Tên: Đinh Minh Bảo

MSSV: 19120173

Câu 1:

$A=[a_{ij}]$

$B=[b_{ij}]$

$A'=[a'_{ij}]$

Xét định thức B theo dòng i(dòng duy nhất khác nhau giữa 2 ma trận A, B) ta có:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * b_{ij} * |M_{B_{ij}}|$$

mà ma trận A và ma trận B chỉ khác nhau mỗi dòng i nên

$$|M_{B_{ij}}| = |M_{A_{ij}}| = |M_{A'_{ij}}|$$

và $b_{ij} = a_{ij} + a'_{ij}$ nên

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * |M_{A_{ij}}| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a'_{ij} * |M_{A'_{ij}}|$$

$$= |A| + |A'|$$

- ⇨ Điều phải chứng minh

Câu 2:

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$==> |A - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Nên suy ra $\lambda=1$ hay $\lambda=2$

Với $\lambda=1$ ta có:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải phương trình sau để tìm vector riêng:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r1\, swap\, r3]{} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r_2+r_1]{} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$==> \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -s \\ x_3 = 8s \end{cases}$$

$$==> P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ta có với λ=2:

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải phương trình sau để tìm vector riêng:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -3 & 5 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_3-3r_1} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$==> \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$==> P_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Vì số lượng vector riêng nhỏ hơn số chiều của ma trận nên vector A không thể chéo hóa được

b) $$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$==> \lambda = 1 \; hay \; \lambda = 2$$

Với λ=1:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Ta cần giải phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_3+r_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$==> \begin{cases} x_1 = -2s \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$==> P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với λ=2:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2r_2+r_1]{2r_3+r_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$==> x = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$==> \begin{cases} P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ma trận các vector riêng là:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chéo hóa là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$