



Università degli Studi di Trento

FACOLTÀ DI FISICA

Corso di Laurea triennale in Fisica

A CURA DI:

BARTOLOMEO COGLIONE, MALGHESE DELLA MALGA, POMPEO IL REICHMINISTER

Fisica Generale 3

Documento di Elettrodinamica, Relatività speciale ed
introduzione alla Meccanica Quantistica

Indice

1 INTRODUZIONE ALL'ELETTRODINAMICA	4
1.1 Conservazione della carica	4
1.2 Conservazione dell'energia	5
1.3 Momento	6
2 Equazioni di Maxwell nel vuoto	9
2.1 Proprietà dei campi nel vuoto	10
2.2 Energia nei campi	11
3 Onde nella materia	12
3.1 Onde sull'interfaccia	12
3.2 Campi nei conduttori	15
4 Potenziali elettromagnetici	16
4.1 Trasformazioni di gauge	18
4.2 Gauge di Coulomb	19
4.3 Gauge di Lorentz	19
4.4 Potenziali ritardati	19
4.5 Forze e momenti	22
5 Dipolo oscillante	23
5.1 Dipolo magnetico oscillante	25
5.2 Distribuzione di carica qualsiasi	26
5.3 Carica puntiforme	27
6 INTRODUZIONE ALLA RELATIVITA' RISTRETTA	28
6.1 Sistemi di riferimento inerziali	28
6.2 Postulati di Einstein	29
6.3 Conseguenze dei postulati	29
7 Le trasformazioni di Lorentz	31
7.1 Traslazione spazio-temporale	33
7.2 Rotazioni spaziali	33
7.3 Boost di Lorentz	33
7.4 Esempio: Dilatazione dei tempi	34
7.5 Esempio: contrazione delle lunghezze	35
7.6 Tempo proprio	35
7.7 Composizione relativistica della velocità	36
8 Formalismo covariante	36
8.1 Spazio 3D Euclideo	37
8.2 V^4 Spazio di Minkowski	37
8.3 Regola sul prodotto vettoriale	40
8.4 Notazione sul formalismo covariante	40
8.5 Tensori	41

8.6	Contrazione degli indici	42
9	Meccanica relativistica	42
9.1	Cinematica	45
9.2	Dinamica	45
9.2.1	Teorema del lavoro	46
9.2.2	Applicazione del formalismo covariante	46
10	Elettrodinamica relativistica	47
10.1	Tensore elettromagnetico	48
10.2	Boost di Lorentz lungo x	50
10.3	Boost generico	50
10.4	Tensore Duale	51
10.5	Equazioni di Maxwell e legge di continuità	51
10.6	Introduzione dei potenziali covarianti	53
11	INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA	54
11.1	Corpo nero	54
11.1.1	Corpo nero come scatola di oscillatori	55
11.1.2	Corpo nero a temperatura fissata	57
11.2	Calcolo della costante	58
12	Conferme sperimentali dei quanti	59
12.1	Effetto fotoelettrico	59
12.2	Calore specifico dei solidi	60
12.2.1	Modello Dulong-Petit	60
12.2.2	Modello di Einstein	61
12.2.3	Modello di Debye	61
13	Modello dell'atomo di Bohr	63
13.1	Bohr torna a Copenhagen	64
13.1.1	Atomo di idrogeno	65
13.1.2	Atomi con $Z \neq 1$	66
13.2	Principio di corrispondenza	66
13.3	Seconda Formulazione	66
13.3.1	Caso classico	67
13.3.2	Caso quantistico	67
13.4	Applicazione principio del corrispondenza	67
13.5	Esperimento di Franck e Hertz	68
13.6	Terza formulazione	69
13.6.1	Moto circolare	69
13.6.2	Moto ellittico	69
13.6.3	Moto ellittico con precessione	69
13.6.4	Conseguenze di fretta	70

14 Onda e particella: il dilemma	70
14.1 Effetto Compton	70
14.2 Modello di de Broglie	72
14.2.1 Atomo di idrogeno	72
14.3 Pacchetti di onde	73
14.4 Conclusione del dilemma	76
15 Equazione di Schrodinger	76
15.1 La teoria è deterministica?	78
15.2 Stati stazionari	79
15.3 Buche di potenziale	81
15.3.1 Buca infinita	84
15.4 Interpretazione di Ψ	86
15.4.1 Esperimento con granello di polvere	86
15.4.2 Esperimento con elettrone	86
15.4.3 Esperimento con particelle alpha	87
15.4.4 Probabilità, is that you?	87
15.5 Barriera di potenziale	89
15.6 Effetto tunnel	93
16 ESERCIZI	98
16.1 Un modello classico per l'elettrone	98
16.2 Luce dall'interno di un acquario	101
16.3 Vele solari	104
16.4 La pulsar del Granchio	105
16.5 Filo percorso da corrente	108
16.6 Instabilità dell'atomo classico: dilemma di Bohr	110
16.7 Vita media dei muoni atmosferici	112
16.8 Emissione di neutrini	113
16.9 Urti relativistici completamente anelastici e decadimenti	115
16.10 Collisori di particelle	119
16.11 Effetto Compton ed Effetto Compton inverso	123
16.12 Aberrazione relativistica	126
16.13 Formula di Larmor relativistica	127
16.14 Campo elettromagnetico generato da una carica in moto	129
16.15 Effetto Doppler relativistico	131
17 APPROFONDIMENTI	133
17.1 Tensore energia-impulso: degli sforzi	133
17.2 Meccanica relativistica	136
17.3 Teoria dei campi elettromagnetici	138

Fisica generale III

Bartolomeo Coglione & Malghese della malga & Pompeo il Reichsminister

14 giugno 2024

1 INTRODUZIONE ALL'ELETTRODINAMICA

Questo documento parte con l'ipotesi che siano note le equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

e la Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Queste 5 equazioni descrivono tutta l'elettrodinamica classica che farà da base per la teoria più completa che presentiamo in questo primo capitolo.

Nota: l'elettrodinamica formulata in questo primo modulo non poggia su considerazioni relativistiche (anche se risulta poi compatibile con la teoria di Einstein), stiamo costruendo una teoria ancora "classica" ma più efficace e generale di quella del corso di Fisica Generale II. Per i più curiosi abbiamo inserito un approfondimento legato alla formulazione dell'elettrodinamica che parte dalla teoria della relatività.

Partiamo dunque con lo svolgere dei calcoli su queste equazioni da cui possiamo ricavare importanti nozioni.

1.1 Conservazione della carica

La conservazione della carica ci viene garantita dalla quarta equazione di Maxwell, infatti è possibile ottenere questa importante relazione calcolando la divergenza del rotore del campo magnetico. Ricordando che la divergenza del rotore di un campo è sempre nulla otteniamo:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

ricordando poi la prima equazione di Maxwell per la divergenza del campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

Quest'ultima è chiamata **equazione di continuità** nella forma locale. Per vedere cosa accade globalmente integriamo sul volume:

$$0 = \int_V d^3r \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) \Rightarrow \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = - \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Dove la derivata parziale viene portata fuori dall'integrale per le proprietà che ha come funzione, diventando derivata totale in quanto seguita appunto da un integrale che toglie la dipendenza spaziale; inoltre viene usato il teorema della divergenza al "contrario". Quest'ultima espressione è intuitiva e notevole: preso un certo volume di spazio sappiamo che la variazione di carica nel tempo in quel volume deve essere uguale al flusso della densità di corrente uscente dalla superficie che racchiude il volume considerato.

1.2 Conservazione dell'energia

In elettrodinamica più che con quantità osservabili come cariche ci interessa trattare energie legate ai campi. Vediamo adesso quindi la conservazione dell'energia attraverso un calcolo sul lavoro:

$$\vec{v} dt = d\vec{l} \implies \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$$

$$= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt = \vec{E} \cdot \vec{v} \rho d^3r dt = \vec{E} \cdot \vec{J} d^3r dt$$

Per ottenere il lavoro devo integrare nelle dimensioni spaziali, vediamo che diventa:

$$\frac{\delta W_V}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3r$$

che tuttavia non ci dice molto, vogliamo riscriverla tenendo conto o solo dei campi o solo delle sorgenti; scegliamo i campi.

Nota: il termine a sinistra dell'uguale non deve essere inteso come una derivata di una qualche funzione, infatti δW non è il differenziale di una funzione, bensì come un simbolo col senso di lavoro per unità di tempo, e si riferisce al lavoro complessivo fatto dai campi nell'intervallo di tempo dt per le cariche contenute in un generico volume V .

Riscriviamo per questo motivo la quarta equazione di Maxwell:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\delta W}{dt} = \int_V d^3r \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \int_V d^3r \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \int_V d^3r \left(-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= - \int_V d^3r \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\delta W}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) - \int_S \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{a}$$

Dove abbiamo usato:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Inoltre notiamo che l'argomento all'interno del primo integrale ha le dimensioni di una densità di energia e ci rappresenta l'energia contenuta nei campi e si manifesta con le forze, mentre l'argomento del secondo integrale è un flusso di energia che attraversa la superficie, quindi in entrata o uscita dal sistema. Queste sono le due quantità che bilanciano l'energia totale. Chiamando **vettore di Poynting** la quantità $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ e $u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ otteniamo:

Teorema di Poynting

$$\frac{\delta W_V}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V u(\vec{r}, t) d^3r - \int_{\Sigma} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}$$

In assenza di cariche all'interno del volume avremo che questa quantità è uguale a zero portandoci alla **legge di conservazione dell'energia globale**:

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\vec{r}, t) d^3r = - \int_{\Sigma} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Se vogliamo fare uno step indietro andiamo a trovare:

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\vec{r}, t) d^3r = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} d^3r \Rightarrow \int_V d^3r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) = 0$$

Questo ci porta alla seconda equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

Quest'ultima è sempre assolutamente vera quando partiamo con l'ipotesi dell'assenza di cariche. Questa relazione è ancora una volta intuitiva e di importanza notevole: considerando un volume di spazio in cui non sono contenute cariche sappiamo che la variazione di densità di energia deve essere bilanciata con un flusso di energia che si sposta (la divergenza il vettore di Poynting).

Il concetto importante è che per avere un certo campo elettrico/magnetico avrò bisogno di una certa corrente che sceglierò in base a queste equazioni di continuità. Per esempio io ho un solenoide con un campo magnetico B terrò conto del fatto che avrò $u = \int d^3r \frac{B^2}{2\mu_0}$ da cui vado a ricavare la corrente. Stessa cosa per avere una composizione di cariche elettriche con quel campo elettrico.

1.3 Momento

Andiamo ora ad analizzare il momento totale del sistema partendo con la definizione di forza di Lorentz:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \rho \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right] d^3r \\ &= \left[\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B} \right] d^3r \\ &= \left[\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \right] d^3r \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \int_V d^3r \left[\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \right]$$

L'argomento all'interno delle quadre lo chiamiamo **Densità di forza** = \vec{f} e possiamo riscriverlo solo attraverso i campi. Ricordiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

e che la divergenza di \vec{B} è sempre nulla, quindi posso aggiungerla o toglierla ad un solo membro in un equazione:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \\ &= \varepsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \end{aligned}$$

A questo punto introduciamo una formulazione importante che si può facilmente dimostrare:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ \vec{f} &= \varepsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 \right] - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \end{aligned}$$

Benissimo, tutto molto simmetrico e molto bello, bellissimi calcoli matematici, ma proprio per la simmetria dell'espressione introduciamo un tensore chiamato **Tensore degli sforzi** che è una matrice 3×3 :

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

Possiamo notare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{T})_j &= \sum_i v_i T_{ij} \\ (\vec{T} \cdot \vec{v})_j &= \sum_i T_{ji} v_i \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{T})_j &= \sum_i \nabla_i T_{ij} \end{aligned}$$

Andiamo ad analizzare quest'ultima e ad espanderla:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{T})_j = \sum_i \nabla_i \left[\varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \right] =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\left(\sum_i \nabla_i E_i \right) E_j + \left(\sum_i E_i \nabla_i \right) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\sum_i \nabla_i B_i \right) B_j + \left(\sum_i B_i \nabla_i \right) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]$$

Quindi notiamo che la divergenza di questo tensore è, a meno del termine con il vettore di Poynting, proprio la densità di forza che ci siamo proposti di riscrivere.

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right)_j = \vec{f} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$$

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$$

Possiamo allora riscrivere la forza risultante come:

$$\vec{F} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{T} - \mu_0 \varepsilon_0 \int_V d^3r \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \int_{\Sigma} \vec{T} \cdot d\vec{\Sigma} - \mu_0 \varepsilon_0 \int_V d^3r \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{d\vec{p}_{MEC}}{dt}$$

Dobbiamo fare molta attenzione al fatto che le forze fanno variare il momento meccanico delle particelle. Quello che possiamo notare da questa formula invece è che non è solo il momento meccanico a dover variare.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_M}{dt} &= \int_{\Sigma} \vec{T} \cdot d\vec{\Sigma} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S} \\ \frac{d}{dt} \left[\vec{p}_M + \int_V d^3r \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} \right] &= \int_{\Sigma} \vec{T} \cdot d\vec{\Sigma} \end{aligned}$$

La cosa più importante da notare è che il momento totale è dato sia dal momento meccanico che da un'energia in movimento dataci dal vettore di Poynting. Cosa vuol dire questo?

Che la variazione del momento totale di un sistema elettrodinamico (cariche più momento dei campi associato ad \vec{S}) è legato al flusso attraverso la superficie che racchiude il volume considerato di un oggetto tensoriale. Questo tensore, infatti, trasporta del momento, il momento associato ai campi. In particolare T_{ij} rappresenta quanto la i -esima componente del momento sta variando rispetto alla superficie con vettore normale parallelo a j . Il tensore così ottenuto, e qui capiamo perché viene detto *degli sforzi*, è comprensibile nel linguaggio della fluidodinamica: rappresenta sia pressioni, sulla diagonale principale (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}), che gli sforzi di taglio dati dai termini misti, quella che in fisica viene detta viscosità (un approfondimento sul tensore e il suo significato in fondo al documento).

Come seconda considerazione dobbiamo notare che il principio azione e reazione non prevede più forze allineate istantaneamente e neppure una reazione immediata: in un sistema di due cariche per esempio se una si muove, e ammettendo la conservazione del momento, prima che l'altra inizi a muoversi può volerci del tempo: il tempo che ci mette l'energia (trasportata dai campi) a muoversi da una carica all'altra.

Nota: la non validità del principio di azione reazione si può anche verificare con un semplice esempio: prendiamo due cariche che si muovono con velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 allora avremo che entrambe subiranno una forza elettrica dovuta dal campo elettrico prodotto dall'altra carica nella direzione della congiungente tra le due cariche, in linea quindi col principio. Mentre avremo anche due forze magnetiche dovute dai campi magnetici prodotti da ciascuna carica in quanto cariche in movimento le quali però non saranno necessariamente nella stessa direzione di quelle elettriche bensì nella direzione perpendicolare sia alla velocità sia al campo magnetico stesso, in questo modo non è necessariamente vero che le due cariche subiscono forze di pari intensità, pari direzione ma

verso opposto.

Inoltre ci dice che la variazione del momento totale è data dal flusso attraverso la superficie del tensore, che tramite i campi trasporta del momento.

Possiamo inoltre ricavare una nuova funzione che chiameremo $\vec{g}(\vec{r}, t) = \text{densità di momento}$.

$$\vec{p} = \vec{p}_M + \int_v d^3r \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S} \quad \vec{g}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S}(\vec{r}, t)$$

Se nel volume non abbiamo cariche ($p_M = 0$) ci rimarrà soltanto:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{g} = \int_{\Sigma} \vec{T} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \int_V d^3r \left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right] = 0$$

Che ci porta all'ennesima equazione di continuità:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0 \quad (1.1)$$

In cui dobbiamo notare la discordanza di segno del tensore rispetto alle precedenti equazioni: il motivo è che il tensore va interpretato di suo come flusso di momento *uscente*. A questo punto se vogliamo possiamo anche scrivere il momento angolare:

$$d\vec{p} = d^3r \vec{g} \quad d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} \quad d\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{g}) d^3r$$

2 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Andiamo ad analizzare il caso particolare delle equazioni di Maxwell nel vuoto adesso: quello che ci avanza è la seconda e la quarta equazione. Vogliamo vedere cosa esce se facciamo il rotore di queste due:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni sono chiamate equazioni d'onda in quanto le soluzioni sono funzioni d'onda, funzioni cioè i cui valori si ripetono uguali dopo un *periodo*. Avremo quindi delle soluzioni attraverso campi del tipo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_i)$$

Se poi li applico all'interno dell'equazione d'onda ottengo:

$$\left(k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_i) = 0$$

che funziona solo se $c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. In cui c risulta essere la velocità della luce. Tuttavia la scrittura con seni e coseni non ci piace molto in quanto capita spesso che i campi sono somme di due

o più campi diversi andando a crearci problemi con i calcoli. Allora usiamo la **rappresentazione complessa**.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Quindi quello che facciamo è sommare i numeri complessi andando a prendere la parte reale solo quando vogliamo ottenere il valore fisico. Inoltre per semplicità analizzeremo solo **onde piane** che si propagano in una direzione e che hanno k e quindi ω costante, per quest'ultima proprietà sono anche chiamate **onde monocromatiche**.

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

2.1 Proprietà dei campi nel vuoto

Vogliamo studiare le proprietà di questi campi soluzioni. Perciò continuiamo ad usare le equazioni di Maxwell ponendo la propagazione in direzione \hat{z} , senza perdere di generalità:

$$\begin{aligned} I] \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ IV] \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0 \implies \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Dove le derivate parziali rispetto ad x e rispetto ad y si annullano sempre perchè l'unica direzione che influenza il moto è z per ipotesi. Da queste due possiamo dedurre che il campo elettrico $E_z(\vec{r}, t) = E_{0z} e^{i(kz - \omega t)}$ non dipenda né dal tempo né dalla direzione di propagazione. Ma un campo elettrico scritto così che non dipende da t o z significa necessariamente:

$$E_{0z} = 0 \quad B_{0z} = 0$$

I campi sono **ortogonali alla direzione di propagazione**. Ma il gioco degli specchi continua, usiamo le altre formule.

$$\begin{aligned} II] \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \implies \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \implies \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} (E_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) &= E_{0y} ik e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{\partial}{\partial t} (B_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) &= B_{0x} (-i\omega) e^{i(kz - \omega t)} \\ \begin{cases} E_{0y} k = -\omega B_{0x} \\ E_{0x} k = \omega B_{0y} \end{cases} &\quad \begin{cases} B_{0x} = -\frac{1}{c} E_{0y} \\ B_{0y} = \frac{1}{c} E_{0x} \end{cases} \end{aligned}$$

Facendo il rapporto fra queste due equazioni notiamo che il rapporto tra i campi elettrici e magnetici è inverso $\left(\frac{B_{0x}}{B_{0y}} = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)$ il che ci indica che il campo elettrico ed il campo magnetico hanno tra loro un angolo di 90° e dandoci anche la direzione:

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} (\hat{z} \times \vec{E}_0)$$

Cioè i campi non solo sono ortogonali tra loro, ma sono perpendicolari anche alla direzione di propagazione. Da qui in poi useremo quasi esclusivamente onde piane in quanto le onde che andremo a considerare possono essere scritte come combinazioni di onde piane.

RIASSUNTONE:

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = \hat{n} E_0 \\ \vec{B}_0 = \frac{E_0}{c} (\hat{k} \times \hat{n}) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n}) \end{cases} \quad \text{con } \hat{k} \cdot \hat{n} = 0$$

N.B. imparare bene le scale dei tipi di onda (lunghezza d'onda/frequenza - Tipo di onda). Inoltre queste onde elettromagnetiche le possiamo vedere (con le direzioni) con \vec{E} in direzione \hat{x} mentre \vec{B} in direzione \hat{y} .

2.2 Energia nei campi

Partiamo dalla considerazione nota a proposito dell'energia contenuta nei campi.

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(kz - \omega t) \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \end{aligned}$$

$$\textbf{Energia media: } \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \hat{z} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \right) \cos^2(kz - \omega t) = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \hat{z}$$

Valore medio del vettore di Poynting:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{z} \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = c \langle u \rangle$$

E se ci vogliamo chiedere quanta energia passa in una superficie in un lasso di tempo Δt ? beh è l'energia contenuta in un volumetto $c \cdot \Delta t$ dall'onda elettromagnetica:

$$\langle u \rangle c \Delta t A = \langle S \rangle A \Delta t \implies \langle S \rangle = c \langle u \rangle$$

Inoltre in questo volumetto troviamo anche densità di momento:

$$\langle \vec{g} \rangle = \mu_0 \epsilon_0 \langle \vec{S} \rangle \quad \langle g \rangle = \mu_0 \epsilon_0 \langle S \rangle = \mu_0 \epsilon_0 c \langle u \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c} \quad \langle u \rangle = c \langle g \rangle$$

MA ipotizziamo invece di avere una parete solida di fronte alla nostra onda: cosa succede? Beh in prima analisi deve conservarsi la quantità di moto per cui scriveremo:

$$\Delta p = \langle g \rangle A c \Delta t \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \langle g \rangle A c \quad \frac{F}{A} = P_{rad} = \langle g \rangle c = \langle u \rangle = \frac{I}{c}$$

L'ultimo fattore lo chiamiamo **Pressione di radiazione**, mentre I è l'intensità della radiazione:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

3 Onde nella materia

- **Polarizzazione elettrica \vec{P}**

Il campo elettrico in un materiale lo deforma andando a creare effetti elettrici non trascurabili.

- **Magnetizzazione \vec{M}**

La cosa che le accomuna è che questi effetti vanno inseriti all'interno delle equazioni di Maxwell in quanto possono essere significativi. Possiamo quindi riscrivere così:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \\ \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\implies \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 (1 + \chi_m)} \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Nuovamente prendiamo in causa il caso di trovarsi il vuoto di cariche libere, cosa succederà? ($\rho_{lib} = 0$ $\vec{J}_{lib} = \vec{0}$)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Quello che succede è che cambia soltanto la velocità nel mezzo in cui sta passando. Nella maggior parte dei casi la differenza tra le permeabilità magnetiche è trascurabile rispetto alla differenza tra le permittività elettriche:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} = \frac{1}{n}$$

Dove $n \geq 1$ e si chiama **indice di rifrazione**.

3.1 Onde sull'interfaccia

Ci interessa a questo punto studiare cosa succede ai campi all'interfaccia di due materiali diversi. Da considerazioni precedenti a questo corso sappiamo le condizioni al contorno (dimostrabili con la circuitazione di E). **Condizioni al contorno:**

$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \\ E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \end{cases}$$

Per il campo magnetico valgono le condizioni opposte. Possiamo quindi scrivere, considerando tre onde diverse (I incidente, R riflessa, T trasmessa):

$$(\dots) e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega_I t)} + (\dots) e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega_R t)} = (\dots) e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega_T t)}$$

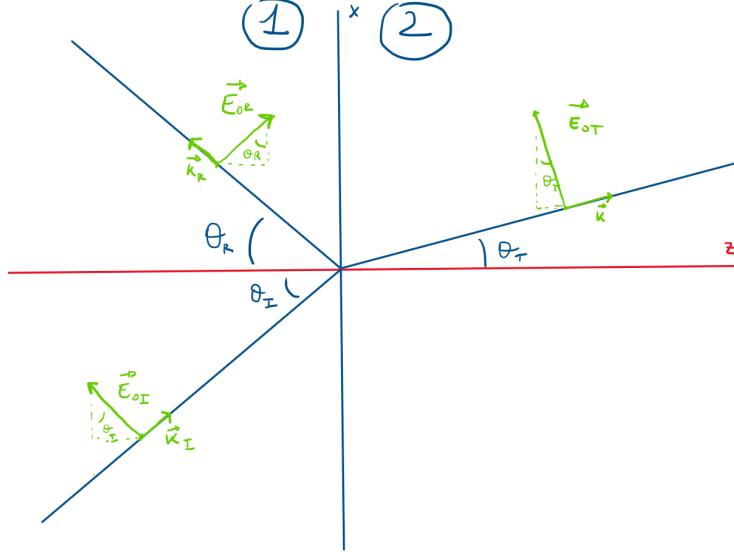


Figura 1: Problema di riflessione-rifrazione ottica elettrica

Questa equazione è verificata per ogni t , dunque tutte le fasi devono essere uguali visto che ciò che c'è dentro le parentesi è diverso:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega$$

A questo punto posso dividere l'equazione scritta precedentemente per $e^{-i\omega t}$ e mi sbarazzo dell'andamento temporale. Inoltre deve essere verificata per tutto il piano $z = 0$ e quindi per ogni (x, y) , poniamo dunque come prima le fasi uguali:

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$$

$$xk_{Ix} + yk_{Iy} = xk_{Rx} + yk_{Ry} = xk_{Tx} + yk_{Ty}$$

$$\text{se } x = 0 \implies yk_{Iy} = yk_{Ry} = yk_{Ty} \quad 0 = k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}$$

$$\text{se } y = 0 \quad xk_{Ix} = xk_{Rx} = xk_{Tx}$$

In pratica quello che possiamo dedurne è che, essendo la prima onda sul piano di incidenza (piano $x - y$) anche le altre due le troveremo sullo stesso piano.

$$\begin{cases} k_{Ix} = k_{Rx} \implies k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R \implies \frac{\sin \theta_R}{\sin \theta_I} = \frac{k_I}{k_R} \\ k_{Ix} = k_{Tx} \implies k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T \implies \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{k_I}{k_T} = \frac{v_T}{v_I} = \frac{n_1}{n_2} \end{cases}$$

In entrambe ci serviamo dell'uguaglianza $\frac{\omega}{k_1} = v_1$. Quindi quello che possiamo dedurre, sostituendo quest'uguaglianza nella prima, è che $\theta_R = \theta_I$; mentre dalla seconda possiamo estrapolare come cambia l'angolo di trasmissione. Avremo quindi la **Legge di Snell**.

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

E qua siamo ancora alla pura GEOMETRIA!!!

Polarizzazione nel piano di incidenza:

$$\varepsilon_1(E_{Ix} + E_{Rx}) = \varepsilon_2 E_{Tz}$$

$$\varepsilon_1(-E_{0I} \sin \theta_I + E_{0R} \sin \theta_R) = -\varepsilon_2 E_{0T} \sin \theta_T \quad \varepsilon_1(-E_{0I} + E_{0R}) = -\varepsilon_2 E_{0T} \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I}$$

Ricordando che: $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$, posso definire $\beta = \frac{n_2}{n_1}$. Dunque l'ultimo risultato diventa:

$$E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T} \quad (3.2)$$

Usando invece la seconda equazione:

$$E_{Ix} + E_{Rx} = E_{Tx} \quad E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_I = E_{0T} \cos \theta_T$$

definendo: $\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{1}{\cos \theta_I} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = \frac{1}{\cos \theta_I} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_T}{\sin^2 \theta_I} \sin^2 \theta_I} = \frac{1}{\cos \theta_I} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I}$
posso riscriverla nel seguente modo:

$$E_{0I} + E_{0R} = \alpha E_{0T} \quad (3.3)$$

Mettendo a sistema 3.2 e 3.3 e risolvendo arrivo all'equazioni di Fresnel con polarizzazione nel piano di incidenza:

$$\begin{cases} E_{0T} = \frac{2E_{0I}}{\alpha+\beta} \\ E_{0R} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) E_{0I} \end{cases}$$

Detto questo possiamo ricordare che nel vuoto $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \hat{k}$, che in un altro materiale diventa:

$$\langle \vec{S}_I \rangle = \frac{1}{2} v_I \varepsilon_1 E_0^2 \hat{k}$$

A questo punto possiamo ricavare i seguenti risultati che ci dicono quanta energia viene trasmessa nella direzione di propagazione per unità di tempo e di area:

$$\begin{cases} I_I = \frac{1}{2} v_I \varepsilon_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I \\ I_R = \frac{1}{2} v_I \varepsilon_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R \\ I_T = \frac{1}{2} v_I \varepsilon_1 E_{0T}^2 \cos \theta_T \end{cases}$$

Definiamo ora il **coefficiente di riflessione**:

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_0^2 I} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

ed il **coefficiente di trasmissione**:

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{v_I \varepsilon_1 E_{0T}^2 \cos \theta_T}{v_I \varepsilon_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I} = \frac{n_1 n_2^2 4\alpha}{n_2 n_1^2 (\alpha + \beta)^2} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

Importante notare che:

$$R + T = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} = 1$$

Se $\theta_I = 0$ allora abbiamo:

$$R = \frac{\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Esiste il fenomeno di riflessione totale in cui l'angolo di trasmissione è $\theta_T = \frac{\pi}{2}$. Può accadere nei casi in cui $n_1 > n_2$. Sostituendo nella legge di Snell avremo:

$$\sin \theta_I = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_{crit} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Adesso vediamo una condizione particolare in cui **la riflessione è annullata** e troviamo solo trasmissione dell'onda:

$$\alpha = \beta \quad \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{dove} \quad \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{1}{\cos \theta_I} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I} &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cos \theta_I \\ \sin^2 \theta_I - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2 \theta_I - \cos^2 \theta_I \\ \sin^2 \theta_I \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right] &= \cos^2 \theta_I \left[\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1\right] \\ \tan^2 \theta_I = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 &\Rightarrow \tan \theta_I = \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

Andiamo a trovare quindi l'**Angolo di Brewster**:

$$\theta_I = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

3.2 Campi nei conduttori

$$\vec{J}_{lib} = \sigma \vec{E}$$

Andando ad analizzare i campi nei conduttori potremo riscrivere la Quarta equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

E se procediamo facendone la divergenza troveremo invece:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 0 = \mu \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \mu \left(\sigma \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_{lib} \\ \Rightarrow \rho_{lib}(\vec{r}, t) &= \rho_{lib}(\vec{r}, 0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_{lib}(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \end{aligned}$$

Su scale di tempo più grandi di τ troveremo poco da osservare. Sigma può variare di molti ordini di grandezze, tendenzialmente molto alto per buoni conduttori.

$$\frac{1}{\omega} \gg \tau \Rightarrow \omega\tau \ll 1$$

In questo caso la risposta del conduttore è molto minore del tempo tipico dell'onda, vediamo ora praticamente cosa accade all'onda facendo il passaggio che facevamo prima per trovare le equazioni d'onda.

In assenza di cariche libere

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 E &= -\mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \\ \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Dove OVVIALEMENTE, CHIARAMENTE il termine con la derivata prima nel tempo è un **termine di smorzamento**. Allora l'unico modo che abbiamo per riscrivere l'onda è considerando k non più solo reale ma con anche parte immaginaria.

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= k + ik' \\ \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} = E_0 e^{-k'z} e^{i(kz - \omega t)} \\ -\tilde{k}^2 + i\mu\sigma\omega + \mu\varepsilon\omega^2 &= 0 = -k^2 + k'^2 - 2ikk' + \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \\ \begin{cases} k^2 - k'^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \\ 2kk' = -\mu\sigma\omega \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} k = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} + 1} \\ k' = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} - 1} \end{cases}\end{aligned}$$

Esiste una distanza tipica ($d = \frac{1}{k'}$) che smorza esponenzialmente la penetrazione del campo nel materiale.

4 Potenziali elettromagnetici

Sappiamo che valgono le seguenti relazioni per esprimere i campi attraverso delle funzioni potenziali.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

In pratica definiamo il campo elettrico come il gradiente di una funzione scalare V , il potenziale elettrico, ed il campo magnetico tramite il rotore di un campo vettoriale che chiamiamo \vec{A} di cui

vedremo le caratteristiche e che nominiamo **potenziale vettore**. Se andiamo ad inserire queste informazioni nella seconda equazione di Maxwell otteniamo:

$$I] \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Cioè l'espressione tra parentesi finale è quindi sempre irrotazionale perciò possiamo riscriverlo come gradiente di un potenziale, che per comodità chiamiamo sempre V :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V$$

Posso quindi scrivere i campi nel seguente modo, coerente con la prima e la quarta equazione di Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Infatti vale per il campo elettrico la prima equazione di Maxwell, che alla luce dei potenziali diventa:

$$I] \quad \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

CASO STATICO

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Questa è la già nota equazione di **Poisson** che ci aiuta a definire il potenziale V nel caso statico dei campi. Inoltre vale per il campo magnetico la quarta equazione di Maxwell, cioè:

$$IV] \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \left(-\vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

Abbiamo quindi ricavato 2 equazioni differenziali dalle quali è possibile arrivare ai potenziali (e quindi ai campi) partendo dalle sorgenti. Queste equazioni ci serviranno tra poco ed è inoltre importante ricordare che valgono in generale, anche per il caso non statico:

$$1] \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$2] \quad \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

Volendo invece analizzare i **casi statici**, un caso particolare delle equazioni precedenti in cui abbiamo eliminato la dipendenza temporale:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) = -\mu_0 \vec{J}$$

4.1 Trasformazioni di gauge

Dati V , \vec{A} introduciamo una trasformazione dei potenziali appena definiti attraverso una funzione scalare β ed un campo vettoriale α :

$$V' = V + \beta$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$$

e ci chiediamo se i campi ricavati da questi nuovi potenziali sono comunque soluzioni delle equazioni di Maxwell. Cioè vogliamo trovare le caratteristiche di β ed α per trovare i campi \vec{E} e \vec{B} tali che, prendendo come esempio il campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}'$, esso resti invariato.

$$1] \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\alpha}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\nabla} \gamma$$

Cioè α deve essere irrotazionale, quindi ammette di essere definito attraverso il gradiente di una certa funzione scalare γ . Il campo elettrico \vec{E}' anche deve restare invariato quindi deve essere uguale ad E :

$$2] -\vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad -\vec{\nabla} V - \vec{\nabla} \beta - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \beta + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \vec{\nabla} \beta + \frac{\partial \vec{\nabla} \gamma}{\partial t} = 0 \quad \vec{\nabla} \left(\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = 0$$

cioè l'argomento all'interno di quest'ultima parentesi non dipende da \vec{r} ed è funzione solo da t e quindi:

$$\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = f(t) \quad \beta = -\frac{\partial \gamma}{\partial t} + f(t) \quad \lambda = \gamma - \int_0^t dt' f(t') \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} - f(t)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \gamma = \vec{\nabla} \lambda \implies \begin{cases} V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \end{cases}$$

Quindi a partire da una funzione arbitraria λ possiamo definire tutti i potenziali che mi danno gli stessi \vec{E} e \vec{B} .

$$\textbf{N.B. Casi statici} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

Abbiamo operato questa trasformazione, vedendo che è coerente con i campi, perché ora ci possiamo servire della funzione scalare λ per fornire ai potenziali proprietà particolari. In generale quando una funzione non è invariante per trasformazione ma viene preservata a meno di qualche fattore (in questo caso una derivata temporale e un gradiente per i potenziali) possiamo sfruttare i *gauge* cioè la non invarianza delle funzioni per semplificare le equazioni che le coinvolgono. (i bimbi di Pagani apprezzeranno particolarmente queste prossime pagine, i *gauge* provocano ai veri fisici teorici una sensazione paragonabile ad un orgasmo multiplo) Vediamoli.

4.2 Gauge di Coulomb

Il gauge di Coulomb prende in considerazione solo il caso statico (campi non dipendenti esplicitamente dal tempo). Con questo gauge imponiamo l'annullamento della divergenza del potenziale vettore: quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$. Attraverso la definizione $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$ vediamo che questa condizione corrisponde a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda = 0$$

La condizione che imponiamo sulla funzione λ è quindi che $\nabla^2 \lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, e la definiamo **gauge statico di Coulomb**. Sotto queste ipotesi le equazioni statiche per i potenziali diventano

$$\nabla^2 V' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J}$$

Queste sono le nuove equazioni di V' e \vec{A}' , dove la formula che coinvolge \vec{A}' è stata semplificata poichè il gauge ha imposto l'annullamento della sua divergenza. E da questi nuovi potenziali ricaviamo dei campi comunque soluzioni delle equazioni di Maxwell e quindi coerenti con la fisica che vogliamo descrivere.

4.3 Gauge di Lorentz

Il gauge di Lorentz è fondamentale in elettrodinamica poichè si occupa del caso anche non statico (quindi fare riferimento alle formule del caso non stazionario). La condizione che vogliamo imporre nel gauge è

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Da cui abbiamo ricavato le nuove formule per i potenziali, molto più eleganti di quelle generiche del caso non stazionario.

Più compattamente introduciamo l'**operatore d'Alambert**

$$\begin{cases} \square^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Notare che mettiamo spazio e tempo sullo stesso piano (moltiplicando c per t), ma notando che la derivata nel tempo ha segno negativo (primo accenno allo spazio di Minkowski)...per cui vediamo che spazio e tempo sono in qualche modo legate.

4.4 Potenziali ritardati

Adesso osserviamo che queste nuove equazioni sono molto simili a quelle di Poisson tranne per la presenza del tempo...possibile che abbiano soluzioni simili? Ovviamente sì. Il concetto è che devo tenere conto del ritardo nel passaggio dell'informazione tra r e r' , cioè tra la sorgente ed il punto in cui voglio il potenziale.

Allora introduciamo il **Tempo Ritardato**:

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

e quindi i potenziali ritardati (cioè che sentono in ritardo l'informazione se questa non si propaga a velocità infinita, notare un primo accenno di legame con la teoria della relatività che rende l'elettrodinamica già compatibile con essa):

$$\begin{cases} V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{cases}$$

Dimostriamo adesso che $V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ sia la soluzione del d'alambertiano.

$$l = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad \vec{l} = \vec{r} - \vec{r}' \quad V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{l}{c})}{l}$$

Partiamo dal dimostrare alcune formuline che ci saranno utili dopo:

- 1] Voglio dimostrare $\vec{\nabla}l = \hat{l}$

$$l = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\vec{\nabla}l = \frac{(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \frac{\vec{l}}{l} = \hat{l}$$

- 2] $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{\hat{l}}{l^2}$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = -\frac{(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\vec{l}}{l^3} = \frac{\hat{l}}{l^2}$$

- 3] $\vec{\nabla}\hat{l} = \frac{1}{l^2}$

$$\vec{\nabla}\hat{l} = \vec{\nabla}\frac{\vec{l}}{l^2} = \vec{\nabla}\frac{(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{()^2 + ()^2 + ()^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y'}{()^2 + ()^2 + ()^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z'}{()^2 + ()^2 + ()^2}$$

$$= \frac{3}{l^2} - \frac{2(x - x')^2 + 2(y - y')^2 + 2(z - z')^2}{[()^2 + ()^2 + ()^2]^2} = \frac{3}{l^2} - \frac{2l^2}{l^4} = \frac{1}{l^2}$$

- 4]

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{l}}{l^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{\hat{l}}{l} \right) = \frac{\hat{l}}{l} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{l} + \frac{1}{l} \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{l}}{l} = -\frac{\hat{l}}{l} \cdot \frac{\hat{l}}{l^2} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{l^3} = 0$$

Adesso dimostriamo che non può essere uguale a zero...Nigga say What???

$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{l}}{l^2}$ è un campo radiale con intensità $\frac{1}{l^2}$, posso quindi applicare Gauss:

$$\int_{\Sigma} \frac{\hat{l}}{l^2} d\vec{\Sigma} = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{l}}{l^2} d\tau$$

$$\frac{4\pi l^2}{l^2} = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{l}}{l^2} d\tau$$

ES: per una carica puntiforme posso scrivere $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$

Una cosa interessante è che se faccio l'integrale di una funzione moltiplicata per il delta di Dirac (centrata in un punto) ottengo la funzione in quel punto:

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

Torniamo al potenziale ritardato, notiamo che $\vec{\nabla}$ è rispetto a r e che r' abbiamo la densità di carica ρ . Inoltre facendo il gradiente di ρ avrà solo la derivata del fattore t_r (in quanto ρ dipende da r' e non r) con quindi derivata parziale di ρ rispetto a t_r meno la derivata dell'argomento di t_r ($-\frac{1}{c}$):

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \vec{\nabla} \cdot \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{l}$$

$$\vec{\nabla} \frac{\rho}{l} = \frac{1}{l} \vec{\nabla} \rho + \rho \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{l} = \frac{1}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t_r} \left(-\frac{1}{c} \right) + \rho \vec{\nabla} \frac{1}{l}$$

$$= -\frac{1}{c} \dot{\rho} \frac{\hat{l}}{l} - \frac{\hat{l}}{l^2} \implies \vec{\nabla}V = - \int d^3r' \left(\frac{1}{c} \dot{\rho} \frac{\hat{l}}{l} + \rho \frac{\hat{l}}{l^2} \right)$$

Ora vediamo il Laplaciano:

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 \frac{\rho}{l} &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \dot{\rho} \frac{\hat{l}}{l} + \frac{\hat{l}}{l^2} \right) \\
&= -\frac{1}{c^2} \ddot{\rho} \frac{\hat{l}}{l} \cdot \hat{l} + \frac{1}{c} \dot{\rho} \vec{\nabla} \left(\frac{\hat{l}}{l} \right) + \frac{\hat{l}}{l^2} \dot{\rho} \left(-\frac{1}{c} \vec{\nabla} l \right) + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{\hat{l}}{l^2} \right) \\
&= -\frac{\ddot{\rho}}{c^2 l} + 4\pi\rho \delta(\vec{l})
\end{aligned}$$

che inserito nel potenziale diventa

$$\begin{aligned}\nabla^2 V(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \left(4\pi\rho \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\ddot{\rho}}{c^2 l} \right) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \frac{\ddot{\rho}}{c^2 l} \\ &= -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{l} \right) \right]\end{aligned}$$

Dove la parte nella quadra è proprio $V(\vec{r}, t)$, quindi portando a sinistra il termine dimostriamo la nostra formula, con la condizione che il potenziale ad infinito valga zero.

$$\nabla^2 V(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}$$

MORALE DELLA FAVOLA Se abbiamo tante cariche, ognuna con distanza diversa, ogni carica ha tempi ritardati diversi quindi i vari contributi vanno studiati ad-hoc. Quello che succede è che nell'integrale il volume delle cariche risulta deformato (dilatato/contratto) come conseguenza del suo moto. Per esempio se abbiamo una sbarretta che si muove risulterà dilatata per via della velocità limitata della trasmissione del messaggio.

Come riassuntone abbiamo le **Equazioni di Jefimento**.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{l^2} \hat{l} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{cl} \hat{l} - \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{c^2 l} \right] \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{l^2} \hat{l} + \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{cl} \hat{l} \right] \times \hat{l} \end{cases}$$

4.5 Forze e momenti

$$\begin{cases} \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \left[-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

dove possiamo riscrivere $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{\nabla}(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

Ma quello che ci chiediamo tutti è...cos'è la componente $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$? Il fatto che la nostra carica si sia spostata di $d\vec{r} = \vec{v}dt$ fa in modo che subisca un potenziale diverso...MA NON SOLO: anche la mia distribuzione di carica può essere cambiata. QUINDI?

$$\frac{dA}{dt} dt = dA = \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) &= \vec{A}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \quad \text{espando al primo ordine} \\ &= \vec{A}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

dove per esempio $dz = v_z dt$

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \left[v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] dt \\ \text{Convective derivative } \implies \frac{dA}{dt} &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -q \left[\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \\ \frac{d}{dt} [\vec{p} + q\vec{A}] &= -q\vec{\nabla}(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

dove definiamo il **Momento canonico**: $\vec{p} + q\vec{A} = p_c$ Vediamo adesso che cosa succede con una carica puntiforme in movimento con $\vec{r}_P(t)$ nota.

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_P(t)) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}_P(t) \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) \quad \vec{u} = c\hat{r} - \vec{v}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{(\vec{l} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{l} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{l} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Dove avremo i **Potenziali di Lienard**:

$$\begin{cases} V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_c}{l_c - \vec{l} \cdot \vec{v}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t) \end{cases}$$

5 Dipolo oscillante

Vediamo la parte di radiazione dei campi considerando un dipolo semplice la cui carica oscilla come un moto armonico. Prendiamo un sistema con due cariche sull'asse z , una fissa su $z = -\frac{d}{2}$ dal valore di $-q$, mentre una su $z = \frac{d}{2}$ con un valore $q(t) = q_0 \cos \omega t$ che crea uno scompenso che può anche essere visto come una corrente. Chiameremo l_{\pm} la distanza dalla carica q_+ e q_- . Definiamo intanto momento di dipolo e densità di carica:

$$\vec{p}(t) = q(t) d \hat{z} = q(t) d \hat{z} = q_0 \cos(\omega t) d \hat{z} = [p_0 \cos(\omega t)] \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= q(t) \delta(\vec{r} - \frac{d}{2} \hat{z}) - q(t) \delta(\vec{r} + \frac{d}{2} \hat{z}) \\ &= q(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_+') - q(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_-') \end{aligned}$$

passiamo esplicitando la distanza

$$\begin{aligned} l_{\pm} &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp dr \cos \theta} \\ &= r \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 \mp \frac{d}{r} \cos \theta} \longrightarrow r \gg d \approx r \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \\ \frac{1}{l_{\pm}} &\approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \end{aligned}$$

Allora possiamo definire il potenziale generato:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(t - \frac{l_+}{c})}{l_+} - \frac{q(t - \frac{l_-}{c})}{l_-} \right] = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos[\omega(t - \frac{l_+}{c})]}{l_+} - \frac{\cos[\omega(t - \frac{l_-}{c})]}{l_-} \right] r \gg d \longrightarrow \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{d}{2c} \cos \theta \right) \right] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{d}{2c} \cos \theta \right) \right] \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Usiamo la somma di seni e coseni utilizzando } \alpha &= \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad \beta = \omega \frac{d}{2c} \cos \theta \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) - \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \right] \cdot \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[\dots \right] \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right\} \end{aligned}$$

Ora facciamo un'altra approssimazione $\frac{\omega d}{c} \ll 1$ cos'è? $d \ll \lambda$.

$\lambda = cT = c\frac{2\pi}{\omega}$ è la distanza percorsa dall'onda e io voglio che d sia la distanza più piccola. Serve per escludere un temporitardato dalla carica sopra alla carica sotto: $d \ll \frac{c}{\omega}$ $\frac{\omega d}{c} \ll 1$

$$\implies \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \approx 1 \implies \sin\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \approx \frac{\omega d}{2c} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{d}{r^2} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega d}{cr} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^2} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{cr} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$r \gg \lambda$ cancello la prima componente che scala prima e quindi trascurabile.

$$V(\vec{r}, t) = -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad I = \int dx' dy' \vec{J} = \frac{dq}{dt} |_{t=t_r}$$

Se l'asta ha una sezione molto piccola sarà una delta di Dirac.

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dz' \frac{1}{l(z')} \iint dx' dy' \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz' \frac{1}{l(z')} \cdot \omega q_0 \sin(\omega t_r) \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dz' \frac{q_0 \omega}{l(z')} \sin \left[\omega \left(t - \frac{l(z')}{c} \right) \right] \hat{z} \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dz' \frac{q_0 \omega}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{z} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d q_0 \omega}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{z} \end{aligned}$$

A questo punto vogliamo cercare quali sono i campi elettrici e magnetici generati dai potenziali appena trovati:

$$\begin{cases} \vec{E} = ? = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \\ \vec{B} = ? = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \implies \vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\vec{\nabla}V = -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ -\frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\cos \theta \omega}{rc} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \hat{r} - \frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta}$$

con $\lambda \approx \frac{c}{\omega} \ll r$. L'unico termine che sopravvive lontano dal dipolo sarà il secondo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}V &= \frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{z} \quad \hat{z} = (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \end{aligned}$$

Finalmente dopo piccoli ulteriori passaggi troviamo che i campi sono definiti:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] \hat{\varphi} = B_\varphi \hat{\varphi}$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 P_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

Il primo è una costante, mentre l'altro scala come $\frac{1}{r}$ diventando quindi trascurabile a grandi distanze.
La definizione ultima e rigorosa allora è:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta} \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\phi} \end{cases}$$

Arriviamo finalmente al **vettore di Poynting**, che ci rappresenta l'energia trasportata dai campi:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

Di questa espressione ne prendiamo il valor medio, ricordando che il valor medio del coseno al quadrato è $\frac{1}{2}$:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \hat{r} \implies I = \langle S \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 c}$$

Quindi l'intensità della radiazione emessa è radiale ma non isotropa: infatti se $\theta = 0$, cioè ci troviamo sull'asse z del dipolo, non rileviamo radiazione alcuna. Ultimo sforzo per la potenza irradiata.

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{\Sigma} = \int \langle S \rangle \cdot d\Sigma = \int d\Omega r^2 \langle S \rangle \\ &= \int d\phi d\theta \sin \theta r^2 \langle S \rangle = 2\pi \int_0^\pi d\theta r^2 \langle S \rangle \sin \theta \\ &= \frac{2\pi \mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \cdot \frac{2\pi \mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \\ \langle P \rangle &= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \end{aligned}$$

In conclusione, il flusso di energia uscente dalla sfera nell'unità di tempo non dipende dal raggio r della sfera ed è determinato dalle due caratteristiche principali del dipolo elettrico, p_0 e ω .

5.1 Dipolo magnetico oscillante

Se invece avessimo una spira percorsa da corrente? Abbiamo dipolo magnetico. Se la corrente va avanti e indietro avremo un **Dipolo Magnetico Oscillante**. Non facciamo i calcoli.

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \vec{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \hat{z} \quad m = i\Sigma$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\phi} \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c^2} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} < P_{mag} > &= \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{12\pi c^3} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{q\omega}{2\pi} = I_0 \\ \frac{< P_{mag} >}{< P_e >} &= \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 q_0 \omega}{q_0 d c} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{c} \right)^2 \approx \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \xrightarrow{d \ll \lambda} 0 \end{aligned}$$

Vince il dipolo elettrico (ariano cis etero).

5.2 Distribuzione di carica qualsiasi

Sappiamo:

$$\rho(\vec{r}, t) \quad \vec{J}(\vec{r}, t) \quad V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \hat{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{r \gg d} R \left(1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right) \frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right) \\ t_r &= t - \frac{l}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \text{ con } t_0 = t - \frac{r}{c} \\ \rho(\vec{r}', t_0 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c}) &\approx \rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \end{aligned}$$

$\dot{\rho}$ mi dà un'idea della scala dei tempi che uso, il cui reciproco invece mi dà una frequenza.

$$\begin{aligned} \implies V(\vec{r}', t_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \left[\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3 r' \rho(\vec{r}', t_0) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3 r' \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \rho(\vec{r}', t_0) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3 r \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \\ &= \frac{Q_{TOT}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}(t_0)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c r} \cdot \int d^3 r \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] \end{aligned}$$

Se vogliamo calcolare la radiazione cancelliamo i primi due termini in quanto sono i termini di monopolio e dipolo del campo stazionario e che quindi non danno radiazione.

$$V(\vec{r}', t) = \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{4\pi\epsilon_0 rc}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}', t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{1}{l} \vec{J} \left(\vec{r}', t_0 - \frac{l}{c} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{1}{r} \vec{J} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 r' \vec{J}(\vec{r}', t_0) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \dot{\vec{p}}(t_0) \end{aligned}$$

Notare che entrambi vanno nell'ordine di $\frac{d}{r}(p \approx d \cdot q)$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \vec{\nabla}\left(\frac{\dot{p}(t_0)}{4\pi\varepsilon_0 cr}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \left[-\frac{\hat{r}}{r^2} \dot{p}_r(t_0) + \frac{1}{r} \left(\ddot{p}(t_0) \cdot \frac{1}{c} \hat{r} \right) \right] \\
&\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \cdot \left(\frac{1}{cr} \hat{r} \ddot{p}(t_0) \right) \\
&= \frac{\mu_0 \hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{4\pi r} \hat{r} \\
\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t_0) \\
\begin{cases} \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0) \hat{r} - \hat{r} \cdot r \ddot{\vec{p}}(t_0) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \hat{r} \times \left[\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}(t_0) \right] \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t_0) \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}(t_0) \right] \end{cases}
\end{aligned}$$

Localmente sono onde piane $|B| = \frac{|E|}{c}$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{p}}(t_0) &= \ddot{p}(t_0) \hat{z} & \vec{r} \times \hat{z} &= -\sin \theta \hat{\phi} \\
\begin{cases} \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p}(t_0) \sin \theta \hat{\theta} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p}(t_0) \sin \theta \hat{\phi} \end{cases} \\
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \hat{r} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^2} \ddot{p}^2(t_0) \\
P(\vec{r}, t) &= \int \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2(t_0)}{8\pi c} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2(t_0)}{6\pi c}
\end{aligned}$$

Questa è proprio l'energia irradiata, non dipende dal raggio o dall'angolo. E' la potenza irradiata nell'istante t_0 e misurata nell'istante t .

5.3 Carica puntiforme

$$\vec{p}(t) = q \vec{d}(t) \quad \ddot{\vec{p}} = q \vec{a}(t) = q \frac{d^2}{dt^2} \vec{d}(t)$$

Formula di Larmor

$$P(t) = \frac{\mu_0 a^2(t) q^2}{6\pi c}$$

Ci dà la radiazione di una particella che si muove.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} [\hat{r} (\hat{r} \times \vec{a}(t_0))] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E} \end{cases}$$

Quando andiamo a prendere in considerazione cariche a velocità paragonabili alla luce cambiano i campi e vedremo come. Inoltre se abbiamo due corpi, uno carico e uno no, se applico la stessa forza avrò due energie cinetiche diverse alla fine. Questo effetto di "forza resistiva" si chiama **forza di radiazione**.

6 INTRODUZIONE ALLA RELATIVITA' RISTRETTA

La relatività ristretta è la teoria sviluppata da Einstein nel 1905 con la quale egli si propose di rivedere i fondamenti della meccanica alla luce delle evidenze empiriche che sembravano stravolgerla completamente, di fatto si può considerare la relatività ristretta come una teoria classica che riconcilia la meccanica con l'elettromagnetismo. In questo capitolo ci si occupa delle situazioni fisiche in cui la forza gravitazionale è trascurabile e si lavora con velocità paragonabili a quelle della luce.

Cominciando dal principio da cui sboccia questa teoria dobbiamo introdurre il fulcro della relatività: i sistemi di riferimento e chiarire le relazioni fisiche che intercorrono tra essi.

6.1 Sistemi di riferimento inerziali

Un sistema è inerziale se vale il principio di inerzia classico. Rispetto a un riferimento siffatto descriviamo la totalità degli eventi possibili, ovvero lo spazio tempo, con $V^4 = \{(t, x, y, z) \mid t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. La legge della meccanica di un sistema di questo tipo deve essere della forma

$$\begin{aligned} f(t, \vec{x}, \vec{v}, \vec{a}) &= 0 \\ f(t, \vec{x}', \vec{v}', \vec{a}') &= 0 \end{aligned}$$

Dove le due funzioni f sono legate rispettivamente all'osservatore O e O' , assumiamo quindi che le leggi della fisica siano equivalenti nei due sistemi (assioma giustificato dagli esperimenti). Allora se consideriamo un sistema di N punti materiali di massa $m_{i=1,N}$ che interagiscono attraverso potenziali centrali a due corpi (per esempio, per interazione gravitazionale) la dinamica è descritta da:

$$\begin{aligned} O : m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \nabla_i \sum_{i \neq j} v_{ij} |\vec{x}_i - \vec{x}_j| &= 0 \\ O' : m_i \frac{d\vec{v}'_i}{dt} + \nabla'_i \sum_{i \neq j} v_{ij} |\vec{x}'_i - \vec{x}'_j| &= 0 \end{aligned}$$

Per capire se i due sistemi assistono allo stesso fenomeno, cioè se la fisica è coerente, bisogna trovare una legge di trasformazione delle coordinate usate dai due riferimenti che preserva le leggi della meccanica. Usualmente si usavano le trasformazioni di Galileo tra i vari sistemi di riferimento che rendono la meccanica invariante per cambi di sistemi di riferimento.

Ma tutto ciò vale anche con l'elettrodinamica?

Esperimento mentale: consideriamo una carica elettrica in quiete descritta dal sistema di riferimento solidale con essa (la stazione) e un riferimento invece in moto rispetto ad essa (il treno). I passeggeri del treno diranno che, essendo in quiete, la carica genera solo un campo elettrico. D'altra parte il negro che dorme in stazione, vedendola in movimento, dirà che la carica genera anche un campo magnetico. (da quando i negri sanno cos'è un campo magnetico?)

Facciamo un altro esempio: abbiamo una spira in un treno che passa tra due magneti; il treno è il sistema O' mentre O è il sistema terra. Rispetto ad entrambi i sistemi di riferimento il flusso è diverso da zero, ma solo nel secondo caso la forza di Lorentz è diversa da zero.

Un altro caso interessante è considerare la propagazione di un'onda elettromagnetica in due sistemi di riferimenti inerziali. L'equazione in O avrà la seguente forma:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(t, \vec{x}) = 0$$

mentre, con le trasformazioni di Galileo, rispetto ad O' avrà la seguente forma:

$$\left[\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}') \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}') (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}') \right] \psi(t', \vec{x}') = 0$$

Cosa che è evidentemente assurda. L'incompatibilità dell'elettrodinamica con le trasformazioni di Galileo era un problema ineludibile. Le possibilità erano:

- Elettrodinamica sbagliata (o approssimata)? Gli esperimenti confermavano, tuttavia, l'estremo successo di questa teoria e quindi questa ipotesi fu scartata subito.
- Trasformazioni di Galileo non estendibili all'elettromagnetismo \Rightarrow le equazioni di Maxwell valgono solo in determinati sistemi di riferimento \Rightarrow introduzione dell'etere come sistema di riferimento privilegiato \Rightarrow quest'ipotesi avrebbe dovuto provocare comunque un'addizione delle velocità *anche* nel caso della velocità della luce e comunque venne scartata dopo l'esperimento di Michelson e Morley.
- Einstein: è sbagliata la meccanica classica, il principio di relatività si applica sia alla meccanica sia all'elettromagnetismo ma sono le equazioni di trasformazione tra sistemi inerziali a dover subire una modifica.

6.2 Postulati di Einstein

- P_1] Il principio di relatività: tutti i fenomeni fisici devono essere invarianti cambiando il sistema di riferimento / per ogni osservatore.
- P_2] La velocità di propagazione dei segnali luminosi e delle nel vuoto è uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali e pari a c .
- P'_2] Il principio di esistenza di una velocità limite: per ogni osservatore / sistema di riferimento, esiste una velocità limite per la propagazione di entità fisiche, pari a c .

Quindi P_2 (e P'_2) è incompatibile con la **legge delle composizioni delle velocità Galileiana**.

6.3 Conseguenze dei postulati

- 1] **Reciprocità degli effetti relativistici:** essi devono essere reciproci passando da un sistema di riferimento all'altro. Per esempio se O è in movimento rispetto a O' allora vale anche il contrario, ovvero che O' sia in movimento rispetto ad O . Se O è in movimento con velocità \vec{V} rispetto ad O' allora quest'ultimo sarà in movimento con velocità $-\vec{V}$ rispetto al primo.

- 2] **Relatività della simultaneità:** in fisica pre-relativistica ($t = t'$), due eventi simultanei, cioè avvenuti allo stesso istante di tempo rispetto ad un sistema di riferimento, sono simultanei anche rispetto ad ogni altro sistema di riferimento: la simultaneità non è un concetto relativo. La simultaneità in relatività invece diventa dipendente dal riferimento scelto per osservare i due eventi.

Per esempio si consideri un ripetitore di onde E.M. esattamente al centro di un vagone in movimento e due ricevitori ai capi. Visto da un osservatore sul treno le onde ci mettono lo stesso tempo a raggiungere la coda e la testa del vagone perché esso osserva le onde andare a velocità c e percorrere lo stesso spazio: ciò significa che rispetto a lui gli eventi che corrispondono al raggiungimento dei capi del vagone da parte delle onde sono simultanei. Gli stessi eventi osservati da un riferimento esterno potevano essere descritti come simultanei ammettendo che la velocità di propagazione delle onde non fosse costante, ma sommasse a quella del treno (vettorialmente). Ma se prendiamo per vero il secondo postulato dobbiamo considerare che anche un osservatore esterno al treno vede sfrecciare le onde a velocità c e questo indipendentemente dalla velocità del treno! Perciò, siccome nel frattempo il treno percorre una certa distanza, per un osservatore esterno gli eventi non possono essere simultanei: arriverà prima l'onda che viaggia in direzione contraria a quella del treno.

- 3] **Dilatazione dei tempi:** prendiamo ora un treno in movimento (sistema O') e il terreno (sistema O). Vediamo ora un famoso esperimento mentale di Einstein, **l'orologio a luce**. In questo problema si analizza quanto ci mette un segnale a passare dal soffitto al pavimento della carrozza verticalmente a una distanza h . $t_0 = 0 = t'_0 \quad t_1, t'_1 > 0$

– Visto dal sistema O' :

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = t'_1 = \frac{h}{c}$$

– Visto dal sistema O la luce deve compiere anche una distanza $\Delta z = V\Delta t$ orizzontale:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + V^2\Delta t'^2}}{c}$$

$$\begin{aligned} c^2\Delta t'^2 &= h^2 + V^2\Delta t'^2 \\ c^2\Delta t'^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) &= h^2 \\ \Delta t'^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) &= \Delta t'^2 \\ \Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} &\quad \text{chiamo} \quad \gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

- 4] **Contrazione delle lunghezze:** usando lo stesso treno come esempio ma prendendo in considerazione un segnale che parte dal fondo di un vagone, rimbalza all'altra estremità del vagone stesso e torna indietro: chiamiamo t_1, t'_1 il tempo per arrivare da coda a capo, mentre t_2, t'_2 il tempo di ritorno.

– Visto dal treno:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= 2t'_2 = 2\frac{L'}{c} \\ \Delta t &= \Delta t' \cdot \gamma = \frac{2L'}{c}\gamma\end{aligned}$$

– Visto da terra:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ \Delta t_1 &= \frac{L + v\Delta t_1}{c} \rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c - v} \\ \Delta t_2 &= \frac{L - v\Delta t_2}{c} \rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c + v} \\ \Delta t &= \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2Lc}{c^2(1 - \beta^2)} = \frac{2L}{c(1 - \beta^2)} = \Delta t'\gamma = \frac{2L'}{c}\gamma \\ \frac{2L'}{c}\gamma &= \frac{2L}{c}\gamma^2 \implies L' = L \cdot \gamma\end{aligned}$$

Abbiamo dato per scontato il seguente assioma: la contrazione avviene sempre nella direzione del moto.

7 Le trasformazioni di Lorentz

Riprendendo la nostra varietà quadri dimensionale V_4 , lo spaziotempo, vogliamo delle trasformazioni che sostituiscano quelle galileiane per questo nuovo spazio degli eventi:

$$O(t, \vec{x}) \xleftrightarrow{T.L.} O'(t', \vec{x}')$$

$$\begin{cases} t' = t'(t, \vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x}'(t, \vec{x}') \end{cases} \implies \text{Devono essere \textbf{trasformazioni lineari}}$$

$$\begin{cases} t' = M_{00}t + \sum_{j=1}^3 M_{0j} \frac{x_j}{c} + p_0 \\ x'_i = M_{i0}ct + \sum_{j=1}^3 M_{ij}x_j + p_i \end{cases} \quad \text{dove} \quad M = \begin{pmatrix} M_{00} & \cdots & M_{0j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i0} & \cdots & M_{ij} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Per cominciare partiamo dall'ipotesi di invarianza della velocità della luce, equivalenza dei punti dello spazio tempo ed isotropia dello spazio. Consideriamo poi due eventi generici (l'emissione e assorbimento di un'onda luminosa) osservati da due sistemi di riferimento O ed O' che li descrivono con le quattro coordinate di V_4 .

$$\begin{array}{ccc} O(t, \vec{x}) & p_1(t_1, \vec{x}_1) & p_2(t_2, \vec{x}_2) \\ O'(t', \vec{x}') & p_1(t_1, \vec{x}_1') & p_2(t_2, \vec{x}_2') \end{array}$$

Chiamiamo $\Delta s = \text{distanza spazio-temporale}$ tale che:

$$\Delta s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\Delta s'^2 = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2$$

Di fatto è l'equazione per lo spazio percorso in funzione della velocità di propagazione e del tempo impiegato rispetto ai due riferimenti. Cioè:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c(t_2 - t_1)^2 \implies \Delta s^2 = 0 \implies \Delta s'^2 = 0$$

$$|\Delta \vec{x}|^2 = c^2 \Delta t^2 \implies t = \pm \frac{\sqrt{|\Delta \vec{x}|^2}}{c}$$

Abbiamo ottenuto una regola valida in relatività che riguarda gli intervalli spazio temporali Δs^2 : se in un certo riferimento un intervallo spazio temporale è nullo, esso lo sarà anche per ogni altro riferimento. Ma posso esprimere uno in funzione dell'altro? Sapendo come trasformano le coordinate si!

$$\begin{cases} \Delta t' = M_{00}\Delta t + \sum_{j=1}^3 M_{0j} \frac{\Delta x_j}{c} \\ \Delta x'_i = M_{i0}c\Delta t + \sum_{j=1}^3 M_{ij}\Delta x_j \end{cases}$$

Andando a sostituire e facendo qualche calcolo poco simpatico troveremo:

$$\Delta s^2 = N_{00}\Delta t^2 c^2 + \sum_{i=1}^3 N_{i0}(c\Delta t)\Delta x_i + \sum_{i,j=1}^3 N_{ij}\Delta x_i \Delta x_j$$

Dove N è una nuova matrice le cui componenti sono combinazioni lineari di M . Valutiamo per (p_1, p_2) **intervallo di tipo luce**. Se vado ad inserire le espressioni di $\Delta t'$ e $\Delta x'$ dentro $\Delta s'$ trovo:

$$\Delta s'^2 = N_{00}|\Delta \vec{x}|^2 + \sum N_{i0}|\Delta \vec{x}|\Delta x_i + \sum N_{ij}\Delta x_i \Delta x_j = 0 \quad \forall \Delta x, \Delta y, \Delta z$$

Questa condizione è verificata, indipendentemente dalle scelte di $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, per i seguenti valori di N :

$$N_{ii} = -N_{00} \quad \forall i=1,3 \quad N_{i0} = 0 \quad N_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

Quindi per intervallo di tipo luce abbiamo:

$$\Delta s'^2 = N_{00}(-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = N_{00}\Delta s^2$$

in un sistema dove abbiamo che O' si muove di \vec{V} rispetto a O . Il coefficiente N_{00} ora diventa fondamentale perchè esprime il legame tra i due intervalli spazio temporali, può dipendere solo dal valore assoluto della velocità relativa per gli assunti di equivalenza ed isotropia dello spazio, quindi

$$N(p_1, p_2, \vec{V}) = N_{00}(v^2) \quad N_{00}(v^2) = \frac{1}{N_{00}(|-v|^2)} = \frac{1}{N_{00}(v^2)} \implies N_{00} = 1$$

Cioè la relazione tra gli intervalli spazio temporali è un'uguaglianza. Quindi, tornando ora a Lorentz, abbiamo dimostrato che le seguenti trasformazioni valgono in relatività e da esse ricaviamo l'invarianza della quantità Δs^2 :

$$\begin{cases} t' = M_{00}t + \sum_{j=1}^3 M_{0j} \frac{x_j}{c} + p_0 \\ x'_i = M_{i0}ct + \sum_{j=1}^3 M_{ij}x_j + p_i \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 \longrightarrow \Delta s^2 = \Delta s'^2$$

Ora andiamo a trattare dei casi particolari, utili, di trasformazioni di Lorentz per sostituire la scomoda matrice M generica con qualcosa di più operativo.

7.1 Traslazione spazio-temporale

O, O' t.c. asse $x \parallel x'$, $y \parallel y'$, $z \parallel z'$ e $\vec{V} = 0$

Abbiamo uno shift temporale fisso di Δt . Di fatto qui consideriamo due sistemi di riferimento che sono solo traslati nello spazio e nel tempo, ma immobili l'uno rispetto all'altro, cioè due riferimenti inerziali. Siamo in un caso classico.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} p_t \\ \vec{P} \end{pmatrix}$$

D'ora in poi saremo nel caso generale $p_t = 0$ e $\vec{P} = 0$. Quindi per $t = 0 = t'$ $O \equiv O'$

7.2 Rotazioni spaziali

Anche in questo caso riprendiamo una situazione classica in cui i sistemi di riferimento considerati sono semplicemente ruotati l'uno rispetto all'altro, ma sempre immobili.

$$p_t = 0 \quad \vec{P} = 0 \quad \vec{V} = 0 \quad O(0) \equiv O'(0) \quad O \xrightarrow{R_{\hat{n}}(\alpha)} O'$$

Rotazione attorno a z di angolo α

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ y' = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \\ z' = z \end{cases} \quad \Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Prendo i coefficienti delle matrici da queste relazioni trigonometriche.

7.3 Boost di Lorentz

Questo è il primo caso di trasformazione che ci interessa per le sue differenze con il mondo classico: uno dei due riferimenti è in moto relativo. Le ipotesi sono:

I) $p_t = 0, \vec{P} = \vec{0} \implies O \equiv O'$ in $t = 0 = t'$;

II) Assi paralleli;

III) $\vec{V} \neq \vec{0}$

Per esempio $V_x \hat{x} \neq 0$ e $V_z \hat{z} = V_y \hat{y} = 0$ e $x_{O'} = Vt$. Le trasformazioni di Lorentz lasciano invariato $\Delta s^2 = \Delta s'^2$

$$\begin{aligned} -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ -c^2 t^2 + x^2 &= -c^2 t'^2 + x'^2 \end{aligned}$$

In cui si nota facilmente che l'uguaglianza è verificata a patto di usare, come leggi di trasformazione, funzioni trigonometriche iperboliche. Cioè non possiamo usare seni e coseni tradizionali come prima a causa dei segni discordi:

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1 \quad \begin{cases} ct' = \cosh(\eta) ct + \sinh(\eta) x \\ x' = \sinh(\eta) ct + \cosh(\eta) x \end{cases}$$

$$-\cosh^2 \eta (ct)^2 - \sinh^2(\eta) x^2 - 2 \cosh(\eta) \sinh(\eta) xct +$$

$$+ \sinh^2(\eta) (ct)^2 + \cosh^2(\eta) x^2 + 2 \cosh(\eta) \sinh(\eta) xct = -(ct)^2 + x^2$$

Torna tutto, ma cos'è η ? La chiamiamo **rapidità**. Analizziamo il moto di O' :

$$x_{O'} = Vt \quad x'_{O'} = 0 \quad \sinh(\eta) ct + \cosh(\eta) x = 0 \quad x = -\tanh(\eta) ct$$

$$Vt = -\tanh(\eta) ct \quad \tanh(\eta) = -\beta \quad \eta = \operatorname{arctanh}(-\beta)$$

$$\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = -\frac{V}{c}$$

$$\sinh \eta = -\cosh(\eta) \frac{V}{c} \quad \cosh^2 \eta - \cosh^2(\eta) \beta^2 = 1 \quad \cosh^2 \eta (1 - \beta^2) = 1$$

$$\cosh \eta = \gamma \quad \sinh \eta = -\gamma \beta$$

Boost lungo asse x:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (7.4)$$

Boost generico lungo \vec{V} $\rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} ct \end{cases}$$

7.4 Esempio: Dilatazione dei tempi

Consideriamo un orologio in quiete per O' che batte due tempi diversi t_A e t_B separati da un certo intervallo di tempo misurato da O' . Possiamo considerare questi tempi battuti dall'orologio due eventi che avvengono, secondo O' , nello stesso punto dello spazio a :

$$x' = a \quad \forall_t \implies \Delta t \longleftrightarrow \Delta t' \quad p_1(a, ct'_A) \quad p_2(a, ct'_B)$$

Noi sappiamo che la stessa situazione, descritta da un osservatore O che invece vede (per qualsiasi ragione che non ci interessa indagare) l'orologio O' in moto, va trattata con le trasformazioni di Lorentz 7.4. Considerando un intervallo di tempo, quindi un delta, la dipendenza da x della trasformazione dei tempi viene a sparire:

$$ct_B - ct_A = \gamma(ct'_B - ct'_A) \quad \Delta t = \gamma \Delta t'$$

Cioè abbiamo riottenuto la nostra formula per la dilatazione dei tempi.

Ora facciamo fatica a capire come faccia un orologio ad andare più piano, vista anche la reciprocità degli eventi (due osservatori a velocità diverse misurano rispettivamente tempi maggiori dell'altro), però non viola nessun principio. Quando due osservatori inerziali si osservano (ognuno osserva gli orologi che nell'altro sistema sono sincronizzati) noteranno una mancata sincronia degli orologi dovuta dalla loro velocità di movimento, che si traduce quindi nel classico "il tempo passa più lentamente". Questo effetto non è da pensare come un rallentamento della percezione del tempo, è un riferimento in moto rispetto a noi ad accorgersi che, confrontando con il suo proprio orologio, il tempo scorre diversamente. L'esperienza soggettiva del mondo non cambia assolutamente per nessuno degli osservatori coinvolti: è un effetto puramente relativo, da qui il nome della teoria. Basti pensare al famoso paradosso dei gemelli in cui i due fratelli separati vivono la loro vita senza accorgersi di differenze nello scorrere naturale del tempo: è solo una volta reincontrati che si accorgono della differenza reciprocamente. Il problema, ed il motivo per cui questo è detto *paradosso*, è che per un confronto diretto tra orologi di due sistemi di riferimento uno dei due deve per forza prima o poi accelerare o decelerare. Un universo come quello descritto nella relatività speciale non è realistico. Serve la relatività generale che, tuttavia, esula decisamente dallo scopo di questo documento.

7.5 Esempio: contrazione delle lunghezze

Misurare qualcosa vuol dire considerare la distanza fra due estremi allo stesso tempo. Consideriamo allora un righello misurato da due sistemi di riferimento diversi

- Righello in quiete in O' : $x'_A = a_A \quad x'_B = a_B \quad \forall t \quad l' = a_B - a_A$
- Righello in O : $x_A = \frac{a_A}{\gamma} + \beta ct_A \quad x_B = \frac{a_B}{\gamma} + \beta t_B \quad l = x_B(t) - x_A(t) = \frac{l'}{\gamma}$

Quindi capiamo che la misura dipende proprio dall'osservatore che la compie e dal moto relativo dei due. Essa inoltre va compiuta allo stesso tempo (tra i due estremi). Bisogna però notare che non è detto che si riesca a misurare gli stessi eventi negli stessi tempi: per esempio il garage relativistico o un treno in galleria relativistico. Problemi simili partono dicendo di considerare un oggetto, per esempio una macchina (o un treno) che ha dimensioni maggiori del luogo in cui deve entrare, ovvero il garage (o la galleria), e questo garage chiude i suoi portoni quando le estremità della macchina sono sulla soglia. Qui nasce il dilemma: possiamo dire che esiste una velocità tale per cui il mezzo riesce a ridurre abbastanza le sue dimensioni per permettergli di entrare e fare in modo di avere entrambi i portoni chiusi? In buona sostanza: un osservatore "fermo" nota che la macchina (o il treno) riesce a stare nel garage (o galleria) per via della contrazione dell'oggetto in moto, mentre l'osservatore in movimento sulla macchina noterà una contrazione del garage, per cui dal suo punto di vista non riuscirà a stare tutto dentro; e **non c'è nulla che non vada**. Il punto cruciale sta nel pensare a quando i due osservatori fanno le due misure: entrambi le fanno instantaneamente, ma sappiamo che ciò che è instantaneo per un osservatore non è detto lo sia anche per l'altro e, di conseguenza, fanno sostanzialmente due misure diverse. Di fatto un osservatore in moto non vedrà la chiusura dei portoni simultanea!

7.6 Tempo proprio

Prendiamo in considerazione una particella non inerziale che segue la sua traiettoria. Se prendiamo un intervallo abbastanza piccolo possiamo approssimarla ad una particella inerziale. Per cui $\forall t \exists O'$

istantaneamente.

$$d\vec{x} = \vec{v} dt \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{x} + d\vec{x} \quad ds^2 = ds'^2 - c^2 dt^2 + |d\vec{x}|^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{|d\vec{x}|^2}{c^2 dt^2} \right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{dt^2}{\gamma_v^2}$$

Il tempo proprio è quindi quella variazione infinitesima e istantanea

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v} = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \gamma \geq 1 \quad d\tau \leq dt$$

definito come il tempo minimo misurabile poichè è quello "proprio" dell'osservatore in moto il cui tempo è naturalmente rallentato.

7.7 Composizione relativistica della velocità

Abbiamo un sistema O e uno O' in moto lungo x:

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad \vec{x}'(t) \rightarrow \vec{v}'(t) = \frac{d\vec{x}'(t)}{dt'}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases} \quad \begin{cases} cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta cdt) \end{cases}$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{dx - Vdt}{dt(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})}$$

$$v'_z = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})}$$

Quindi se $\vec{v} = (c, 0, 0)$:

$$v'_x = \frac{c - V}{\frac{c^2 - Vc}{c^2}} = c$$

in accordo con P2.

8 Formalismo covariante

In questo capitolo andiamo ad esporre il modo migliore per trattare i concetti e le quantità relativistiche: attraverso il formalismo covariante, ma senza nessuna pretesa di estrema rigorosità nell'esposizione di questo delicato argomento. Tipico dell'algebra non euclidea, esso interviene in questa teoria perchè la relatività si propone proprio di riscrivere i concetti alle fondamenta dello spazio tempo.

8.1 Spazio 3D Euclideo

In fisica classica normalmente si trattavano i problemi considerando lo spazio degli eventi come euclideo, cioè descritto da una terna ortonormale $\{\hat{e}_k\}_{k=1,2,3}$ e da un punto O detto origine, tale per cui $O\vec{P} = \vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$. Se per esempio prendiamo O' ruotato rispetto ad O lo posso indicare come $R_{\vec{n}}(\alpha)$.

$$\{\hat{e}'_k\}_{k=1,2,3} \implies O'\vec{P} = \vec{x}' = \sum x'_i \hat{e}'_i \quad x'_i = R_{ij} x_j \implies R_{ij} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}$$

In questo spazio possiamo definire quindi un **vettore tridimensionale** $\vec{a} = \sum_i a_i \hat{e}_i$. Possiamo poi esprimere le sue componenti nel sistema primato come:

$$a'_i = \sum_i (R_{\vec{n}}(\alpha))_{ij} a_j = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} a_j$$

dove i rapporti $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ rappresentano gli elementi di una matrice non singolare che abbiamo sempre chiamato "matrice di cambio base". Sappiamo inoltre che nelle trasformazioni viene lasciato immutato il prodotto scalare tra due vettori:

$$V^3 \times V^3 \longrightarrow R^+ \quad \vec{a}, \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i$$

Con queste premesse, possiamo passare ad una trattazione che invece tiene conto della rivoluzione relativistica. Introduciamo cioè un nuovo spazio in cui studiare i fenomeni.

8.2 V^4 Spazio di Minkowski

Ci interessa uno spazio di dimensione 4 applicabile facilmente al nostro caso, ovvero allo spazio-tempo fin qui descritto. Uno spazio siffatto sarà descritto da un riferimento, composto da un origine O e da un insieme di versori ortonormali $\{\hat{e}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ che chiamiamo **base Lorentziana** tale per cui

$$P - O \longrightarrow x = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

cioè, giustamente, un punto generico viene descritto da 4 coordinate, in cui quella temporale viene adattata ad una spaziale moltiplicandola per il fattore c . Indichiamo con

$$x = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \hat{e}_\mu \equiv x^\mu e_\mu$$

la posizione di un evento. In questo modo abbiamo illustrato la convenzione di Einstein: due indici ripetuti in alto ed in basso sottintendono una sommatoria rispetto a quell'indice. Analogalmente possiamo trattare gli stessi fenomeni da un altro riferimento

$$O' \quad \{\hat{e}'_\mu\} \quad P : x = \sum_{\mu=0}^3 x'^\mu \hat{e}'_\mu = x'^\mu \hat{e}'_\mu$$

Per passare da un riferimento all'altro ci serviamo naturalmente delle trasformazioni di Lorentz che, intuitivamente, in questo spazio, rappresentano una matrice i cui coefficienti trasformano le quantità

definite in V_4 come negli spazi euclidei. Le coordinate trasformano in maniera controvariante (dopo si capirà meglio cosa vuole dire questa parola) rispetto alla base Lorentziana ed in particolare nel modo seguente:

$$O : x^\mu \xrightarrow[T.L.]{} x'^\mu : O' \quad x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda)_{\mu\nu} x_\nu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Cioè ci serviamo di una matrice, come è anche negli spazi euclidei, per cambiare riferimento ma in questo caso la matrice Λ di cambio base rappresenta le trasformazioni di Lorentz. Infatti, come abbiamo visto precedentemente, le TL trasformano le coordinate in relatività ristretta. Per le coordinate, controvarianti, ci serviamo dunque della matrice Λ vista nei capitoletti scorsi:

$$\begin{aligned} \text{boost lungo } x & \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{rotazione lungo } \hat{z} & \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In questo spazio possiamo lavorare con le solite quantità geometriche, solo che non saranno più vettori e covettori tridimensionali.

Quadrivettore: a è un 4-vettore (tetra vettore) se sotto le T.L. trasforma come x . Cioè, assegnati due riferimenti $O : a = a^\mu \cdot \hat{e}_\mu | O' \cdot a' = a'^\nu \hat{e}'_\nu$, le componenti a^i trasformano come le coordinate. Di fatto sono gli elementi fondamentali controvarianti dello spaziotempo Minkowskiano. (approfondimento su questi concetti nel latex di algebra tensoriale)
 $a = (a^0, a^i)$ in cui a^0 è uno scalare sotto rotazione ma non sotto boost di Lorentz. Per trasformare un 4-vettore la relazione da utilizzare è quella controvariante:

$$a'^i = \Lambda^i_j a^j$$

Quadraticovettore: allo stesso modo di prima possiamo definire a 4-covettore se sotto T.L. trasforma non come le coordinate ma come i versori dello spazio in cui è definito (cioè come la base lorentziana). Di fatto sono gli elementi covarianti fondamentali dello spazio Minkowskiano. In questo caso la notazione è con l'indice in basso, cioè $a = (a_0, a_i)$ con $i = 1, 2, 3$. Trasformare un covettore significa utilizzare la relazione covariante, inversa rispetto a quella controvariante:

$$a'_i = (\Lambda^{-1})_i^j a_j$$

In questo senso stiamo utilizzando il formalismo covariante: ci serviamo di oggetti matematici che trasformano in modo contro/co-variente rispetto alla base lorentziana per descrivere la teoria della relatività.

Metrica di Minkowsky: introduciamo il prodotto scalare nello spazio di Minkowsky definito come

$$V^4 \times V^4 \longrightarrow R \quad a, b \longrightarrow a \cdot b$$

e vogliamo ricavare il prodotto scalare più semplice in questo spazio: quello tra i versori della base Lorentziana.

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = (\eta)_{\mu\nu} \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(-1, 1, 1, 1)$$

cioè tutte le permutazioni di prodotti scalari tra i versori di una base di V_4 formano i coefficienti di una matrice che chiamiamo η , la **metrica di Minkowski**.

η in realtà è un tensore doppio covariante, cioè un tensore metrico nel senso ordinario della geometria tale per cui risulta definito il prodotto scalare in un determinato spazio. Assegnato un tensore metrico η di un certo spazio, la formula in generale per il prodotto scalare è

$$a \cdot b = \eta(a, b)$$

vediamo di dimostrarla

$$a \cdot b = (a^\mu \hat{e}_\mu) \cdot (a^\nu \hat{e}_\nu) = a^\mu a^\nu \hat{e}_\mu \hat{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$$

Vale anche ovviamente per la norma

$$\text{Es: } x \cdot x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \Delta s^2$$

Notevole è realizzare che questa è una legge generale valida anche in geometria euclidea, solo che in quel caso il tensore metrico è una matrice identità e quindi il prodotto scalare risulta precisamente il prodotto componente per componente mentre la norma risulta la somma delle componenti elevate al quadrato. In questo caso, invece, per esempio la norma di un vettore restituisce l'intervallo spazio temporale per la presenza del meno nella matrice η . Attraverso questa trattazione della teoria riotteniamo tutti i risultati notevoli visti precedentemente. Che altre proprietà ha il tensore metrico?

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a \cdot a \\ a^\mu a^\nu \eta_{\mu\nu} &= a'^\mu a'^\nu \eta_{\mu\nu} \\ &= a'^\alpha a'^\beta \eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^\alpha_\mu a^\mu)(\Lambda^\beta_\nu a^\nu) \eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta}) a^\mu a^\nu \\ \implies \eta_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Quindi se partiamo definendo lo spazio Minkowskiano e la sua metrica, è possibile definire le trasformazioni di Lorentz come tutte quelle trasformazioni che preservano la metrica e dove quindi vale quest'ultima uguaglianza. Voglio ora riscrivere in forma matriciale per far quadrare gli indici:

$$(\Lambda)_{\alpha\mu} (\Lambda)_{\beta\nu} (\eta)_{\alpha\beta} = (\Lambda^T)_{\mu\alpha} (\eta)_{\alpha\beta} (\Lambda)_{\beta\nu} \quad \eta_{\mu\nu} = \Lambda^T \eta \Lambda$$

$$\begin{aligned} \det(\eta) \neq 0 \implies \exists \eta^{-1} = \eta \quad (\eta)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \\ (\eta^{-1})_{\mu\nu} &\equiv \eta^{\mu\nu} \quad \eta \eta^{-1} = \mathbb{I} \quad \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} \end{aligned}$$

8.3 Regolina sul prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

ε_{ijk} = **Simbolo di Levi-Civita** ed ha alcune regole:

- $\varepsilon_{ijk} \neq 0$ solo se $i \neq j, i \neq k, j \neq k$
- $\varepsilon_{123} = +1$
- $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se da } ijk \rightarrow 123 \text{ facendo numero pari di permutazioni} \\ -1 & \text{se da } ijk \rightarrow 123 \text{ facendo numero dispari di permutazioni} \end{cases}$

Per usarlo in 4 dimensioni devo generalizzare $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$.

- $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$ solo se sono tutti diversi fra loro.
- $\varepsilon^{0123} = 1$
- $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ stesso ragionamento di prima.

8.4 Notazione sul formalismo covariante

Riassumiamo qui quello che abbiamo capito sul formalismo covariante.

O : a 4-vettore $\{\hat{e}_\mu\}$ $a = a^\mu \hat{e}_\mu$ e a 4-covettore $\{\hat{e}^\mu\}$ $a = a_\mu \hat{e}^\mu$

- **Componenti controvarianti** : le indichiamo con l'apice a^μ
- **Componenti covarianti** : le indichiamo con il pedice a_μ .

Ovviamente componenti covarianti e controvarianti sono ricavabili dalla controparte servendosi del tensore metrico. Per esempio:

$$a_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} a^\nu \quad a^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} a_\nu$$

E quindi sussiste un legame tra i due oggetti geometrici dato da:

$$a_0 = \eta_{0\nu} a^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{0\nu} a^\nu = -1 a^0 = -a^0$$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad a_\mu = (-a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (8.5)$$

Quest'ultima equazione descrive perfettamente le proprietà dello spazio Minkowskiano ed il rapporto fondamentale tra le componenti covarianti e controvarianti che ci vivono.

Cioè dato un 4-vettore con le sue componenti a^i nello spazio di Minkowsky siamo in grado direttamente di ricavare le componenti del 4-covettore corrispondente semplicemente cambiando segno alla prima componente a^0 . Ricordiamo ancora la definizione di entrambi questi concetti: i covettori, covarianti, cambiano come la base Lorentziana, i vettori controvarianti in modo opposto. Risultano quindi chiare le notazioni per il prodotto scalare in questo spazio.

$$a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = (\eta_{\nu\mu} a^\mu) b^\nu = a_\nu a^\nu$$

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_i b^i = -a^0 b^0 + a^i b^i = -a^0 b^0 + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Ora torniamo a vedere il cambio di coordinate

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad \det(\eta) = \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta) \det(\Lambda)^2 \\ \det(\Lambda)^2 = 1 \quad \det(\Lambda) \neq 0$$

$\exists \Lambda^{-1}$ tale che $x = (\Lambda^{-1})x'$ ed è a sua volta una T.L. (nel nostro caso).

$$(\Lambda^{-1})_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \equiv \Lambda_\nu^\mu \\ a \text{ 4-vettore } a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu \quad a'_\mu = a'_\mu(a_\nu) \quad a'_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu$$

Inoltre Λ_μ^ν implementa le trasformazioni delle componenti covarianti. Infatti se $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a_\nu$ vogliamo quello che valga inizialmente scritto.

$$a_\mu b^\mu = a'_\mu b'^\mu = (\Lambda_\mu^\gamma a_\gamma)(\Lambda^\mu_\beta b^\beta) = (\Lambda_\mu^\gamma \eta_{\gamma\alpha} a^\alpha)(\Lambda^\mu_\beta b^\beta) \\ = (\Lambda_\mu^\gamma \eta_{\gamma\alpha} \Lambda^\mu_\beta) a^\alpha b^\beta = ((\Lambda^{-1})^\gamma_\mu \Lambda^\mu_\beta) \eta_{\gamma\alpha} a^\alpha b^\beta \\ = \delta^\gamma_\beta \eta_{\gamma\alpha} a^\alpha b^\beta = \eta_{\beta\alpha} a^\alpha b^\beta = a_\beta b^\beta$$

8.5 Tensori

Oggetto a molte componenti t.c. ciascun indice trasforma correttamente sotto T.L.

$$\text{Tensore di rango 2} \quad O : T^{\mu\nu} \quad O' : T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$$

Anche in questo caso abbiamo che gli elementi covarianti e controvarianti si divideranno in apici e pedici.

$$T^{\mu\nu}(2,0) \longrightarrow T^\mu_\nu(1,1) = \eta_{\beta\nu} T^{\mu\beta} \longrightarrow T_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu(0,2)$$

T è simmetrico se $T = T^T \longrightarrow T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e ha 10 gradi di libertà: 4 sulla diagonale e 6 sopra.

T è antisimmetrica se $T = -T^T \longrightarrow T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ e ha 6 gradi di libertà (la diagonale deve essere zero). In generale posso dire che un tensore qualsiasi è combinazione lineare di uno simmetrico ed uno antisimmetrico:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu} - T^{\nu\mu} + T^{\mu\nu}) \\ = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) = T_S^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu}$$

Quindi se prendiamo la simmetria o asimmetria dei tensori e applichiamo le trasformazioni di Lorentz troveremo che **la simmetria è proprietà dell'osservatore** non del tensore.

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$$

Se per esempio invece ho un campo scalare avrò che $f(x) = f'(x')$ in quanto il valore in un determinato luogo non deve cambiare al variare dell'osservatore.

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f \text{ dove } \mu \text{ sono le componenti covarianti di un 4-vettore.}$$

$$\frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\mu} \equiv \partial'_\mu f' \quad \frac{\partial f(x(x'))}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu f \\ \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu f \quad \partial'^\mu f' = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu f$$

$$f(0,0) \quad A^\mu(0,1) \quad \partial_\alpha A^\mu(1,1) \quad F^{\mu\nu}(2,0) \longrightarrow \partial_\alpha F^{\mu\nu}(2,1)$$

Quindi la derivazione aumenta il rango di un tensore. E invece come faccio ad abbassarlo?

8.6 Contrazione degli indici

Risulta possibile abbassare il rango di un tensore semplicemente eguagliando due suoi indici e svolgendo la somma rispetto a quell'indice stesso. T tensore di rango 2 $\Rightarrow T^\mu{}_\nu$

$$T^\mu{}_\nu \longrightarrow T^\mu{}_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 T^\mu{}_\mu = T^0{}_0 + \dots = \tilde{T}$$

$$F^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{\delta\gamma\varepsilon}(4,3) \longrightarrow G^{\mu\nu\beta}{}_{\delta\varepsilon} \equiv F^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{\delta\alpha\varepsilon}(3,2)$$

Quindi quando facevamo il prodotto scalare creavamo un tensore facendo la contrazione degli indici: $\eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu$. Riassumendo:

$$\begin{aligned} A^\mu &\xrightarrow{\partial} \partial_\alpha A^\mu \longrightarrow \partial_\mu A^\mu \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \text{ 4-divergenza} \\ \partial_\alpha A^\alpha &= \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = -\partial^0 A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\partial_0 A_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ f &\xrightarrow{\partial_\mu} \partial_\mu f \xrightarrow{\partial^\nu} \partial^\nu \partial_\mu f \xrightarrow{\text{contr.}} \square f \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \eta^{\nu\mu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial_0 \partial_0 + \partial^i \partial^i = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \end{aligned}$$

E sono come potete notare proprio le equazioni delle onde!!

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi = 0 \quad \square \psi = 0 \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi = 0$$

Con questo terminiamo il formalismo, fatto senza pretesa di rigore e magari leggermente confuso (come piace a noi fisici e non molto ai matematici), ma che ci servirà più avanti.

9 Meccanica relativistica

Vogliamo giungere alla trattazione della meccanica dal punto di vista relativistico e per farlo partiamo da considerazioni classiche. Un modo più rigoroso e naturale per arrivare ai risultati presentati in questo capitulo verrà esposto negli apprendimenti.

Consideriamo la solita particella che vista da O è descritta da $\vec{x} = \vec{x}(t)$ $\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$. Come posso riscrivere in formalismo covariante? Il lettore si starà chiedendo: "Ma perché mai dovrebbe fare una cosa simile?" (abbiamo omesso eventuale torpiloquio perché siamo dei signori); ecco, il problema risiede nelle definizioni relativistiche di $\vec{x}(t)$ ovvero un tetravettore con una componente spaziale ed una temporale. Questa quarta dimensione crea dei problemi: la velocità ordinaria, ossia quella definita come la derivata rispetto al tempo della posizione, ha soltanto tre dimensioni, ma sappiamo che le trasformazioni di Lorentz lavorano su tetravettori quadridimensionali. In buona sostanza: ci serve un tetra vettore cinematico. Per questo semplicissimo motivo conviene provare a definire la velocità come derivata del tetravettore x^μ rispetto ad uno scalare. Ora rimane da scegliere lo scalare: beh ovviamente non esiste scelta migliore del tempo proprio (in realtà si potrebbe pensare di usare anche lo scalare ds intervallo spazio-temporale, ma nel formalismo del corso di Fisica Generale 3 viene usato il tempo proprio per un parallelismo con la fisica classica). Quindi riscriviamo il vettore posizione nelle quattro componenti dello spazio Minkowskiano.

$$x^\mu = (ct, \vec{x}(t)) \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

e ricordiamo che la particella ha un suo orologio che batte $d\tau = \frac{dt}{\gamma_{\vec{v}}}$ $t = t(\tau)$ $\vec{x}(t) = \vec{x}(t(\tau))$.

$$\begin{cases} ct = ct(\tau) \\ \vec{x}(\tau) = \vec{x}(t(\tau)) \end{cases} \implies x^\mu = x^\mu(\tau)$$

Quindi risulta naturale definire

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \text{ un 4-vettore, o \textbf{tetra velocità}} \implies u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \\ u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma_{\vec{v}} c \\ u^i &= \frac{dx(t(\tau))^i}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^i \gamma_{\vec{v}} \quad u^\mu = \gamma_{\vec{v}}(c, \vec{v}) \end{aligned}$$

Quindi la "velocità ordinaria" (\vec{v}) è solo la parte spaziale del tetra vettore se moltiplicata per $\gamma_{\vec{v}}$. Ma come è possibile che entrando nel formalismo covariante io necessiti 1 componente in più? Vediamo che non è proprio così:

$$\begin{aligned} u \cdot u &= \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^0 u_0 + u^i u_i \\ &= -\gamma^2 c^2 + |\vec{v}|^2 \gamma^2 = -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\right) = -c^2 \end{aligned}$$

Quindi il modulo del 4-vettore velocità è **sempre costante** quindi in realtà non ci servono 4 componenti (che ci dava problemi, arrivando dalla necessità di sole 3), bensì solo 3 in quanto si ha questa fondamentale informazione. Dal punto di vista geometrico u è quindi il tetravettore di lunghezza c tangente alla linea di universo in ogni punto.

Nota: definita così la velocità nello spazio minkowskiano si giunge ad un'interessante conclusione: la velocità di ogni corpo in V^4 ha modulo $c \Rightarrow$ ogni corpo nello spazio-tempo di Minkowsky viaggia alla velocità della luce!

Nell'approssimazione non relativistica troviamo sempre queste quantità:

$$(v \ll c) \quad \vec{p}_{NR} = m\vec{v} \quad K_{NR} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

Nella meccanica **relativistica** invece introduciamo la quantità di moto (che chiamiamo impulso) relativistica:

$$p^\mu = m u^\mu = (p^0, \vec{p}) \quad \vec{p} = m\gamma_{\vec{v}}\vec{v} \xrightarrow[N.R.]{} m\vec{v}$$

Mentre \vec{v} è la velocità ordinaria, \vec{u} è detta la velocità propria. Vediamo che questo tetra vettore trasforma coerentemente sotto trasformazioni di Lorentz e secondo la definizione della quadri velocità possiamo calcolare tutte le sue componenti:

$$\begin{aligned} p'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \\ p^0 &= m\gamma_{\vec{v}}c \xrightarrow[N.R.]{} mc(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[\beta \rightarrow 0]{} mc(1+\frac{1}{2}\beta^2) \\ &= mc + \frac{1}{2}m\beta v + O(\beta^2) \end{aligned}$$

Dove si è espanso secondo Taylor il primo termine, temporale, del quadri impulso per ottenere un collegamento con la fisica classica. Infatti basta moltiplicare per c quest'ultima espressione per ottenere l'energia cinetica del corpo.

$$p_0 c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(\beta^4) \quad E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Ma qui notiamo una cosa interessante: ottenendo l'energia abbiamo guadagnato anche un termine in più: mc^2 . L'energia di un corpo in relatività è sì quella cinetica, ma per $v = 0$ non si annulla poichè esiste un termine di energia che dipende solo dalla massa: di fatto un termine di energia "a riposo".

Quindi la massa è una forma di energia e come termine è MOLTO più grande (anche per $v \approx c$), ma non si manifesta quasi mai data la conservazione della massa nella quasi totalità degli eventi.

$$p^0 c = E \implies p^0 = \frac{E}{c} \quad E = p^0 c = m\gamma_v c^2$$

Una volta si usava il modo di pensare che all'aumentare della velocità aumentasse anche la massa (con il fattore gamma). Tuttavia ora si tende a vedere le componenti in modo separato per evitare delle incomprensioni.

Nel caso generale abbiamo che l'energia cinetica relativistica è proprio:

$$K = E - E_0 = m\gamma_v c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma_v - 1)$$

Cioè l'energia che un corpo possiede a causa del suo moto è quella relativistica a cui sottraiamo quella che possiede "a riposo". Vogliamo poi calcolare la norma del quadri impulso, sia in termini di formalismo covariante sia analiticamente elevando al quadrato mu^μ , per confrontarla con l'energia relativistica $m\gamma_v c^2$:

$$\begin{aligned} p \cdot p &= \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + |\vec{p}|^2 \\ &= (m \cdot u)(m \cdot u) = m^2(u \cdot u) = -m^2 c^2 \\ m^2 c^2 &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 \quad E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 \end{aligned}$$

Anche in questo caso vediamo che le 4 componenti non sono indipendenti. Quest'ultima formula si chiama **triangolo dell'energia** e vale soltanto con i quadrati! Il termine $|\vec{p}|^2 c^2$ NON È L'ENERGIA CINETICA!

$$E = m\gamma c^2 \implies m = \frac{E}{\gamma c^2} \quad \vec{p} = m\gamma \vec{v} = \frac{E}{c^2} \vec{v} = \vec{v} \cdot \sqrt{m^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{c^2}}$$

Vale per $m = 0$? Sì, quando la velocità vale c :

$$m \rightarrow 0 \quad , \quad \vec{p} \neq 0 \implies \gamma \rightarrow \infty \implies v = c$$

Quindi ha senso parlare di quantità di moto anche per particelle senza massa. ESISTE il limite ultra relativistico che trascura la massa delle particelle perchè diventa trascurabile nel conto (per esempio per i neutrini e altre cose che fanno accelerare e schiantare negli acceleratori ((fun fact: per un bel po' di anni pensavano che anche i neutrini fossero senza massa))). Un altro modo di vedere che le particelle con $m = 0$ debbano andare alla velocità della luce per avere impulso ed energia non nulle lo possiamo osservare nei risultati di queste due grandezze appunto: $\vec{p} = m\gamma_v \vec{v}$ e $E = \gamma_v mc^2$.

9.1 Cinematica

Partiamo da $\Delta s^2, a, b, \Delta\tau, m$ Lorentz-invarianti, ovvero hanno lo stesso valore per O e O' . Si hanno anche però grandezze conservative, cioè il cui valore non varia nel tempo indipendentemente dai processi fisici che modificano il sistema purché quest'ultimo sia isolato. Nella meccanica non-relativistica ci sono delle quantità che si conservano grazie alle caratteristiche dello spazio, si conservano anche in relatività? NO! O almeno non tutte. La cinematica in relatività si fonda sull'unico principio di conservazione del tetraimpulso totale $P^\mu = \sum_i p_i^\mu$:

$$P^0 = \sum_i p_i^0 = \sum_i \frac{E_i}{c} = \text{cost} \quad P^j = \sum_i p_i^j = \text{cost}$$

$$P^\mu(t_1) = P^\mu(t_2) \quad \forall t_2 \neq t_1$$

La massa specifica non si conserva, ma si conservano le singole forme di energia: quindi si conservano P e E . Per esempio se prendo una scatola, inserisco 10 palline e chiudo, non è più detto che quando riapro trovo ancora 10 palline, potrei trovarne 7, o 4, o addirittura non trovarne più e trovare semplicemente "particelle di luce"; il concetto chiave sta tutto nella conservazione dell'energia, sotto una qualsiasi delle sue forme. Conservandosi però l'energia possiamo creare particelle in urti e decadimenti, attraverso processi che prima non si sognavano neanche.

9.2 Dinamica

Nell'approssimazione non-relativistica tutta la dinamica di base su questi tre fondamenti:

- D1) Principio di inerzia;
- D2) Per un qualsiasi campo di forze si ha $\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$;
- D3) Principio di azione e reazione.

Invece nella relatività cosa troviamo? Valgono gli stessi?

- D'1) Principio di inerzia valido anche qua (è alla base di P1);
- D'2) $\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{p} = m\gamma\vec{v}$ e t tempo coordinato ($\frac{x^0}{c}$), il secondo principio va quindi riscritto;
- D'3) Azione e reazione deve valere nello stesso istante di tempo, e ciò provoca ambiguità:
 - 1- Non esiste più la contemporaneità degli eventi;
 - 2- L'informazione non è istantanea;

\implies E' valido solo per forza di contatto, ovvero quando l'interazione avviene perché due particelle occupano la stessa posizione nello spazio-tempo (come limite).

9.2.1 Teorema del lavoro

Abbiamo $\vec{F} = \vec{F}(x)$ campo di forze vettoriale ed una particella che muove al suo interno. Vediamo se il teorema del lavoro rimane valido anche in relatività.

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad E_{K,B} - E_{K,A} = W_{\Gamma A-B} \text{ in N.R.} \\
W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\
\vec{p} &= m\gamma_{\vec{v}} \vec{v} = m\vec{v}(t) \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= m\gamma_{\vec{v}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \left(-\frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v} \\
&= m\gamma_{\vec{v}} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma_{\vec{v}}^2 \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \\
\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} &= m\gamma_{\vec{v}} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \left(1 + \gamma_{\vec{v}}^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = m\gamma_{\vec{v}}^3 \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \iff 1 + \frac{\gamma_{\vec{v}}^2 v^2}{c^2} = \gamma_{\vec{v}}^2 \\
\frac{d\gamma_{\vec{v}}}{dt} &= \gamma^3 \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \frac{1}{c^2} \\
\implies \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} &= m \frac{d\gamma_{\vec{v}}}{dt} c^2 = \frac{d}{dt} (m\gamma_{\vec{v}} c^2) = \frac{dE}{dt} \\
\implies W &= \int_{\Gamma B-A} \left(\frac{dE}{dt} \right) dt = E_B - E_A
\end{aligned}$$

Quindi se la massa rimane la stessa avremo:

$$W = E_B - E_A = K_B - K_A \quad K = mc^2(\gamma - 1)$$

Notare bene che in questi calcoli abbiamo assunto la massa come costante, non tanto perché non possa cambiare, ma perché questo calcolo va fatto su una (o più) specifiche particelle (corpi) che quindi voglio rimangano sè stessi. Nel momento in cui si dividono spezzo l'integrale e lo ricomincio.

9.2.2 Applicazione del formalismo covariante

Partiamo da $X^\mu, m, u^\mu, p^\mu, \vec{p} \rightarrow p^\mu, dt \rightarrow d\tau$. Avevamo che la forza totale era $\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ma la \vec{F} non può essere la parte spaziale della derivata del 4-impulso, come la velocità ordinaria non lo era della 4-velocità, poiché per definizione è il rapporto tra componenti diverse di tetravettori. Allora introduco la **forza Minkowskiana**:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

attraverso le nozioni relativistiche viste finora ed il collegamento con la forza classica è

$$\frac{dp^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = f^i \implies \frac{dp^i}{dt} = \frac{f^i}{\gamma} \quad \sum_j F_j^i = \frac{f^i}{\gamma} \implies \vec{f} = \gamma \left(\sum_j \vec{F}_j \right)$$

E questa è la parte spaziale, che rappresenta il nuovo secondo principio della dinamica. Ma la f^0 ?

$$\frac{dp^0}{d\tau} = f^0 \quad \frac{dp^0}{dt} = \frac{f^0}{\gamma} \implies \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{f^0}{\gamma} \quad f^0 = \frac{dE}{dt} \frac{\gamma}{c} = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{v}}{dt} \frac{\gamma}{c}$$

$$f^0 = \gamma \frac{\left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \right)}{c}$$

Cioè tramite le equazioni spaziali di f ottengo il nuovo secondo principio e dall'equazione temporale tramite f^0 ottengo sostanzialmente il teorema del lavoro in forma infinitesimale:

$$f^\mu = \gamma \left(\frac{\sum_i \vec{F}_i \vec{v}_i}{c}, \sum_j \vec{F}_j \right)$$

Ci chiediamo quindi naturalmente se esiste una formulazione in cui $m\vec{a} = \vec{F}$? NO! in relatività va riscritta tenendo conto che:

$$p^\mu = m u^\mu \quad \frac{d}{d\tau} m u^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = m \alpha$$

dove $\alpha^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu$ è la **tetra accelerazione**. Quindi in relatività vale $m\alpha^\mu = f^\mu$. Svolgiamo un po' di calcoli per ricavare le componenti della tetra accelerazione.

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = m\gamma \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma^2 \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} \right) \frac{\vec{v}}{c^2} \right) = m\gamma \left(\vec{a} + \gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right)$$

$$\alpha^\mu = (\alpha^0, \vec{\alpha}) \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma^2 \left(\vec{a} + \gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right)$$

$$\alpha^0 = \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}$$

$$\alpha^\mu = \gamma^4 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \cdot \vec{v} + \frac{\vec{a}}{\gamma^2} \right) \quad \alpha^\mu u_\mu = f^\mu u_\mu = 0$$

Se vogliamo allora un riassuntone delle regole fondamentali per la meccanica relativistica scriviamo

$$\begin{cases} f^\mu = m\alpha^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right) \\ \alpha^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu = \gamma^4 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \cdot \vec{v} + \frac{\vec{a}}{\gamma^2} \right) \\ p^\mu = mu^\mu \end{cases}$$

In questi termini è espressa con successo la dinamica in relatività.

10 Elettrodinamica relativistica

L'elettrodinamica, quindi il comportamento dei campi E e B e le loro relative sorgenti, di per sé è già relativistico, tuttavia a noi interessa scriverlo in linguaggio covariante e vedere come cambiano \vec{E} , \vec{B} , ρ , \vec{J} sotto boost di Lorentz.

Quindi partiamo da una situazione di $\rho \neq 0$, $\vec{J} \neq 0$ e un campo di velocità per ogni punto della distribuzione di cariche: le equazioni da cui partiamo sono ovviamente le solite, le 4 equazioni di Maxwell, la forza di Lorentz e le equazioni di continuità. Ovviamente sappiamo anche che se ρ e \vec{J} fossero uguali a zero le equazioni ammetterebbero soluzioni non banali. Inoltre se prendiamo un osservatore in rotazione rispetto all'altro sappiamo come cambiano queste quantità, che siano vettori o scalari, ma sotto boost di Lorentz?

Partiamo con una speranzosa considerazione: è possibile che il campo elettrico (o magnetico) cambi come la tetra-velocità? Ovvero in cui la parte spaziale rimane invariata al netto di un coefficiente γ ? La risposta, nuda e cruda, è ovviamente no, sarebbe troppo facile non credi? Ti aspettavi la pappa pronta? La peperonata di Aldo alle 8 del mattino? Ma vediamo perchè.

Immaginiamo una carica ferma rispetto all'osservatore O'' e altri due sistemi, O e O' , che si muovono entrambi, indipendentemente, rispetto alla suddetta carica. Per O e O' ci sarà sia ρ che \vec{J} portando sia ad un campo elettrico che magnetico, mentre per O'' ci sarà solo il campo elettrico. Per cui no: quello che troveremo nelle trasformazioni sarà sempre una combinazione di campo elettrico e magnetico.

$$\implies \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}, \vec{B}) \quad \vec{B}' = \vec{B}'(\vec{E}, \vec{B})$$

10.1 Tensore elettromagnetico

Introduciamo ora, per una completa descrizione dell'elettrodinamica in forma covariante, un nuovo tensore chiamato **tensore di Faraday** o **tensore elettromagnetico**. Vogliamo che esso contenga sia \vec{E} che \vec{B} , quindi 6 componenti indipendenti, e vogliamo che esso accorpi tutta l'informazione riguardo ai campi. Per ottenerlo analiticamente serve analizzare la forza di Lorentz espressa tramite il formalismo covariante che chiamiamo f^μ

$$f^\mu = (f^0, f^i) \quad \text{dove } f^i = \gamma_{\vec{v}} F^i$$

Dove abbiamo trasformato tramite la gamma $\gamma_{\vec{v}}$ la forza di Lorentz classica $F^i \rightarrow f^i$ in quella relativistica, con $i = 1, 2, 3 = x, y, z$. Ricordiamo che F^i può essere sviluppata attraverso i campi (la formula classica di Fisica II) espressa tuttavia nel formalismo covariante: ricordiamo quindi che il prodotto vettoriale nel formalismo covariante sfrutta ϵ^{ijk} , il simbolo di Levi-Civita:

$$f^i = \gamma_{\vec{v}} q(E^i + \epsilon^{ijk} v_j B_k) = \gamma_{\vec{v}} q E^i + \gamma_{\vec{v}} q \epsilon^{ijk} v_j B_k \quad (10.6)$$

Di fatto quest'espressione ci fornisce le 3 componenti spaziali della f^μ che dipendono dai campi e dalla velocità, come è classicamente. Tuttavia, a noi interessa una legge covariante dipendente dalla velocità, dalla carica e da un *unico* oggetto tensoriale. Dobbiamo cioè trasformare la velocità $v_j \rightarrow u^\mu$ in quella relativistica e dobbiamo poi condensare l'informazione dei campi in un unico oggetto: ci serve necessariamente un tensore $F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} f^\mu &= f^\mu(q, u_\mu, F^{\mu\nu}) = q F^{\mu\nu} u_\mu \\ f^i &= q F^{\mu i} u_\mu = q F^{0i} u_0 + q F^{ji} u_j \end{aligned}$$

Dove andiamo ad utilizzare la formula per le componenti di $u_\mu = (u_0, u_j) = (\gamma_{\vec{v}} c, \gamma_{\vec{v}} v_j)$ con $j = 1, 2, 3$.

$$f^i = q F^{0i} \gamma_{\vec{v}} c + q F^{ji} \gamma_{\vec{v}} v_j \quad (10.7)$$

Notiamo ora l'analogia tra la formula 10.7 e la formula 10.6 per ricavare gli elementi del tensore elettromagnetico. Infatti la parte che non contiene la velocità v_j nell'equazione 10.7 porta l'informazione del campo elettrico:

$$\implies q\gamma_{\vec{v}}E^i = qF^{0i}c\gamma_{\vec{v}} \quad E^i = cF^{0i} \quad F^{0i} = \frac{E^i}{c}$$

Cioè la prima riga del tensore conterrà il campo elettrico scalato di un fattore c . Mentre il termine che contiene v^j nell'equazione 10.7 porta l'informazione magnetica:

$$qF^{ji}\gamma_{\vec{v}}v_j = \gamma_{\vec{v}}q\varepsilon^{jik}v_jB_k \quad \Rightarrow \quad F^{ji} = \varepsilon^{jik}B_k$$

$$\begin{cases} F^{12} = \varepsilon^{123}B_3 = B_z \\ F^{13} = \varepsilon^{132}B_2 = -By \\ F^{23} = \varepsilon^{231}B_1 = B_x \end{cases}$$

Sappiamo quindi che la prima riga viene occupata dal campo elettrico mentre i termini misti restanti nella parte triangolare alta sono occupati dal campo magnetico. Il simbolo di Levi-Civita ci dice anche che gli elementi sulla diagonale devono essere nulli.

In sostanza necessitiamo di un tensore di rango 2 (rappresentabile come una matrice) ed in questo documento, per completarlo con gli elementi rimanenti della parte triangolare bassa, decidiamo di prenderlo antisimmetrico (esistono probabilmente altre soluzioni, più complicate). Il fatto che sia antisimmetrico pone un'ulteriore conferma alla questione che sulla diagonale devono trovarsi necessariamente degli zeri.

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B}) \longleftrightarrow F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Quindi il tensore elettromagnetico risulta essere

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -By \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che, per arrivare a questo risultato, abbiamo sfruttato il fatto che al contrario della massa, **la carica è una quantità scalare che si conserva** in ogni caso, qualsiasi urto o evento. La cosa ovviamente molto comoda è che noi già sappiamo come trasformano i tensori, cioè tramite la matrice Λ delle trasformazioni di Lorentz. Quindi il tensore elettromagnetico è un *unico* oggetto che contiene *tutta* l'informazione sui campi e che trasforma coerentemente in relatività speciale!

Quindi se O vede $F^{\mu\nu}$, O' vede $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$

Il tensore elettromagnetico è quindi molto comodo, ma per arrivarci siamo dovuti partire da alcune assunzioni per quanto riguarda la forza di Lorentz... per chi è molto curioso negli approfondimenti (17.3) inseriamo il modo rigoroso per ricavare questo tensore (da leggere solo quando si sono capite tutte le nozioni di elettrodinamica relativistica che presentiamo di seguito).

10.2 Boost di Lorentz lungo x

Prendiamo un boost di velocità \vec{V} a cui corrisponde una trasformazione di Lorentz veicolata dalla matrice Λ . Per un tensore, come quello elettromagnetico, vale quindi:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Facendo tutti i passaggi matematici ottieni:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma_{\vec{V}}(E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma_{\vec{V}}(E_z + VB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma_{\vec{V}}(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) \\ B'_z = \gamma_{\vec{V}}(B_z + \frac{V}{c^2}E_y) \end{cases}$$

Se io prendo due osservatori O e O' che guardano una carica (non inerziale) che si muove questi vedranno $E/B(t, \vec{x})$ e $E'/B'(t', \vec{x}')$ in cui bisogna valutare punto per punto, dove però i punti hanno coordinate diverse.

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x'^\rho) &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\mu\nu}(x^\sigma) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\mu\nu}((\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho x'^\rho) \\ x'^\rho &= \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma \longrightarrow x^\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho x'^\rho \end{aligned}$$

10.3 Boost generico

Al contrario del boost generico nella composizione delle velocità, questo è effettivamente interessante da vedere ($\vec{V} = \vec{\beta}c$):

$$\begin{cases} \vec{E}' = \gamma_{\vec{\beta}}(\vec{E} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma_{\vec{\beta}}^2}{\gamma_{\vec{\beta}}+1} \cdot \vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' = \gamma_{\vec{\beta}}\left(\vec{B} - \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c}\right) - \frac{\gamma_{\vec{\beta}}^2}{\gamma_{\vec{\beta}}+1} \cdot \vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{cases}$$

Ma come mai è interessante?? Boh veda un pò lei, uno dei più grandi risultati di inizio novecento, vabbe.

1) Supponiamo esista un S.R. O in cui $\vec{E} = 0$ e quindi ho solo campo magnetico, allora

$$\begin{cases} E' = \gamma_{\vec{\beta}} c \vec{\beta} \times \vec{B} \\ B' = \gamma_{\vec{\beta}} \vec{B} - \frac{\gamma_{\vec{\beta}}^2}{\gamma_{\vec{\beta}}+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{cases}$$

vediamo che $\vec{B}' \times \vec{\beta} = \gamma_{\vec{\beta}} \vec{B} \times \vec{\beta}$ e quindi abbiamo:

$$\vec{E}' = -c \vec{B}' \times \vec{\beta} \cdot (-\vec{B}' \times \vec{V}) = \vec{V} \times \vec{B}'$$

Se esiste quindi un riferimento in cui il campo è puramente magnetico allora per un qualsiasi osservatore O' il campo elettrico e magnetico sono legati da quest'ultima uguaglianza.

2) Al contrario se ho un riferimento con un fenomeno puramente elettrico ($\vec{B} = 0$) con calcoli analoghi ritrovo:

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{V} \times \vec{E}')$$

ed è il caso con carica ferma rispetto ad O .

10.4 Tensore Duale

Il tensore duale è definito attraverso il tensore elettromagnetico ed il tensore di Levi-Civita quadri-dimensionale, qui riportiamo solo il risultato finale, che ci serve nel prossimo capitolo.

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ & & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

10.5 Equazioni di Maxwell e legge di continuità

Dopo aver trovato un oggetto covariante che descrive correttamente i campi elettrico e magnetico sotto TL, rimangono da esprimere in forma covariante le equazioni di Maxwell. Oltre ai campi in esse compaiono le sorgenti e ricordiamo che esse dipendono dal sistema di riferimento in cui sono descritte.

Consideriamo allora un volume di carica Q_{TOT} che ha una velocità ordinaria \vec{v} rispetto ad O e consideriamo O' il sistema in cui la porzione di carica generica dQ è istantaneamente in quiete (quindi O' si muove con la carica infinitesima), allora i due osservatori descriveranno (ricordando che $dQ = dQ'$):

$$\begin{cases} \rho = \frac{dQ}{dV} & \left\{ \begin{array}{l} \rho' = \frac{dQ}{dV'} \\ \vec{J}' = ? \end{array} \right. \\ \vec{J} = \rho \vec{v} & \end{cases}$$

Sappiamo che cambiando sistema di riferimento cambia il volume a causa della contrazione delle lunghezze

$$\begin{aligned} dV' &= dl'dA' = dldA\gamma_{\vec{v}} \longrightarrow \frac{dV'}{\gamma} = dV \\ \rho' &= \frac{dQ'}{dV'} = \frac{dQ}{\gamma dV} = \frac{\rho}{\gamma} \\ \vec{J}' &= \rho' \gamma_{\vec{v}} \vec{v} \\ \rho' &= \frac{\rho}{\gamma} := \tilde{\rho} \end{aligned}$$

Adesso abbiamo visto la formulazione nel modo classico, ma possiamo descrivere \vec{J} come un tetra vettore tramite la teta velocità? Vediamo

$$\tilde{\rho}, u^\mu \longrightarrow J^\mu = \tilde{\rho}u^\mu = \tilde{\rho}\gamma_{\vec{v}}(c, \vec{v}) = (J^0, \vec{J}) = (\tilde{\rho}\gamma_{\vec{v}}c, \tilde{\rho}\gamma_{\vec{v}}\vec{v}) = (\rho c, \vec{J})$$

Abbiamo quindi adesso le due **sorgenti covarianti** $\tilde{\rho}, J^\mu$ che possiamo utilizzare per riscrivere l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \longrightarrow c \frac{\partial}{\partial x^0} \rho + \partial_i J^i = 0 \quad \text{ma} \quad c\rho = J_0 \quad \text{e} \quad J_i = J^i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i \implies \partial_\mu J^\mu \quad \text{equazione di continuità relativistica}$$

Ricordiamo infatti che l'operatore ∂_μ covariante risulta essere, secondo la nostra notazione, $c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}$ con $i = 1, 2, 3$. Quindi possiamo condensare entrambe le sorgenti nell'espressione relativistica J^μ e attraverso l'operatore ∂_μ otteniamo l'equazione di continuità.

$$J^\mu = \tilde{\rho}u^\mu = (\rho c, \vec{J}) \longrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$$

Per risolvere allora le equazioni di Maxwell ci serviamo dei tensori F e \mathcal{F} :

$$\begin{cases} \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \end{cases} \quad \text{Equazioni di Maxwell in relatività}$$

Infatti andando ad analizzare:

- $\nu = 0 \quad \partial_0 \mathcal{F}^{00} + \partial_i \mathcal{F}^{i0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

- $\nu = 1$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu 1} &= \partial_0 \mathcal{F}^{01} + \partial_1 \mathcal{F}^{11} + \partial_2 \mathcal{F}^{21} + \partial_3 \mathcal{F}^{31} = 0 \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_z}{c} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_y}{c} = 0 \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B})_x + \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = 0 \end{aligned}$$

- $\nu = 2 \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu 2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B})_y + \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = 0$

- $\nu = 3 \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu 3} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B})_z + \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = 0$

$$\nu = 1, 2, 3 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Abbiamo dimostrato che la prima equazione, in cui compare il tensore duale, ci restituisce la seconda e la terza equazione di Maxwell, paroparo. Vediamo che il tensore di Faraday della seconda equazione ci dà le altre due:

- $\mu = 0 \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} \longrightarrow \partial_i F^{0i} = \mu_0 \rho c \rightarrow \frac{1}{c} \partial_i E^i = \mu_0 \rho c \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \rho c^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- $\mu = 1 \quad \partial_\nu F^{1\nu} = \mu_0 J^1$

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} &= \mu_0 (\vec{J})_x \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E})_x + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y &= \mu_0 (\vec{J})_x \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E})_x &= \mu_0 (\vec{J})_x \end{aligned}$$

- $\mu = 2 \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E})_y = \mu_0 (\vec{J})_y$

- $\mu = 3 \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E})_z = \mu_0 (\vec{J})_z$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Inoltre se prendiamo $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$ e deriviamo per ∂_μ

$$\partial_\mu (\partial_\nu F^{\mu\nu}) = \mu_0 \partial_\mu J^\mu \implies 0 = \partial_\mu J^\mu$$

quello che troviamo è l'equazione di continuità per la conservazione della carica. Quindi, come ci si aspettava, nella formulazione covariante delle equazioni di Maxwell ritrovo le relazioni dell'elettrodinamica, e come ci è capitato per la formulazione covariante del momento dove in un vettore troviamo anche teorema del lavoro e la seconda legge della dinamica, nella formulazione della tetra corrente ritrovo anche la conservazione della carica.

10.6 Introduzione dei potenziali covarianti

Adesso quello che vogliamo fare è cercare di riscrivere i potenziali in forma covariante, vediamo come possiamo fare. Innanzitutto definisco il **tetra potenziale vettore**:

$$A^\mu : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu -$$

che mi esprime il tensore F come sue derivate, similmente ai potenziali nei campi \vec{E} e \vec{B} , e che soddisfi

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \\ \partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu \end{cases} \implies \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 J^\nu \implies \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -\mu_0 J^\nu$$

Ricordando che $\partial_\mu \partial^\mu = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Quindi introduciamo il potenziale vettore A^μ che mi esprime il tensore elettromagnetico, attraverso il quale posso risolvere le equazioni Maxwell covarianti (come era nell'elettrodinamica) e che trasforma come:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$

con f scalare (quindi invariante a meno di un gradiente di una f , esattamente come nei potenziali dell'elettrodinamica classica). Quindi il tensore elettromagnetico, attraverso il potenziale, trasforma:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f)$$

Per procedere proviamo a vedere se attraverso questa definizione di potenziale otteniamo le equazioni per i campi che abbiamo visto nel capitolo di elettrodinamica classica. Sviluppiamo gli indici del tensore elettromagnetico (quindi le sue componenti legati ai campi):

$$\mu = \mathbf{0} \quad F^{0\nu} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A)_i - A^0 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\frac{(E)_i}{c} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A)_i - (\vec{\nabla} \cdot A^0)_i \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} (A^0 c) \leftarrow A^0 c = V$$

La formulazione del tetra potenziale vettore allora possiamo riscriverla in funzione dei due potenziali classici V e \vec{A} :

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) := \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

La definizione di potenziale A^μ è buona, possiamo allora riscrivere:

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 J^\nu \xrightarrow{\text{nel vuoto}} 0$$

e per concludere il capitolo di relatività notiamo che da questo potenziale covariante giungiamo anche ai gauge. Infatti sfruttando l'invarianza di Gauge è sempre possibile scegliere f tale che $\partial_\nu A^\nu = 0$ trovando l'**espressione covariante del Gauge di Lorentz** e potendo riscrivere l'equazione del gauge di Lorentz in forma covariante:

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

11 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA

Partiamo dalla **radiazione del corpo nero**. Nasce dall'idea che un corpo scaldato emette radiazione, infatti con la temperatura aumenta l'energia cinetica delle cariche del corpo che quindi emettono e irridiano con onde elettromagnetiche. Più è alta la temperatura più è alta la frequenza di emissione. Se quindi prendiamo un corpo casuale, con il suo infinitesimo di area, infinitesimo di angolo solido (nell'area attorno) e infinitesimo di frequenza.

$$dE \propto e(\nu, T) d\Omega d\nu dA$$

Introduziamo quindi una nuova funzione che chiamamo **potere emissivo** e che dipende dalla frequenza di emissione e dalla temperatura del corpo; da questa possiamo introdurre un'altra grandezza che chiamiamo **radianza** ed è definita come:

$$\int_0^\infty e(\nu, T) d\nu$$

E se facciamo la cosa opposta? Ovvero mandiamo energia dall'angolo solido e vedo quanta ne assorbe, avremo una funzione che chiamiamo **potere assorbente** $a(\nu, T)$. Inoltre avremo che

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)}$$

deve essere lo stesso per tutti i corpi, per non violare il secondo principio della termodinamica. Se infatti immaginiamo un sistema con solo due corpi che si vedono da dei fori e possono scambiare calore solo tramite radiazione, e ammettiamo che un ha un rapporto maggiore di un'altro, potremo facilmente creare una macchina che viola il secondo principio.

11.1 Corpo nero

Un corpo nero è un qualsiasi corpo con $a = 1$, ovvero assorbe tutta l'energia che gli viene mandata. Un esempio? Il sole, grazie al materiale di cui è fatto (plasma); quello che vediamo è solo ciò che lui emette. Allora avremo che la funzione di potere emittivo è universale per tutti i corpi neri. Prendiamo una scatola con un buchetto infinitesimo, visto da fuori sembrerà più nero del nero in quanto l'energia all'interno rimbalzerà e si dividerà tante volte e la probabilità di uscire è quasi zero. Quindi dal foro è visto come corpo nero. Questo problema usa tutte le teorie che ad allora erano state create: elettrodinamica (energie dei campi), meccanica (cariche in movimento) e termodinamica (equilibrio). Quindi se mi metto davanti al foro l'energia dei campi che trovo per unità di tempo e area è il vettore di Poynting.

$$S = c \cdot u \text{ contando anche la distribuzione angolare } e(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T)$$

dove $u(\nu, T)$ è la **distribuzione spettrale di energia**. Ma come mai il corpo nero è così importante? In primo luogo perché u è fissata da una funzione universale e quindi importante nella fisica fondamentale, in secondo luogo era un problema tecnologico molto utile all'epoca per esempio sull'efficienza delle lampadine. Questo problema lo studiò Max Plank. Se allora studiamo la funzione u noteremo che ha un massimo in corrispondenza della maggiore frequenza di emissione

(che varierà con la temperatura) e va a zero con frequenze che tendono a infinito e zero (non trovo quelle frequenze). Questa funzione è fatta in modo che valga la **legge di spostamento di Wien**:

$$\frac{\nu_{MAX}}{T} = cost$$

Inoltre si hanno altre nozioni utili a introdurci la fisica presa in causa:

- **Legge di Wien** $u(\nu, T) \propto \nu^3 e^{-cost \frac{\nu}{T}}$
- **Legge di Stephan-Boltzmann**

$$\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$$

- **Nota di Lord Rayleigh**

$$\nu \rightarrow 0 \quad \lambda \rightarrow \infty \quad u(\nu, T) \propto \nu^2 T$$

Da qui partiva Plank.

11.1.1 Corpo nero come scatola di oscillatori

Il punto di partenza (non fallimentare) fu usare l'entropia di un sistema di oscillatori in equilibrio con la radiazione elettromagnetica legando l'entropia all'energia interna ed alla temperatura:

$$dU = TdS - PdV \quad (dV = 0 \quad TdS = \delta Q) \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$$

Il primo tentativo è un pò empirico, a naso, per capire la forma della funzione S . L'idea è che gli oscillatori meccanici, a frequenze diverse, si comportino in modo indipendente e possano essere trattati indipendentemente.

$$\nu \rightarrow 0 \quad \frac{1}{U} \propto \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial U} \propto \frac{1}{U} \rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{U^2}$$

Ora usiamo la legge di Wien:

$$\nu \rightarrow \infty \quad U \propto e^{-cost \frac{\nu}{T}} \quad -\ln(U) \propto \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \implies \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{U}$$

$$\text{Allora formuliamo } \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{a}{U(U+b)} \begin{cases} -\frac{1}{U^2} & \text{se } U \gg b \\ -\frac{1}{U} & \text{se } U \ll b \end{cases}$$

Non è proprio il ragionamento che fece Plank, ma ha fatto un ragionamento analogo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U} &= \frac{a}{b} \ln\left(\frac{U+b}{U}\right) = \frac{1}{T} \quad \frac{b}{aT} = \ln\left(\frac{U+b}{U}\right) \\ U e^{\frac{b}{aT}} &= U + b \quad U(e^{\frac{b}{aT}} - 1) = b \quad U = \frac{b}{e^{\frac{a}{bT}} - 1} \end{aligned}$$

Inoltre sappiamo che la frequenza deve essere contenuta altrimenti il massimo non potrebbe variare con essa:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \gamma\nu & U &= \frac{b}{e^{\frac{\gamma\nu}{T}} - 1} & u(\nu, T) &= \frac{f(\nu)}{e^{\frac{\gamma\nu}{T}} - 1} \\ \nu \rightarrow 0 & \quad u \propto \nu^2 T & u(\nu, T) &\xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \frac{f(\nu)}{\gamma \frac{\nu}{T}} = \frac{f(\nu)}{\gamma} \cdot \frac{T}{\nu} \\ & \implies f(\nu) = C\nu^3 & u &= \frac{C\nu^3}{e^{\frac{\gamma\nu}{T}} - 1} \end{aligned}$$

$f(\nu)$ deve assumere questa forma altrimenti non sarebbe compatibile con la condizione di proporzionalità. Quindi assumendo i limiti noti e usando entropia per legare energia e temperatura otteniamo questo risultato. Gli sperimentali hanno provato e visto che funzionava molto meglio di altre teorie.

Tuttavia dal punto di vista teorico rimaniamo insoddisfatti. Vogliamo non una formula empirica ma una formula legata a principi fisici. Ora vediamo cosa fa Plank un certo natale cercando di legare l'entropia al mondo microscopico (basandosi su Boltzmann) assumendo che l'energia possa assumere solo valori discreti. Questa discretizzazione non è campata in aria, bensì fu un processo svolto anche da Boltzmann per semplificare i calcoli e risolvere i problemi che un continuum di energia ci dava. L'idea è quella di considerare l'energia interna di un corpo nero ripartita su N oscillatori che vibrano ad una frequenza $\nu \rightarrow E = N \cdot U$ dove U è l'energia media. A questi oscillatori assegno un "quantum" di energia ε , un pacchetto di energia tale che $E = P \cdot \varepsilon$ con $P \gg 1$ e intero (è il numero di quanti), così posso usare Boltzmann.

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln(\Omega) & E &= \sum_i E_i = N \left(\frac{1}{N} \sum_i E_i \right) = NU & \frac{1}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V \\ S &= \frac{k_B}{N} \ln \left(\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!} \right) = \frac{k_B}{N} \ln \left(\frac{(N+P)!}{N!P!} \right) = \frac{k_B}{N} \left[\ln(N+P)! - \ln(N!) - \ln(P!) \right] \\ \text{per Stirling} & \approx \frac{k_B}{N} [(N+P)\ln(N+P) - P\ln P - N\ln N] \\ &= k_B \left[\left(1 + \frac{P}{N} \right) \ln \left(1 + \frac{P}{N} \right) - \frac{P}{N} \ln P - \ln N \right] \\ &= k_B \left[\left(1 + \frac{P}{N} \right) \ln \left(1 + \frac{P}{N} \right) - \frac{P}{N} \ln \frac{P}{N} \right] = k_B \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \left(\frac{U}{\varepsilon} \right) \right] \\ \frac{1}{k_B T} &= \frac{\partial}{\partial U} \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \frac{U}{\varepsilon}}{\frac{U}{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{\varepsilon + U}{U} \right) \\ &\rightarrow e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} = \frac{\varepsilon + U}{U} \implies U(T) = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1} \end{aligned}$$

Abbiamo allora trovato l'energia interna per ogni oscillatore. Inoltre nella distribuzione spettrale la temperatura interviene per forza in questa forma

$$u(\nu, T) \propto \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1}$$

ma $u(\nu, T)$ deve scalare come $\frac{\nu}{T} \rightarrow \varepsilon$ deve essere proporzionale alla frequenza

$$\implies \varepsilon = \text{cost} \cdot \nu = h \cdot \nu$$

$$u(\nu, T) \propto \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad h \text{ costante universale}$$

Questo lascia il problema della discretizzazione dell'energia: la formula ebbe un successo incredibile ma ciò implica che ad una data frequenza esiste un quanto di energia **fissato**. E' relativo agli oscillatori o ai campi? Ricordiamo che non ci stiamo ponendo il problema di cosa siano gli oscillatori, semplicemente gli assegnamo ad ognuno una quantità discreta ε di energia. Inoltre ricordiamo che il quanto di energia era già stata introdotta da Boltzmann per il calcolo dei microstati che contribuiscono alla probabilità termodinamica. Allora, ci si chiede, è possibile prendere il limite del continuo? In questo caso avremmo $h \rightarrow 0$ perché ν è fissata, che è assurdo; comunque nel caso di $h \approx 0$ si ottiene una curva $u(T, \nu)$ che non rappresenta i dati sperimentali. Quindi dal problema del corpo nero otteniamo un modello di energia quantizzata che non può essere eluso!

11.1.2 Corpo nero a temperatura fissata

Riprendo il corpo ma invece di fissare l'energia E fisso la temperatura (contatto con un termostato). Voglio allora l'energia media: ho $P(E) = e^{-\frac{E}{k_B T}}$ probabilità di avere una certa energia. Quindi l'energia media sarà la media pesata dei valori:

$$U = N \cdot \langle E \rangle \quad \text{dove } E = n \cdot h\nu \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ discretizzazione energia}$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-n h \nu \beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu \beta}} \quad \text{con } \beta := \frac{1}{k_B T} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu} \right] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h \nu})^n \right] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}} \right) \quad \text{prop. serie geom.} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln (1 - e^{-\beta h \nu}) = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}} \cdot h \nu \cdot e^{-\beta h \nu} = \frac{h \nu}{e^{\beta h \nu} (1 - e^{-\beta h \nu})} = \frac{h \nu}{e^{\beta h \nu} - 1} \end{aligned}$$

E se fosse un continuo?

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} dE \cdot E \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}}}{\int_0^{\infty} dE \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}}} = \frac{dE [E \cdot e^{-E/\beta}]}{\int_0^{\infty} dE e^{-E/\beta}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\int_0^{\infty} dE \cdot e^{-E/\beta} \right) \\ &\rightarrow E\beta = x \rightarrow \int_0^{\infty} dE \cdot e^{-E/\beta} = \frac{1}{\beta} dx e^{-x} = \frac{1}{\beta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln (\beta) = \frac{1}{\beta} = k_B T \end{aligned}$$

Quindi usando la meccanica classica ottengo esattamente il principio di equiparazione come previsto.

$$U = N \cdot k_B T \quad \text{contro} \quad U = \frac{N \cdot h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Ma se $h\nu \ll k_B T \rightarrow U = \frac{N h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \rightarrow k_B T \cdot N$ si riottiene il limite classico in cui domina l'energia termica.

Questo risultato non sorprende: con un continuo classico di energia un oscillatore armonico restituisce un'energia media $\propto k_B T$. Assumendo per vera avremmo potuto dire che $u(T, \nu)$ di un sistema di oscillatori classici è il numero medio di questi nell'unità di volume per l'energia media $k_B T$ all'equilibrio termico, quindi senza dipendenza dalla frequenza ν . Se invece trattiamo il problema con il "quantum" ε riotteniamo la formula di Plank!

11.2 Calcolo della costante

$u(T, \nu) = \text{cost} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}$ → dovrebbe essere il numero degli oscillatori. Quindi se riprendiamo la scatola col foro piccolo, avremo che all'interno i campi rimbalzeranno sulle pareti come onde con vari modi normali di oscillazione: posso contare questi modi.

$$\begin{aligned} d \ll \lambda &= \frac{c}{\nu} \quad \text{con } d = \text{"lunghezza di penetrazione"} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \quad \text{con } \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \text{ t.c. L contiene num. intero di modi} \\ \Rightarrow \vec{k} &= (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad \text{con } n_{x,y,z} = 1, 2, 3, \dots \text{ interi} \rightarrow |\vec{k}| = \frac{2\pi\nu}{c} \end{aligned}$$

Riempio lo spazio con cubetti di lato $\frac{\pi}{L}$ a cui assegno due modi normali di oscillazione. Ora fisso un certo ν che mi fissa il valore massimo di $|\vec{k}|$ e il raggio della sfera nei quali può trovarsi k ($R = \frac{2\pi\nu}{c}$ nell'ottante della sfera sugli assi positivi). Voglio allora trovare $N(\nu)$ numero di oscillatori compresi tra la frequenza 0 e ν con la condizione che $R \gg L_{\text{cubetti}}$ → $|\vec{k}| \gg \frac{\pi}{L} \rightarrow \frac{2\pi\nu}{c} \gg \frac{\pi}{L} \rightarrow L \gg \lambda$

$$N(\nu) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-3} = \frac{8\pi\nu^3 L^3}{3c^3}$$

Questo rappresenta il numero di oscillatori totali nella banda di frequenza: il fattore 2 rappresenta i modi di oscillazione, il fattore un ottavo è l'ottante della sfera, poi si trova il volume della sfera e infine il volume del quadratino.

$$\frac{dN}{d\nu} \frac{1}{L^3} = \frac{8\pi\nu^2}{c^2}$$

è il numero di oscillatori (togliendo il volume del corpo nero) negli stati compresi tra $\nu + d\nu$.

$$u(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

e si chiama **legge di Plank**. A questo risultato ci siamo arrivati grazie a Wien, dove $h\nu \gg k_B T$. Se invece prendiamo il limite di frequenze basse dove $h\nu \ll k_B T$ ed espandiamo al primo termine il denominatore troviamo:

$$u(T, \nu) = \frac{8\pi k_B}{c^3} \nu^2 T$$

che è della forma attesa $\nu^2 T$. Questa espressione è proprio la predizione classica per la radiazione di corpo nero, nota come **legge di Rayleigh-Jeans**, presentata nel 1905 e derivata utilizzando, tra l'altro, il principio di equipartizione. Notiamo che la legge di Rayleigh-Jeans dà una divergenza della densità di energia per frequenze alte (u tende a ∞ al crescere di ν). Tale predizione è del tutto inaccettabile, in quanto porterebbe a concludere che un qualsiasi corpo nero ad una qualsiasi temperatura T emette infinita energia in forma di radiazioni di alta frequenza; per rendere l'idea, i fisici la chiamano catastrofe ultravioletta. La legge di Planck evita la catastrofe ultravioletta fornendo il corretto andamento di u a tutte le frequenze, e solo la parte a bassa frequenza (o grande lunghezza d'onda) della curva di Planck è approssimabile con la legge classica di Rayleigh-Jeans. Inoltre la legge di Planck concorda con l'equazione di Stephan-Boltzmann, infatti:

$$\int_0^\infty u(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} \text{ con } x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow \int_0^\infty u d\nu = \left(\frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^5} \right) T^4 = \sigma T^4$$

quindi non è infinita ma dipende dalla temperatura (energia integrata su tutte le frequenze). Da qui possiamo scrivere i valori delle due costanti più importanti:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Si è riusciti a stimare meglio di prima la costante di Boltzmann e hanno trovato il valore di questa nuova costante " h ", che come si può notare è molto molto piccola. L'occhio umano non riesce a scovare la discretizzazione dell'energia nei raggi luminosi, infatti la quantità di quanti di energia emessi da una qualsiasi fonte è talmente alta da (10^{20} per ogni secondo) risultare un flusso continuo di energia. Tuttavia è fondamentale per la risoluzione del problema del corpo nero.

12 Conferme sperimentali dei quanti

12.1 Effetto photoelettrico

In tutto questo processo non abbiamo ancora spiegato cosa quale sia la natura di questi oscillatori: Planck pensava che dovesse esistere una sorta di meccanismo di assorbimento della radiazione dalle pareti del corpo nero e conseguente emissione di altra radiazione. Fu Einstein a chiarire la situazione con la spiegazione dell'effetto photoelettrico.

Il fenomeno consiste nell'emissione di elettroni da una superficie metallica che è stata irradiata da un'onda con frequenza sufficientemente alta. La cosa strana è che (esperimento di Lenard) l'energia degli elettroni emessi dalla superficie non dipende dall'intensità dell'onda, bensì dalla frequenza!! (sarà mica vero $\varepsilon = h\nu????$)

Costruiamo allora un potenziometro fissando un potenziale V tra due piastre metalliche. La radiazione cederà energia agli elettroni per salire il gradino di potenziale che ho fissato. Come si vede nella figura 2 l'energia ceduta dalla radiazione è divisa in due parti: energia di estrazione dell'elettrone (W) ed energia cinetica (E_K). Quindi dopo l'urto con la piastra metallica gli elettroni acquisiscono un'energia $h\nu$ che a loro servirà per fare uscire dal metallo, e se avanza energia l'elettrone avrà anche un'energia cinetica una volta uscito dal metallo.

$$h\nu = W + E_k \quad h\nu = W + e|V_0|$$

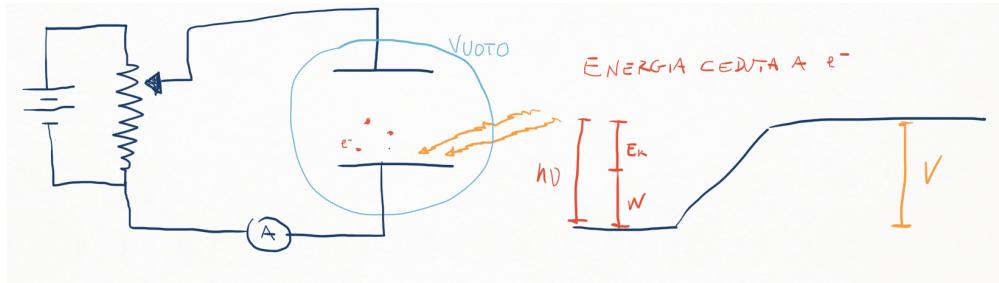


Figura 2: Schema circuito ed energia ceduta

Utilizzando un potenziometro posso calcolare l'energia cinetica con valori conoscibili dove V_0 è il valore di soglia del potenziale per far fuoriuscire gli elettronni e metterli in circolo in un circuito (essenzialmente è il potenziale che frena gli elettronni). Da qui arriviamo alla conclusione di Einstein:

$$|V_0| = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

in cui ha verificato che i dati stanno su una retta in funzione di ν traslata a seconda del metallo (W dipende dal metallo). Abbiamo quindi l'accordo tra esperimento e teoria e abbiamo allo stesso tempo verificato la formula di Plank $\varepsilon = h\nu$.

12.2 Calore specifico dei solidi

Il problema riguarda la validità dei modelli atomistici nella descrizione della materia e, più in particolare, l'applicabilità delle trattazioni statistiche di Maxwell e di Boltzmann per i sistemi a molte particelle governati dalla meccanica newtoniana. L'applicazione diretta del teorema di equipartizione, ad esempio, nel calcolo dell'energia interna di un sistema termodinamico in funzione della sua temperatura, portava a risultati semplici per i calori specifici che, però, non erano sempre in accordo con i dati sperimentali, in particolare nelle misure effettuate a temperature basse. Anche in questo caso, il quanto di energia ci aiuta.

12.2.1 Modello Dulong-Petit

Abbiamo un solido ad una certa temperatura, posso calcolare il calore specifico attraverso le oscillazioni degli atomi che ne compongono il reticolo:

$$N \text{ atomi per lato} \longrightarrow 3N \cdot \langle E \rangle = 3N k_B T = 3n N_A k_B T = 3nRT \quad N_A k_B = R$$

e abbiamo sperimentalmente verificato che $3nRT = U$. Il calore specifico si trova banalmente come:

$$c = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = 3R$$

Questo risultato non concorda con le osservazioni sperimentali che ci dicono che il calore specifico dipende dalla temperatura, anche se molti materiali a temperatura ambiente si attestano su un valore di $3R$. Inoltre è importante osservare che l'osservazione ci dice che se $T \rightarrow 0 \implies c \rightarrow 0$. Questo modello è quindi grossolanamente impreciso.

12.2.2 Modello di Einstein

Come prima ipotizziamo che il solido sia rappresentato da $3N$ oscillatori indipendenti. Stavolta, a differenza del modello classico precedente, e in analogia a quanto fatto da Planck per il corpo nero, assumiamo che l'energia di ciascun oscillatore possa assumere solo i valori discreti $E_n = nh\nu_0$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, dove ν_0 è la frequenza di vibrazione, che assumiamo esserla stessa per tutti. Il risultato sarà ovviamente lo stesso:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{h\nu_0}{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}} - 1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}} \\ U &= \frac{3nN_A h\nu_0}{e^{-\frac{h\nu_0}{k_B T}} - 1} = \frac{3nR h\nu_0}{k_B} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}} - 1} \\ c &= 3R \left(\frac{h\nu_0}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}}}{(e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}} - 1)^2} \end{aligned}$$

Dove sostituiamo

$$x = \frac{h\nu_0}{k_B T} = \frac{T_E}{T} \quad \text{con} \quad T_E = \frac{h\nu_0}{k_B}$$

e chiamiamo T_E **temperatura di Einstein**.

$$c = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot 3R$$

Analizzando questa nuova funzione otteniamo:

- $T \gg T_E \rightarrow x \rightarrow 0 \quad c = 3R \implies D.P.;$
- $T \ll T_E \rightarrow x \rightarrow \infty \quad c = 3Rx^2 e^{-x} = 3R \left(\frac{h\nu_0}{k_B T} \right)^2 e^{-\frac{h\nu_0}{k_B T}}$

Quindi quello che stiamo facendo non è altro che dare ipotesi minime per fenomeni molto vistosi e complessi. In realtà si è poi scoperto che il modello andava corretto in quanto a T molto basse il calore specifico va come T^3 e non e^{-x} .

12.2.3 Modello di Debye

Il modello di Einstein trascurava l'effetto elastico tra i vari atomi: infatti il reticolo dobbiamo immaginarlo come masse collegate da molle. Ad alte energie trascuriamo l'effetto per la mancanza di tempo per il segnale di propagarsi e del sistema di reagire, ovvero l'alta energia della temperatura la fa da padrone sul piccolo effetto elastico. Quindi se vado attorno al minimo di temperatura, dove gli atomi sono lenti, conta molto. In che modo possono oscillare gli atomi? Ho tre direzioni: due trasversali (y, z) e una longitudinale nella direzione di propagazioni (cosa che la luce non ha). Se si inserisce la quantizzazione ecco Debye. Quello che prima non facevo era considerare la $v_x(L)$. Prendiamo un solido cubico di lato L e imponiamo che L sia un numero intero di semi-lunghezze d'onda. Sapendo che la lunghezza d'onda e la frequenza sono legate da $\lambda = \frac{v}{\nu}$, questo equivale a prendere valori discreti del vettore d'onda, i cui punti stanno in un reticolo cubico nello spazio.

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{\nu} \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi\nu}{v}$$

Se facciamo il conto dei modi di oscillazione che abbiamo troviamo

- modi **trasversi** $\frac{1}{L^3} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{v_T}$
- modi **longitudinali** $\frac{1}{L^3} \frac{dN(d\nu)}{d\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{v_T}$ dove manca il fattore due che nell'altro è incluso per i due modi

E poi partiamo dall'ipotesi fondamentale della quantizzazione dell'energia

$$E = nh\nu \quad \langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \frac{1}{V} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = 4\pi\nu^2 \left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right)$$

Il numero di modi normali che rappresentano il sistema è dunque $3N$ e ciò equivale a porre un vincolo sulle frequenze ammesse, che non devono superare una frequenza massima ν_{max} tale che:

$$3N = \int_0^{\nu_{max}} d\nu \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \int_0^{\nu_{max}} d\nu 4\pi\nu^2 V \left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) = 4\pi V \left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \frac{\nu_{max}^3}{3}$$

$$\nu_{max}^3 = \frac{9N}{4\pi V} \frac{1}{\left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right)}$$

A questo punto possiamo calcolare l'energia interna: basta assegnare ad ogni oscillatore la sua energia media e sommare su tutti gli oscillatori. Se l'energia media la calcoliamo usando i quanti di energia come nel modello di Einstein, il calcolo di U diventa

$$U = \int_0^{\nu_{max}} d\nu 4\pi V \nu^2 \left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = 4\pi V \left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 h \int_0^{\frac{h\nu_{max}}{k_B T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

sostituendo con $\nu_{max} = \left[\frac{9Nk_B^4}{h^3 v_{max}^3} \int_0^{\frac{h\nu_{max}}{k_B T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \right] T^4$

con $x = \frac{h\nu_{max}}{k_B T} = \frac{\Theta}{T}$

Dove quindi chiamiamo $\Theta = \frac{h\nu_{max}}{k_B}$ **temperatura di Debay**. Ora vediamo se questo modello concorda con le semi-previsioni precedenti e sperimentali:

$$U = \left[\frac{9nR}{\Theta^3} \int_0^{\frac{\Theta}{T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \right] T^4$$

- $T \ll \Theta$ l'estremo superiore dell'integrale tende ad infinito e l'interale ci dà un valore indipendente da T . Quindi esce che $U \propto T^4$ e di conseguenza $c \propto T^3$, in accordo.
- $T \gg \Theta$ Nel limite opposto, di alta temperatura il limite superiore dell'integrale viene a trovarsi nella regione di piccoli x , dove l'integrando cresce come x^2 e l'integrale fornisce il valore $\frac{\Theta^3}{3T^3}$, da cui $U = 3nRT$ e $c = 3R$ come nel modello classico di Dulong-Petit.

La differenza cruciale che quindi questo modello ha con quello di Einstein è non trattare i singoli oscillatori come indipendenti, ma prendere in considerazione anche il "suono" del materiale, ovvero le oscillazioni tra i singoli atomi che sono trascurabili ad alte temperature.

13 Modello dell'atomo di Bohr

Siamo arrivati alla conclusione ineludibile della quantizzazione dell'energia $\varepsilon = h\nu$ applicabile a molto problemi della fisica (calore specifico, effetto fotoelettrico,...). Arriva ad entrare anche nella teoria dei modelli atomici.

Il concetto di atomo, all'inizio del '900 era molto vago, tanto che alcuni fisici erano dell'idea che non esistessero proprio gli atomi! I chimici erano gli unici a servirsi diffusamente degli atomi: Dalton, Mendeleev, I fisici erano più dell'idea di un continuo, non granulare, anche per la descrizione fondamentale della materia.

La convinzione dell'esistenza degli atomi ha origine con la descrizione del moto Browniano da parte di Einstein (1905) in cui erano previste proprietà molecolari del fluido che implicava l'esistenza di unità fondamentali. La sua formulazione ebbe un successo incredibile permettendo di stimare il numero di Avogadro ancora meglio. Rutherford poi chiarisce il concetto di radioattività atomica, emissione di particelle (α , β) e onde elettromagnetiche (γ).

Si hanno molte informazioni confuse sulla struttura della materia a livello atomico ma bisogna formulare un modello stabile:

- **Thompson:** modello a panettone;
- **Rutherford:** modello planetario con interazione Coulombiana.

Per sondare la struttura dell'atomo vengono usate le particelle α sparate contro un atomo in un fascio collimato: esperimento di Rutherford. Grazie a questo esperimento (1919 viene scartato il modello a panettone e viene invece formulata l'ipotesi che la carica positiva dell'atomo fosse concentrata in un "nucleo" centrale **MOLTO** più piccolo delle dimensioni dell'atomo, cioè l'esperimento si spiega solo se il nucleo è puntiforme rispetto al diametro atomico. Sotto l'ipotesi che il nucleo atomico e le particelle α siano puntiformi è possibile ricavare un modello planetario (tramite le equazioni di Keplero proprio) in **perfetto** accordo con i dati sperimentali.

A Manchester, insieme a Rutherford, si trova anche Niels Bohr che capisce per primo che questo modello planetario **non** può essere classico. Lo abbiamo visto con il primo esercizio di elettrodinamica (16.1) che un modello classico è incompatibile con la evidente stabilità dell'atomo.

Allora Bohr si rivolge all'ipotesi della quantizzazione dell'energia **applicata agli elettroni!** Cioè a seconda dell'energia (quindi un multiplo di ε) gli elettroni sono collacati in orbite stabili, quindi deve esistere una **discretizzazione delle orbite**, con orbite permesse e orbite proibite.

Nicholson ci aveva già provato tempo prima ma partendo da ipotesi sbagliate, ovvero assegnando agli elettroni un'energia:

$$\varepsilon = h\nu \longrightarrow L = n\frac{h}{2\pi} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove le orbite permesse sono quelle a cui corrisponde un momento angolare L multiplo di $\frac{h}{2\pi}$. Questa ipotesi, chiamata **congettura di Nicholson**, ci servirà, ma non funziona sempre per un motivo di instabilità.

Da considerare vi erano anche le righe spettrali di alcuni elementi: l'idrogeno, per esempio, se irradiato con luce bianca emette luce in tutto lo spettro tranne in corrispondenza di alcune, peculiari, frequenze (che generalmente dipendono dall'elemento considerato); per l'idrogeno è prevalentemente viola. Un certo Balmer sviluppa una serie per queste lunghezze d'onda rilevate:

$$\lambda = A \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad n = 3, 4, 5, \dots \longrightarrow \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad A, R \text{ costanti}$$

Per l'idrogeno :

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{con } n > m > 0 \text{ interi}$$

Tutte le righe spettrali (emissioni ad un certo λ) sono contenute nelle formule. Bohr parte dal modello di Nicholson (sbagliato) e considera la serie di Balmer per sviluppare un modello dell'atomo d'idrogeno che porta a delle predizioni corrette.

13.1 Bohr torna a Copenhagen

E mo so cazzo per tutti, il governo giudaico non gli impone più la clausura. Ipotesi di Bohr per il suo modello:

- esistenza di orbite stabili e Newtoniane (assumiamo circolari), quindi se un' elettrone occupa un' orbita non emette radiazione. La condizione per queste orbite è

$$L = n \frac{h}{2\pi} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Emissione ed assorbimento di radiazione **SOLO** se un elettrone salta da un' orbita all'altra! Qua c'è la differenza con Nicholson

$$h\nu_{ij} = E_i - E_j$$

- Si conoscevano poi massa dell'elettrone e la massa dell'idrogeno:

$$\frac{m_{nucleo}}{m_{e^-}} \rightarrow \infty$$

ipotesi tra l'altro agguerribile facendo qualche conto in più, infatti $\frac{m_{nucleo}}{m_{e^-}} \approx 1800$

Sviluppiamo allora le equazioni:

$$\begin{cases} 1) & m \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{R^2} \\ 2) & L = mvR = n \frac{h}{2\pi} \end{cases} \quad e = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} |e^-|$$

Dalla 2) ricavo $v = v(R) = \frac{nh}{2\pi m} \cdot \frac{1}{R}$ che vado a sostituire nella prima:

$$1) \quad \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m R^3} = \frac{e^2}{R^2} \longrightarrow R = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = n^2 \frac{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}{m_e e^2}$$

Il raggio è discretizzato, come quando avevamo ipotizzato esistono orbite stabili discrete dove

$$R_B = \frac{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}{m_e e^2}$$

è il **raggio di Bohr** definito da tre costanti universali. Calcoliamo ora l'energia:

$$3) \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{R} = -\frac{1}{2}e^2 \frac{m_e e^2}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Energia quantizzata di una certa orbita

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Vediamo che è diversa dall'ipotesi di Nicholson ($E_n = nh\nu$), oltre che abbiamo un'energia negativa in quanto è uno stato legato.

$$4) \quad h\nu_{ij} = E_{n_i} - E_{n_j} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Vogliamo arrivare alla legge di Rydberg-Ritz, che è una legge sperimentale, per una predizione che conferma il modello:

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} = \frac{\nu_{ij}}{c} = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad n_i > n_j > 0$$

che conferma la formula empirica se la costante di Rydberg-Ritz vale:

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} = 1.097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

che possiamo riscrivere usando solo costanti universali:

$$\mathcal{R} = \frac{m|e^-|^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3}$$

Allora la scrittura dell'energia n-esima è:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \mathcal{R} c h \approx -\frac{1}{n^2} \cdot 13.6 \text{ eV}$$

Quindi più è grande n più è piccola l'energia e più è grande il raggio. Inoltre definiamo **energia di ionizzazione**:

$$|E(n=1)| = \mathcal{R} c h$$

13.1.1 Atomo di idrogeno

Il caso dell'atomo di idrogeno ($R_B = 0.528 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) è interessante in quanto è evidentemente stabile poiché l'unico e^- non può decadere, l'unica cosa che può succedere è che l'elettrone salta da un'orbita meno energetica se gli viene fornita un'onda elettromagnetica a frequenza ν :

$$h\nu = E_{n=1} - E_{n=2}$$

13.1.2 Atomi con $Z \neq 1$

Nel caso con più elettroni avremo invece:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \mathcal{R}_Z \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > m > 0 \\ \mathcal{R}_H &= \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} \quad Z = 1 \longrightarrow \text{Idrogeno} \\ \mathcal{R}_Z &= \frac{2\pi^2 Z^2 me^4}{ch^3} = Z^2 \mathcal{R}_H \\ \implies \frac{1}{\lambda} &= Z^2 \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)\end{aligned}$$

L'ultima equazione scritta è la predizione del modello di Bohr per un qualsiasi atomo e lo stesso anno venne confermata questa legge per l'elio a patto di non usare l'assunzione $\frac{m_{nucleo}}{m_e} \rightarrow \infty$, ma la massa nelle equazioni deve essere ridotta:

$$m = \frac{m_{nucleo} \cdot m_e}{m_{nucleo} + m_e} \quad \mathcal{R} = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_n}} = \frac{\mathcal{R}_\infty}{1 + \frac{m_e}{m_n}}$$

Così il modello di Bohr è confermato! Se vogliamo invece applicare questo schema agli isotopi, per esempio deuterio e trizio, andranno presi in considerazione quelle componenti in più e si nota che sono effettivamente quelle componenti che fanno la differenza, anche sperimentale, tra l'atomo di idrogeno ed i suoi isotopi seppure sia una piccola correzione.

Tuttavia Bohr voleva partire da ipotesi più sensate, più fondate. Ricordiamo che siamo partiti presupponendo che $L = n \frac{h}{2\pi}$, cosa che sembra un pò un'andare a tentativi.

13.2 Principio di corrispondenza

Il principio di corrispondenza serve a legare le ipotesi quantistiche alla meccanica classica: ovvero che se noi applichiamo i modelli quantistici in situazioni dove la discretizzazione è trascurabile, dobbiamo ritrovare gli stessi risultati della fisica classica.

13.3 Seconda Formulazione

Per la seconda formulazione del modello di Bohr partiamo da ipotesi diverse:

- Lo spettro di un certo atomo deve seguire la formula:

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} = \mathcal{R} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

dove la costante di Rydberg non è definita (verrà definita grazie al confronto con la formulazione classica);

- Esistono stati stazionari ad energie discrete con energia assorbita e ceduta secondo la formula:

$$h\nu_{ij} = E_i - E_j$$

- Vale il principio di corrispondenza, andando a sostituire l'ipotesi del momento angolare e quindi la regola con cui viene discretizzata l'energia.

Applichiamo allora la prima e la seconda ipotesi legando λ e ν secondo la formula $c = \lambda\nu$:

$$E_i - E_j = h\nu_{ij} = \frac{hc}{\lambda_{ij}} = hc\mathcal{R}\left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{hc\mathcal{R}}{n_j^2} - \frac{hc\mathcal{R}}{n_i^2}$$

Notiamo quindi che esiste un'energia generalizzata che può essere scritta come:

$$E_n = -\frac{\mathcal{R}hc}{n^2}$$

La discretizzazione dell'energia diventa irrilevante quando $n \gg 1$ e la distanza fra le diverse energie diventa irrilevante. Se allora prendiamo il caso $E_n \rightarrow E_{n-1}$ $n \gg 1$ per il modello classico dell'elettrone abbiamo emissione di ν che è l'inverso del periodo. Vediamo allora la relazione tra l'energia dell'orbita e ν .

13.3.1 Caso classico

Si parte con le solite relazioni tra ω , T , ν , r e chi più ne ha ne metta del moto circolare:

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{e^2}{r^2} & v = \omega r & m\omega^2 r^3 = e^2 \implies r^3 &= \frac{e^2}{m\omega^2} = \frac{e^2}{4\pi^2 m\nu^2} \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r} \longrightarrow |E|^3 &= \frac{1}{8}\frac{e^6}{r^3} = \frac{1}{2}e^4\pi^2 m\nu^2 \\ |E|^3 &= \frac{\pi^2 me^4}{2}\nu^2 \end{aligned}$$

13.3.2 Caso quantistico

Usando invece il modello di Bohr per il troviamo:

$$\begin{aligned} h\nu &= \mathcal{R}hc\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n}\right) = \mathcal{R}hc\frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2(n-1)^2} \underset{n \gg 1}{=} \frac{2\mathcal{R}hc}{n^3} \\ \nu^2 &= \left(\frac{2\mathcal{R}c}{n^3}\right)^2 = \frac{4\mathcal{R}^2 c^2}{(n^2)^3} = \frac{4\mathcal{R}^2 c^2 |E|^3}{\mathcal{R}^3 h^3 c^3} = \frac{4}{\mathcal{R}ch^3} |E|^3 \longleftarrow |E| = \frac{\mathcal{R}hc}{n^2} \end{aligned}$$

Quindi l'energia della radiazione emessa vale:

$$|E|^3 = \frac{\mathcal{R}ch^3\nu^2}{4}$$

13.4 Applicazione principio del corrispondenza

Se allora andiamo a uguagliare il caso classico e il caso quantistico otteniamo:

$$\frac{\mathcal{R}ch^3}{4} = \frac{\pi^2 me^4}{2} \quad \mathcal{R} = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3}$$

Notiamo quindi che partendo da ipotesi diverse troviamo le stesse conclusioni di discretizzazione dell'energia e quindi poi anche del momento angolare.

13.5 Esperimento di Franck e Hertz

Nel 1914 James Franck e Gustav Hertz avevano condotto esperimenti sulle collisioni elettrone-atomo, accelerando elettroni in un campo elettrico, variabile a piacere, e facendoli passare attraverso vapori di mercurio. L'esperimento è simile a quelli solitamente usati per studiare i raggi catodici. In un tubo sotto vuoto c'è un catodo metallico, che viene riscaldato per emettere elettroni. Questi vengono accelerati da una griglia, tenuta ad una differenza di potenziale V positiva rispetto al catodo e variabile a piacere. Gli elettroni che superano la griglia vengono raccolti da un anodo posto dietro la griglia. L'anodo si trova ad un potenziale leggermente negativo rispetto alla griglia, in modo che gli elettroni possono arrivarci solo se, quando superano la griglia, hanno energia cinetica sufficiente a vincere la barriera di potenziale. La quantità misurata è la corrente tra il catodo e l'anodo in funzione del potenziale V tra il catodo e la griglia.

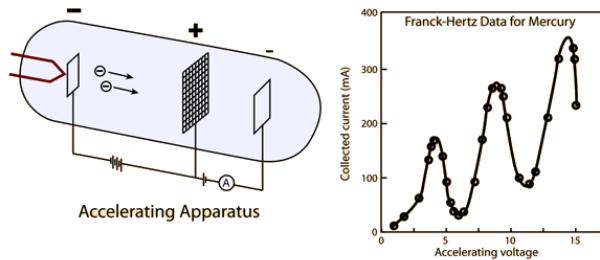


Figura 3: Apparato sperimentale

Nel caso con tubo vuoto mi aspetto ti trovare una funzione monotona crescente, non ci interessa sapere quale. Nel caso invece col mercurio vaporizzato ottengo che alcuni elettroni, per via di urti anelastici, perdono energia, portando quindi ad avere meno elettroni che arrivano all'anodo. Notare che nella situazione ci possono essere sia elettroni che impattano sia elettroni che non impattano, e sia elettroni che impattano elasticamente che anelasticamente; noi però sappiamo che gli urti elastici non fanno perdere energia all'elettrone, per cui ci concentriamo su quelli anelastici. Quello che ottengo con i dati sperimentali è che la curva iniziale è esattamente come se avessi solo urti elastici, quindi come se avessi il tubo vuoto. Successivamente, attorno ai 4.9 V abbiamo improvvisamente una caduta, quindi gli elettroni con 4.9 eV fanno urti anelastici, ovvero cedono la loro energia ed emettono con

$$\lambda^* = 2536 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$E^* = eV^* = 4.9\text{ eV}$$

Successivamente la corrente torna a salire fino al doppio di V^* e via così. Quindi 4.9 eV è l'energia minima che può cedere un elettrone.

$$E^*\lambda^* = (4.9\text{ eV})(2536 \cdot 10^{-8} \text{ cm}) = (4.9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg})(2536 \cdot 10^{-8} \text{ cm}) = 1.99 \cdot 10^{-16} \text{ erg cm}$$

Se adesso, casualmente, provassimo a moltiplicare due belle costanti universali:

$$hc = (6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s})(3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}) = 1.99 \cdot 10^{-16} \text{ erg cm}$$

Quindi notiamo un'uguaglianza, se posso molto particolare al limite del pauroso, tra dati sperimentali ed il prodotto di 2 costanti universali. QUINDI:

$$E^*\lambda^* = hc \quad E^*\left(\frac{c}{\nu^*}\right) = hc \quad E^* = h\nu^*$$

L'energia che possiamo scambiare con l'atomo è solo questa: un multiplo intero di un piccolo pacchetto di energia esattamente come avevamo ipotizzato. Questo esperimento viene preso come la prova che l'energia è quantizzata. L'esperimento viene fatto ovviamente dopo che Bohr fece il modello. L'unico problema che troviamo è che E^* non è l'energia di ionizzazione in quanto troviamo linee spettrali di emissione del mercurio anche su λ più piccole. La spiegazione sta nel fatto che si tratta di transizioni interne degli elettroni, che salgono di livello e che poi scendendo emettono radiazione.

13.6 Terza formulazione

Quello che ci chiediamo adesso che abbiamo formulato questi modelli così efficaci è: che significato hanno le ipotesi che abbiamo fatto? Quello che non piace del modello di Bohr era il moto circolare fissato con le leggi di Keplero, e se non fosse così? Allora un fisico di nome Sommerfeld ha provato a riformulare il modello di Bohr con ipotesi diverse senza prendere il considerazione solo un possibile moto circolare ma anche moti ellittici e moti di precessione dell'asse maggiore dell'ellissi.

13.6.1 Moto circolare

Con il moto circolare abbiamo un problema a un grado di libertà, ovvero la posizione sulla circonferenza (oppure l'angolo, si legano facilmente $ds = rd\phi$). Allora possiamo definire l'**integrale d'azione**:

$$\oint p \, ds = \int p_r \, r \, d\phi = \int p_\phi \, d\phi$$

dove chiamiamo p_ϕ **momento coniugato all'angolo**

$$L = pr = m\omega r^2 = n \frac{h}{2\pi} \rightarrow \int n \frac{h}{2\pi} \, d\phi = nh$$

Quindi considerare orbite circolari equivale a dire che l'integrale d'azione è uguale a nh . Ci interessa questa descrizione con l'integrale d'azione in quanto con gradi di libertà in più vengono a crearsi più integrali che descriveranno quei gradi.

13.6.2 Moto ellittico

Se invece ammettiamo un moto ellittico con un fuoco nel centro dell'atomo avremo un secondo grado di libertà: la distanza dal fuoco. Allora dovremo aggiungere un integrale d'azione in più che è:

$$\int p_r \, dr = n'h$$

Quello che abbiamo allora a questo punto è una coppia di (n, n') che sono stati di energia per stati stazionari che ammettono diverse orbite e quindi con diversa eccentricità.

13.6.3 Moto ellittico con precessione

Se allora ci mettiamo nel moto ellittico e assumiamo una precessione dell'asse maggiore (o minore, ovviamente) avremo ancora un grado di libertà in più: ovvero, in un sistema di assi fissati, avremo un moto di precessione della perpendicolare alla nostra ellisse rispetto ad un asse del sistema (per

esempio rispetto all'asse z, quello che si visualizza è la rotazione della perpendicolare attorno all'asse z). Questo grado di libertà ci restituisce un nuovo integrale d'azione che sarà:

$$\int p_\psi d\psi = n'' h$$

Sommerfeld dimostrò che

$$L_z = m \frac{h}{2\pi} \quad m = -n, -n+1, \dots, n-1, n$$

quindi l'asse dell'orbita non può assumere qualsiasi angolazione, deve essere posizionato facendo in modo che il momento angolare segua quei valori.

13.6.4 Conseguenze di fretta

Questo metodo spiega abbastanza bene un effetto splitting che, in presenza di campo elettrico o magnetico, fa in modo che le linee spettrali osservate aumentino in numero per via della nuova orientazione che assumono gli atomi. Tuttavia non funzionava sempre, con alcuni elementi non prediceva sempre il numero giusto di linee, allora si introduce lo spin come rotazione intrinseca dell'elettrone per colmare queste lacune. Quindi il modello spiega bene qualcosa ma non tutto.

Come ne usciamo? Quali grandezze sono rilevanti da considerare? Il punto critico è di nuovo la traiettoria, ma non la forma bensì il concetto, noi non possiamo osservare la traiettoria quindi sarebbe meglio che non fosse un punto cruciale nella formulazione del modello. Posso allora predirne l'energia dell'atomo solo con le frequenze di emissione e assorbimento? Vediamo nei capitoli seguenti cosa la fisica serba per noi.

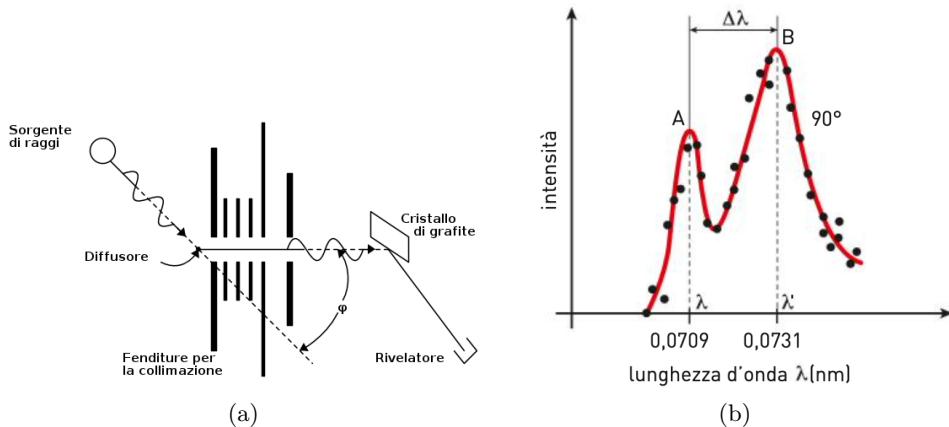
14 Onda e particella: il dilemma

Nel corso della fisica si sono susseguiti svariati tentativi di ipotesi, dalla formulazione ondulatoria di Young a quella particellare di Newton: qual'è la verità? Tecnicamente Maxwell con le sue equazioni delle onde avrebbe dimostrato la caratteristica ondulatoria, tuttavia Einstein arriva con i trapezi tirati a mò di ali e dice: "Entra?? Entra?? no che non entra", la sua teoria non entrava nella formulazione ondulatoria, bensì in quella particellare. Quello che sappiamo è che in alcune situazioni si dimostra onda in altre particella. Vediamo adesso un altro esperimento che ne dimostra la natura ondulatoria.

14.1 Effetto Compton

Abbiamo già visto e fatto i calcoli nell'esercizio 16.11, ma adesso vediamo di trattare nel dettaglio l'esperimento. Il setup sperimentale che abbiamo è: una sorgente di raggi x, un bersaglio (per esempio grafite), un collimatore, un prisma e un rilevatore di raggi x. L'esperimento consiste nello sparare dei raggi-x contro un target di un certo materiale, e qui ci sono due possibilità: l'onda rimbalza imperturbata, facendo un urto elastico (o una banale diffusione vista ondulatoriamente), oppure incide contro gli atomi facondogli espellere elettroni (tipo effetto fotoelettrico). Quello che facciamo è mettere il collimatore ad un certo angolo rispetto al fascio di raggi x per appunto selezionare quell'angolo, ovvero scegliere i raggi che sono andati in quella direzione. Dopodichè i

raggi passano attraverso ad un prisma che scomporrà la luce facendone quindi le linee spettrali a diverse lunghezze d'onda, e restituirà il tutto ad un rilevatore di raggi x. Di seguito lo schema. Quello che notiamo dai risultati, mostrati nel grafico, sono due picchi distinti di intensità per due



lunghezze d'onda differenti:

- Il primo picco ha lunghezza d'onda uguale a quella di emissione, quindi con la stessa energia e questo vuol dire che hanno fatto urto elastico con il target;
- Il secondo picco ha lunghezza d'onda maggiore, quindi frequenza minore e quindi un'energia minore ($E = h\nu$).

Quello che troviamo è la seguente formula:

$$\lambda' - \lambda = cost(1 - \cos\theta) \quad cost = 0.024 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

dove la costante non dipende dal materiale su cui impatta il raggio.

Per fare questo esperimento si usano i raggi x per fare in modo che l'onda abbia un'energia molto maggiore di quella di legame degli elettroni del target di modo che vengano poi lanciati via dal corpo a velocità quasi relativistiche. Facendo qualche calcolo verrà fuori che la costante vale:

$$cost = \frac{h}{m_e c} \rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Questo fenomeno è il principale processo di trasmissione di energia all'interno del sole, i fotoni prodotti continuano a rimbalzare nel materiale di cui è fatto, ovvero il plasma, che non è fatto d'altro che da cariche, perdendo man mano l'energia che aveva in partenza e mettendoci molti anni ad uscire dal sole; questo è anche il motivo per cui la fotosfera è più fredda dell'interno del sole. Queste osservazioni portano tutti ad ammettere che la luce sia formata da pacchetti di energia, alla fine nessuno aveva ragione. Di conseguenza il momento di un fotone è esattamente $\frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ e deve per forza andare alla velocità della luce.

14.2 Modello di de Broglie

Tra il 1924 e il 1926 la fisica iniziò a svoltaare dal suo stato di caos totale, con due nuove strade intraprese da Heisenberg e de Broglie, con due teorie che furono il cuore della nuova e nascente meccanica quantistica. Un punto di partenza comune era il mettere in discussione le traiettorie classiche degli elettroni in un atomo. Nel primo caso, quello di Werner Heisenberg, la rinuncia alle traiettorie segue da un principio metodologico: le grandezze che entrano in una teoria fisica devono essere osservabili; le traiettorie degli elettroni degli atomi non lo sono e, quindi, vanno escluse dalla teoria; ciò che si misura sono le frequenze della luce emessa e assorbita e solo con queste dobbiamo risalire ad altre quantità osservabili e alle relazioni che intercorrono tra loro. Così facendo, nel 1925 Heisenberg approda a quella che verrà chiamata **meccanica matriciale**. Nel secondo caso, quello di Louis de Broglie, ciò che viene messo in discussione è la natura corpuscolare dell'elettrone, che verrà sostituito con un'onda; questa idea diventerà la base su cui venne costruita, nel giro di pochi mesi la **meccanica ondulatoria**.

Se prendiamo una particella a caso che segue una traiettoria casuale possiamo associare un momento $p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ a cui, secondo la quantizzazione dell'energia, posso associare una lunghezza d'onda. Ma posso anche associare un momento ad un onda?

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases}$$

se usiamo queste relazioni anche tutto il discorso sul corpo nero torna

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \Rightarrow \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right) = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

dove la prima parentesi fa riferimento al quanto di radiazione mentre l'ultima solo alle caratteristiche ondulatorie con pulsazione e vettore d'onda.

14.2.1 Atomo di idrogeno

Se prendiamo come esempio l'atomo di idrogeno, per Bohr l'elettrone è una particella ad una distanza r con velocità \vec{v} su un cerchio: allora troviamo una quantizzazione di $L = n\frac{h}{2\pi}$.

Quello che dice de Broglie è di immaginare anziché un elettrone, di immaginare un'onda, una certa quantità che oscilla attorno all'atomo. L'unico modo per fare in modo che dopo un giro si sovrapponga esattamente, senza creare creste, è che la circonferenza sia un multiplo intero della lunghezza d'onda.

$$2\pi r = n\lambda \longrightarrow \vec{p} = \hbar\vec{k} \longrightarrow 2\pi r = \frac{n2\pi\hbar}{\vec{p}} = \frac{nh}{\vec{p}}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = \frac{nh}{2\pi} \implies L = n\frac{h}{2\pi}$$

Quindi vediamo che partendo dall'ipotesi $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ e applicandola all'idea di de Broglie otteniamo l'ipotesi di Bohr. Invece se prendo una qualsiasi altra particella più massiva, Einstein dimostrò che a temperatura abbastanza bassa troveremo ancora l'approssimazione ondulatoria. Allora il nostro

già amico Debye incaricò Schrodinger di trovare delle leggi del moto per queste interpretazioni ondulatorie. Alla fine, quello che conta, è stabilire quali sono i fondamenti della nuova teoria che sta emergendo, in termini di principi, leggi e predizioni di fatti osservabili, piuttosto che il significato e il valore delle congetture e dei ragionamenti euristici utilizzati nella sua formulazione iniziale. Anche perchè, come capita spesso, alcune delle idee iniziali che portano alla teoria corretta, si rivelano sbagliate a posteriori.

14.3 Pacchetti di onde

N.B. In questa parte tralasceremo per comodità il simbolo di vettore.

Una differenza apparentemente incolmabile tra particelle e onde sta nel fatto che le onde sono delocalizzate nello spazio mentre le particelle, per loro natura, sono localizzate. In realtà, se è vero che un'onda monocromatica 'è una funzione che occupa tutto lo spazio, nulla ci vieta di generare funzioni localizzate entro regioni anche piccole dello spazio usando combinazioni lineari di onde di diversa lunghezza d'onda. Ad esempio, in una dimensione, una funzione del tipo:

$$f(x) = \sum_j g_j \cos(k_j x) \quad \text{oppure} \quad f(x) = \sum_j g_j e^{ik_j x}$$

Un'onda di questo tipo potrebbe essere significativamente diversa da zero solo in una regione limitata dello spazio, se le ampiezze g_j vengono scelte opportunamente. Se poi andiamo a lavorare con gli integrali possiamo scrivere, in più dimensioni:

$$f(r) = \int g(k) e^{ikr} dk$$

Un grande classico che non invecchia mai e non dorme sugli allori è la gaussiana:

$$g(k) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}(k-k_0)^2}$$

quindi con α e k_0 costanti assegnate avremo:

$$f(x) = \int dk e^{-\frac{\alpha^2}{2}(k-k_0)^2} e^{ikx} = e^{ik_0 x} \int dk e^{-\frac{\alpha^2}{2}(k-k_0)^2} e^{i(k-k_0)x}$$

cambio variabile con $k' = k - k_0$:

$$f(x) = e^{ik_0 x} \int dk' e^{-\frac{\alpha^2 k'^2}{2}} e^{ik' x} = e^{ik_0 x} \int dk_0 e^{-\frac{\alpha^2}{2}(k'^2 - \frac{2ik' x}{\alpha^2})}$$

e moltiplichiamo e dividiamo per il fattore $e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, in modo che l'esponente nell'integrale possa essere scritto come un quadrato di un binomio,

$$f(x) = e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \int dk' e^{-\frac{\alpha^2}{2}(k'^2 - \frac{ix}{\alpha^2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \int dq e^{-q^2}$$

Infine l'integrale della gaussiana da $-\infty$ a $+\infty$ vale $\sqrt{\pi}$ per cui otteniamo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \tag{14.8}$$

Se ora confrontiamo il modulo quadro delle funzioni g e f vediamo:

$$|g(k)|^2 = e^{-\alpha^2(k-k_0)^2}$$

$$|f(x)|^2 = \frac{2\pi}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

Il primo corrisponde ad una funzione gaussiana nello spazio dei vettori d'onda k , centrata in k_0 e con larghezza Δk proporzionale a $\frac{1}{\alpha}$. Il secondo è ancora una funzione gaussiana, stavolta nello spazio delle coordinate x , di larghezza Δx proporzionale a α . La funzione $f(x)$ così ottenuta, può essere identificata come un pacchetto d'onde, essendo il risultato di una combinazione lineare di onde con diversi vettori d'onda k . Il pacchetto d'onde gaussiano risulta essere tanto più localizzato nello spazio delle coordinate (piccolo Δx) quanto più è delocalizzato nello spazio dei vettori d'onda (grande Δk), ed è importante notare che il prodotto delle larghezze delle funzioni nei due spazi è una costante dell'ordine dell'unità:

$$\Delta x \Delta k = O(1)$$

Notiamo poi che possiamo ricalcolare la funzione $g(k)$ utilizzando la funzione $f(x)$ data in 14.8, tramite l'integrale:

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx f(x) e^{-ikx}$$

i passaggi sono identichi a prima. Queste sono quindi trasformazioni che passano dallo spazio delle coordinate allo spazio dei vettori d'onda e viceversa. Per rendere più simmetrica la trasformazione possiamo scaricare la costante $\sqrt{2\pi}$ metà per parte e riscrivere le trasformazioni in questo modo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk g(k) e^{ikx}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) e^{-ikx}$$

che in tre dimensioni diventano:

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int dk g(k) e^{ik \cdot r}$$

$$g(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int dr f(r) e^{-ik \cdot r}$$

Queste si chiamano trasformate di Fourier e dovrebbero essere già note a chi studia questo documento, in caso contrario visionare il file di *metodi matematici per la fisica* o informarsi autonomamente. E' anche noto il fatto che le trasformate di Fourier si applicano solo a funzioni a quadrato sommabile, che sono le funzioni per le quali esiste ed è finito l'integrale:

$$\|f(x)\| = \int dx |f(x)|^2$$

dove $\|f(x)\|$ è chiamata norma. Per tali funzioni funzioni la norma non solo è finita ma è anche conservata:

$$\|f(x)\| = \|g(k)\|$$

Dunque, avendo a disposizione funzioni a quadrato sommabili, non solo gaussiane, possiamo passare da uno spazio all'altro in modo semplice. Questo ci assicura che possiamo costruire pacchetti

d'onda localizzati entro un certo Δx , combinando linearmente onde con vettore d'onda entra un intervallo Δk , e sapendo che $\Delta x \Delta k = O(1)$. Una singola onda monocromatica è un'ente fisico completamente delocalizzato nello spazio ma molto localizzata nello spazio dei vettori d'onda. Tuttavia una combinazione opportuna di onde può essere invece localizzata entro una regione limitata di spazio, a cui possiamo associare una posizione, essendo quindi molto delocalizzata nello spazio delocalizzata nello spazio dei vettori d'onda (combinazione di infinite onde \rightarrow infiniti k). Ad un'onda monocromatica possiamo associare una fase $(kx - \omega t)$. I punti che si trovano alla stessa fase obbediscono alla semplice equazione $kx - \omega t = a$, dove a è una costante. Dunque, un punto di fase assegnata si muove nello spazio secondo la legge oraria $x = (\frac{\omega}{k})t + cost$, che corrisponde ad un moto uniforme di velocità $v_f = \frac{\omega}{k}$. Questa si chiama velocità di fase (notevole secondo me che sempre con le onde si usa che la velocità è $\frac{\omega}{k}$). Se abbiamo un pacchetto d'onde, in una dimensione, rappresentato in un certo istante da una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile, allora la sua evoluzione temporale può essere scritta così:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che ogni onda che compone il pacchetto, oltre ad avere un k diverso, avrà anche una pulsazione ω diversa. La relazione tra la pulsazione e il vettore d'onda $\omega = \omega(k)$ si chiama **relazione di dispersione**, e dipende dal tipo di onde considerate. Ora, supponiamo che il pacchetto sia costituito da onde in un intervallo di vettori d'onda Δk tale che la funzione $\omega(k)$ vari di poco entro quell'intervallo. In tal caso, per tutte le onde del pacchetto possiamo usare l'espansione al primo ordine

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0)$$

essendo k_0 il centro del pacchetto nello spazio dei vettori d'onda. Allora possiamo scrivere:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk g(k) e^{i[kx - \omega(k_0)t - (\frac{d\omega}{dk})_{k_0}(k - k_0)t]}$$

Chiamiamo $\omega_0 = \omega(k_0)$ e $v_g = (\frac{d\omega}{dk})_{k_0}$ e scriviamo:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk g(k) e^{i[kx - \omega_0 t - v_g(k - k_0)t]}$$

ovvero

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i[\omega_0 - v_g k_0]t} \int dk g(k) e^{ik(x - v_g t)}$$

il cui modulo quadro vale:

$$|f(x, t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int dk g(k) e^{ik(x - v_g t)} \right|^2$$

Dunque t e x entrano in questa funzione nella combinazione $\tilde{x} = x - v_g t$ e questo significa che il pacchetto d'onde trasla nello spazio con velocità v_g . Questa si chiama velocità di gruppo. Per pacchetti che si muovono in tre dimensioni, la relazione di dispersione sarà della forma:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \cdot \nabla \omega$$

da cui la velocità di gruppo $v_g = \nabla \cdot \omega$. Il concetto di velocità di gruppo era ben noto nella fisica classica, sia per la descrizione della propagazione del suono nei mezzi continui che per la propagazione della luce in mezzi trasparenti non omogenei. La definizione di relazione di dispersione viene proprio da lì. Notiamo anche che nel caso in cui la relazione di dispersione sia $\omega = ck$, dove $c = \frac{\omega}{k}$ è una velocità di fase indipendente da k , allora la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase, ogni onda trasla allo stesso modo delle altre e l'intero pacchetto trasla nello spazio senza modificare la sua forma. Questa è la situazione della propagazione del suono o della luce in mezzi cosiddetti non-dispersivi, ma è solo un caso particolare e non è necessariamente quello che ci interessa qui.

14.4 Conclusione del dilemma

Per concludere questo dilemma che dilania la fisica da secoli e secoli, vogliamo riportare uno spunto secondo noi molto interessante: la questione onda-particella non è altro che un problema di dizionario, ovvero dipende tutto dal contesto teorico in cui mi trovo. In ogni teoria creo concetti nuovi per introdurre nuove visioni della fisica e della realtà, per cui cambiando il contesto teorico cambia anche la definizione che dò di certi concetti o di certe quantità. Per esempio la definizione che dò di particella nell'800 è diversa da quella che dò nel '900. Non esiste davvero un problema onda-particella dove o è uno o l'altro. L'introduzione di una nuova teoria crea una nuova interpretazione delle cose e quindi un nuovo dizionario; se volessimo usare il dizionario vecchio dovremmo usare dei "protocolli" per distinguere le varie situazioni.

15 Equazione di Schrodinger

Einstein, partendo dall'idea di de Broglie idea di associazione di proprietà ondulatorie alle particelle, scrisse la statistica di Bose-Einstein dove per temperature molto basse gli atomi si comportavano come onde in sovrapposizione, e Debye che conosceva molto bene i suoi sviluppi chiese a Schrodinger di preparare una presentazione del lavoro di de Broglie. Debye gli suggerì di cercare un'equazione per le onde di materia, che fosse compatibile con l'idea di de Broglie e, possibilmente, descrivesse correttamente gli atomi superando le difficoltà del modello di Bohr. Così Schrodinger si rifugiò sulle alpi e in poco tempo ce la fece. Noi non useremo il suo procedimento, bensì uno semplificato.

Per procedere usiamo come guida il principio di corrispondenza. In particolare, vogliamo che le "onde di materia", qualunque cosa siano, siano tali da garantirci gli stessi risultati della fisica classica nel limite in cui il moto della particella è in accordo con essa. Prendiamo come caso guida quello di una particella libera che si muove nello spazio con una certa velocità v e assumiamo valgano le ipotesi di de Broglie:

$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Assumiamo di trovarci nel limite in cui vale anche la fisica classica: quindi il pacchetto deve essere sufficientemente localizzato da assomigliare ad una particella libera classica, per cui vale:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Usando ω e k possiamo allora aiutarci a riscriverla come:

$$\hbar\omega = \frac{|\hbar k|^2}{2m}$$

da cui

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (15.9)$$

Se prendiamo la definizione di velocità di gruppo possiamo inoltre scrivere:

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \vec{k}^2 = \frac{\hbar \vec{k}}{m} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$$

troviamo quindi che la velocità di gruppo è proprio uguale alla velocità della particella. Facciamo un passo ulteriore e chiediamoci quale può essere l'equazione che le onde del pacchetto devono soddisfare affinché la relazione di dispersione sia la 15.9. A tale scopo consideriamo una singola onda monocromatica di pulsazione ω e vettore d'onda k :

$$E e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hbar \omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

e per la quantità di moto lungo x :

$$p_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hbar k_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Analogamente si trovano quelle lungo y e z . Per il quadrato dunque vale:

$$p^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\hbar^2 \nabla^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

e se vogliamo che valga $E = \frac{p^2}{2m}$ abbiamo

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Questa equazione ci dà, per costruzione, la giusta relazione di dispersione. Ora notiamo che l'equazione differenziale è lineare e, dunque, se due o più onde sono soluzioni, anche una loro combinazione lineare è ancora soluzione. Prendiamo dunque una funzione generica $\Psi(\vec{r}, t)$ in questa forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk g(k) e^{i(k \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

dove $g(k)$ sono ampiezze nello spazio dei vettori d'onda. Allora questa funzione Ψ , che chiamiamo **funzione d'onda**, soddisfa l'equazione:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t)$$

Questa è l'**equazione di Schrodinger per particelle libere**. Se invece ammettiamo un campo di forze conservative a cui corrisponde un potenziale $V(\vec{r})$ allora l'equazione diventerà:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

Alla fine viene fuori che i valori di energia discretizzata sono esattamente quelli predetti dal modello di Bohr per l'atomo di idrogeno. Vogliamo ricalcare l'attenzione sul fatto che questa equazione è un fatto matematico, non deriva da fenomeni od osservazioni e alla fine è anche la piega che ha

preso la fisica moderna dall'elettrodinamica. Non c'è traccia di traiettorie le quali sono sostituite con energie e zone in cui l'onda è diversa da zero.

Una particolarità di questa nuova equazione è che non è stata derivata da alcuna legge o principio, è stata scritta a partire da ipotesi. Ci troviamo al di fuori della meccanica classica quindi ci risulta difficile interpretarla, tuttavia avremo un limite in cui vale il principio di corrispondenza dove le onde piane interferiscono costruttivamente in una zona piccola. E nel caso dell'estremamente piccolo? Bisogna fare attenzione a non essere fuorviati dall'interpretazione ondulatoria delle particelle, infatti, per esempio, l'**elettrone NON è un'onda**, quello che facciamo è attribuire proprietà delle onde a delle particelle. Ψ è una funzione complessa su (\vec{r}, t) , non è quindi un'onda classica e non deve quindi essere interpretata come tale, la chiamiamo solo funzione d'onda; quindi il pacchetto d'onda si ha solo nel limite classico. Allora le grandezze fisiche diventano operatori! Per esempio la quantità di moto vale:

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}_r \quad p^2 = -\hbar\nabla_r^2$$

mentre poi abbiamo anche l'energia classica che esprimiamo tramite la **funzione di Hamilton**:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

che diventa l'**operatore di Hamilton** quando facciamo il passaggio all'equazione di Schrödinger applicato alla funzione d'onda:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

il quale è un operatore che è una somma di un operatore (il laplaciano) e una funzione reale. Il cappelletto sta ad indicare che è un operatore e quindi si applica ad una funzione.

N.B. Ricordiamoci che stiamo sempre parlando del caso della particella singola.

N.B. Questa è una teoria non relativistica. Se partiamo da $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ riusciamo a trovare un'equazione relativistica.

Gli operatori sono funzioni che restituiscono funzioni. Come posso confrontare la predizione con delle misure? Cosa posso effettivamente misurare? Cosa mi rappresenta la funzione d'onda Ψ dal momento che è una funzione complessa e gli esperimenti mi danno valori reali? La nostra equazione, in caso di massa sufficientemente alta e velocità non troppo alta, nel limite del principio di corrispondenza dovrebbe descrivere la meccanica newtoniana.

15.1 La teoria è deterministica?

Una teoria per essere deterministica ha bisogno di una caratteristica: fissato un istante t con i dati in quell'istante, la legge è in grado di dirmi cosa succederà in tutti i casi successivi e anche cosa è successo negli istanti precedenti. Tuttavia non sappiamo ancora come l'equazione è legata alle misure, però vorrebbe dire che determinata la Ψ in un certo istante conosciamo anche tutte le altre. Al contrario di quanto il lettore possa pensare, questa teoria è deterministica in quanto è

un'equazione differenziale nel tempo al primo ordine:

$$d\Psi = \Psi(\vec{r}, t + dt) - \Psi(\vec{r}, t) \quad d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot dt$$

$$i\hbar[\Psi(\vec{r}, t + dt) - \Psi(\vec{r}, t)] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Psi dt$$

Quindi mi basta una condizione al tempo t per conoscere $t + dt$. Quindi l'equazione è deterministica per la Ψ che in linea di principio contiene le grandezze del sistema, bisogna solo capire come legare i dati sperimentali alla funzione d'onda.

15.2 Stati stazionari

Stato stazionario significa che il sistema non cambia il proprio stato al variare del tempo, o comunque la variazione è irrilevante. Voglio allora che il MODULO di Ψ non cambi, in quanto come funzione complessa ha modulo e fase (2 gradi di libertà) per cui usare come ipotesi che solo la parte reale non cambi è sbagliato. Inoltre ci potrebbe essere un'altra perplessità: il numero immaginario i è saltato fuori soltanto perché noi abbiamo deciso di scrivere le onde (che erano delle funzioni di seno/coseno) sotto forma di esponenziale ($e^{i\cdots}$), non possiamo allora semplicemente scrivere che la parte reale è il coseno e prendere quella? Di nuovo, la risposta ovviamente è no, gli esperimenti dicono il contrario. Quindi la congettura che faccio è:

$$|\Psi(\vec{r}, t)| \text{ non dipende da } t$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = f(t)\varphi(\vec{r})$$

dove $f(t)$ ha modulo 1. Attenzione che il tempo è concepito come universale, uguale per tutti, siamo in meccanica classica.

$$i\hbar \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \varphi(\vec{r}) = \left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) \right\} f(t)$$

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{(\hat{H}\varphi(\vec{r}))}{\varphi(\vec{r})} \quad \begin{cases} \hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \\ i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema, banalmente, troviamo a meno di una costante moltiplicativa:

$$\frac{d}{dt} \ln(f(t)) = -\frac{iE}{\hbar} \quad f(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad f(t) = e^{-i\omega t}$$

dove identifichiamo $\frac{E}{\hbar} = \omega$ come una pulsazione. Invece dalla prima equazione troviamo quella che è nota come **equazione di Schrodinger stazionaria**:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r})$$

Per risolvere questa equazione bisogna trovare gli autovalori e autovettori dell'operatore, quindi questo è un problema puramente di autovalori. Notare che l'operatore hamiltoniano non fa altro che moltiplicare ad una funzione (quella a cui viene applicato) un numero, in questo caso E . Con questa equazione stiamo spostando l'attenzione da "quantizziamo il momento" a "questa equazione

descrive la fisica”, passando per le ipotesi di de Broglie. Dato che lo spazio delle funzioni è complesso potremmo aspettarci che gli autovalori E dell’hamiltoniano \hat{H} siano numeri complessi. Ci sono però buoni motivi per volerli reali: se sono reali possono essere identificati con i valori ammessi per l’energia di una particella rappresentata (in qualche modo che ancora non sappiamo) dalla funzione Ψ . Vediamo quindi a quali condizioni E è reale. Per cominciare dimostriamo che, se le funzioni d’onda hanno norma finita, cioè sono a quadrato sommabile, allora l’operatore hamiltoniano \hat{H} soddisfa la seguente relazione:

$$\int d^3r (\hat{H}\Psi_1)^*\Psi_2 = \int d^3r \Psi_1^*(\hat{H}\Psi_2) \quad (15.10)$$

dove $*$ indica il complesso coniugato; a noi interessa solo il caso in cui $\Psi_1 = \Psi_2$. Dunque, se partiamo dalla definizione di $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$ possiamo separare l’uguaglianza in due uguaglianze diverse:

II)

$$\int d^3r V\Psi^*\Psi = \int d^3r \Psi^*V\Psi \quad \int d^3r V|\Psi|^2 = \int d^3r V|\Psi|^2$$

Notiamo che il complesso coniugato di V è sempre V in quanto funzione reale.

I)

$$\begin{aligned} \int d^3r [(\hat{H}\Psi)^*\Psi - \Psi^*(\hat{H}\Psi)] &= 0 \\ \int d^3r (\nabla^2\Psi)^*\Psi - \Psi^*(\nabla^2\Psi) &= 0 \\ \int d^3r \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\vec{\nabla}\Psi)] &= 0 \\ \int_{\Sigma} [(\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\vec{\nabla}\Psi)] \cdot d\Sigma &= 0 \end{aligned}$$

Noi, inoltre, sappiamo che Ψ ad infinito va a zero altrimenti non sarebbe una funzione a quadrato sommabile, ovvero il suo modulo varrebbe infinito. Per cui l’uguaglianza è verificata e l’operatore hamiltoniano gode della proprietà 15.10. Ora vediamo come possiamo usarlo.

Possiamo riscrivere la condizione sostituendo la funzione d’onda con la scrittura tramite $f(t)$ e $\varphi(\vec{r})$ e togliere di mezzo la prima in quanto di modulo unitario:

$$\int d^3r (\hat{H}\varphi)^*\varphi = \int d^3r \varphi^*(\hat{H}\varphi) = \int d^3r \varphi^*(E\varphi) = E \int d^3r |\varphi|^2$$

dove φ è soluzione di $\hat{H}\varphi = E\varphi$ ma si potrebbe usare la soluzione dell’equazione complessa coniugata, ovvero:

$$(\hat{H}\varphi)^* = E^*\varphi^* \rightarrow \int d^3r (\hat{H}\varphi)^*\varphi = \int d^3r E^*\varphi^*\varphi = E^* \int d^3r |\varphi|^2$$

Come vediamo i due membri di sinistra delle equazioni sono uguali, di conseguenza $E = E^*$ da cui segue che E è un numero reale.

Un’altra interessante conseguenza delle proprietà dell’hamiltoniano è la seguente. Calcoliamoci la derivata temporale della norma quadra di una funzione d’onda generica:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\Psi\|^2 &= \frac{d}{dt} \int d^3r |\Psi|^2 = \frac{d}{dt} \int d^3r \Psi^* \Psi = \int d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) \\
&= \int d^3r \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] = \int d^3r \left[-\frac{1}{i\hbar} (\hat{H} \Psi^*) \Psi + \Psi^* \frac{1}{i\hbar} (\hat{H} \Psi) \right] \\
&= -\frac{1}{i\hbar} \int d^3r \left[(\hat{H} \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\hat{H} \Psi) \right] =
\end{aligned}$$

Dove grazie alla proprietà 15.10 dell'hamiltoniano la derivata viene uguale a 0. In conclusione, l'hamiltoniano \hat{H} è l'operatore lineare che determina l'evoluzione temporale delle funzioni d'onda, ma lo fa mantenendo la norma delle Ψ costante nel tempo.

Il fatto che l'equazione di Schrodinger stazionaria per una particella in un potenziale $V(r)$ sia un'equazione agli autovalori ha un'implicazione importante: lo spettro degli autovalori ammessi può essere sia continuo che discreto. La struttura dello spettro, oltre che dalla forma del potenziale, dipende anche dalle condizioni che imponiamo alle funzioni φ per quanto riguarda la continuità e la derivabilità. Su questo aspetto possiamo ragionare in questo modo:

- i) vogliamo che la funzione φ rappresenti lo stato fisico di una particella determinandone il moto nello spazio e nel tempo in modo univoco; per questo la funzione d'onda deve essere una funzione continua, con un unico valore finito in ciascun punto dello spazio;
- ii) dato che la quantità di moto è associata alla derivata spaziale della funzione d'onda, vogliamo che anch'essa sia definita univocamente ovunque nello spazio: dunque la φ deve ammettere derivata prima continua.

Supponiamo che la funzione $V(r)$ abbia la forma di una “buca di potenziale”: la funzione sia ovunque uguale a una costante V_0 tranne in una regione limitata, entro la quale assume valori minori di V_0 , avendo la forma di una buca. Allora, partendo dalla formula (in 1D):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (15.11)$$

si può dimostrare (grazie a dio non noi) che:

- per $E < V_0$ l'equazione 15.11 ammette valori discreti di E (lo spettro è discreto) e le autofunzioni corrispondenti hanno norma finita e si annullano per $|r| \rightarrow \infty$;
- per $E > V_0$ l'equazione ammette soluzioni per qualsiasi valore reale positivo (lo spettro è continuo) e le autofunzioni all'infinito tendono ad assumere la forma di un'onda di ampiezza costante.

Nel primo caso si parla di stati legati, con la particella costretta a rimanere nella regione della buca di potenziale. Nel secondo caso si parla di stati liberi, con la particella che può trovarsi anche lontana dalla buca.

15.3 Buche di potenziale

Vediamo come possiamo risolvere l'equazione di Schrodinger in qualche caso semplice per capire il tipo di soluzioni che si ottengono. Prendiamo quindi una particella che si muove in una sola

direzione e cerchiamo i suoi stati stazionari. Si tratta quindi di risolvere la versione unidimensionale dell'equazione di Schrodinger stazionaria, ovvero quella già scritta 15.11. Una volta risolta, potremmo scrivere la funzione d'onda completa

$$\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$$

Assumiamo allora che φ sia continua e limitata, con derivata prima continua. Notiamo anche che l'equazione di Schrodinger stazionaria contiene solo grandezze reali, tranne la φ che in generale è complessa. Questo implica che se φ è soluzione di $\hat{H}\varphi = E\varphi$, allora vale anche $(\hat{H}\varphi)^* = (E\varphi)^*$, ovvero $\hat{H}\varphi^* = E\varphi^*$, e dunque φ^* è anch'essa una soluzione della stessa equazione di Schrodinger, con lo stesso autovalore E . Inoltre, dato che l'equazione di Schrodinger è lineare, anche una qualsiasi combinazione di lineare di φ e φ^* è soluzione, in particolar modo $\varphi + \varphi^*$. Allora possiamo limitarci a cercare solo soluzioni reali senza perdere di generalità. Analogamente, notiamo che se φ è soluzione, allora anche $C\varphi$ è soluzione con lo stesso autovalore di energia, con C costante qualsiasi. Ciò permette di restringere la ricerca delle soluzioni a quelle che hanno una norma fissata arbitrariamente, ad esempio le φ di norma unitaria, senza perdere di generalità.

Prendiamo un potenziale semplice, la buca quadra:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ V_0 & |x| \geq a \end{cases}$$

Si tratta del caso più semplice di una classe di potenziali $V(x)$ che si chiamano "costanti a tratti". Un potenziale del genere permette di identificare tre diverse regioni dello spazio: l'intervallo I tra $-\infty$ e a , l'intervallo II tra $-a$ e a , e l'intervallo III tra a e $+\infty$. Chiamiamo allora $\epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$ e $U_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$. Allora in I e III l'equazione di Schrodinger ha la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V_0 = E\varphi \longrightarrow \varphi'' = (U_0 - \epsilon)\varphi$$

mentre in II l'equazione diventa:

$$\varphi'' = -\epsilon\varphi$$

Per $0 < \epsilon < U_0$ le soluzioni nelle regioni I e III esterne alla buca sono del tipo $e^{\pm qx}$, con $q = \sqrt{U_0 - \epsilon}$. Si tratta di funzioni monotone. La funzione e^{-qx} diverge per $x \rightarrow -\infty$, mentre la funzione e^{qx} diverge per $x \rightarrow +\infty$. Dato che vogliamo funzioni φ limitate, dobbiamo escludere la prima nella regione I e la seconda nella regione III . Rimangono accettabili invece le due funzioni

$$\varphi_I = C_I e^{qx} \quad \text{in } I$$

$$\varphi_{III} = C_{III} e^{-qx} \quad \text{in } III$$

con C_I e C_{III} ampiezze da determinare. Nella regione II invece le soluzioni hanno la forma

$$\varphi_{II} = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \text{in } II \tag{15.12}$$

con $k = \sqrt{\epsilon}$. Le ampiezze da determinare sono quattro, ma una di esse può essere scelta arbitrariamente per fissare la norma della funzione d'onda al valore $\|\varphi\| = 1$. La quarta incognita è il valore di ϵ , che esprime l'autovalore E in forma adimensionale e che entra nella definizione di k

e q . Dunque le incognite sono quattro, tante quante le condizioni da imporre alla φ , che sono le condizioni di continuità della funzione e della sua derivata prima nei due punti di raccordo $x = \pm a$. La continuità della funzione dà le due equazioni

$$C_I e^{qa} = A \cos(ka) - B \sin(ka)$$

$$C_{III} e^{-qa} = A \cos(ka) + B \sin(ka)$$

mentre la continuità delle derivate dà

$$q C_I e^{qa} = A k \sin(ka) + B k \cos(ka)$$

$$-q C_{III} e^{-qa} = -A k \sin(ka) + B k \cos(ka)$$

Per eliminare C_I e C_{III} basta prendere il rapporto $\frac{\varphi'}{\varphi}$, che corrisponde ad imporre la continuità della derivata logaritmica. Dalle relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{cases} q = \frac{A k \sin(ka) + B k \cos(ka)}{A \cos(ka) - B \sin(ka)} \\ -q = \frac{-A k \sin(ka) + B k \cos(ka)}{A \cos(ka) + B \sin(ka)} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} q[A \cos(ka) - B \sin(ka)] - k[A \sin(ka) + B \cos(ka)] = 0 \\ -q[A \cos(ka) + B \sin(ka)] + k[A \sin(ka) - B \cos(ka)] = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} A[q \cos(ka) - k \sin(ka)] - [q \sin(ka) + k \cos(ka)] = 0 \\ -A[q \cos(ka) - k \sin(ka)] - B[q \sin(ka) + k \cos(ka)] = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni differiscono solo per il segno del primo addendo e ammettono soluzioni solo in due casi, quando:

$$\begin{cases} B = 0 \\ q \cos(ka) - k \sin(ka) = 0 \end{cases}$$

e quando

$$\begin{cases} A = 0 \\ q \sin(ka) + k \cos(ka) = 0 \end{cases}$$

Mentre il caso con $A = B = 0$ è escluso, altrimenti uscirebbe $\cot(ka) = -\tan(ka)$ che non ha soluzioni.

Le condizioni di $B = 0$ corrispondono al caso in cui, dentro la buca, la funzione d'onda ha la forma $\varphi_{II} = A \cos(kx)$. Possiamo introdurre due nuove grandezze $\xi = ka$ e $\eta = qa$. Dalla definizione di k e q segue la relazione $\xi^2 + \eta^2 = U_0 a^2$, mentre dalla continuità della derivata logaritmica segue $\eta = \xi \tan \xi$ e mettiamo queste due condizioni a sistema. Potremmo cercare le sue soluzioni numericamente al calcolatore. Ma qui il nostro scopo è soltanto di mostrare che le soluzioni sono discrete. Per farlo, è sufficiente ricorrere ad una visualizzazione grafica. Nello spazio individuato dalle coordinate ξ e η , entrambe positive, le soluzioni del sistema corrispondono all'intersezione tra un cerchio di raggio $a\sqrt{U_0}$ e le curve che rappresentano la funzione $\xi \tan \xi$, come nel disegno qui sotto (linee continue e pallini neri). Il numero di stati stazionari pari ammessi dall'equazione di

Schrodinger aumenta al crescere della profondità della buca e/o della sua larghezza, e i valori k ammessi (e dunque anche i valori ammessi per l'energia) sono discreti. Per una data buca, con U_0 e a assegnati, gli stati stazionari si alternano tra stati pari e stati dispari al crescere dell'autovalore dell'energia. Lo stato di energia più bassa è lo stato pari con $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, ovvero $0 < k < \frac{\pi}{2a}$, da cui anche $0 < E < \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$. Questi che abbiamo appena discusso sono gli stati legati, per i quali

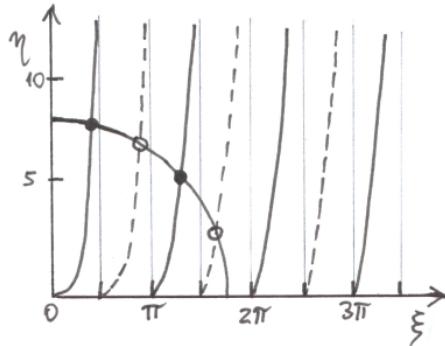


Figura 4: Stati stazionari

lo spettro degli autovalori dell'energia è discreto. La forma della funzione d'onda all'interno della buca è quella di una funzione coseno (per stati pari) o funzione seno (per stati dispari) con vettore d'onda crescente. Il numero di oscillazioni che la φ compie all'interno della buca cresce con l'energia. Queste funzioni sinusoidali si raccordano al bordo della buca con due esponenziali decrescenti. Esempio in figura 5.

Se invece consideriamo il caso $\epsilon > U_0$ (ovvero $E > V_0$), l'equazione di Schrodinger nelle regioni I e III , esterne alla buca, è: $\varphi'' = -(\epsilon - U_0)\varphi$. Anzichè esponenziali crescenti (in I) e decrescenti (in III) com'era per gli stati legati, ora abbiamo soluzioni oscillanti del tipo

$$\varphi_I = C_I \cos(qx) + C'_I \sin(qx) \quad \text{in } I$$

$$\varphi_{III} = C_{III} \cos(qx) + C'_{III} \sin(qx) \quad \text{in } III$$

con $q = \sqrt{\epsilon - U_0}$. E' facile vedere che queste soluzioni possono essere raccordate in modo continuo e con derivata continua in $x = \pm a$ alla funzione d'onda interna, che rimane invariata 15.12, per qualsiasi valore di E . Si tratta quindi di uno spettro continuo di stati liberi, corrispondenti a particelle che possono stare anche a grandi distanze dalla buca. Più avanti parleremo di nuovo di stati liberi, quando discuteremo la riflessione e la trasmissioni di particelle soggette ad una barriera di potenziale.

15.3.1 Buca infinita

Torniamo agli stati legati nella buca e consideriamo gli stati di energia più bassa in una buca molto profonda, che corrispondono al caso $E \ll V_0$. Per questi stati tutto va come se la barriera fosse infinita ($V_0 \rightarrow \infty$).

Riprendendo la soluzione grafica usata precedentemente (4), si vede che questo corrisponde a prendere un cerchio di raggio $a\sqrt{U_0} \gg 1$ che incrocia le funzioni $\xi \tan \xi$ e $-\xi \cotan \xi$ lungo gli asintoti

verticali in $\xi = n\frac{\pi}{2}$, $k = n\frac{\pi}{2a}$ con $n = 1, 2, \dots$. Dunque, essendo $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, ne segue che lo spettro dei valori ammessi è dato da:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \quad (15.13)$$

Si vede anche che nello stesso limite le code esponenziali $e^{\pm qx}$ della funzione d'onda all'esterno della buca si annullano in modo infinitamente rapido, dato che $q = \sqrt{U_0 - \epsilon} \rightarrow \infty$ e, quindi, la funzione d'onda di fatto è confinata nella buca, dove ha la forma di una sinusoide che si annulla in $x = \pm a$. Le soluzioni, quindi, coincidono formalmente con i modi normali di vibrazione di una corda di lunghezza $2a$ fissata agli estremi, che hanno vettore d'onda discretizzato secondo la regola $k = n\frac{\pi}{2a}$, esattamente come le funzioni d'onda dell'equazione di Schrodinger.

Il primo stato, con $n = 1$ è un coseno, con un massimo in $x = 0$ e nessun nodo nell'intervallo

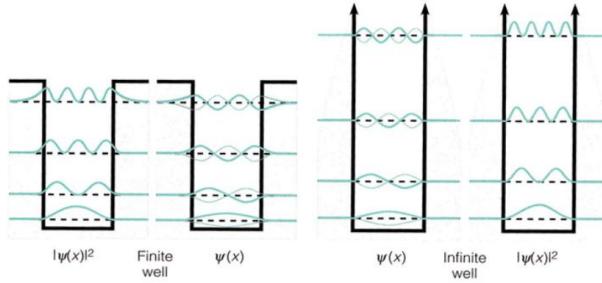


Figura 5: Buche di potenziale, finite ed infinite

$(-a, a)$; il secondo è un seno, con un nodo in $x = 0$ e lunghezza d'onda pari alla larghezza della buca; il generico stato con indice n è una funzione oscillante con $n - 1$ nodi all'interno della buca, e così via. Naturalmente l'analogia con la corda vibrante rimane puramente formale: non dobbiamo confondere il significato dell'oscillazione nei due casi. Per la corda sappiamo cosa oscilla, per le soluzioni dell'equazione di Schrodinger ancora no. Lo spettro della buca infinita fornisce una scala di energia interessante, fissata da $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2}$, dove $d = 2a$ è la larghezza della buca. Si tratta infatti del valore minimo dell'energia ammessa per una particella confinata entro un intervallo di larghezza d , ed è anche la scala tipica della discretizzazione dei livelli energetici. Vediamo due esempi esplicativi:

- **Elettrone:** se prendiamo un elettrone con $m \approx 10^{-27} g$ in una buca di potenziale di dimensione atomica $d \approx 10^{-8} cm$ otteniamo $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} \approx 10^{-11} erg$, ovvero una decina di elettronvolt, che per un elettrone è un'energia significativa.
- **Biglia:** invece, se prendiamo una biglia di massa $10 g$ in una buca di larghezza $10 cm$, allora $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} \approx 10^{-57} erg$, che è un'energia ridicolmente piccola rispetto all'energia tipica di una biglia in condizioni normali.

Questo significa che per la biglia l'esistenza di un minimo di energia quantistico è del tutto irrilevante, così com'è irrilevante la discretizzazione dello spettro, e possiamo giocare con le piste delle biglie in spiaggia senza preoccuparci della meccanica quantistica. Ma gli elettroni negli atomi non possono ignorarla.

Il discorso trattato è ovviamente semplificativo in quanto unidimensionale, se andiamo in più dimensioni aumentiamo la difficoltà anche al variare della forma della buca. Inoltre, se andiamo allora a considerare l'equazione all'interno della buca, troviamo che, anziché derivata seconda

unidirezionale avremo il laplaciano:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = E\varphi$$

e troveremo la necessità di più numeri quantici.

15.4 Interpretazione di Ψ

Abbiamo visto sinteticamente come risolvere l'equazione per trovare la funzione d'onda, ma non abbiamo ancora capito come interpretarla; vediamo allora come possiamo usare Ψ per interpretare la dinamica di una particella.

Prendiamo una particella libera, non soggetta a potenziali, allora la sua energia sarà puramente cinetica e possiamo scrivere l'equazione di Schrodinger

$$\frac{p^2}{2m}\varphi = E\varphi \rightarrow -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = E\varphi(x) \rightarrow \varphi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \varphi$$

potremo allora andare a chiamare $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$:

$$\varphi'' = -k^2\varphi \quad \varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \varphi(x) = A \cos(kx + \Phi)$$

con uno spettro continuo e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ fissato. Quindi noi associamo ad una particella un'onda in cui il vettore d'onda è proprio quello scritto, mentre la quantità di moto è:

$$\hat{p}e^{ikx} = -i\hbar \frac{d}{dx} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}$$

dove $\hbar k$ è autovalore dell'operatore \hat{p} . Le onde piane sono le autofunzioni di autovalori $\hbar k$.

Questo alla fine non è altro che de Broglie disse: $p = \hbar k = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda}$. Data una particella libera con una certa energia, posso associargli una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{\hbar}{p}$.

15.4.1 Esperimento con granello di polvere

Soffermiamoci sulla formula precedente e proviamo a vedere cosa succede con un granello di sabbia dalla massa di $m = 10^{-4} g$ $v = 1 cm/s$ $p = mv = 10^{-4} g \frac{cm}{s}$. Allora se voglio associare una lunghezza d'onda troverò che:

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{10^{-27} erg}{10^{-4} g \frac{cm}{s}} = 10^{-23} cm$$

che è una scala di lunghezze veramente troppo piccola per essere significante, quindi non ha senso attribuirgli una proprietà ondulatoria.

15.4.2 Esperimento con elettrone

Se prendiamo invece un elettrone con $m \approx 10^{-27} g$ $v = 0.01c$, allora se associo una lunghezza d'onda ottengo:

$$p \approx 10^{-27} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{10} g \frac{cm}{s} = 10^{-19} g \frac{cm}{s} \quad \lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{10^{-27}}{10^{-19}} = 10^{-8} cm$$

che è invece dell'ordine della dimensione di un atomo. Quindi per descrivere il moto dell'elettrone nell'atomo dobbiamo tener conto dell'onda che lo descrive, che alla fine è proprio quello che diceva

de Broglie.

Allora vediamo un esperimento: prendiamo un fascio di questi elettroni, che ha la lunghezza d'onda dei raggi x, e facciamolo impattare su un reticolo metallico che ha una distanza tipica fra gli atomi di, guarda caso, 10^{-8} cm . Quello che succede è che ogni elettrone rimbalzerà ad un certo angolo in base al tipo di urto ed all'interazione che ha avuto con l'atomo. Tuttavia se io metto un rilevatore subito dopo alla zona di impatto trovo un reticolo di diffrazione che troverei se usassi i raggi x. Quindi se io associo un onda ad un elettrone questo dovrà comportarsi, e quindi interferire con altri elettroni, proprio come un onda.

15.4.3 Esperimento con particelle alpha

Se prendiamo l'esperimento di Rutherford in cui facciamo impattare le particelle alpha contro un nucleo d'oro, e lo reinterpretiamo usando la funzione d'onda, troveremo dei risultati che concordano esattamente con l'esperimento e quindi con l'interazione coulombiana. In questo caso applicare l'equazione vuol dire prendere l'equazione stazionaria per stati liberi con una buca di potenziale.

15.4.4 Probabilità, is that you?

Se noi allora prendiamo $|\Psi|^2$ e lo confrontiamo con un istogramma dei lampi emessi dalla parete dietro al nucleo (ovvero della posizione della particella dopo l'impatto) troveremo che sono praticamente la stessa cosa. Lo stesso discorso vale con l'esperimento degli elettroni dove la diffrazione segue esattamente il profilo di $|\Psi|^2$.

Allora, alla luce di queste osservazioni, il genio (del male) Born disse che l'equazione di Schrodinger è un'onda complessa il cui modulo quadro, associato a particelle, restituisce come risultato la probabilità di trovare una particella in un determinato punto. A questo punto però gli antipatici e nemici del divertimento potrebbero dire con voce rombante: "Ma se io mi mettessi nel sistema solidale con il fascio di elettroni?" beh la risposta semplice è che l'unica velocità che entra è la velocità relativa, null'altro.

Ma ora vediamo di elaborare un po' meglio l'interpretazione probabilistica di Ψ dal punto di vista formale. Dato che un punto dello spazio ha dimensione nulla, assegnare un valore finito alla probabilità di trovare una particella in un punto è formalmente impossibile (e lo è anche nella pratica, data la dimensione finita di un qualsiasi apparato di rilevazione). Ha senso invece considerare un volume infinitesimo d^3r posizionato in \vec{r} e dire qual è la probabilità che la misura di posizione stia in quel volume. Se il volumetto è piccolo la probabilità è proporzionale a d^3r e la costante di proporzionalità ha il significato di densità di probabilità. Quindi possiamo assumere che:

$$d\mathcal{P}(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$$

sia la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $(\vec{r}, \vec{r} + dr)$ al tempo t . Allora l'integrale di $|\Psi(\vec{r}, t)|$ in tutto lo spazio è la probabilità di trovare la particella ovunque. Dato che la probabilità deve essere un numero compreso tra 0 e 1, dove 1 è la certezza, possiamo scrivere:

$$\|\Psi\| = \int d^3r |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$$

Se una soluzione dell'equazione di Schrodinger ha norma quadra diversa da 1 non fa nulla, basta moltiplicare la Ψ iniziale per un fattore normalizzante di modo da avere una nuova funzione d'onda

ancora soluzione a cui si può attribuire il significato probabilistico. Una conseguenza tuttavia è che, per applicare l'interpretazione probabilistica della Ψ è necessario che la funzione d'onda abbia norma finita, sia cioè una funzione a quadrato sommabile. Un vantaggio è che a queste funzioni si applica anche il formalismo delle trasformate di Fourier. Inoltre, se normalizziamo a 1 una funzione d'onda calcolata in un istante t generico, essa rimarrà normalizzata a 1 anche in tutti gli istanti successivi, dato che l'hamiltoniano conserva la norma nel tempo. L'interpretazione probabilistica quindi si preserva nell'evoluzione temporale. Il fatto di attribuire un significato probabilistico alla funzione d'onda ha una conseguenza diretta sulla modalità con cui possiamo confrontare la Ψ calcolata nella teoria con l'esito di misure di posizione in un esperimento. Quello che Born sostiene è che, con qualche dispositivo opportuno, come un rivelatore che abbia un'appropriata risoluzione spaziale, possiamo misurare la posizione \vec{r} di una particella con un'indeterminazione anche piccola, ma la singola misura non basta. Infatti, in misure ripetute con lo stesso apparato e avendo preparato il sistema al tempo $t = 0$ sempre allo stesso modo (stessa particella, stessa buca di potenziale, ecc.) otterremo misure di posizione al tempo t diverse ad ogni misura. Tracciando un istogramma con la frequenza dei valori di \vec{r} misurati nella serie di misure vedremo che, al tendere del numero di ripetizioni all'infinito, l'istogramma convergerà alla forma della funzione $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$. Se prendiamo quindi l'esempio dei casi stazionari in una buca di potenziale avremo una delocalizzazione della particella, ma questo non vuol dire che la massa o la carica siano spalmate su tutte le posizioni (come invece stupidamente pensava e sosteneva Schrodinger) bensì significa che non posso a priori sapere l'esito della singola misura. Ad esempio, se la particella si trova nello stato stazionario con $n = 2$ della buca infinita, allora non troveremo mai il valore $x = 0$ come esito della misura (in un esperimento perfetto), perché in $x = 0$ la funzione d'onda di quello stato ha un nodo; la particella non sarà mai trovata in quel punto.

Dato che $d\mathcal{P} = d^3r |\Psi|^2$ è una probabilità, ne segue che $\rho = |\Psi|^2$ è una densità di probabilità. Ci possiamo allora chiedere se esiste una corrispondente densità di corrente \vec{j} tale che valga una legge di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

In quei casi la legge di continuità riflette la conservazione della carica e della massa, mentre nel caso della Ψ si tratta delle conservazione della norma. Consideriamo la variazione nel tempo dell'integrale di $\rho(\vec{r})$ calcolato entro un volume V finito racchiuso da una superficie S :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho &= \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) \\ &= \int_V d^3r \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right) \end{aligned}$$

Usiamo l'equazione di Schrodinger per rimpiazzare le derivate temporali in termini dell'operatore \hat{H} :

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} \int_V d^3r \left(\Psi^* (\hat{H}\Psi) - (\hat{H}\Psi^*)\Psi \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2mi} \int_V d^3r \left[\Psi^* (\nabla^2 \Psi) - (\nabla^2 \Psi^*)\Psi \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2mi} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \left[\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \Psi^*)\Psi \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2mi} \int_S \left[\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \Psi^*)\Psi \right] \cdot d\vec{\Sigma} \end{aligned}$$

L'ultima espressione può essere interpretata come il flusso di una densità di corrente definita:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi] \quad (15.14)$$

Allora la catena di uguaglianze di prima pu'ò essere sintetizzata con la relazione:

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

a cui si pu'ò attribuire il seguente significato: una diminuzione o un aumento della probabilità che una particella si trovi in un volume assegnato è compensato esattamente da un flusso di probabilità in uscita o in entrata attraverso la superficie che racchiude il volume. Tutto va come per il flusso di carica elettrica o come il flusso di massa in un fluido, salvo che qui la quantità \vec{j} rappresenta la densità di corrente di probabilità. Questo grandezza ci servirà tra poco.

15.5 Barriera di potenziale

Per imparare a lavorare con stati stazionari di particelle asintoticamente libere cominciamo dal caso di particelle soggette ad una barriera di potenziale che, per semplicità prendiamo a forma di scalino in una dimensione:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ regione I} \\ V_0 & x > 0 \text{ regione II} \end{cases}$$

In fisica classica una particella che ha un'energia E minore dell'altezza dello scalino rimarrebbe confinata nel semispazio $x < 0$; se inizialmente si muove verso destra, quando arriva alla barriera rimbalza elasticamente e torna indietro. Se invece la particella ha un'energia $E > V_0$, allora può muoversi in tutto lo spazio, venendo accelerata o decelerata dalla barriera a seconda del verso di percorrenza. Qui vogliamo dimostrare che, se le dinamica della particella è descritta dall'equazione di Schrodinger, allora possono accadere due effetti classicamente proibiti:

- 1) per $E < V_0$ la particella può essere trovata anche a destra della barriera;
- 2) per $E > V_0$ la particella può essere riflessa dalla barriera.

Iniziamo con il caso $E < V_0$.

Nella regione I l'equazione di Schrodinger stazionaria è:

$$\varphi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) \quad \text{ovvero} \quad \varphi''(x) = -k^2 \varphi(x)$$

che ha soluzioni del tipo:

$$\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Qui abbiamo scelto di scriverle in forma complessa, anzichè in forma di seni e coseni, ma le due versioni sono equivalenti dato che si passa dall'una all'altra tramite combinazioni lineari. Nella regione II l'equazione è:

$$\varphi''(x) = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \varphi(x) \quad \text{ovvero} \quad \varphi''(x) = q^2 \varphi(x)$$

che ha soluzioni del tipo:

$$\varphi_{II}(x) = Ce^{-qx}$$

dove abbiamo scartato la soluzione divergente e^{qx} . Prima di imporre le condizioni di continuità delle funzioni e delle derivate in $x = 0$, dobbiamo discutere un problema relativo alla norma di queste funzioni, in particolare al fatto che la norma della funzione φ_I non esiste. Infatti l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 d^3r |\psi_I|^2 = \int_{-\infty}^0 d^3r |Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2$$

diverge, dato che il modulo quadro della funzione si mantiene finito anche a quando $|x| \rightarrow \infty$. Come procediamo? Ci sono almeno tre strade equivalenti:

- Possiamo considerare la regione I come una buca il cui gradino di sinistra è posto a $x = -a$ con a talmente grande da poter trascurare il suo effetto nella dinamica intorno alla barriera posta in $x = 0$. Allora la φ_I ha norma finita, in quanto l'integrale di prima si estende su una regione finita. Si avranno soluzioni oscillanti come per la buca quadra, con uno spettro discreto di vettori d'onda k che devono essere multipli interi di π/a . Lo spettro è denso se a è grande. Così facendo otterremo risultati che contengono a , ma la fisica dell'interazione tra la particella e la barriera potrà essere estratta tenendo i termini finiti nel limite $a \rightarrow \infty$. Per quanto questa procedura possa sembrare cruda e inelegante, vale la pena ricordare che è proprio ciò che viene normalmente fatto quando l'equazione di Schrodinger viene risolta numericamente al computer. In tal caso, di solito, si rimpiazza l'intervallo spaziale infinito con una scatola di larghezza finita che contiene la fisica che interessa. Se la scatola è sufficientemente grande, i risultati non dipenderanno dalla sua larghezza.
- Possiamo insistere nella richiesta che la funzione d'onda rappresenti una singola particella e che sia a quadrato sommabile. E vero che la φ_I scritta sopra non gode di questa proprietà, ma nulla ci impedisce di costruire una nuova φ a quadrato sommabile come combinazione lineare delle φ_I con diversi valori di k , ad esempio della forma $\int dk g(k)e^{ikx}$. In questo modo possiamo ottenere un pacchetto d'onde che rappresenta una particella in movimento. Il prezzo che si paga è un'incertezza Δk sul vettore d'onda a cui corrisponde un'incertezza Δp sulla quantità di moto. Che ci sia questa incertezza è realistico: in ogni esperimento reale c'è un margine di errore su p .
- Possiamo rinunciare a localizzare la particella e passare invece ad una descrizione in termini di flusso di particelle. Più precisamente possiamo impostare il problema come un processo di diffusione in cui si hanno particelle incidenti, trasmesse e riflesse dalla barriera. In un approccio del genere non ha importanza sapere con quale probabilità una particella possa essere trovata in un dato intervallo spaziale, ma piuttosto ci interessa sapere quant'è il numero di particelle che passano nell'unità di tempo da un punto assegnato viaggiando nell'una o nell'altra direzione. Invece della densità di probabilità ρ ci interessa la densità di corrente di probabilità \vec{j} .

Scegliamo quest'ultimo punto di vista e vediamo come possiamo usare le soluzioni libere dell'equazione di Schrodinger stazionaria per estrarre le informazioni sul comportamento fisico del sistema. A tale scopo prendiamo una soluzione generica nella forma di un'onda piana Ae^{ikx} e calcoliamoci la densità di corrente \vec{j} a partire dalla definizione in una dimensione (15.14):

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left[A^* e^{-ikx} \left(\frac{dAe^{ikx}}{dx} \right) - \left(\frac{dA^* e^{-ikx}}{dx} \right) Ae^{ikx} \right] = |A|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

La stessa onda piana ha densità di probabilità $\rho = |A|^2$ e dunque possiamo scrivere $j = \rho \hbar \frac{k}{m} = \rho \frac{p}{m}$. Questo risultato è analogo al risultato classico per un fluido, la cui densità di corrente è legata alla densità di particelle. Nel caso quantistico non sappiamo dove si trovano le particelle, ma la quantità j ci dà, in senso statistico, il numero di particelle che passano nell'unità di tempo per un punto assegnato. Nel caso dell'onda Ae^{ikx} le particelle si muovono da sinistra a destra (verso valori positivi della x) e il flusso è proporzionale a $|A|^2$ e k . Analogamente per un'onda piana Be^{-ikx} le particelle vanno da destra a sinistra e il flusso è proporzionale a $|B|^2$ e k . Immaginiamo una situazione in cui un flusso stazionario di particelle incide sulla barriera da sinistra verso destra nel regione I , e fissiamo arbitrariamente l'ampiezza dell'onda incidente al valore $A = 1$. In regime stazionario, a questo flusso incidente corrisponderà anche un flusso di particelle riflesse, nello stesso semispazio. Formalmente ciò equivale a scrivere

$$\varphi_I = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

dove R è l'ampiezza dell'onda riflessa. Poi riscriviamo la soluzione nella regione II come

$$\varphi_{II} = Te^{-qx}$$

dove T sta per trasmessa, anche se in questo caso non si tratta di una vera e propria trasmissione di particelle, ma solo di una coda esponenziale sotto la barriera. Ora imponiamo le condizioni di continuità della funzione e della derivata prima in $x = 0$:

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ik(1 - R) = -qT \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per q e sommando si ottiene

$$R = \frac{k - iq}{k + iq}$$

che inserito nella prima dà anche

$$T = \frac{2k}{k + iq}$$

e il problema è risolto, per qualsiasi valore di E compreso tra 0 e V_0 .

Osserviamo a questo punto che l'ampiezza dell'onda riflessa R , essendo il rapporto tra un numero e il suo complesso coniugato, ha modulo quadro uguale a 1. Questo dovevamo aspettarcelo, perché la densità di corrente dell'onda incidente vale $\hbar k/m$ per costruzione, mentre quella dell'onda riflessa vale $-(\hbar k/m)|R|^2$. Inoltre la corrente a destra della barriera è nulla, perché se applichiamo la definizione 15.14 ad una funzione reale otteniamo sempre 0. Dunque, se vogliamo che lo stato sia stazionario, tante particelle devono uscire nell'unità di tempo quante ne entrano, e questo implica che i flussi in entrata e uscita nella regione I devono compensarsi esattamente e quindi $|R|^2 = 1$. Se il risultato per R ci può sembrare ragionevole anche interpretando la riflessione come un rimbalzo classico, quello per T ci crea qualche problema in più. In particolare, il fatto che T sia diverso da zero implica, secondo l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda, che una particella incidente da sinistra possa essere trovata, con probabilità non nulla, anche in una regione di x positivi. Tale regione è classicamente proibita, in quanto una particella classica avente energia meccanica E non può in alcun modo trovarsi in punti dello spazio dove l'energia potenziale V_0 è maggiore di E , dato che questo implicherebbe un'energia cinetica negativa. A pensarci bene, lo stesso problema ce

l'avevamo anche per gli stati legati della buca quadra. Se torniamo alla figura 5 vediamo che anche in quel caso si aveva uno sconfinamento delle funzioni d'onda al di fuori della buca e l'unico modo per evitare il problema era di mandare V_0 all'infinito. Ma per un valore di V_0 finito, il problema è inevitabile. Ma non si tratta di un problema, anzi: come vedremo nella sezione successiva parlando di **effetto tunnel**, la natura in effetti ammette questi "sconfinamenti" e l'equazione di Schrodinger li descrive correttamente, mentre la meccanica classica non può farlo.

Ora trattiamo il caso $E > V_0$. La particella ha abbastanza energia per passare oltre la barriera. Classicamente, la particella che viene da sinistra verso destra con una certa velocità proseguirà a destra con una velocità inferiore. Quantisticamente possiamo considerare un flusso di particelle in ingresso da sinistra come un'onda piana di ampiezza 1, che dà luogo ad un'onda piana riflessa di ampiezza R e una trasmessa di ampiezza T in questo modo:

$$\varphi_I = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

$$\varphi_{II} = Te^{iqx}$$

con $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ e $q = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$. Seguendo il ragionamento classico saremmo portati ad imporre $R = 0$, perché non ci aspettiamo particelle che tornano indietro, ma dal punto di vista dell'equazione di Schrodinger non abbiamo ragioni per eliminare questo termine. Rispetto al caso $E < V_0$, l'unica differenza è che la soluzione a destra qui è un'onda piana, mentre prima era un esponenziale decrescente. I calcoli si ripetono allo stesso modo. Le condizioni di continuità in $x = 0$ danno

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ik(1 - R) = iqT \end{cases}$$

e i risultati saranno gli stessi di prima, salvo sostituire $-q$ con iq . Il risultato sarà dunque

$$R = \frac{k - q}{k + q}$$

$$T = \frac{2k}{k + q}$$

Per quanto riguarda la corrente j , a sinistra vale $j = \frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2)$, mentre a destra vale $j = \frac{\hbar q}{m}|T|^2$. Ma la conservazione del numero di particelle impone che queste due correnti siano uguali, ovvero

$$1 - |R|^2 = \frac{q}{k}|T|^2$$

ed è facile verificare che le due espressioni precedenti per R e T soddisfano questa condizione, come ci si attende per stati stazionari.

Da questi risultati vediamo che la probabilità che una particella torni indietro, pur avendo energia sufficiente per superare la barriera, è diversa da zero. Si tratta di un comportamento incompatibile con il concetto di particella classica. E invece compatibile con la riflessione parziale di onde classiche, ad esempio sonore o luminose, quando incidono sulla superficie di separazione tra due mezzi con proprietà elettriche o elastiche diverse. Il rapporto tra flusso trasmesso e flusso riflesso vale

$$\frac{j_T}{j_R} = \frac{q|T|^2}{k|R|^2} = \frac{4qk}{(k - q)^2} = \frac{4\sqrt{E(E - V_0)}}{\left(\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}\right)^2}$$

Se l'energia della particella è molto più grande dell'altezza della barriera, allora V_0 può essere trascurato e il rapporto tende all'infinito; si ha quindi trasmissione completa, senza riflessione, com'è giusto aspettarsi per barriere di altezza trascurabile. Invece per energia appena sopra soglia il rapporto tende a zero e si ottiene riflessione completa. Notiamo qui, ma senza dimostrarlo (per fortuna oserei dire), che questo risultato per il rapporto tra flusso trasmesso e riflesso non cambia se si fanno i calcoli prendendo un flusso unitario incidente da destra anziché da sinistra. Questa invarianza segue dal fatto che se φ è una soluzione dell'equazione di Schrodinger, anche φ^* lo è.

15.6 Effetto tunnel

Ci addentriamo adesso nell'ultimo capitoletto di questa bellissima parte di introduzione alla meccanica quantistica, oserei dire uno degli effetti più interessanti della fisica moderna. Prima di iniziarlo vorrei Ringraziarvi per la passione e dedizione che vi hanno guidato fin qua, attraverso salute e malattia, a interessarvi alla fisica come noi abbiamo fatto e a volerla imparare, per un giorno magari tramandarla e usarla a dovere. Bando alle ciance e ciancio alle bande, non guardando in bocca a nessunissimo cavallo e non dicendo gatto, non avendocelo (ancora) nel sacco, vi lascio a questa bellissima ultima parte.

Consideriamo un potenziale $V(x)$ unidimensionale in forma di barriera quadra:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| > a \text{ (regioni I e III)} \\ V_0 & \text{per } |x| \leq a \text{ (regione II)} \end{cases}$$

e cerchiamo soluzioni stazionarie con energia $E < V_0$.

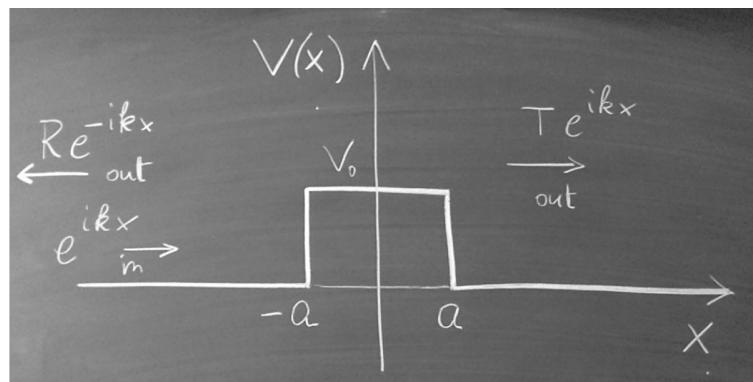


Figura 6: Schema potenziale effetto tunnel

Come nel caso precedente, si tratta di stati asintoticamente liberi, che hanno la forma di onde piane, non normalizzabili. Come prima, lavoriamo in termini di flusso incidente, riflesso e trasmesso. Stavolta la soluzione ha stati liberi anche a destra della barriera. Assumendo un flusso unitario entrante da sinistra, possiamo scrivere le soluzioni dell'equazione di Schrodinger stazionaria in questo modo:

$$\begin{aligned} \varphi_I(x) &= e^{ikx} + R e^{-ikx} \\ \varphi_{II}(x) &= A e^{qx} + B e^{-qx} \\ \varphi_{III}(x) &= T e^{ikx} \end{aligned}$$

dove $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ e $q = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$. Potremmo prendere il flusso incidente da destra invece che da sinistra, ma i risultati non cambierebbero, data la simmetria del potenziale. Notiamo anche che nella regione II dobbiamo tenere entrambi gli esponenziali reali, crescente e decrescente, perchè il problema della divergenza di φ non si pone, in quanti si tratta di una regione limitata. Ora basta impostare le condizioni di continuità della funzione in $x = \pm a$

$$\begin{aligned} e^{-ika} + Re^{ika} &= Ae^{-qa} + Be^{qa} \\ Te^{ika} &= Ae^{qa} + Be^{-qa} \end{aligned}$$

e della sua derivata prima

$$\begin{aligned} ik(e^{-ika} - Re^{ika}) &= q(Ae^{-qa} - Be^{qa}) \\ ikTe^{ika} &= q(Ae^{qa} - Be^{-qa}) \end{aligned}$$

Le ultime due possono essere sostituite con la continuità della derivata logaritmica $\frac{\varphi'}{\varphi}$:

$$\begin{aligned} ik \frac{e^{-ika} - Re^{ika}}{e^{-ika} + Re^{ika}} &= q \frac{e^{-2qa} - b}{e^{-2qa} + b} \\ ik &= q \frac{e^{2qa} - b}{e^{2qa} + b} \end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato $b = B/A$. La prima la riscriviamo prima così

$$ik(e^{-ika} - Re^{ika})(e^{-2qa} + b) = q(e^{-ika} + Re^{ika})(e^{-2qa} - b)$$

da cui

$$Re^{ika} \left[ik(e^{-2qa} + b) + q(e^{-2qa} - b) \right] = e^{-ika} \left[ik(e^{-2qa} + b) - q(e^{-2qa} - b) \right]$$

in modo da estrarre l'ampiezza R :

$$R = e^{-2ika} \frac{ik(e^{-2qa} + b) - q(e^{-2qa} - b)}{ik(e^{-2qa} + b) + q(e^{-2qa} - b)}$$

La seconda equazione invece dà

$$ik(e^{2qa} + b) = q(e^{2qa} - b)$$

ovvero

$$b = \frac{q - ik}{q + ik} e^{2qa}$$

Questa la possiamo usare nell'espressione precedente di R . Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} e^{-2qa} + b &= e^{-2qa} + \frac{q - ik}{q + ik} e^{2qa} \\ &= \frac{1}{q + ik} \left[(q + ik)e^{-2qa} + (q - ik)e^{2qa} \right] \end{aligned}$$

e usare le definizioni delle funzioni iperboliche

$$\begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

in questo modo:

$$e^{-2qa} + b = \frac{2}{q + ik} [q \cosh(2qa) - ik \sinh(2qa)]$$

e analogamente

$$e^{-2qa} - b = \frac{2}{q + ik} [ik \cosh(2qa) - q \sinh(2qa)]$$

da cui

$$R = e^{-2ika} \frac{(k^2 + q^2) \sinh(2qa)}{2iqk \cosh(2qa) + (k^2 - q^2) \sinh(2qa)}$$

La densità di corrente è proporzionale a $|R|^2$ che vale

$$|R|^2 = \frac{(k^2 + q^2)^2 \sinh^2(2qa)}{4q^2 k^2 + (k^2 + q^2)^2 \sinh^2(2qa)}$$

Da questa si può ricavare direttamente $|T|^2$, dato che le due grandezze sono legate dalla conservazione del flusso totale: infatti la corrente netta a sinistra della barriera vale $k(1 - |R|^2)$ mentre quella a destra vale $k|T|^2$, ma i due flussi devono essere uguali, e dunque $|T|^2 = 1 - |R|^2$, da cui

$$|T|^2 = \frac{4q^2 k^2}{4q^2 k^2 + (k^2 + q^2)^2 \sinh^2(2qa)}$$

che possiamo riscrivere

$$|T|^2 = \left[1 + \frac{(k^2 + q^2)^2}{4q^2 k^2} \sinh^2(2qa) \right]^{-1}$$

Per evidenziare l'andamento di questa funzione con l'energia delle particelle E conviene usare le

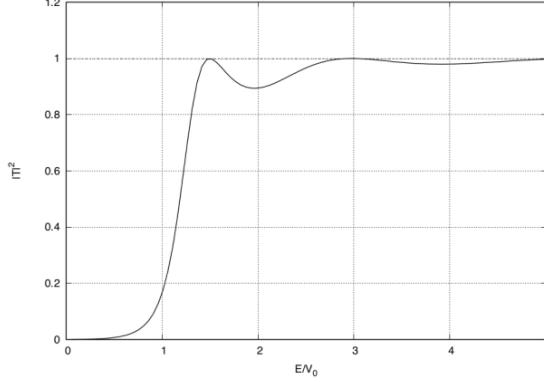


Figura 7: Coefficiente Trasmissione effetto tunnel

definizioni di k e q , introdurre l'energia riscalata $\epsilon = E/V_0$ e il parametro $\beta = \frac{8ma^2V_0}{\hbar^2}$; quest'ultimo è il rapporto tra l'altezza della barriera V_0 e la scala di energia tipica $\frac{\hbar^2}{2md^2}$ di una particella di massa m confinata in un intervallo spaziale pari alla larghezza $d = 2a$. Allora il risultato precedente diventa

$$|T|^2 = \left[1 + \frac{\sinh^2 \sqrt{\beta(1-\epsilon)}}{4\epsilon(1-\epsilon)} \right]^{-1}$$

che vale per $\epsilon < 1$. Per completezza diamo anche il risultato nel caso di energia sopra la barriera, $\epsilon > 1$, senza darne la derivazione (calcolatelo se vi è duopo e se vi volete male, fidatevi e basta):

$$|T|^2 = \left[1 + \frac{\sin^2 \sqrt{\beta(1-\epsilon)}}{4\epsilon(1-\epsilon)} \right]^{-1}$$

Nella figura 7 mostriamo un caso tipico ottenuto con $\beta = 20$. Ci sono almeno due aspetti notevoli in questo risultato.

Il primo, già annunciato, è che $|T|^2$ è non nullo anche per energia sotto la barriera, cioè per $\epsilon < 1$. Questo significa che una frazione delle particelle incidenti oltrepassa la barriera, senza averne l'energia sufficiente da un punto di vista classico. Questo è noto come effetto tunnel quantistico. L'entità di questo effetto dipende dal parametro β . In particolare la funzione $|T|^2$ cresce da 0 per $\epsilon = 0$ al valore $1/[1 + (\beta/4)]$ per $\epsilon = 1$. Dunque l'effetto è piccolo se la massa m delle particelle è grande, in modo che β tenda all'infinito; questo è il caso di particelle la cui lunghezza d'onda tipica, $\lambda = h/p$, è molto piccola, e ogni particella si comporta come una biglia classica che incontra una parete impenetrabile. Ma per particelle leggere la penetrazione della funzione d'onda sotto barriera, che è determinata dalla sovrapposizione delle code esponenziali $e^{\pm qa}$, non è trascurabile e produce effetti misurabili.

Se, ad esempio, avviciniamo una punta metallica ad una superficie di un solido, gli elettroni del solido possono raggiungere la punta metallica, se questa è abbastanza vicina, superando la barriera di potenziale (il lavoro di estrazione) per effetto tunnel; questo è il principio di funzionamento dei microscopi ad effetto tunnel, correntemente utilizzati per caratterizzare proprietà strutturali dei materiali su scala atomica. Anche il decadimento α di un nucleo atomico radioattivo si spiega con l'effetto tunnel. Naturalmente nei casi realistici non si hanno barriere quadre come quella discussa qui, ma la forma della barriera non cambia la sostanza del discorso.

Il secondo aspetto interessante è che la trasmissione sopra barriera ha un andamento non monotono e, in particolare, la trasmissione è totale, ovvero $|T|^2 = 1$, solo per valori discreti della variabile ϵ . Per altri valori di ϵ una frazione delle particelle torna indietro, anche se avrebbero energia più che sufficiente per proseguire da un punto di vista classico. I valori per cui si ha trasmissione totale sono quelli per cui si annulla la funzione seno, ovvero $\sqrt{\beta(\epsilon - 1)} = n\pi$, con n intero, che implica

$$E - V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

che coincide con lo spettro 15.13 della buca quadra infinita di larghezza $2a$ e con il fondo della buca al valore di potenziale V_0 . La cosa può sembrare strana, perchè qui abbiamo una barriera e non una buca. Ma il dilemma si risolve in questo modo: gli stati della buca infinita sono i modi normali di oscillazione per una particella vincolata in un intervallo di larghezza $2a$; questi modi, sono funzioni seno e coseno che si annullano al bordo, e possono essere collegati con continuità a funzioni sinusoidali nelle regioni laterali che pure si annullano al bordo della barriera. L'espressione che abbiamo trovato per $|T|^2$ ci dice semplicemente che il raccordo ottimale tra le funzioni esterne e quella nella zona della barriera si ottiene quando le funzioni si annullano esattamente in $x = \pm a$; in tal caso la riflessione è nulla. Quando il raccordo non è ottimale, parte del flusso incidente torna indietro, un po' come succede nel problema dell'adattamento di impedenza in una linea di trasmissione elettrica o ottica. Ancora una volta, dunque, osserviamo un tipico comportamento

ondulatorio.

I risultati che abbiamo ottenuto, benchè incompatibili con la fisica classica, ci possono sembrare tutto sommato ragionevoli se dimentichiamo l'idea di particelle localizzate e interpretiamo il tutto in termini di propagazione di onde. Ma, come detto all'inizio di questa sezione, avremmo potuto impostare il problema anche rappresentando singole particelle come pacchetti d'onda. Con un'opportuna scelta di una funzione $g(k)$ avremmo potuto costruirci un pacchetto d'onde

$$\Psi(x, t) = A \int_R dk g(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

preparato a $t = 0$ in modo da essere localizzato in un piccolo intervallo Δx a sinistra della barriera e da avere velocità di gruppo v_g positiva. Risolvendo l'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo, troveremmo che il pacchetto si muove verso la barriera e quando la raggiunge si deforma e si separa in due parti, una che procede a destra, l'altra che torna indietro a sinistra. Se il pacchetto iniziale aveva norma 1, il pacchetto trasmesso avrà norma $|T|^2$ e quello riflesso $|R|^2$, con T e R identici a quelli calcolati sopra. Ora, se identifichiamo la particella come il pacchetto stesso, allora siamo portati a concludere che la barriera spezza la particella in due parti. Immaginiamo ad esempio un elettrone che incide su una barriera di potenziale: l'idea che l'elettrone possa essere frammentato in due parti, ciascuna con una frazione di carica e di massa, ci sembra inconcepibile; e infatti lo è. In un esperimento in cui si misura la posizione di una particella dopo che questa ha interagito con una barriera di potenziale, ciò che si osserva è che la particella si trova o a sinistra o a destra, non un po' per parte. Inoltre, se si ripete l'esperimento N volte, sempre allo stesso modo, il rapporto tra il numero di casi in cui la particella viene trovata a sinistra e quello in cui viene trovata a destra tenderà al valore $|R|^2/|T|^2$, in accordo con l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Dunque, il pacchetto si divide in due parti, non la particella; e il pacchetto porta con sè l'informazione su dov'è probabile trovare la particella, non su dov'è la particella. La differenza sembra sottile, ma è un aspetto cruciale della teoria.

Finisce così il nostro epico viaggio attraverso le teorie fondanti del 20esimo secolo e alcune tra le più interessanti formulazioni della realtà che ci circonda. E' arrivato il momento di lasciare da parte Newton e abbracciare nuove realtà create da Einstein, Schrodiger, Minkowski, Plank, Bohr e tanti altri grandi. Vi lasciamo dunque alla fruizione degli esercizi per una migliore comprensione della teoria e per capire come tutto ciò possa essere applicato. Alla prossima - Malghese della malga, Bartolomeo Coglione, Pompeo il Reichminister.

16 ESERCIZI

16.1 Un modello classico per l'elettrone

In questo esercizio ci proponiamo di analizzare l'elettrone dal punto di vista classico. Quindi lo approssimiamo ad un guscio sferico (di spessore trascurabile) rotante ed uniformemente carico.

Dati del problema: Raggio= R , Carica= e , Rotazione lungo $z = \omega$.

Richieste del problema:

- a) \vec{E} dentro e fuori dal guscio (campo magnetico è dato)

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega \hat{z} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) & r > R \end{cases} \quad \sigma = \frac{e}{4\pi R^2} \quad m = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4$$

- b) $U_{e.m.} = ?$

- c) $\vec{L}_{e.m.} = ?$

Lo scopo è applicare le formule per trovare le caratteristiche associate a questo modello di elettrone. Usiamo un sistema centrato nel centro della sfera e usiamo le coordinate sferiche.

Punto a)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \hat{r} & r \geq R \end{cases}$$

Per il campo elettrico i calcoli poggiano sul teorema di Gauss.

Punto b)

Per l'energia elettromagnetica si integra la densità u nello spazio.

$$U_{em} = \int_V d^3r u_{em} = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0|E|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B|^2 d^3r = U_{E_{in}} + U_{E_{out}} + U_{B_{in}} + U_{B_{out}}$$

Separando i contributi dei campi interni ed esterni al guscio. Il campo magnetico della sfera all'interno è uniforme quindi il termine diventa:

$$\begin{aligned} U_{B_{in}} &= \frac{1}{2\mu_0}|B|^2 \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{9}\mu_0^2\sigma^2 R^2 \omega^2 \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{2\mu_0} \\ &= \frac{8}{27}\pi\mu_0 R^5 \omega^2 \frac{e^2}{16\pi^2 R^4} = \frac{1}{54\pi}\mu_0 R e^2 \omega^2 \end{aligned}$$

Un calcolo rapido permette invece di valutare il contributo energetico del campo elettrico all'esterno, poichè quello interno è nullo.

$$\begin{aligned} U_{E_{out}} &= \int_R^{+\infty} dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} e^2 \\ &= \frac{e^2\varepsilon_0 4\pi}{32\pi^2\varepsilon_0^2} \int_R^{+\infty} r^{-2} dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $d^3r = r^2 dr d\theta d\varphi$. Per il campo magnetico esterno invece calcoliamo separatamente il modulo quadro:

$$\begin{aligned}
 |B_{out}^2| &= \frac{\mu_0^2 m^2}{16\pi^2 r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 U_{B_{out}} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_R^{+\infty} dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0^2 m^2}{16\pi^2 r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{16} \frac{\mu_0 m^2}{\pi} \int_R^{+\infty} dr r^{-4} \int_{-1}^1 d\cos \theta (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{16} \frac{\mu_0 m^2}{\pi} \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_R^{+\infty} \int_{-1}^1 d\cos \theta (3 \cos^2 \theta + 1) \\
 &= \frac{\mu_0 m^2 R^3}{48\pi} \left[x + \frac{3x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{\mu_0 m^2 R^3}{12\pi} \\
 &= \frac{\mu_0 R^3}{48\pi} \frac{16}{9} \pi^2 \omega^2 R^8 \frac{e^2}{16\pi^2 R^4} \\
 &= \frac{\mu_0}{108\pi} \omega^2 R e^2 = \frac{1}{2} U_{B_{in}}
 \end{aligned}$$

Il totale risulta quindi essere:

$$\begin{aligned}
 U_{em} &= U_{E_{out}} + \frac{3}{2} U_{B_{in}} \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\mu_0 e^2 \omega^2 R}{36\pi} \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[1 + \frac{2}{9} \mu_0 \varepsilon_0 R^2 \omega^2 \right] \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{R\omega}{c} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Dove abbiamo chiamato v_T la velocità tangenziale all'equatore del guscio sferico.

Punto c)

$$\vec{L}_{em} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{l}_{em} d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{r} \times \vec{P}_{em}) d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{r} \times (\varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})) d^3r = \int_R^{+\infty} dr r^2 \int_{\Omega} d\Omega \varepsilon_0 (\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}))$$

Possiamo però riscrivere \vec{P}_{em} nel seguente modo:

$$\vec{P}_{em} = (\vec{E} \times \vec{B}) \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (E_r \hat{r} \times (B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta})) = \varepsilon_0 E_r B_\theta \hat{\phi} = \frac{\mu_0 m e \sin \theta}{16\pi^2 r^5} \hat{\phi}$$

e dunque:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{em} &= \int_R^{+\infty} dr r^2 \int_R dr \varepsilon_0 (\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})) \\
&= \int_R^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{\mu_0 m e}{16\pi^2 r^3} \sin\theta (-r\hat{\theta}) \\
&= -\frac{\mu_0 m e}{16\pi^2} \int_R^{+\infty} dr \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \sin\theta \hat{\theta} \\
&= -\frac{\mu_0 m e}{16\pi^2 R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \sin\theta \hat{\theta}
\end{aligned}$$

Sappiamo però che $\hat{\theta}$ dipende sia da θ che da φ : $\hat{\theta} = \cos\theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$. Ovvvero:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \sin\theta (\cos\theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}) \\
&= 0\hat{x} + 0\hat{y} - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 - \cos^2\theta) \hat{z} \\
&= 2\pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{8}{3}\pi \hat{z}
\end{aligned}$$

Che ci porta al risultato finale che è:

$$\vec{L}_{e.m.} = \frac{\mu_0 m e}{6\pi R} \hat{z} = \frac{\mu_0 e^2 \omega R}{18\pi} \hat{z}$$

Notevole è considerare che la direzione del momento angolare è proprio l'asse di rotazione z , cosa che ha senso a livello meccanico perché stiamo considerando contributi su un guscio sferico in cui per ogni punto (x, y) ad un fissato z ne esiste uno opposto sul guscio che bilancia gli effetti. Quindi, dall'esercizio si evince che, classicamente:

$$U_{e.m.} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{R\omega}{c} \right)^2 \right] \quad \vec{L}_{e.m.} = \frac{\mu_0 e^2 \omega R}{18\pi} \hat{z}$$

Vogliamo che abbia ovviamente senso come modello dell'elettrone. Noi sappiamo che l'elettrone ha carica e un momento associato che chiamiamo "spin" che fa sembrare che l'elettrone giri su sé stesso:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{2}$$

Procediamo con un confronto ipotizzando che l'energia associata all'elettrone sia la massa, mentre lo spin sia proprio il momento angolare.

- **Momento:**

$$\frac{\mu_0 e^2 \omega R}{18\pi} \hat{z} = \frac{\hbar}{2} \quad \omega R = \frac{9\pi\hbar}{\mu_0 e^2} \approx 9.23 \cdot 10^{10} \frac{m}{s}$$

cioè otteniamo una velocità tangenziale all'equatore ≈ 300 volte maggiore di quella della luce!

- Ricavo il raggio dall'energia, assumendo la formula relativistica e sfruttando $v_T \approx 300 c$:

$$m_e c^2 = U_{em} \implies R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \left(1 + \frac{2}{9} \left(\frac{300c}{c}\right)^2\right) \approx 2.95 \cdot 10^{-11} \gg R_{nucleo} \approx 10^{-13}$$

da cui si ricava infine:

$$\omega = \frac{v_T}{R} \approx 3.13 \cdot 10^{21} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

In sostanza il modello classico fornisce previsioni errate, di tali sproporzioni da non essere imputabili alle ipotesi di partenza non accurate che abbiamo eseguito (guscio e non sfera e con spessore trascurabile).

16.2 Luce dall'interno di un acquario

Questo esercizio considera un faretto all'interno di un acquario, delimitato da uno strato di vetro di spessore d che divide acqua da aria, infine l'aria all'esterno.

L'onda incide perpendicolarmente col vetro con pulsazione ω . Aria e vetro possono essere considerati mezzi omogenei lineari.

Lo scopo del problema è trovare il coefficiente di trasmissione tra acqua e aria:

$$T_{H_2O \rightarrow ARIA} = T(d, \omega)$$

Partiamo descrivendo le costanti in gioco ed analizzando il problema lungo l'asse generico z .

$$\begin{aligned} \mu_{H_2O} &\approx \mu_{VET} \approx \mu_0 \\ n_{H_2O} = n_1 &= \frac{4}{3} \quad n_{VET} = n_2 = \frac{3}{2} \quad n_{ARIA} = n_3 \approx 1 \\ v_1 &= \frac{c}{n_1} \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad v_3 = c \\ &\begin{cases} z < 0 \longrightarrow \text{acqua} \\ 0 \leq z \leq d \longrightarrow \text{vetro} \\ z > d \longrightarrow \text{aria} \end{cases} \end{aligned}$$

Le onde ogni volta che incontrano un'interfaccia tra due materiali si dividono in due parti: una rimbalza e una trapassa. Se si analizza immediatamente il sistema possono verificarsi interferenze tra le onde che non rientrano nello scopo di questo esercizio: qui partiamo dal presupposto che passa abbastanza tempo da far sì che il sistema sia regolare. Specifichiamo poi i nomi dei campi (quindi delle onde) e le rispettive direzioni:

\vec{E}	E_τ	E_R	E_r	E_l	E_T
dir.	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{z}

Tabella 1: Campo elettrico e direzione

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v |E_0|^2 \quad T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_T}{E_I}\right)^2$$

Quindi nei tre mezzi considerati troveremo:

- 1) $\vec{E}_1 = \vec{E}_I + \vec{E}_R$
- 2) $\vec{E}_2 = \vec{E}_r + \vec{E}_l$
- 3) $\vec{E}_3 = \vec{E}_T$

Usiamo la forma complessa delle onde per facilità

$$\vec{k} = k\hat{z} \quad \text{E,B} \perp \text{direzione di propagazione.}$$

- **Zona 1:** $z < 0$

$$\vec{E}_I = E_I e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x} \quad \text{scelgo il sistema di riferimento per avere comoda l'onda.}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{v} \longrightarrow \vec{B}_I = \frac{E_I}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y} \\ \vec{E}_R &= E_R e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x} \quad \vec{B}_R = -\frac{E_R}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{y} \end{aligned}$$

- **Zona 2:** $0 \leq z < d$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_r e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x} \quad \vec{B}_r = \frac{E_r}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y} \\ \vec{E}_l &= E_l e^{i(-k_2 z - \omega t)} \hat{x} \quad \vec{B}_r = -\frac{E_r}{v_2} e^{i(-k_2 z - \omega t)} \hat{y} \end{aligned}$$

- **Zona 3:** $z \geq d$

$$\vec{E}_T = E_T e^{i(k_3 z - \omega t)} \hat{x} \quad \vec{B}_T = \frac{E_T}{v_3} e^{i(k_3 z - \omega t)} \hat{y}$$

Andiamo a prendere le componenti perpendicolari e parallele alla superficie, cioè all'interfaccia. Sappiamo che le componenti perpendicolari sono nulle in quanto si trovano sul piano parallelo.

$$\perp \quad \begin{cases} \varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = 0 \\ B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \end{cases} \quad \parallel \quad \begin{cases} \vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} = 0 \\ \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2\parallel} = 0 \end{cases}$$

Le relazioni vettoriali della seconda diventano scalari vista la natura delle ipotesi a contorno. Avendo quindi due superfici e 2 equazioni per superficie in totale avremo 4 equazioni, per 5 incognite. Questo non è un problema perché lo scopo è un coefficiente adimensionale, quindi ci basta esprimerne una in funzione di un'altra.

$$\begin{cases} E_{1\parallel}(z=0, t=0) = E_{2\parallel}(0, 0) \\ B_{1\parallel}(0, 0) = B_{2\parallel}(0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} E_{2\parallel}(d, 0) = E_{3\parallel}(d, 0) \\ B_{2\parallel}(d, 0) = B_{3\parallel}(d, 0) \end{cases}$$

scelgo $t = 0$ per caso stazionario.

$$\begin{cases} E_I + E_R = E_l + E_r \\ \frac{E_I}{v_1} - \frac{E_r}{v_1} = -\frac{E_l}{v_2} + \frac{E_r}{v_2} \end{cases} \quad \begin{cases} E_r e^{ik_2 d} + E_l e^{-ik_2 d} = E_T e^{ik_3 d} \\ \frac{E_r}{v_2} e^{ik_2 d} - \frac{E_l}{v_2} e^{-ik_2 d} = \frac{E_T}{v_3} e^{ik_3 d} \end{cases}$$

Da queste equazioni eseguiamo alcuni sviluppi utili:

1) Sommando le prime due abbiamo:

$$2E_I = E_l + E_r + E_r \frac{v_1}{v_2} - E_l \frac{v_1}{v_2} = E_r \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) + E_l \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)$$

2) Somma delle seconde due

$$2E_r = E_T e^{ik_3 d} \left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right) e^{-ik_2 d}$$

3) Differenza delle seconde due

$$2E_l = E_T e^{ik_3 d} \left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right) e^{ik_2 d}$$

Prendendo la seconda e la terza e sostituendo nella prima:

$$\begin{aligned} 2E_I &= \frac{E_T}{2} e^{ik_3 d} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right) e^{-ik_2 d} + \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right) e^{ik_2 d} \right] \\ &= \frac{E_T}{2} e^{ik_3 d} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right) (\cos(k_2 d) - i \sin(k_2 d)) + \dots \right] \\ &= E_T e^{ik_2 d} \left[\left(1 + \frac{n_3}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_2 d) - i \sin(k_2 d) \left(\frac{n_3}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \right] \\ T &= \frac{\varepsilon_3 v_3}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_T}{E_I}\right)^2 = \frac{\varepsilon_3 v_3}{\varepsilon_1 v_1} \frac{|E_T|^2}{|E_I|^2} \\ \frac{1}{T} &= \frac{\varepsilon_1 v_1}{\varepsilon_3 v_3} \frac{|E_I|^2}{|E_T|^2} \\ &= \frac{\varepsilon_1 v_1}{\varepsilon_3 v_3} \cdot \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{n_3}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_2 d) - i \sin(k_2 d) \left(\frac{n_3}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \right]^2 \\ &= \frac{n_1}{4n_3} \left[\left(\frac{n_1 n_2 + n_2 n_3}{n_1 n_2}\right)^2 - \sin^2(k_2 d) \frac{(n_3^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1^2 n_2^2} \right] \\ &= \frac{1}{4n_1 n_3} \left[(n_1 + n_3)^2 - \sin^2 \left(\frac{\omega d n_2}{c}\right) \frac{(n_3^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2} \right] \end{aligned}$$

Arriviamo quindi al risultato finale:

$$T = \frac{48}{49 + \frac{85}{36} \sin^2 \left(\frac{3\omega d}{2c}\right)}$$

Si nota subito che al variare del seno tra zero e uno possiamo trovare i valori massimi e minimi del coefficiente:

$$T_{min} = 0.9346 \quad T_{MAX} = 0.9795$$

E se faccio il contrario e metto il faretto nell'aria cosa succede? Beh semplicemente devo invertire i coefficienti:

$$n_1 \rightarrow n_3 \quad n_3 \rightarrow n_1 \quad T \rightarrow T$$

Ma riottengo esattamente lo stesso risultato per il coefficiente di trasmissione!

16.3 Vele solari

Consideriamo un satellite a forma di lastra piena con area Σ e densità di massa $\sigma = \frac{m_v}{\Sigma}$. Graficamente abbiamo sulla stessa retta: sole, terra e satellite che si muove allontanandosi dal sole; chiamiamo R la distanza terra-sole e d la distanza terra-vela. Inizialmente il satellite viene lanciato con un razzo e poi spinto dalla radiazione solare.

- a) d_T in cui la gravità terrestre è trascurabile (rispetto a quella del sole).
- b) Sotto quali condizioni la vela può raggiungere il confine del sistema solare?
- c) Si stimi la distanza in cui si possono spegnere i razzi

Iniziamo introducendo alcune formule che ci serviranno (L_S è la luminosità solare e I_{RAD} l'intensità della radiazione). Il secondo principio della dinamica per il satellite vale, in ogni punto dello spazio da quando ha spento i razzi:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{Terra} + \vec{F}_{Sole} + \vec{F}_{Rad}$$

dove

$$\vec{F}_T = -\frac{G m_T m_v}{d^2} \hat{r} \quad \vec{F}_S = -\frac{G m_S m}{(R+d)^2} \hat{r}$$

Invece per la terza forza, dovuta alla radiazione solare, dobbiamo considerare che

$$L_S = I_{RAD} 4\pi(R+d)^2 \Rightarrow I_{RAD} = \frac{L_S}{4\pi(R+d)^2}$$

Quindi

$$\vec{F}_R = P_{RAD} \Sigma \hat{r} = P_R \frac{m}{\sigma} \hat{r} = 2 \frac{I_{RAD}}{c} \frac{m}{\sigma} = \frac{2 L_S}{4\pi(R+d)^2 c} \frac{m}{\sigma} \hat{r}$$

Punto a) All'inizio domina la forza della terra, alla fine quella del sole. A distanza d_T i moduli sono paragonabili.

$$\begin{aligned} \frac{G m_S m}{(R+d)^2} &= \frac{G m_T m}{d_{TRANS}^2} & \frac{d_{TRANS}}{R+d_{TRANS}} &= \sqrt{\frac{m_T}{m_S}} \\ d_{TRANS} &= R \left(\sqrt{\frac{m_S}{m_T}} - 1 \right)^{-1} \approx R \sqrt{\frac{m_T}{m_S}} \approx 1.74 \cdot 10^{-3} R \end{aligned}$$

Quindi se consideriamo

$$d \gg d_{TRANS} \implies m\vec{a} \approx \vec{F}_S + \vec{F}_R$$

la forza gravitazionale terrestre può essere trascurata.

Punto b) Sotto queste ipotesi, la vela può viaggiare verso l'esterno se $|\vec{F}_{RAD}| > |\vec{F}_{SOLE}|$. Sviluppiamo questa condizione volendo ottenere una restrizione sull'unico parametro che possiamo controllare: la densità σ .

$$\frac{2 L_S}{4\pi(R+d)^2 c} \frac{m}{\sigma} > \frac{G m_S m}{(R+d)^2} \quad \sigma < \frac{2 L_S}{4\pi c} \cdot \frac{1}{G m_S} \quad \sigma_{CRIT} = 1.52 \cdot 10^{-1} \frac{Kg}{m^2}$$

Come è intuitivo aspettarsi, esiste una densità critica che permette al satellite di non essere attratto gravitazionalmente al punto da non poter lasciare il sistema Solare.

Punto c) Per la richiesta di ricavare la distanza minima a cui è possibile spegnere i razzi siamo al di fuori della condizione in cui la forza gravitazionale terrestre è trascurabile, quindi sviluppo:

$$\frac{G m_t m}{d_{LIM}} + \frac{G m m_S}{(R + d_{LIM})^2} - \frac{2 L_S m}{4 \pi (R + d)^2 c \sigma_{LIM}} = 0$$

$$\Rightarrow d_{LIM}^{-1} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{m_S}{m_T} \left(\frac{\sigma_{CRIT}}{\sigma} \right)} - 1 \quad d_{LIM} \approx d_{TRANS} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{CRIT}}} \rightarrow 2 L_S = \sigma 4 \pi c G m_S$$

Più la vela è leggera prima è possibile spegnere i razzi. Nel caso in cui sostituiamo questa vela riflettente con una vela assorbente modifichiamo naturalmente la pressione luminosa (che si dimezza) e quindi si modifica anche la densità critica, dimezzandosi, che a livello operativo è ovviamente una condizione negativa.

16.4 La pulsar del Granchio

In questo esercizio consideriamo una stella che gira molto velocemente attorno all'asse z con ω e un momento magnetico disallineato di angolo α . Questo crea un "effetto faro" nella direzione del dipolo magnetico molto molto preciso (come gli orologi atomici). Per questo una stella siffatta è detta *pulsar*. Se la si osserva per un lungo periodo di tempo, su scale astronomiche allora si potrà notare una variazione di periodo (in particolare un aumento).

Dati del problema: $R \approx 10 Km$ $M = 1.4 M_S$ $\vec{m} = m \hat{u}$ $\hat{u} \cdot \hat{z} = \cos \alpha$

$$\text{Dimostra che: } P = \frac{\mu_0 (m \cos \alpha)^2 \omega^4}{6 \pi c^3}$$

Come suggerimento dobbiamo considerare una spira di raggio b percorsa da corrente e un momento di dipolo magnetico.

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \vec{m} = (I_0 \cos \omega t) \pi b^2 = (I_0 \pi b^2) \cos(\omega t) \hat{z} = \vec{m}_0 \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4 \pi r c} \sin \theta' \cos(\omega t_r) \hat{\phi}' \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4 \pi r c^2} \sin \theta' \cos(\omega t_r) \hat{\theta}' \end{cases}$$

Gli angoli li uso con la dicitura "primo" perchè non corrispondono con le angolazioni del sistema di riferimento pulsar.

$$\begin{aligned} \vec{m}_0 &= m_0 \hat{z}' = m_0 (\cos \theta' \hat{r} - \sin \theta' \hat{\theta}) = m_0 \left(\frac{\vec{m}_0 \cdot \hat{r}}{m_0} \hat{r} - \sin \theta' \hat{\theta}' \right) = (\vec{m}_0 \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \sin \theta' \hat{\theta}' m_0 \\ -m_0 \sin \theta' \hat{\theta}' &= \vec{m}_0 - (\vec{m}_0 \cdot \hat{r}) \hat{r} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4 \pi r c^2} [\vec{m}_0 - (\vec{m}_0 \cdot \hat{r}) \hat{r}] \cos(\omega t) \\ \hat{z}' \times \hat{r} &= \sin \theta' \hat{\phi}' \quad m_0 \sin \theta' \hat{\phi}' = \vec{m}_0 \times r \end{aligned}$$

Così abbiamo riscritto i nostri campi indipendentemente dal sistema di coordinate utilizzato.

$$\vec{m} = m \sin \alpha \cos(\omega t) \hat{x} + m \sin \alpha \sin(\omega t) \hat{y} + m \cos \alpha \hat{z}$$

Perchè una spira irradia? Perchè ha un momento di dipolo variabile nel tempo (e quindi campi variabili nel tempo). Le prime due componenti del dipolo quindi generano componenti elettriche e

magnetiche variabili mentre l'ultima è costante. Come calcoliamo la potenza? Facciamo la somma dei campi in quanto le equazioni di Maxwell sono lineari nei campi e quindi sommare i vettori di Poynting o le singole potenze è sbagliato.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} [m \sin \alpha \cos(\omega t) (\hat{x} \times \hat{r}) + m \sin \alpha \sin(\omega t) (\hat{y} \times \hat{r})] \\ A &\equiv \frac{\mu_0 \omega^2 m \sin \alpha}{4\pi r c} \quad \beta = \omega t \implies \vec{E} = A [\cos \beta (\hat{x} \times \hat{r}) + \sin \beta (\hat{y} \times \hat{r})] \\ \vec{B} &= \vec{B}_x + \vec{B}_y = \frac{A}{c} \{ \cos \beta [\hat{x} - (\hat{x} \cdot \hat{r})] + \sin \beta [\hat{y} - (\hat{y} \cdot \hat{r})] \} \\ P &= \int_{\Sigma} < \vec{S} > d\Sigma \quad < \vec{S} > = \frac{\int_0^{2\pi} d\beta \vec{S}}{2\pi} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ \vec{S} &= \frac{A^2}{c \mu_0} [\cos^2 \beta (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{x} - \cos^2 \beta (\hat{x} \cdot \hat{r}) (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \\ &\quad + \cos \beta \sin \beta (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{y} - \cos \beta \sin \beta (\hat{y} \cdot \hat{r}) (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \\ &\quad + \cos \beta \sin \beta (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{x} - \cos \beta \sin \beta (\hat{x} \cdot \hat{r}) (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \\ &\quad + \sin^2 \beta (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{y} - \sin^2 \beta (\hat{y} \cdot \hat{r}) (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{r}] \end{aligned}$$

Usiamo la regola $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned}(\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{x} &= \hat{r} - (\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{x} \\ (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{r} &= -\hat{x} + (\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{r} \\ (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{y} &= \hat{r} - (\hat{y} \cdot \hat{r}) \hat{y} \\ (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{r} &= -\hat{y} + (\hat{y} \cdot \hat{r}) \hat{r} \\ (\hat{x} \times \hat{r}) \times \hat{y} &= -(\hat{y} \cdot \hat{r}) \hat{x} \\ (\hat{y} \times \hat{r}) \times \hat{x} &= -(\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{y} \end{aligned}$$

Finalmente sostituendo avremo:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{A^2}{\mu_0 c} \left[1 - (\hat{x} \cdot \hat{r})^2 \cos^2 \beta - (\hat{y} \cdot \hat{r}) \sin^2 \beta - 2 \cos \beta \sin \beta (\hat{x} \cdot \hat{r})(\hat{y} \cdot \hat{r}) \right] \hat{r}$$

Rimane solo la componente lungo r:

$$\begin{aligned}< \vec{S} > &= \frac{\int_0^{2\pi} d\beta \vec{S}}{2\pi} \rightarrow \int_0^{2\pi} d\beta \cos^2 \beta = \int_0^{2\pi} d\beta \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \quad \int_0^{2\pi} d\beta \sin \beta \cos \beta = 0 \\ < \vec{S} > &= \frac{A^2}{\mu_0 c} \left[1 - \frac{(\hat{x} \cdot \hat{r})^2}{2} - \frac{(\hat{y} \cdot \hat{r})^2}{2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{x} \cdot \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \\ \hat{y} \cdot \hat{r} &= \sin \theta \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\vec{S}> &= \frac{A^2}{\mu_0 c} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) \hat{r} = \frac{\mu_0^2 \omega^4 m^2 \sin^2 \alpha}{16\pi^2 r^2 c^2 \mu_0 c} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) \hat{r} \\
P &= \int_{\Sigma} <\vec{S}> \cdot d\vec{\Sigma} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} |<\vec{S}>| \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta \hat{r} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{\mu_0 c} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) r^2 \sin \theta = \frac{A^2}{\mu_0 c} 2\pi \left[\int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta - \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2 \theta}{2} \right] \\
&= \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c} \left(2 - \frac{1}{2} \frac{4}{3}\right) = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{\omega^4 m^2 \sin^2 \alpha}{c^3}
\end{aligned}$$

Analizziamo questo risultato. Innanzitutto dipende dalla 4^a potenza della velocità, ma soprattutto dal disallineamento tra \hat{z} e \vec{m} . Giustamente se fossero allineati non avremmo dipolo variabile e quindi niente irradiazione e niente potenza.

Ora, sappiamo che la pulsar del Granchio sta rallentando, e quindi aumenta il periodo: come mai? Abbiamo due energie: Cinetica e Magnetica. Irradiando, la stella perde energia proprio sottoforma di energia cinetica. Possiamo scrivere la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
-P &= \frac{d}{dt} E_k \quad E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \implies \frac{d}{dt} E_k = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \dot{\omega} = I \omega \dot{\omega} \\
I &= K M R^2 \quad I \omega \dot{\omega} = -P(\omega) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \dot{\omega} = -\frac{2\pi}{T^2} \dot{T}
\end{aligned}$$

Con una sfera uniformemente magnetizzata (prima approssimazione per il risultato che segue):

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M} \quad \vec{M} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{B} \implies \vec{m} = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} \vec{B} \implies m = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} B$$

Quindi abbiamo il set di equazioni

$$\begin{cases} I \omega \dot{\omega} = -P \\ \dot{\omega} = -\frac{2\pi}{T^2} \dot{T} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \\ P = \frac{\mu_0 (m \cos \alpha)^2 \omega^4}{6\pi c^3} \\ m = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} B \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{T} = \frac{8\pi^3}{3c^3 \mu_0} \cdot \frac{1}{T} \frac{R^4 B^2 \sin^2 \alpha}{K M} \\ B = \sqrt{T \dot{T}} \sqrt{\frac{3c^3 \mu_0 K M}{8\pi^3 R^4}} \frac{1}{\sin \alpha} \end{cases}$$

In cui l'unico termine incerto è quello che riguarda il disallineamento descritto da α . Ma posso sempre minorare il campo magnetico considerando che più aumento il disallineamento, minore deve essere il campo magnetico per avere la stessa potenza irradiata. Quindi considero il caso limite $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$B \geq B_{min}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = B = \sqrt{T \dot{T}} \sqrt{\frac{3c^3 \mu_0 K M}{8\pi^3 R^4}} \quad B_{CRAB} = 5.31 \cdot 10^{12} G \quad 1 T = 10^4 G$$

$$P_{CRAB} = 6.98 \cdot 10^{21} W \approx 2 \cdot 10^5 P_{SOLE}$$

Infine vogliamo riscrivere l'equazione per \dot{T} tramite una funzione f che accoppi tutte le costanti in gioco:

$$T \cdot \dot{T} = \frac{8\pi^3}{3c^3 \mu_0} \cdot \frac{R^4 B^2 \sin^2 \alpha}{K M} := f \text{ costante}$$

a sinistra noto invece che compare un termine facilmente riconducibile ad una derivata totale nel tempo.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(T^2) = f \longrightarrow \frac{d}{dt}(T)^2 = 2f \longrightarrow \int_{t_0}^t T^2 dt' = 2 \int_{t_0}^t f dt'$$

Abbiamo allora $T^2 - T_0^2 = 2f(t - t_0)$ dalla quale vogliamo ricavare l'eta della pulsar $(t - t_0)$. Quindi nell'ipotesi che $T_0^2 \ll T^2$, ovvero che all'inizio la pulsar ruotasse molto più velocemente, otteniamo:

$$T^2 \approx 2f(t - t_0) = 2(T\dot{T})(t - t_0)$$

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \frac{T}{\dot{T}} \approx 4.1 \cdot 10^{10} = 1293 \text{ anni}$$

ed è la stima della vita della pulsar secondo l'elettrodinamica classica, con una precisione del 20%.

16.5 Filo percorso da corrente

In questo esercizio vogliamo sviluppare il celebre problema del filo percorso da corrente con le equazioni dell'elettrodinamica.

Partiamo quindi considerando un filo con uno spessore non trascurabile in cui scorre una corrente descritta da

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

Prima parte: Richieste: $\vec{A} = ?$ $V = ?$

$$\begin{cases} \vec{A}(R_P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}(\vec{x}', t_R)}{d} d^3x' \\ V(R_P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{x}', t_R)}{d} d^3x' \end{cases}$$

dove $d = \|\vec{r}_P - \vec{x}'\|$ è la distanza tra sorgenti (\vec{x}') e punto che ci interessa (\vec{r}_P). Il filo considerato è localmente neutro quindi $\rho = 0$ e $V = 0$, abbiamo quindi che la carica complessiva è nulla, ma esiste un "flusso" di cariche. Esprimendo l'integrale in coordinate cilindriche e ricordando che $d^3x' = R'dR'd\phi'dx'$:

$$\begin{cases} V = 0 \\ \vec{A}(R_P, t_R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{+\infty} dR' \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}', t_R)}{d} \right] \cdot R' \end{cases}$$

Risolviamo l'integrale in dR' considerando che:

$$\int_0^{+\infty} dR' = \int_0^{\tilde{R}} dR' + \int_{\tilde{R}}^{+\infty} dR' = \int_0^{\tilde{R}} dR'$$

Quindi riscriviamo \vec{A} :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\tilde{R}} dR' \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}', z_R)}{d} R' \right]$$

Facciamo ora qualche considerazione su \vec{J} :

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(t) \\ [\vec{J}] = \frac{[Q]}{[L]^2[T]} \Rightarrow \vec{J} = \frac{I_0}{\pi R^2} \hat{z} = \frac{I_0(t_R)}{\pi \tilde{R}^2} \hat{z} \end{cases}$$

dove la prima è la densità omogenea nello spazio se $R' < \tilde{R}$. Ora invece sviluppiamo d :

$$d = \|\vec{r}_p - \vec{x}'\| = \sqrt{R_p^2 + R'^2 - 2R_p R' \cos(\phi_p - \phi') + (z_p - z')^2}$$

$$d \approx \sqrt{R_p^2 + \Delta z^2}, \quad R_p \gg \tilde{R} \geq R'$$

Riscrivendo alla luce di queste considerazioni \vec{A} :

$$\begin{aligned} \vec{A}(R_p, t_R) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\tilde{R}} R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[\frac{I_0(t_r)}{\pi \tilde{R}^2} \cdot \frac{1}{d} \hat{z} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi \tilde{R}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[\frac{I_0(t_r)}{\pi \tilde{R}^2} \cdot \frac{1}{d} \hat{z} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[I_0(t_R) \cdot \frac{1}{\sqrt{R_p^2 + \Delta z^2}} \hat{z} \right] \end{aligned}$$

Altre considerazioni:

- una considerazione geometrica e "fisica" da fare è che il potenziale non può dipendere da z : al posto di $\Delta z = z_p - z' \approx -z' \Rightarrow (\Delta z)^2 = (z')^2$

- $t_R = t - \frac{d}{c}$ per definizione

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \neq 0 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

possiamo allora dire che:

$$I(x) \neq 0 \quad \text{se} \quad t_R \geq 0 \Rightarrow t - \frac{\sqrt{R_p^2 + \Delta z^2}}{c} \geq 0 \Rightarrow ct \geq \sqrt{R_p^2 + (z')^2} \geq R_p \Rightarrow \vec{A}(t < \frac{R_p}{c}, R_p) = 0$$

ovvero l'informazione viaggia su R_p , percorso minore, qualsiasi tempo minore di $\frac{R_p}{c}$ porta al risultato banale $I = 0$, mentre se $t \geq \frac{R_p}{c}$ abbiamo delle condizioni per z' :

$$\vec{A}(t \geq \frac{R_p}{c}, R_p) \Rightarrow ct \geq \sqrt{R_p^2 + (z')^2} \Rightarrow -\sqrt{(ct)^2 - R_p^2} \leq z' \leq \sqrt{(ct)^2 - R_p^2} \Rightarrow z_1 \leq z' \leq z_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{A}(t \geq \frac{R_p}{c}, R_p) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \left[\frac{I_0}{\sqrt{R_p^2 + (z')^2}} \hat{z} \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{z_2} dz' \frac{I_0}{\sqrt{R_p^2 + (z')^2}} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - R_p^2}}{R_p} \hat{z} \end{aligned}$$

Ricapitolando:

$$\begin{cases} V = 0 & \text{sempre} \\ \vec{A}(t, R_p) = \begin{cases} \vec{0} & t < \frac{R_p}{c} \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - R_p^2}}{R_p} \hat{z} & t \geq \frac{R_p}{c} \end{cases} & \end{cases}$$

Seconda parte: Richieste: $\vec{E} = ?$ $\vec{B} = ?$ nel caso $t \rightarrow +\infty$ attraverso i potenziali:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & t < \frac{R_p}{c} \\ -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - R_p^2}} \hat{z} & t \geq \frac{R_p}{c} \end{cases}$$

Mentre per \vec{B} sappiamo che:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{R} + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R A_\phi}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \phi} \right) \hat{z} = -\frac{\partial A_z}{\partial R} \hat{\phi} \\ &\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & t < \frac{R_p}{c} \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_p} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - R_p^2}} \hat{\phi} & t \geq \frac{R_p}{c} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo $|\vec{E}| \rightarrow 0$ e $|\vec{B}| \rightarrow \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_p}$, ovvero le equazioni note come legge di Biot-Savart.

Terza parte: Ci interessa notare in quale *gauge* siamo per quanto riguarda questo esercizio. Quali cioè dei presupposti per i gauge sono validi? Per confermare il gauge di Coulomb applico la divergenza di \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

sempre, quindi siamo nell'ipotesi del gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Inoltre siccome $V = 0$ anche $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ che soddisfa quindi le ipotesi del gauge di Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

In conclusione quindi valgono sia il gauge di Coulomb sia quello di Lorentz.

16.6 Instabilità dell'atomo classico: dilemma di Bohr

Dopo l'introduzione del modello planetario kepleriano (cioè ancora classico) per quanto riguarda la struttura atomica Bohr tenta un calcolo che mette in evidenza una criticità intrinseca con la descrizione classica dell'atomo.

Conoscendo il risultato di Larmor, ovvero che un elettrone accelerato produce una radiazione secondo la seguente relazione

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

nel limite relativistico $v \ll c$, vogliamo studiare l'evoluzione del sistema protone-elettrone per l'atomo di idrogeno. Cioè è possibile che il modello planetario sia stabile anche se l'elettrone emette radiazione (quindi perde gradualmente energia) poiché è accelerato?

Abbiamo i seguenti dati: $|q_p| = |q_e| = q$, $m_e \ll m_p$ e $R_0 = 53 \cdot 10^{-12} \text{m}$.

Caso $P = 0$ ovvero irraggiamento trascurabile. Dovremmo trovare un'orbita "stabile" per interazione Coulombiana. Vediamo innanzitutto

$$a = \frac{v^2}{R_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R_0^2} \frac{1}{m_e} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0 m_e}} \Rightarrow \frac{v}{c} = 7.3 \cdot 10^{-3}$$

quindi un rapporto adatto per l'equazione di Larmor. Notiamo:

- $T = \frac{2\pi R_0}{v} = 1.52 \cdot 10^{-16}$ s;
- $E_{TOT} = E_k + E_{POT} = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{R_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = \frac{E_{POT}}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_0};$

quindi visto che è un sistema legato $E_{TOT}(R_0) < 0$. Infine notiamo che essendo $P = 0$ il sistema, secondo le leggi classiche, è eterno.

Caso $P \neq 0$ e quindi $R = R(t)$:

$$\frac{d}{dt} E_{TOT} = -P = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{e^2}{R^2} \right)^2$$

dall'equazione di Larmor. Inoltre possiamo sviluppare

$$\frac{d}{dt} E_{TOT} = \frac{d}{dR} E_{TOT} \frac{dR}{dt}$$

e svolgere la derivata rispetto ad R :

$$\frac{d}{dR} E_{TOT} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

e quindi

$$\frac{dR}{dt} = -\left(\frac{d}{dR} E_{TOT}\right)^{-1} P = -\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c} \frac{1}{R^2}$$

volendo trovare $R(t)$ possiamo riscrivere quest'ultima uguaglianza nel seguente modo e poi integrare:

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{12\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c}{\mu_0 e^4} R^2 dR \\ \int_{t_0}^t dt' &= \int_{R_0}^R \left(-\frac{12\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c}{\mu_0 e^4} \right) R'^2 dR' \\ t(R) - t_0 &= \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c}{\mu_0 e^4} (R_0^3 - R^3) \\ R(t) &= \left[R_0^3 - \frac{\mu_0 e^4}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c} (t - t_0) \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Siamo giunti ad un'equazione per il raggio dell'elettrone nel tempo. Per avere un'idea chiara su quanto quest'informazione influisca sul modello atomico definisco Δt_4 nel seguente modo $R(t_o + \Delta t_4) = 10^{-2} R_0$. Cioè voglio calcolare il tempo necessario all'elettrone per decadere in un'orbita 100 volte più piccola di quella iniziale.

$$\Delta t_4 \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c}{\mu_0 e^4} R_0^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-11}$$
s

ovvero dopo solo circa $1.5 \cdot 10^{-11}$ s il raggio diventa $R = 10^{-2}R_0$!

Questo meccanismo ha l'ineludibile conseguenza che le leggi classiche sono inadatte a descrivere il modello atomico poiché forniscono un risultato evidentemente incompatibile con la stabilità atomica.

Possiamo infine sviluppare un'ultima considerazione. Tenendo conto del risultato ottenuto per Δt_4 ci chiediamo cosa succeda all'atomo:

- l'elettrone non riesce a descrivere neanche un'orbita poiché $T > \Delta t_4$;
- l'elettrone fa varie orbite prima di decadere poiché $T \ll \Delta t_4$, che risulta essere il nostro caso.

16.7 Vita media dei muoni atmosferici

Dallo spazio giungono fino alla Terra raggi cosmici, fasci di particelle molto energetiche a velocità relativistiche. In un range di quota compreso tra i 15km e i 3km questi collidono con le molecole d'aria e da questi urti molto energetici hanno origine nuove particelle lanciate verso il basso a velocità prossime a quelle della luce. Una di queste particelle è detta *muone*.

Queste sono le sue specifiche comparate a quelle di un elettrone:

$$e^- : m_e; |e| \rightarrow \mu^- : m_\mu = 200m_e; |e|$$

La particolarità di questa particella è che decade in brevissimo tempo in un elettrone e neutrini. La sua vita media, che chiameremo τ , è pari a $\tau = 2,2\mu s$:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \nu_0$$

Come primo calcolo consideriamo il caso limite in cui la velocità dei muoni atmosferici v_μ sia pari a c e osserviamo quanta distanza percorrono h_μ :

$$h_\mu = v_\mu \tau \approx c \tau \approx 600 \text{ m}$$

Quindi è ragionevole pensare che i muoni non dovrebbero essere rilevati al livello del mare, perché nel caso limite in cui un muone si formi alla quota minima pari a 3 km e viaggi alla velocità della luce dovrebbe decadere svariati km sopra il livello del mare.

Come si spiega allora la loro abbondante presenza nei rilevatori a terra? Attraverso la relatività speciale.

Se immaginiamo di chiamare O' il riferimento solidale con il muone e O il riferimento solidale con la terra, sappiamo che O' rileva un *tempo proprio*, cioè quello minimo misurabile, pari a τ mentre, richiamando la formula per la dilatazione dei tempi, O misura per forza un tempo improprio pari a:

$$t = \gamma \tau$$

La domanda dell'esercizio è: *a che velocità v_μ viaggia il muone sapendo che viene rilevato al livello del mare?*

Come prima cosa definiamo il parametru ϵ tale che:

$$v_\mu = c(1 - \epsilon)$$

sapendo che $\beta = \frac{v_\mu}{c}$ e considerando che $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\epsilon}}$$

Cioè il parametro ϵ svolge il ruolo di indicatore di quanto la velocità del muone si scosta da quella della luce. A questo punto, possiamo calcolare γ per un certo ϵ facendo un'ipotesi quindi sul valore di v_μ e rendendo la formula adattabile al caso in cui ϵ sia leggermente diverso, cioè calcoliamo:

$$\gamma(\epsilon = 10^{-3}) = 22,36 \rightarrow \gamma = 22,36 \cdot \left(\frac{\epsilon}{10^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cioè γ è uguale a quel valore moltiplicato per un fattore di correzione che dipende da quanto ϵ si discosta dal valore ipotizzato arbitrariamente di 10^{-3} . Questo processo viene detto *relazione di scala* e sarà utile in tutti gli esercizi svolti di relatività.

A questo punto il tempo improprio t :

$$t = \gamma(\epsilon = 10^{-3})\tau = 45 \text{ } \mu s \Rightarrow h_T = v_\mu t = c(1-\epsilon)t = 12,76 \text{ km}$$

Dove h_T è la quota percorsa dal muone rispetto al sistema di riferimento O e quindi possiamo nuovamente scrivere la relazione di scala:

$$h_T = 12,76 \text{ km} \cdot \left(\frac{\epsilon}{10^{-3}} \right)$$

Ed ecco come essi riescono a giungere fino alla superficie. Se i muoni sono prodotti ad una quota z tale che $3\text{km} < z < 15\text{km}$:

$$\Rightarrow 9,6 \cdot 10^{-4} < \epsilon < 8,7 \cdot 10^{-3}$$

Da cui infine è possibile ricavare un intervallo di velocità valide per rispondere al quesito dell'esercizio.

16.8 Emissione di neutrini

Quando una stella arriva al termine della sua vita naturale si verifica una gigantesca implosione chiamata supernova: questi fenomeni, tra le altre cose, producono onde di neutrini che viaggiano giungendo fino ai nostri rilevatori.

Quelli rilevati nella supernova di questo esercizio, situata nella grande nube di magellano (LMC) a distanza $d_{LMC} = 160000 \text{ lys}$, hanno un range di energia pari a $7,5 \text{ MeV} \leq E_\nu \leq 40 \text{ MeV}$ e sono arrivati tutti in un intervallo di tempo $\delta\tau_\nu = 10 \text{ sec}$. (figura 3)

Si considerino fotoni γ emessi contemporaneamente ai neutrini ν di massa ed energia in prima approssimazione uguale per ciascun neutrino, pari a m_ν, E_ν .

Domande:

- Si derivi la differenza di tempo di arrivo tra γ e ν emessi nello stesso istante rispetto al sistema di riferimento terrestre.

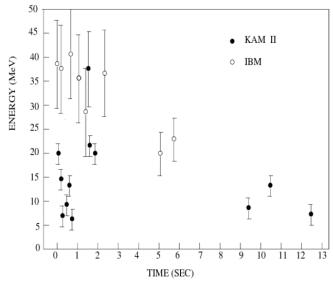


Figura 8: Grafico dei neutrini rilevati

- Qual è il tempo di volo e la distanza percorsa nei sistemi di riferimento solidali con γ e ν .
- Si derivi un possibile valore, o un intervallo di valori, per la massa del neutrino.

Come prima cosa, introduciamo delle approssimazioni:

$$E_\nu = m_\nu \gamma c^2 = m_\nu \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 \Rightarrow v_\nu = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2\right)$$

Definiamo come prima il parametro ϵ tale che $v_\nu = c(1 - \epsilon)$ così che:

$$\epsilon = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2$$

Se stimiamo, in prima approssimazione, $m_\nu = 1\text{eV}$; $E_\nu = 10\text{MeV}$

$$\Rightarrow \epsilon = 5 \cdot 10^{-15} \left(\frac{m_\nu c^2}{1\text{eV}}\right)^2 \left(\frac{E_\nu}{10\text{MeV}}\right)^{-2}$$

(i) Quanta differenza di tempo tra γ e ν ?

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{d_{LMC}}{v_\nu} - \frac{d_{LMC}}{c} = d_{LMC} \left(\frac{1}{c(1 - \epsilon)} - \frac{1}{c} \right) = d_{LMC} \left(\frac{\epsilon}{c(1 - \epsilon)} \right) \approx d_{LMC} \frac{\epsilon}{c} \\ \Rightarrow \delta t &\approx 8 \cdot 10^{-10} \text{anni} \left(\frac{m_\nu c^2}{1\text{eV}}\right)^2 \left(\frac{E_\nu}{10\text{MeV}}\right)^{-2} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{sec} \left(\frac{m_\nu c^2}{1\text{eV}}\right)^2 \left(\frac{E_\nu}{10\text{MeV}}\right)^{-2} \end{aligned}$$

(ii) Riferimenti in moto

Passiamo ora a valutare la situazione rispetto al riferimento O' solidale al neutrino in cui è la terra a muoversi. Il tempo di volo in questo riferimento è il tempo proprio τ legato a $t_0 = \frac{d_{LMC}}{v_\nu}$ tempo misurato dalla terra:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_0}{\gamma} = \frac{d_{LMC}}{c(1 - \epsilon)} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{d_{LMC}}{c(1 - \epsilon)} \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2} \approx \frac{d_{LMC}}{c} \sqrt{2\epsilon} \\ \Rightarrow \tau &\approx 5,84 \text{gg} \left(\frac{m_\nu c^2}{1\text{eV}}\right)^2 \left(\frac{E_\nu}{10\text{MeV}}\right)^{-2} \end{aligned}$$

Mentre la distanza rispetto al riferimento solidale al neutrino sarà d' data dalla velocità del neutrino per il suo tempo proprio:

$$d' = v_\nu \tau \approx c(1 - \epsilon) \frac{d_{LMC}}{c} \sqrt{2\epsilon} \approx d_{LMC} \sqrt{2\epsilon}$$

$$\Rightarrow d' \approx 1,6 \cdot 10^{-2} \text{lyrs} \left(\frac{m_\nu c^2}{1 \text{eV}} \right)^2 \left(\frac{E_\nu}{10 \text{MeV}} \right)^{-2}$$

(iii) Stima massa neutrino

Per fare una stima della massa del neutrino uso i valori dei neutrini più energetici e meno energetici rilevati, in riferimento alle velocità. In particolare chiamo:

$$\delta\tau_\nu = \frac{d_{LMC}}{v_{\nu_{max}}} - \frac{d_{LMC}}{v_{\nu_{min}}} = \frac{d_{LMC}}{c(1 - \epsilon_{min})} - \frac{d_{LMC}}{c(1 - \epsilon_{max})} = \frac{d_{LMC}}{c} \left(\frac{\epsilon_{max} - \epsilon_{min}}{(1 - \epsilon_{min})(1 - \epsilon_{max})} \right)$$

$$\Rightarrow \delta\tau_\nu \approx \frac{d_{LMC}}{c} (\epsilon_{max} - \epsilon_{min})$$

Considerando ora che $\epsilon = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2$:

$$\Rightarrow \delta\tau_\nu \approx \frac{d_{LMC}}{c} \frac{1}{2} (m_\nu c^2)^2 \left(\frac{1}{E_{\nu_{min}}^2} - \frac{1}{E_{\nu_{max}}^2} \right) \approx \frac{d_{LMC}}{c} \frac{1}{2} (m_\nu c^2)^2 \left(\frac{E_{\nu_{max}}^2 - E_{\nu_{min}}^2}{E_{\nu_{min}}^2 \cdot E_{\nu_{max}}^2} \right)$$

Quindi risolvendo per la massa:

$$\Rightarrow m_\nu c^2 \approx \sqrt{\frac{2\delta\tau_\nu c}{d_{LMC}} \left(\frac{E_{\nu_{min}}^2 \cdot E_{\nu_{max}}^2}{E_{\nu_{max}}^2 - E_{\nu_{min}}^2} \right)} \approx 5,23 \text{ eV}$$

Questa relazione definisce un upper limit per la massa del neutrino, cioè abbiamo ricavato quest'espressione sovrastimando ogni quantità in modo tale da definire un limite massimo oltre il quale è ragionevole pensare che la massa del neutrino non possa trovarsi. Quello che ci permette di dire che è una buona approssimazione è che le ipotesi di partenza per quest'espressione sono tutte dovute alla massa stessa e non ad altre quantità fisiche coinvolte.

16.9 Urti relativistici completamente anelastici e decadimenti

In questo esercizio consideriamo urti completamente anelastici partendo cioè da due particelle che chiameremo 1 e 2 e arrivando infine ad una particella 3 che sarà equivalente all'unione delle prime due: un urto anelastico cioè prevede la collisione totale delle particelle coinvolte ed il loro proseguimento come un'unica entità finale. Se questo tipo di urti è importante in cinematica relativistica, è ancora più rilevante in fisica delle particelle il processo inverso: considerando cioè una particella maggiore da cui si formano due particelle minori che prima erano "unite" in quella maggiore, stiamo cioè parlando del *decadimento particellare*.

Si considerino due particelle di massa m_1 ed m_2 che, senza perdere di generalità, si muovono lungo lo stesso asse generico a velocità normalizzate β_1 e β_2 , dove si è sfruttata la nota relazione: $\beta_i = \frac{v_i}{c}$. Non è necessario che le due particelle viaggino l'una contro l'altra, è anche possibile che viaggino nella stessa direzione con velocità diverse.

Domande:

- Si determinino la massa M e la velocità V della particella risultante dall'urto completamente anelastico. Si discuta in particolar modo la relazione tra le masse iniziali e finali e quindi l'avvenuta o meno conservazione della massa.
- Si studi il caso in cui $m_1 = m_2 = m$

(i) Urto particelle generiche

In dinamica relativistica vale la conservazione della tetra-quantità di moto P^μ :

$$P_i^\mu = P_f^\mu \rightarrow p_1^\mu + p_2^\mu = p^\mu$$

dove

$$\{p_1^\mu = \left(\frac{E_1}{c}, 0, 0, p_{z,1}\right) = (m_1\gamma_1 c, 0, 0, m_1\gamma_1\beta_1 c)\} \quad \{p_2^\mu = \left(\frac{E_2}{c}, 0, 0, p_{z,2}\right) = (m_2\gamma_2 c, 0, 0, m_2\gamma_2\beta_2 c)\}$$

rappresentano i tetra-vettori quantità di moto delle particelle iniziali.

$$\Rightarrow P_i^\mu = (m_1\gamma_1 c + m_2\gamma_2 c, 0, 0, m_1\gamma_1\beta_1 c + m_2\gamma_2\beta_2 c)$$

Mentre $p^\mu = (M\gamma c, p_x, p_y, p_z)$. Per la conservazione della tetra-quantità di moto:

$$\Rightarrow (M\gamma c, p_x, p_y, p_z) = (m_1\gamma_1 c + m_2\gamma_2 c, 0, 0, m_1\gamma_1\beta_1 c + m_2\gamma_2\beta_2 c)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = 0 \\ p_z = m_1\gamma_1\beta_1 c + m_2\gamma_2\beta_2 c \\ M\gamma c = m_1\gamma_1 c + m_2\gamma_2 c \end{cases} \dots \begin{cases} M\gamma = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 \\ M\gamma\beta = m_1\gamma_1\beta_1 + m_2\gamma_2\beta_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{m_1\gamma_1\beta_1 + m_2\gamma_2\beta_2}{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2} \\ M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2)} \end{cases} \end{aligned}$$

Ci interessa la relazione che lega le masse quindi esaminiamo la seconda equazione, che andiamo ad elevare al quadrato e sviluppare nel modo seguente

$$\Rightarrow M^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_1m_2(\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2) - 1)$$

per avere un parallelismo classico. Infatti si nota subito che il fattore

$$\{2m_1m_2(\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2) - 1)\}$$

determina la non conservazione delle masse in seguito all'urto. Definiamo quindi $f(m_1, m_2) = 2m_1m_2$ e $g(\beta_1, \beta_2) = \gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2) - 1$ come deviazione delle masse.

$$\Rightarrow M^2 = (m_1 + m_2)^2 + f(m_1, m_2)g(\beta_1, \beta_2)$$

Quindi f è sempre maggiore o uguale a zero. I casi interessanti di questo urto vengono invece definiti dalla funzione g . Infatti $g = 0$ se e solo se $\beta_1 = \beta_2$ per tutti gli altri casi risulta $g > 0$. Questa funzione di due variabili si presta bene ad essere visualizzata attraverso un grafico in due dimensioni che esprime l'output della funzione con i colori, invece che una quota in tre dimensioni (figura 9). Quindi si nota che:

- $M > (m_1 + m_2)$ sempre tranne il caso limite già discusso in cui si annulla: cioè una parte dell'energia cinetica iniziale si converte sempre in massa finale!
- Come è facile intuire la conversione diventa più efficiente per particelle più massive a causa della funzione f e per velocità alte e opposte in verso: $g(\beta_1, -\beta_1)$ per esempio rappresenta la diagonale del secondo e quarto quadrante, cioè a parità del valore di g (una curva colorata nel grafico), serve o una combinazione di velocità bassa ed una elevatissima, oppure due velocità identiche e opposte in modulo.
- Per particelle per cui $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$ e discordi in verso g diverge.
- Anche per velocità concordi (inseguimento più che urto) una parte dell'energia cinetica viene convertita in massa, purchè le velocità non siano identiche.

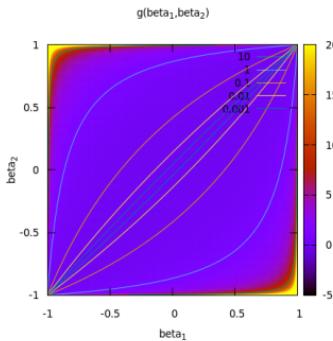


Figura 9: Funzione g

(ii) Caso di particelle di massa uguale

Caso $m_1 = m_2$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = h(\beta_1, \beta_2) \\ M &= 2m \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \gamma_1 \gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2))} = 2m \sqrt{\left(1 + \frac{g(\beta_1, \beta_2)}{2}\right)} \end{aligned}$$

Quindi per discutere M basta studiare la funzione g mentre per β cioè la velocità della particella creata dopo l'urto, si guarda la figura 10 in cui si nota principalmente che per $\beta_1 = -\beta_2$ si ottiene il caso banale $\beta = 0$ tutta l'energia cinetica convertita in massa, mentre per $\beta_1 \approx \beta_2$ si ottiene $\beta \approx \beta_1$, cioè il caso di minor conversione in massa.

(iii) Decadimenti

Ora consideriamo la situazione fisica inversa, in cui invece prendiamo il decadimento di una particella più massiccia M in altre particelle meno massicce. Vale sempre la conservazione: $P_i^\mu = P_f^\mu$, quindi:

$$(Mc, 0, 0, 0) = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \right)$$

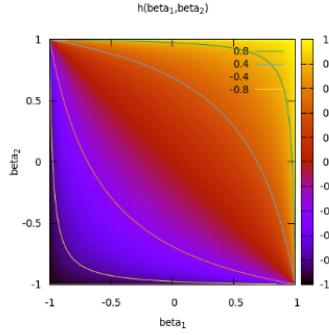


Figura 10: Funzione h

In cui consideriamo il caso $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow p_1 = p_2 = p$ cioè il decadimento di una particella inizialmente ferma. Quindi rimane:

$$Mc^2 = E_1 + E_2$$

Provo ad esprimere $E_2 = E_2(E_1, M)$

$$\Rightarrow E_2^2 = (m_2 c^2)^2 + p^2 c^2 \Rightarrow Mc^2 = E_1 + \sqrt{(m_2 c^2)^2 + p^2 c^2}$$

Ma siccome le quantità di moto in modulo sono uguali $\Rightarrow p^2 c^2 = E_1^2 - (m_1 c^2)^2$

$$\Rightarrow Mc^2 = E_1 + \sqrt{(m_2 c^2)^2 - (m_1 c^2)^2 + E_1^2}$$

Risolvendo rispetto ad E_1 si ottiene:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2 \Rightarrow m_1 \gamma_1 c^2 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2$$

Risolvendo per β si ottiene:

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{2Mm_1}{M^2 + m_1^2 - m_2^2} \right)} \quad \beta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{2Mm_2}{M^2 + m_2^2 - m_1^2} \right)}$$

Per simmetria abbiamo ricavato anche β_2 . E ora imponiamo che il radicando sia positivo, cioè la situazione fisica descrive un decadimento realmente possibile:

$$\beta_1 < 1 \Rightarrow 1 - \left(\frac{2Mm_2}{M^2 + m_2^2 - m_1^2} \right) \geq 0$$

Da cui si ottiene:

$$m_1 + m_2 \leq M$$

Cioè, intuitivamente: $Mc^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2 + K_1 + K_2 \geq m_1 c^2 + m_2 c^2$. A questo punto possiamo analizzare nello specifico alcuni decadimenti noti.

- $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu$ dove $M_\pi c^2 = 140 \text{ MeV}$ e sfruttando le relazioni sopra trovate si ottiene:

$$\begin{cases} E_\mu \approx 110,1 \text{ MeV} \\ v_\mu = 0,271c \end{cases} \quad \begin{cases} m_\nu = 0 \\ E_\nu = 29,9 \text{ MeV} \Rightarrow \beta_\nu = 1 \end{cases}$$

- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ dove $M_\pi c^2 = 135 \text{ MeV}$ di nuovo otteniamo:

$$\begin{cases} E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} \approx 67,5 \text{ MeV} \\ \beta_{\gamma_1} = \beta_{\gamma_2} = 1 \end{cases}$$

16.10 Collisori di particelle

Supponiamo di possedere un apparato in grado di accelerare particelle di massa m ad una velocità v , quindi ad una certa energia che chiameremo ϵ . Supponiamo di rilasciare queste particelle in un circuito che la porta ad urtare:

- una particella immobile, nell'esperimento $E1$;
- una particella in moto esattamente opposto, nell'esperimento $E2$. Di fatto un urto.

Definiamo poi la scala energetica τ come l'energia cinetica della particella incidente misurata nel sistema di riferimento in cui la particella bersaglio è ferma. In questo esercizio ci interessa ricavare proprio quest'espressione per i due tipi di esperimento.

Chiameremo O il sistema di riferimento solidale con la Terra che osserva l'esperimento dall'esterno, mentre O' il sistema di riferimento solidale con la particella bersaglio quindi quello che misurerà τ . Inoltre ci interessa analizzare le quantità in gioco e le energie sia con le leggi e le relazioni relativistiche che con quelle pre-relativistiche.

Caso non-relativistico:

In questo caso possiamo scrivere senza ambiguità la legge per l'energia cinetica delle particelle coinvolte:

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$$

Eperimento E1: per il primo dei due esperimenti il caso pre-relativistico ci restituisce un risultato banale. Siccome la seconda particella è ferma e la seconda le viene incontro con un'energia nota:

$$\tau_1 = \epsilon_1 = \frac{1}{2}mv^2$$

Eperimento E2: per il secondo esperimento, invece, è previsto che entrambe le particelle si muovano l'una contro l'altra (possiamo chiamarle A e B). Quindi O' , rispetto al quale la particella B è ferma, vedrà:

$$\begin{aligned} v_A &= 2v & v_B &= 0 \\ \Rightarrow \epsilon_2 &= \frac{1}{2}mv_A^2 = 2mv^2 \end{aligned}$$

Quindi per il secondo esperimento troviamo, intuitivamente, una scala energetica più elevata, di un fattore 4 per l'esattezza:

$$\tau_2 = 2mv^2 = 4\tau_1 = 4\epsilon_1$$

Caso relativistico:

In questo caso, invece, bisogna fare una distinzione tra l'energia che abbiamo fornito alla particella ϵ e l'energia cinetica propria. Infatti in relatività vale che l'energia cinetica:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = E - E_0$$

e nel nostro caso $E = \gamma mc^2 = \epsilon$. Quindi non è vero che la scala energetica $\tau = \epsilon$ perchè la scala energetica rappresenta solo la componente cinetica, quella fornita alle particelle dal nostro acceleratore, a cui dobbiamo sottrarre in relatività l'energia di riposo:

$$\tau = K = \epsilon - mc^2$$

Una volta compreso questo, analizziamo i due diversi esperimenti.

Esempio E1: per il primo caso non c'è molto da dire neanche in relatività poichè c'è solo un corpo che si muove e quindi l'analisi della situazione fisica può essere fatta da entrambi i sistemi di riferimento O, O' e risulterà sempre:

$$\tau_1 = K_1 = \epsilon - mc^2$$

Esempio E2: per il secondo esperimento invece, va fatta una distinzione tra i due osservatori. Infatti O rimarrà sempre il nostro sistema di riferimento solidale con la Terra che osserva entrambe le particelle muoversi, ma O' diventerà un osservatore rispetto al quale la particella B è ferma e quindi lui è in moto a velocità relativistica. Senza perdere di generalità assumiamo che l'urto venga sviluppato lungo l'asse z.

Consideriamo il quadri momento rispetto ad O :

$$\sum p^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, 0, 0, |\vec{p}|\right) + \left(\frac{\epsilon}{c}, 0, 0, -|\vec{p}|\right) = \left(\frac{2\epsilon}{c}, 0, 0, 0\right)$$

Consideriamo ora il quadri momento rispetto ad O' :

$$\sum p'^\mu = p'_A^\mu + p'_B^\mu$$

ma rispetto ad O' la particella B è ferma quindi:

$$\sum p'^\mu = \left(\frac{\epsilon'}{c}, 0, 0, \sqrt{\frac{\epsilon'^2}{c^2} - m^2 c^2}\right) + (mc, 0, 0, 0) = \left(\frac{\epsilon'}{c} + mc, 0, 0, \sqrt{\frac{\epsilon'^2}{c^2} - m^2 c^2}\right)$$

Dove abbiamo sfruttato l'identità dimostrata in meccanica relativistica

$$|\vec{p}|^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4$$

A questo punto sfruttiamo il fatto che il quadrato del quadri momento deve essere uguale in ogni sistema di riferimento:

$$\rightarrow p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu$$

che si traduce, secondo le regole del formalismo covariante:

$$\Rightarrow \eta_{\mu\alpha} p^\alpha p^\mu = \eta_{\mu\alpha} p'^\alpha p'^\mu$$

ricordando che $\eta_{00} = -1$ sviluppiamo i quadrati:

$$\begin{aligned}-4\frac{\epsilon^2}{c^2} &= -\left(\frac{\epsilon'}{c} + mc\right)^2 + \frac{\epsilon'^2}{c^2} - m^2c^2 \\ \Rightarrow -2\frac{\epsilon^2}{c^2} &= -\epsilon'm - m^2c^2 \\ \rightarrow \epsilon' &= 2\frac{\epsilon^2}{mc^2} - mc^2\end{aligned}$$

Abbiamo ricavato quindi l'energia nel sistema di riferimento O' . Da cui ora possiamo finalmente trovare τ_2 , perchè la scala energetica era riferita al sistema O' :

$$\tau_2 = K'_2 = \epsilon' - mc^2 = 2\frac{\epsilon^2}{mc^2} - 2mc^2$$

Ricordando che $\tau_1 = \epsilon - mc^2$ e sviluppando i calcoli otteniamo la relazione tra le scale di energia dei due esperimenti relativistici:

$$\tau_2 = 4\tau_1 \left(1 + \frac{\tau_1}{2mc^2}\right)$$

da cui possiamo notare che il termine di dipendenza lineare è rimasto anche in regime relativistico, ma oltre a questo è comparso un termine quadratico dell'energia cinetica! Ciò significa che analizzando la situazione con le leggi relativistiche possiamo affermare che, nel regime in cui:

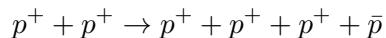
$$\tau_1 \gg mc^2$$

cioè abbiamo accelerato la particella a velocità tali che la sua energia cinetica diventa dominante rispetto a quella di riposo, il termine quadratico diventa anch'esso dominante e quindi otteniamo una scala d'energia ordini di grandezza maggiore rispetto al caso pre-relativistico.

Ecco perchè i collisori-acceleratori di particelle sono così efficienti nel ricreare energie elevate.

Caso particolare: collisione protone-protone:

Analizziamo un caso specifico di queste collisioni:



in cui, in seguito ad una collisione tra due protoni, si sono andate a creare due nuove particelle. Un nuovo protone ed un anti-protone.

Situazione proibita in regime classico (i puristi classici con il poster di Sir Isaac Newton sopra al letto strillano istericamente, fino a strapparsi le corde vocali, che la massa così non è conservata; ma Einstein, con la mascella tiratissima e quattro vergini che gli succhiano la ciola, risponde con voce altisonante che invece è possibile; *e qui c'è una gigantesca luce che acceca gli scettici causata dal fatto che il corpo angelico di Einstein brilla improvvisamente più di una supernova "l'amor che muove il sole e tutte le altre stelle" **si trasforma in un tensore doppio covariante). In relatività invece è possibile calcolare ϵ_{min} a cui questa reazione avviene nei due casi $E1$ ed $E2$. Possiamo facilmente intuire che se vogliamo l'energia *minima* posseduta dal protone, nello stato finale le particelle devono essere evidentemente ferme: tutta questa energia minima infatti contribuisce solo alla creazione materiale delle particelle e non ad una loro possibile energia cinetica successiva all'urto.



(a)

(b)

Eperimento E1: qui è semplice ricavare l'energia ϵ_1 che deve avere il protone poichè esso va ad urtare contro un altro protone immobile. Quindi esso dovrà possedere tutta l'energia finale del sistema, cioè dei quattro protoni alla stessa massa m :

$$\epsilon_1 = 4mc^2$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \epsilon_1 - mc^2 = 3mc^2$$

Eperimento E2: in questo caso invece dobbiamo, come prima, analizzare la situazione dai due sistemi di riferimento diversi.

O' vedrà i due protoni scontrarsi con energia ϵ_{min} uguale e dare origine a quattro particelle con stessa massa m ferme nello stato finale:

$$2\epsilon_{min} = 4mc^2 \Rightarrow \epsilon_{min} = 2mc^2$$

$$\tau_2 = K_2 = \epsilon_{min} - mc^2 = mc^2$$

Cioè ciascuno dei due protoni porta con sé l'energia che deve poi creare.

O' invece osserva solo uno dei due protoni muoversi con energia, calcolata prima, pari a:

$$\epsilon' = \frac{2\epsilon^2}{mc^2} - mc^2$$

$$\Rightarrow \epsilon'_{min} = \epsilon'_{min}(\epsilon_{min}) = 7mc^2$$

$$\Rightarrow \tau'_2 = K'_2 = \epsilon'_{min} - mc^2 = 6mc^2$$

Questa energia in più, rispetto al caso *E1*, deriva dal fatto che il sistema di riferimento O' , essendo in moto, vedrà muoversi le particelle dopo l'urto e quindi attribuisce maggiore energia al protone prima dell'urto stesso.

16.11 Effetto Compton ed Effetto Compton inverso

Arthur Compton eseguì il seguente esperimento: egli irradì di raggi X un materiale (grafite) fermo nel sistema di riferimento del laboratorio. Osservò poi che parte della radiazione veniva diffusa su tutto l'angolo solido, curiosamente. Egli scoprì inoltre che la lunghezza d'onda della radiazione diffusa, chiamata λ' , era maggiore rispetto alla lunghezza d'onda da lui scelta per l'irraggiamento λ . Era quindi possibile misurare una differenza tra le due e la formula risulta essere:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Dove θ è l'angolo di diffusione della radiazione. La spiegazione per questo effetto va ricercata nella teoria particellare della luce, che la vede come un fascio di corpuscoli aventi energia quantizzata:

$$E = h\nu$$

Inoltre andremo ad affrontare questo problema come un urto relativistico tra i fotoni γ e gli elettroni e^- della grafite (considerati fermi). Importante e interessante è poi andare ad affrontare l'effetto Compton inverso, fondamentale in astrofisica.

Effetto Compton

L'esercizio chiede di verificare la legge di Compton e calcolare l'energia con cui viene diffuso il fotone γ in funzione dell'angolo θ .

Risolviamo questo primo punto con l'aiuto del formalismo covariante: ci poniamo in un riferimento generico e imponiamo la conservazione del tetra impulso. In particolare, considerando un urto tra fotone ed elettrone, e chiamando k gli impulsi iniziali e p gli impulsi finali, vale:

$$k_{e^-} + k_\gamma = p_{e^-} + p_\gamma$$

Risolvendo rispetto a p_{e^-} e sviluppando il quadrato dell'impulso (inteso come norma nello spazio di Minkowsky):

$$\begin{aligned} p_{e^-}^2 &= (k_{e^-} + k_\gamma - p_\gamma)^2 \\ -mc^2 &= -mc^2 + 2k_\gamma k_{e^-} - 2k_\gamma p_\gamma - 2k_{e^-} p_\gamma \\ \Rightarrow 0 &= k_\gamma k_{e^-} - k_\gamma p_\gamma - k_{e^-} p_\gamma \end{aligned}$$

Adesso passiamo al nostro caso particolare in cui l'elettrone nello stato finale è fermo ed il fotone nello stato finale ha impulso diretto obliquo (a causa della diffusione), cioè:

$$k_{e^-} = (mc, 0, 0, 0) \quad k_\gamma = \left(\frac{E_\gamma}{c}, 0, 0, \frac{E_\gamma}{c} \right) \quad p_\gamma = \left(\frac{E'_\gamma}{c}, \frac{E'_\gamma}{c} \sin\theta, 0, \frac{E'_\gamma}{c} \cos\theta \right)$$

Dove abbiamo considerato che l'urto avviene lungo l'asse z e l'asse x è la perpendicolare nel piano. Calcolando i prodotti e risolvendo rispetto all'energia finale del fotone E'_γ si ottiene:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

E andando a sostituire $E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ otteniamo proprio la legge di Compton:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Il risultato interessante è che questo effetto risulta essere dipendente solo da un parametro che dipende dal tipo di particella con cui il fotone urta chiamata lunghezza d'onda di Compton

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

L'effetto è rilevante, osservabile, solo se $\lambda \leq \lambda_c$ e siccome λ_c è un numero in generale molto piccolo, l'effetto Compton diventa rilevante solo per onde ad alta energia (bassa lunghezza d'onda).

Effetto Compton inverso

L'effetto Compton inverso è misurabile su scale cosmologiche: infatti i fotoni che prendiamo in considerazione per questo tipo di fenomeno sono quelli della radiazione cosmica di fondo (la canna fumante del Big Bang) che urtano contro i raggi cosmici molto energetici (costituiti anche da elettroni) che viaggiano nello spazio.

L'aggettivo *inverso* per questo effetto è proprio dovuto al fatto che la situazione si è invertita: sono i fotoni ad essere poco energetici (2,7 K per la CBR) e gli elettroni dei raggi cosmici invece ad essere veloci e a collidere violentemente.

L'esercizio ci chiede di ricavare che l'energia massima si ottiene solo nel caso di una collisione

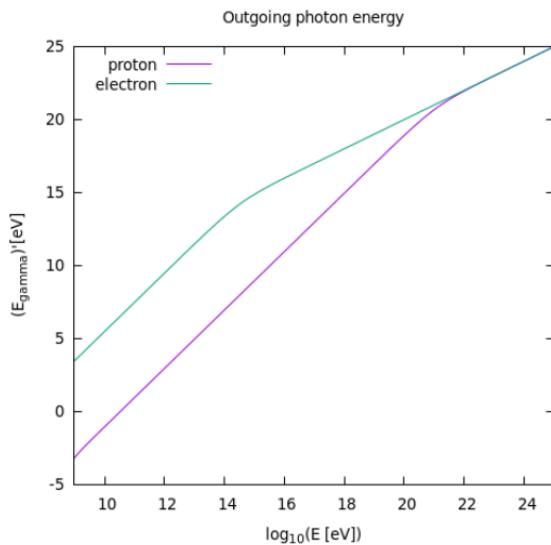


Figura 11: Energia finale del fotone, energizzato per effetto Compton inverso, di CBR in funzione dell'energia del raggio cosmico

collineare. Di nuovo questo fenomeno è esprimibile come un urto relativistico, per cui vale:

$$\Rightarrow 0 = k_\gamma k_{e^-} - k_\gamma p_\gamma - k_{e^-} p_\gamma$$

Sviluppiamo però queste quantità per il nostro specifico caso:

$$k_e = \left(\frac{E}{c}, |\mathbf{p}| \mathbf{n}_e \right) \quad k_\gamma = \left(\frac{E_\gamma}{c}, \frac{E_\gamma}{c} \mathbf{n}_\gamma \right) \quad p_\gamma = \left(\frac{E'_\gamma}{c}, \frac{E'_\gamma}{c} \mathbf{n}'_\gamma \right)$$

Dove abbiamo utilizzato i versori \mathbf{n} per indicare la direzione di propagazione delle particelle coinvolte. Sostituendo e risolvendo per E'_γ otteniamo:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E - c|\mathbf{p}|(\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\gamma))}{E_\gamma + E + (E_\gamma - c|\mathbf{p}|) \cos \theta}$$

Dobbiamo ora massimizzare quest'espressione ricordando che $E > pc \gg E_\gamma$, le ipotesi del nostro esercizio.

Il numeratore massimo si ha solo se $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\gamma = -1$, cioè se la collisione è *head-on*, un frontale. Sostituendo poi la conseguente relazione $\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{n}_e$ si ottiene:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + c|\mathbf{p}|)}{E_\gamma + E + (E_\gamma - c|\mathbf{p}|) \cos \theta}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}'_\gamma = \cos \theta$. Siccome vogliamo massimizzare l'espressione, dobbiamo minimizzare il denominatore e quindi far sì che il $\cos \theta = 1$ cioè il fotone emesso nello stato finale viaggia nella stessa direzione della particella ad alta energia. Cioè:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + c|\mathbf{p}|)}{2E_\gamma + E - c|\mathbf{p}|}$$

che è la formula cercata di energia massima, che corrisponde ad un urto collineare ed all'emissione del fotone finale nella stessa direzione del raggio cosmico.

Nel limite di particelle incidenti relativistiche è possibile sviluppare il termine $c|\mathbf{p}|$ in E , cioè:

$$c|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - c^2 c^4} \approx E - \frac{m^2 c^4}{2E^2} + o\left(\left(\frac{mc^2}{E}\right)^4\right)$$

e sostituendo si ottiene:

$$E'_\gamma(E, E_\gamma) \approx \frac{E\left(1 - \frac{m^2 c^4}{4E^2}\right)}{1 + \left(\frac{m^2 c^4}{4E_\gamma E}\right)}$$

Cioè questo tipo di processo è molto efficace nel trasferire energia ed impulso a fotoni della radiazione cosmica di fondo. Nella figura sono rappresentate le curve relative al caso di un protone ed un elettrone ultrarelativistici che interagiscono con un fotone della radiazione cosmica di fondo. Si nota il cambio pendenza (energia del fotone che cresce di meno) in prossimità del limite

$$\frac{m^2 c^4}{4E_\gamma E} \approx 1$$

16.12 Aberrazione relativistica

Consideriamo una sorgente di radiazione che emette luce in modo isotropo nel suo sistema di riferimento in quiete. Per svolgere i calcoli con la luce emessa si considerino 12 raggi tali che sono tutti contenuti nel piano xy e formano con l'asse x angoli θ_i tali che

$$\theta_i = (i - 1) \frac{\pi}{6} \quad i = 1, \dots, 12$$

Richiesta: si calcoli come appaiono i raggi per un osservatore O' in modo a velocità V lungo l'asse x .

Per ottenere questo risultato consideriamo uno dei 12 raggi di luce nel piano di emissione: è sempre possibile scomporre la sua velocità di propagazione v in una componente parallela e in una trasversale ad x :

$$\begin{cases} v_{||} = v \cos \theta_i \\ v_{\perp} = v \sin \theta_i \end{cases}$$

Risulta banale definire l'angolo θ_i attraverso $\theta_i = \arctan\left(\frac{v_{\perp}}{v_{||}}\right)$. Consideriamo poi lo stesso vettore velocità visto da O' che si muove di moto relativo lungo x con velocità $\vec{V} = V\hat{x}$. Per la legge relativistica di trasformazione delle velocità si ha che

$$\begin{cases} v'_{||} = \frac{v_{||} - V}{1 - \frac{Vv_{||}}{c^2}} \\ v'_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\gamma_V \left(1 - \frac{Vv_{||}}{c^2}\right)} \end{cases}$$

da cui la direzione osservata dal sistema di riferimento in moto, attraverso la tangente, cioè:

$$\tan \theta'_i = \frac{v'_{\perp}}{v'_{||}} = \frac{v \sin \theta_i}{\gamma_V (v \cos \theta_i - V)}$$

Questa espressione generale per la direzione di propagazione di un entità fisica può essere specializzata al caso di radiazione luminosa cioè al caso $v = c$:

$$\tan \theta'_i = \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i + \beta} \sqrt{1 - \beta^2}$$

dove $\beta = \frac{|V|}{c}$ al solito. Da questa espressione ricaviamo importanti risultati:

- i raggi a $\theta_i = \{0, \pi\}$ rimangono invariati poichè la loro tangente è nulla;
- per un raggio generico, all'aumentare dell'angolo e in corrispondenza di un fattore β non trascurabile il numeratore dell'espressione per $\tan \theta'_i$ si fa minore del numeratore dell'espressione per $\tan \theta_i$, inoltre il denominatore presenta il comportamento opposto: da ciò intuiamo che il fascio luminoso come osservato da O' non è più isotropo!

Per capirlo analizziamo casi particolari di β a cui diamo valori arbitrari: 0.1, 0.5, 0.9, 0.99. I calcoli per gli angoli a questi valori del fattore β sono presentati visivamente nella figura sotto dove è possibile notare la conferma di ciò che avevamo intuito sul fascio luminoso: l'isotropia diventa relativa.

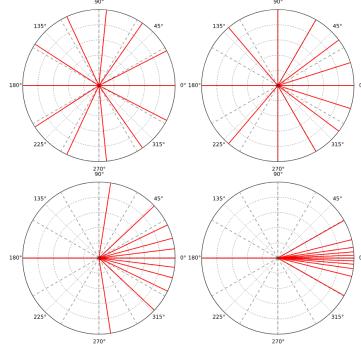


Figura 12: Direzione dei raggi di luce considerati

16.13 Formula di Larmor relativistica

Precedentemente in questo documento abbiamo già trattato la questione dell'emissione di radiazione da parte di una particella carica elettricamente ed in moto nel capitolo di elettrodinamica. Essa è diventata fondamentale poi in fisica dei quanti per la formulazione di un modello atomico. Tuttavia, ci siamo serviti della descrizione di questo fenomeno in regime non relativistico: stiamo parlando della formula di Larmor

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

che ora vogliamo generalizzare per includerla anche in relatività. Stiamo cercando di verificare la seguente legge, la formula di Larmor relativistica:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m^2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

tale che

- si trasformi come uno scalare;
- espressa in formalismo tridimensionale dipenda solo da \mathbf{v} ed \mathbf{a} ;
- fornisca la formula di Larmor in regime non relativistico nel limite classico $v \ll c$.

Per iniziare consideriamo il problema, che vogliamo affrontare relativisticamente, attraverso il formalismo covariante. Anche così però il rapporto tra l'energia ed il tempo (cioè una potenza) è uno scalare poiché sono entrambi componenti 0 di vettori controvarianti. Quindi è intuitivo che, come vuole il primo punto, trasformi come uno scalare. Siccome poi nella formula di Larmor classica compare l'accelerazione possiamo estenderla in relatività con la generalizzazione covariante

$$a = \frac{1}{m} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

da cui quindi la legge di Larmor relativistica

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m^2} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

Andiamo ora a verificare che nel limite di basse velocità questa generalizzazione restituisce la formula classica.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{dE}{d\tau} \frac{dE}{d\tau} + \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$$

E ora sfruttiamo i seguenti risultati

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \gamma \frac{d}{dt} & \frac{dE}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \\ \Rightarrow \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \gamma^2 \left(- \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \end{aligned}$$

da cui possiamo facilmente notare che nel limite $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ otteniamo

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \approx \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

espressione cercata. Se invece all'espressione di prima, invece di applicare il limite classico, sostituiamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma(\mathbf{a} + \gamma^2(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\beta})$$

ed eseguendo i quadrati otteniamo:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c m^2} m^2 \gamma^2 \left(a^2 + 2\gamma^2(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \gamma^4 \beta^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \gamma^4 \right)$$

mettendo in evidenza il prodotto scalare $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2$ e sfruttando l'identità $1 - \beta^2 = \gamma^{-2}$ si ottiene:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c} \gamma^2 \left(a^2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (2\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2 - \gamma^4) \right)$$

risolvendo la parentesi dei fattori γ e β raccogliendo il γ^4 e usando l'identità di prima otteniamo:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} (a^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})^2)$$

usando poi la relazione notevole

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})^2 &= a^2 \beta^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2 \\ \Rightarrow P &= \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} (a^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2) \end{aligned}$$

che è la generalizzazione di Lienard alla formula di Larmor per velocità relativistiche.

Nel caso di una particella che si muove di moto circolare uniforme, $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ e la potenza irradiata in regime relativistico è amplificata dal fattore γ^4 rispetto al caso classico. Mentre invece nel caso in cui la particella acceleri o decelleri di moto lineare, $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta} = 0$, la potenza irradiata arriva ad essere amplificata di un fattore γ^6 , cosa che fra tante altre giustifica la scelta degli acceleratori *circolari* di particelle rispetto a quelli lineari.

16.14 Campo elettromagnetico generato da una carica in moto

Si consideri una carica puntiforme q che si muove di moto rettilineo uniforme a velocità v nella direzione positiva dell'asse x . Lo scopo dell'esercizio è ricavare il campo elettromagnetico da considerazioni relativistiche, quindi rispetto ad un osservatore in quiete O ed a uno solidale con la carica O' . In particolare vogliamo dimostrare la formula:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

dove \mathbf{r} è il vettore che istantaneamente connette la posizione della carica e il punto \mathbf{x} dove il campo è valutato, mentre con θ indichiamo l'angolo che \mathbf{r} forma con l'asse x .

Il campo elettrico in O' è banale perché è il caso elettrostatico dal momento che esso si trova in quiete rispetto alla carica:

$$\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}'$$

dove con \mathbf{r}' indichiamo il vettore posizione di valutazione del campo nel riferimento O' , cioè $\mathbf{r}' = \mathbf{x}'$. Esprimendo in componenti:

$$\begin{cases} E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{cases}$$

per trovare il campo elettrico in O bisogna naturalmente applicare le formule attraverso le quali esso trasforma in elettrodinamica relativistica. Quindi

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma_v E'_y \\ E_z = \gamma_v E'_z \end{cases}$$

Ma in queste espressioni i campi di O sono ancora espressi nelle coordinate x'^μ poichè anche esse devono essere coerentemente trasformate con le TL per un boost lungo x . Cioè:

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v(x-vt)}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_y(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v y}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_z(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v z}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Inoltre, in O , ad ogni istante di tempo è possibile definire il vettore \mathbf{r} che indica la posizione di un qualsiasi punto dello spazio (di coordinata \mathbf{x}) rispetto alla posizione della carica in moto \mathbf{r}_q :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{r}_q$$

cioè

$$\begin{cases} r_x = x - vt \\ r_y = y \\ r_z = z \end{cases}$$

quindi i campi diventano:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_x}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_y}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \\ E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_z}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

per ottenere la relazione cercata il vettore \mathbf{r} deve essere espresso in coordinate sferiche (r, ϕ, θ) :

$$\begin{cases} r_x = r \cos \theta \\ r_y = r \sin \theta \cos \phi \\ r_z = r \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

così che

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_x}{(\gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_y}{(\gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_z}{(\gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{cases}$$

volendo esprimere non in componenti, ma come un vettore, il campo elettrico diventa finalmente:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v \mathbf{r}}{(\gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

da cui arriviamo alla formula cercata, dopo aver risolto alcuni passaggi con il fattore γ :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

A questo punto è bene notare che per il campo magnetico il calcolo va svolto solo per l'osservatore O , per il quale la carica è effettivamente in moto. Nell'ipotesi che esista un riferimento dove il campo magnetico è nullo possiamo usare la relazione che lega i due campi in un sistema sotto boost di Lorenz:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

siccome $\mathbf{v} = -v\hat{x}$, otteniamo:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{x} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

sfruttando di nuovo le coordinate sferiche è possibile sviluppare $\hat{x} \times \mathbf{r} = r \sin \theta (\cos \phi \hat{z} - \sin \phi \hat{y})$, dove la parentesi corrisponde proprio al versore azimutale (come era facile aspettarsi dal campo magnetico) $\hat{\phi}$. Cioè

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{\phi}}{r^3}$$

Avendo le formule a disposizione possiamo fare i seguenti commenti: per quanto riguarda il campo \mathbf{E} si ha il risultato che indipendentemente dall'osservatore esso resta radiale, ciò che cambia da un sistema di riferimento all'altro è l'isotropia delle linee di campo. Infatti rispetto ad O ed all'aumentare di v l'intensità del campo decresce notevolmente nella direzione x del moto mentre aumenta nel piano trasversale alla direzione del moto, cioè le linee di campo si addensano sopra e sotto la carica.

16.15 Effetto Doppler relativistico

L'effetto Doppler descrive una modifica in frequenza di un'onda causata dal moto relativo tra la sorgente e l'osservatore. Nel limite di velocità molto inferiori a quelle della luce esso è rappresentato dalla formula

$$\nu_{oss} = \frac{\nu_{sorg}}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}$$

dove ν_{oss} è la frequenza osservata, ν_{sorg} è quella emessa (oppure quella rilevata da un osservatore solidale alla sorgente), v la velocità della sorgente e θ angolo tra \mathbf{v} ed il vettore unitario che unisce la sorgente all'osservatore ed è proprio θ a definire se il denominatore è maggiore o minore di 1. Infatti se trattiamo un moto di avvicinamento della sorgente (consideriamolo collineare con l'osservatore) $\Rightarrow \cos \theta = 1$

$$\Rightarrow \nu_{oss} = \frac{\nu_{sorg}}{(1 - \frac{v}{c})} > \nu_{sorg}$$

mentre se è di allontanamento $\cos \theta = -1$

$$\Rightarrow \nu_{oss} = \frac{\nu_{sorg}}{(1 + \frac{v}{c})} < \nu_{sorg}$$

Vogliamo studiare eventuali variazioni a queste leggi in regime relativistico, cioè l'onda che subisce effetto Doppler è la luce.

Consideriamo O inerziale, S sorgente di un'onda luminosa in moto rispetto ad O con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{n}_s$ le cui onde emesse possiedono ν_{sorg} e sia $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_\gamma$ il vettore d'onda della radiazione rilevata da O . Si dimostri la formula dell'effetto Doppler relativistico:

$$\nu_{oss} = \frac{\nu_{sorg}}{\gamma(1 - \beta \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_\gamma)}$$

dove β al solito è il fattore relativo alle velocità.

Risoluzione: considerazioni relativistiche

L'onda emessa dalla sorgente S è un fenomeno periodico, di fatto esprimibile come il rapporto tra un numero di cicli N e il tempo impiegato per compierli $\Delta t_{sorg} = \Delta\tau$ (tempo proprio) nel sistema solidale con S .

$$\nu_{sorg} = \frac{N}{\Delta\tau}$$

Dobbiamo ora chiederci, sapendo che N è un'invariante, che tempo Δt_{oss} osserva invece l'osservatore O cioè il tempo da quando l'osservatore riceve il primo fronte d'onda fino a quando esso riceve l'ultimo (N -esimo) fronte d'onda emesso. Per cominciare definiamo la quantità Δt come tempo coordinato corrispondente a $\Delta\tau$ cioè il tempo improprio di emissione

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

Questo non è Δt_{oss} però! Si tratta semplicemente del tempo relativisticamente dilatato di emissione di tutti gli N fronti d'onda. Mentre è Δt_{oss} il tempo che ci interessa: cioè l'intervallo misurato dal cronometro di O da quando egli inizia a ricevere l'onda fino a quando non la riceve più.

Consideriamo poi che quando il primo ciclo è emesso, la sorgente si trova ad una certa distanza x_i da O mentre quando l'emissione degli N cicli è completata la sorgente si è mossata fino a $x_f = x_i + v\Delta t$. Quindi la parte finale della radiazione emessa impiega più tempo a raggiungere O perché deve percorrere un tratto aggiuntivo pari a $v\Delta t$. Quindi, siccome la radiazione si propaga a velocità c :

$$\Delta t_{oss} = \Delta t + \frac{v\Delta t}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{oss} = \gamma \Delta \tau \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

quindi, ricordando che $\nu_{oss} = \frac{N}{\Delta t_{oss}}$ otteniamo

$$\nu_{oss} = \frac{1}{\gamma} \frac{N}{\Delta \tau} \frac{1}{1 + \beta}$$

inoltre, siccome $\nu_{sorg} = \frac{N}{\Delta \tau}$

$$\Rightarrow \nu_{oss} = \frac{\nu_{sorg}}{\gamma(1 + \beta)}$$

Generalizzando quest'espressione per un moto relativo tra sorgente ed osservatore generico:

$$\nu_{oss} = \nu_{sorg} \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

cioè la frequenza rilevata dall'osservatore è minore quando la sorgente si allontana ($\cos \theta = -1$) ed è shiftata tanto più quanto il fattore β è grande mentre la frequenza è maggiore quando la sorgente si avvicina ($\cos \theta = 1$) e ovviamente l'effetto è maggiore più è grande il fattore β .

Nota: per ricordarsi questo effetto considerare il redshift gravitazionale. Le galassie osservate shiftano verso il rosso (frequenza minore) perchè si allontanano, moto di generale espansione dell'Universo.

17 APPROFONDIMENTI

17.1 Tensore energia-impulso: degli sforzi

Questo capitolo è dedicato agli approfondimenti legati al corso di Fisica Generale 3, in particolare alla dimostrazione efficace e rigorosa di risultati che sono stati ottenuti in modo sommario nelle tre parti del corso stesso. Ci concentreremo in particolare sulla teoria dei campi espressa tramite il formalismo covariante.

In questo capitoletto dimostreremo l'espressione del tensore degli sforzi dell'elettrodinamica e ne evidenzieremo in modo chiaro il significato. Sarebbe opportuno per comprendere i seguenti approfondimenti possedere una discreta conoscenza di algebra tensoriale e del formalismo covariante presentato nel capitolo di relatività.

Partiamo da una considerazione generale sullo stato di un sistema generico. Possiamo sempre definire l'integrale d'azione come

$$S = \int \Lambda(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega$$

cioè abbiamo definito l'azione del sistema attraverso una quantità Λ che ne esprime le proprietà in funzione delle grandezze q e delle loro derivate rispetto alle coordinate. La costante c al denominatore compare perchè la coordinata temporale racchiusa nel $d\Omega$ è relativistica. Per il campo elettromagnetico le grandezze q risultano essere le componenti del potenziale vettore! Λ nel caso elettromagnetico rappresenta quindi una densità, poichè viene integrata nel volume ed in particolare, ricordando che

$$S = \int L dt$$

l'azione è in generale l'integrale nel tempo della lagrangiana, la quantità $\int \Lambda dV$ rappresenta la "lagrangiana" del sistema elettromagnetico, di fatto un'energia. Le equazioni del moto, o del campo, si ottengono dal principio di minima azione (più su questo nel latex di meccanica analitica), cioè facendo variare l'azione e ponendola uguale a zero

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \delta \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) d\Omega = 0$$

di fatto "variare" qualcosa è un metodo del calcolo delle variazioni che, se non si ha tempo e voglia di approfondire, può essere pensato come il prendere le quantità che compongono un oggetto (come le coordinate q e le loro derivate per Λ nel nostro caso) e farle "variare" infinitesimalmente $q \rightarrow \delta q$, in questo processo si deve tenere conto della dipendenza dell'oggetto originario Λ da queste quantità variate ed ecco il perchè delle derivate parziali.

$$\Rightarrow \delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \right) d\Omega = 0$$

dove abbiamo estratto dalla variazione δ la derivata parziale delle q , l'unico termine scomodo. Da qui si procede a considerare che il secondo termine scritto si annulla quando l'integrazione è estesa a tutto lo spazio. Sul secondo termine, infatti, per la presenza delle derivate $\frac{\partial}{\partial x^i}$ che costituiscono la divergenza, è possibile applicare il teorema di Gauss integrando su una superficie il cui raggio

è possibile estendere all'infinito. Si arriva quindi, raccogliendo le δq e notando che l'integrale si annulla solo se l'integrandona stessa è nulla, alle seguenti equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0$$

Siccome ci siamo rotti di scrivere quelle derivate parziali di frazioni di derivate parziali, definiamo

$$\frac{\partial q}{\partial x^i} = \dot{q}^i$$

anche se questa notazione non deve essere confusa con quella di meccanica analitica, è solo una scrittura comoda. A questo punto notiamo che la derivata di un oggetto come Λ rispetto alle coordinate risulta chiaramente

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial x^i}$$

vediamo che il primo termine può completamente essere riscritto alla luce delle equazioni ricavate attraverso il principio di minima azione e considerando la notazione scritta sopra

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial x^i}$$

Notando che gli indici i e k sono interscambiabili questa espressione diventa una semplice derivata secondo Leibnitz

$$\delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\dot{q}^i \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} \right)$$

dove abbiamo anche inserito la delta di Kronecker al primo membro per cambiare l'indice della derivata volendolo rispetto a k , ma non cambia niente. Così però si vede che tutta l'espressione può diventare

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\dot{q}^i \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} - \delta_i^k \Lambda \right) = 0$$

e l'espressione tra parentesi la definiamo come un tensore T_i^k tale che quindi

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$$

L'annullarsi della divergenza quadridimensionale di un tensore significa che il suo integrale su un iper-superficie (il flusso) si conserva, cioè il vettore

$$P^i = k \int T^{ik} dS_k$$

si conserva, esso è il quadri impulso del sistema. In questo senso, il tensore T^{ik} può essere associato al tensore *energia-impulso*. In particolare

$$P^0 = k \int T^{0i} dS_i = k \int T^{00} dV \quad \text{dove} \quad T^{00} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda$$

in cui in questo caso $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$ corrisponde, secondo la formula classica che lega la lagrangiana all'energia, ad una densità di energia e di conseguenza

$$\int T^{00} dV$$

è l'energia totale del sistema. La costante k risulta essere quindi $\frac{1}{c}$ così da ottenere un tensore coerente con l'elettrodinamica relativistica.

Siamo arrivati a questo tensore, importante è ora capire cosa significano le sue componenti. Abbiamo infatti compreso che T^{00} è la densità di energia di un sistema, quella che in elettrodinamica abbiamo chiamato u ! Per le altre componenti?

Riscriviamo la relazione

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$$

attraverso le coordinate $t, \alpha = (x, y, z)$ cioè

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}$$

integrando questa espressione nello spazio ed usando il teorema di Gauss per il secondo membro otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV = -c \int T^{0\alpha} df_\alpha$$

dove l'integrale al secondo membro è esteso alla superficie che limita il volume V (df_α infatti sono le componenti del vettore dell'elemento di superficie). Il primo membro contiene la velocità di variazione dell'energia contenuto del volume, ne risulta quindi che l'espressione al secondo membro è la quantità di energia che attraversa la superficie delimitante questo volume e che il vettore S di componenti $cT^{0\alpha}$ è la densità di questo flusso, cioè la quantità di energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Possiamo poi sviluppare una seconda equazione a partire dalle derivate del tensore

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

dalla quale si ottiene analogamente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = - \int T^{\alpha\beta} df_\beta$$

dove a primo membro abbiamo la variazione nell'unità di tempo dell'impulso del sistema nel volume V quindi a secondo membro compare la *quantità* di impulso uscente nell'unità di tempo da questo volume. Ricordando che $\alpha, \beta = x, y, z$ $T^{\alpha\beta}$ costituisce un tensore 3×3 della densità di flusso d'impulso detto **tensori degli sforzi**. Ecco da dove arriva veramente il tensore dei primi capitoli di elettrodinamica. Quindi il tensore energia-impulso è fatto così

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} u & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

dove il primo termine indica la densità di energia, i termini misti nel tempo e nelle coordinate formano le componenti di un vettore: la densità di flusso di energia (cioè la quantità di energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo). Le componenti spaziali miste del tensore energia-impulso formano il tensore degli sforzi $\sigma_{\alpha\beta}$ che indica la densità di flusso d'impulso (cioè la componente σ_{xy} per esempio è la grandezza della x -esima componente dell'impulso passante nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie perpendicolare all'asse y). Nell'ultimo approfondimento verrà dimostrato il tensore energia impulso nel caso elettromagnetico.

Così va inteso il tensore energia-impulso e quindi il tensore degli sforzi.

17.2 Meccanica relativistica

In questa sezione degli approfondimenti presentiamo un modo per intendere e dimostrare le formule della meccanica relativistica partendo dall'ipotesi che siano note le leggi relativistiche di base (intervallo spazio temporale, trasformazioni di Lorentz) e che siano ormai cristallini i concetti di meccanica analitica che riguardano l'azione di un sistema fisico.

In particolare consideriamo l'azione per una particella libera in relatività:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

dove α è una costante e ds è il nostro caro intervallo spazio-temporale integrato tra due punti di una linea d'Universo a e b . Per il principio di minima azione quest'integrale ha un minimo nell'intervallo considerato. Come siamo arrivati a questa definizione di azione: si può pensare che l'integrale deve contenere per forza uno scalare, così da non dipendere dal sistema di riferimento (Lorentz-invariante) scelto, quindi è naturale porre l'intervallo spazio-temporale definito come:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

all'interno del segno di integrazione. Procedo con una serie di calcoli:

$$\frac{ds}{c} = \sqrt{dt^2 + \frac{-dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}$$

ma così ho ottenuto la velocità dell'oggetto considerato dentro la radice:

$$\frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Quindi sostituendo per integrare nel tempo:

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma}$$

notiamo che abbiamo trovato quindi una formula per la Lagrangiana relativistica :sviluppando in serie

$$L = -\alpha c \frac{1}{\gamma} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

che nel limite classico $c \rightarrow \infty$ deve ridare la lagrangiana classica $L = \frac{1}{2}mv^2$ quindi troviamo, omettendo il termine costante che tanto non intervengono nelle equazioni del moto, per la costante:

$$\begin{aligned} \alpha &= mc \\ \Rightarrow S &= -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} d\tau \end{aligned}$$

La lagrangiana diventa quindi

$$L = -mc^2 \frac{1}{\gamma}$$

Partiamo da qui per descrivere le stesse equazioni trovate prima, infatti secondo la teoria meccanica l'impulso di una particella \mathbf{p} è definito come

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m \mathbf{v}$$

mentre l'energia è data da

$$E = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \gamma mc^2$$

le dimostrazioni sono banali. Se la velocità è nulla $v \rightarrow 0$ si nota che otteniamo un termine di energia a riposo $E_0 = mc^2$ ed espandendo l'energia con taylor rispetto alla velocità considerando il limite $v \ll c$ si ottiene

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

con le considerazioni già portate nei capitoli scorsi sull'analogia classica con il termine aggiuntivo dell'energia a riposo $E_0 = mc^2$. Inoltre elevando al quadrato l'espressione per \mathbf{p} e quella per E otteniamo la relazione nota

$$\frac{E^2}{c^2} = mc^2 + |\mathbf{p}|^2$$

da cui l'hamiltoniana del sistema

$$H = c\sqrt{mc^2 + |\mathbf{p}|^2}$$

per ottenere le espressioni del formalismo covariante invece si deve far variare l'azione come prescrive il principio di minima azione:

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds = 0$$

possiamo però scrivere $ds^2 = dx^i dx_i$ attraverso la norma definita con le componenti co/contravarianti. E quindi l'integrale

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b \frac{dx_i dx^i}{ds} = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{cd\tau}$$

secondo la relazione $ds = c d\tau \frac{1}{\gamma} = c d\tau$. Quindi sostituendo la quadri velocità $\frac{dx_i}{d\tau} = u_i = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ otteniamo

$$\delta S = -m \delta \int_a^b u_i \delta dx^i$$

integrando per parti otteniamo un integrale che è nullo perchè è integrato rispetto a δdx^i , il secondo termine invece risulta

$$\delta S = -m \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds$$

cioè dal principio di minima azione ricaviamo che

$$\delta S = -mu_i \delta x^i$$

dove con la scrittura δx^i abbiamo indentificato la stessa quantità calcola tra gli estremi a e b come prescrive l'integrale sopra.

Secondo considerazioni meccaniche arriviamo alle componenti quadridimensionali tramite

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

dove $\partial S = -mu_i \partial x^i$, quindi si dimostra banalmente che le componenti del quadri impulso p_i sono semplicemente quelle della quadrivelocità u_i moltiplicate per la massa:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = mu_i \Rightarrow p_i = (\gamma mc, \gamma mv_i)$$

dove $p_0 = \frac{E}{c}$ come è noto. Questo dimostra le formule relativistiche partendo da considerazioni di meccanica precedenti.

17.3 Teoria dei campi elettromagnetici

In questo capitoletto si tratta la teoria dei campi (solo elettromagnetici, non gravitazionali) compatibile con le leggi della relatività speciale, dimostreremo il tensore elettromagnetico che nei capitoli precedenti abbiamo definito senza darne un'origine precisa in un modo che sarà apprezzabile da chi ha afferrato profondamente i concetti di meccanica e dinamica relativistica. Questo approfondimento va letto SOLO se si ha una base solida di relatività speciale ed elettrodinamica relativistica. (in realtà andremo ad introdurre tutto ciò che riguarda i campi in RS da zero, ma è meglio partire da una conoscenza del formalismo covariante per seguire la strada intrapresa da Landau)

Sappiamo da considerazioni di meccanica che l'azione per una particella qualsiasi, considerata puntiforme in teoria dei campi classica, è:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

dove L rappresenta la lagrangiana del sistema. In relatività, tuttavia, l'azione è scrivibile anche in termini di intervallo spazio-temporale infatti:

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma}$$

Questa espressione è stata dimostrata nel capitoletto precedente e vale per una particella *libera*, non sottoposta a nessun potenziale. Ora passiamo al caso che ci interessa: la particella di cui vogliamo studiare l'azione è carica ed immersa in un campo elettromagnetico. L'azione S avrà due termini: quello che abbiamo appena ricavato considerandola "libera" (in assenza di forze) e un termine che descrive l'interazione particella-campo.

Questo secondo termine risulta interamente ricavabile da una quantità che descrive la particella (la sua carica e) ed una quantità che descrive il campo (il quadri-potenziale A_i):

$$-\frac{e}{c} \int_a^b A_i \, dx^i$$

dove le funzioni A_i sono prese lungo la linea di universo che descrive la particella (dx^i). La costante c al denominatore è stata introdotta per comodità, siccome possiamo scegliere arbitrariamente l'unità di misura della carica.

Riassumendo:

$$S = \int_a^b \left(-mc \, ds - \frac{e}{c} A_i \, dx^i \right)$$

il quadri-potenziale è definito come un vettore tale che:

$$A^i = (A_0, \vec{A})$$

dove le tre componenti spaziali di questo vettore compongono quello che in elettrodinamica classica abbiamo chiamato il *potenziale vettore* $\vec{A} = \mathbf{A}$ mentre identifichiamo A_0 con il *potenziale scalare* solito V che in questa sezione chiamerò φ al modo di Landau, anche più figo a mio avviso.

$$\Rightarrow A^i = (\varphi, \mathbf{A})$$

Quindi l'integrale dell'azione può essere riscritto:

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} - e\varphi dt \right)$$

Volendo esprimere tutto in funzione del tempo, introduciamo la velocità $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ della particella e raccogliamo il differenziale del tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \right) dt$$

Così che abbiamo ottenuto l'espressione per la Lagrangiana della particella immersa in un campo elettromagnetico:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$$

Da qui possiamo semplicemente usare le equazioni di Lagrange per ottenere l'equazione del moto. Ricordando che la derivata della "coordinata lagrangiana" r è la velocità \mathbf{v} otteniamo che l'equazione del moto è data da:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) L = 0$$

dove

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{P}$$

è l'impulso generalizzato della particella, per definizione.

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

dove abbiamo chiamato \mathbf{p} l'impulso relativistico che conosciamo già. Questa espressione va naturalmente derivata nel tempo. Così si ottiene il termine $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ facilmente, invece il differenziale totale di A nel tempo è composto da due parti:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}$$

poichè dobbiamo considerare anche la dipendenza delle coordinate spaziali dal tempo (di fatto la velocità). Per il secondo termine delle equazioni di Lagrange vale poi:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = \frac{e}{c} \nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) - e\nabla\varphi$$

Dove usiamo la nota formula dell'analisi vettoriale per trasformare il gradiente di un prodotto scalare:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\varphi$$

Credo che dovrebbe esserci un prodotto vettoriale tra \mathbf{v} ed il rotore di \mathbf{A} nella precedente relazione ma non riesco a capire dal libro di Landau da dove viene fuori Riassumendo l'equazione del moto risulta infine:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{A})$$

Se raccolgo il termine $\frac{e}{c}$ da tutti i termini ottengo una corrispondenza con la forza di Lorentz! Landau riesce con semplicità a ricavare le equazioni per il campo elettrico e magnetico da queste semplici considerazioni relativistiche:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - c\nabla\varphi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Da qui cioè otteniamo le solite espressioni dei campi in funzione dei potenziali da una premessa relativistica/meccanica.

Lo scopo di questo capitulo però è arrivare alle conclusioni dell'elettrodinamica relativistica, compreso il tensore elettromagnetico, attraverso il solo formalismo covariante, cioè riprendiamo l'azione definita prima:

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

e facciamola variare, come prescrive il principio di minima azione:

$$\delta S = - \int \left(mc \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0$$

dove è stato sfruttato il fatto che in termini covarianti $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ e ora usiamo il fatto che $\frac{dx_i}{ds} = u_i$ quadri-velocità per integrare quest'espressione:

$$\int \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) - \left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i = 0$$

il secondo termine è nullo, perchè l'integrale varia agli estremi per valori dati delle coordinate. Invece:

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, & dA_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \\ \Rightarrow \int \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo poi raccogliere il fattore $\delta x^i ds$ a patto di cambiare gli indici di sommatoria e sostituire nel primo termine $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$ mentre nel secondo e terzo $dx^i = u^i ds$:

$$\Rightarrow \int \left(mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right) \delta x^i ds = 0$$

Essendo le coordinate arbitrarie l'unica è che si annulli l'integranda:

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k = 0$$

Ora possiamo definire il *tenso elettromagnetico* F_{ik} come l'espressione tra parentesi:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

antisimmetrico e l'equazione del moto in forma quadridimensionale diventa:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$$

Le componenti del tensore sono facilmente ottenibili sostituendo al quadri-vettore potenziale le sue componenti:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Il tensore elettromagnetico descrive univocamente la situazione fisica legata ai campi **E** e **B** e quindi al quadri-potenziale **A**. Inoltre esso è la migliore descrizione di questi fenomeni in relatività speciale, poiché è un oggetto che trasforma coerentemente con le trasformazioni di Lorentz.

Volendo infine esprimere il tensore energia-impulso dimostrato nell'approfondimento 17.1 nel caso elettromagnetico basta considerare che

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kq} F^{kq}$$

e le grandezze q che sono presenti nella definizione del tensore energia impulso T sono date dal potenziale vettore A . Quindi

$$T_i^k = \frac{\partial A_q}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_q / \partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda$$

dai calcoli risulta

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{iq} F_q^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{qm} F^{qm} \right)$$

esprimendo le componenti di F tramite i vettori campo elettrico e magnetico otteniamo, considerando il tensore 17.1, che effettivamente u corrisponde con la densità di energia, le componenti miste temporali e spaziali sono identificabili come il vettore di Poynting mentre per $\sigma_{\alpha\beta}$ si ottiene la seguente relazione

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(-E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta (E^2 + B^2) \right)$$

che combacia con la definizione data nei capitoli di elettrodinamica di tensore degli sforzi elettromagnetico.