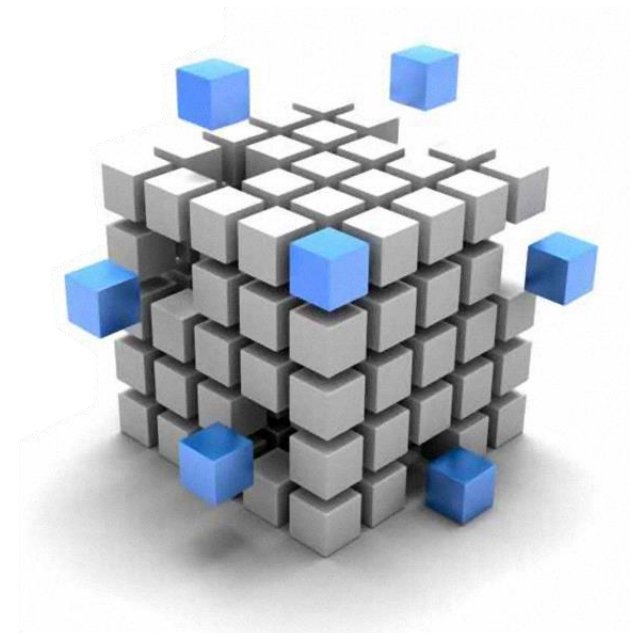
Taller N°1

Simulación de π



Gutiérrez Pizarro, Daniel Aarón

30 Abril 2014

1. Índice

2. Introducción

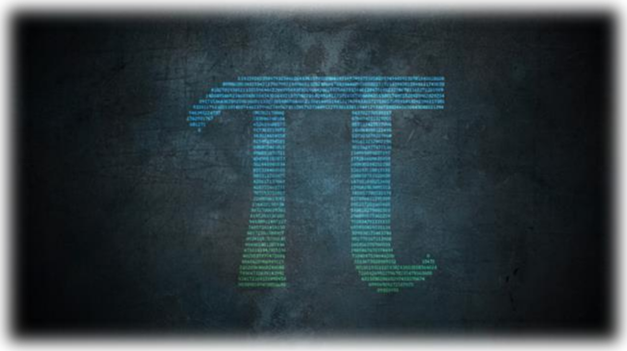
Desde que el ser humano desarrolló la capacidad de contar y empezó a explorar las propiedades de esos entes abstractos llamados números se ha sentido fascinado por lo que generaciones de mentes curiosas iban descubriendo. A medida que nuestro conocimiento sobre ellos aumentaba, algunos de ellos llamaban especialmente la atención y, a veces, hasta los mistificábamos. Tenemos al 0, representante de la nada, y que convierte a cualquier multiplicación en sí mismo, el 1, el primero de todo, y también con propiedades únicas, los números primos. Después descubrimos números que no eran enteros y que resultan a veces de las divisiones de dos enteros, los racionales. Los irracionales, que no pueden ser expresados como una fracción de enteros, etc. Pero si hay un número que ha fascinado y que ha hecho correr ríos de tinta, ese es π (pi). Un número que, a pesar de contar con una larga historia, no fue "bautizado" con el nombre con el que lo conocemos hoy hasta el siglo XVIII.

El presente informe trata de la simulación de número pi por métodos de aproximación, Los métodos estudiados y puestos en práctica con Montecarlo y Buffon.

3. Historia Del Numero Pi

El número 'Pi' (π) es la relación matemática existente en geometría euclIdiana resultado de dividir la circunferencia de un círculo entre su diámetro. Su valor en sus primeras cifras es 3,1415926535...; aunque al tratarse de un número irracional tiene infinitos decimales. Su uso es de vital importancia en campos como las matemáticas, la ciencia o la ingeniería. De hecho, su presencia en la naturaleza se hace patente en muy variados casos.

Se estima que ya en el año 2.000 a.C. los babilonios tuvieron un acercamiento al averiguar que la circunferencia de un círculo suele ser poco más de tres veces el equivalente a su diámetro. Sin embargo, no fue hasta el año 225 a.C. cuando Arquímedes de Siracusa inició su teoría matemática. La misma se fue perfeccionando a lo largo de los siglos y en 1706 el matemático William Jones usó por primera vez su símbolo (π), aunque fue Leonhard Euler el que lo popularizó a partir de 1737.



Hubo que esperar hasta el siglo XVII para que se produjera una nueva revolución en la manera de calcular π con el descubrimiento de las series infinitas, aunque la primera no fuera una serie sino una multiplicación. Las series infinitas son sumas de un número infinito de términos que tienen algún patrón de sucesión (por ejemplo, todos los números 1/n, con n desde 1 hasta infinito). En muchos casos la suma es finita y se puede calcular por diversos medios. Y resulta que algunas de estas series convergen a π o algún término relacionado con π. Para que una serie converja, es necesario (aunque no suficiente) que, a medida que aumente n, el término a sumar tienda a 0. De esta manera, cuantos más números sumemos, más cerca estaremos del valor real de π. Ahora tenemos dos vías de ataque para obtener un valor más preciso de π. O bien sumamos más números, o buscamos otra serie que tienda más rápido al valor final, de forma que tengamos que sumar menos números.

Con esta nueva aproximación, la precisión del cálculo de π aumentó espectacularmente, y en 1873, William Shanks publicó el resultado de años de trabajo dando el valor de π hasta la 707ª posición. Por suerte no vivió hasta 1945, cuando se descubrió que había cometido un error de cálculo y que todas las cifras a partir de la posición 528 eran incorrectas. A pesar de ello, su aproximación fue la más precisa hasta la llegada de los ordenadores. Esta fue la penúltima revolución en el cálculo de π. Operaciones matemáticas que, a mano podían tardar minutos, ahora se realizaban en fracciones de segundo, y sin apenas posibilidades de error. John Wrench y L. R. Smith consiguieron calcular más de 2000 cifras en 70 horas, con el primer ordenador electrónico. La barrera del millón de cifras se alcanzó en 1973.
La última (de momento) innovación en el cálculo de π fue el descubrimiento de algoritmos iterativos que convergen a π mucho más rápido que las series infinitas, lo que permite

alcanzar precisiones mucho mayores con la misma potencia de cálculo. El récord actual está en poco más de 10 billones de cifras correctas. ¿Para qué sirve calcular π con tanta precisión? Teniendo en cuenta que con 39 cifras se puede calcular el volumen del universo conocido con la precisión de un átomo, para nada… de momento.

Tabla con valores Históricos de π

Autor	Año	N° de Decimales	Valor estimado
Babilonios	Hacia el 2000 a.C.	1	3.125 = 3 + 1/8
Egipcios	Hacia el 2000 a.C.	1	3.16049=(16/9)^2
Arquímedes	Hacia el 250 a.C.	3	3.1418 (media)
Ptolomeo	150	3	314.166
Liu Hui	263	5	314.159
Tsu Ch'ung Chi	480	6	3.1415929(=355/113)
Aryabhata	499	4	314156
Al-Khowarizmi	800	4	31416
Al-Kashi	1429	14	314159265358979
Vieta	1593	9	3141592653
Romanus	1593	15	3141592653589790
Van Ceulen	1596	20	
Van Ceulen	1615	35	

A partir de esta fecha empiezan a utilizarse series.		
Autor	Año	N° de Decimales
Sharp	1699	71
Machin	1706	100
De Lagny	1719	200
Vega	1794	248
Rutherford	1824	261
Strassnitzky y Dase	1844	140 (126 correctos)
Clausen	1847	127 (112 correctos)
Lehmann	1853	208 (152 correctos)
Rutherford	1853	707 (527 correctos)
Shanks	1874	440

Utilizando calculadora		
Autor	Año	N° de Decimales
Ferguson y Wrench	1947	808
Smith y Wrench	1949	1120

Utilizando computador			
Autor	Año	N° de Decimales	Computador

Guilloud y Dichampt	1967	2,037	CDC 6600
Guilloud y Bouyer	1973	3,092	CDC 7600
Miyoshi y Kanada	1981	7,480	FACOM M-200
Tamura y Kanada	1982	10.000	HITACHI M-280H
Tamura y Kanada	1982	16,167	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino y Tamura	1982	100,265	HITACHI M-280H
Gosper	1985	250.000	SYMBOLICS 3670
Bailey	1986	500.000	CRAY-2
Kanada y Tamura	1986	1,001,250	HITACHI S-810/20
Felton	1957	2,000,036	PEGASUS
Kanada	1995	4,194,288	HITACHI S-810/20
Chudnovskys	1989	8,388,576	IBM 704
Chudnovskys	1989	16,777,206	IBM 7030
Kanada y Tamura	1986	17,526,200	IBM 704
Genuys	1958	29,360,111	NEC SX-2
Guilloud y Filliatre	1966	33,554,414	ENIAC
Kanada y Tamura	1989	67,108,839	NORAC
Chudnovskys	1991	134,217,700	IBM 7090
Guilloud	1959	201,326,551	HITACHI S-820/80
Kanada, Tamura, Kubo	1987	480,000,000	
Reitwiesner	1949	525,229,270	
Nicholson y Jeenel	1954	1,073,741,799	
Shanks y Wrench	1961	2,260,000,000	
Chudnovskys	1994	4,044,000,000	
Kanada y Tamura	1988	6,442,450,938	

Algunas curiosidades

Pero el cálculo del valor de π es sólo una pequeña parte de su historia. Han sido sus propiedades las que han hecho que esta constante despierte tanta curiosidad.

Quizá el problema más asociado con π es el famoso problema de la cuadratura del círculo, consistente en encontrar la manera de crear un cuadrado con la misma área que un círculo dado usando sólo regla y compás. Resolver la cuadratura del círculo obsesionó a generaciones de matemáticos durante veinticuatro siglos hasta que von Lindemann probó que π es un número trascendente (no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales) y por tanto la cuadratura del círculo es imposible.

Hasta 1761 no se pudo probar que π es irracional, o sea, no existen dos números naturales tales que a/b=π, y su trascendencia no fue probada hasta 1882, sin embargo todavía no se sabe si π+e, π/e o lnπ (e es otro número irracional y trascendente) son irracionales. Aparece en multitud de fórmulas que no están relacionadas con círculos. Es parte de la constante de normalización de la función normal, probablemente la más usada en estadística. Como ya hemos comentado antes, aparece en la solución de multitud de series y multiplicaciones infinitas y es fundamental en el estudio de los números complejos. En Física se le puede encontrar (dependiendo del sistema de unidades usado) en la constante cosmológica (el mayor error de Albert Einstein) o en la constante de permeabilidad magnética del vacío.

En cualquier base (decimal, binaria…), las cifras decimales de π pasan todas las pruebas de aleatoriedad, no se observa ningún patrón ni tendencia. A través de la función zeta de Riemann π se encuentra estrechamente relacionado con los números primos.

Una larga historia para un número que seguro que todavía guarda muchas sorpresas.

4. Descripción Del Problema

Se pide que, usando el método de simulación de Montecarlo y Buffon, simular el valor del numero pi

5. Algoritmos De Simulación

Método Montecarlo
Consiste en realizar un experimento aleatorio un determinado número de veces. Como sabemos que la frecuencia con que ocurre un suceso se acerca a su probabilidad, a medida que aumenta el número de ensayos nos iremos acercando más y más al valor buscado. Puede utilizarse para estimar probabilidades que serían muy difíciles de calcular de forma teórica, o para corroborar que ocurrirá lo que nosotros esperamos de un determinado experimento.

Para calcular el número π, podemos seguir los siguientes pasos:
1. Inscribir un círculo en un cuadrado de lado 2. El radio del círculo será 1.
2. Elegir al azar un punto del cuadrado y observar si este punto pertenece o no al círculo.
3. La probabilidad de que el punto esté dentro del circulo es la razón entre las áreas, π/4.
4. Multiplica por 4 la frecuencia de este suceso y tendrás una aproximación de π

Método Buffon
La aguja de Buffon es un clásico problema de probabilidad geométrica, de realización práctica y cuyo interés radica en que es un método difícil para ir aproximando el valor del número π a partir de sucesivos intentos. Fue planteado por el naturalista francés Buffon en 1711 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1757. Se trata de lanzar una aguja sobre un papel en el que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí de manera uniforme. Se puede demostrar que si la distancia entre las rectas es igual a la longitud de la aguja, la probabilidad de que la aguja cruce alguna de las líneas es 2/π.

De esa manera: $\pi = \frac{2N}{A}$ siendo N el número total de intentos y A el número de veces que la aguja ha cruzado alguna línea. Si la aguja es más corta que la distancia entre las rectas la probabilidad disminuye proporcionalmente al cociente entre la longitud de la aguja y la distancia entre las rectas, tomando el valor $\frac{2L}{D\pi}$ donde L es la longitud de la aguja y D la inter-distancia entre las rectas.

Para el caso queda que $\pi = \frac{2NL}{AD}$.

La tercera situación, en que la longitud de la aguja es mayor que la distancia entre las rectas lleva a un resultado bastante más complicado.

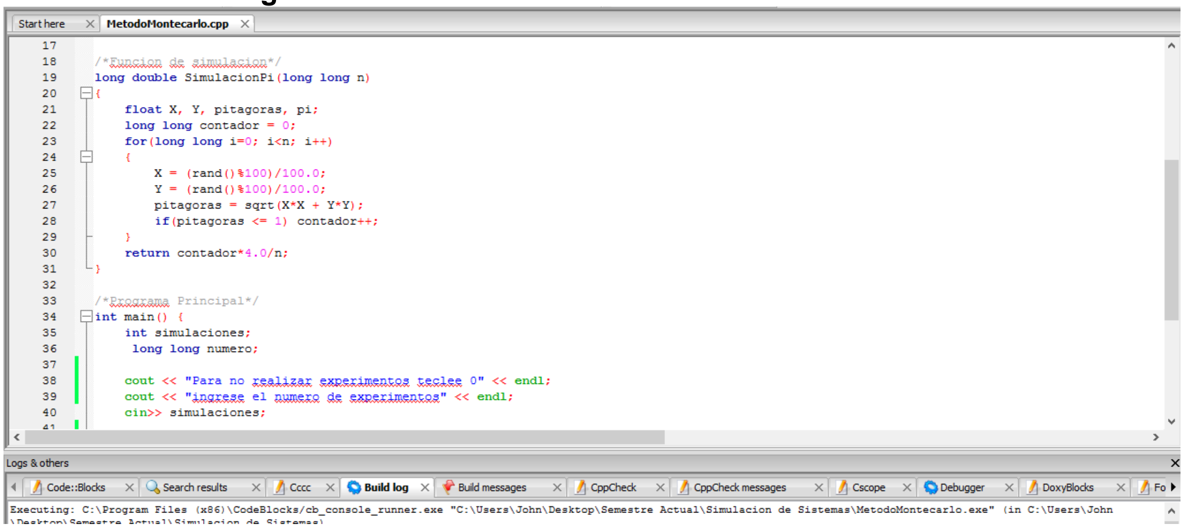
Una generalización obvia de este problema es el problema de la Aguja de Buffon-Laplace, donde la aguja, en vez de lanzarse sobre un papel rayado, se lanza sobre una cuadrícula. Se llama de Buffon-Laplace pues aunque Buffon lo resolvió también en 1777, su solución contenía un error. Fue corregido por Laplace en 1812.

6. Método Usado Para Generar Los Números Aleatorios

Para números pequeños y a modo de generar un gráfico se utilizo una planilla Excel en el software Microsoft Excel y también un breve programa en C++ para simular más rápidamente cantidades más grandes de simulaciones. Se adjuntaran las planillas utilizadas, los códigos en C++ y los correspondientes ejecutables.

Método Montecarlo

Pantallazo de código:



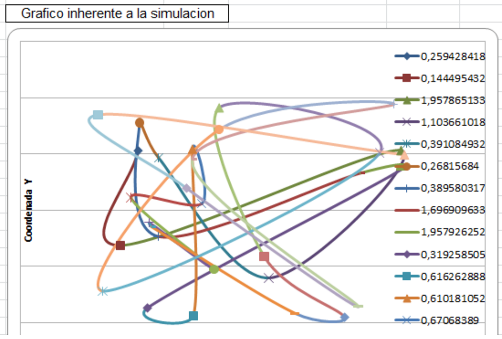

```cpp

/*Funcion de simulacion*/
long double SimulacionPi(long long n)
{
    float X, Y, pitagoras, pi;
    long long contador = 0;
    for(long long i=0; i<n; i++)
    {
        X = (rand()%100)/100.0;
        Y = (rand()%100)/100.0;
        pitagoras = sqrt(X*X + Y*Y);
        if(pitagoras <= 1) contador++;
    }
    return contador*4.0/n;
}

/*Programa Principal*/
int main() {
    int simulaciones;
     long long numero;

    cout << "Para no realizar experimentos teclee 0" << endl;
    cout << "ingrese el numero de experimentos" << endl;
    cin>> simulaciones;
```

Pantallazo de planilla:

N	X	Y	Acierto 1		X'	Y'
1	0,259428	1,529741	1	1	0,259428	1,529741
2	0,144495	0,687678	1	1	0,144495	0,687678
3	1,957865	1,531774	0	1	0	1,531774
4	1,103661	0,398251	1	1	1,103661	0,398251
5	0,391085	1,467016	1	1	0,391085	1,467016
6	0,268157	1,779756	0	1	0	1,779756
7	0,38958	0,766761	1	1	0,38958	0,766761
8	1,69691	1,331125	1	1	1,69691	1,331125
9	1,957926	1,361465	0	1	0	1,361465
10	0,319259	0,131384	0	1	0	0,131384
11	0,616263	0,061505	0	1	0	0,061505
12	0,610181	1,54287	1	1	0,610181	1,54287
13	0,670684	1,058708	1	1	0,670684	1,058708
14	0,213621	1,11327	1	1	0,213621	1,11327
15	0,748915	0,475921	1	1	0,748915	0,475921
16	0,330951	0,890463	1	1	0,330951	0,890463
17	0,346602	0,853272	1	1	0,346602	0,853272
18	1,272781	0,083391	1	1	1,272781	0,083391

Cantidad de Lanzamiento	30
PI	2,533333
Aciertos en el Circulo	19

Grafico inherente a la simulacion



Método de Buffon

Pantallazo de código:

Start here | MetodoBuffon.cpp | MetodoMontecarlo.cpp

```

/*Funcion de simulacion*/
long double simulacion(long long n)
{
    float x, y, z;
    float b=2;
    float contador = 0, corta_lin= 0;
    while(contador < n)
    {
        x= ((rand()%100)/100.0)*0.5;
        y= ((rand()%100)/100.0)* 3.1415;
        z=0.5* sin(y);
        if(x > z)
            contador ++;

        else
            corta_lin ++;

    }
    b=b+(corta_lin/n);
    return b;
```

Pantallazo de planilla:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
13	10	2,96	24,03	si		5,924469	1,323522		-0,0121258	-1,323522		2,96	0	
14	11	4,51	26,71	no		7,4113823	1,4607404		1,6049247	-1,4607404		4,51	0	
15	12	3,43	17,85	no		6,523196	0,9964083		0,3362192	-0,9964083		3,43	0	
16	13	2,89	66,50	no		4,1842121	2,980404		1,5921532	-2,980404		2,89	0	
17	14	0,33	39,95	si		2,8245272	2,0867215		-2,158682	-2,0867215		0,33	0	
18	15	5,74	1,33	si		8,9926742	0,0753495		2,4944214	-0,0753495		5,74	0	
19	16	4,67	137,91	no		2,2551736	2,1786251		7,0784889	-2,1786251		4,67	0	
20	17	6,59	65,95	no		7,9164039	2,9677906		5,2670877	-2,9677906		6,59	0	
21	18	2,80	153,11	si		-0,1011309	1,4697417		5,6962338	-1,4697417		2,80	0	
22	19	5,08	138,31	no		2,6490122	2,1616915		7,5027077	-2,1616915		5,08	0	
23	20	2,18	33,89	si		4,875833	1,8121491		-0,5199489	-1,8121491		2,18	0	
24	21	6,35	159,83	si		3,2974661	1,1208487		9,3986785	-1,1208487		6,35	0	
25	22	1,20	31,67	si		3,9645423	1,7064183		-1,5674145	-1,7064183		1,20	0	
26	23	3,65	61,08	no		5,2236747	2,8446959		2,0802972	-2,8446959		3,65	0	
27	24	4,36	175,84	no		1,1183633	0,2355707		7,6012659	-0,2355707		4,36	0	
28	25	5,59	71,62	no		6,6153912	3,0842619		4,5661683	-3,0842619		5,59	0	
29	26	2,77	40,55	no		5,2391461	2,1127487		0,2999992	-2,1127487		2,77	0	
30	27	3,35	133,02	no		1,1342624	2,3761886		5,5687761	-2,3761886		3,35	0	
31	28	1,50	40,29	si		3,9770278	2,1016887		-0,9809574	-2,1016887		1,50	0	
32	29	6,06	157,80	si		3,0519868	1,2282385		9,0699366	-1,2282385		6,06	0	
33	30	4,12	60,47	no		5,7181271	2,8278931		2,5146787	-2,8278931		4,12	0	
34	31	5,92	55,17	no		7,7718095	2,6678427		4,0596051	-2,6678427		5,92	0	
35	32	7,47	164,37	si		4,3372219	0,8757908		10,596772	-0,8757908		7,47	0	
36	33	0,40	144,78	si		-2,2578137	1,8744465		3,0521582	-1,8744465		0,40	0	
37	34	4,56	146,65	no		1,8498747	1,7868431		7,2793099	-1,7868431		4,56	0	
38	35	6,32	28,33	si		9,1803797	1,5421977		3,4587973	-1,5421977		6,32	0	
39	36	0,02	31,42	si		2,791887	1,6943448		-2,7548944	-1,6943448		0,02	0	
40	37	2,71	15,84	si		5,8364908	0,8870664		-0,4167046	-0,8870664		2,71	0	
41	38	4,83	33,86	no		7,5331662	1,8108242		2,1356053	-1,8108242		4,83	0	
42	39	1,06	59,85	si		2,693923	2,8101995		-0,5712132	-2,8101995		1,06	0	
43	40	6,04	51,75	si		8,055883	2,5523472		4,0319428	-2,5523472		6,04	0	

7. Resultados: Tablas Y Gráficos De Salida

Método Montecarlo

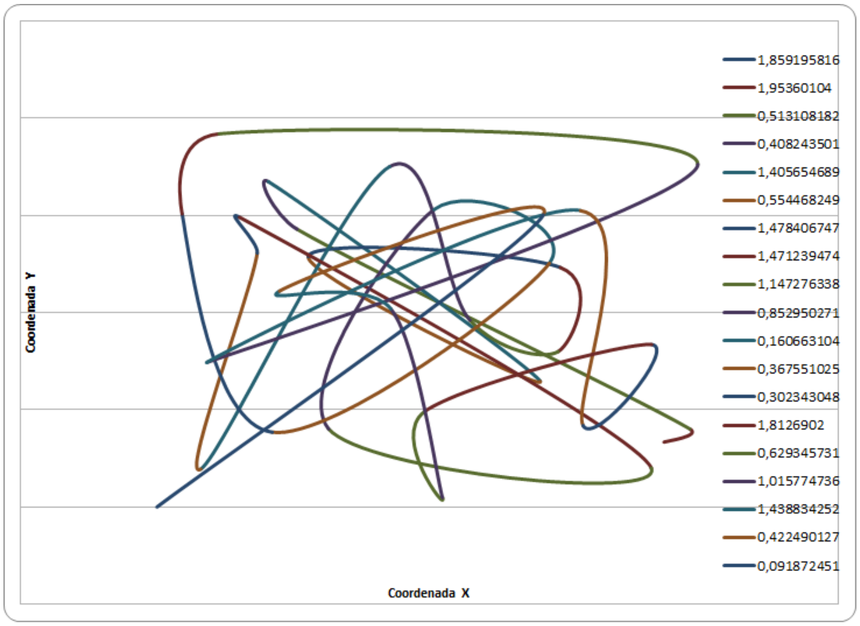
Por razones de espacio solo de realizaron 30 simulaciones mediante Microsoft Excel 2010 donde se obtuvo la siguiente tabla:

Simulación	X	Y	Acierto	1	X'	Y'
1	1,859196	0,333685	0	1	0,00000	0,333685
2	1,953601	0,402129	0	1	0,00000	0,402129
3	0,513108	1,430372	1	1	0,51311	1,430372
4	0,408244	1,674713	1	1	0,40824	1,674713
5	1,405655	0,646455	1	1	1,40565	0,646455
6	0,554468	1,288637	1	1	0,55447	1,288637
7	1,478407	1,232872	1	1	1,47841	1,232872
8	1,471239	0,799824	1	1	1,47124	0,799824
9	1,147276	0,961342	1	1	1,14728	0,961342
10	0,85295	1,751922	1	1	0,85295	1,751922
11	0,160663	0,194911	0	1	0,00000	0,194911
12	0,367551	1,306881	1	1	0,36755	1,306881
13	0,302343	1,491474	1	1	0,30234	1,491474
14	1,81269	0,200675	0	1	0,00000	0,200675
15	0,629346	0,401798	1	1	0,62935	0,401798
16	1,015775	1,530885	1	1	1,01577	1,530885
17	1,438834	1,25513	1	1	1,43883	1,25513
18	0,42249	0,384762	1	1	0,42249	0,384762
19	0,091872	1,508484	0	1	0,00000	1,508484
20	0,227146	1,920312	0	1	0,00000	1,920312
21	1,983468	1,763399	0	1	0,00000	1,763399
22	0,184687	0,744027	1	1	0,18469	0,744027
23	1,552964	1,525265	1	1	1,55296	1,525265
24	1,562402	0,4188	1	1	1,56240	0,4188
25	1,813764	0,835977	1	1	1,81376	0,835977
26	0,98103	0,49074	1	1	0,98103	0,49074
27	1,047065	0,047976	1	1	1,04706	0,047976
28	0,857477	1,019886	1	1	0,85748	1,019886
29	0,449235	1,111177	1	1	0,44923	1,111177
30	1,416704	1,503487	1	1	1,41670	1,503487

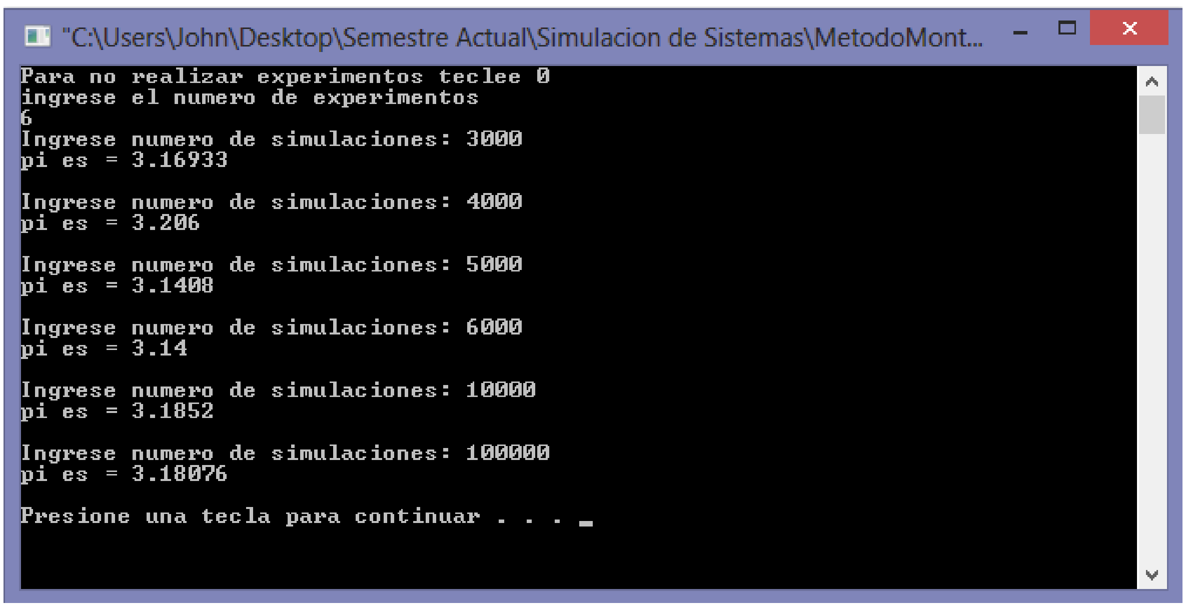
Finalmente calculando π obtenemos la siguiente tabla comparativa:

Cantidad de Lanzamiento	**30**
Π(pi) estimado	3,066666667
Aciertos en el Circulo	23

Se adjunta un gráfico con la dispersión de los datos obtenidos aleatoriamente.



Y para simulaciones más grandes se utilizó un programa en C++, con tal de obtener un valor de pi más fidedigno. Se adjuntan a continuación pantallazos con los resultados de simulaciones más grandes,



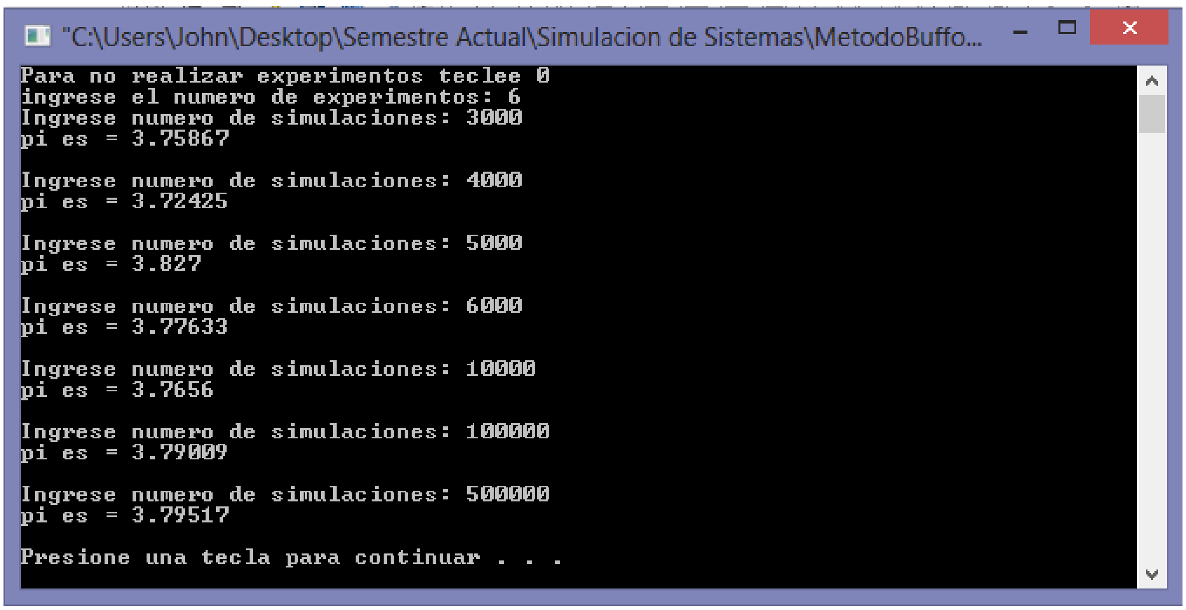
Método de Buffon:

Por razones de espacio solo se mostrara el resultado final de 30 simulaciones mediante Microsoft Excel 2010 donde se obtuvo la siguiente tabla:

L	**6,5**
D	8
Simulacion = PI	3,081542351

Revisar los datos en el archivo Excel SimulacionBuffon.xlsx

Y para simulaciones más grandes se utilizó un programa en C++, con tal de obtener un valor de pi más fidedigno. Se adjuntan a continuación pantallazos con los resultados de simulaciones más grandes,

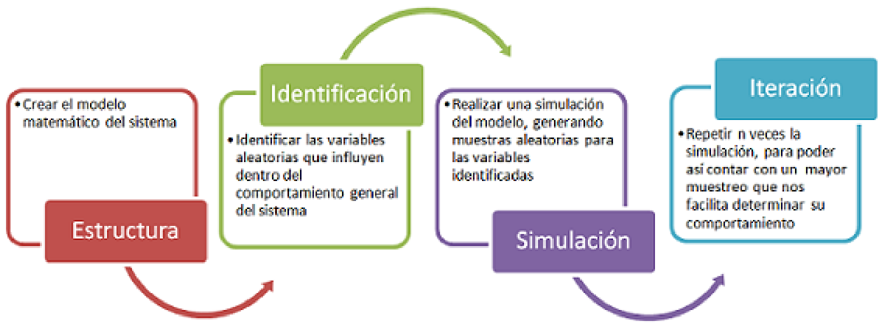


8. Conclusiones

La simulación es un campo que está tomando una gran importancia. Nos está permitiendo evaluar comportamientos extremos sin ningún tipo de riesgos. Casi nadie se imaginaba que el escenario económico actual podía cambiar con la velocidad que lo está haciendo. Imaginemos una modificación brusca de los ratios de morosidad implicará que las entidades bancarias tengan que modificar sus fondos de previsión. Esta misma morosidad puede afectar a las aseguradoras de crédito que tienen que estimar sus provisiones técnicas. Ahora mismo es necesario simular las condiciones más extremas para los datos futuros y la simulación nos permite experimentar para aproximarnos al problema.

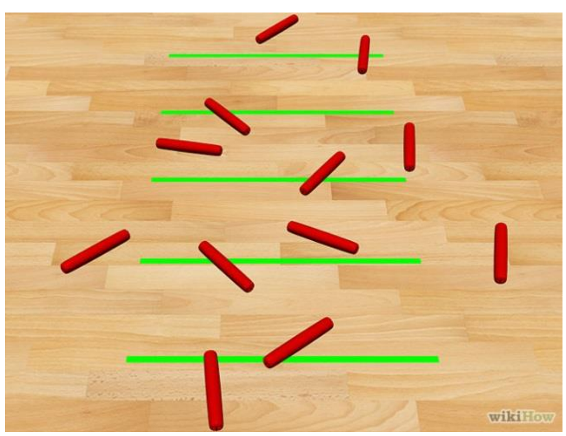
Método Montecarlo

Para finalizar, podemos decir que el método Montecarlo es aplicable en todos aquellos sistemas que cuenten con un factor de aleatoriedad. Con lo cual podemos concluir que se puede aplicar a sistemas complejos, de los cuales podemos destacar áreas como informática, financiera, industrial, entre otras.



Método de Buffon

Podríamos pensar que aquí debe haber un error. Si π es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, ¿qué tiene que ver con agujas y probabilidades? Posiblemente todo y nada: hay que pensar en π como una constante universal, como un reflejo de las profundas conexiones que existen entre unos objetos matemáticos y otros, como una de las características básicas del universo que habitamos. El hecho de que el primer sitio donde el hombre se encontró con π fuese en el círculo fue una mera casualidad. O quizá, es que ese era el más sencillo de los lugares.



9. Bibliografía

- **Datos sobre valores históricos de pi**

http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/tabla_pi.htm

- **Sobre el metodo de Buffon**

http://ciencianet.com/buffon.html

- **Cifras decimales de π**

http://ciencianet.com/pi.txt

- **Pinceladas sobre la historia de π**

http://lacienciaysusdemonios.com/2013/02/14/breve-historia-de-pi/

- **Sobre el método Montecarlo**

http://simulemos-arte.blogspot.com/2011/11/que-es-el-metodo-montecarlo.html