Komplexitätstheorie

Poster von Kai Sauerwald. Nach Folien von Prof. Schwentick.

TM-Halt — in $\mathbf{RE}$

SAT-FO-String — in $\mathbf{R}$

Gegeben: Eine PL Formel φ über Strings
Frage: Ist φ erfüllbar?

2-PlayerCorridorTiling — $\mathbf{EXP}$-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie im Tiling-Spiel?

QBF — $\mathbf{PSPACE}$-C

Gegeben: Quantifizierte AL Formel φ (in Pränex-Normalform und KNF)
Frage: Ist φ erfüllbar?

CorridorTiling — $\mathbf{PSPACE}$-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Gibt es eine $k \times l$ Kachelung?

SAT — $\mathbf{NP}$-C

Gegeben: AL Formel φ in KNF
Frage: Ist φ erfüllbar?

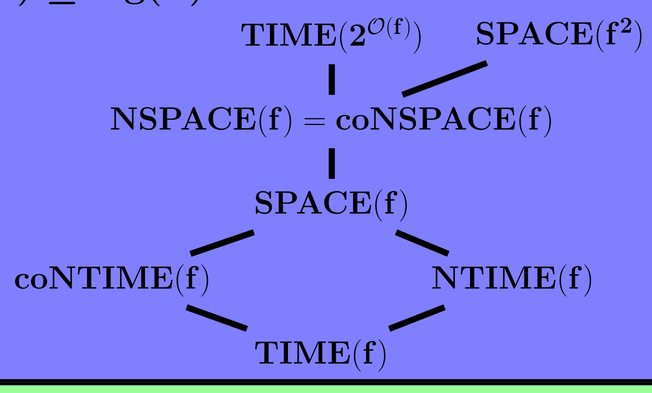
Tiling — $\mathbf{NP}$-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahlen c, r (unär)
Frage: Gibt es eine $c \times r$-Lösung für T?

TSP — $\mathbf{NP}$-C

Gegeben: Entfernungsgraph $G,\ k \in \mathbb{N}$
Frage: Hat G einen Kreis durch alle Knoten mit Gewicht $\leq k$?

Falls $f(n) \geq \log(n)$



Kleine Hierarchie

HornSAT — $\mathbf{P}$-C

Gegeben: Eine Menge von Horn-Klauseln K
Frage: Ist K erfüllbar?

Determinante — in $\mathbf{NC^2}$

AcyclicCS — $\mathbf{LOGCFL}$-C

Gegeben: Variablenmenge V, Domäne U, Menge von Constraints $\mathcal{C}$
Frage: Gibt es eine Lösung $\sigma \subseteq V \times U$, so dass $\sigma(\mathcal{C})$ wahr wird?

REACH — $\mathbf{NL}$-C

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

UREACH — $\mathbf{L}$-C

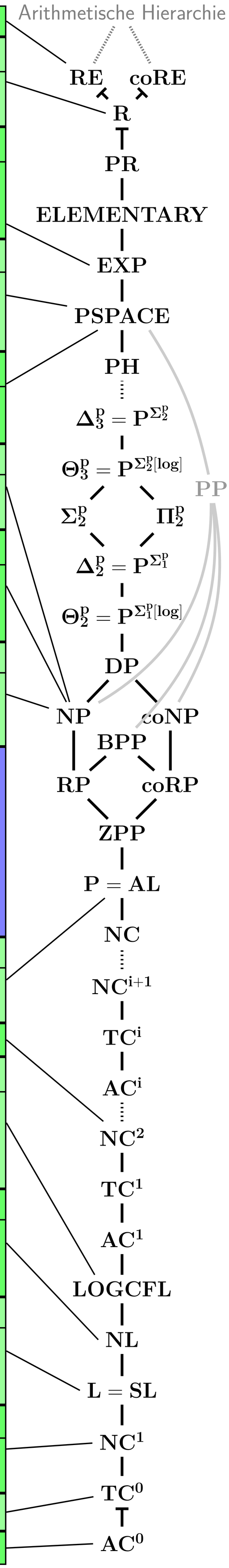
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

FormulaValueProblem — $\mathbf{NC^1}$-C

Gegeben: Variablenfreie boolesche Formel B
Frage: Ist B wahr?

Multipikation — $\mathbf{TC^0}$-C

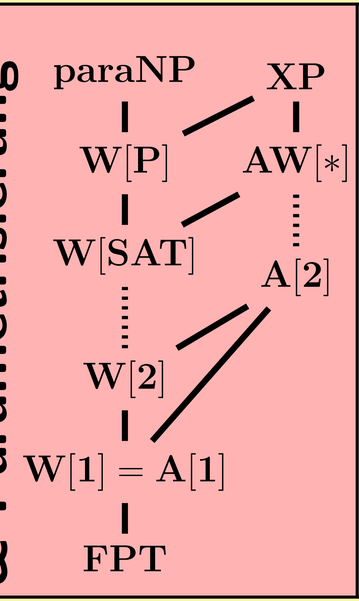
Addition — in $\mathbf{AC^0}$



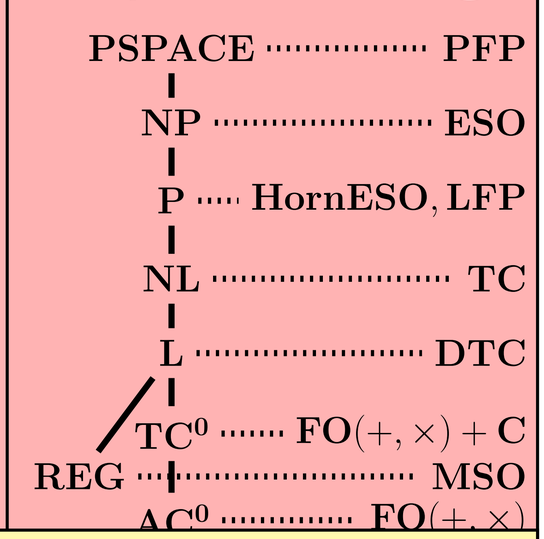
Parametrisiertes Problem

Ein Tupel (Q, κ) heißt parametrisiertes Problem, falls $Q \subseteq \Sigma^*$ und $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ in polynomieller Zeit berechenbar ist.

Beschreibungskompl. & Parametrisierung



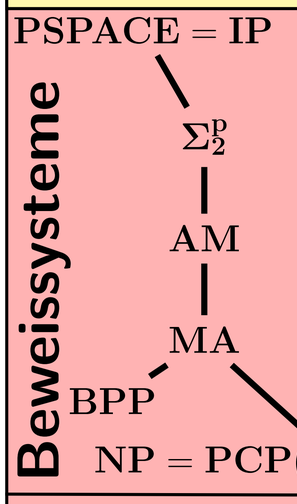
Komplexität & Logik



Komplexität einer Logik

Eine Logik $\mathcal{L}$ hat die Komplexität $\mathcal{C}$, falls für jede geschlossene Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt, dass $\{\text{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi)\} \in \mathcal{C}$.

Beweissysteme



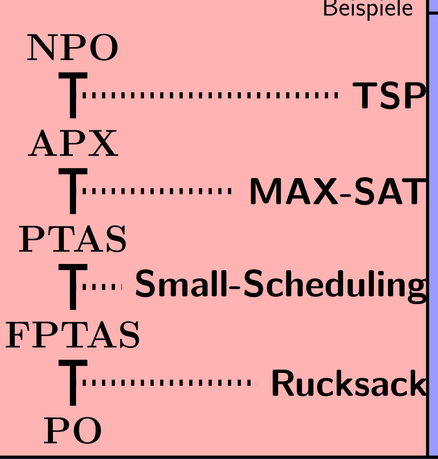
PCP *(probabilistically checkable proof)*

Die Klasse $PCP(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ der Sprachen L für die es einen Verifizierer V gibt der

- $\leq r(n)$ Zufallsbits verwendet, $(r \in \mathcal{F})$
- $\leq q(n)$ Bits der Eingabe ließt, $(q \in \mathcal{G})$
- für einen Beweis π alles aus L akzeptiert,
- und für jeden Beweis kein $x \notin L$ mit W'keit $> \frac{1}{2}$ akzeptiert.

Optimierung

Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ — Trennende Beispiele



Satz: Klassenoperatoren

Sei $\mathcal{C}$ unter Turing-Reduktion abgeschloseen. Dann gilt:

$$\mathbf{BP} \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C}$$
$$\oplus \cdot \oplus \cdot \mathcal{C} \subseteq \oplus \mathcal{C}$$
$$\oplus \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$$
$$\exists \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$$
$$\exists \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \exists \cdot \mathcal{C}$$
$$\exists \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{MA}$$
$$\mathbf{BP} \cdot \exists \cdot \mathbf{P} = \mathbf{AM}$$

Satz — Chandra, Kozen, Stockmeyer

(a) Ist $S(n) = \Omega(\log n)$, so gilt
$$\mathbf{ASPACE(S)} \subseteq \mathbf{TIME}(\mathbf{2}^{\mathcal{O}(\mathbf{S})})$$
(b) Ist $S(n) = \Omega(n)$, so gilt
$$\mathbf{TIME(S)} \subseteq \mathbf{ASPACE}(\mathbf{2}^{\log \mathbf{S}})$$

Satz — Immerman, Szelepcsenyi

Für jedes platzkonstruierbare S mit $S(n) \geq \log n$ gilt:
$$\mathbf{NSPACE(S)} = \mathbf{coNSPACE(S)}$$

Satz von Savitch — Savitch

Sei S platzkonstruierbar und $S(n) \geq \log n$, so gilt:
$$\mathbf{NSPACE(S)} \subseteq \mathbf{SPACE}(\mathbf{S^2})$$

Platzhierarchie-Satz — Stearns, Szepietowski

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(\log n)$ und $g(n) \in \omega(f(n))$, so gilt:
$$\mathbf{SPACE(f)} \subsetneq \mathbf{SPACE(g)}$$
$$\mathbf{NSPACE(f)} \subsetneq \mathbf{NSPACE(g)}$$

Zeithierachie-Satz — Hartmanis, Stearns

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(n)$ und $g(n) \in \omega(f(n) \log(f(n)))$, so gilt:
$$\mathbf{TIME(f)} \subsetneq \mathbf{TIME(g)}$$