

M. Couffignal

M. El Mahbouby

Champs gravitationnels autour d'une masse sphérique

Bureau d'étude

Table des matières

Première partie : Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique.....	2
1. Définition de la matrice G	2
2. $Y' = f(Y)$	4
3. Python Traj_photon	4
4. Visualisation	6
5. Modification d'une valeur initiale.....	6
6. Application.....	7
Deuxième partie : Expression numérique de la relation entre ϕ et r	12
1. Méthode de Newton-cotes d'ordre 5.....	12
1. Changement de variable.....	12
2. Evaluation de l'intégrale	13
3. Calculs des polynômes.....	13
4. Ordre de la methode.....	15
5. Python Newton Cotes	15
2. Application à la relativité générale	16
1. Forme simplifiée	16
2. Relation 1	17
3. Relation 2.....	17
4. Utilisation de la partie 1	18
5. Réécriture.....	18
6. Réécriture de (*)	19
7. Expression de $\partial r \partial \lambda$	19
8. Expression de $\phi(r)$	20
9. Dédution $k^2 h^2 = A r^0 r^0_2$	20
10. Dédution $\phi r = r^0 r^1 \psi B(\psi) \psi^2 A(r^0) r^0_2 A(\psi) - 1 d\psi$	20
11. Tracer python d'un rayon de lumière passant à proximité du Soleil.....	22

Nous allons nous intéresser aux équations donnant la trajectoire (=géodésique) d'un photon dans un champs gravitationnel sphérique. En résolvant les équations d'Einstein, Schwarzschild démontre qu'un intervalle infinitésimal d'espace-temps (=métrique) est donné par l'expression :

$$ds^2 = \overrightarrow{dx^T} G \overrightarrow{dx}$$

Avec : $\overrightarrow{dx} := (cdt, dr, d\theta, d\phi)^T$ et ou $(r, \theta, \phi)^T$ sont les coordonnées sphériques attachées à la masse sphérique produisant le champs gravitationnel, c vitesse de la lumière et G la matrice :

$$G := \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Avec les fonctions A et B de la forme :

$$A(r) := c^2 \left(1 + \frac{k}{r}\right) \text{ et } B(r) := \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}$$

Où : $K = -\frac{2GM}{c^2}$ avec : G la constante gravitationnelle, M la masse de l'objet (sphérique) considéré.

On peut montrer que les composantes $\vec{x}(\lambda)$ vérifient :

$$(P): \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r \sin(\theta)^2}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

Première partie : Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique

1. Définition de la matrice G

G n'est pas définie pour $r=0$ car cela reviendrait à diviser par 0

Utilisons maintenant le rayon de Schwarzschild définie par :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

On va tout d'abord calculer le déterminant de la matrice G pour

$$r = r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Nous avons donc :

$$\det(G) := \begin{vmatrix} c^2 \left(1 + \frac{k}{\frac{2GM}{c^2}} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - \left(1 + \frac{k}{\frac{2GM}{c^2}} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \frac{2GM^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \frac{2GM^2}{c^2} \sin(\theta)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(G) := \begin{vmatrix} c^2 \left(1 + \frac{c^2 k}{2GM} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - \left(1 + \frac{c^2 k}{2GM} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \sin(\theta)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(G) = -c^2 \left(1 + \frac{c^2 k}{2GM} \right) \left(1 + \frac{c^2 k}{2GM} \right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \sin(\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \det(G) = -c^2 \left(\frac{2GM + c^2 k}{2GM} \right) \left(\frac{2GM}{2GM + c^2 k} \right) \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \sin(\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \det(G) = -c^2 \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 \sin(\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \det(G) = - \frac{(2GM)^2}{c^6} \sin(\theta)^2$$

Donc on a bien le déterminant qui est défini pour $r = r_s$

On calcule maintenant pour les corps suivant le rayon de Schwarzschild.

Corps	Calcul	Résultat (m)
Soleil	$\frac{2 * (6,6743 * 10^{-11}) * (1,989 * 10^{30})}{(3 * 10^8)^2}$	2950
Terre	$\frac{2 * (6,6743 * 10^{-11}) * (5,972 * 10^{24})}{(3 * 10^8)^2}$	$8,858 * 10^{-3}$

Univers observable	$\frac{2 * (6,6743 * 10^{-11}) * (1,5 * 10^{53})}{(3 * 10^8)^2}$	$2,225 * 10^{27}$
--------------------	--	-------------------

On appelle trou noir un objet (sphérique) dont le rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild. On cherche le rayon de Schwarzschild de Sagittarius A*(masse d'environ quatre millions de soleils)

$$r_s(\text{Sagittarius A} *) = \frac{2 * (6,6743 * 10^{-11}) * (4 * 10^6 * 1,989 * 10^{30})}{(3 * 10^8)^2} = 1,18 * 10^{10}$$

Or $r(\text{Sagittarius}) = 2,2 * 10^{10}$ donc Sagittarius A* n'est pas un trou noir

2. $Y' = f(Y)$

Dans un premier temps nous allons définir Y :

$$Y = \begin{pmatrix} x_0 \\ r \\ \theta \\ \emptyset \\ x'_0 \\ r' \\ \theta' \\ \emptyset' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \end{pmatrix}$$

En dérivant Y nous obtenons :

$$Y' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ r' \\ \theta' \\ \emptyset' \\ \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2 \emptyset}{d\lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ -\frac{A'}{A} Y_5 Y_6 \\ -\frac{A'}{2B} (Y_5)^2 - \frac{B'}{2B} (Y_6)^2 + \frac{Y_2}{B} (Y_7)^2 + \frac{Y_2 \sin(Y_3)^2}{B} (Y_8)^2 \\ \frac{2}{r} Y_7 Y_6 + \sin(Y_3) \cos(Y_3) (Y_8)^2 \\ -\frac{2}{r} Y_8 Y_6 - 2 \frac{\cos(Y_3)}{\sin(Y_3)} Y_7 Y_8 \end{pmatrix}$$

Donc nous avons bien une expression de la forme $Y' = f(Y)$

3. Python Traj_photon

On rédige une fonction Python Traj_photon(y0,h,itermax) qui résout le problème (P) avec la méthode de Runge-Kutta 4

```

"""
Question 3
"""

def a(r):
    return (c**2)*(1+K/r)

def b(r):
    return (1+(K/r))**(-1)

def Aprim(r):
    return -(c**2)*K/(r**2)

def Bprim(r):
    return (K/(r**2))/((1+K/r)**2)

#Fonction f pour l'algorithme de Runge Kutta 4
def f(Y):

    #Initialisation des valeurs pour le calcul
    r=Y[1]
    A=a(r)
    B=b(r)
    Ap=Aprim(r)
    Bp=Bprim(r)

    Yp=np.zeros(len(Y))
    #On calcule 1 à 1 les 8 éléments du vecteur Yp à partir des formules données en page 1 de l'énoncé
    for i in range(4):
        Yp[i]=Y[i+4]
        Yp[4]=(-(Ap/A))*Y[4]*Y[5]
        Yp[5]=(-(Ap/(2*B)))*(Y[4]**2)-((Bp/(2*B))*(Y[5]**2))+((r/B)*(Y[6]**2))+(((r*((np.sin(Y[2]))**2))/B)*(Y[7]**2))
        Yp[6]=((-2/r)*Y[6]*Y[5])+(np.sin(Y[2])*np.cos(Y[2])*Y[7]**2)
        Yp[7]=((-2/r)*Y[7]*Y[5])-(((2*np.cos(Y[2]))/(np.sin(Y[2])))*Y[6]*Y[7])
    return Yp.reshape(-1,1)

```

```

def Traj_photon(y0,h,itermax,f):
    """
    Parameters
    -----
    y0 : Array de taille (8,1)
        Données initiales
    h : Réel positif différent de 0
        Pas de la méthode
    itermax : int
        Nombre d'itération maximal
    Returns
    -----
    P : Array de taille (8,N) avec N le nombre d'itérations de l'algo de Runge-Kutta 4
        Contenant N résultats des itérations de RK4
    """

    #Création de la matrice P et initialisation avec y0 en première colonne
    P=np.zeros((8,itermax))
    P[:,0]=y0.ravel() #ravel permet de passer d'un y0 de taille (8,1) à une taille (8,) et donc de le mettre en tant que colonne de P

    #On récupère r dans la première colonne pour le critère d'arrêt
    r = P[1,0]

    #On applique l'algorithme de Runge-Kutta 4 pour définir successivement les colonnes de la matrice P
    j=1
    while j<itermax and r>rs :
        k1=h*f(P[:,j-1])
        k2=h*f(P[:,j-1].reshape(-1,1)+k1/2)
        k3=h*f(P[:,j-1].reshape(-1,1)+k2/2)
        k4=h*f(P[:,j-1].reshape(-1,1)+k3)
        Pi=(P[:,j-1].reshape(-1,1)+(1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4))
        P[:,j]=Pi.ravel()
        r=P[1,j]
        j+=1

    return P

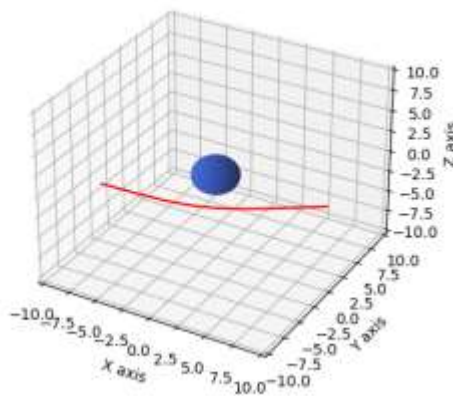
```

4. Visualisation

$$\begin{cases} c = 1 \\ G = 1 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 10, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1.5, 0, -0.1\right)^T \\ h = 10^{-2}, \text{itermax} = 10^3 \end{cases}$$

On trace les paramètres r, θ et ϕ en les convertissant en coordonnées cartésiennes. On obtient le graphique suivant.

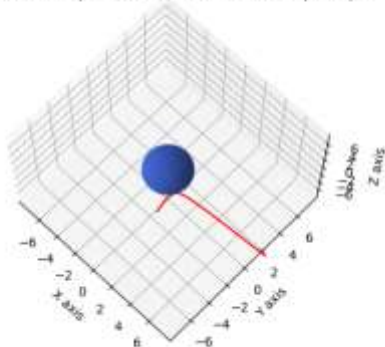
Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique



5. Modification d'une valeur initiale

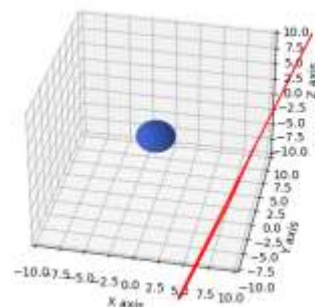
Nous allons modifier la valeur initiale $\frac{d\phi}{d\lambda}$ et conserver les autres valeurs comme à la question précédente.

Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique



Pour dphi= -0.011

Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique



Pour dphi= -100

On constate que les trajectoires rebroussement pour des angles à valeurs négatifs

6. Application

Nous allons utiliser le programme précédent afin de déterminer l'écart entre le modèle gravitationnel newtonien : les photons vont en ligne droite, et le cas relativiste : le Soleil courbe l'espace-temps donc courbe la trajectoire des photons passant à proximité. On normalisera en masse solaire i.e. :

$$M_{\odot} = 1$$

On rappelle aussi que $G = 4\pi^2$

a. Expression de la vitesse de la lumière

$$1UA = 1,496 * 10^{11}m \text{ Et } c = 3 * 10^8 ms^{-1}$$

On convertit c en UA/an :

$$c = \frac{3 * 10^8 * 24 * 3600 * 365}{1,496 * 10^{11}} = 63,24 * 10^5 UA/an$$

Ainsi on a :

$$r_s(Soleil) = \frac{2 * (6,6743 * 10^{-11})}{(63,24 * 10^5)^2} = 2 * 10^{-8} UA$$

Et :

$$r_0(Soleil) = 2,65 * 10^{-5} UA$$

b. Sortie de Traj_photon

On applique la fonction définie précédemment avec les valeurs de la question précédentes on prend pour y_0 , h et $itermax$ les valeurs données dans la question suivantes

c. Avec valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \text{"valeur de la question precedente"} \\ G = 4\pi^2 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 0.1, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1, 0, -0.75\right)^T \\ h = 10^{-3}, itermax = 10^3 \end{array} \right.$$

On obtient une nouvelle matrice P de taille (8x1000)


```

%% 6. (b) et (c)

c=63.24*10**5
G=4*(np.pi)**2
M=1
K=-2*M/(c**2)

y0=np.array([1, 0.1, np.pi/2, 0, 0, -1, 0, -0.75]).reshape(-1,1)
h=10**(-3)
itermax=10**3

rs = 2*M/(c**2)
lim=100

P=Traj_photon(y0,h,itermax,f)

```

d. r_n correspondant

On réalise un code permettant de récupérer le Φ_n s'approchant le plus de $-\frac{\pi}{2}$

```

%% 6. (d) Recherche de phi n le plus proche de -pi/2

#Simple algorithme où l'on garde en mémoire la valeur quand la différence avec la valeur exacte est plus faible que la précédente en mémoire

vexa=-np.pi/2
vapp1=P[3,0]
diff =np.abs(vexa-vapp1)
for i in range(np.shape(P)[1]):
    vappi=P[3,i]
    diffplus1 = np.abs(vexa-vappi)
    if diffplus1<diff:
        vmin=vappi
        cpt=i
        diff=diffplus1

print("\nPhi n le plus proche de -pi/2 est :",vmin,"\nLe rn correspondant est :",P[1,cpt], "atteint pour n =",cpt)

```

On obtient la sortie suivante :

```

Phi n le plus proche de -pi/2 est : -1.5707914209515972
Le rn correspondant est : 0.007500045676208339 atteint pour n = 100

```

	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.00870435	0.00823652	0.00766931	0.00761729	0.00749208	0.00750005	0.00764076	0.00790714	0.00828708
2	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708
3	-0.958895	-1.0637	-1.17967	-1.30512	-1.43692	-1.57079	-1.70304	-1.8265	-1.94121
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-0.31303	-0.420875	-0.511887	-0.590189	-0.6591455	-0.7149955	-0.755224	-0.782488	-0.79913
6	-5.75826e-16	-0.49808e-16	-7.18352e-16	-7.75657e-16	-8.08983e-16	-8.16429e-16	-7.945e-16	-7.48213e-16	-6.68773e-16
7	-90.9092	-110.554	-121.113	-129.26	-133.617	-133.333	-128.467	-119.957	-109.200

e. $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-r_n}{r_{init}}\right)$

En supposant que la trajectoire du rayon lumineux est une ligne droite on obtient un triangle rectangle dont l'angle droit est situé au centre du Soleil et dont deux des côtés sont $r_{init} : = 0.1$ et r_n .

On veut montrer que $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-r_n}{r_{init}}\right)$ est la valeur de l'angle entre l'axe des x (coordonnées cartésiennes) et le rayon lumineux considéré comme une ligne droite.

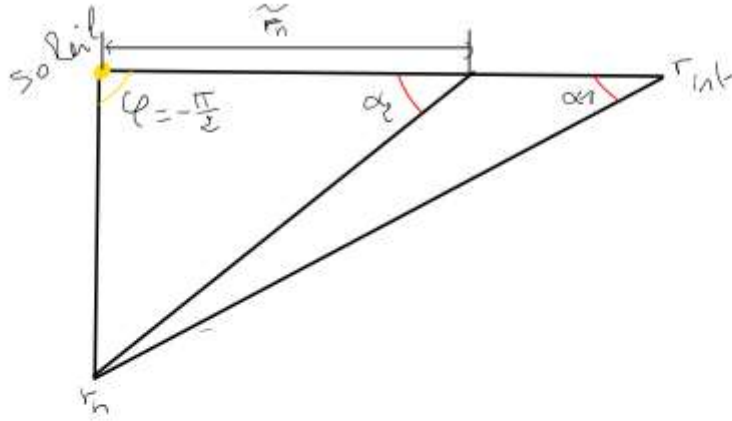


FIGURE 2 – Schéma de la situation

D'après le schéma cela paraît évident :

$$\begin{aligned} \frac{-r_n}{r_{init}} &= \tan(\alpha_1) \\ \Leftrightarrow \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{-r_n}{r_{init}}\right) \end{aligned}$$

f. Etude de la situation

Comme ici $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{dx} = 0$. On suppose que le rayon lumineux vérifie l'équation de droite :

$$y = ax + b$$

Avec a le coefficient directeur de la droite et b l'abscisse à l'origine. En posant dans ce plan :

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

i. Expression de a

Tout d'abord on définit les expressions suivantes :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dx}{dr} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{dx}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \cos \phi \frac{dr}{d\lambda} - r \sin \phi \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{dy}{dr} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{dy}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \sin \phi \frac{dr}{d\lambda} + r \cos \phi \frac{d\phi}{d\lambda}$$

On peut donc en déduire une expression de a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= a \frac{dx}{d\lambda} \\ \Leftrightarrow \sin \phi \frac{dr}{d\lambda} + r \cos \phi \frac{d\phi}{d\lambda} &= a \cos \phi \frac{dr}{d\lambda} - a r \sin \phi \frac{d\phi}{d\lambda} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\sin \phi \frac{dr}{d\lambda} + r \cos \phi \frac{d\phi}{d\lambda}}{\cos \phi \frac{dr}{d\lambda} - r \sin \phi \frac{d\phi}{d\lambda}} \end{aligned}$$

ii. $\phi = -\frac{\pi}{2}$

On remplace ainsi dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin \phi \frac{dr}{d\lambda} + r \cos \phi \frac{d\phi}{d\lambda}}{\cos \phi \frac{dr}{d\lambda} - r \sin \phi \frac{d\phi}{d\lambda}} \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n} \end{aligned}$$

iii. $b = -r_n$

On repart de l'expression

$$y = ax + b$$

De plus si $\phi = \frac{\pi}{2}$ alors on a :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b &= y - ax \\ \Leftrightarrow b &= r_n \sin \phi - a r_n \cos \phi \\ \Leftrightarrow b &= -r_n \end{aligned}$$

iv. Point d'intersection avec l'axe des abscisses

On cherche le point d'intersection avec l'axe des abscisses ce qui revient à faire :

$$a\tilde{x} + b = 0$$

Or :

$$\tilde{x} = -\frac{b}{a} = \frac{r_n r_n \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n} = \frac{r_n^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n} = \tilde{r}_n$$

On peut donc en déduire l'expression de l'angle :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \arctan\left(\frac{-r_n}{\tilde{r}_n}\right) \\ \Leftrightarrow \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{-r_n \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}\right) \\ \Leftrightarrow \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}\right)\end{aligned}$$

v. Comparaison des valeurs

```
#### 6. (d) v.

rinit=0.1
err=np.zeros((1,np.shape(P)[1]))
for i in range (np.shape(P)[1]):
    alpha1 = np.arctan(-P[1,i]/rinit)
    alpha2 = np.arctan(P[5,i]/(P[1,i]*P[7,i]))
    err[0,i]=alpha1-alpha2

moy=np.sum(err)/np.shape(P)[1]
print(moy)
```

On obtient en moyenne 0.10000052526172155, cette valeur est sûrement fausse car plutôt éloignée de 0,0002777778 (1.61'')

Deuxième partie : Expression numérique de la relation entre ϕ et r .

Nous allons aborder d'un autre point de vue le problème du calcul de la déflexion. Nous allons utiliser des méthodes d'intégrations numériques. Commençons par étudier la méthode Newton-Cotes d'ordre 5.

1. Méthode de Newton-cotes d'ordre 5

Dans la méthode de Newton-Cotes de rang 4, on choisit $l_i = 4$ pour tout i , et les points ξ_{ij} régulièrement espacés dans $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. On approche ensuite f sur chaque $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ par son polynôme interpolateur de Lagrange aux points ξ_{ij} . On obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=0}^4 \omega_j f(\xi_{ij})$$

Avec

$$\omega_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \prod_{k \neq j} \frac{t - t_k}{t_i - t_k} dt \text{ et } t_k = -1 + \frac{k}{2}$$

Pour $k \in [0,4]$

1. Changement de variable

On cherche à démontrer que

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx = (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \int_{-1}^1 g(t) dt$$

On pose le changement de variable suivant :

$$x(t) = \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{2} t + \frac{(\alpha_i + \alpha_{i-1})}{2}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{2}$$

En l'injectant dans la formule nous avons donc :

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx = (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \int_{-1}^1 g(t) dt$$

2. Evaluation de l'intégrale

Ainsi en subdivisant l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en plusieurs valeurs nous obtenons le résultat suivant :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left[(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \int_{-1}^1 g(t)dt \right]$$

3. Calculs des polynômes

a. Polynôme de Lagrange

Nous cherchons à calculer les polynômes de Lagrange g aux points $t_k = -1 + \frac{k}{2}$

Dans un premier temps nous calculons les t_k

$$t_0 = -1 \quad t_1 = -\frac{1}{2} \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{2} \quad t_4 = 1$$

Puis les différents l_i

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)(-1)\left(-1 - \frac{1}{2}\right)(-1 - 1)} = \frac{2\left(x^4 - x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)}{3} \\ l_1 &= \frac{(x + 1)x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{-1000\left(x^4 - \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x\right)}{375} \\ l_2 &= \frac{(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{(+1)(+\frac{1}{2})\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)} = 4\left(x^4 - \frac{5x^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ l_3 &= \frac{(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)x(x - 1)}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{-1000\left(x^4 + \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x\right)}{375} \\ l_4 &= \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)x\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)(1)\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\left(x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)}{3} \end{aligned}$$

b. Démonstration

On cherche à démontrer que $\int_{-1}^1 g(t)dt = \sum_{j=0}^4 \omega_j f(\xi_{ij})$

Pour cela on calcule chaque ω_j

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2\left(x^4 - x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\right)}{3} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8}\right)}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} * \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{120} + \frac{29}{120} \right) = \frac{1}{3} * \frac{28}{120} = \frac{7}{90}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-1000\left(x^4 - \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x\right)}{375} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-1000\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)}{375} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2} * \frac{1000}{375} \left(-\frac{1}{120} - \frac{31}{120} \right) = \frac{1}{2} * \frac{1000}{375} * \frac{32}{120} = \frac{16}{45}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 4\left(x^4 - \frac{5x^2}{4} + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left[4\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{12} + \frac{1}{4}x\right) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} * 4 \left(\frac{2}{60} + \frac{2}{60} \right) \\ &= 2 * \frac{4}{60} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_3(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-1000\left(x^4 + \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x\right)}{375} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-1000\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right)}{375} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2} * \frac{1000}{375} \left(-\frac{31}{120} - \frac{1}{120} \right) = \frac{1}{2} * \frac{1000}{375} * \frac{32}{120} = \frac{16}{45}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_4(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2\left(x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)}{3} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8}\right)}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} * \frac{2}{3} \left(\frac{29}{120} - \frac{1}{120} \right) = \frac{1}{3} * \frac{28}{120} = \frac{7}{90}\end{aligned}$$

Ainsi d'après la définition du polynôme de Lagrange, nous avons bien $\int_{-1}^1 g(t)dt = \sum_{j=0}^4 \omega_j f(\xi_{ij})$

Avec $\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}$, $\omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}$, $\omega_2 = \frac{2}{15}$

4. Ordre de la methode

Nous utilisons la méthode de Newton Cotes de rang 4. Comme I=4 alors d'après la définition si I est pair alors la méthode est d'ordre N+1. Donc la méthode de Newton Cotes de rang 4 est bien d'ordre 5.

5. Python Newton Cotes

```
def Newton_Cotes4(f, a, b, n):  
    S = 0  
    W = [7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]  
    x = np.linspace(a, b, n)  
    for j in range(1, n):  
        for i in range(len(W)):  
            S += W[i]*f(x[j])*(x[j]-x[j-1])  
    return S
```

On applique donc ce que l'on vient de montrer sur python ce qui nous donne une méthode de résolution d'intégrale.

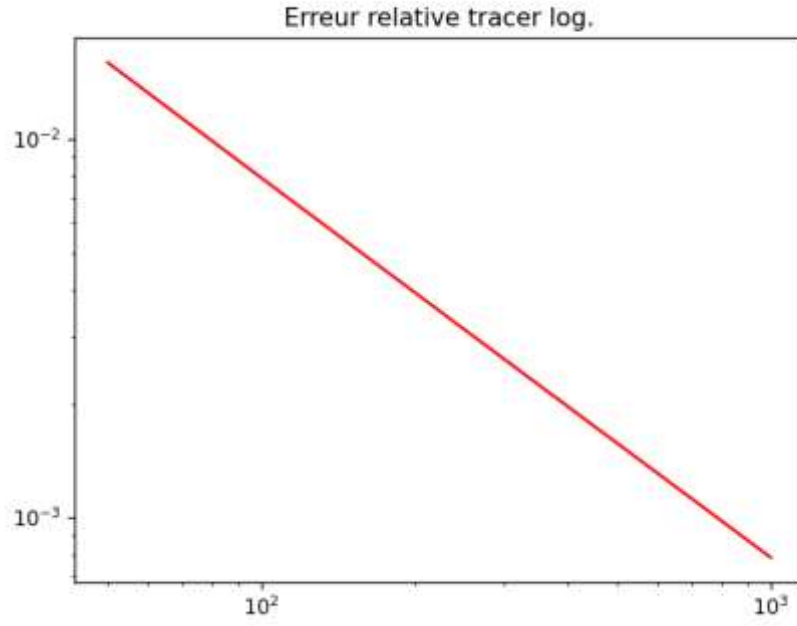
```
n = np.linspace(50, 1000, 20)  
a = 0  
b = 1  
Sol_exact = 1  
Ef = []  
for i in range(len(n)):  
    Sol_appro = Newton_Cotes4(f, 0, 1, int(n[i]))  
    Ef.append(Sol_appro-Sol_exact)  
print(Ef)
```

Nous pouvons alors regarder la précision de cette méthode en étudiant son erreur.

Erreur de New Cotes 4 pour N allant de 50 à 1000 :

```
[0.01594289451325004, 0.007912335532624715, ..., 0.0008273777625138479, 0.0007859783191255243]
```

Le tracé dans un graphique logarithmique de ces valeurs nous donne cela :



2. Application à la relativité générale

On reprend les notations et les équations de l'introduction :

$$(P): \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r \sin(\theta)^2}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

On se placera dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. On notera (P') ce système.

1. Forme simplifiée

Dans un premier temps nous allons réécrire le système

$$(P') : \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \end{cases}$$

2. Relation 1

Partons de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} &:= h \\ \Leftrightarrow \frac{d\phi}{d\lambda} &:= \frac{h}{r^2} \end{aligned}$$

D'après la définition nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\left(\frac{h}{r^2}\right)}{dr} \frac{dr}{d\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= \frac{-2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \end{aligned}$$

On retombe donc sur le résultat de la dernière ligne. Donc la relation est vérifiée.

3. Relation 2

On part de l'expression suivante :

$$\frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{d^2 x_0}{d\lambda^2}}{\frac{dx_0}{d\lambda}} + \frac{A' dr}{A d\lambda} = 0$$

Nous avons donc quelque chose qui ressemble à une dérivée de $\ln(u)$ avec :

$$u_1 = \frac{dx_0}{d\lambda} \text{ et } u_2 = A$$

Donc on en déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^2 x_0}{d\lambda^2}}{\frac{dx_0}{d\lambda}} + \frac{A' dr}{A d\lambda} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right) + \ln(A) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Pour respecter la condition suivante il faut que $\ln \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right) + \ln(A) = k$ avec k une constante

$$\begin{aligned} \exp \left(\ln \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right) + \ln(A) \right) &= k \\ \Leftrightarrow A \frac{dx_0}{d\lambda} &= k \end{aligned}$$

4. Utilisation de la partie 1

5. Réécriture

On cherche à réécrire la seconde ligne de notre système.

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2$$

On remplace par les résultats obtenus aux questions précédentes

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\frac{A'}{2B} \left(\frac{k}{A} \right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\frac{A' k^2}{2BA^2} - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{rh^2}{Br^4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'k^2}{2BA^2} - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{Br^3} (*)$$

6. Réécriture de (*)

On multiplie (*) par $2B \frac{dr}{d\lambda}$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\frac{A'k^2}{A^2} \frac{dr}{d\lambda} - B' \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \frac{dr}{d\lambda} + \frac{h^2}{r^3} 2 \frac{dr}{d\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^2 r}{d\lambda^2} * 2B - \frac{Ak^2}{A^2} + B \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2h^2}{-2r^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(B \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2}{A} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour que l'équation soit respectée il faut donc que $B \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2}{A} = m$ avec m une constante.

Pour la suite nous prendrons $m=0$

7. Expression de $\frac{\partial r}{\partial \lambda}$

On cherche à obtenir une expression de $\frac{dr}{d\lambda}$ en utilisant l'expression suivante :

$$\frac{d\phi}{dr} = \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)}$$

De plus d'après la question 6 nous avons :

$$\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{k^2}{A} - \frac{h^2}{r^2}}$$

On peut donc en déduire $\frac{d\phi}{dr}$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\frac{h}{r^2}}{\sqrt{\frac{k^2}{A} - \frac{h^2}{r^2}}} = \frac{h}{r^2} * \sqrt{\frac{B}{\frac{k^2}{A} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

8. Expression de $\phi(r)$

Nous pouvons maintenant calculer une expression de $\phi(r)$

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{d\phi}{d\psi} d\psi = \phi(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} * \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{k^2}{A(\psi)} - \frac{h^2}{\psi^2}}} d\psi$$

9. Dédution $\frac{k^2}{h^2} = \frac{A(r_0)}{r_0^2}$

Soit r_0 la plus petite distance entre le centre de masse et le photon. On impose que $\phi(r_0) = 0$ et par suite comme c'est un minimum :

$$\frac{dr(r_0)}{d\phi} = 0$$

On pose :

$$\frac{dr(r_0)}{d\phi} = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) \left(\frac{d\lambda}{d\phi}\right) = \frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{d\phi}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\frac{k^2}{A(r_0)} - \frac{h^2}{r_0^2}}{B(r_0)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{A(r_0)} - \frac{h^2}{r_0^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{h^2} = \frac{A(r_0)}{r_0^2}$$

10. Dédution $\phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{\psi^2 A(r_0)}{r_0^2 A(\psi)} - 1}} d\psi$

On sait que :

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{d\phi}{d\psi} d\psi = \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} * \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{k^2}{A(\psi)} - \frac{h^2}{\psi^2}}} d\psi$$

En remplaçant par ce que nous avons obtenu à la question 9, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} * \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{h^2}{\psi^2} \left(\frac{k^2}{A(\psi)} * \frac{\psi^2}{h^2} - 1 \right)}} d\psi \\ \Leftrightarrow \phi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} * \sqrt{\frac{\psi^2}{h^2}} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\left(\frac{k^2}{A(\psi)} * \frac{\psi^2}{h^2} - 1 \right)}} d\psi \\ \Leftrightarrow \phi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} * \frac{\psi}{h} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\left(\frac{k^2}{A(\psi)} * \frac{\psi^2}{h^2} - 1 \right)}} d\psi \\ \Leftrightarrow \phi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\left(\frac{\psi^2 A(r_0)}{r_0^2 A(\psi)} - 1 \right)}} d\psi \end{aligned}$$

11. Tracer python d'un rayon de lumière passant à proximité du Soleil

On initialise donc notre calcul d'intégrale en définissant l'équation de f puis en appliquant Newton Cotes 4

```
def Int_phi(r, r0, N, k):  
    def A(r):  
        return (c**2)*(1+K/r)  
    def B(r):  
        return (1+K/r)**(-1)  
    def f(x):  
        r0 = 0.0046547454  
        if x == r0:  
            return 0  
        else:  
            return (1/x)*(B(x)/(((A(r0)*x**2)/(A(x)*r0**2))-1))**0.5  
    return Newton_Cotes4(f, r0, r, N, k)
```

Puis avec une boucle while, nous calculons petit à petit notre intégrale avec r tendant vers la valeur max prédéfini.

```
while (max+1)*r0 > r:  
    Sol_appro = Int_phi(r, r0, 1000, 4)  
    Photon = plt.scatter(r*np.cos(Sol_appro), r *  
                        np.sin(Sol_appro), color="red", marker=".")  
    n += r0  
    r = r0+n
```

On obtient alors en tracer pour $n=1000$ et $r_{max} = 50.r_0$:

