HW9

PB20111689 蓝俊玮

T1

> 已知正例点 $x_1=(1,2)^T,x_2=(2,3)^T,x_e=(3,3)^T$，负样例 $x_4=(2,1)^T,x_5=(3,2)^T$ ，试求 Hard Margin SVM 的最大间隔分离超平面和分类决策函数，并在图上画出分离超平面、间隔边界以及支持向量。

约束最优化问题为：

$$\begin{aligned} \min_{w,b} \quad & \frac{1}{2}||w||^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i(w\cdot x_i+b)-1\geq 0 \end{aligned}$$

则有：

$$\begin{aligned} w_1+2w_2+b-1\geq 0 \\ 2w_1+3w_2+b-1\geq 0 \\ 3w_1+3w_2+b-1\geq 0 \\ -2w_1-w_2-b-1\geq 0 \\ -3w_1-2w_2-b-1\geq 0 \end{aligned}$$

则将第 3 个式子和第 4 个式子相加，第 1 个式子和第 5 个式子以及第 3 个式子和第 5 个式子相加，可以得到：

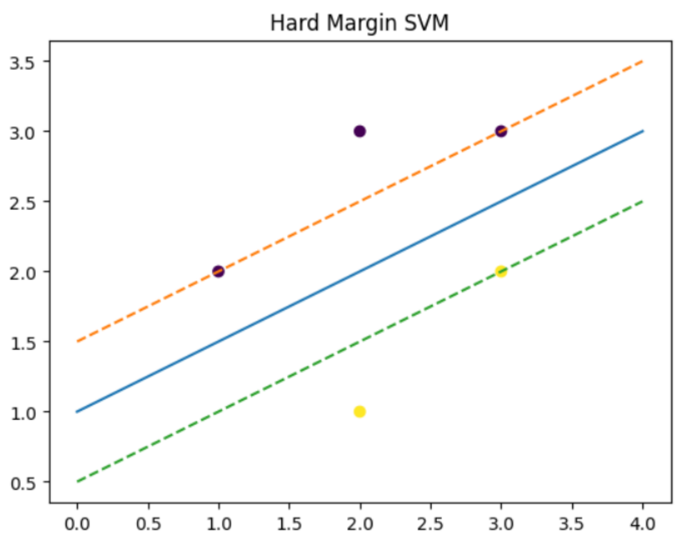
$$\begin{aligned} & w_1+2w_2\geq 2 \\ & -2w_1\geq 2 \\ & w_2\geq 2 \end{aligned}$$

则可以求解出最优解为 $w_1=-1,w_2=2$。将 w_1 和 w_2 代回式子，可以得到 $b=-2$。

最后得到：

1. 最大间隔分离超平面：$-x_1+2x_2-2=0$
2. 分类决策函数：$f(x)=\text{sign}(-x_1+2x_2-2)$
3. 支持向量：$x_1=(1,2)^T,x_3=(3,3)^T,x_5=(3,2)^T$

因此可以绘制出超平面：



T2

> 计算 $\frac{\partial}{\partial w_j}L_{CE}(w,b)$，其中
>
> $$L_{CE}(w,b) = -\left[y\log\left(\sigma(w\cdot x+b)\right) + (1-y)\log\left(1-\sigma(w\cdot x+b)\right)\right]$$
>
> 为 Logistic Regression 的 Loss Function。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_j}L_{CE}(w,b) &= -\frac{\partial}{\partial w_j}\left[y\log\left(\sigma(w\cdot x+b)\right) + (1-y)\log\left(1-\sigma(w\cdot x+b)\right)\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial w_j}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\log\left(\sigma(w\cdot x_i+b)\right) + (1-y_i)\log\left(1-\sigma(w\cdot x_i+b_i)\right)\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\frac{1}{\sigma(w\cdot x_i+b_i)}\sigma(w\cdot x_i+b_i)\left(1-\sigma(w\cdot x_i+b_i)\right)x_{ij}\right. \\
&\quad \left. +(1-y_i)\frac{-1}{1-\sigma(w\cdot x_i+b_i)}\sigma(w\cdot x_i+b_i)\left(1-\sigma(w\cdot x_i+b_i)\right)x_{ij}\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\left(1-\sigma(w\cdot x_i+b)\right)x_{ij} + (y_i-1)\sigma(w\cdot x_i+b)x_{ij}\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\left[\left(y_i-\sigma(w\cdot x_i+b)\right)x_{ij}\right]
\end{aligned}$$