Komplexitätstheorie

Poster von Kai Sauerwald. Nach Folien von Prof. Schwentick.

TM-Halt — in RE

SAT-FO-String — in R

Gegeben: Eine PL Formel φ über Strings
Frage: Ist φ erfüllbar?

2-PlayerCorridorTiling — EXP-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie im Tiling-Spiel?

QBF — PSPACE-C

Gegeben: Quantifizierte AL Formel φ (in Pränex-Normalform und KNF)
Frage: Ist φ erfüllbar?

CorridorTiling — PSPACE-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Gibt es eine $k \times l$ Kachelung?

SAT — NP-C

Gegeben: AL Formel φ in KNF
Frage: Ist φ erfüllbar?

Tiling — NP-C

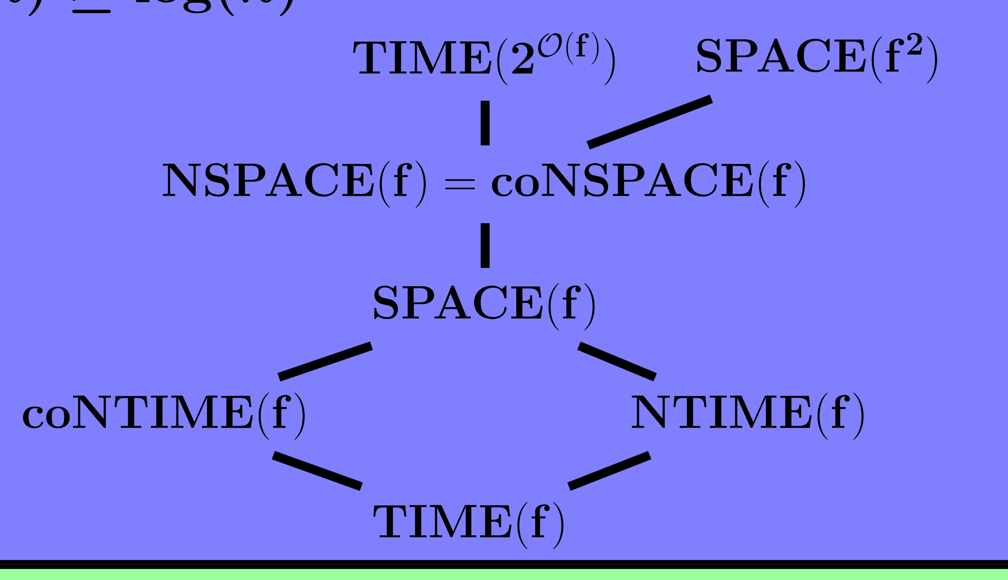
Gegeben: Kachelmenge T und Zahlen c, r (unär)
Frage: Gibt es eine $c \times r$-Lösung für T?

TSP — NP-C

Gegeben: Entfernungsgraph G, $k \in \mathbb{N}$
Frage: Hat G einen Kreis durch alle Knoten mit Gewicht $\leq k$?

Kleine Hierarchie

Falls $f(n) \geq \log(n)$



HornSAT — P-C

Gegeben: Eine Menge von Horn-Klauseln K
Frage: Ist K erfüllbar?

Determinante — in NC^2

AcyclicCS — LOGCFL-C

Gegeben: Variablenmenge V, Domäne U, Menge von Constraints $\mathcal{C}$
Frage: Gibt es eine Lösung $\sigma \subseteq V \times U$, so dass $\sigma(\mathcal{C})$ wahr wird?

REACH — NL-C

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

UREACH — L-C

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

FormulaValueProblem — NC^1-C

Gegeben: Variablenfreie boolesche Formel B
Frage: Ist B wahr?

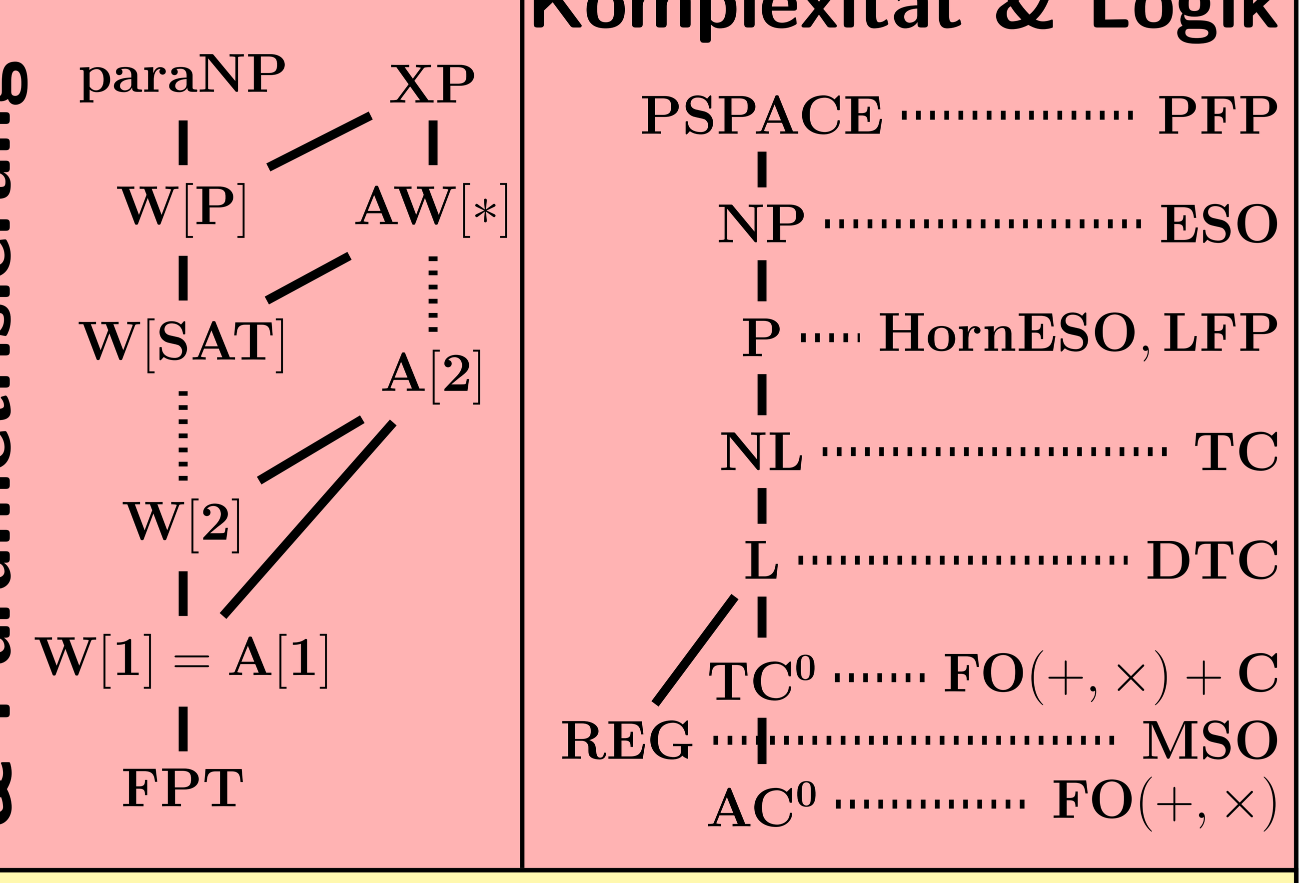
Multipikation — TC^0-C

Addition — in AC^0

Parametrisiertes Problem

Ein Tupel (Q, κ) heißt parametrisiertes Problem falls $Q \subseteq \Sigma^*$ und $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ in polynomieller Zeit berechenbar ist.

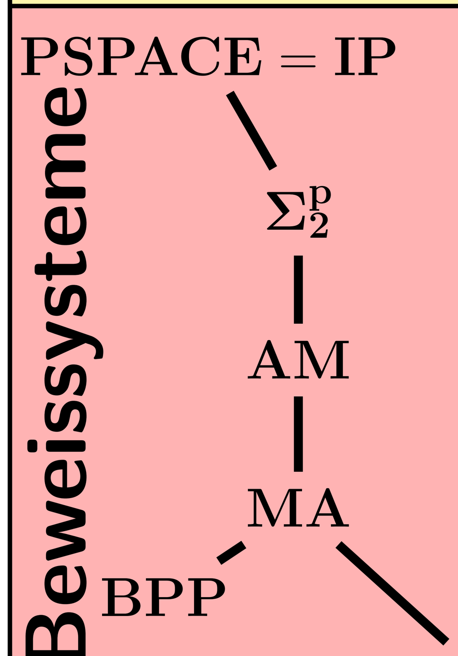
Beschreibungskompl. & Parametrisierung



Komplexität einer Logik

Eine Logik $\mathcal{L}$ hat die Komplexität $\mathcal{C}$, falls für jede geschlossene Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt, dass $\{enc(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \in \mathcal{C}$.

Beweissysteme



PCP *(probabilistically checkable proof)*

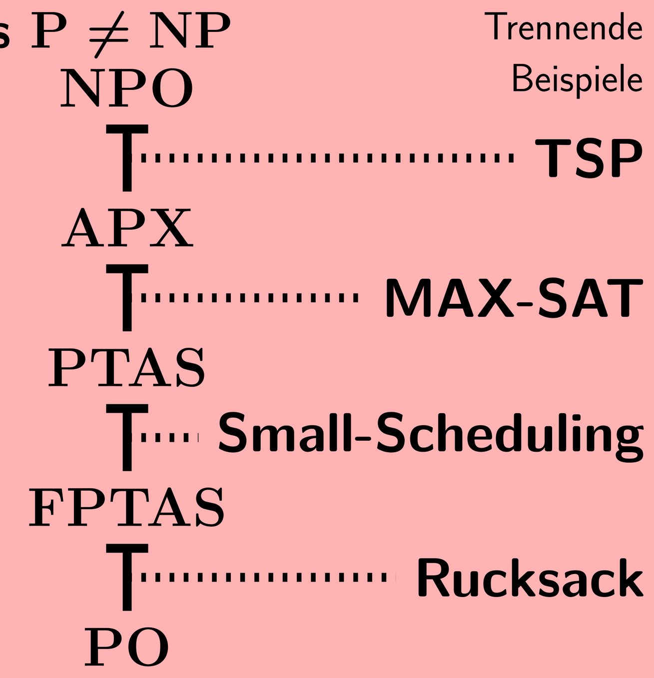
Die Klasse $PCP(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ der Sprachen L für die es einen Verifizierer V gibt der

- $\leq r(n)$ Zufallsbits verwendet, $(r \in \mathcal{F})$
- $\leq q(n)$ Bits der Eingabe ließt, $(q \in \mathcal{G})$
- für einen Beweis π alles aus L akzeptiert,
- und für jeden Beweis kein $x \notin L$ mit W'keit $> \frac{1}{2}$ akzeptiert.

$NP = PCP(\log, poly) = PCP(0, poly) = PCP(\log, 1)$

Optimierung

Falls $P \neq NP$ — Trennende Beispiele



Satz: Klassenoperatoren

Sei $\mathcal{C}$ unter Turing-Reduktion abgeschloseen. Dann gilt:

$BP \cdot BP \cdot \mathcal{C} \subseteq BP \cdot \mathcal{C}$
$\oplus \cdot \oplus \cdot \mathcal{C} \subseteq \oplus\mathcal{C}$
$\oplus \cdot BP \cdot \mathcal{C} \subseteq BP \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$
$\oplus \cdot BP \cdot \mathcal{C} \subseteq BP \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot \mathcal{C} \subseteq BP \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot BP \cdot \mathcal{C} \subseteq BP \cdot \exists \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot BP \cdot P = MA$
$BP \cdot \exists \cdot P = AM$

Satz — Chandra, Kozen, Stockmeyer

(a) Ist $S(n) = \Omega(\log n)$, so gilt
$$ASPACE(S) \subseteq TIME(2^{\mathcal{O}(S)})$$
(b) Ist $S(n) = \Omega(n)$, so gilt
$$TIME(S) \subseteq ASPACE(2^{\log S})$$

Satz — Immerman, Szelepcsenyi

Für jedes platzkonstruierbare S mit $S(n) \geq \log n$ gilt:
$$NSPACE(S) = coNSPACE(S)$$

Satz von Savitch — Savitch

Sei S platzkonstruierbar und $S(n) \geq \log n$, so gilt:
$$NSPACE(S) \subseteq SPACE(S^2)$$

Platzhierarchie-Satz — Stearns, Szepietowski

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(\log n)$ und $g(n) \in \omega(f(n))$, so gilt:
$$SPACE(f) \subsetneq SPACE(g)$$
$$NSPACE(f) \subsetneq NSPACE(g)$$

Zeithierachie-Satz — Hartmanis, Stearns

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(n)$ und $g(n) \in \omega(f(n)\log(f(n)))$. So gilt:
$$TIME(f) \subsetneq TIME(g)$$