# geometry.h 文档说明 (上)

Haochen Huang

西安交通大学 MFM 课题组

版本：1.02test

日期：2023 年 7 月 3 日

## 目录



**摘　　要**

本文为 geometry.h 的文档说明，该头文件的目的在于为 Basilisk 提供一些精巧的几何工具，以便为之后的多相流算法（例如 VOF 算法等）提供工具支持。由于本文件工具种类繁多，现暂分上下两部，上部中为常用，最值得注意的相关函数。下部则是部分辅助输出函数。

2.02 版本更新，解决内部排版问题，增改部分注释

## 1. 文件中主要函数及其目的

### 1.1 文件目的

以一个被两相边界分割的 2D 单元为例：

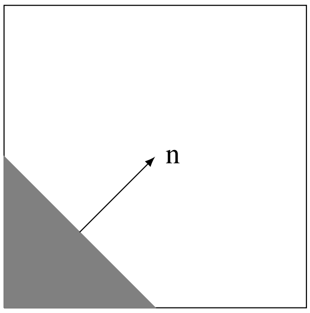



**图 1:** 2D 示例单元

其中灰色部分代表边界内，白色部分代表边界外，边界的法向量统一指向外侧。假设两相边界的方程为

$$n_x x + n_y y = \alpha \tag{1}$$

其中 $n_x, n_y$ 为单位化后法向量的两个分量，我们由此引入描述边界的三个参数：

- 表示边界内所占该单元体积面积的体积分数 c
- 边界的法向量 $(n_x, n_y)$（三维则为 $(n_x, n_y, n_z)$）
- 以及边界函数表达中的参数 $\alpha$

此三者并非相互独立，在已知边界法向量以及剩下两者中的一者后，可以轻易的推导出余下一个参数，而本头文件中的工具就是针对该问题进行一系列的求解。

### 1.2 主要函数

- line alpha/plane alpha：用于求解 2 维/3 维情况下已知体积占比 $c$ 以及边界法向量 $n$ 时，该边界在本单元中的参数 $\alpha$
- line area/plane area：用于求解 2 维/3 维情况下已知界面参数 $\alpha$ 以及边界法向量 $n$ 时，该边界在本单元中的面积/体积分数 $c$
- rectangle fraction：用于求解网格内方形部分的边界内体积/面积分数 $c$
- facets：用于输出界面端点坐标，在后处理中可以将端点坐标用直线连接
- line length center/plane area center：用于存储 2 维/3 维中边界中心，同时输出边界内部在单元中的面积/体积
- line center/plane center：用于输出边界内面积体积重心坐标

## 2. line alpha/plane alpha 函数

### 2.1 函数目的及原理

该函数目的是在给定界面法向量 $(n_x, n_y)$ 以及界面内体积占比 $c$ 后计算界面参数 $\alpha$。

算法重点在于坐标转换以及临界面积推导；其中坐标转换会在下一节详细阐述，本节主要讲解面积推导。

我们首先将原本的坐标及图形经历坐标变换全部变为零点在左下角，法向量分量均大于零的状态，见8，具体推到公式及返回见下一节。

当 $c \in (0,1)$，且 $n_x, n_y$ 均不等于 0 时，为了方便区分，算法将分量中较大的一个定义为 $n_2$，较小的一个定义为 $n_1$，我们以 $n_y$ 为较大数为例，有：

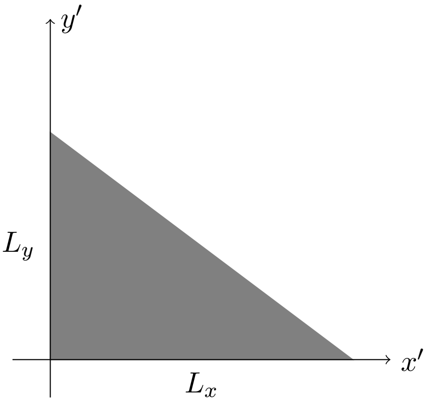



**图 2:** 界面与两坐标轴的交点

令落在 $x'$ 轴上的长度为 $L_x$，令落在 $y'$ 轴上的长度为 $L_y$，则 $\frac{L_y}{L_x} = \frac{n_x}{n_y}$，且 $L_y \leq L_x$。面积共有三种情况图形一共有三种形态，分别是三角形，梯形，以及五边形，详见6，当前目标是：使用已知的 $c$ 与 $(n'_x, n'_y)$ 对其进行判定，首先为三角形临界情况：

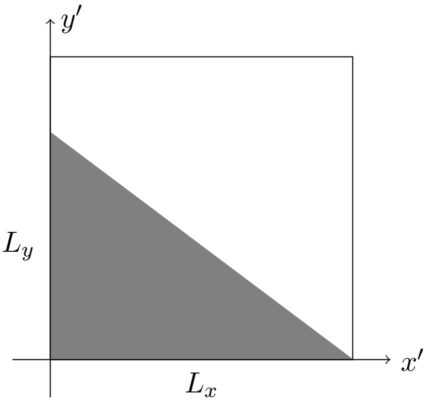



**图 3:** 三角形面积临界情况

即 $L_x = 1$ 此时其面积为：

$$c = \frac{n_1}{2n_2} \tag{2}$$

是故当 $c \leq \frac{n_1}{2n_2}$ 时，图形为三角形，即可以求出 $\alpha$，具体公式详见下节。

而梯形的临界状态则为：

此时单元内右上角空白三角形的面积为：

$$S_{blank} = \frac{n_1}{2n_2} \tag{3}$$

则当 $c \leq 1 - \frac{n_1}{2n_2}$ 时，计算为梯形，则其余均为五边形。相关计算公式同见下节。

### 2.2 具体实现代码

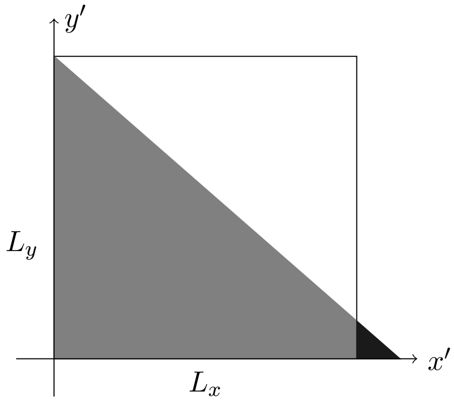



**图 4:** 梯形面积临界情况

```c
#if dimension >= 2
double line_alpha (double c, coord n)
{
  double alpha, n1, n2;

  n1 = fabs (n.x); n2 = fabs (n.y);
  if (n1 > n2)//判断法向分量中的较大值，并将其赋于 n2
    swap (double, n1, n2);

  c = clamp (c, 0., 1.);
  double v1 = n1/2.;
  if (c <= v1/n2)//面积为三角形的判断
    alpha = sqrt (2.*c*n1*n2);//相关 α 计算
  else if (c <= 1. - v1/n2)//梯形判断
    alpha = c*n2 + v1;
  else//五边形判断
    alpha = n1 + n2 - sqrt (2.*n1*n2*(1. - c));
  //坐标反变换
  if (n.x < 0.)
    alpha += n.x;
  if (n.y < 0.)
    alpha += n.y;

  return alpha - (n.x + n.y)/2.;
}
#endif // dimension >= 2
```

```
#if dimension >= 3
double plane_alpha (double c, coord n)
{
  double alpha;
  coord n1;

  n1.x = fabs (n.x); n1.y = fabs (n.y); n1.z = fabs (n.z);

  double m1, m2, m3;
  m1 = min(n1.x, n1.y);
  m3 = max(n1.x, n1.y);
  m2 = n1.z;
  if (m2 < m1) {
    double tmp = m1;
    m1 = m2;
    m2 = tmp;
  }
  else if (m2 > m3) {
    double tmp = m3;
    m3 = m2;
    m2 = tmp;
  }
  double m12 = m1 + m2;
  double pr = max(6.*m1*m2*m3, 1e-50);
  double V1 = m1*m1*m1/pr;
  double V2 = V1 + (m2 - m1)/(2.*m3), V3;
  double mm;
  if (m3 < m12) {
    mm = m3;
    V3 = (m3*m3*(3.*m12 - m3) + m1*m1*(m1 - 3.*m3) + m2*m2*(m2 - 3.*m3))/pr;
  }
  else {
    mm = m12;
    V3 = mm/(2.*m3);
  }

  c = clamp (c, 0., 1.);
```

```
  double ch = min(c, 1. - c);
  if (ch < V1)
    alpha = pow (pr*ch, 1./3.);
  else if (ch < V2)
    alpha = (m1 + sqrt(m1*m1 + 8.*m2*m3*(ch - V1)))/2.;
  else if (ch < V3) {
    double p12 = sqrt (2.*m1*m2);
    double q = 3.*(m12 - 2.*m3*ch)/(4.*p12);
    double teta = acos(clamp(q,-1.,1.))/3.;
    double cs = cos(teta);
    alpha = p12*(sqrt(3.*(1. - cs*cs)) - cs) + m12;
  }
  else if (m12 <= m3)
    alpha = m3*ch + mm/2.;
  else {
    double p = m1*(m2 + m3) + m2*m3 - 1./4., p12 = sqrt(p);
    double q = 3.*m1*m2*m3*(1./2. - ch)/(2.*p*p12);
    double teta = acos(clamp(q,-1.,1.))/3.;
    double cs = cos(teta);
    alpha = p12*(sqrt(3.*(1. - cs*cs)) - cs) + 1./2.;
  }
  if (c > 1./2.) alpha = 1. - alpha;

  if (n.x < 0.)
    alpha += n.x;
  if (n.y < 0.)
    alpha += n.y;
  if (n.z < 0.)
    alpha += n.z;

  return alpha - (n.x + n.y + n.z)/2.;;
}
#else // dimension < 3
# define plane_alpha line_alpha
#endif
```

## 3. line area/plane area 函数

### 3.1 函数目的及原理

该函数目的是在给定界面的法向量 $n_x, n_y$ 以及界面参数 $\alpha$ 后，求解界面内在单元中的占比。

本算法的精髓在于**坐标变换**；依旧以 2 维为例，法向量的组合共有四种即：$(n_x > 0, n_y > 0), (n_x > 0, n_y < 0), (n_x < 0, n_y > 0), (n_x < 0, n_y < 0)$，为了简便计算，我们应该在保证图形不发生改变的情况下使用坐标变换，将坐标中心移至左下角，并将法向量变为 $(n'_x > 0, n'_y > 0)$，如下图：

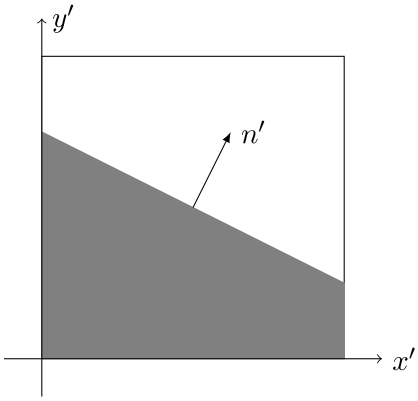



**图 5:** 坐标变换示例

其中 $'$ 表示坐标变换。根本原理如下：

有原方程式：

$$n_x x + n_y y = \alpha \tag{4}$$

现将坐标平移至左下，即：

$$\begin{cases} x' = & x + \frac{1}{2} \\ y' = & y + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{5}$$

则原式变为：

$$n_x x' + n_y y' = \alpha + \frac{1}{2}(n_x + n_y) \tag{6}$$

接下来对法向量进行变换，当法向量两分量均大于零时可以跳过此步，当两分量中有一个小于零时，可以通过使直线关于 $x = \frac{1}{2}$ 或 $y = \frac{1}{2}$ 进行对称，该步骤具有叠加性，现取 $n_x < 0$ 为例：

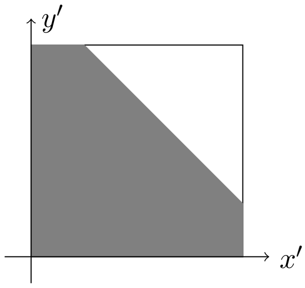
$$\frac{1}{2} - x'' = x' - \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$(1 - x'') = x' \tag{8}$$

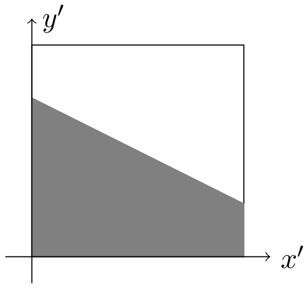
有：

$$-n_x x'' + n_y y' = \alpha \frac{n_y - n_x}{2} \tag{9}$$

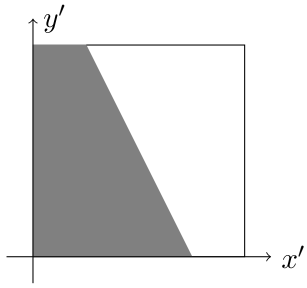
面积计算时，算法将情况同样分为了四种，如下图 我们将边界延长至与两对称轴相交，形成三角形，再用三角形减去多余部分即是体积占比，如下图：



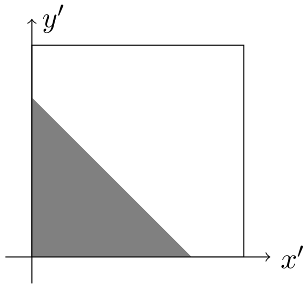

(a) 情况 1




(b) 情况 2




(c) 情况 3




(d) 情况 4

**图 6:** 面积计算中出现的四种情况

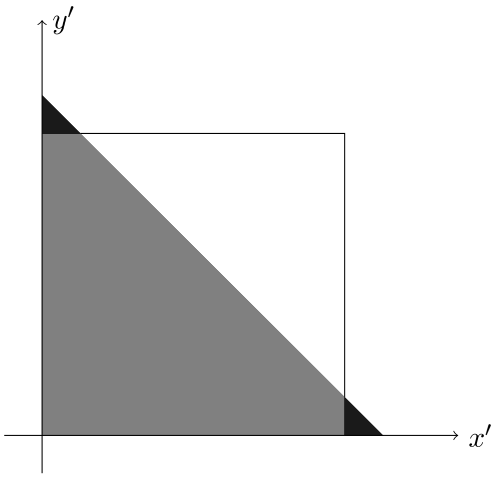



**图 7:** 面积计算示意

我们可以轻松计算得，大三角形的面积永远为：

$$S = \frac{\alpha^2}{2n'_x n'_y} \tag{10}$$

是故我们只需要判断，图形是否与 $x', y'$ 轴的交点大于 1，并减去相应的面积即可，我们依旧以 $x'$ 方向为例：

首先判断是否有多余面积，即若：

$$n'_x(x'-1) + n'_y y' = \alpha - n'_x > 0 \tag{11}$$

则表明其有多余的面积部分，多余面积部分的面积为：

$$S_r = \frac{(\alpha - n'_x)^2}{2n'_x n'_y} \tag{12}$$

其余方向同理，减去即可。

需要注意的是，形状还有可能是标准的长方形，此时只需要判断斜率，并做简单计算即可。三维与二维的算法原理同理，在此不多做赘述。

### 3.2 具体实现代码

```
#if dimension >= 2
double line_area (double nx, double ny, double alpha)
{
  double a, v, area;

  alpha += (nx + ny)/2.;//坐标偏移至左下角
  if (nx < 0.) {//判断法向量分量正负，通过坐标变换全部变为正值
    alpha -= nx;
    nx = - nx;
  }
  if (ny < 0.) {
    alpha -= ny;
    ny = - ny;
  }

  if (alpha <= 0.)//判断单元内是否有界面内部分
    return 0.;

  if (alpha >= nx + ny)//界面过点 (1,1) 为临界状态，代表整个单元均在界面内
    return 1.;

  if (nx < 1e-10)//判断是否为长方形
    area = alpha/ny;
```

```
  else if (ny < 1e-10)
    area = alpha/nx;
  else {
    v = sq(alpha);

    a = alpha - nx;//图形是否有多余的三角形面积
    if (a > 0.)
      v -= a*a;

    a = alpha - ny;
    if (a > 0.)
      v -= a*a;

    area = v/(2.*nx*ny);
  }

  return clamp (area, 0., 1.);
}
#endif // dimension >= 2

#if dimension >= 3
double plane_volume (coord n, double alpha)
{
  double al = alpha + (n.x + n.y + n.z)/2. +
    max(0., -n.x) + max(0., -n.y) + max(0., -n.z);
  if (al <= 0.)
    return 0.;
  double tmp = fabs(n.x) + fabs(n.y) + fabs(n.z);
  if (al >= tmp)
    return 1.;
  if (tmp < 1e-10)
    return 0.;
  double n1 = fabs(n.x)/tmp;
  double n2 = fabs(n.y)/tmp;
  double n3 = fabs(n.z)/tmp;
  al = max(0., min(1., al/tmp));
  double al0 = min(al, 1. - al);
```

```
  double b1 = min(n1, n2);
  double b3 = max(n1, n2);
  double b2 = n3;
  if (b2 < b1) {
    tmp = b1;
    b1 = b2;
    b2 = tmp;
  }
  else if (b2 > b3) {
    tmp = b3;
    b3 = b2;
    b2 = tmp;
  }
  double b12 = b1 + b2;
  double bm = min(b12, b3);
  double pr = max(6.*b1*b2*b3, 1e-50);
  if (al0 < b1)
    tmp = al0*al0*al0/pr;
  else if (al0 < b2)
    tmp = 0.5*al0*(al0 - b1)/(b2*b3) +  b1*b1*b1/pr;
  else if (al0 < bm)
    tmp = (al0*al0*(3.*b12 - al0) + b1*b1*(b1 - 3.*al0) +
^^I   b2*b2*(b2 - 3.*al0))/pr;
  else if (b12 < b3)
    tmp = (al0 - 0.5*bm)/b3;
  else
    tmp = (al0*al0*(3. - 2.*al0) + b1*b1*(b1 - 3.*al0) +
^^I   b2*b2*(b2 - 3.*al0) + b3*b3*(b3 - 3.*al0))/pr;

  double volume = al <= 0.5 ? tmp : 1. - tmp;
  return clamp (volume, 0., 1.);
}
#else // dimension < 3
# define plane_volume(n, alpha) line_area(n.x, n.y, alpha)
#endif
```

## 4. rectangle fraction 函数

### 4.1 函数目的及原理

如下图：

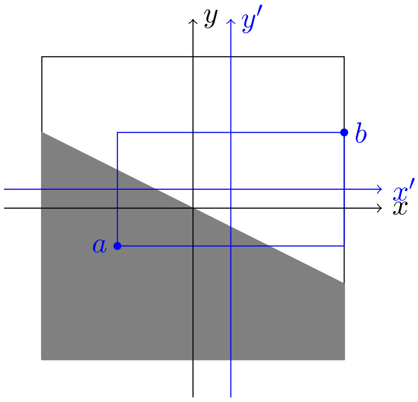



**图 8:** 偏移坐标变换示例

该函数的目的在于在原本单元中给定两点 $a, b$ 构成一个新的直角单元网格，通过在原单元中的边界法向量 $n$，以及边界参数 $\alpha$ 计算在变形单元中的面积/体积占比。

对原坐标进行坐标变换有

$$\begin{cases} x' = & (x_b - x_a)x - \frac{x_b + x_a}{2} \\ y' = & (y_b - y_a)y - \frac{y_b + y_a}{2} \end{cases} \tag{13}$$

即可得到在该坐标中：

$$\alpha' = \alpha - n_x \cdot (x_b + x_a)/2 - n_y \cdot (y_b + y_a)/2 \tag{14}$$

$$n' = (n_x \cdot (x_b - x_a), n_y \cdot (y_b - y_a)) \tag{15}$$

值得注意的是，改代码将直角单元长宽缩放转化为了正方形单元，我们再使用函数 plane volume 进行面积占比计算，这一操作并不会影响结果。

### 4.2 具体实现代码

```
double rectangle_fraction (coord n, double alpha, coord a, coord b)
{
  coord n1;
  foreach_dimension() {
    alpha -= n.x*(b.x + a.x)/2.;
    n1.x = n.x*(b.x - a.x);
  }
  return plane_volume (n1, alpha);
}
```

1111

单行代码展示 `double un = dt*uf.x[]/(fm.x[]*Delta + SEPS), s = sign(un);`