哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

大 学 物 理

----电磁感应

姜海丽

Email：jianghaili@hrbeu.edu.cn

磁场

变化磁通量

感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

动生电动势

$$\int (v \times B) \bullet \mathrm{d}l$$

感生电动势

自感电动势 $-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

互感电动势 $-M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

磁场能量

$$w = \iiint_V \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V$$

自感磁能 $\frac{1}{2}Li^2$

互感磁能

$$MI_1I_2$$

典型题型

1、动生电动势的计算
2、感生电动势的计算
3、自感和互感问题的计算
4、磁场能量的计算

一、电动势

电流密度

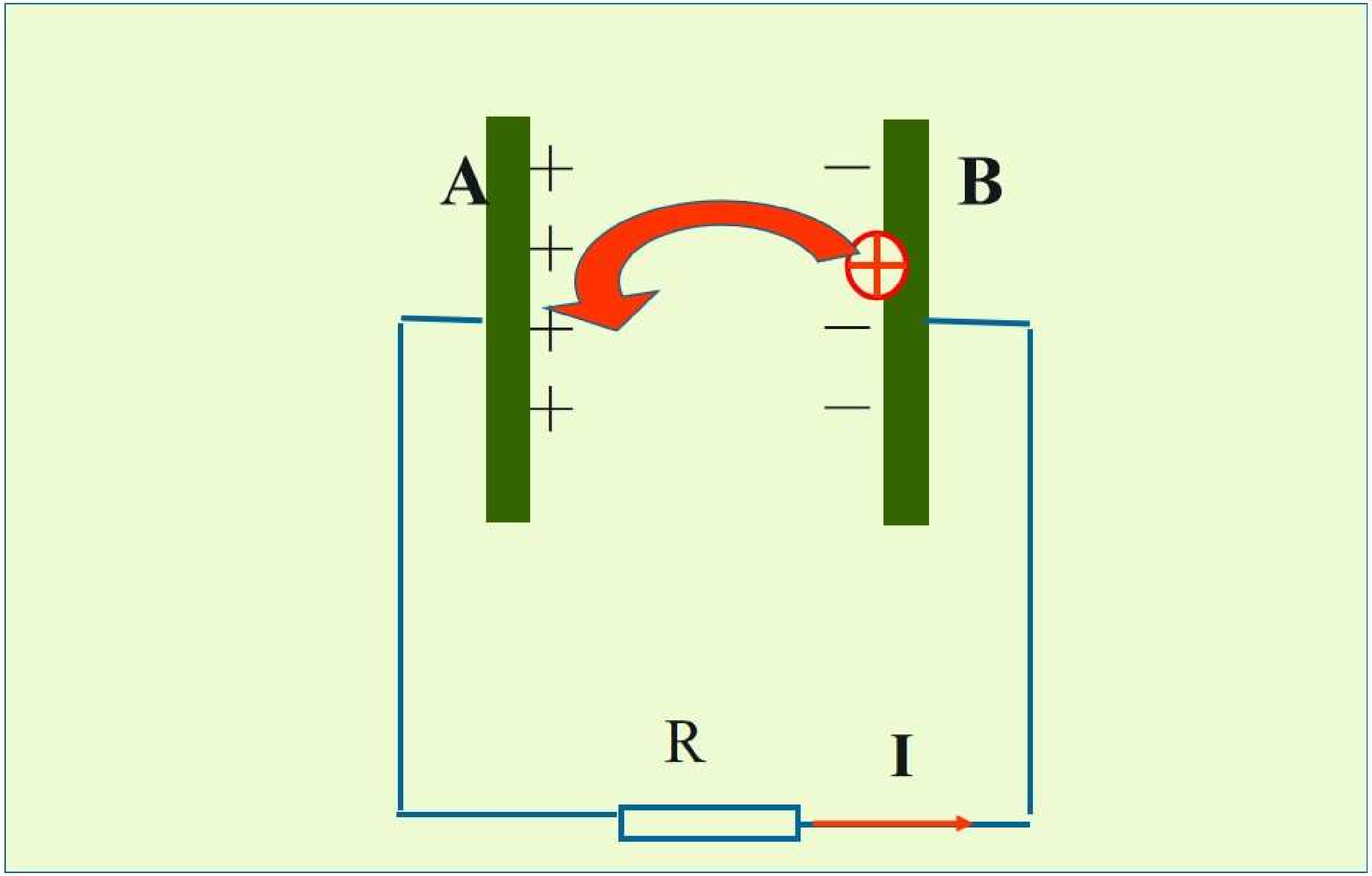
对于均匀粗细的导线，我们一般采用电流强度来描述导线中的电荷的定向运动。但如果导线的粗细、材质不均，或导体的形状不规范，则我们就需要了解电荷在导体中具体的运动方式，即电流在空间的分布了。因此引入电流密度矢量定义为通过空间某点单位垂直截面的电流强度，或者说是单位时间通过单位垂直截面的电量。

$$j = \lim_{\Delta S \longrightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \lim_{\Delta S \longrightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$$

方向：该点的电流方向

电动势

考虑平行板电容器的放电过程

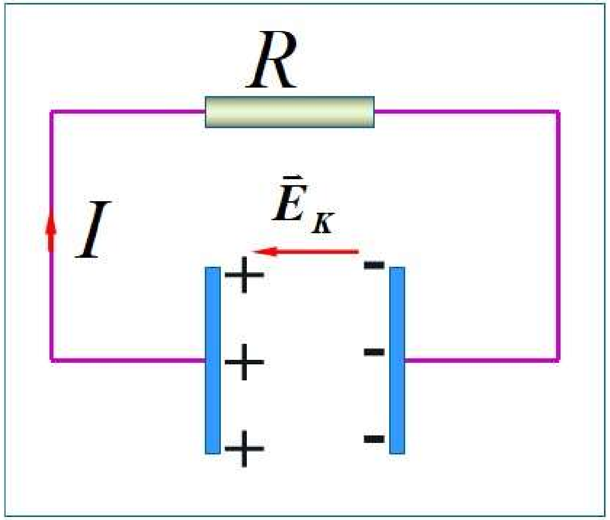


随电流的继续，两极板的电荷逐渐减少，不能产生稳定的电场，因而也不能形成恒定电流。因此，仅仅有不同电势的导体和导线还不能产生稳恒电流，为产生稳恒电流需要用其它方法（非静电作用，非静电力通常用F_k表示）使电子由A流回B，使电荷的分布不随时间变化，来保证A、B间的稳恒电场。

电源：能够提供非静电力以把其他形式的能量转化为电能的装置。

外电路中，电流由正极流向负极；在内电路，非静电力使电流由负极流向正极。

◆ 非静电电场强度 $\vec{E}_k$ 为单位正电荷所受的非静电力.



$$\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{q}$$

◆电动势的定义：电源将单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所做的功.

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \frac{\int_{-}^{+} q\vec{E}_K \cdot d\vec{l}}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

说明：1. ε是标量，单位伏特(V)。

2. 规定电动势的方向由低电势指向高电势。

3. 电动势的大小与外电路的电阻无关，它是用来描述电源作功本领的物理量。

电动势 ≠ 电势差

电动势与电势差（电压）是容易混淆的两个概念。电动势是表示非静电力把单位正电荷从负极经电源内部移到正极所做的功；而电势差则表示静电力把单位正电荷从电场中的某一点移到另一点所做的功。它们是完全不同的两个概念。

1. 法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

负号反映感应电动势的方向与磁通量变化的关系。
它是楞 次定律的数学表现。

1V＝1Wb/s

说明： 1）闭合回路由 N 匝密绕线圈组成

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$ （磁链）$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots = N\Phi$

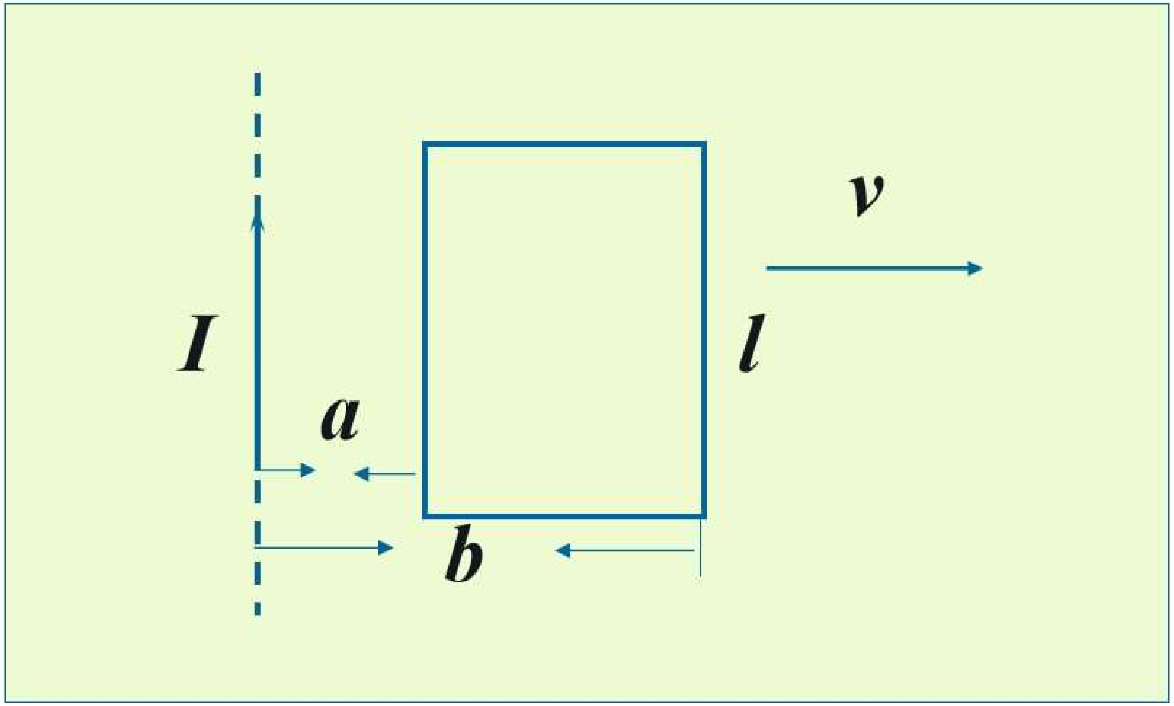
2）若闭合回路的电阻为 R ，感应电流为

$$I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内，流过回路的电荷

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

1. 如图，一长直导线中通有电流I，旁边有一与它共面的矩形线圈，长为l，宽为（b-a），线圈共有N匝，以速度v离开直导线。求该位置线圈中的感应电动势的大小和方向。



2. 动生电动势的计算

产生动生电动势的原因

动生电动势的非静电力场来源 ⟹ 洛伦兹分力

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{k}} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{m}}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\varepsilon = \int_O^P \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_O^P (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

1.规定导线的正方向O⇒P　　**2.选坐标**

3.找微元$\mathrm{d}\vec{l}$

4.确定微元处$\vec{v}$和$\vec{B}$

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (vB\sin\alpha) dl \cos\theta$$

5.积分求解

若$\varepsilon > 0$表示其方向与l方向相同，反之相反。

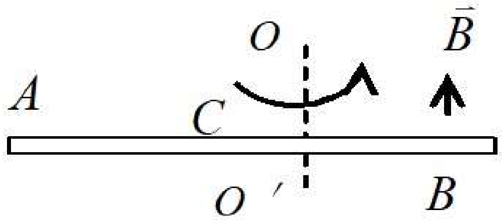
结论：平动：$\varepsilon = Blv$

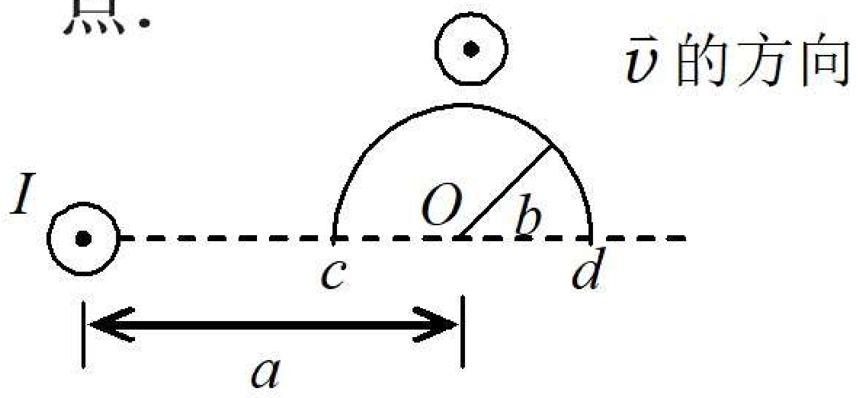
转动：$\varepsilon = \dfrac{1}{2} B\omega L^2$

1、如图所示，导体棒AB在均匀磁场B中 绕通过C点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴OO'转动（角速度与B同方向），BC的长度为棒长的1/3，则

（A）A点比B点电势高．　(B) A点与B点电势相等．

（C）A点比B点电势低．　(D) 有稳恒电流从A点流向B点．





2、载有恒定电流I的长直导线旁有一半圆环导线cd，半

圆环半径为b，环面与直导线垂直，且半圆环两端点连线的延长线与直导线相交，如图．当半圆环以速度沿平行于直导线的方向平移时，半圆环上的感应电动势的大小是?

解：连接CD，整个闭合回路 $\varepsilon = 0$

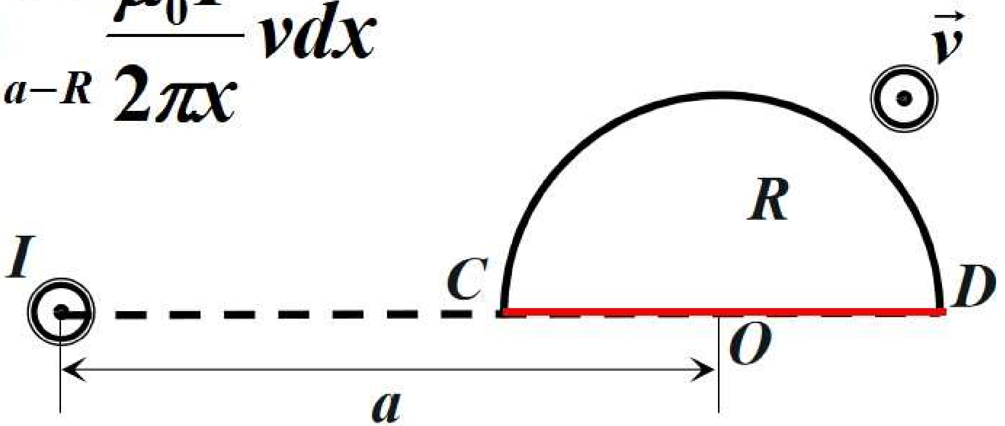
$$\varepsilon_{\overline{CD}} = \varepsilon_{\overset{\frown}{CD}}$$

$\vec{B}$

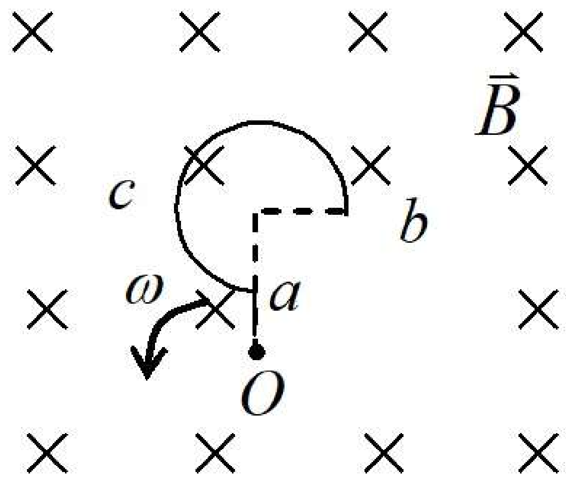
$$\varepsilon_{\overline{CD}} = -\int_{a-R}^{a+R} Bv\,dx = -\int_{a-R}^{a+R} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v\,dx$$

$$\varepsilon_{\overline{CD}} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+R}{a-R}$$

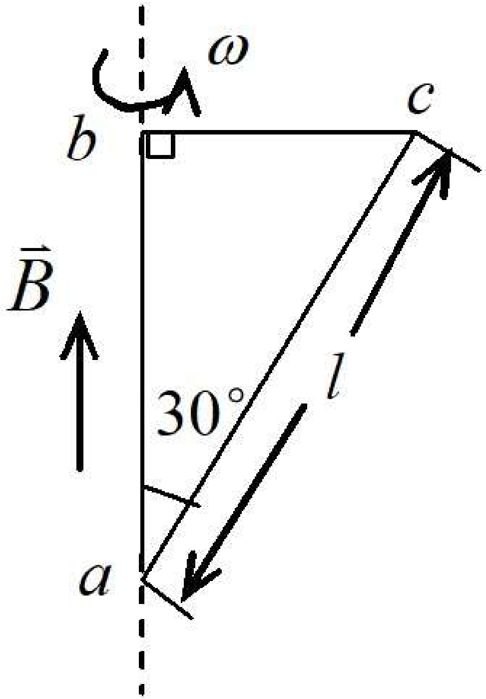
< 0 C端电势高



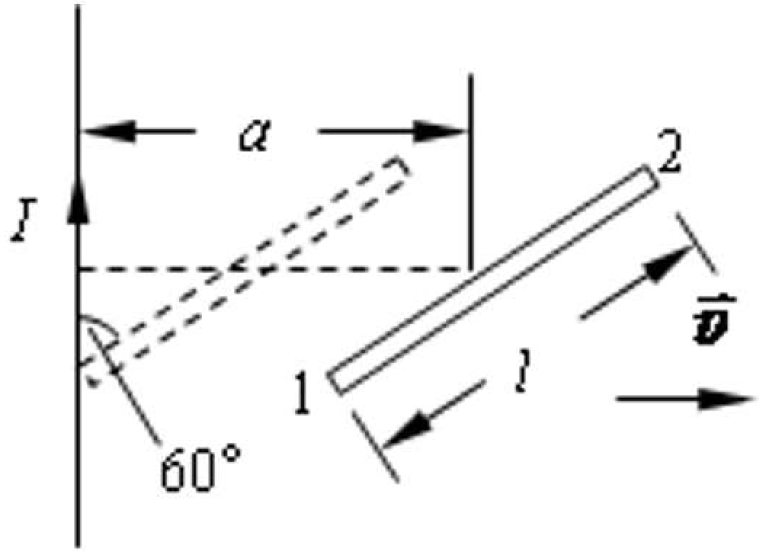
4、一导线被弯成如图所示形状，*acb*为半径为*R*的四分之三圆弧，直线段*Oa*长为*R*．若此导线放在匀强磁场中，的方向垂直图面向内．导线以角速度*w*在图面内绕*O*点匀速转动，则此导线中的动生电动势为 $\underline{\frac{5}{2}B\omega R^2}$ ，电势最高的点是 <u>*O*点</u>．



5、如图所示，一直角三角形*abc*回路放在一磁感强度为*B*的均匀磁场中，磁场的方向与直角边*ab*平行，回路绕*ab*边以匀角速度*w*旋转，则*ac*边中的动生电动势为 $l^2\omega B/8$，整个回路产生的动生电动势为 0.



6、无限长直导线载有电流I，其旁放置一段长度为l与载流导线在同一平面内且成60度的导线。计算当该导线在平面上以垂直于载流导线的速度v平移到该导线的中点距载流导线为a时，其上的动生电动势，并说明其方向。



$$B = \mu_0 I/(2\pi r)$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = vB\,\mathrm{d}l\cos 60^\circ$$

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}r/\cos 30^\circ$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = vB\,\mathrm{tg}\,30^\circ\,\mathrm{d}r$$

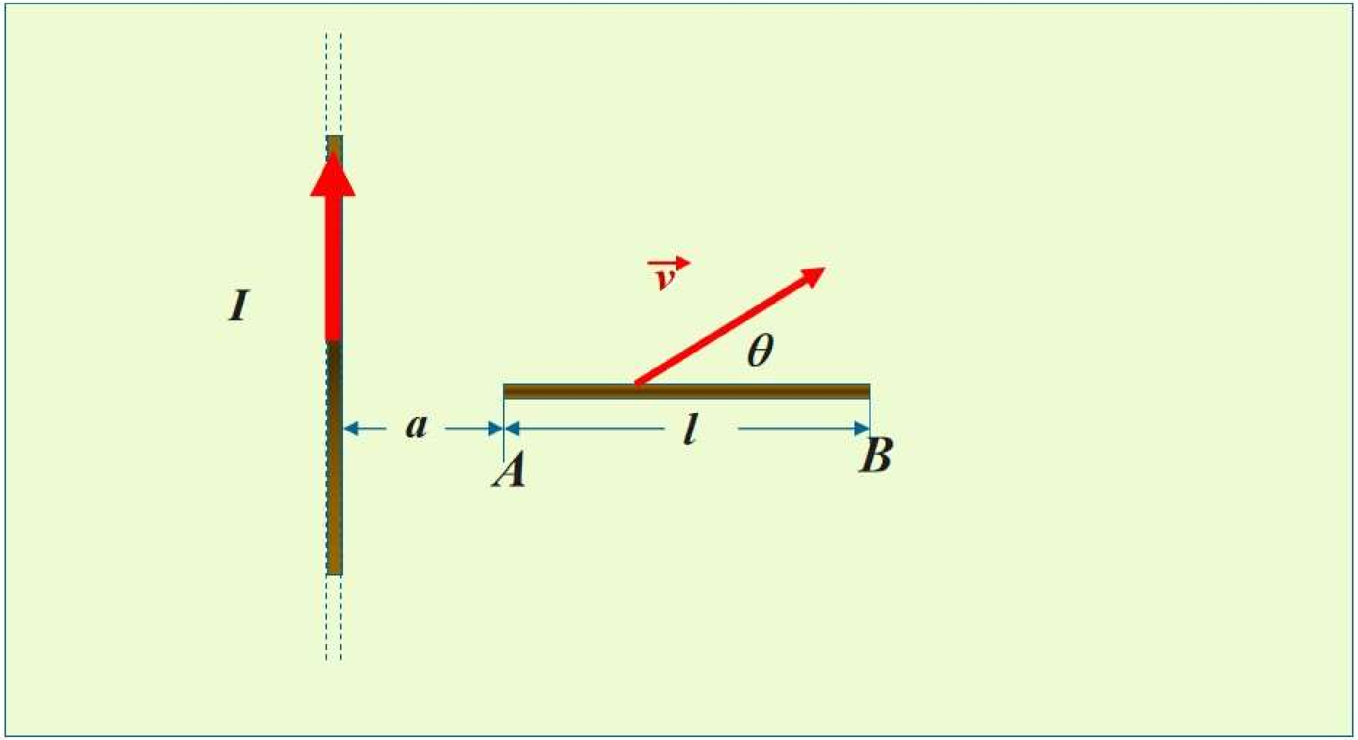
$$\varepsilon = \int_{r_1}^{r_2} vB\,\mathrm{tg}\,30^\circ\,\mathrm{d}r$$

$$r_2 = a+\sqrt{3}l/4$$

$$r_1 = a-\sqrt{3}l/4$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I v}{2\sqrt{3}\pi}\ln\frac{a+\sqrt{3}l/4}{a-\sqrt{3}l/4}$$

7.如图所示，一长直导线中通有电流I，有一垂直于导线、长度为l 的金属棒AB在包含导线的平面内，以恒定的速度沿与棒成θ角的方向移动．开始时，棒的A端到导线的距离为a，求任意时刻金属棒中的动生电动势，并指出棒哪端的电势高．



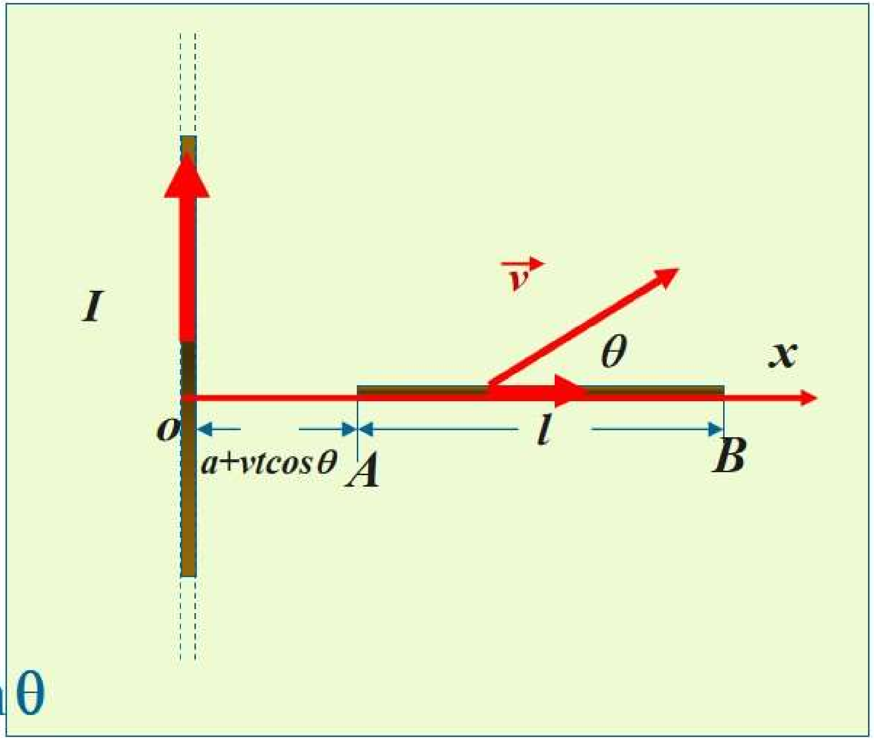
解： 1.规定导线的正方向$A \Rightarrow B$

2.选坐标

3.找微元$\vec{dx}$

4.确定微元处$\vec{v}$和$\vec{B}$

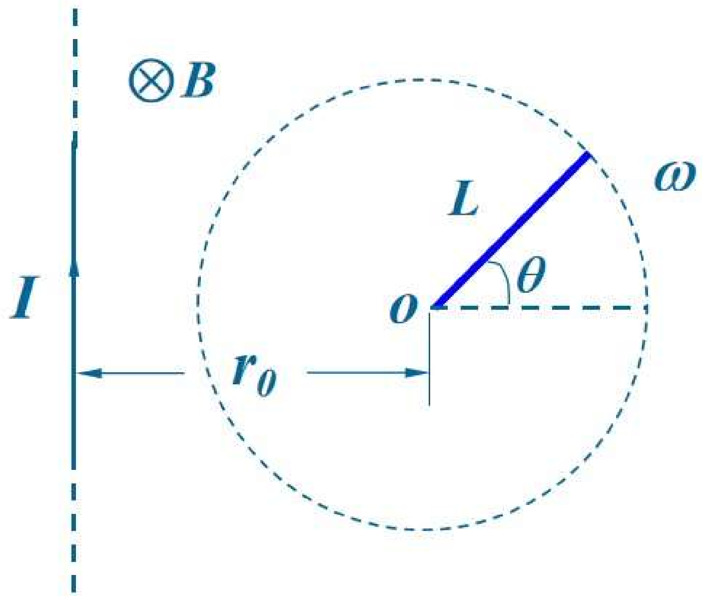
5.积分求解



$$\varepsilon_{AB}=\int_A^B(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=-\int_{a+vt\cos\theta}^{a+l+vt\cos\theta}vBdx\sin\theta$$

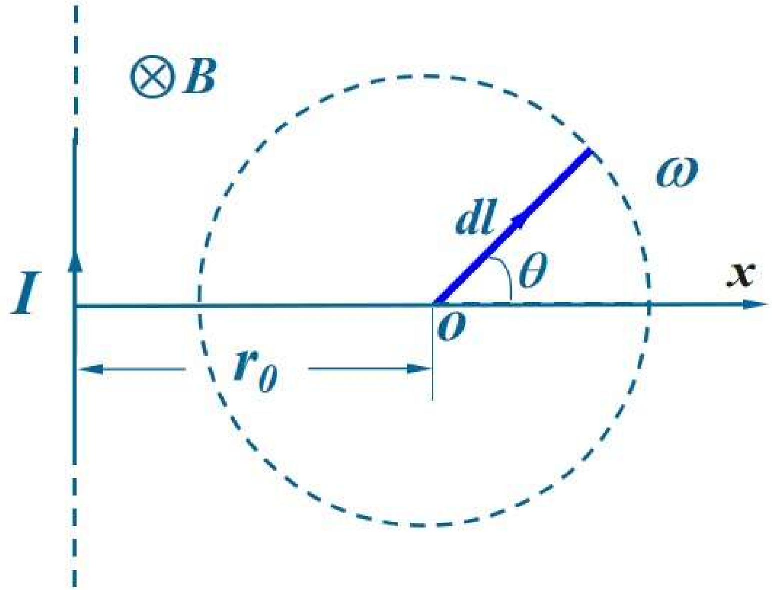
$$=-\int_{a+vt\cos\theta}^{a+l+vt\cos\theta}v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx\sin\theta=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\sin\theta\ln\frac{a+l+vt\cos\theta}{a+vt\cos\theta}$$

8、一无限长竖直导线上通有稳定电流I，电流方向向上。导线旁有一与导线共面、长为L的金属棒，绕其一端O在该平面内顺时针匀速转动，如图。转动角速度为ω，O点到导线的垂直距离为r_0 ($r_0>L$)。试求金属棒转到与水平面成θ角时，棒内感应电动势的大小和方向。



解：$\varepsilon = \int_{o}^{a} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$$= \int_{r_0}^{r_0 + L\cos\theta} \omega l \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dl$$



其中：$x - r_0 = l\cos\theta$

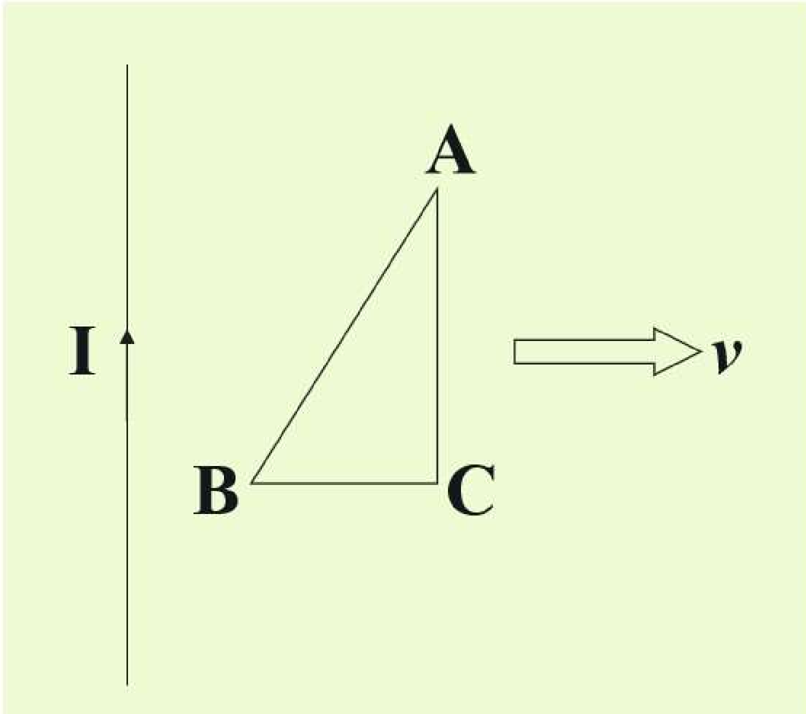
$$dx = dl\cos\theta$$

$$\varepsilon = \int_{r_0}^{r_0 + L\cos\theta} \omega \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left(\frac{x - r_0}{\cos\theta}\right) \cdot \frac{dx}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I \omega L}{2\pi\cos\theta} - \frac{\mu_0 I \omega r_0}{2\pi\cos^2\theta} \ln\frac{r_o + L\cos\theta}{r_0}$$

9、如图，一长直导线与直角三角形共面，已知：$AC=b$，且与I平行，$BC=a$，若三角形以v向右平移，当B点与长直导线的距离为d时。

求：三角形内感应电动势的大小和方向。



解：

$$\varepsilon_{AC}=\int(\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=vBb=\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)}vb$$

$$\varepsilon_{AB}=\int(\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int vB\cos\theta dl$$

$$=\int\frac{\mu_0 I}{2\pi x}v\cos\theta\cdot\frac{dx}{\sin\theta}=\int\frac{\mu_0 I}{2\pi x}v\frac{b}{a}dx=\frac{\mu_0 Ivb}{2\pi a}\ln\frac{a+d}{d}$$

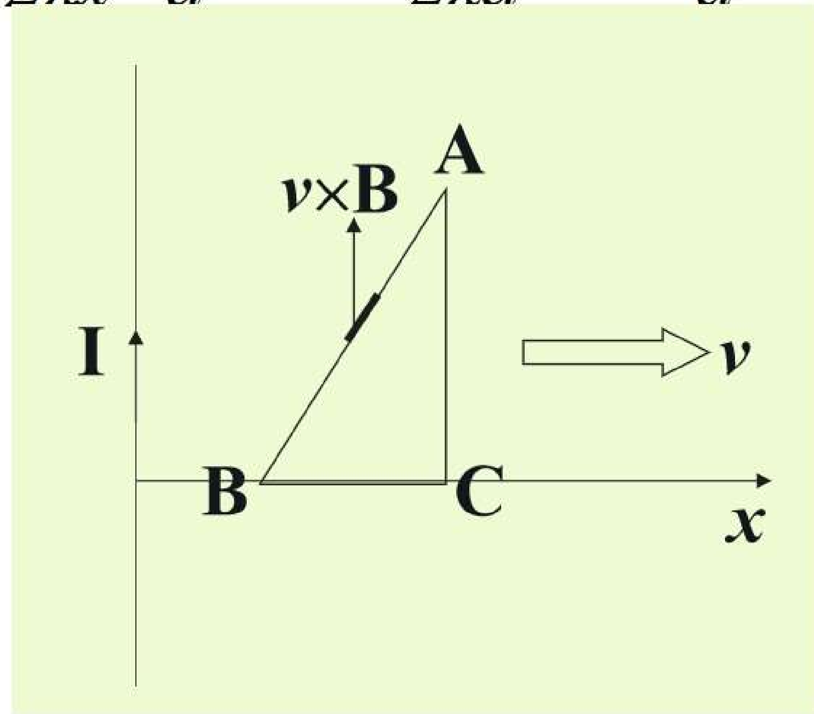
$$\varepsilon_{BC}=\int(\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=0$$

方向： $\varepsilon_{AC}:c\to A$

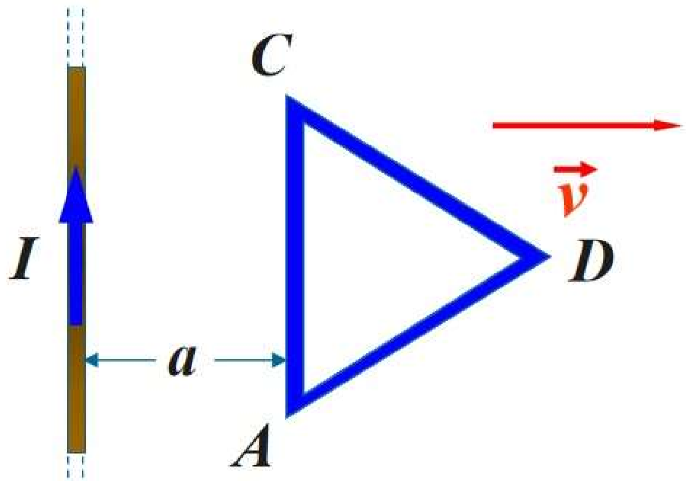
$\varepsilon_{AB}:B\to A$

$\varepsilon_{AB}>\varepsilon_{AC}$

$\varepsilon=\varepsilon_{AB}-\varepsilon_{AC}$

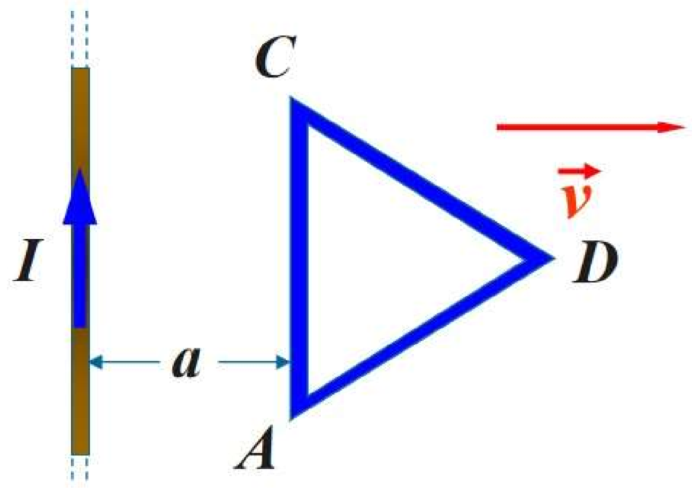


10.如图所示，在纸面所在的平面内有一载有电流I的无限长直导线，其旁另有一边长为l的等边三角形线圈ACD．该线圈的AC边与长直导线距离最近且相互平行．今使线圈ACD在纸面内以匀速$\vec{v}$远离长直导线运动，且与长直导线相垂直．求当线圈AC边与长直导线相距a时，线圈ACD内的动生电动势ε



解： $\varepsilon = \oint_{ACDA} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$



$$\varepsilon_1 = \int_A^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_2 = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_3 = \int_D^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_1 = vlB = \frac{vl\mu_0 I}{2\pi a}$$

方向：A指向C

$$\mathrm{d}\varepsilon_2 = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -vB\cos 60^\circ\,\mathrm{d}l$$

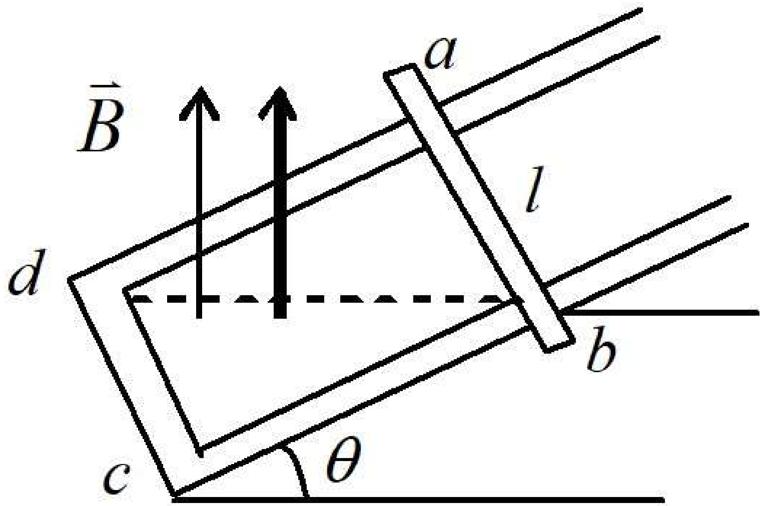
$$\mathrm{d}\varepsilon_2 = -v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\cos 60^\circ\frac{\mathrm{d}x}{\sin 60^\circ}$$

$$\varepsilon_2 = \int_a^{a+l\cos 30^\circ} -v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\cos 60^\circ\frac{\mathrm{d}x}{\sin 60^\circ}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I v}{6\pi}\ln\frac{a+l\sqrt{3}/2}{a}$$ 同理 $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\frac{l}{a} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\frac{a+\frac{\sqrt{3}}{2}l}{a}\right]$$ 其方向为顺时针

11.有一很长的长方的U形导轨，与水平面成θ角，裸导线ab可在导轨上无摩擦地下滑，导轨位于磁感强度竖直向上的均匀磁场中，如图所示．设导线ab的质量为m，电阻为R，长度为l，导轨的电阻略去不计，$abcd$形成电路，$t=0$时，$v=0$. 试求：导线ab下滑的速度v与时间t的函数关系



解：*ab*导线在磁场中运动产生的感应电动势

$$\varepsilon_i = Blv\cos\theta$$

*abcd*回路中流过的电流

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Blv}{R}\cos\theta$$

*ab*载流导线在磁场中受到的安培力沿导轨方向上的分力为：

$$F = I_i Bl\cos\theta = \frac{Blv\cos\theta}{R} Bl\cos\theta$$

由牛顿第二定律：

$$mg\sin\theta-\frac{Blv\cos\theta}{R}Bl\cos\theta=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{g\sin\theta-\dfrac{B^2l^2v\cos^2\theta}{mR}}$$

令

$$A=g\sin\theta$$

$$c=B^2l^2\cos^2\theta/(mR)$$

则 $$\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/(A-cv)$$

利用 $t=0$，$v=0$ 有

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^v \frac{dv}{A-cv} = \frac{-1}{c}\int_0^v \frac{\mathrm{d}(A-cv)}{A-cv}$$

$$t = -\frac{1}{c}\ln\frac{A-cv}{A}$$

$$v = \frac{A}{c}(1-\mathrm{e}^{-ct}) = \frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}(1-\mathrm{e}^{-ct})$$

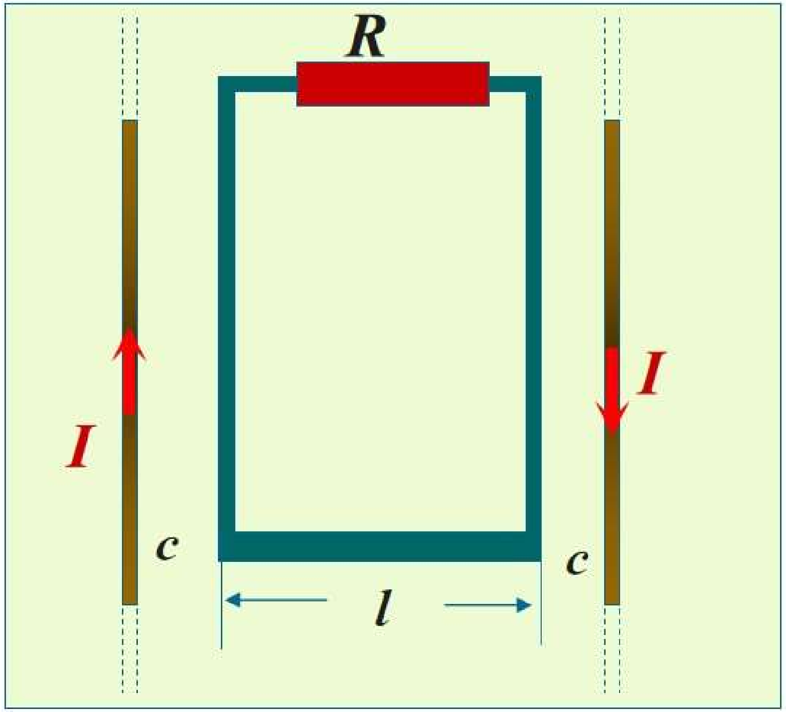
12.如图在真空中两条无限长载流均为I的直导线中间．放置一门框形支架(支架固定)，该支架由导线和电阻联接而成．载流导线和门框形支架在同一竖直平面内．另一质量为m的长为l的金属杆ab可以在支架上无摩擦地滑动．将ab从静止止释放．求：

(1) ab上的感应电动势．

(2) ab上的电流．

(3) ab在t时刻的的速度，

ab所能达到的最大速度．



解：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{c+r}+\frac{1}{c+l-r}\right)$$

$$\varepsilon_{ab}=\int_0^l Bv\,dr=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left(\ln\frac{c+l}{c}+\ln\frac{c+l}{c}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 I v}{\pi}\ln\frac{c+l}{c}$$

$$I_i=\frac{\varepsilon_{ab}}{R}=\frac{\mu_0 I v}{\pi R}\ln\frac{c+l}{c}$$

$$F_i = \int_0^l I_i B\, d r \quad = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi} ln \frac{c+l}{c}\right)^2 \frac{v}{R}$$

$$mg - \left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{c+l}{c}\right)^2 \frac{v}{R} = m \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} t}$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d} v}{g - \left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{c+l}{c}\right)^2 \frac{v}{mR}} = \int_0^t \mathrm{d} t$$

$$v = g\left[1 - \exp\left[-\left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{c+l}{c}\right)^2 \frac{t}{mR}\right]\right] \cdot \frac{mR}{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{c+l}{c}\right)^2}$$

$$v_{max} = \frac{mgR\pi^2}{\left(\mu_0 I \ln \frac{c+l}{c}\right)^2}$$