

HW7

PB20111689 蓝俊玮

14.12

a. 这三种网络结构哪些是对上述信息的正确(但不一定高效)表示?

(i) 是错误的网络表示。因为在给定了 M_1 和 M_2 的情况下, F_1 和 F_2 作为对焦的信息, 肯定会影响 N

(ii) 是正确的网络表示。两个望远镜的测量结果之间独立, 且都受恒星数目 N 和对焦情况的影响。

(iii) 是正确的网络表示。该网络是按照顺序进行表示的。如果当顺序不一样的时候, 则需要将 M_1 和 M_2 之间的箭头调换。

b. 哪一种网络结构是最好的? 请解释。

(ii) 是最好的网络结构。

c. 当 $N \in 1, 2, 3$, $M_1 \in 0, 1, 2, 3, 4$ 时, 请写出 $P(M_1|N)$ 的条件概率表。概率分布表里的每个条目都应该表达为参数 e 和或 f 的一个函数。

因为 $P(M_1|N) = P(M_1|N, F_1)P(F_1) + P(M_1|N, \neg F_1)P(\neg F_1)$

假设少数和多数一颗的概率是 e , 不多不少的概率是 $1 - 2e$, 因此:

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
$M_1 = 0$	$f + e(1 - f)$	f	f
$M_1 = 1$	$(1 - 2e)(1 - f)$	$e(1 - f)$	0
$M_1 = 2$	$e(1 - f)$	$(1 - 2e)(1 - f)$	$e(1 - f)$
$M_1 = 3$	0	$e(1 - f)$	$(1 - 2e)(1 - f)$
$M_1 = 4$	0	0	$e(1 - f)$

d. 假设 $M_1 = 1$, $M_2 = 3$ 。如果我们假设 N 取值上没有先验概率约束, 可能的恒星数目是多少?

由 $M_1 = 1$ 知 N 的取值范围为 $N \in 0, 1, 2, 4, 5, \dots$, 而由 $M_2 = 3$ 知 N 的取值范围为 $N \in 2, 3, 4, 6, 7, 8, \dots$, 因此 N 的取值可能为 $2, 4, 6, 7, 8, 9, \dots$

e. 在这些观测结果下, 最可能的恒星数目是多少? 解释如何计算这个数目, 或者, 如果不可能计算, 请解释还需要什么附加信息以及它将如何影响结果。

我们需要知道先验概率 $P(N)$, 假设其为 $P(N = 2) = p_2$, $P(N = 4) = p_4$ 和 $P(N \geq 6) = p_6$, 则可以计算:

$$P(N = 2|M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha P(N = 2, M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha p_2 e^2 (1 - f)^2$$

$$P(N = 4|M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha P(N = 4, M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha p_4 e(1 - f)(1 - 2e)f$$

$$P(N \geq 6|M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha P(N \geq 6, M_1 = 1, M_2 = 3) = \alpha f^2$$

因为 $f < e$, 所以认为 $N = 2$ 的概率更高。所以最可能的恒星数目是 2。

14.13

由于：

$$\begin{aligned} P(N|M_1 = 2, M_2 = 2) &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N, M_1 = 2, M_2 = 2, f_1, f_2) \\ &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N)P(f_1)P(f_2)P(M_1 = 2|f_1, N)P(M_2 = 2|f_2, N) \end{aligned}$$

因为发生对焦不准确时，不会观测到 2 个恒星。因此考虑 $f_1 = f_2 = \text{False}$ 的情况：

$$\begin{aligned} P(N|M_1 = 2, M_2 = 2) &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N, M_1 = 2, M_2 = 2, f_1, f_2) \\ &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N)P(f_1)P(f_2)P(M_1 = 2|f_1, N)P(M_2 = 2|f_2, N) \\ &= \alpha' P(N)P(M_1 = 2|f_1 = \text{False}, N)P(M_2 = 2|f_2 = \text{False}, N) \end{aligned}$$

所以可以推出：

$$\begin{aligned} P(N = 1|M_1 = 2, M_2 = 2) &= \alpha' P(N = 1)e^2(1 - f)^2 \\ P(N = 2|M_1 = 2, M_2 = 2) &= \alpha' P(N = 2)(1 - 2e)^2(1 - f)^2 \\ P(N = 3|M_1 = 2, M_2 = 2) &= \alpha' P(N = 3)e^2(1 - f)^2 \end{aligned}$$