שבין נקודות החיתוך עם המישור.

פתרון

א) נקודות החיתוך של הקוו והמישור הן פתרונות המערכת:

$$\begin{cases} x=t^3 \\ y=t \\ z=t^2 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t^3 \\ y=t \\ z=t^2 \\ t^3+t-2t^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t^3 \\ y=t \\ z=t^2 \\ t(t^2+1-2t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t^3 \\ y=t \\ z=t^2 \\ t(t-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t^3 \\ y=t \\ z=t^2 \\ t=0 \;\; or \;\; t=1 \end{cases}$$

לכן ישנן שתי נקודות החיתוך בלבד: $M_1(0,0,0)$, $M_2(1,1,1)$.

ב) לפי המשפט על חישוב אינטגרל קווי מהסוג הראשון:

$$\vec{r}'(t)=(3t^2,1,2t)$$

$$\int_{C_1}(9x+2y)\,dl=\int_0^1\left(9t^3+2t\right)\underbrace{\sqrt{(3t^2)^2+1^2+(2t)^2}}_{|r'(t)|}\,dt=\int_0^1\left(9t^3+2t\right)\sqrt{9t^4+4t^2+1}\,dt$$

לחישוב האינטגרל האחרון נעשה את החלפת המשתנים

$$\int_{C_1}(9x+2y)\,dl=\int_0^1\left(9t^3+2t\right)\sqrt{9t^4+4t^2+1}\,dt=\begin{bmatrix} u(t)=9t^4+4t^2+1 \\ du=(36t^3+8t)dt=4(9t^3+2t)dt \\ t=0\Rightarrow u=1 \\ t=1\Rightarrow u=14 \end{bmatrix}=$$

$$=\int_1^{14}\sqrt{u}\,\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3\Big|_1^{14}=\frac{1}{6}\left(\sqrt{14^3}-1\right)$$

שאלה 5

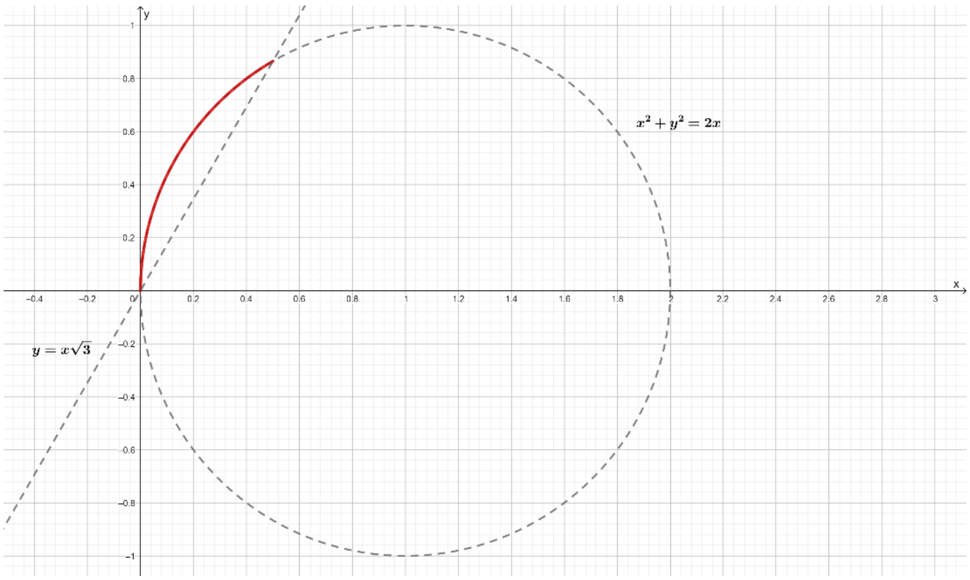
נתונה קשת המעגל: $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=2x\ ,\ y\ge x\sqrt{3}\}$.

א) מצאו את אורך העקום.

ב) מצאו את מסת העקום, אם צפיפות החומר האורכית מוגדרת ע"י פונקציה $\rho(x,y)=xy$.

פתרון

הקוו הוא קשת של המעגל שמרכזו בנקודה $(1,0)$ ורדיוס המעגל שווה ל-1 , ראו את האיור:



בשאלה זאת נוח מאוד להיעזר בקואורדינאטות קוטביות על מנת למצוא פרמטריזציה של העקום:

עבור הנקודות על המעגל:

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta=r(\theta)$$

$$x=r\cos\theta=r(\theta)\cos\theta=(2\cos\theta)\cos\theta=2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta=x(\theta)$$
$$y=r\sin\theta=r(\theta)\sin\theta=(2\cos\theta)\sin\theta=\sin 2\theta=y(\theta)$$

קשת המעגל נמצאת בזווית $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. מכאן

$$l(C)=\int_C 1dl=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{(-2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}}_{=2}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2d\theta=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

ב) ניעזר בפרמטריזציה מהסעיף הקודם על מנת למצוא את מסת הקשת באמצעות אינטגרל קווי מהסוג הראשון:

$$m(C)=\int_C \rho(x,y)dl=\int_C xydl=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}x(\theta)y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\sin 2\theta\underbrace{\sqrt{(-2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}}_{=2}\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2\theta+\underbrace{\cos 2\theta\sin 2\theta}_{\frac{1}{2}\sin 4\theta}\right)d\theta=$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)d\theta=2\left(\frac{-\cos 2\theta}{2}+\frac{-\cos 4\theta}{8}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{-1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

שאלה 6

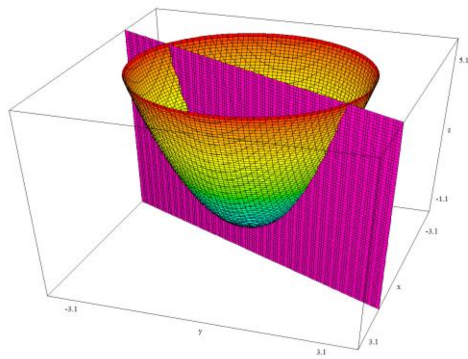
יהי C קוו החיתוך של שני המשטחים: $z=x^2+y^2$, $y=2x$.

א) מצאו פרמטריזציה של הקו;

ב) חשבו את העבודה של שדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ לאורך קוו C מנקודה $A(1,2,5)$ לנקודה $B(0,0,0)$.

פתרון

א) קו C הוא קו חיתוך של פרבולואיד $z=x^2+y^2$ והמישור שמקביל לציר ה- z (ליתר הדיוק המישור מכיל את הציר, ראו את האיור):



נבחר $x=t$, $t\in\mathbb{R}$, ואז עבור כל הנקודות על קוו החיתוך מתקיים: $y=2t$, $z=x^2+y^2=t^2+(2t)^2=5t^2$.
לכן הפונקציה הווקטורית $\vec{r}(t)=(t,2t,5t^2)$ מהווה פרמטריזציה של הקו.

ב) קוו C הוא חלק (נגזרת של הפונקציה הווקטורית היא רציפה לכל ערך של t):

$$\vec{r}'(t)=(1,2,10t)$$

שדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ הוא רציף בכל המרחב, לכן ניתן להיעזר בנוסחה לחישוב אינטגרל קווי מהסוג השני (עבודה של שדה וקטורי):

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C zdx+xdy+ydz=\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta \left(z(t)x'(t)+x(t)y'(t)+y(t)z'(t)\right)dt=\int_\alpha^\beta \left(5t^2\cdot 1+t\cdot 2+2t\cdot 10t\right)dt$$

כאשר α ו- β הם ערכי הפרמטר כך שמתקיים:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}(\alpha)=(\alpha,2\alpha,5\alpha^2)=A(1,2,5)\\ \vec{r}(\beta)=(\beta,2\beta,5\beta^2)=B(0,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=1\ ,\ \beta=0$$

נשלים את החישובים:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^0 \left(25t^2+2t\right)dt=-\int_0^1 \left(25t^2+2t\right)dt=-\left(\frac{25}{3}+1\right)=-9\frac{1}{3}$$

שאלה 7

מצאו את הצירקולציה של שדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right)$ לאורך קו

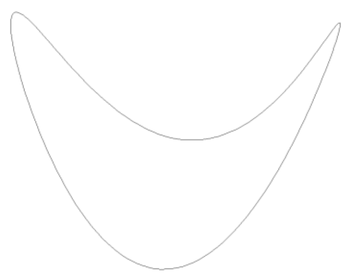
$$C=\{(\sin t,\cos t,\sin 2t)\mid t\in[0,2\pi]\}$$

בכיוון המוגדר ע"י שינוי הפרמטר $t:0\to 2\pi$.

מהי הצרקולציה של השדה בכיוון המוגדר ע"י שינוי הפרמטר $t:2\pi\to 0$?

פתרון

הקו הוא גרף של פונקציה וקטורית $\vec{r}(t)=(\sin t,\cos t,\sin 2t)$, והקוו הוא סגור כי $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)=(0,1,0)$ (ראו את האיור):



אינטגרל קווי מהסוג השני בקוו זה נקרא צירקולציה של שדה וקטורי: $\oint_C \vec{F}\cdot dr$.

פונקציה וקטורית $\vec{r}(t)=(\sin t,\cos t,\sin 2t)$ גזירה ברציפות בקטע $[0,2\pi]$:

$$\vec{r}'(t)=(\cos t,-\sin t,2\cos 2t)$$

הקוו נמצא על הגליל $x^2+y^2=1$ והשדה הוקטורי $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right)$ רציף בכל המרחב פרט לציר ה- z , לכן לחישוב הצירקולציה ניתן ליישם את הנוסחה:

$$\oint_C \vec{F}\cdot dr=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt$$

נציב את הנתונים בנוסחה:

$$\oint_C \vec{F}\cdot dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin t}{1}\cos t+\frac{\cos t}{1}(-\sin t)+\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{1}2\cos 2t\right)dt=\int_0^{2\pi}2(\cos^2 t-\sin^2 t)\cos 2t dt$$

$$=\left[\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t\right]=\int_0^{2\pi}2\cos^2 2t dt=\left[2\cos^2 2t=1+\cos 4t\right]=\int_0^{2\pi}(1+\cos 4t)dt=2\pi+\left.\frac{\sin 4t}{4}\right|_0^{2\pi}=2\pi$$

אם נחליף את הכיוון על הקוו כך שמתקיים: $t:2\pi\to 0$, אז הצרקולציה תשנה את הסימן, ז"א בכיין ההפוך:
$\oint_C \vec{F}\cdot dr=-2\pi$.

<u>שאלה 8</u>

יהי C קוו החיתוך של שני המשטחים: $x^2+y^2=2x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

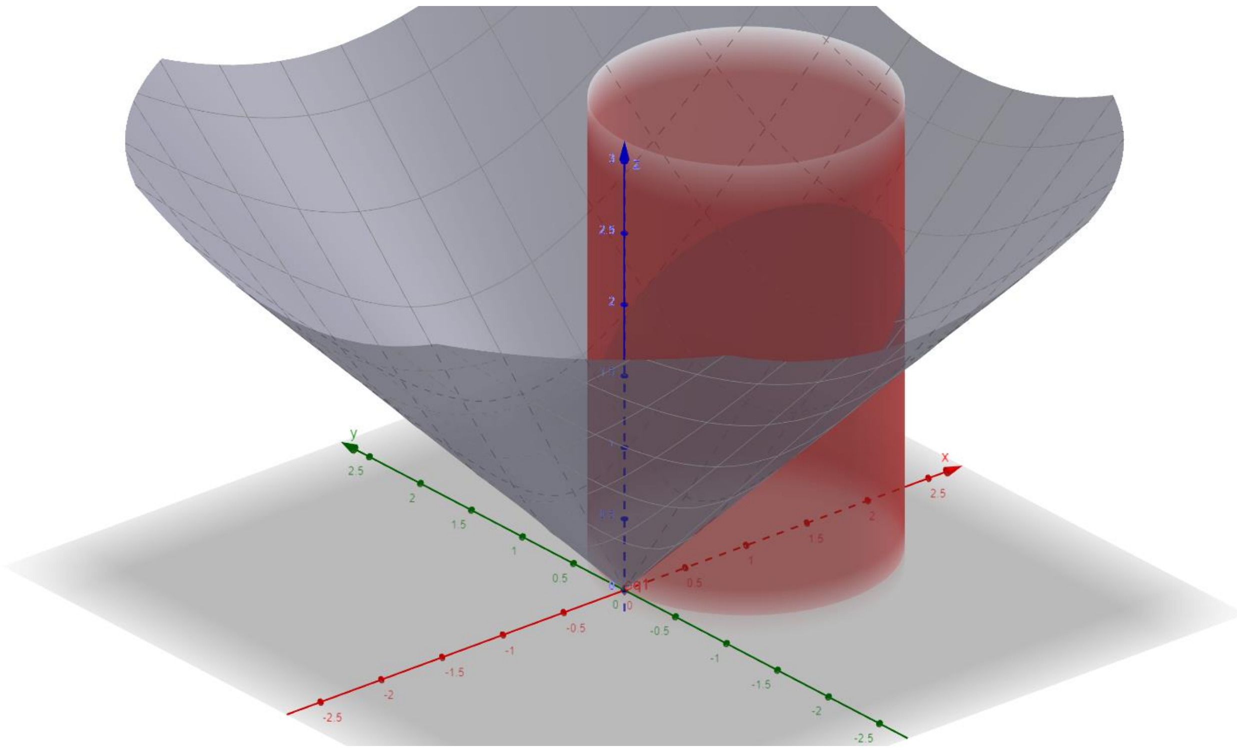
1) מצאו פרמטריזציה של הקו;

2) חשבו את הצירקולציה: $\oint_C zdx+xdy+ydz$, כאשר כיוון על קוו הוא נגד כיוון השעות במבט מלמעלה.

האם השדה הוא משמר בכל המרחב?

<u>פתרון</u>

1) הקו הוא סגור (ראו את האיור):



נעזר בקואורדינאטות גליליות: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$. עבור הנקודות של הגליל מתקיים:

$$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

מכאן:

$x=2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$, $y=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$, $z=r(\theta)=2\cos\theta$, $\theta:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$. לשם נוחות

נחליף את θ ב- t . הקו הוא גרף של פונקציה וקטורית: $\vec{r}(t)=(1+\cos 2t,\sin 2t,2\cos t)$, $t:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$.

2) הקו הוא חלק ושדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ הוא רציף בכל המרחב, לכן

$$\oint_C zdx + xdy + ydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos t(-2\sin 2t) + (1+\cos 2t)2\cos 2t + \sin 2t(-2\sin t)\right)dt =$$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos 2t + 1 + \cos 4t\right)dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 t\cos t dt = 0 + \pi + 0 - \frac{8}{3} = \pi - \frac{8}{3}$$

השדה הוא רציף, לכן אם קיים קו סגור כך צירקולצית השדה שונה מ-0, אז השדה אינו משמר. נטפל בשדות כאלה בתרגול הבא...

<u>שאלה 9</u>

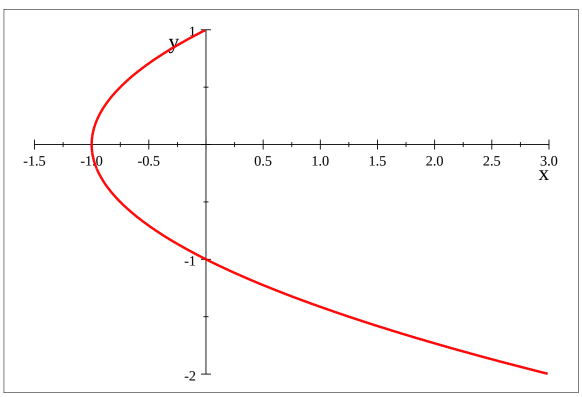
חשבו את האנטגרל $\int_C ydx + xdy$:

א) כאשר קו C הוא גרף של פונקציה $x(y) = y^2 - 1$ מנקודה $A(0,1)$ לנקודה $B(3,-2)$;

ב) כאשר C הוא קו שבור המחבר את הנקודות: $A(0,1)$, $D(3,1)$, $B(3,-2)$.

<u>פתרון</u>

א) קו האינטגרציה הוא קשת הפרבולה, והוא חלק:

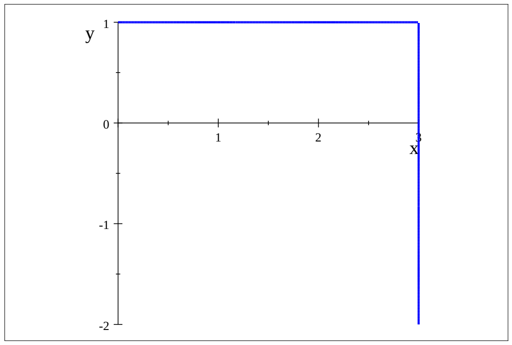


שדה וקטורי $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (y,x)$ רציף בכל המישור, לכן לחישוב האינטגרל ניישם את הנוסחה:

$$\int_C ydx + xdy = \begin{bmatrix} x(y) = y^2 - 1 \\ y = y \\ y: 1 \to -2 \end{bmatrix} = \int_1^{-2} \left(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)1\right)dy =$$

$$= \int_1^{-2} \left(y\cdot 2y + ((y^2-1))\cdot 1\right)dy = \int_1^{-2}\left(3y^2 - 1\right)dy = \left(y^3 - y\right)\Big|_1^{-2} = (-8+2) - (1-1) = -6$$

ב) קו האינטגרציה הוא קו חלק למקוטעין - מורכב משני הקטעים הישרים:



$$AD = \{(x,1) \mid x: 0 \to 3\}$$
$$DB = \{(3,y) \mid y: 1 \to -2\}$$

מכאן

$$\int_C ydx + xdy = \int_{AD} ydx + xdy + \int_{DB} ydx + xdy = \int_0^3 \left(1\cdot 1 + x\cdot 0\right)dx + \int_1^{-2} \left(y\cdot 0 + 3\cdot 1\right)dy = 3 + 3(-3) = -6$$

שימו לב: בשני המקרים קיבלנו אותו הערך של האינטגרל. הדבר איננו מקרי: ניתן להוכיח כי השדה הוא משמר ועבורו אינטגרל קווי מהסוג השני לא תלוי במסלול אינטגרציה.