Quy hoạch động.

- Bài tập: 3 nhóm Bài tập:

- Nhóm 1: các bài toán $\boxed{\text{QHĐ kinh điển (cơ bản)}}$
- Nhóm 2: các bài toán được quy về cách giải qua các bài toán QHĐ kinh điển.
- Nhóm 3: Các bài toán k° quy về các bài toán trên.

Gần 40 bài: - Đề bài, test, có thể có code.
- Hướng dẫn giải các bài: qua các buổi học.

1. Quy hoạch động là gì?

- CM bằng pp qui nạp:

Chứng minh rằng với n nguyên dương thì:

$$\boxed{1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

CM:
- $n=1$: $1 = \frac{1*(1+1)}{2}$ đúng
- Giả sử $n=k-1$ ~~$n=k$~~ bài toán đúng: $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (đúng) → g thuyết
- Cần CM: $n=k+1$ bài toán toán cũng đúng:

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \underline{KL}$$

CM: $\underbrace{1+2+3+\dots+k}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{đã CM xong.}$$

- ① $n=1 \Rightarrow 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$

$n=2$ $(k=2)$: $1+2 = \frac{2\times(2+1)}{2}$

$n=3$: $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

$1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2}$

⋮

CM: $n=(k+1)$ dựa vào giả thuyết đã có với $n=k$.

$n=2$: $n=1$

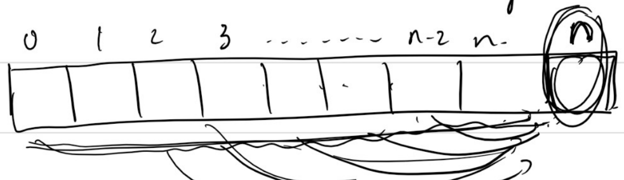
n dựa vào $n-1$.

CM: n là đúng thì dựa vào ~~n nhỏ~~ các gtrị n nhỏ hơn.

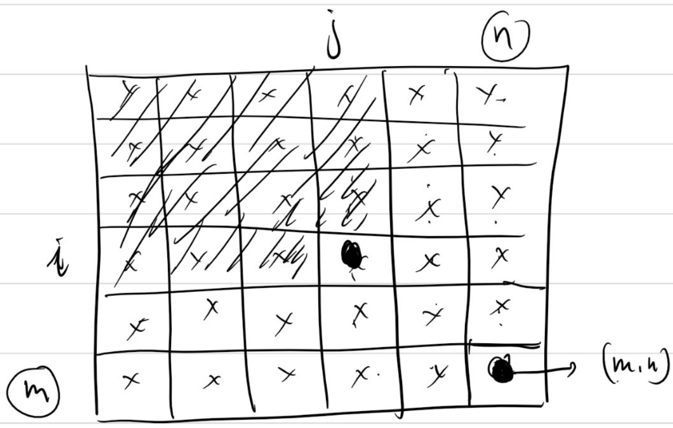
Tư tưởng QHĐ cụ thể như vậy: Giải 1 bài toán kích thước (n) thì lời giải phụ ∈ vào lời giải các bài toán kích thước nhỏ hơn. (n-1, n-2, ..., 1, 0)

- Bài toán qui hoạch động: là dạng bài toán mà lời giải của nó phụ thuộc vào lời giải của những bài toán con giống nó nhưng có kích thước nhỏ hơn.

- HSG cấp tỉnh thì bài toán QHĐ sẽ giải ở dạng bài toán 1 chiều hoặc 2 chiều.

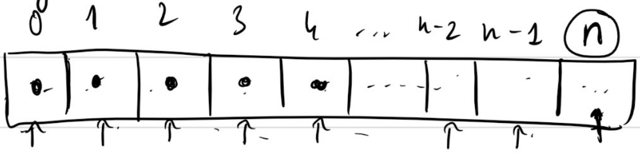


: Tìm mối liên hệ giữa bài toán kích thước n và những bài toán con đã giải trước đó.



2, Các bước giải 1 bài toán QHĐ.

- Ý tưởng: phân rã bài toán ban đầu thành những bài toán con giống bài toán ban đầu nhưng có kích thước nhỏ hơn. Sau đó giải lần lượt các bài toán con cho đến khi giải đến bài toán lớn nhất (bài toán có kích thước mà đề bài cho). Lời giải của các bài toán được lưu trong 1 bảng gọi là bảng p/án.



* Các bước giải:

B1: Phân rã: phân chia bài toán ban đầu → các bài toán con cùng dạng.

B2: Bài toán con nhỏ nhất (bài toán cơ sở): là bài toán mà chúng ta có thể tìm được ngay lời giải. $\boxed{1+2+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}}$

$n = 1$: $\boxed{1 = \frac{1*(1+1)}{2}}$

B3: Giải các bài toán con ≠.

Tìm mối liên hệ giữa các bài toán con ⇒ xây dựng được 1 công thức đó là CT QHĐ (hoặc CT truy hồi)

⇒ Sẽ giải được các bài toán con +, lời giải của nó lưu vào 1 bảng phương án.

B4: Truy vết (nếu cần)

hoặc mảng lưu vết.

- Dựa vào CT QHĐ (hoặc bảng phương án) truy vết tìm ra phương án.

(*) Viết ra (từng 4 bước này) sau đó viết chương trình trên máy.

tư duy.

Các bài toán qui hoạch động cơ bản.

(*) 1. Dãy con tăng dài nhất.
2. Xâu con chung dài nhất.
3. Cái túi: — phiên bản 0_1.
   — phiên bản tổng quát.
4. Dãy con có tổng = S.
5. Biến đổi xâu ký tự (*)
6. Di chuyển trên bảng
7. Nhân ma trận (*)
8. Bài toán đếm xâu nhị phân.

Bài 1. dãy con tăng dài nhất:

Cho dãy n phần tử $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ $(1 \le n \le 100)$

Tìm dãy con (có thể ko liên tiếp) tăng với độ dài max.

Input	Output
8	4
4 2 3 6 5 8 7 4	2 3 6 8

$\cancel{-10^9}$ 2 3 6 8 $\cancel{10^9}$

Giải: a_0 a_1 a_2 ..... a_n a_{n+1}

$-\infty$ $+\infty$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
-10^9	4	2	3	6	5	8	7	4	10^9

B1. Phân rã: Cần tìm độ dài dãy con tăng dài nhất từ $a_0 \rightarrow a_{n+1}$.

- Tìm độ dài dãy con tăng dài nhất từ $a_0 \to a_0$. $F[0]$
- Tìm ———— từ $a_0 \to a_1$. $F[1]$
- Tìm ———— từ $a_0 \to a_2$. $F[2]$ ⇒ Tìm độ dài dãy con tăng dài nhất từ $a_0 \to a_i$. $(0 \le i \le n+1)$
- Tìm ———— từ $a_0 \to a_3$ $F[3]$
- ......
- Tìm ———— từ $a_0 \to a_{n+1}$. $F[n+1]$.

• Gọi $F[i]$ = độ dài dãy con tăng dài nhất từ $a_0 \to a_i$ (kết thúc tại i)

$Kq = F[n+1] - 2$

B2: Giải bài toán cơ sở: a_0 a_1 a_2 a_3 .... a_{n+1}

$-\infty$ ... $+\infty$

$F[0] = 1$

B3: Giải các bài toán con i $(1 \le i \le n+1)$ $(F[1], F[2] \dots F[n+1])$

Xét phần tử $a[i]$ $(1 \le i \le n+1)$:

Xét các giá trị $a[j]$: $(0 \le j < i)$

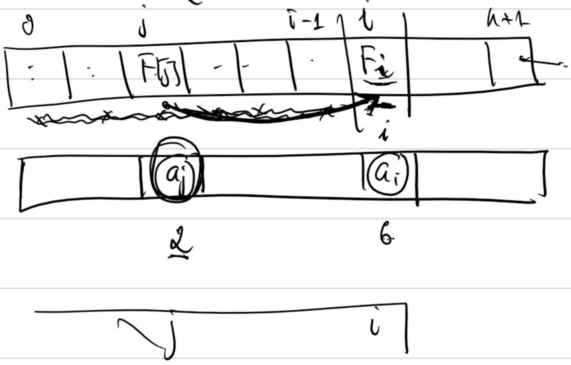
→ nếu $(a_j < a_i)$ và $(F[i] < F[j]+1)$

{

$F[i] = F[j] + 1;$

$vet[i] = j;$

}



	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	-10^9	4	2	3	6	5	8	7	4	10^9
F	1	2	2	3	4	4	5	5	4	6
vet	0	0	0	2	3	3	4	4	3	6

$Kq = F[9] - 2 = 6 - 2 = 4$

$vet[j] = 6$

$j = vet[j] = 6$

$j = vet[j] = 3$ $j = vet[j] = 4$.

$j = vet[j] = 2$.

$j = vet[j] = 0;$

B4: Truy vết: $x = \{10^9, 8, 6, 3, 2\}$

- $j = n+1;$

lặp khi $j > 0$:

- $x = x \cup \{a[j]\}$.
- $j = vet[j]$.

Bài 2: LCS: Xâu con chung dài nhất:

Cho 2 xâu X và Y. Tìm xâu con chung (có thể ko liên tiếp) dài nhất của X và Y.

Input	Output
x = AGTXAGT	GXT
y = GAXTA	247
	134

⊗ Ý tưởng:

$X = X_1 X_2 X_3 X_4 \dots X_m$ (m ký tự)

$Y = Y_1 Y_2 Y_3 \dots Y_n$ (n ký tự)

B1: Phân rã: Cần tìm độ dài max của xâu con chung 2 dãy

$\underbrace{X_1 X_2 X_3 \dots X_m}$ và $\underbrace{Y_1 Y_2 Y_3 \dots Y_n}$.

- Tìm độ dài max của $\boxed{X = \text{rỗng với } Y_1 Y_2 \dots Y_n}$.
- ——— $X = X_1$ ———
- ——— $X = X_1 X_2$ ———
- ——— $X = X_1 X_2 X_3$ ———
- - - - -
- ——— $X = X_1 X_2 X_3 \dots X_m$ với $Y_1 Y_2 \dots Y_n$

⇒ TQ: Tìm độ dài max của $X_1 X_2 \dots X_i$ và $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ $(0 \le i \le m)$

- Tìm độ dài max $X_1 X_2 \dots X_i$ với Y = rỗng.
- ——— $X_1 X_2 \dots X_i$ với $Y = Y_1$.
- ——— với $Y = Y_1 Y_2$.
- ——— với $Y = Y_1 Y_2 Y_3$.
- - - - -
- ——— với $Y = Y_1 Y_2 Y_3 \dots Y_n$

⇒ TQ: Tìm độ dài max của $X_1 X_2 \dots X_i$ và $Y_1 Y_2 \dots Y_j$. $(0 \le i \le m;\ 0 \le j \le n)$

⇒ Gọi $F[i][j]$ = độ dài max của xâu con chung giữa $X_1 X_2 \dots X_i$ và $Y_1 Y_2 \dots Y_j$. $(0 \le i \le m;\ 0 \le j \le n)$

Kq = $F[m][n]$.

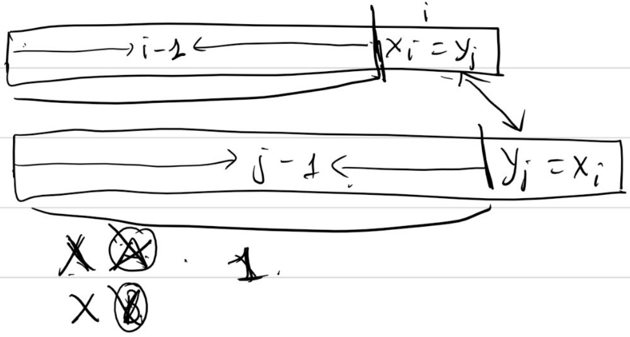
B2: Bài toán cơ sở: $F[0][j] = 0$; $F[i][0] = 0$;

B3: Giải các bài toán: $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$

$X_1\ X_2 \dots X_i$ và $Y_1\ Y_2 \dots Y_j$

Xét X_i và Y_j $(1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n;\ F[i][j])$

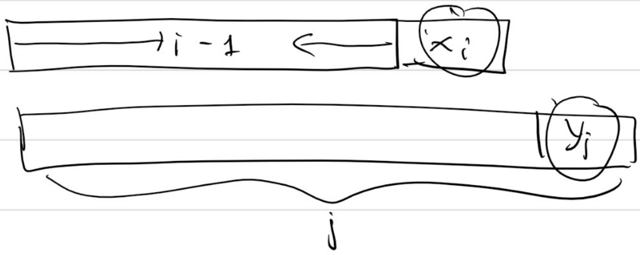
- Nếu $X_i == Y_j$:



$F[i][j] = F[i-1][j-1] + 1$

- Nếu $X_i \neq Y_j$:

  - Nếu cắt bỏ X_i đi
    $F[i][j] = F[i-1][j]$.
  - Nếu cắt bỏ Y_j
    $F[i][j] = F[i][j-1]$.



vì cần tìm xâu con chung độ dài max ; $F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i][j-1])$

Vậy : Nếu $X_i = Y_j$: $\to F[i][j] = F[i-1][j-1] + 1$

$\Rightarrow$ Nếu $X_i \neq Y_j \Rightarrow F[i][j] = \max(F[i-1][j]; F[i][j-1])$

$1 \le i \le m$
$1 \le j \le n$.

AGTXAGT

GAXTA

			G	A	X	T	A
		0	1	2	3	4	5
	0	0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	1	1	1	1
G	2	0	1	1	1	1	1
T	3	0	1	1	1	2	2
X	4	0	1	1	2	2	2
A	5	0	1	2	2	2	3
G	6	0	1	2	2	2	3
T	7	0	1	2	2	3	3

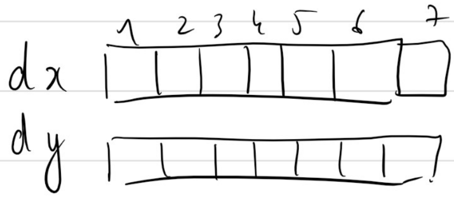
i i i i i i i = m.

j j j j = n

Bảng phương án. $\to$

X_i ~~khác~~ Y_j :

$Kq = ATA$



B4 : Truy vết : $i = m$; $j = n$

lặp khi ($i > 0$ và $j > 0$)

- Nếu $X_i = Y_j$:
  $Kq = X_i + Kq$.
  $dx[i] = 1$; $dy[j] = 1$;
  $i = i - 1$; $j = j - 1$;
- Nếu $X_i \neq Y_j$:
  + Nếu $F[i][j] = F[i-1][j] \Rightarrow i = i - 1$.
  + Ngược lại $j = j - 1$.

```
cout << kq << '\n';
for i : 1 -> m
  if (dx[i] == 1)   cout << i << '␣';
```

for j : 1 → n

if (dy[j] = = 1) cout << j << ' ';