

# HW2

---

PB20111689 蓝俊玮

## 4.1

---

1. 初始状态:

待扩展: Lugoj:  $244 = 0 + 244$

2. 扩展 Lugoj,  $g = 0$ :

待扩展: Mehadia:  $311 = 70 + 241$ , Timisoara:  $440 = 111 + 329$

3. 扩展 Mehadia,  $g = 70$ :

待扩展: Timisoara:  $440 = 111 + 329$ , Dobreta:  $387 = 145 + 242$ , Lugoj:  
 $384 = 140 + 244$

4. 扩展 Lugoj,  $g = 140$ :

待扩展: Timisoara:  $440 = 111 + 329$ , Dobreta:  $387 = 145 + 242$ , Mehadia:  
 $451 = 210 + 241$ , Timisoara:  $580 = 251 + 329$

5. 扩展 Dobreta,  $g = 145$ :

待扩展: Timisoara:  $440 = 111 + 329$ , Mehadia:  $451 = 210 + 241$ , Timisoara:  
 $580 = 251 + 329$ , Craiova:  $425 = 265 + 160$ , Mehadia:  $461 = 220 + 241$

6. 扩展 Craiova,  $g = 265$ :

待扩展: Timisoara:  $440 = 111 + 329$ , Mehadia:  $451 = 210 + 241$ , Timisoara:  
 $580 = 251 + 329$ , Mehadia:  $461 = 220 + 241$ , Pitesti:  $501 = 403 + 98$ , Rimnicu  
Vilcea:  $604 = 411 + 193$ , Dobreta:  $627 = 385 + 242$

7. 扩展 Timisoara,  $g = 111$ :

待扩展: Mehadia:  $451 = 210 + 241$ , Timisoara:  $580 = 251 + 329$ , Mehadia:  
 $461 = 220 + 241$ , Pitesti:  $501 = 403 + 98$ , Rimnicu Vilcea:  $604 = 411 + 193$ ,  
Dobreta:  $627 = 385 + 242$ , Arad:  $595 = 229 + 366$ , Lugoj:  $466 = 222 + 244$

8. 扩展 Mehadia,  $g = 210$ :

待扩展: Timisoara:  $580 = 251 + 329$ , Mehadia:  $461 = 220 + 241$ , Pitesti:  
 $501 = 403 + 98$ , Rimnicu Vilcea:  $604 = 411 + 193$ , Dobreta:  $627 = 385 + 242$ ,  
Arad:  $595 = 229 + 366$ , Lugoj:  $466 = 222 + 244$ , Dobreta:  $527 = 285 + 242$ ,  
Lugoj:  $524 = 280 + 244$

9. 扩展 Mehadia,  $g = 220$ :

待扩展: Timisoara:  $580 = 251 + 329$ , Pitesti:  $501 = 403 + 98$ , Rimnicu Vilcea:  
 $604 = 411 + 193$ , Dobreta:  $627 = 385 + 242$ , Arad:  $595 = 229 + 366$ , Lugoj:  
 $466 = 222 + 244$ , Dobreta:  $527 = 285 + 242$ , Lugoj:  $524 = 280 + 244$ , Dobreta:  
 $537 = 295 + 242$ , Lugoj:  $534 = 290 + 244$

10. 扩展 Lugoj,  $g = 222$ :

待扩展: Timisoara:  $580 = 251 + 329$ , Pitesti:  $501 = 403 + 98$ , Rimnicu Vilcea:  $604 = 411 + 193$ , Dobreta:  $627 = 385 + 242$ , Arad:  $595 = 229 + 366$ , Dobreta:  $527 = 285 + 242$ , Lugoj:  $524 = 280 + 244$ , Dobreta:  $537 = 295 + 242$ , Lugoj:  $534 = 290 + 244$ , Mehadia:  $533 = 292 + 241$ , Timisoara:  $662 = 333 + 329$

11. 扩展 Pitesti,  $g = 403$ :

待扩展: Timisoara:  $580 = 251 + 329$ , Rimnicu Vilcea:  $604 = 411 + 193$ , Dobreta:  $627 = 385 + 242$ , Arad:  $595 = 229 + 366$ , Dobreta:  $527 = 285 + 242$ , Lugoj:  $524 = 280 + 244$ , Dobreta:  $537 = 295 + 242$ , Lugoj:  $534 = 290 + 244$ , Mehadia:  $533 = 292 + 241$ , Timisoara:  $662 = 333 + 329$ , Bucharest:  $504 = 504 + 0$ , Rimnicu Vilcea:  $693 = 500 + 193$ , Craiova:  $701 = 541 + 160$

12. 扩展 Bucharest, 是目标节点, 结束。

## 4.2

将目标函数  $f(n)$  改写成  $f(n) = (2 - w) \left( g(n) + \frac{w}{2-w} h(n) \right)$ , 如果能保证启发式函数为可采的, 就能保证算法最优, 因此我们需要启发式函数不能高估耗散, 则  $\frac{w}{2-w} \leq 1$ , 所以可以得到  $w \leq 1$ 。

- 当  $w = 0$  的时候, 目标函数  $f(n) = 2g(n)$ , 则这个实际上就是代价一致搜索, 因为搜索时没有利用信息估计值;
- 当  $w = 1$  的时候, 目标函数  $f(n) = g(n) + h(n)$ , 则这个实际上就是  $A^*$  搜索;
- 当  $w = 2$  的时候, 目标函数  $f(n) = 2h(n)$ , 则这个实际上就是贪心搜索。

## 4.6

非最优的启发式函数:

$$h(n) = 3 \times \sum_{i=5}^8 d_{\text{Manhattan}}(i)$$

即第 5 - 8 数码所有数码到其目标位置的曼哈顿距离的 3 倍和。当耗散估计过高的时候, 就有可能导致非最优解, 因此在第 5 - 8 数码离目标位置远的时候, 此时就可能会导致非最优解。

将启发式函数  $h(n)$  设为  $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$ , 其中  $h_1(n)$  表示的是数码棋放错位置的个数, 而  $h_2(n)$  表示的是曼哈顿距离, 即所有棋子到其目标位置的水平竖直距离和。

根据假设, 则有  $h(n) \leq h^*(n) + c$ , 假设存在次最优的目标  $G_2$  满足  $g(G_2) > g^*(G) + c$ , 即这个次优的目标  $G_2$  比最优值  $g^*(G)$  多出了  $c$  耗散。现在对位于到达最优目标  $G$  路径上的任意一点  $n$ , 有:

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n) + h(n) \\ &\leq g(n) + h^*(n) + c \\ &\leq g^*(G) + c \\ &< g(G_2) = f(G_2) \end{aligned}$$

其中, 因为  $g^*(G)$  作为最优值, 而  $n$  在其路径之上, 所以有  $g(n) + h^*(n) \leq g^*(G)$ 。因此得到  $f(n) < f(G_2)$ , 所以  $A^*$  算法永远不会先扩展  $G_2$ 。那么就可以得出,  $A^*$  算法返回的解的耗散比最优解的耗散多出部分不会超过  $c$ , 因为这类次最优目标不会被  $A^*$  算法扩展。

## 4.7

如果一个启发式函数是一致的, 则对于任何节点  $n$ , 由任意动作  $a$  产生的每一个后继  $n'$  都有  $h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$ 。

采用归纳法，假设存在一个有  $k$  个节点的到最优目标的最短路径。对于任意节点  $n$ ，当  $k = 1$  时，则有  $n'$  为目标节点，此时  $h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') = c(n, a, n') + 0 = c(n, a, n') \leq h^*(n)$ 。那么假设  $k = k'$  时离目标节点的第  $k$  个节点满足  $h(n) \leq h^*(n)$ 。则对于  $k = k' + 1$  时，离目标节点位置的第  $k + 1$  个节点为  $n$ ，而第  $k$  个节点为  $n'$ ，那么我们有以下推导：

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') \leq c(n, a, n') + h^*(n') = h^*(n)$$

则得到了  $h(n) \leq h^*(n)$ ，因此它是可采纳的。

非一致的可采纳启发式函数：

考虑如下路径  $a \rightarrow b \rightarrow c$ ，假设其中  $a \rightarrow b$  的实际耗散为 2， $b \rightarrow c$  的实际耗散也为 2。若令  $h(a) = 4$ ， $h(b) = 1$ ，由于它们没有高估实际耗散，因此是可采纳的，但是  $h(a) = 4 > 2 + 1 = \text{Cost}(a, b) + h(b)$ ，因此这个启发式函数是非一致的。