2.6.2) Verkorte methode benadering nulwaarden

*De Newton-Raphsonmethode om nulwaarden te benaderen kan soms best wel hard zijn. Maar gelukkig zijn ook slimme mensen lui. Slimme mensen hebben shortcuts gevonden om de methode van Newton-Raphson te verkorten. Het nadeel is wel dat je dan één formule vanbuiten moet leren.

→ $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f\prime(a_1)}$

➔ Deze formule wordt duidelijk in de voorbeeldopgave.

Voorbeeld: Bepaal tot 4 decimalen nauwkeurig de wortels van de vergelijking $x^3 - 2x - 5 = 0$.

--> STAP 1: Bepaal tussen welke twee punten de nulwaarde ligt m.b.v. de stelling van Bolzano.

--> Je doet dit het best door een functiewaardetabel te maken, ga je dit uit jouw hoofd doen? Neen, want wij zijn lui. Wij hebben gelukkig een handige shortcut om via ons rekenmachine een functiewaardetabel te maken.

--> Stappenplan functiewaardetabel maken m.b.v. ICT (casio fx-92/fx-92B/fx-92B 2D)

(1) Druk op [ON] om je rekenmachine aan te zetten

(2) Druk op [MODE] op je rekenmachine (naast de [ON]-knop)

(3) Druk op [4] op je rekenmachine, hierbij staat normaal (TABLE)

(4) Je rekenmachine zegt nu: f(X) = _

(5) Vul je vergelijking/functie in, in dit geval: f(X) = $\boldsymbol{x^3 - 2x - 5 = 0}$

(6) Druk op [EXE] (helemaal rechtsonder, zoals normaal)

(7) Je rekenmachine zegt nu: Start?

--> Je rekenmachine wil weten vanaf welk argument (x-waarde) je de functiewaardetabel wil starten. Kies het interval groot genoeg, je rekenmachine kan maximum een functiewaardetabel van 29 x-waarden/getallen maken.

(8) Typ je startwaarde in. Ik kies -15.

(9) Druk op [EXE]

(10) Je rekenmachine vraagt nu: End?

--> Je rekenmachine wil weten waar de functiewaardetabel geëindigd moet worden.

(11) Typ het getal naar jouw keuze in, ik kies 14.

(12) Je rekenmachine vraagt nu: Step?

--> Je rekenmachine wilt weten hoeveel x-waarde hij omhoog moet gaan, laat dit op 1 staan.

(13) Druk op [EXE]

(14) Veel plezier met je functiewaardetabel!

--> STAP 2: Zoek de overgang van – naar + of vice versa in je functiewaardetabel. De stelling van Bolzano zegt dat je nulwaarde tussen een negatieve beeld (y-waarde) zit en een positieve.

--> We scrollen op onze rekenmachine en zien:

x = 3 --> y = 16

x = 2 --> y = -1

--> Hiertussen zit onze nulwaarde

--> STAP 3: Gebruik de formule.

$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f\prime(a_1)}$ ➔ a_2 is je tweede benaderde nulwaarde, a_1 je eerste.

--> a_1 heb je gegeven, je kiest één van bovenstaande waarden in stap 2. Het is beter dat je degene het dichtst bij 0 kiest (y-waarde) want dan moet je minder stappen doen.

--> Dus we kiezen voor a_1 de onderste x in stap 2.

--> We hebben: $a_2 = 2 - \frac{f(a_1)}{f\prime(a_1)}$ ➔ Wat moet je doen met die breukstreep?

--> STAP 4: Bereken $f(a_1)$

$f(a_1) = x^3 - 2x - 5 = (2)^3 - 2.(2) - 5 = -1$

--> Je vult je eerste a-waarde in de normale functie

--> STAP 5: Bepaal $f'(x)$ en bereken $f'(a_1)$

--> $f'(x) = 3x^2 - 2$

--> $f'(a1) = 3.2^2 - 2 = 10$

--> STAP 6: Vul je berekende waarden in de formule in.

--> $a_2 = 2 - \frac{-1}{10}$

--> STAP 7: Reken uit (met ZRM, in de volgende stappen zijn de getallen moeilijker)

--> $a_2 = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$

Infinity loop:

--> STAP 8: Vul je a_2-waarde terug in de formule in, die nu wordt: $a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$

--> We kunnen al invullen: $a_3 = 2{,}1 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$

--> STAP 9: Bereken $f(a_2)$ en $f'(a_2)$ zoals stappen 4 en 5, vul ze daarna in de formule in zoals stap 6.

--> $f(a2) = (2{,}1)^3 - 2.2{,}1 - 5 = 0{,}061$

--> $f'(a2) = 3\,.\,2{,}1^2 - 2 = 11{,}23$

--> STAP 10: Vul je berekende waarden in.

$a_3 = 2 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 1{,}994568121$

If: Gewenste nauwkeurigheid bereikt --> then: stop loop

--> STAP 11: Herhaal stappen 8 tot en met 10 tot en met de gewenste nauwkeurigheid bereikt is, de gewenste nauwkeurigheid is bereikt als in dit geval 2 stappen achter elkaar de eerste 4 getallen achter de komma niet veranderen.

Stem op Tycho en James als showmeesters van het praesidium!