Komplexitätstheorie

Poster von Kai Sauerwald. Nach Folien von Prof. Schwentick.

TM-Halt — in $\mathbf{RE}$

SAT-FO-String — in $\mathbf{R}$

Gegeben: Eine PL Formel φ über Strings
Frage: Ist φ erfüllbar?

2-PlayerCorridorTiling — $\mathbf{EXP}$-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie im Tiling-Spiel?

QBF — $\mathbf{PSPACE}$-C

Gegeben: Quantifizierte AL Formel φ (in Pränex-Normalform und KNF)
Frage: Ist φ erfüllbar?

CorridorTiling — $\mathbf{PSPACE}$-C

Gegeben: Kachelmenge T und Zahl k (unär)
Frage: Gibt es eine $k \times l$ Kachelung?

SAT — $\mathbf{NP}$-C

Gegeben: AL Formel φ in KNF
Frage: Ist φ erfüllbar?

Tiling — $\mathbf{NP}$-C

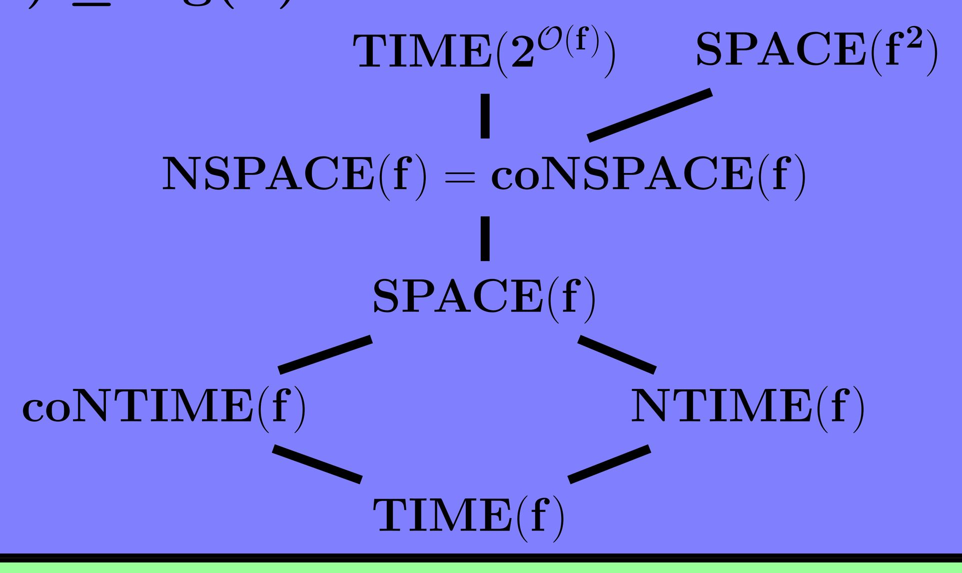
Gegeben: Kachelmenge T und Zahlen c, r (unär)
Frage: Gibt es eine $c \times r$-Lösung für T?

TSP — $\mathbf{NP}$-C

Gegeben: Entfernungsgraph G, $k \in \mathbb{N}$
Frage: Hat G einen Kreis durch alle Knoten mit Gewicht $\leq k$?

Kleine Hierarchie

Falls $f(n) \geq \log(n)$



HornSAT — $\mathbf{P}$-C

Gegeben: Eine Menge von Horn-Klauseln K
Frage: Ist K erfüllbar?

Determinante — in $\mathbf{NC}^2$

AcyclicCS — $\mathbf{LOGCFL}$-C

Gegeben: Variablenmenge V, Domäne U, Constraints C, so dass (V, C) azyklisch ist
Frage: Gibt es eine Lösung $\sigma \subseteq V \times U$, so dass $\sigma(\mathcal{C})$ wahr wird?

REACH — $\mathbf{NL}$-C

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

UREACH — $\mathbf{L}$-C

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ von G
Frage: Gibt es einen Weg von s nach t in G?

FormulaValueProblem — $\mathbf{NC}^1$-C

Gegeben: Variablenfreie boolesche Formel B
Frage: Ist B wahr?

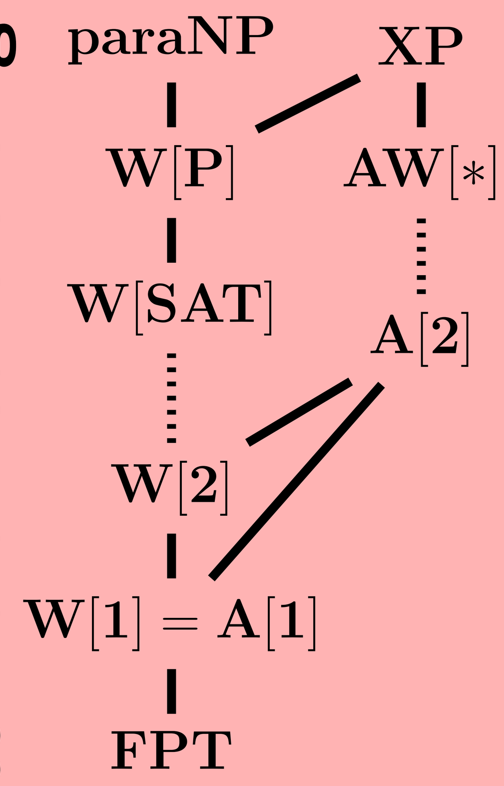
Multiplikation — $\mathbf{TC}^0$-C

Addition — in $\mathbf{AC}^0$

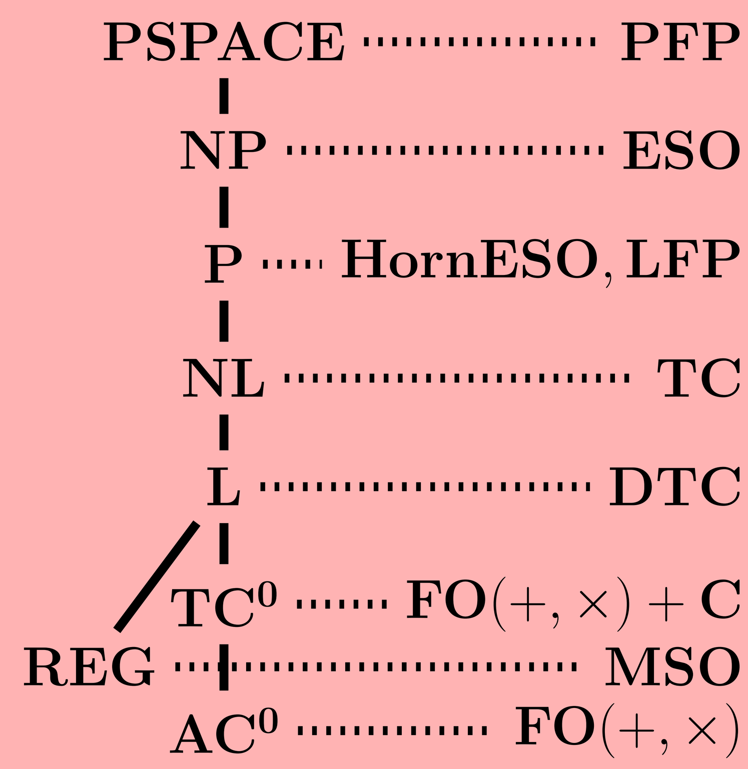
Parametrisiertes Problem

Ein Tupel (Q, κ) heißt parametrisiertes Problem, falls $Q \subseteq \Sigma^*$ und $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ in polynomieller Zeit berechenbar ist.

Beschreibungskomplex. & Parametrisierung



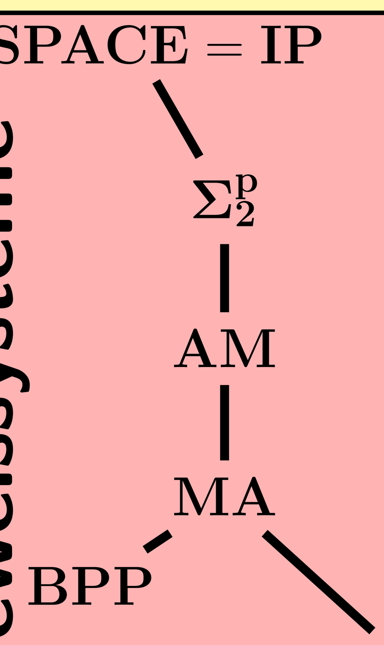
Komplexität & Logik



Komplexität einer Logik

Eine Logik $\mathcal{L}$ hat die Komplexität $\mathcal{C}$, falls für jede geschlossene Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt, dass $\{\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \in \mathcal{C}$.

Beweissysteme



PCP *(probabilistically checkable proof)*

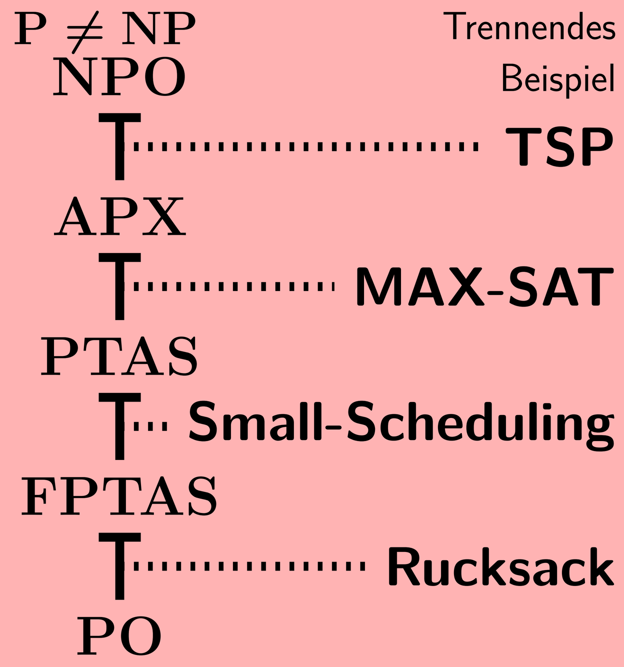
Die Klasse $PCP(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ der Sprachen L für die es einen Verifizierer V gibt der

- $\leq r(n)$ Zufallsbits verwendet, $(r \in \mathcal{F})$
- $\leq q(n)$ Bits des Beweises ließt, $(q \in \mathcal{G})$
- für einen Beweis π alles aus L akzeptiert,
- und für jeden Beweis kein $x \notin L$ mit W'keit $> \frac{1}{2}$ akzeptiert.

$\mathbf{NP} = \mathbf{PCP}(\log, \mathrm{poly}) = \mathbf{PCP}(0, \mathrm{poly}) = \mathbf{PCP}(\log, 1)$

Optimierung

Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ — Trennendes Beispiel



Satz: Klassenoperatoren

Sei $\mathcal{C}$ unter Turing-Reduktion abgeschloseen. Dann gilt:

$\mathbf{BP} \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C}$
$\oplus \cdot \oplus \cdot \mathcal{C} \subseteq \oplus\mathcal{C}$
$\oplus \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \oplus \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \exists \cdot \mathcal{C}$
$\exists \cdot \mathbf{BP} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{MA}$
$\mathbf{BP} \cdot \exists \cdot \mathbf{P} = \mathbf{AM}$

Satz — Chandra, Kozen, Stockmeyer

(a) Ist $S(n) = \Omega(\log n)$, so gilt
$\mathbf{ASPACE}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{TIME}(\mathbf{2}^{\mathcal{O}(\mathbf{S})})$

(b) Ist $T(n) = \Omega(n)$, so gilt
$\mathbf{TIME}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{ASPACE}(\log \mathbf{T})$

Satz — Immerman, Szelepcsényi

Für jedes platzkonstruierbare S mit $S(n) \geq \log n$ gilt:

$$\mathbf{NSPACE}(\mathbf{S}) = \mathbf{coNSPACE}(\mathbf{S})$$

Satz von Savitch — Savitch

Sei S platzkonstruierbar und $S(n) \geq \log n$, so gilt:

$$\mathbf{NSPACE}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{SPACE}(\mathbf{S}^2)$$

Platzhierarchie-Satz — Stearns, Szepietowski

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(\log n)$ und $g(n) \in \omega(f(n))$, so gilt:

$$\mathbf{SPACE}(\mathbf{f}) \subsetneq \mathbf{SPACE}(\mathbf{g})$$
$$\mathbf{NSPACE}(\mathbf{f}) \subsetneq \mathbf{NSPACE}(\mathbf{g})$$

Zeithierarchie-Satz — Hartmanis, Stearns

Seien f, g zeitkonstruierbar mit $f(n) \in \Omega(n)$ und $g(n) \in \omega(f(n) \log(f(n)))$, so gilt:

$$\mathbf{TIME}(\mathbf{f}) \subsetneq \mathbf{TIME}(\mathbf{g})$$