哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

大学物理

----安培环路定理

姜海丽

题型4、安培环路定理

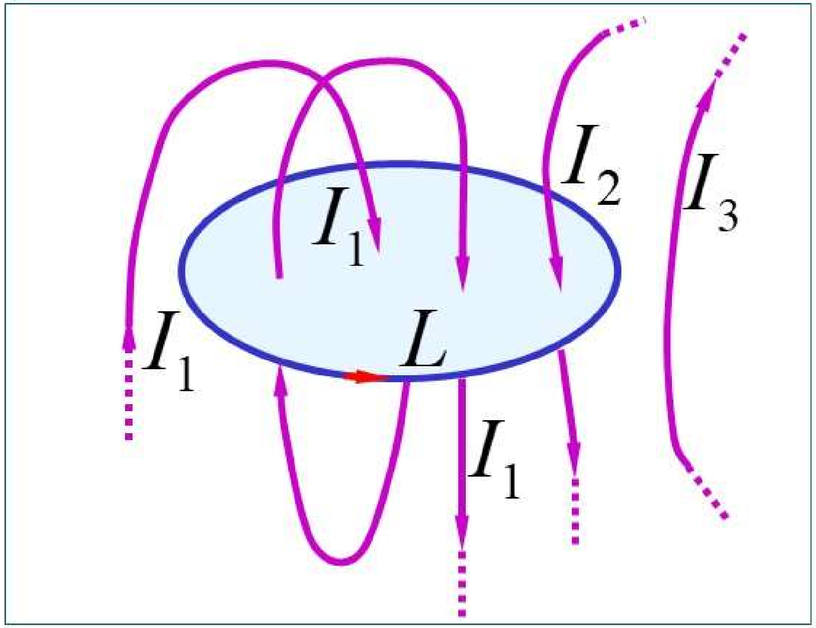
安培环路定理

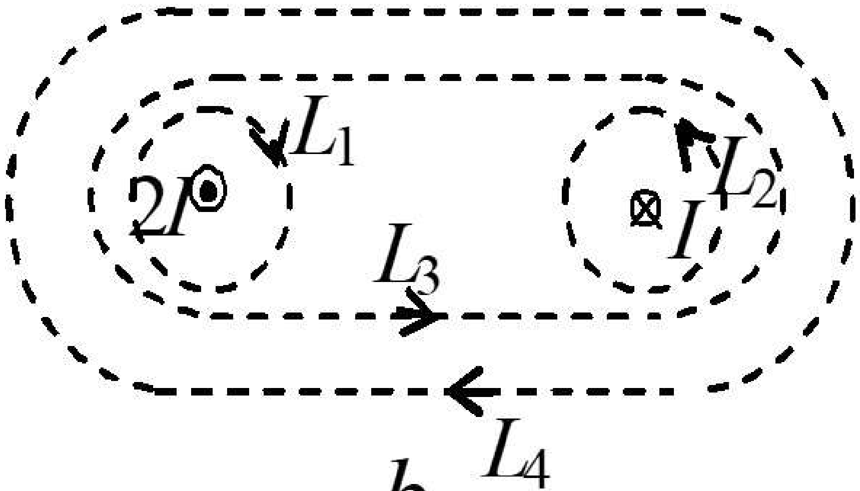
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

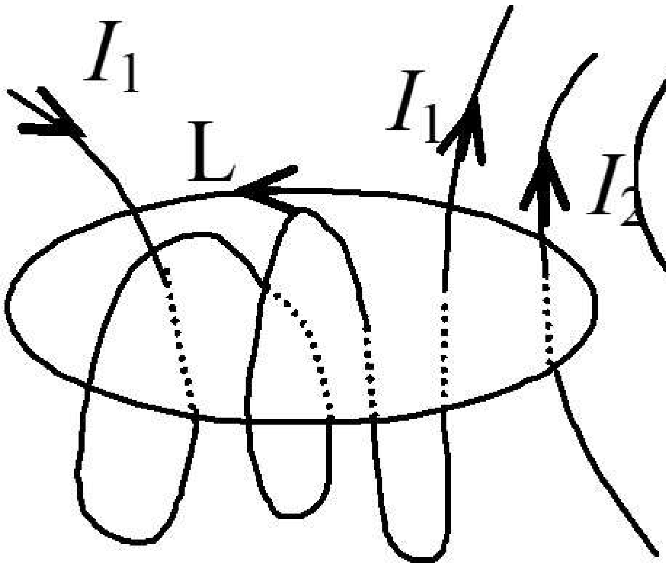
即在真空的稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和.

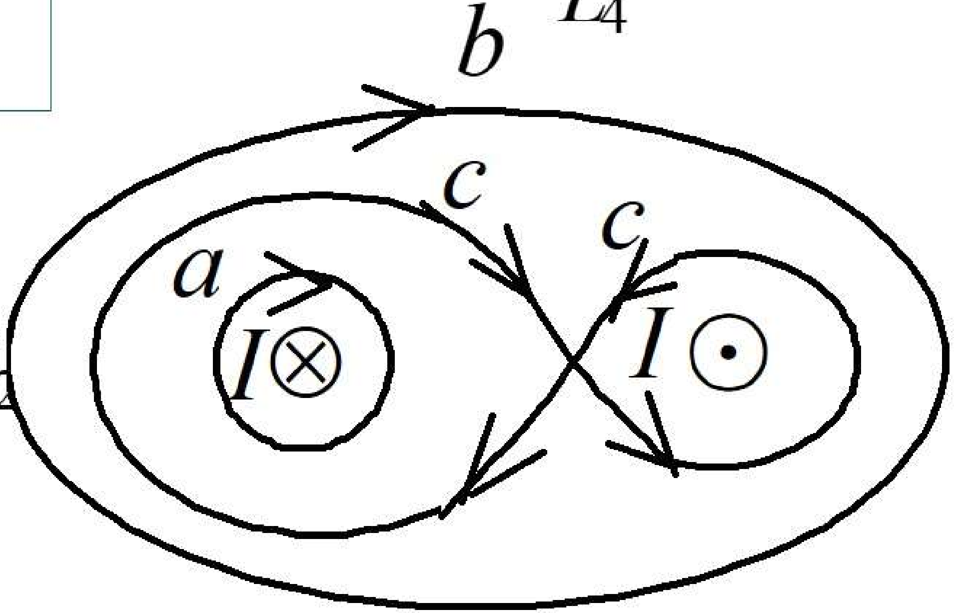
问 1）$\vec{B}$ 是否与回路 L 外电流有关?

2）若 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，是否回路 L 上各处 $\vec{B} = 0$?
是否回路 L 内无电流穿过?


I_1
I_2
I_3
I_1
L
I_1


L_1
$2I$
L_2
I
L_3
L_4


I_1
L
I_1
I_2


b
c
c
a
I
I

单选题 1分

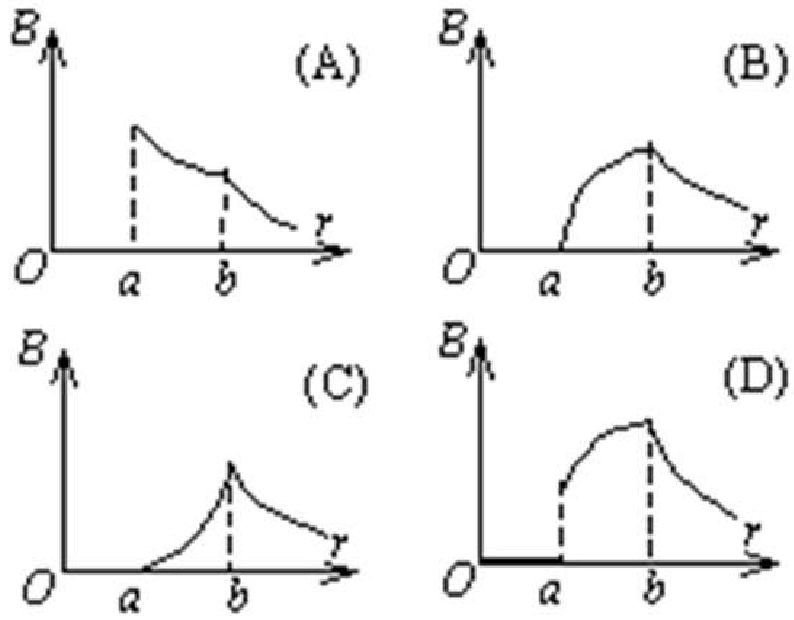
无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为 a、b，电流在导体截面上均匀分布，则空间各处的 $\vec{B}$ 的大小与场点到圆柱中心轴线的距离 r 的关系定性地如图所示．正确的图是：

A (A)

B (B)

C (C)

D (D)



单选题 1分

取一闭合积分回路 L，使三根载流导线穿过它所围成的面．现改变三根导线之间的相互间隔，但不越出积分回路，则：

A 回路 L 内的 ΣI 不变，L 上各点的 $\bar{B}$ 不变．

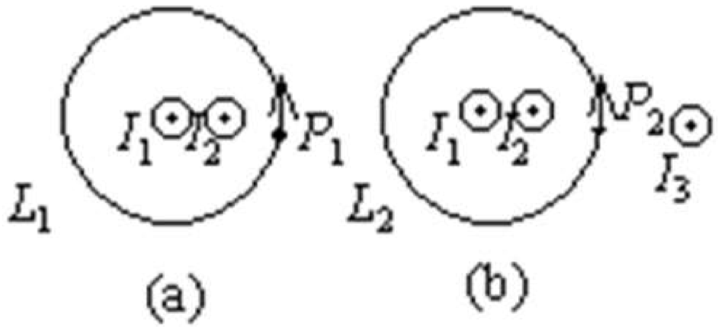
B 回路 L 内的 ΣI 不变，L 上各点的 $\bar{B}$ 改变．

C 回路 L 内的 ΣI 改变，L 上各点的 $\bar{B}$ 不变．

D 回路 L 内的 ΣI 改变，L 上各点的 $\bar{B}$ 改变．

单选题 1分

在图(a)和(b)中各有一半径相同的圆形回路 L_1、L_2，圆周内有电流 I_1、I_2，其分布相同，且均在真空中，但在(b)图中 L_2 回路外有电流 I_3，P_1、P_2 为两圆形回路上的对应点，则：



A $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$， $B_{P_1} = B_{P_2}$

B $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$， $B_{P_1} = B_{P_2}$

C $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$， $B_{P_1} \neq B_{P_2}$.

D $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$， $B_{P_1} \neq B_{P_2}$.

磁场的求解：方法二

稳恒磁场的安培环路定理： $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

1、载流长直螺线管的磁场： $$B = \mu_0 n I$$

2、载流螺绕环内的磁场： $$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

3、无限长载流圆柱体的磁场 $$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

1无限长载流圆柱体的磁场

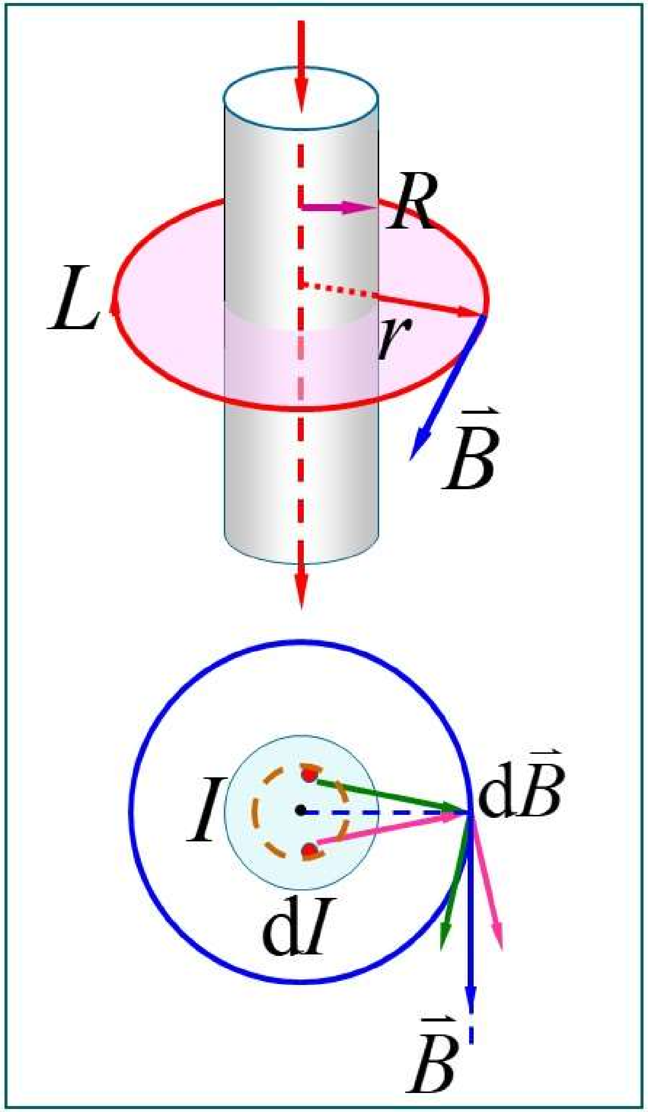
解 1）对称性分析 2）选取回路

$r > R$ $\qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

$2\pi rB = \mu_0 I$ $\qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

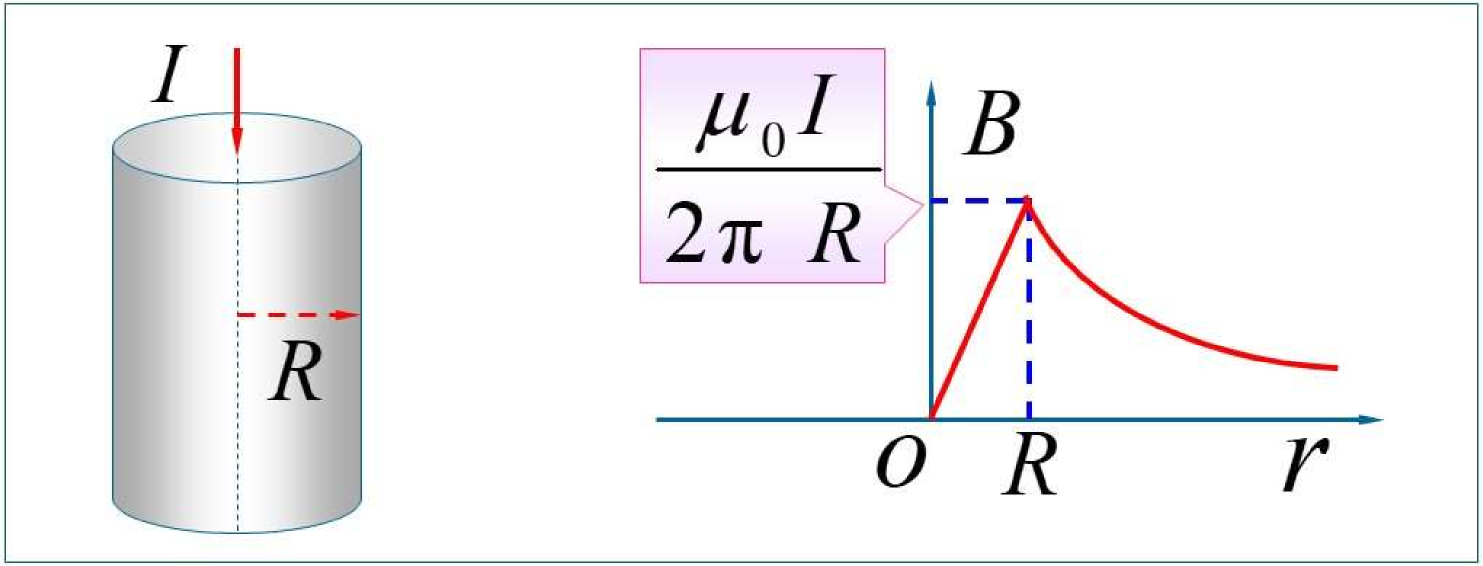
$0 < r < R$ $\qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

$2\pi rB = \dfrac{\mu_0 r^2}{R^2} I$ $\qquad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

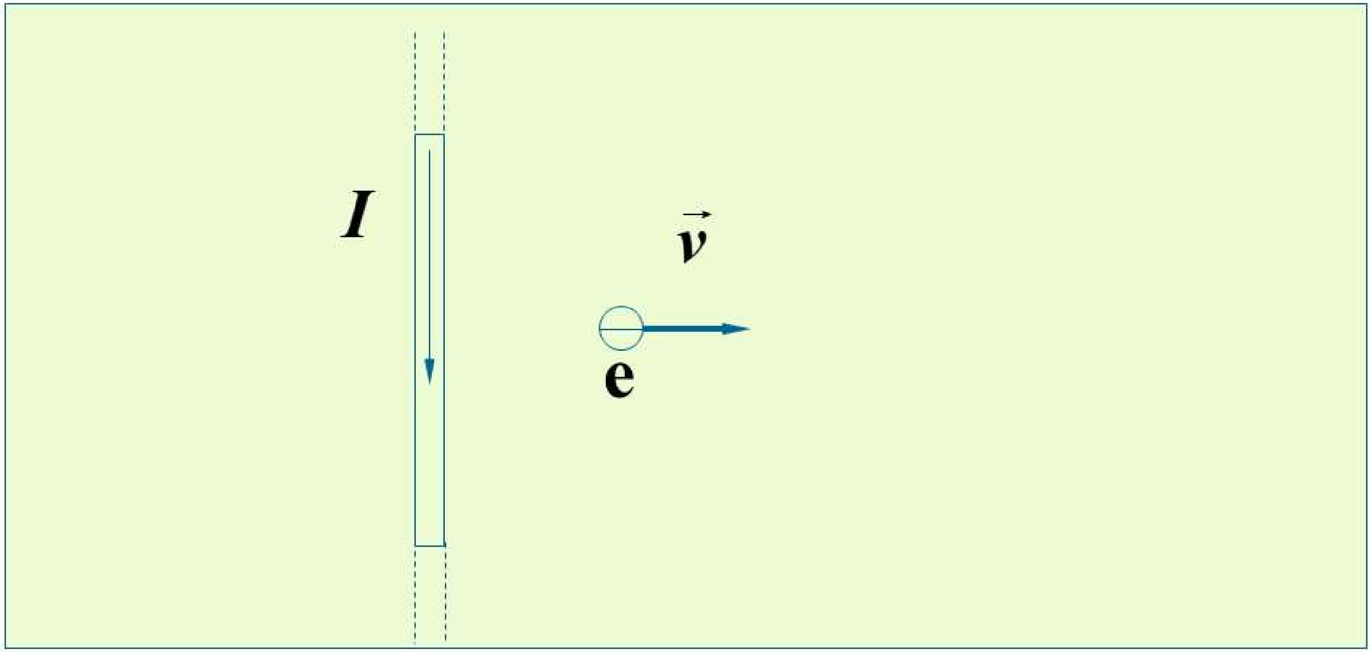


$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0<r<R, & B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r>R, & B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



2.一无限大平面导体薄板,自上而下均匀通以电流,电流面密度为i(即单位宽度上的电流强度)，(1)求板外空间任一点的磁感应强度的大小和方向；(2)如有一粒子(m，q)以初速v沿平板法线方向向外运动，则至少电子最初距板多远时才不会与板相撞。



解： $\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$

1、选坐标（如图所示）

2、找微元 $dI=idy$

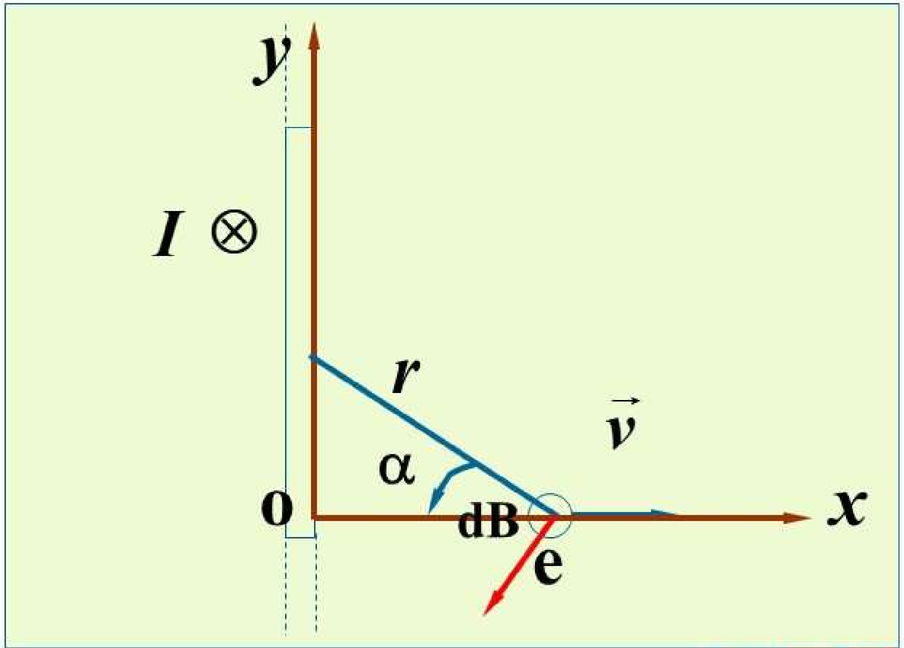
3、计算微元产生的场强 $dB=\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi r}$

4、标出微元产生场强的方向

5、求出载流导体的场强

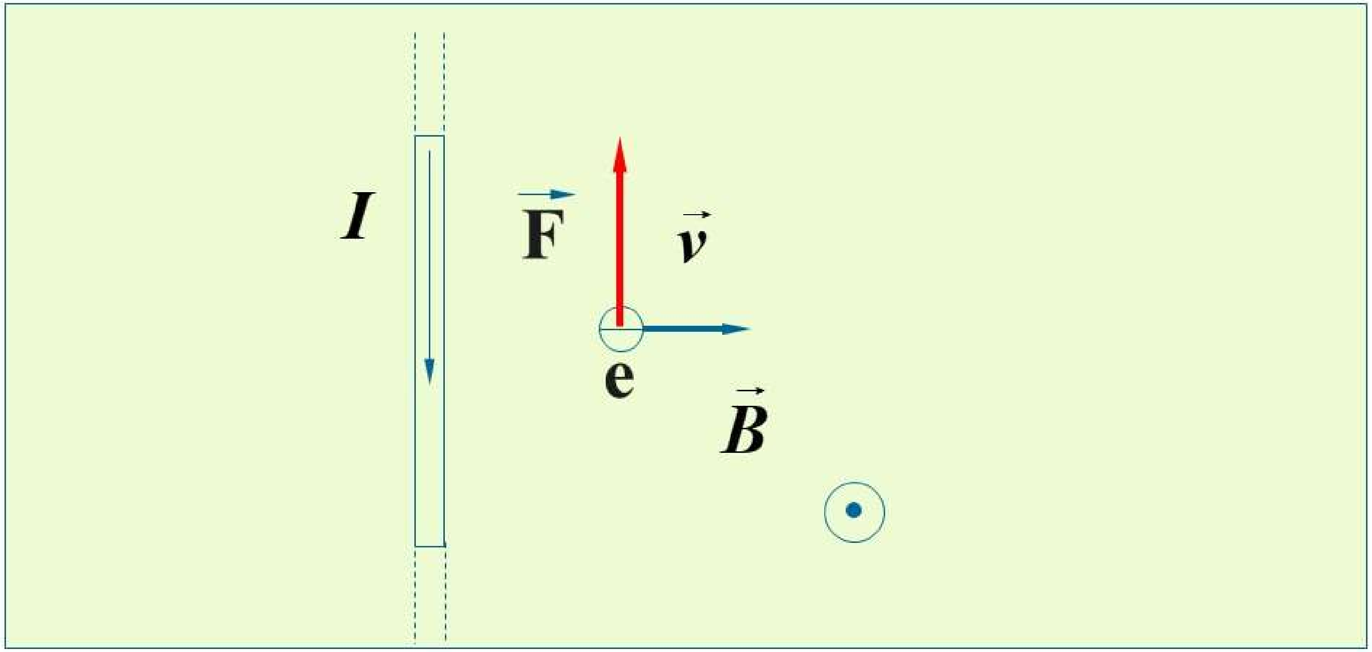
$$dB_y=-\frac{\mu_0 dI}{2\pi r}\cos\alpha$$

$$B_y=\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{\mu_0 xidy}{2\pi(x^2+y^2)}$$



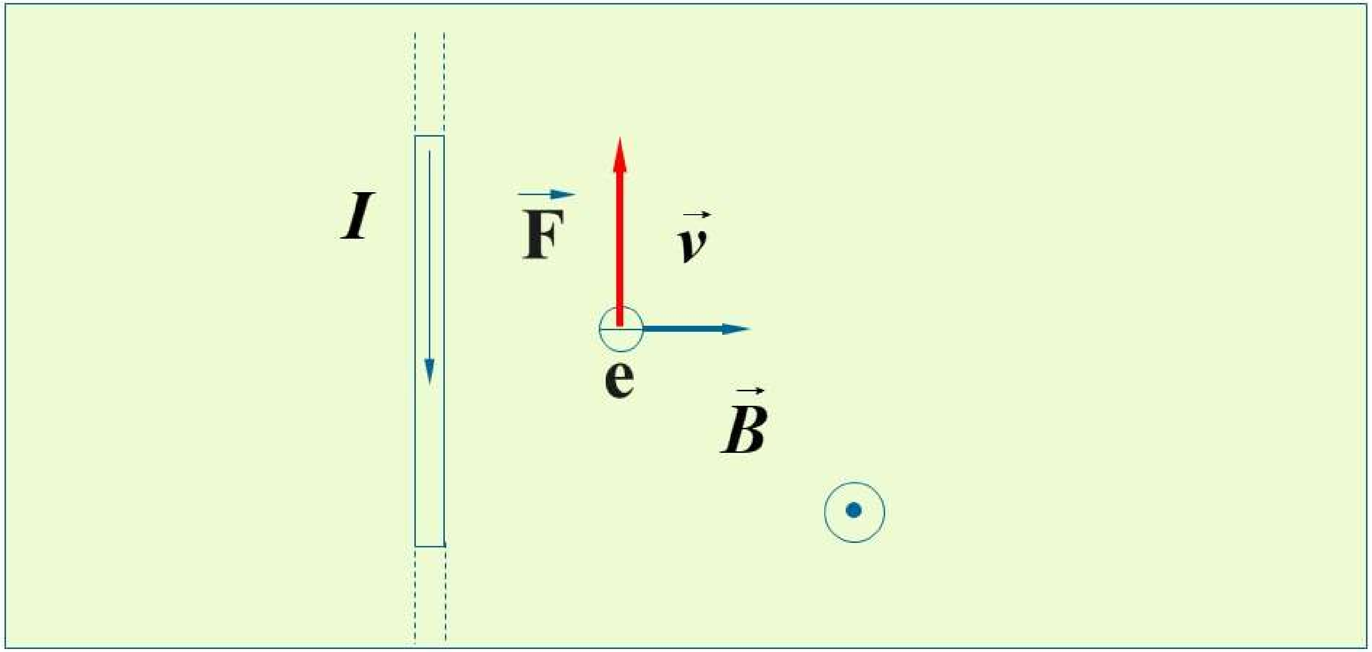
$$y = tg\alpha \qquad dy = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$B_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} -\frac{\mu_0 i d\alpha}{2\pi} = -\frac{\mu_0}{2} i$$



$$F = qvB = \frac{1}{2}\mu_0 iqv = m\frac{v^2}{R}$$

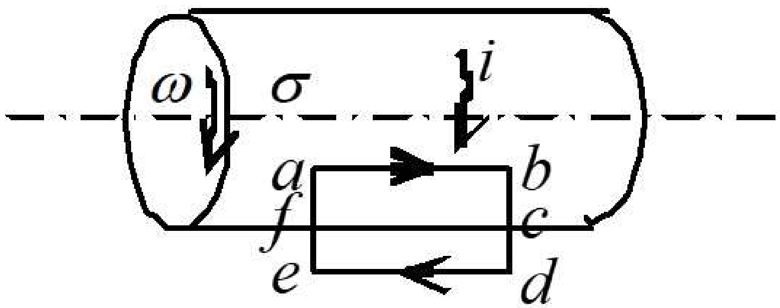
$$R = \frac{2mv}{\mu_0 iq}$$



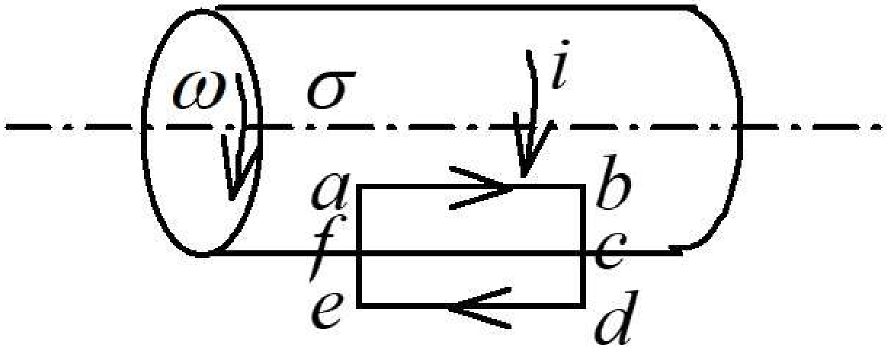
3、一半径为*R*的均匀带电无限长直圆筒，电荷面密度为*σ*，该筒以角速度*ω*绕其轴线匀速旋转。试求圆筒内部的磁感应强度。

解：如图所示，圆筒旋转时相当于圆筒上具有同向的面电流密度*i*，

$$i = 2\pi R\sigma\omega/(2\pi) = R\sigma\omega$$



$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$



$$B\overline{ab} = \mu_0 i\overline{ab}$$

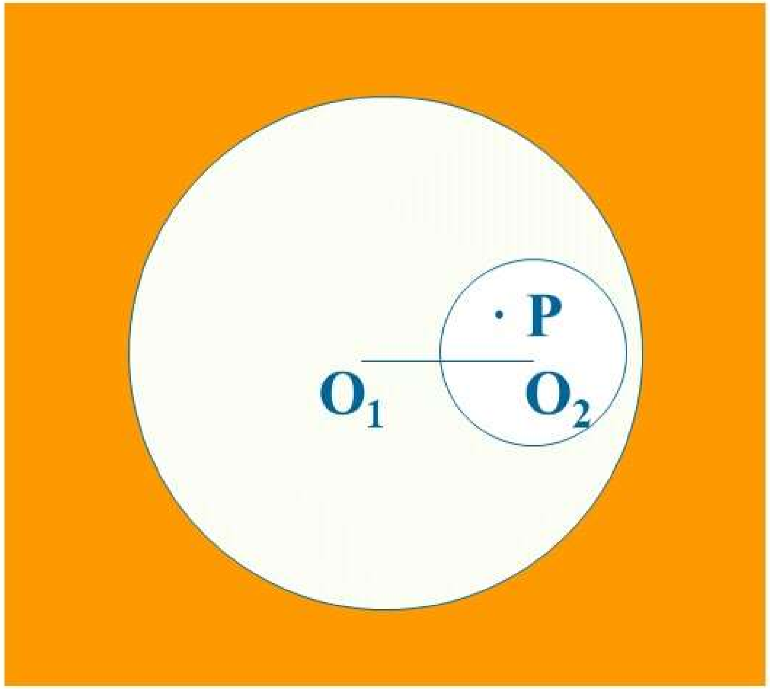
$$B = \mu_0 i = \mu_0 R\sigma\omega$$

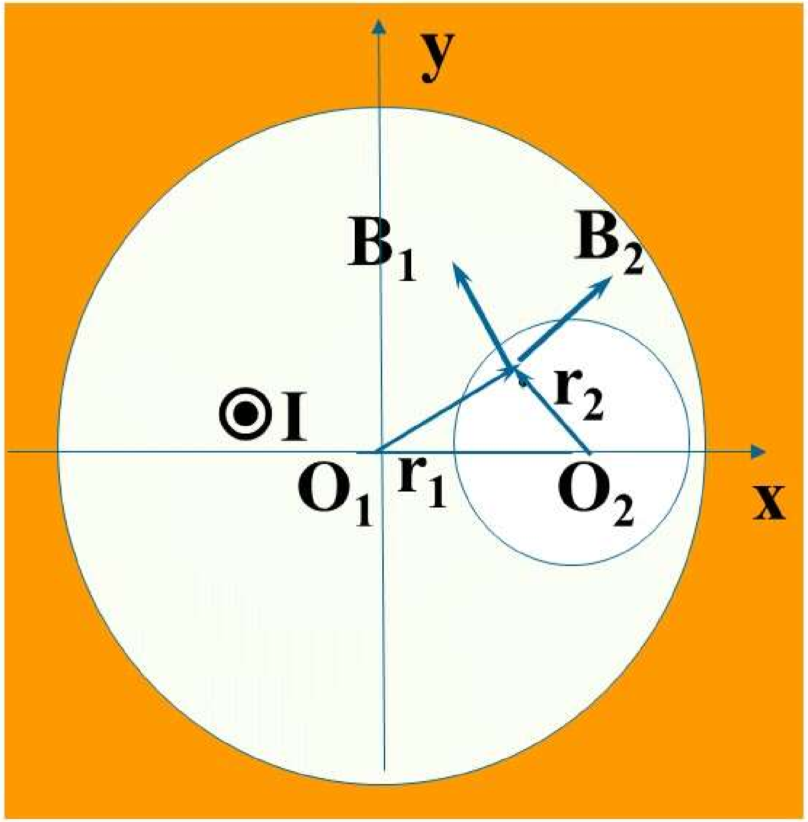
圆筒内部为均匀磁场，磁感强度的大小为

$$B = \mu_0 R\sigma\omega$$

方向平行于轴线朝右.

4、如图，一无限长圆柱形导体，横截面半径为R，在导体内有一半径为a的圆柱形孔，它的轴平行于导体轴且与它相距b，设导体中载有均匀分布的电流I，求孔内任意一点P的磁感应强度B的表达式。





解：方法一：矢量法

设：电流方向沿 z 轴。则圆柱体内任一点P的磁场可看作：一个无洞的半径为R的载流J的圆柱体与另一个半径为a载流 - J 的圆柱体的迭加。

而：$$J=\frac{i}{\pi(R^2-a^2)}$$

无洞时：由安培环路定理得

$$B_1=\frac{1}{2}\mu_0 J r_1$$ 矢量式：$$\vec{B}_1=\frac{1}{2}\mu_0 J\vec{k}\times\vec{r}_1$$

同理：在空洞处，载流-J的圆柱体在P点的磁场

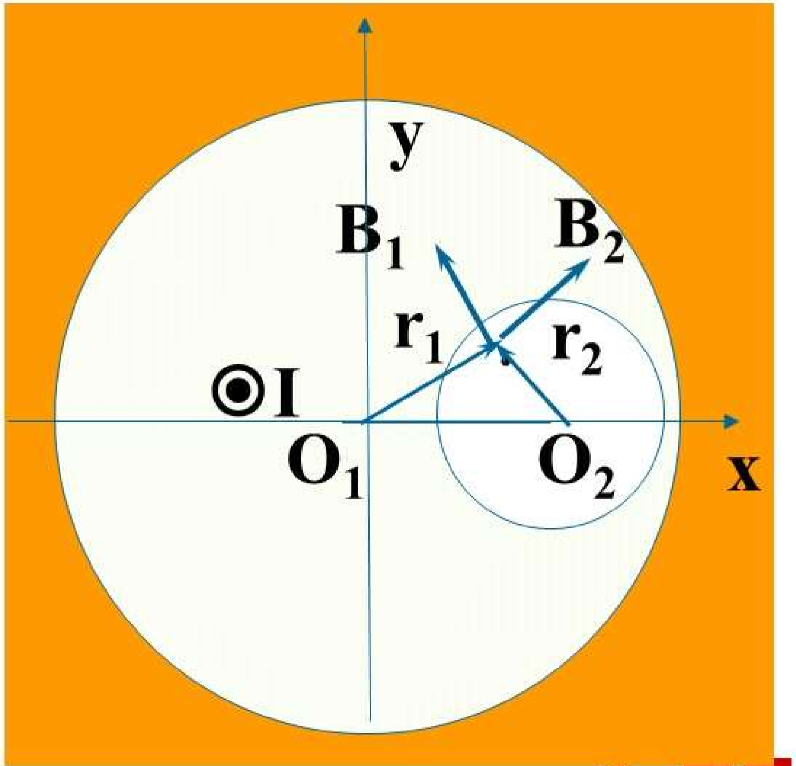
$$B_2 = -\frac{1}{2}\mu_0 J r_2 \quad \text{矢量式：} \quad \vec{B}_2 = -\frac{1}{2}\mu_0 J \vec{k} \times \vec{r}_2$$

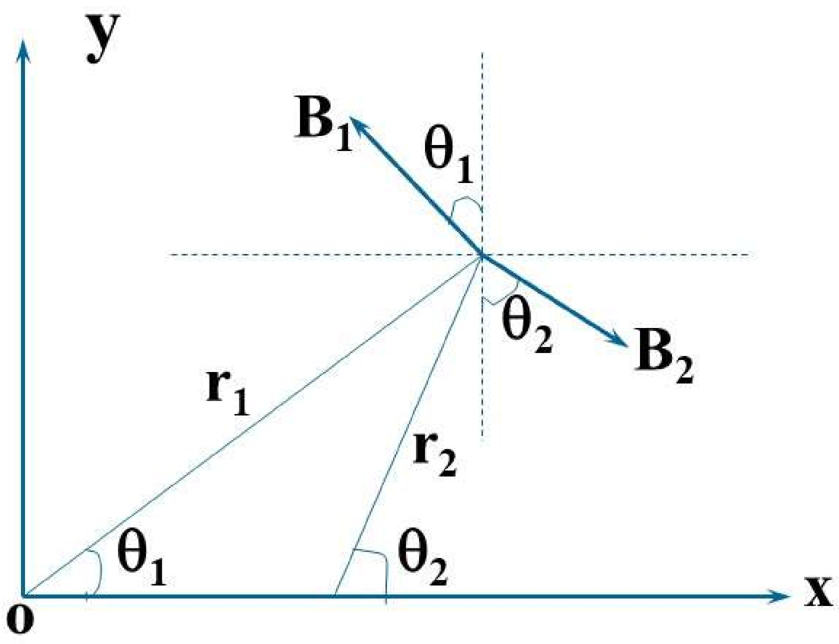
$$\therefore \vec{B} = \vec{B}_1 + B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 J \vec{k} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J \vec{k} \times \overrightarrow{O_1 O_2}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J b (\vec{k} \times \vec{i})$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J b \vec{j}$$





方法二：$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 J r_1$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\mu_0 J r_2$$

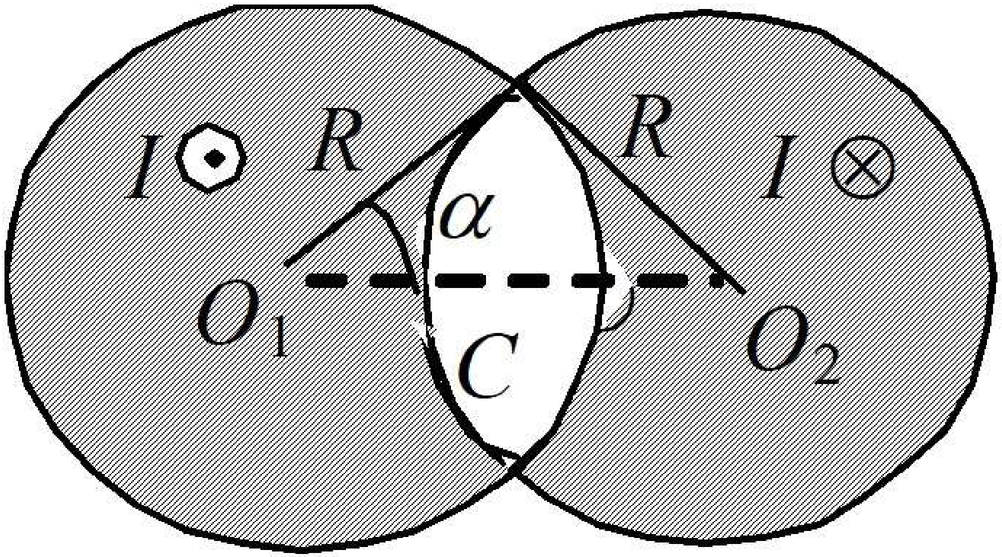
如图，将$\vec{B}_1$,$\vec{B}_2$在坐标轴投影得：

$$B_x = \frac{1}{2}\mu_0 J(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

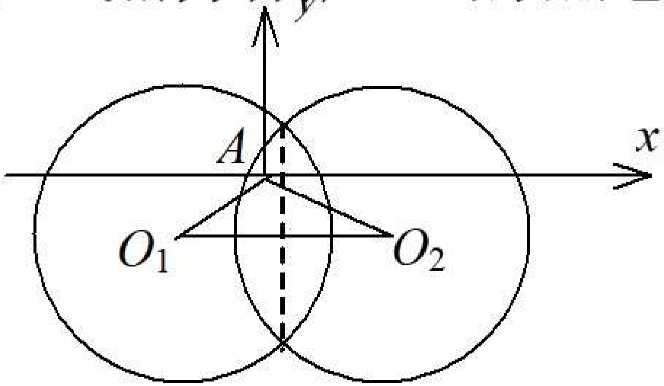
$$\because \quad r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta \qquad \therefore \quad B_x = 0$$

$$B_y = \frac{1}{2}\mu_0 J(r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) = \frac{1}{2}\mu_0 Jb$$

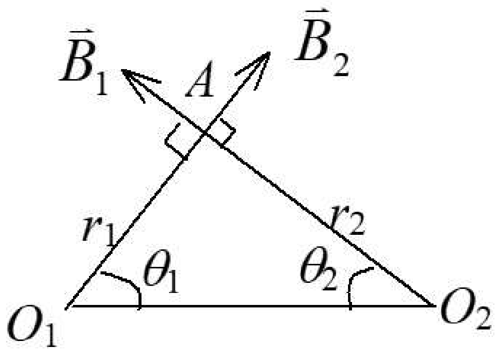
5、两彼此绝缘的无限长且具有缺口的圆柱形导线的横截面如图中阴影部分所示．它们的半径同为*R*，两圆心的距离1.60*R*，沿轴向反向通以相同大小的电流*I*．求在它们所包围的缺口空间*C*中的磁感强度．(cos36.87°＝0.8000)



解：如图，设在C区域中的任一点A到两圆心的距离分别为r_1、r_2，r_1、r_2与两圆心连线的夹角分别为θ_1、θ_2. 假定C中也流有与导线中的电流密度相同的一正一反正好抵消的电流，并令导线中的电流密度为J，则两导线在A点分别产生的磁感强度为：



$$B_1 = \frac{\mu_0 J \pi r_1^2}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 J}{2} r_1$$



$$B_2 = \frac{\mu_0 J \pi r_2^2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 J}{2} r_2$$

总磁感强度 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

投影： $B_x = B_{1x} + B_{2x} = -B_1 \sin\theta_1 + B_2 \sin\theta_2$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J(r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1) = 0$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = B_1 \cos\theta_1 + B_2 \cos\theta_2$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J(r_1 \cos\theta_2 + r_2 \cos\theta_2)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 J(1.6R) = 0.8\mu_0 JR$$

而$J = I/S$，其中S为一根导线的横截面积.
由题图可得

$$S = \pi R^2 - 2[\pi R^2 \alpha / \pi - 0.8R \cdot R\sin\alpha]$$

又 $\alpha = \cos^{-1} 0.8$

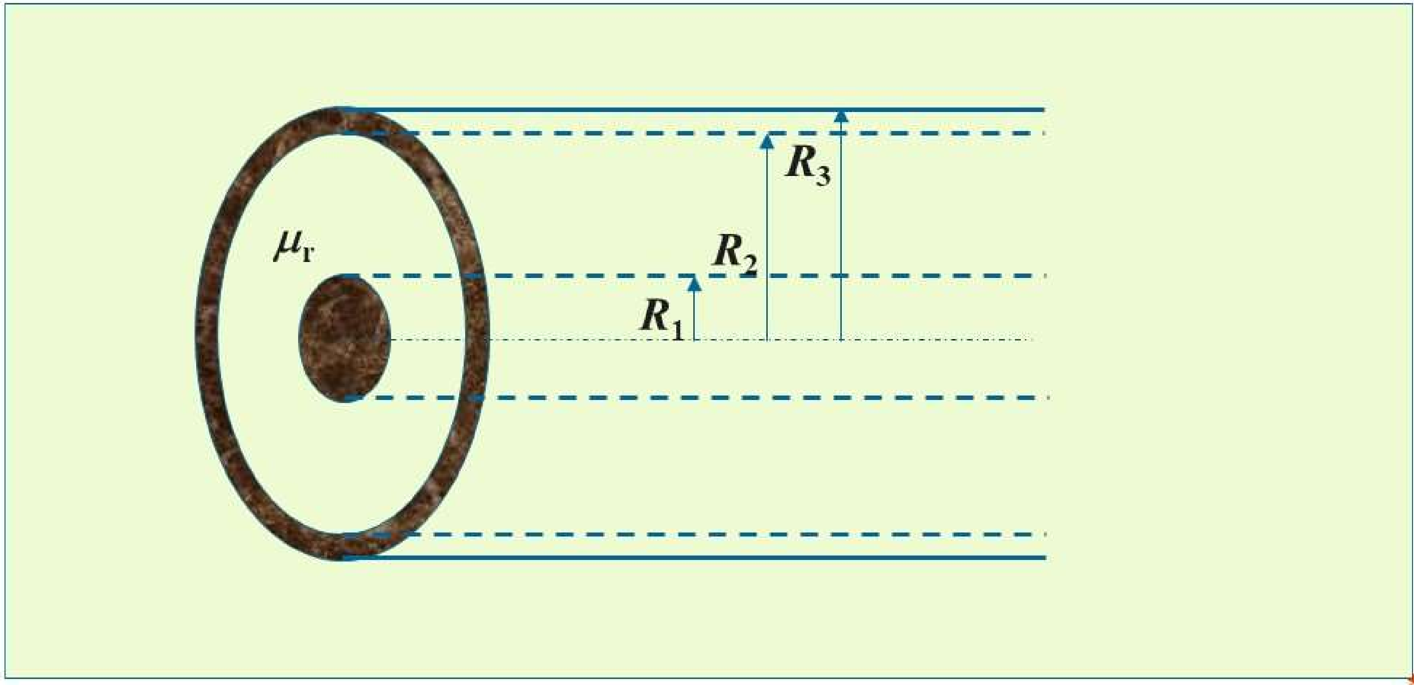
$\approx 36.87°$ ≈ 0.6435 rad， $\sin\alpha = 0.6$

$\therefore$ $S = R^2[\pi - 2\alpha + 2 \times 0.8 \times 0.6] = 2.81R^2$

$\therefore$ $J = I/(2.81R^2)$

$$B = B_y = 0.285\mu_0 I / R$$

5.如图所示，一根长直同轴电缆，内、外导体之间充满磁介质，磁介质相对磁导率为μ_r（μ_r<1），导体的磁化可以忽略不计。电缆沿轴向有稳恒电流I通过。内、外导体上电流的方向相反，几何尺寸如图。求空间各区域的磁感应强度和磁化强度；磁介质表面的磁化电流



解：根据安培环路定理：$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I$

$$H\, 2\pi r = \sum I$$

$$H = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi R^2} r & r < R_1 \\ \dfrac{I}{2\pi r} & R_1 \le r < R_2 \\ \dfrac{I}{2(R_3^2 - R_2^2)}(r^2 - R_2^2) & R_2^2 \le r < R_3^2 \\ 0 & r \ge R_3 \end{cases}$$

（1）利用： $B=\mu_0\mu_r H$

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r & r<R_1\\ \dfrac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r} & R_1\le r<R_2\\ \dfrac{\mu_0 I}{2(R_3^2-R_2^2)}(r^2-R_2^2) & R_2^2\le r<R_3^2\\ 0 & r\ge R_3\end{cases}$$

利用： $M=(\mu_r-1)H$

$$M=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi r} & R_1\le r<R_2 \\ 0 & R_2^2\le r<R_3^2 \\ 0 & r\ge R_3 \end{cases}$$

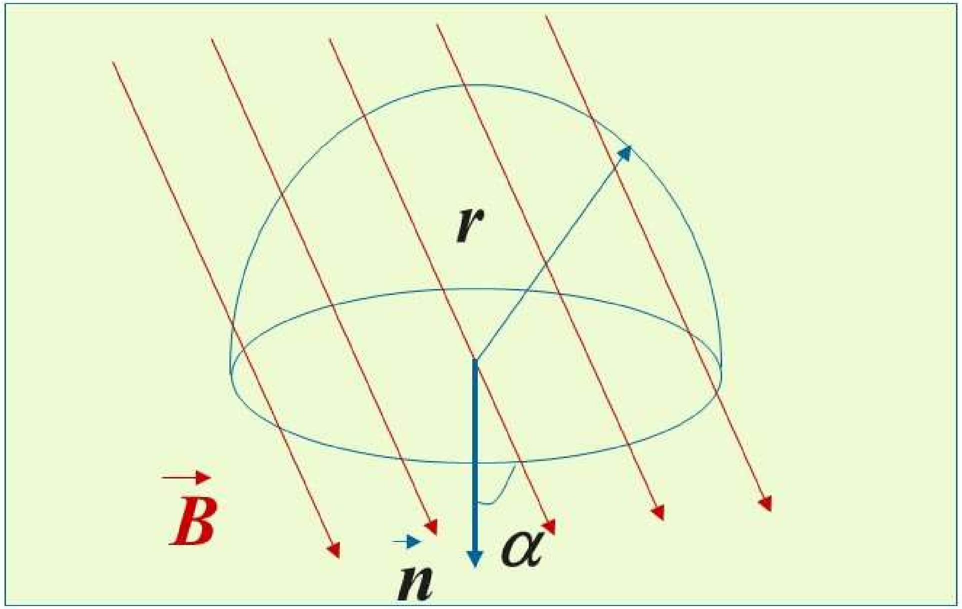
（2） $$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}=\sum I_s$$

$$I_{s1}=M_2(R_1)2\pi R_1=(\mu_r-1)I$$
$$I_{s2}=-M_2(R_2)2\pi R_2=-(\mu_r-1)I$$

对抗磁质（ $\mu_r<1$），在磁介质内表面（$r=R_1$ ），磁化电流与内导体传导电流方向相反；在磁介质外表面（ $r=R_2$ ），磁化电流与外导体传导电流方向相反。

题型5、求磁通量

1.均匀磁场的磁感强度与半径为r的圆形平面的法线的夹角为α，今以圆周为边界，作一个半球面S，则通过S面的磁通量为多少？



解： 1. 判断磁场的分布

2. 找微元 $d\vec{s}$

3. 做一封闭曲面 $\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$

$$\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}=\iint_{s_1}\vec{B}\cdot d\vec{s}+\iint_{s_2}\vec{B}\cdot d\vec{s}=0$$

$$\iint_{s_1}\vec{B}\cdot d\vec{s}=-\iint_{s_2}\vec{B}\cdot d\vec{s}=-B\pi r^2\cos\alpha$$

2. 一电子以速度 v 垂直地进入磁感应强度为 B 的均匀磁场中。求此电子在磁场中运动轨道所围的面积内的磁通量是多少？

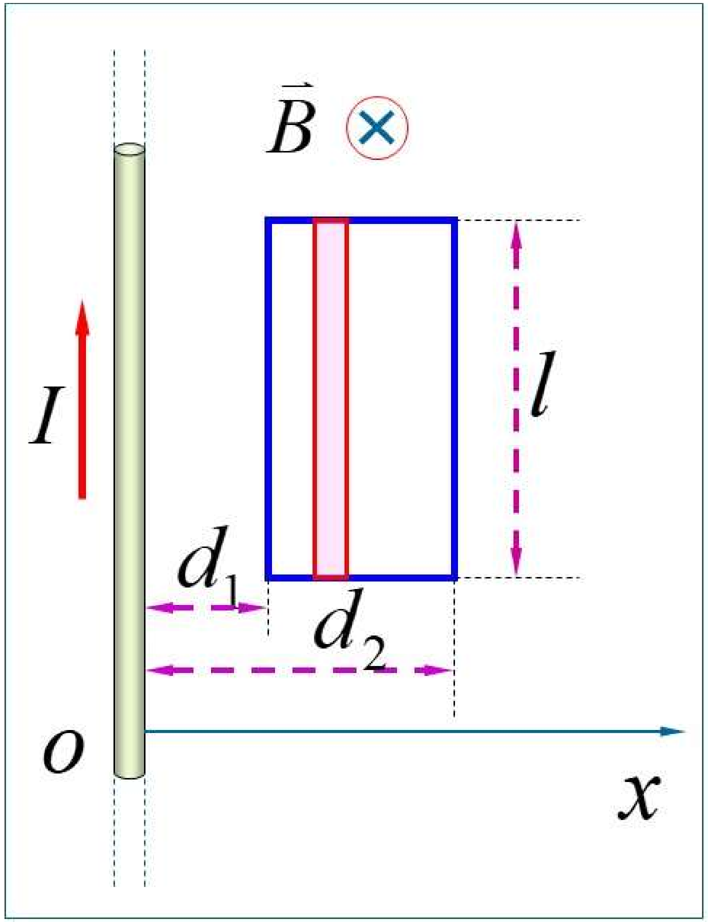
解：　∵ 半径　$R=\dfrac{m_e v}{eB}$

$$B=\frac{m_e v}{eR}$$

磁通量

$$\Phi=BS=B\cdot\pi R^2=\pi m_e R v/e$$

3 如图载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量.



解 先求 $\vec{B}$，对变磁场给出$\mathrm{d}\Phi$后积分求Φ

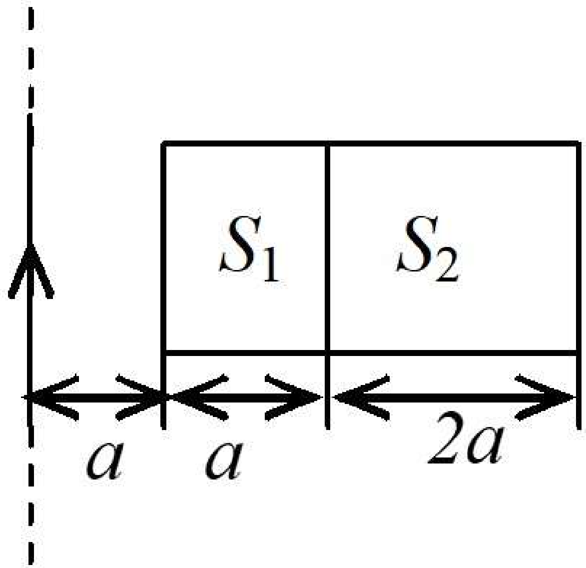
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \vec{B}/\!/\vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

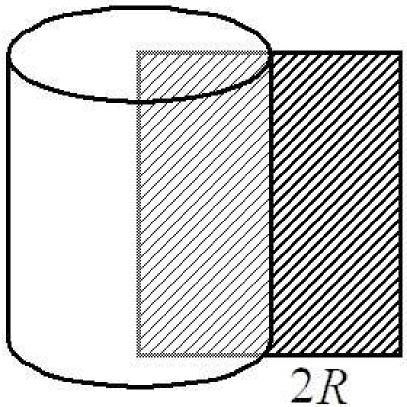
$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

4、 如图，在无限长直载流导线的右侧有面积为S1和S2的两个矩形回路．两个回路与长直载流导线在同一平面，且矩形回路的一边与长直载流导线平行．则通过面积为S1的矩形回路的磁通量与通过面积为S2的矩形回路的磁通量之比为 1:1 ．



5、一无限长圆柱形铜导体,半径为*R*,通以均匀分布的*I*今取一矩形平面*S*（长为*L*，宽为2*R*），位置如图，求通过该矩形平面的磁通量。



解：在圆柱体内部与导体中心轴线相距为r处的磁感强度的大小，由安培环路定律可得：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r \qquad (r\le R)$$

因而，穿过导体内画斜线部分平面的磁通Φ_1为

$$\Phi_1=\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int B\,\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} rL\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 LI}{4\pi}$$

在圆形导体外，与导体中心轴线相距r处的磁感强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\qquad (r>R)$$

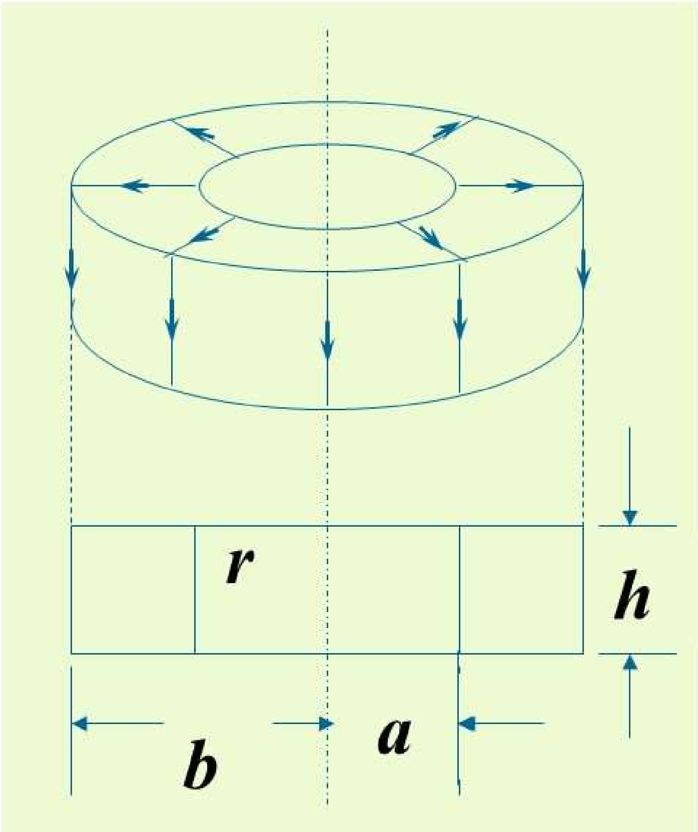
因而，穿过导体外画斜线部分平面的磁通$\varPhi_2$为

$$\varPhi_2=\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_R^{2R}\frac{\mu_0 IL}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln 2$$

穿过整个矩形平面的磁通量

$$\varPhi=\varPhi_1+\varPhi_2=\frac{\mu_0 LI}{4\pi}+\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln 2$$

6.如图，一截面为长方形的环式螺线管，共N匝, 尺寸如图, 导线通有电流I,管内充满相对磁导率为μ_r的介质.求：管内的磁通量。



解：（1）分析载流导体的类型

（2）分析场的对称性

（3）根据对称性选安培环路

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \qquad a < r < b$$

$$\therefore \quad H = \frac{NI}{2\pi r}$$

（4） $$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$$

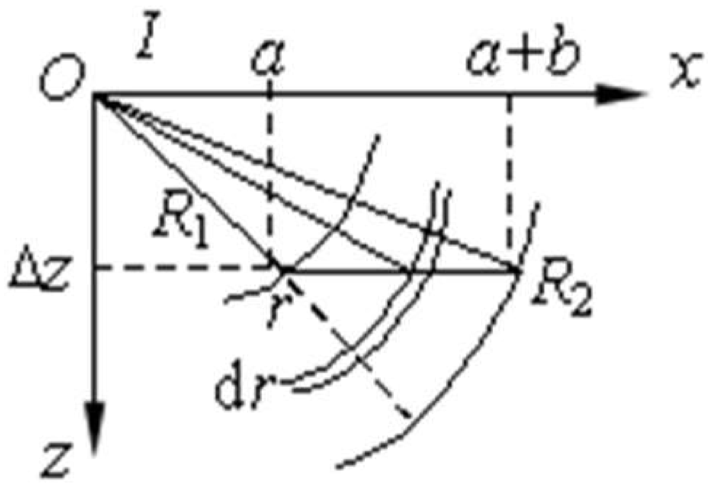
$$d\phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}h\cdot dr$$

（5） 求出总的磁通量

$$\therefore \quad \phi_m = \int d\phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}h\cdot dr$$

$$= \frac{\mu_0\mu_r NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

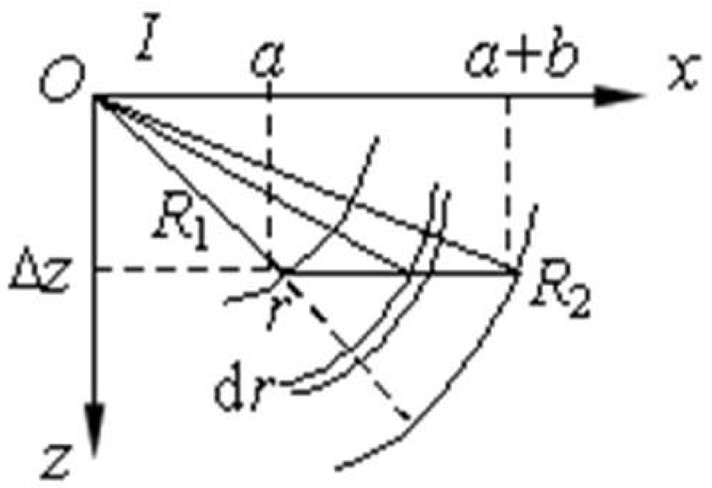
7.在无限长直载流导线产生的磁场中，有一个与导线共面的矩形平面线圈*cdef*，线圈*cd*和*ef*边与长直导线平行，线圈尺寸和其与长导线的距离如图所示．现在使平面线圈沿其平面法线方向*n*，（平行*z*轴）移动距离Δz ，求：在此位置上通过线圈的磁通量．



解：如图所示，平面沿z轴正向平行移动Δz后，在距离电流的R_1-R_2区间的磁感线能穿过该平面。其中

$$R_1=\sqrt{\Delta z^2+a^2}$$

$$R_2=\sqrt{\Delta z^2+(a+b)^2}$$

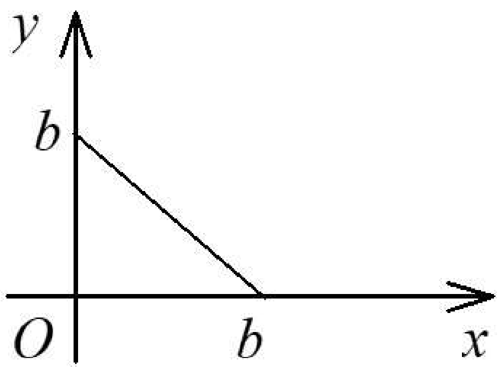


$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int B \,\mathrm{d}S$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h \,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi} \ln \frac{\Delta z^2 + (a+b)^2}{\Delta z^2 + a^2}$$

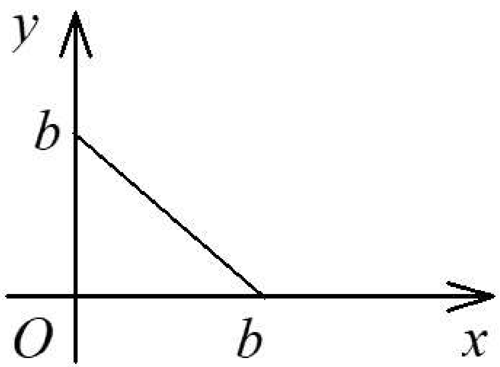
8有一三角形闭合导线，如图放置．在这三角形区域中的磁感强度为 $\vec{B}=B_0x^2\mathrm{e}^{-at}\vec{k}$ ，式中$\boldsymbol{B_0}$和$\boldsymbol{a}$是常量，$\boldsymbol{k}$为z轴方向单位矢量，求三角形区域的磁通量。



$$\Phi=B_0\mathrm{e}^{-at}\int_0^b(b-x)\mathrm{d}x$$

$$=(b^2/2)B_0\,e^{-at}$$

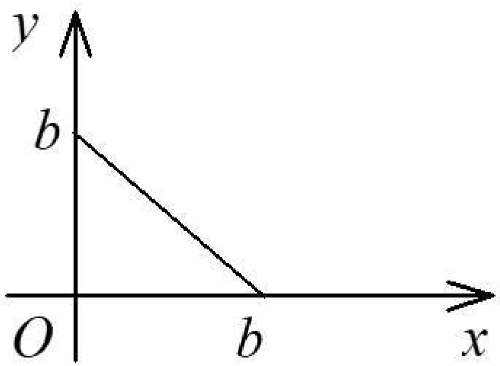
9有一三角形闭合导线，如图放置．在这三角形区域中的磁感强度为 $\vec{B}=B_0 y\mathrm{e}^{-at}\vec{k}$ ，式中B_0和a是常量，k为z轴方向单位矢量，求三角形区域的磁通量。



$$\Phi=B_0\mathrm{e}^{-at}\int_0^b (b-y)\mathrm{d}y$$

$$=(b^2/2)B_0\,e^{-at}$$

10有一三角形闭合导线，如图放置．在这三角形区域中的磁感强度为$\vec{B}=B_0x^2y\mathrm{e}^{-at}\vec{k}$，式中$\boldsymbol{B_0}$和$\boldsymbol{a}$是常量，$\boldsymbol{k}$为$z$轴方向单位矢量，求三角形区域的磁通量。



$$\Phi = B_0 e^{-at} \int_0^b \int_0^{b-x} x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= B_0 e^{-at} \int_0^b x^2 [(b-x)^2/2] \mathrm{d}x$$

$$= (b^5/60) B_0 e^{-at}$$

谢谢各位同学