ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αριθμητική Ανάλυση

Εργασία Εξαμήνου

ΛΑΜΠΡΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΜ: 2022201800038

e-mail: dit18038@uop.gr

Εαρινό εξάμηνο 2021

Πίνακας περιεχομένων

Υπολογισμός των a,b,c

a = 1+((38) mod 3) = 1+2 = 3
b = 1+((838) mod 7) = 1+5 = 6
c = 1+((2201) mod 11) = 1+1 = 2

Αλγόριθμοι

Όλοι οι αλγόριθμοι έχουν υλοποιηθεί με κώδικα σε γλώσσα Python. Συγκεκριμένα, παρακάτω φαίνεται ποιό από τα αρχεία που παρέχονται επιλύει κάθε ερώτημα:

Άσκηση 1 Μέρος 1 ερωτήματα 1,2,3 → **ask_1_meros_1.pynb**
Άσκηση 1 Μέρος 2 ερωτήματα 1,2,3 → **ask_1_meros_2.pynb**
Άσκηση 2 Μέρος 1 ερώτημα 3 → **ask_2.pynb**
Άσκηση 3 Μέρος 1 ερώτημα 1 → **ask_1_meros_1.pynb**
Άσκηση 3 Μέρος 2 ερώτημα 1 → **ask_1_meros_2.pynb**

Άσκηση 1

ΜΕΡΟΣ Ι

f(x) = $x^3 - 11x^2 + 38\mathrm{x} - 40 = 0$

πραγματικές ρίζες: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

i. Αν βρώ δύο σημεία x_1, x_2 για τα οποία ισχύει ότι f(x_1)f(x_2)<0 τότε γνωρίζω ότι σίγουρα στο διάστημα $[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2] \in \mathrm{x}_0$ τέτοιο ώστε f(x_0) = 0.

   f(0) = -40 < 0
   f(3) = 2 > 0
   f(4.5) = -0.625 < 0
   f(6) = 8 > 0

   f(0)f(3) < 0, f(3)f(4.5) < 0 και f(4.5)f(6) < 0

   Επομένως αναζητώ τις ρίζες στα διαστήματα [0,3], [3,4.5], [4.5,6].

   Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [0,3] για 10 επαναλήψεις έχουμε:

```
[[1, 0, 3, 1.5, -4.375],
 [2, 1.5, 3, 2.25, 1.203125],
 [3, 1.5, 2.25, 1.875, -0.830078125],
 [4, 1.875, 2.25, 2.0625, 0.355712890625],
 [5, 1.875, 2.0625, 1.96875, -0.192413330078125],
 [6, 1.96875, 2.0625, 2.015625, 0.09253311157226562],
 [7, 1.96875, 2.015625, 1.9921875, -0.0471806526184082],
 [8, 1.9921875, 2.015625, 2.00390625, 0.023361265659332275],
 [9, 1.9921875, 2.00390625, 1.998046875, -0.011737830936908722],
 [10, 1.998046875, 2.00390625, 2.0009765625, 0.005854607559740543]]
```

   Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
   $|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |2.0009765625 - 2| = 0.0009765625$

και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{0.0009765625}{2} = 0.00048828125$

<u>Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [3,4.5] για 10 επαναλήψεις έχουμε:</u>

[[1, 3, 4.5, 3.75, 0.546875],
 [2, 3.75, 4.5, 4.125, -0.232421875],
 [3, 3.75, 4.125, 3.9375, 0.128662109375],
 [4, 3.9375, 4.125, 4.03125, -0.061492919921875],
 [5, 3.9375, 4.03125, 3.984375, 0.031490325927734375],
 [6, 3.984375, 4.03125, 4.0078125, -0.015563488006591797],
 [7, 3.984375, 4.0078125, 3.99609375, 0.007827699184417725],
 [8, 3.99609375, 4.0078125, 4.001953125, -0.003902427852153778],
 [9, 3.99609375, 4.001953125, 3.9990234375, 0.001954077742993831 6],
 [10, 3.9990234375, 4.001953125, 4.00048828125, -0.0009763239650055766]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |4.00048828125 - 4| = 0.00048828125$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{0.00048828125}{4} = 0.0001220703125$

<u>Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [4.5,6] για 10 επαναλήψεις έχουμε:</u>

[[1, 4.5, 6, 5.25, 1.015625],
 [2, 4.5, 5.25, 4.875, -0.314453125],
 [3, 4.875, 5.25, 5.0625, 0.203369140625],
 [4, 4.875, 5.0625, 4.96875, -0.089874267578125],
 [5, 4.96875, 5.0625, 5.015625, 0.047855377197265625],
 [6, 4.96875, 5.015625, 4.9921875, -0.023193836212158203],
 [7, 4.9921875, 5.015625, 5.00390625, 0.011779844760894775],
 [8, 4.9921875, 5.00390625, 4.998046875, -0.005844123661518097],
 [9, 4.998046875, 5.00390625, 5.0009765625, 0.002933503128588199 6],
 [10, 4.998046875, 5.0009765625, 4.99951171875, -0.0014638901920989156]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |4.99951171875 - 5| = 0.00048828125$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.00048828125}{5} = -0.00009765625$

ii. Έστω ότι η f(x) = 0 <=> x = g(x), τότε:

1. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$
   $x(x^2 - 11x + 38) = 40 \Leftrightarrow$
   $x = \frac{40}{(x^2-11x+38)} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_1(x) = \frac{40}{(x^2-11x+38)}}$

2. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$
   $x^3 - 11x^2 - 40 = -38x \Leftrightarrow$
   $x = \frac{(x^3-11x^2-40)}{-38} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_2(x) = \frac{(x^3-11x^2-40)}{-38}}$

3. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$
   $x^3 = 11x^2 - 38x + 40 \Leftrightarrow$
   $x = \sqrt[3]{11x^2 - 38x + 40} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_3(x) = \sqrt[3]{11x^2 - 38x + 40}}$

4. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$
   $11x^2 = x^3 + 38x - 40 \Leftrightarrow$
   $x = \sqrt{\frac{(x^3+38x-40)}{11}} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_4(x) = \sqrt{\frac{(x^3+38x-40)}{11}}}$ **, x≥1.02434652**

5. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$
   $2x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = x^3 \Leftrightarrow$
   $2x^3 - 11x^2 + 38x = x^3 + 40 \Leftrightarrow$
   $x(2x^2 - 11x + 38) = x^3 + 40 \Leftrightarrow$
   $x = \frac{2x^2-11x+38}{x^3+40} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_5(x) = \frac{2x^2-11x+38}{x^3+40}}$

   Επιλέγω το $x_0 = 1$ για να χρειαστώ λιγότερες επαναλήψεις για να φτάσω στην πρώτη γνωστή ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_1(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 1.4285714285714286],
[1, 1.644295302013423],
[2, 1.7686234833940109],
[3, 1.84559982190251],
[4, 1.8953177474672924],
[5, 1.9282931282629276],
[6, 1.9505449112314446],
[7, 1.9657341646358353],
[8, 1.9761835306266076],
[9, 1.9834105056300322]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.9834105056300322 - 2| = 0.0165894943699678$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.0165894943699678}{2} = -0.0082947471849839$

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_2(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 1.3157894736842106],
[1, 1.4938498016436337],
[2, 1.610889562839082],
[3, 1.693800386579153],
[4, 1.7552397924321377],
[5, 1.8021545826446979],
[6, 1.8387474977865577],
[7, 1.8677401243068648],
[8, 1.8909858139577709],
[9, 1.909796369608943]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |\mathrm{x}^{*} - \mathrm{x}| = |1.909796369608943 - 2| = 0.090203630391057$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{-0.090203630391057}{2} =$
-0.0451018151955285

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_3(\mathrm{x})$ στο $\mathrm{x}_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 2.3513346877207573],
[1, 2.2549392606802097],
[2, 2.1718570791026197],
[3, 2.1071581791997684],
[4, 2.06215352009342],
[5, 2.0340354083473544],
[6, 2.0179185622402143],
[7, 2.009211112332182],
[8, 2.004672406183758],
[9, 2.0023534447524423]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |\mathrm{x}^{*} - \mathrm{x}| = |2.0023534447524423 - 2| =$
0.0023534447524423
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{0.0023534447524423}{2} =$
0.00117672237622115

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_4(\mathrm{x})$ στο $\mathrm{x}_0 = 3$ (αφού δεν ορίζεται $\mathrm{x}_0 = 1$) για 10 επαναλήψεις και έχουμε:

[[0, 3.0301515113634467],
[1, 3.0595314209340754],
[2, 3.088124603735853 4],

[3, 3.1159221183781174],
[4, 3.142920426588304],
[5, 3.1691206593884744],
[6, 3.194527937696815],
[7, 3.2191507515315103],
[8, 3.2430003991973604],
[9, 3.266090485742519]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |3.266090485742519 - 4| = 0.733909514257481$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.733909514257481}{4} = -0.18347737856437025$

Η συνάρτηση συγκλίνει αργά στην δεύτερη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_5(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 0.7073170731707317],
[1, 0.7736583359370983],
[2, 0.7583915889807659],
[3, 0.761891870585953],
[4, 0.7610886741093214],
[5, 0.7612729451800544],
[6, 0.7612306674509163],
[7, 0.7612403672280368],
[8, 0.7612381418035339],
[9, 0.7612386523834702]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.7612386523834702 - 2| = 1.2387613476165298$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-1.2387613476165298}{2} = -0.6193806738082649$

Η συνάρτηση συγκλίνει προς τις ρίζες αλλά δεν μπορεί να τις προσεγγίσει με αρκετά καλή ακρίβεια.

iii. Αν βρώ δύο σημεία x_1, x_2 για τα οποία ισχύει ότι $f(x_1)f(x_2)<0$ τότε γνωρίζω ότι σίγουρα στο διάστημα $[x_1, x_2] \in x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

f(0) = -12 < 0
f(3) = 2 > 0
f(4.5) = -0.625 < 0
f(6) = 8 > 0

Επομένως αναζητώ τις ρίζες στα διαστήματα [0,3], [3,4.5], [4.5,6] ξεκινώντας από τα μέσα αυτών για να προσεγγίσω τις ρίζες γρηγορότερα. Δηλαδή, από τα $x_1{}^* = 1.5$, $x_2{}^* = 3.75$ και $x_3{}^* = 5.25$.

$f(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) = 3x^2 - 22x + 38 = 0$

Εφαρμόζοντας του Newton για $x_0 = 1.5$ έχουμε:

[[0, 1.631578947368421],
 [1, 1.9228368753340943],
 [2, 1.99547983667986],
 [3, 1.9999830703653003],
 [4, 1.9999999997611617],
 [5, 1.999999999999999]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.999999999999999 - 2| = 0.000000000000001$ και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.000000000000001}{2} = -0.0000000000000005$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα προς την πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας του Newton για $x_0 = 3.75$ έχουμε:

[[0, 3.9864864864864864],
[1, 3.9999123210802057],
[2, 3.9999999961572117],
[3, 3.9999999999999902],
[4, 3.9999999999999973]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |3.9999999999999973 - 4| = 0.0000000000000027$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{-0.0000000000000027}{4} = -0.000000000000000675$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα προς την δεύτερη ρίζα.

Εφαρμόζοντας του Newton για $\mathrm{x}_0 = 5.25$ έχουμε:

[[0, 5.054216867469879],
[1, 5.003508039304357],
[2, 5.000016284693778],
[3, 5.0000000003535785],
[4, 4.999999999999994]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |4.999999999999994 - 5| = 0.000000000000006$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{-0.000000000000006}{5} = -0.0000000000000012$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα προς την τρίτη ρίζα.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

f(x) = $(x-a)(x-b)(x-c) = (x-3)(x-6)(x-2) \; = x^3 - 11x^2 + 36\mathrm{x} - 36 = 0$

πραγματικές ρίζες: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$.

i. Αν βρώ δύο σημεία x_1, x_2 για τα οποία ισχύει ότι f(x_1)f(x_2)<0 τότε γνωρίζω ότι σίγουρα στο διάστημα $[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2] \in \mathrm{x}_0$ τέτοιο ώστε f(x_0) = 0.

   f(1) = -10 < 0
   f(2.5) = 0.875 > 0
   f(3.5) = -1.875 > 0
   f(5.5) = -4.375 < 0
   f(6.5) = 7.875 > 0

   f(1)f(2.5) < 0, f(2.5)f(3.5) < 0 και f(5.5)f(6.5) < 0

   Επομένως αναζητώ τις ρίζες στα διαστήματα [1,2.5], [2.5,3.5], [5.5,6.5].

   Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [1,2.5] για 10 επαναλήψεις έχουμε:

   [[1, 1, 2.5, 1.75, -1.328125],
   [2, 1.75, 2.5, 2.125, 0.423828125],
   [3, 1.75, 2.125, 1.9375, -0.269775390625],
   [4, 1.9375, 2.125, 2.03125, 0.120147705078125],
   [5, 1.9375, 2.03125, 1.984375, -0.06372451782226562],
   [6, 1.984375, 2.03125, 2.0078125, 0.030945301055908203],
   [7, 1.984375, 2.0078125, 1.99609375, -0.015701353549957275],
   [8, 1.99609375, 2.0078125, 2.001953125, 0.007793433964252472],
   [9, 1.99609375, 2.001953125, 1.9990234375, -0.003911019302904606],
   [10, 1.9990234375, 2.001953125, 2.00048828125, 0.001951933023519814]]

   Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
   $|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |2.00048828125 - 2| = 0.00048828125$

και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{0.00048828125}{2} = 0.000244140625$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [2.5,3.5] για 1 επανάληψη έχουμε:

[[1, 2.5, 3.5, 3.0, 0.0]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |0 - 0| = 0$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x}$ και δεν ορίζεται.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο διχοτόμησης στο [5.5,6.5] για 1 επανάληψη έχουμε:

[[1, 5.5, 6.5, 6.0, 0.0]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |0 - 0| = 0$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x}$ και δεν ορίζεται.

ii. Έστω ότι η f(x) = 0 <=> x = g(x), τότε:

6. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$
   $x(x^2 - 11x + 36) = 36 \Leftrightarrow$
   $x = \frac{36}{(x^2 - 11x + 36)} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_1(x) = \frac{36}{(x^2 - 11x + 36)}}$

7. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$
   $x^3 - 11x^2 - 36 = -36x \Leftrightarrow$
   $x = \frac{(x^3 - 11x^2 - 36)}{38} \Leftrightarrow$
   $\mathbf{g_2(x) = \frac{(x^3 - 11x^2 - 36)}{-36}}$

8. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$
   $x^3 = 11x^2 - 36x + 36 \Leftrightarrow$
   $x = \sqrt[3]{11x^2 - 36x + 36} \Leftrightarrow$

$$\mathbf{g_3(x) = \sqrt[3]{11x^2 - 36x + 36}}$$

9. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$11x^2 = x^3 + 36x - 36 \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{\frac{(x^3 + 36x - 36)}{11}} \Leftrightarrow$

$\mathbf{g_4(x) = \sqrt{\frac{(x^3+36x-36)}{11}}}$ **, x≥0.97430863**

10. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$2x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = x^3 \Leftrightarrow$

$2x^3 - 11x^2 + 36x = x^3 + 36 \Leftrightarrow$

$x(2x^2 - 11x + 36) = x^3 + 36 \Leftrightarrow$

$x = \frac{2x^2 - 11x + 36}{x^3 + 36} \Leftrightarrow$

$\mathbf{g_5(x) = \frac{2x^2-11x+36}{x^3+36}}$

Επιλέγω το $x_0 = 1$ για να χρειαστώ λιγότερες επαναλήψεις για να φτάσω στην πρώτη γνωστή ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_1(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 1.3846153846153846],
[1, 1.5868544600938967],
[2, 1.7091819329129316],
[3, 1.7892375911618714],
[4, 1.8442851922939894],
[5, 1.883411516407658],
[6, 1.9118720192628098],
[7, 1.9329209418643845],
[8, 1.9486790465730166],
[9, 1.960583501894732]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.960583501894732 - 2| = 0.039416498105268$

και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.039416498105268}{2} = -0.019708249052634$

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_2(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 1.2777777777777777],
[1, 1.4409341182746533],
[2, 1.5513167703326944],
[3, 1.631640201501471],
[4, 1.6928031529115808],
[5, 1.7408483484470798],
[6, 1.779454154402948],
[7, 1.8110128540148211],
[8, 1.8371594979675356],
[9, 1.8590557535223189]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.8590557535223189 - 2| = 0.1409442464776811$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.1409442464776811}{2} = -0.07047212323884055$

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_3(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 2.2239800905693152],
[1, 2.1788383266824325],
[2, 2.1387019547884574],
[3, 2.104543164418611],
[4, 2.0767323662913353],
[5, 2.055024387578995],
[6, 2.038704452313471],
[7, 2.0268150367499937],
[8, 2.0183666339191344],
[9, 2.0124756618697135]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.0124756618697135 - 2| =$
0.0124756618697135
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{0.0124756618697135}{2} =$
$0.0062378309348567 5$

Η συνάρτηση συγκλίνει στην πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_4(x)$ στο $x_0 = 3$ (αφού δεν ορίζεται στο $x_0 = 0.97430863 \approx 1$) για 10 επαναλήψεις και έχουμε:

[[0, 1.3939805659268776],
 [1, 1.239210087991375],
 [2, 0.9776849177436779],
 [3, 0.10920979335404976],
 [4, (1.045477427836507 1e-16+1.707394211236103 6j)],
 [5, (1.1867633848013581+2.1635929848824267j)],
 [6, (1.7719429061473295+1.9727430747157453j)],
 [7, (2.084165682617063+1.7867045765858958j)],
 [8, (2.283515080478551+1.6302740797985145j)],
 [9, (2.4232021429944126+1.49801481289945j)]]

Την καλύτερη προσέγγιση της ρίζας την έχουμε στην πρώτη επαν άληψη όπου το απόλυτο σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = |x^* - x| =$
$|1.3939805659268776 - 4| = 2.6060194340731224$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-2.6060194340731224}{3} =$
-0.8686731446910408

Η συνάρτηση αποκλίνει από την δεύτερη ρίζα.
Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων για την $g_5(x)$ στο $x_0 = 1$ για 10 επαναλήψεις έχουμε:

[[0, 0.7297297297297297],
 [1, 0.7979970605325221],
 [2, 0.780527636771296 6],
 [3, 0.7849825351082138],
 [4, 0.7838454946648286],

[5, 0.7841356409388853],
[6, 0.7840615981409244],
[7, 0.7840804929423085],
[8, 0.7840756712060462],
[9, 0.7840769016565865]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.7840769016565865 - 2| = 0.7840769016565865$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.7840769016565865}{2} = -1.60796154917170675$

Η συνάρτηση συγκλίνει προς τις ρίζες αλλά δεν μπορεί να τις προσεγγίσει με αρκετά καλή ακρίβεια.

iii. Αν βρώ δύο σημεία x_1, x_2 για τα οποία ισχύει ότι $f(x_1)f(x_2)<0$ τότε γνωρίζω ότι σίγουρα στο διάστημα $[x_1, x_2] \in x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

f(1) = -10 < 0
f(2.5) = 0.875 > 0
f(5) = -6 < 0
f(6.5) = 7.875 > 0

Επομένως αναζητώ τις ρίζες στα διαστήματα [1,2.5], [2.5,5], [5,6.5] ξεκινώντας από τα μέσα αυτών για να προσεγγίσω τις ρίζες γρηγορότερα. Δηλαδή, από τα $x_1{}^* = 1.75$, $x_2{}^* = 3.75$ και $x_3{}^* = 5.75$.

$f(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) = 3x^2 - 22x + 36 = 0$

Εφαρμόζοντας του Newton για $x_0 = 1.75$ έχουμε:

[[0, 1.9485981308411215],

[1, 1.9970184547927374],
[2, 1.9999889571185836],
[3, 1.9999999998475746],
[4, 1.9999999999999984]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^{*} - x| = |1.9999999999999984 - 2| = 0.0000000000000016$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.0000000000000016}{2} = -0.0000000000000008$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα προς την πρώτη ρίζα.

Εφαρμόζοντας του Newton για $x_0 = 3.75$ έχουμε:

[[0, 3.0652173913043477],
[1, 3.0024481430170953],
[2, 3.000003972876599],
[3, 3.00000000001052],
[4, 2.9999999999999947]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |x^{*} - x| = |2.9999999999999947 - 3| = 0.0000000000000053$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.0000000000000053}{3} = -1.7666666666666666666666666666667\,e^{-15}$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα στην δεύτερη ρίζα.

Εφαρμόζοντας του Newton για $x_0 = 5.75$ έχουμε:

[[0, 6.046762589928058],
[1, 6.001225132630491],
[2, 6.000000874610196],
[3, 6.000000000000451],
[4, 5.999999999999999]]

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι:
$|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |5.999999999999999 - 6| = 0.000000000000001$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{-0.000000000000001}{6} = -1.6666666666666666666666666666667\,\mathrm{e}^{-16}$

Η συνάρτηση συγκλίνει γρήγορα προς την τρίτη ρίζα.

Άσκηση 2

ΜΕΡΟΣ Ι

A=(0.5,1.2), B=(0.7,1.6), C=(1.2,1.4), D=(4,2.4), E=(3.2,5)

i. Εφαρμόζοντας την μέθοδο διαιρεμένων δαφορών για τα σημεία A=(0.5,1.2) και B=(0.7,1.6), έχουμε:
   - για το σημείο A ισχύει ότι $x_0 = 0.5,\ y_0 = f(x_0) = 1.2$
   - για το σημείο B ισχύει $x_1 = 0.7,\ y_1 = f(x_1) = 1.6$

   Συνεπώς, έχουμε:
   - $f[x_0] = f(x_0) = 1.2$
   - $f[x_0, x_1] = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)} = \frac{1.6 - 1.2}{0.7 - 0.5} = 2$

   Το πολυώνυμο γραμμικής παρεμβολής δίνεται από το ακόλουθο τύπο:

   $$P_1(x) = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$
   $$= 2(x - 0.5) + 1.2 = 2x - 1 + 1.2 = \mathbf{2x + 0.2}$$

   Εφαρμόζοντας την προσέγγιση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τα σημεία A=(0.5,1.2) και B=(0.7,1.6), έχουμε:
   - για το σημείο A ισχύει ότι $x_1 = 0.5,\ y_1 = f(x_1) = 1.2$
   - για το σημείο B ισχύει $x_2 = 0.7,\ y_2 = f(x_2) = 1.6$.

   Εκτελούμε δύο επαναλήψεις για τα δύο σημεία A,B:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	${x_i}^2$
i=1	0.5	1.2	0.6	0.25
i=2	0.7	1.6	1.12	0.49
Σύνολο	1.2	2.8	1.72	0.74

   Για n=2, έχουμε:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i \mathrm{y}_i) - (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i)(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i{}^2) - (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i)^2} = \frac{2(1.72) - (1.2)(2.8)}{2(0.74) - (1.2)^2} = 2$$

$$\mathrm{b} = \frac{(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}^2)(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}) - (\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i y_i})(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i})}{\mathrm{n}(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}^2) - (\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i})^2}$$
$$= \frac{(0.74)(2.8) - (1.72)(1.2)}{2(0.74) - (1.2)^2} = 0.2$$

Συνεπώς το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού υπολογίζεται ως εξής:
$\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) = ax + b = \mathbf{2x + 0.2}$

Το σφάλμα της προσέγγισης για n=2 είναι:
$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \mathrm{P}_1(\mathrm{x}_i)]^2 = \sum_{i=1}^{2} [y_i - \mathrm{P}_1(\mathrm{x}_i)]^2 = (1.2 - 1.2)^2 + (1.6 - 1.6)^2$$
$$= 0 + 0 = \mathbf{0}$$

ii. Εφαρμόζοντας την πολυωνυμική παρεμβολή δεύτερης τάξης με τον τύπο Lagrange για τα σημεία A=(0.5,1.2), B=(0.7,1.6) και C(1.2,1.4), έχουμε:
- για το σημείο A ισχύει ότι $\mathrm{x}_0 = 0.5,\ \mathrm{y}_0 = f(\mathrm{x}_0) = 1.2$
- για το σημείο B ισχύει $\mathrm{x}_1 = 0.7,\ \mathrm{y}_1 = f(\mathrm{x}_1) = 1.6$
- για το σημείο C ισχύει $\mathrm{x}_2 = 1.2,\ \mathrm{y}_2 = f(\mathrm{x}_2) = 1.4$

Τα πολυώνυμα παρεμβολής του Lagrange υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\mathrm{l}_i(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_1} \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_2} \dots \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_n}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_n} = \prod_{j \neq i, j=0}^{n} \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_j}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j}$$

Έξετάζουμε 3 σημεία οπότε n=3-1=2:

$$\mathrm{l}_0(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1} \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_2} = \frac{\mathrm{x} - 0.7}{0.5 - 0.7} \frac{\mathrm{x} - 1.2}{0.5 - 1.2}$$
$$= 7.142857x^2 - 13.571428x + 6$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0.5}{0.7 - 0.5}\frac{x - 1.2}{0.7 - 1.2}$$
$$= -10x^2 + 17x - 6$$
$$l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0.5}{1.2 - 0.5}\frac{x - 0.7}{1.2 - 0.7}$$
$$= 2.857142x^2 - 3.428571x + 1$$

Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange είναι:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i) \Leftrightarrow$$
$$P_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) =$$
$$(7.142857x^2 - 13.571428x + 6)(1.2) + (-10x^2 + 17x - 6)(1.6) + (2.857142x^2 - 3.428571x + 1)(1.4) =$$
$$\boldsymbol{-3.4285728x^2 + 6.114287x - 1}$$

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων δεύτερης τάξης για τα σημεία A=(0.5,1.2), B=(0.7,1.6) και C(1.2,1.4), έχουμε:

- για το σημείο A ισχύει ότι $x_1 = 0.5,\ y_1 = f(x_1) = 1.2$
- για το σημείο B ισχύει $x_2 = 0.7,\ y_2 = f(x_2) = 1.6$
- για το σημείο C ισχύει $x_3 = 1.2,\ y_3 = f(x_3) = 1.4$

Εκτελούμε τρεις επαναλήψεις για τα τρεια σημεία A,B,C:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$
i=1	0.5	1.2	0.6	0.25	0.125	0.0625
i=2	0.7	1.6	1.12	0.49	0.343	0.2401
i=3	1.2	1.4	1.68	1.44	1.728	2.0736
Σύνολο	2.4	4.2	3.4	2.18	2.196	2.3762

Επειδή ο αριθμός των σημείων n=3, τότε ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι m<3-1, δηλαδή m=2. Συνεπώς, το ζητούμενο πολυώνυμο θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (0)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,0} + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,1} + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} y_i x_i^{\,0} \qquad (1)$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,1} + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{3} y_i x_i^{\,1} \qquad (2)$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,3} + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{3} y_i x_i^{\,2} \qquad (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) σχέσεις προκύπτει το εξής σύστημα για τα a_0, a_1 και a_2:

(1) $\Leftrightarrow 3a_0 + 2.4a_1 + 2.18a_2 = 4.2$ (4)
(2) $\Leftrightarrow 2.4a_0 + 2.18a_1 + 2.196a_2 = 3.4$ (5)
(3) $\Leftrightarrow 2.18a_0 + 2.196a_1 + 2.3762a_2 = 3.1$ (6)

Λύνοντας το σύστημα των (4),(5) και (6) σχέσεων προκύπτει ότι:
$a_0 = -1$
$a_1 = 6.11428571$
$a_2 = -3.42857142$

Οπότε η σχέση (0) γίνεται:
(0) $\Leftrightarrow \mathbf{P_2(x) = -1 + 6.11428571}\boldsymbol{x} \mathbf{- 3.42857142}\boldsymbol{x^2}$

Το σφάλμα προσέγγισης για n=3 είναι:
$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - P_2(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{3} [y_i - P_2(x_i)]^2$$
$$= (1.2 - 1.2)^2 + (1.6 - 1.6)^2 + (1.4 - 1.4)^2 = \mathbf{0}$$

iii. Εφαρμόζοντας την πολυωνυμική παρεμβολή τρίτης τάξης με τον τύπο των διαιρεμένων διαφορών για τα σημεία A=(0.5,1.2), B=(0.7,1.6), C(1.2,1.4) και D(4,2.4) έχουμε:
για το σημείο A ισχύει ότι $\mathrm{x}_0 = 0.5,\ \mathrm{y}_0 = f(\mathrm{x}_0) = 1.2$
για το σημείο B ισχύει $\mathrm{x}_1 = 0.7,\ \mathrm{y}_1 = f(\mathrm{x}_1) = 1.6$
για το σημείο C ισχύει $\mathrm{x}_2 = 1.2,\ \mathrm{y}_2 = f(\mathrm{x}_2) = 1.4$
για το σημείο D ισχύει $\mathrm{x}_3 = 4,\ \mathrm{y}_3 = f(\mathrm{x}_3) = 2.4$

Το πολυώνυμο παρεμβολής 3ης τάξης είναι το ακόλουθο:

$$\mathrm{P}_3(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}_3\mathrm{x}^3 \qquad (0)$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της παρεμβολής με διαιρεμένες διαφορές, προκύπτει ο εξής πίνακας της διαιρεμένης διαφοράς 3ης τάξης:

$\mathbf{x}_i$	$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}_i]$	$\boldsymbol{f}[,]$	$\boldsymbol{f}[,,]$	$\boldsymbol{f}[,,,]$
x_0	$f[x_0] = f(x_0) = 1.2$			
		$f[x_0,\mathrm{x}_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0} = 2.0000000000000013$		
x_1	$f[x_1] = f(x_0) = 1.6$		$f[x_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2] = \dfrac{f[x_1,\mathrm{x}_2] - f[x_0,\mathrm{x}_1]}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0} = -3.428571428571431$	
		$f[x_1,\mathrm{x}_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1} = -0.40000000000000036$		$f[\mathrm{x}_0, x_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3] = \dfrac{f[\mathrm{x}_1, x_2, \mathrm{x}_3] - f[\mathrm{x}_0, x_1, \mathrm{x}_2]}{\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_0} = 1.0451453308596172$
x_2	$f[x_2] = f(x_0) = 1.4$		$f[x_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3] = \dfrac{f[x_2,\mathrm{x}_3] - f[x_1,\mathrm{x}_2]}{\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_1} = 0.22943722943722958$	
		$f[x_2,\mathrm{x}_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2} = 0.35714285714285715$		
x_3	$f[x_3] = f(x_0) = 2.4$			

Επομένως, προκύπτει:

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 1.2 + 2.0000000000000013(x-0.5) - 3.428571428571431(x-0.5)(x-0.7) + 1.0451453308596172(x-0.5)(x-0.7)(x-1.2) = \mathbf{1.04514533}\boldsymbol{x^3} - \mathbf{5.93692022}\boldsymbol{x^2} + \mathbf{7.98509585}\boldsymbol{x} - \mathbf{1.43896103} \qquad (1)$$

Από (0) και (1) έχουμε ότι:

$\mathbf{a_0 = 1.43896103,\ a_1 = 7.98509585,\ a_2 = -5.93692022}$ **και** $\mathbf{a_3 = 1.04514533}$

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων δεύτερης τάξης για τα σημεία A=(0.5,1.2), B=(0.7,1.6), C(1.2,1.4), D(4,2.4) και E(3.2,5) έχουμε:
για το σημείο A ισχύει ότι $x_0 = 0.5,\ y_0 = f(x_0) = 1.2$
για το σημείο B ισχύει $x_1 = 0.7,\ y_1 = f(x_1) = 1.6$
για το σημείο C ισχύει $x_2 = 1.2,\ y_2 = f(x_2) = 1.4$
για το σημείο D ισχύει $x_3 = 4,\ y_3 = f(x_3) = 2.4$
για το σημείο E ισχύει $x_3 = 3.2,\ y_3 = f(x_3) = 5$

Το πολυώνυμο παρεμβολής 2ης τάξης είναι το ακόλουθο:
$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (2)$$

Για m=2 και n=5, τα a_0, a_1 και a_2 προκύπτουν από τις εξής εξισώσεις:

$$a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,0} + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,1} + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^{\,0} \qquad (3)$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,1} + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^{\,1} \qquad (4)$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,3} + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^{\,2} \qquad (5)$$

Εισάγωντας αυτές τις εξισώσεις (3), (4) και (5) στον αλγόριθμο έχουμε:

$$\mathbf{a_0 = -1.03495239, a_1 = 3.88843206 \ \text{και} \ a_2 = -0.72322962}$$

Επομένως η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\mathbf{P_2(x) = -1.03495239 + 3.88843206x - 0.72322962x^2}$$

Το σφάλμα της προσέγγισης είναι:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}_i)]^2 = \sum_{i=1}^{5} [y_i - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}_i)]^2$$
$$= \mathbf{3.004303842640895}$$

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

A=(0.5a,1.2b), B=(a^2,c), C=(3+a,b+c) ⇔

A=(0.5*3,1.2*6), B=(3^2,2), C=(3+3,6+2) ⇔

A=(1.5,7.2), B=(9,2), C=(6,8)

i. Εφαρμόζοντας την μέθοδο διαιρεμένων δαφορών για τα σημεία A=(1.5,7.2) και B=(9,2), έχουμε:
   - για το σημείο A ισχύει ότι $x_0 = 1.5,\ y_0 = f(x_0) = 7.2$
   - για το σημείο B ισχύει $x_1 = 9,\ y_1 = f(x_1) = 2$

   Συνεπώς, έχουμε:
   - $f[x_0] = f(x_0) = 7.2$
   - $f[x_0,x_1] = \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)} = \frac{2-7.2}{9-1.5} = -0.693$

   Το πολυώνυμο γραμμικής παρεμβολής δίνεται από το ακόλουθο τύπο:

$$P_1(x) = \frac{\left(f(x_1) - f(x_0)\right)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= -0.693(x - 1.5) + 7.2 = -0.693x + 1.0395 + 7.2$$
$$= \mathbf{-0.693x + 8.0395}$$

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τα σημεία A=(1.5,7.2) και B=(9,2), έχουμε:
- για το σημείο A ισχύει ότι $x_1 = 1.5,\ y_1 = f(x_1) = 7.2$
- για το σημείο B ισχύει $x_2 = 9,\ y_2 = f(x_2) = 2$.

Εκτελούμε δύο επαναλήψεις για τα δύο σημεία A,B:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	${x_i}^2$
i=1	1.5	7.2	10.8	2.25
i=2	9	2	18	81
Σύνολο	10.5	9.2	28.8	83.25

Για n=2, έχουμε:

$$a=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{y}_i)-(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}_i)}{n(\sum_{i=1}^{n}{\mathrm{x}_i}^2)-(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)^2}=\frac{2(28.8)-(10.5)(9.2)}{2(83.25)-(10.5)^2}$$
$$=-0.693$$

$$\mathrm{b}=\frac{(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}{\mathrm{x}_\mathrm{i}}^2)(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{y}_\mathrm{i})-(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{i}\mathrm{y}_\mathrm{i})(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{i})}{\mathrm{n}(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}{\mathrm{x}_\mathrm{i}}^2)-(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{i})^2}$$
$$=\frac{(83.25)(9.2)-(28.8)(10.5)}{2(83.25)-(10.5)^2}=\frac{765.9-302.4}{166.5-110.25}=8.24$$

Συνεπώς το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού υπολογίζεται ως εξής:
$\mathrm{P}_1(\mathrm{x})=ax+b=\mathbf{-0.693x+8.24}$

Το σφάλμα της προσέγγισης για n=2 είναι:
$$E=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\mathrm{P}_1(\mathrm{x}_i)]^2=\sum_{i=1}^{2}[y_i-\mathrm{P}_1(\mathrm{x}_i)]^2$$
$$=(7.2-7.2005)^2+(2-2.003)^2=\mathbf{0.00000925}$$

ii. Εφαρμόζοντας την πολυωνυμική παρεμβολή δεύτερης τάξης με τον τύπο Lagrange για τα σημεία A=(1.5,7.2), B=(9,2) και C=(6,8), έχουμε:
- για το σημείο A ισχύει ότι $\mathrm{x}_0=1.5,\ \mathrm{y}_0=f(\mathrm{x}_0)=7.2$
- για το σημείο B ισχύει $\mathrm{x}_1=9,\ \mathrm{y}_1=f(\mathrm{x}_1)=2$
- για το σημείο C ισχύει $\mathrm{x}_2=6,\ \mathrm{y}_2=f(\mathrm{x}_2)=8$

Τα πολυώνυμα παρεμβολής του Lagrange υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\mathrm{l}_i(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_1}\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_2}\cdots\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_n}{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_n}=\prod_{j\neq i,j=0}^{n}\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_j}{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_j}$$

Ἐξετάζουμε 3 σημεία οπότε n=3-1=2:

$$\mathrm{l}_0(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1}\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_2}=\frac{\mathrm{x}-9}{1.5-9}\frac{\mathrm{x}-8}{1.5-8}$$
$$=0.0205128x^2-0.3487179x+1.4769230$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1.5}{9 - 1.5}\frac{x - 8}{9 - 8}$$
$$= -0.13x^2 + 1.26x - 1.6$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 1.5}{8 - 1.5}\frac{x - 9}{8 - 9}$$
$$= -0.153846x^2 - 1.61538461x - 2.076923$$

Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange είναι:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) \Leftrightarrow$$
$$P_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) =$$
$$0.0205128x^2 - 0.3487179x + 1.4769230 - 0.13x^2 +$$
$$1.26x - 1.6 - 0.153846x^2 - 1.61538461x - 2.076923 =$$
$$\boldsymbol{-0.2633332x^2 - 0.70410251x - 2.2}$$

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων δεύτερης τάξης για τα σημεία A=(1.5,7.2), B=(9,2) και C=(6,8), έχουμε:

- για το σημείο A ισχύει ότι $x_0 = 1.5,\ y_0 = f(x_0) = 7.2$
- για το σημείο B ισχύει $x_1 = 9,\ y_1 = f(x_1) = 2$
- για το σημείο C ισχύει $x_2 = 6,\ y_2 = f(x_2) = 8$

Εκτελούμε τρεις επαναλήψεις για τα τρεια σημεία A,B,C:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$
i=1	1.5	7.2	10.8	2.25	3.375	5.0625
i=2	9	2	18	81	729	6,561
i=3	6	8	48	36	1,157.625	12,212.94375
Σύνολο	16.5	17.2	76.8	119.25	1,890	18,779.00625

Επειδή ο αριθμός των σημείων n=3, τότε ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι m<3-1, δηλαδή m=2. Συνεπώς, το ζητούμενο πολυώνυμο θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 x + \mathrm{a}_2 x^2 \qquad (0)$$

$$\mathrm{a}_0 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^0 + \mathrm{a}_1 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^1 + \mathrm{a}_2 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{y}_i \mathrm{x}_i{}^0 \qquad (1)$$
$$\mathrm{a}_0 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^1 + \mathrm{a}_1 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^2 + \mathrm{a}_2 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^3 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{y}_i \mathrm{x}_i{}^1 \qquad (2)$$
$$\mathrm{a}_0 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^2 + \mathrm{a}_1 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^3 + \mathrm{a}_2 \sum_{i=1}^{3} \mathrm{x}_i{}^4 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{y}_i \mathrm{x}_i{}^2 \qquad (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) σχέσεις προκύπτει το εξής σύστημα για τα a_0, a_1 και a_2:

$$(1) \Leftrightarrow 3\mathrm{a}_0 + 16.5\mathrm{a}_1 + 119.25\mathrm{a}_2 = 17.2 \qquad (4)$$
$$(2) \Leftrightarrow 16.5\mathrm{a}_0 + 119.25\mathrm{a}_1 + 1{,}890\mathrm{a}_2 = 76.8 \qquad (5)$$
$$(3) \Leftrightarrow 119.25\mathrm{a}_0 + 1{,}890\mathrm{a}_1 + 18{,}779.00625\mathrm{a}_2 = 466.2 \qquad (6)$$

Λύνοντας το σύστημα των (4),(5) και (6) σχέσεων προκύπτει ότι:

$$\mathrm{a}_0 = \frac{141570767}{22181890} \approx 6.38226801$$
$$\mathrm{a}_1 = -\frac{549073}{33272835} \approx -0.01650214$$
$$\mathrm{a}_2 = -\frac{31148}{2218189} \approx -0.01404208$$

Οπότε η σχέση (0) γίνεται:

$$(0) \Leftrightarrow \mathbf{P_2(x) = 6.38226801 - 0.01650214}\boldsymbol{x} \mathbf{- 0.01404208}\boldsymbol{x^2}$$

Το σφάλμα προσέγγισης για n=3 είναι:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}_i)]^2 = \sum_{i=1}^{3} [y_i - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}_i)]^2$$
$$= (7.2 - 6.32592012)^2 + (2 - 5.09634027)^2 + (8 - 5.77774029)^2$$
$$= \mathbf{15.28977692}$$

Άσκηση 3

ΜΕΡΟΣ Ι

$f(x) = x^3 e^{-x^2}$

i. $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2} \Leftrightarrow$
$f''(x) = -14x^3 e^{-x^2} + 6xe^{-x^2} + 4x^5 e^{-x^2} \Leftrightarrow$
$f'''^{(x)} = 48x^4 e^{-x^2} - 54x^2 e^{-x^2} - 8x^6 e^{-x^2} + 6e^{-x^2}$

Γύρω από το 2:
$f(2) = 8e^{-4}$
$f'(2) = 12e^{-4} - 32e^{-4} = -20e^{-4}$
$f''(2) = -112e^{-4} + 12e^{-4} + 128e^{-4} = 28e^{-4}$
$f'''(2) = 768e^{-4} - 216e^{-4} - 512e^{-4} + 6e^{-x^2} = 46e^{-4}$

Επομένως, το πολυώνυμο taylor τρίτης τάξης της $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ γύρω από το 2 είναι:

$$\mathrm{P}_3(\mathrm{x}) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$
$$= 8e^{-4} + \frac{-20e^{-4}}{1}(x-2) + \frac{28e^{-4}}{2}(x-2)^2 + \frac{46e^{-4}}{6}(x-2)^3$$
$$= 8e^{-4} - 20e^{-4}(x-2) + 14e^{-4}(x^2 - 4x + 4)$$
$$+ \frac{23}{3}e^{-4}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$
$$= 8e^{-4} - 20xe^{-4} + 40e^{-4} + 14x^2 e^{-4} - 56xe^{-4} + 56e^{-4} + \frac{23}{3}x^3 e^{-4}$$
$$- 46x^2 e^{-4} + 92xe^{-4} - \frac{184}{3}e^{-4}$$
$$= e^{-4}(8 + -20x + 40 + 14x^2 - 56x + 56 + \frac{23}{3}x^3 - 46x^2 + 92x$$
$$- \frac{184}{3}) = \boldsymbol{e^{-4}\left(\frac{23}{3}x^3 - 32x^2 + 16x + \frac{104}{3}\right)}$$

ii. Σύνθετοι κανόνες τραπεζίου, Simpson και Simpson των $\frac{3}{8}$ στο διάστημα [a,b]=[0,2] για h=0.1,0.05,0.01,0.001 για την $f(x) = x^3 e^{-x^2}$:

Επειδή ο πρώτος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{0.1} = 20$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{0.05} = 40$
Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{0.01} = 200$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{0.001} = 2000$

Επειδή ο δεύτερος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{2\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{2*0.1} = 10$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{2*0.05} = 20$
Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{2*0.01} = 100$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{2*0.001} = 1000$

Επειδή ο τρίτος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{3\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{3*0.1} \approx 7$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{3*0.05} \approx 13$
Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{3*0.01} \approx 67$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{3*0.001} \approx 667$

Αποτελέσματα αλγορίθμων			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	0.45390636288062813	0.4542079472169761	0.45420528853590214
h=0.05	0.4541346324549146	0.45421072231301013	0.4542104495921737
h=0.01	0.4542078502433191	0.4542109024915496	0.4542109021458282
h=0.001	0.45421087225210754	0.4542109027781358	0.4542109027781002

Δίνεται ότι $I(f) = 0.454210902$

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = |\mathrm{x}^* - \mathrm{x}| = |I(f) - I|$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{I(f)-I}{I}$

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για το απόλυτο σφάλμα:

Απόλυτο σφάλμα			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	0.00030453911937187	0.0000029547830239	0.00000561346409786
h=0.05	0.0000762695450854	0.00000017968698987	0.0000004524078263
h=0.01	0.0000030517566809	0.0000000004915496	0.0000000001458282
h=0.001	0.00000002974789246	0.0000000007781358	0.0000000007781002

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για το σχετικό σφάλμα:

Σχετικό σφάλμα			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	6.709293904565953308232516195716 8e-4	6.505310662710601340872262903104e-6	1.2358869963743916469875869767091e-5
h=0.05	1.6794478913248673672989213726 21e-4	3.9560270386169427818108523639449e-7	9.9603130378485955421491352304888e-7
h=0.01	6.7188549895497716539074350123313e-6	-1.0822056390624508854283464386067e-9	-3.2105834384657865306340084031127e-10
h=0.001	6.5493571988934198563298352705074e-8	-1.7131596693091464594444980373082e-9	-1.7130812916222145288192500291 04e-9

Όσο μειώνεται το h η προσεγγιστική ακρίβεια των αλγορίθμων αυξάνεται. Σε αυτή την περίπτωση, ο σύνθετος κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$ οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι το σφάλμα του κάνονα αυτού είναι το μικρότερο από τους τρείς.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

$f(x) = ax^3e^{-\mathrm{b}x^2} = 3x^3e^{-6x^2}$

i. $f'(x) = 9x^2e^{-6x^2} - 36x^4e^{-6x^2} \Leftrightarrow$
$f''(x) = 18xe^{-6x^2} - 252x^3e^{-6x^2} + 432x^5e^{-6x^2} \Leftrightarrow$
$f'''(x) = -972x^2e^{-6x^2} + 5184x^4e^{-6x^2} - 5184x^6e^{-6x^2} + 18e^{-6x^2}$

Γύρω από το 2:
$f(2) = 24e^{-24}$
$f'(2) = -540e^{-24}$
$f''(2) = 11844e^{-24}$
$f'''(2) = -252702e^{-24}$

Επομένως, το πολυώνυμο taylor τρίτης τάξης της $f(x) = 3x^3e^{-6x^2}$ γύρω από το 2 είναι:

$$\mathrm{P}_3(\mathrm{x}) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$
$$= 24e^{-24} + \frac{-540e^{-24}}{1}(x-2) + \frac{11844e^{-24}}{2}(x-2)^2$$
$$+ \frac{-252702e^{-24}}{6}(x-2)^3$$
$$= \boldsymbol{e^{-24}}(\boldsymbol{-42117x^3 + 258624x^2 - 529632x + 361728})$$

ii. Σύνθετοι κανόνες τραπεζίου, Simpson και Simpson των $\frac{3}{8}$ στο διάστημα [a,b]=[0,2] για h=0.1,0.05,0.01,0.001 για την $f(x) = 3x^3e^{-6x^2}$:

Επειδή ο πρώτος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{0.1} = 20$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{0.05} = 40$

Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{0.01} = 200$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{0.001} = 2000$

Επειδή ο δεύτερος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{2\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{2*0.1} = 10$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{2*0.05} = 20$
Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{2*0.01} = 100$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{2*0.001} = 1000$

Επειδή ο τρίτος αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο το $N = \frac{b-a}{3\mathrm{h}}$, υπλογίζουμε τα N που θα χρειαστούμε για το κάθε h:

Για h=0.1: $N = \frac{2-0}{3*0.1} \approx 7$
Για h=0.05: $N = \frac{2-0}{3*0.05} \approx 13$
Για h=0.01: $N = \frac{2-0}{3*0.01} \approx 67$
Για h=0.001: $N = \frac{2-0}{3*0.001} \approx 667$

Αποτελέσματα αλγορίθμων			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	0.0416692403755371	0.04165501543988148	0.04164151860465117
h=0.05	0.0416682399811738	0.041666018538977466	0.04166498391966109
h=0.01	0.0416666687724403	0.0416666562591137	0.0416666441552745
h=0.001	0.041666666627365664	0.0416666662724236	0.0416666662711776

Δίνεται ότι $I(f) = \frac{ae^{-4\mathrm{b}}\left(-4b+e^{4\mathrm{b}}-1\right)}{2b^2} = \frac{3e^{-4*6}\left(-4*6+e^{4*6}-1\right)}{2*6^2} = \frac{3e^{-24}(-24+e^{24}-1)}{72} = \frac{-25+e^{24}}{24e^{24}} = \frac{-25+26489122129.84343}{24*26489122129.84343} = \frac{26489122104.84343}{635,738,931,116.24232} = 0.04166666662734234849709266896611 \approx 0.041666667$

Οπότε το απόλυτο σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = |\mathrm{x}^{*} - \mathrm{x}| = |I(f) - I|$
και το σχετικό σφάλμα είναι: $\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{x}} = \frac{I(f)-I}{I}$

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για το απόλυτο σφάλμα:

Απόλυτο σφάλμα			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	0.0000025733755371	0.00001165156011852	0.00002514839534883
h=0.05	0.00000015699811738	0.000000648461022534	0.00000168308033891
h=0.01	0.0000000012275597	0.00000000137408863	0.00000000258447255
h=0.001	0.000000000372634336	0.00000000037275764	0.00000000037288224

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για το σχετικό σφάλμα:

Σχετικό σφάλμα			
Διαμέριση	**Κανόνας Τραπεζίου**	**Κανόνας Simpson**	**Κανόνας Simpson των $\frac{3}{8}$**
h=0.1	-6.1757198209227739223979644751631e-5	2.7971565957852281857114218667679e-4	6.0392599000990894585303648864325e-4
h=0.05	-3.7679405895465802796174765555928e-6	1.5563306629055083461320665238 49e-5	4.0395559546004751202259349635433e-5
h=0.01	2.9461432651106140615379815817698e-9	3.2978127943731871958158904966456e-8	6.2027344551172507796157938762685e-8
h=0.001	8.9432240724354641548652088778783e-9	8.9461833684647298387500761203208e-9	8.9491737684943209147351241212858e-9

Όσο μειώνεται το h η προσεγγιστική ακρίβεια των αλγορίθμων αυξάνεται. Σε αυτή την περίπτωση, ο σύνθετος κανόνας Τραπεζίου οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι το σφάλμα του κάνονα αυτού είναι το μικρότερο από τους τρείς.