UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Primož Durcik in Jan Lampič

6-točkovna interpolacijska subdivizijska shema

Seminar pri predmetu Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

Ljubljana, 2019

1. Uvod

Subdivizija je ena od metod za generiranje gladkih krivulj in ploskev. Subdivizijske sheme so pravila s pomočjo katerih iz zaporedja točk konstruiramo neko novo gostejše zaporedje. Delitve ponavljamo in v limiti pridemo do gladkih krivulj oziroma ploskev. V splošnem subdivizijske sheme ločimo na aproksimacijske in interpolacijske. Limitna krivulja aproksimacijske sheme ne gre skozi točke kontrolnega poligona. V veliko primerih so zato interpolacijske sheme bolj priljubljene, saj se vse točke kontrolnega poligona nahajajo na limitni krivulji. Interpolacijske sheme tako poenostavijo grafične algoritme in modele. V tem delu je predstavljena šest točkovna interpolacijska shema, ki je $\mathcal{C}^2$ zvezna.

2. Opis pojmov

Splošna 3-arna subdivizijska shema S, ki slika poligon $F^k = \{f_i^k\}_{i\in\mathbb{Z}}$ v poligon $F^{k+1} = \{f_i^{k+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, je definirana kot

$$f_i^{k+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j-i} f_j^k, i \in \mathbb{Z},$$

kjer koeficienti a_i predstavljajo masko subdivizijske sheme. To pravilo lahko razdelimo na tri podpravila in sicer:

- za $i = 3k$ dobimo $f_{3k}^{k+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j-3k} f_j^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3(j-k)} f_j^k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{3i} f_{k+i}^k$. Če sedaj zamenjamo indekse dobimo $f_{3i}^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j} f_{j+i}^k$,
- za $i = 3k + 1$ na podoben način dobimo $f_{3i+1}^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j-1} f_{j+i}^k$,
- za $i = 3k + 2$ pa dobimo $f_{3i+2}^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j-2} f_{j+i}^k$.

Potreben pogoj, da je subdivizijska shema enakomerno konvergentna, je

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{3j+2} = 1. \tag{1}$$

Označimo zaporedje $F^k = \{f_i^k; i \in \mathbb{Z}\}$. Pravimo, da je subdivizijska shema enakomerno konvergentna, če za poljubne začetne podatke F^0 obstaja zvezna funkcija f, da za poljuben zaprt interval $I \subset \mathbb{R}$, zadošča pogoju

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{i\in 3^k I} |f_i^k - f(3^{-k} i)| = 0.$$

Tako funkcijo f označimo s $S^\infty F^0$.

Vsaki maski $\mathcal{A}$ priredimo karakteristični L-polinom $a(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^i$, ki mu pravimo tudi simbol sheme. Z uporabo L-polinoma in enakosti (1) dobimo, da mora konvergentna subdivizijska shema zadoščati

$$a(e^{2i\pi/3}) = a(e^{4i\pi/3}) = 0, \quad a(1) = 3. \tag{2}$$

Ta pogoj nam zagotavlja obstoj pripadajoče subdivizijske sheme za deljene diference originalnih kontrolnih točk in obstoj pripadajočega L-polinoma $a^{(1)}(z)$:

$$a^{(1)}(z) = \frac{3z^2}{1 + z + z^2} a(z).$$

Povezavo med subdivizijsko shemo S_1 s simbolom $a^{(1)}(z)$ in subdivizijsko shemo S s simbolom $a(z)$ nam daje naslednji izrek.

Izrek 2.1. *Naj bo S subdivizijska shema s simbolom $a^{(1)}(z)$, ki zadošča (1). Potem obstaja sudivizijska shema S_1 z lastnostjo*

$$dF^{k+1} = S_1 dF^k,$$

kjer je $F^k = S^k f$ in dF^k zaporedje $\{3^k(f^k_{i+1} - f^k_i)\}$. še več, S konvergira enakomerno če in samo če $\frac{1}{3}S_1$ konvergira enakomerno k ničelni funkciji za poljubne začetne podatke F^0, t. j.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}S_1\right)^k f^0 = 0.$$

Iz zgornjega izreka sledi, da subdivizijska shema S konvergira enakomerno, če obstaja $L \in \mathbb{N}$, da velja $\|(\frac{1}{3}S_1)^L\|_\infty < 1$. Tukaj je norma $\|S\|_\infty$ definirana kot

$$\|S\|_\infty = \max\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{3j}|, \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{3j+1}|, \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{3j+2}|\}$$

in

$$\left\|\left(\frac{1}{3}S_n\right)^L\right\|_\infty = \max\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |b^{[n,L]}_{i+3^L j}| : i = 0, 1, \ldots, 3^L - 1\},$$

kjer je

$$b^{[n,L]}(z) = \frac{1}{3^L}\prod_{j=0}^{L-1} a^{(n)}(z^{3^j}),$$

in za vsak $n \geq 1$,

$$a^{(n)}(z) = \frac{3z^2}{1+z+z^2}a^{(n-1)}(z) = \left(\frac{3z^2}{1+z+z^2}\right)^n a(z). \tag{3}$$

Od tod sledi, da je $\frac{1}{3}S_{n+1}$ enakomirno konvergira k ničelni funkciji za poljubne začetne podatke F^0, potem je $S^\infty f^0 \in \mathcal{C}^n$. Torej za subdivizijsko shemo S je $S^\infty f^0 \in \mathcal{C}^n$ natanko tedaj ko obstaja $L \in \mathbb{N}$, da je $\|(\frac{1}{3}S_{n+1})^L\|_\infty$.

3. 6-točkovna interpolacijska subdivizijska shema

Sedaj bomo skonstruirali 6-točkovno interpolacijsko subdivizijsko shemo. Najprej bomo to naredili za točke, ki tvorijo zaprt poligon, nato pa bomo to shemo razširili še na točke, ki tvorijo odprt poligon.

3.1. **Konstrukcija sheme za zaprt poligon.** Recimo, da imamo naslednje rekurzivne relacije poligonov na k-tem in $(k+1)$-em nivoju:

$$f^{k+1}_{3i} = f^k_i, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f^{k+1}_{3i+1} &= \eta_1 f^k_{i-2} + \eta_2 f^k_{i-1} + \eta_3 f^k_i + \eta_4 f^k_{i+1} + \eta_5 f^k_{i+2} + \eta_6 f^k_{i+3},\\ f^{k+1}_{3i+2} &= \eta_6 f^k_{i-2} + \eta_5 f^k_{i-1} + \eta_4 f^k_i + \eta_3 f^k_{i+1} + \eta_2 f^k_{i+2} + \eta_1 f^k_{i+3}.\end{aligned}$$

Pripadajoča maska je oblike

$$\mathcal{A} = \{\ldots, 0, \eta_6, \eta_1, 0, \eta_5, \eta_2, 0, \eta_4, \eta_3, 1, \eta_3, \eta_4, 0, \eta_2, \eta_5, 0, \eta_1, \eta_6, 0, \ldots\},$$

L-polinom pa

$$\begin{aligned} a(z) = \eta_6 z^{-8} + \eta_1 z^{-7} + \eta_5 z^{-5} + \eta_2 z^{-4} + \eta_4 z^{-2} + \eta_3 z^{-1} + 1 + \eta_3 z^1 + \eta_4 z^2\\ + \eta_2 z^4 + \eta_5 z^5 + \eta_1 z^7 + \eta_6 z^8.\end{aligned} \tag{5}$$

Če želimo imeti $\mathcal{C}^0$, moramo zahtevati $a(1) = 3$, kar nam da pogoj

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = 1. \tag{6}$$

Da določimo neznane koeficiente η_i v maski, najprej poiščimo L-polinom $a^{(n)}(z)$ pripadajoč subdivizijski shemi S_n po (3) glede na pogoj, da maska za $a^{(n)}(z)$ zadošča pogojem v (1). Za $n = 1, 2, 3, 4$ v (3) in

$$-6\eta_1 - 3\eta_2 + 3\eta_4 + 6\eta_5 + 9\eta_6 = 1, \quad 3\eta_1 + \eta_2 + \eta_5 + 3\eta_6 = -1/9, \tag{7}$$

$$21\eta_1+4\eta_2-5\eta_5-24\eta_6=0,\quad 9\eta_1+\eta_2-4\eta_5-30\eta_6=0,$$

dobimo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(1)} &= 3\{\eta_6,\eta_1-\eta_6,-\eta_1,\eta_5+\eta_6,\eta_2+\eta_1-\eta_5-\eta_6,-\eta_2-\eta_1,\eta_4+\eta_5+\eta_6,1-2\eta_4-2\eta_5-2\eta_6,\\ &\quad \eta_4+\eta_5+\eta_6,-\eta_2-\eta_1,\eta_2+\eta_1-\eta_5-\eta_6,\eta_5+\eta_6,-\eta_1,\eta_1-\eta_6,\eta_6\},\\ \mathcal{A}^{(2)} &= 9\{\eta_6,\eta_1-2\eta_6,\eta_6-2\eta_1,\eta_5+\eta_1+2\eta_6,\eta_2-2\eta_5+2\eta_1-4\eta_6,-2\eta_2+\eta_5-4\eta_1+2\eta_6,\\ &\quad 1/3+2\eta_2+4\eta_1,-2\eta_2+\eta_5-4\eta_1+2\eta_6,\eta_2-2\eta_5+2\eta_1-4\eta_6,\\ &\quad \eta_5+\eta_1+2\eta_6,\eta_6-2\eta_1,\eta_1-2\eta_6,\eta_6\},\\ \mathcal{A}^{(3)} &= 27\{\eta_6,\eta_1-3\eta_6,3\eta_6-3\eta_1,\eta_5+3\eta_1+2\eta_6,\eta_2-3\eta_5+2\eta_1-9\eta_6,-3\eta_2+3\eta_5-9\eta_1+9\eta_6,\\ &\quad \eta_2-3\eta_5+2\eta_1-9\eta_6,\eta_5+3\eta_1+2\eta_6,3\eta_6-3\eta_1,\eta_1-3\eta_6\eta_6\},\\ \mathcal{A}^{(4)} &= 81\{\eta_6,\eta_1-4\eta_6,6\eta_6-4\eta_1,\eta_5+6\eta_1,\eta_2-4\eta_5-15\eta_6,\eta_5+6\eta_1,6\eta_6-4\eta_1,\eta_1-4\eta_6,\eta_6\}.\end{aligned}$$

Če izberemo η_6 za parameter, $\eta_6=\omega$, in rešujemo sistem enačb v (6) in (7), dobimo naslednje koeficiente v maski 6-točkovne interpolacijske sudivizijske sheme:

$$\eta_1=-\frac{11}{81}+13\omega,\quad \eta_2=\frac{13}{27}-51\omega,\quad \eta_3=-\frac{2}{27}+74\omega,$$
$$\eta_4=\frac{74}{81}-46\omega,\quad \eta_5=-\frac{5}{27}+9\omega,\quad \eta_6=\omega.$$

3.2. **Konstrukcija sheme za odprt poligon.** V primeru odprtega začetnega poligona, t. j. $F^0=\{f_i^0, i=0,\dots,N\}$, nam formule iz (4) odpovejo za robove na začetku in na koncu poligona. V tem razdelku bomo izpeljali formule za te robove, najprej za robove na začetku, potem pa še za robove na koncu poligona.

V ta namen definirajmo pomožni točki $f_{-2}^0=2f_0^0-f_2^0$ in $f_{-1}^0=2f_0^0-f_1^0$. Potem se enačbe za poligon $\{f_i^k; i=0,1,\dots,3^kN\}$ iz (4) za robne točke

$$f_0^{k+1},f_1^{k+1},f_2^{k+1},f_3^{k+1},f_4^{k+1},f_5^{k+1}$$

preoblikujejo v naslednje enačbe:

$$f_0^{k+1}=f_0^k,\quad f_1^{k+1}=(2\eta_1+2\eta_2+\eta_3)f_0^k+(\eta_4-\eta_2)f_1^k+(\eta_5-\eta_1)f_2^k+\eta_6f_3^k,$$
$$f_2^{k+1}=(2\eta_6+2\eta_5+\eta_4)f_0^k+(\eta_3-\eta_5)f_1^k+(\eta_2-\eta_6)f_2^k+\eta_1f_3^k,$$

in

$$f_3^{k+1}=f_1^k,\quad f_4^{k+1}=(2\eta_1+\eta_2)f_0^k+(\eta_3-\eta_1)f_1^k+\eta_4f_2^k+\eta_5f_3^k+\eta_6f_4^k,$$
$$f_5^{k+1}=(2\eta_6+\eta_5)f_0^k+(\eta_4-\eta_6)f_1^k+\eta_3f_2^k+\eta_2f_3^k+\eta_1f_4^k.$$

Podobno naredimo še na drugi strani poligona. Definirajmo pomožne točke

$$f_{N+1}^0=2f_N^0-f_{N-1}^0,\quad f_{N+2}^0=2f_N^0-f_{N-2}^0,\quad f_{N+3}^0=2f_N^0-f_{N-3}^0.$$

Potem dobimo naslednje enačbe za zadnjih 9 točk poligona na $(k+1)$-vem nivoju:

$$f_{3(3^kN)}^{k+1}=f_{3^kN}^k$$
$$f_{3(3^kN)+1}^{k+1}=-\eta_6f_{3^kN-3}^k+(\eta_1-\eta_5)f_{3^kN-2}^k+(\eta_2-\eta_4)f_{3^kN-1}^k+(\eta_3+2\eta_4+2\eta_5+2\eta_6)f_{3^kN}^k$$
$$f_{3(3^kN)+2}^{k+1}=-\eta_1f_{3^kN-3}^k+(\eta_6-\eta_2)f_{3^kN-2}^k+(\eta_5-\eta_3)f_{3^kN-1}^k+(\eta_4+2\eta_3+2\eta_2+2\eta_1)f_{3^kN}^k$$

$$f_{3(3^kN-1)}^{k+1}=f_{3^kN-1}^k$$
$$f_{3(3^kN-1)+1}^{k+1}=\eta_1f_{(3^kN-1)-3}^k+(\eta_2-\eta_6)f_{(3^kN-1)-2}^k+(\eta_3-\eta_5)f_{(3^kN-1)-1}^k+$$
$$(\eta_4+2\eta_5+2\eta_6)f_{3^kN-1}^k$$
$$f_{3(3^kN-1)+2}^{k+1}=\eta_6f_{(3^kN-1)-3}^k+(\eta_5-\eta_1)f_{(3^kN-1)-2}^k+(\eta_4-\eta_2)f_{(3^kN-1)-1}^k+$$

$$(\eta_3 + 2\eta_2 + 2\eta_1) f^k_{3^k N-1}$$

$$f^{k+1}_{3(3^k N-2)} = f^k_{3^k N-2}$$

$$f^{k+1}_{3(3^k N-2)+1} = \eta_1 f^k_{(3^k N-2)-4} + \eta_2 f^k_{(3^k N-2)-3} + \eta_3 f^k_{(3^k N-2)-2} + (\eta_4 - \eta_6) f^k_{(3^k N-2)-1} + (\eta_5 + 2\eta_6) f^k_{3^k N-2}$$

$$f^{k+1}_{3(3^k N-2)+2} = \eta_6 f^k_{(3^k N-2)-4} + \eta_5 f^k_{(3^k N-2)-3} + \eta_4 f^k_{(3^k N-2)-2} + (\eta_3 - \eta_1) f^k_{(3^k N-2)-1} + (\eta_2 + 2\eta_1) f^k_{3^k N-2}$$

4. Lastnosti sheme

V tem delu si bomo ogledali nekaj lastnosti sheme, ki smo jo v prejšnjem poglavju skonstruirali. Najprej si bomo pogledali gladkost sheme, nato pa še eksaktnost.

Izrek 4.1. *Za* $\omega \in (0.01152, 0.01183)$ *je predlagana 6-točkovna intepolacijska subdivizijska shema* $\mathcal{C}^2$ *zvezna.*

Dokaz. $L-$polinom naše sheme iz (5) nam da

$$a(z) = z^{-2}(1 + z + z^2)\xi_1(z),$$

kjer je

$$\xi_1(z) = \eta_6 z^8 + (\eta_1 - \eta_6) z^7 - \eta_1 z^6 + (\eta_5 + \eta_6) z^5 + (\eta_2 + \eta_1 - \eta_5 - \eta_6) z^4 - (\eta_1 + \eta_2) z^3 + \\ +(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6) z^2 + (1 - 2\eta_4 - 2\eta_5 - 2\eta_6) z + (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6) - (\eta_1 + \eta_2) z^{-1} + \\ +(\eta_2 + \eta_1 - \eta_5 - \eta_6) z^{-2} + (\eta_5 + \eta_6) z^{-3} - \eta_1 z^{-4} + (\eta_1 - \eta_6) z^{-5} + \eta_6 z^{-6}.$$

če v enačbo

$$b^{[n,L]}(z) = \frac{1}{3^L} \prod_{j=0}^{L-1} a^{(n)}(z^{3^j})$$

za $L = n = 1$ vstavimo zgoraj dobljeno enačbo za $a(z)$, dobimo

$$b^{[1,1]}(z) = \frac{1}{3} a^{(1)}(z) = \frac{z^2}{1 + z + z^2} a(z) = \xi_1(z).$$

Da bo naša shema S $\mathcal{C}$ zahtevamo, da naš $L-$polinom $a(z)$ zadošča (1), kar je res, in da $\|\frac{1}{3}S_1\|_\infty < 1$. Norma sheme $\frac{1}{3}S_1$ je enaka

$$\left\| \frac{1}{3} S_1 \right\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |b^{[1,1]}_{i+3j}|; i = 0, 1, 2 \right\}.$$

Iz izraza za $\xi_1(z)$ preberemo ven koeficiente

$$\aleph_1 = |\eta_6| + |\eta_5 + \eta_6| + |\eta_4 + \eta_5 + \eta_6| + | - \eta_2 - \eta_1| + | - \eta_1|,$$

$$|\eta_1 - \eta_6| + |\eta_2 + \eta_1 - \eta_5 - \eta_6| + |1 - 2\eta_4 - 2\eta_5 - 2\eta_6| + |\eta_2 + \eta_1 - \eta_5 - \eta_6| + |\eta_1 - \eta_6|.$$

Iz pogoja

$$\left\| \frac{1}{3} S_1 \right\|_\infty = \max\{\aleph_1, \aleph_2\} < 1$$

in po izreku 2.1. sledi, da je shema S $\mathcal{C}^0$ za $\omega \in (0.00411, 0.01453)$.

Na podoben način se da pokazati, da je shema $\mathcal{C}^1$ zvezna za $\omega \in (0.01105, 0.01337)$ ter da je $\mathcal{C}^2$ zvezna za $\omega \in (0.01152, 0.01183)$.

Za $\mathcal{C}^3$ zahtevamo, da $a^{(3)}(z)$ zadošča (2), kar je res, ter da obstaja $L \in \mathbb{N}$, da je $\|(\frac{1}{3}S_4)^L\|_\infty < 1$, kar pa ne. ☐

Izrek 4.2. *Predlagana subdivizijska shema je eksaktna za kubične polinome.*

Dokaz. Da je shema eksaktna za kubične polinome, je zaradi linearnosti dovolj pokazati, da je eksaktna za monome x^0, x^1, x^2, x^3.

Naj bo $f_i^k = (\frac{i}{3^k})^0, i \in \mathbb{Z}$. Iz pravil za našo shemo sledi

$$f_{3i}^{k+1} = \left(\frac{3i}{3^{k+1}}\right)^0, f_{3i+1}^{k+1} = \left(\frac{3i+1}{3^{k+1}}\right)^0, f_{3i+2}^{k+2} = \left(\frac{3i+1}{3^{k+1}}\right)^0.$$

Torej je shema eksaktna za konstante.

Naj bo sedaj $f_i^k = (\frac{i}{3^k})^1, i \in \mathbb{Z}$. V tem primeru dobimo

$$f_{3i}^{k+1} = \left(\frac{3i}{3^{k+1}}\right)^1,$$

$$\begin{aligned} f_{3i+1}^{k+1} = \eta_1\left(\frac{i-2}{3^k}\right)^1 + \eta_2\left(\frac{i-1}{3^k}\right)^1 + \eta_3\left(\frac{i}{3^k}\right)^1 + \eta_4\left(\frac{i+1}{3^k}\right)^1 + \eta_5\left(\frac{i+2}{3^k}\right)^1 + \\ +\eta_6\left(\frac{i+3}{3^k}\right)^1 = \left(\frac{3i+1}{3^{k+1}}\right)^1, \\ f_{3i+2}^{k+1} = \eta_6\left(\frac{i-2}{3^k}\right)^1 + \eta_5\left(\frac{i-1}{3^k}\right)^1 + \eta_4\left(\frac{i}{3^k}\right)^1 + \eta_3\left(\frac{i+1}{3^k}\right)^1 + \eta_2\left(\frac{i+2}{3^k}\right)^1 + \\ +\eta_1\left(\frac{i+3}{3^k}\right)^1 = \left(\frac{3i+2}{3^{k+1}}\right)^1, \end{aligned}$$

kar sledi iz enačb (7).

Na podoben način pokažemo še za $f_i^k = (\frac{i}{3^k})^2$ in $f_i^k = (\frac{i}{3^k})^3$ ter dobimo željen rezultat. $\square$

Literatura

[1] K. Faheem in G. Mustafa, *Ternary Six-Point Interpolating Subdivision Scheme*, Department of Mathematics, The Islamia University of Bahawalpur, Pakistan, 2008.