SISTEMI MULTIVARIABILI: POLI E ZERI

Si considerano modelli in matrice di funzioni di trasferimento:

$$G(s) = \{g_{ij}(s)\}, i = 1, \cdots, q, \quad j = 1, \cdots, m$$

Se $g_{ij}(s)$ e' una funzione di trasferimento razionale propria allora esiste una quaterna di matrici (A, B, C, D) tale che:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

La quaterna (A, B, C, D) si dice una realizzazione di $G(s)$.

Qualsiasi matrice di f.d.t. G(s) si puo' ridurre ad una forma canonica pseudo-diagonale, nota come forma di Smith-McMillan del sistema.

Gli zeri e i poli di una G(s) si definiscono in base a questa forma canonica.

Qualunque G(s) si puo' esprimere come una matrice polinomiale divisa per un denominatore comune polinomiale.

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}P(s)$$

dove d(s) e' il m.c.m. dei denominatori di G(s) e P(s) e' una matrice polinomiale.

Dimostriamo quindi prima che ogni matrice polinomiale puo' essere ricondotta ad una matrice polinomiale pseudo-diagonale detta forma canonica di Smith.

Definizione 1. *Una matrice polinomiale P(s) si dice unimodulare se ammette una inversa anche essa polinomiale.*

Teorema 1. *P(s) e' unimodulare se e solo se detP(s) = cost.*

Le seguenti operazioni elementari si possono applicare ad una matrice polinomiale, e sono riducibili a moltiplicazione della matrice per una matrice elementare opportuna (tutte le matrici elementari sono unimodulari):

- scambio di due righe (o due colonne)
- prodotto di una riga (o colonna) per una costante
- somma di un multiplo polinomiale di una riga (o colonna) con un' altra riga (o colonna)

Definizione 2. *Due matrici (polinomiali o razionali) P(s) e Q(s) sono dette equivalenti se esistono sequenze di matrici elementari sinistre* $\{L_1(s), ..., L_l(s)\}$ *e destre* $\{R_1(s), ..., R_r(s)\}$ *tali che:*

$$P(s) = L_1(s) \cdot L_2(s) \cdots L_l(s) \cdot Q(s) \cdot R_1(s) \cdot R_2(s) \cdots R_r(s)$$

Teorema 2. (Equivalenza alla forma di Smith).

Sia P(s) una matrice polinomiale di rango normale pari ad r (cioe' di rango r per quasi tutti i valori di s).

Allora P(s) puo' essere trasformata mediante una sequenza di operazioni elementari in una matrice polinomiale pseudo-diagonale S(s) data da:

$$S(s) = \mathrm{diag}\{\varepsilon_1'(s), \cdots, \varepsilon_r'(s), 0, \cdots, 0\}$$

dove $\varepsilon_i'(s)$, $i = 1, .., r$ sono polinomi monici tali che ogni $\varepsilon_i'(s)$ divide con resto nullo $\varepsilon_{i+1}'(s)$.

I polinomi $\varepsilon_i'(s)$ si calcolano attraverso la seguente formula

$$\begin{aligned} \varepsilon_i'(s) &= \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, i = 1, \cdots, r \\ D_0(s) &= 1 \\ D_i(s) &= \{\text{M.C.D. di tutti i minori di ordine } i \text{ di P(s), normalizzato a monico}\} \end{aligned}$$

La matrice $S(s)$ e' detta forma di Smith di P(s), e gli $\varepsilon_i'(s)$ sono detti fattori invarianti di P(s).
Teorema 3 - (Forma di Smith-McMillan di una funzione razionale)
Sia G(s) una matrice razionale di rango normale r. G(s) puo' essere trasformata mediante operazioni elementari in una matrice razionale pseudo-diagonale M(s) cosi' costituita:

$$M(s) = \frac{1}{d(s)} S(s) = \text{diag}\{\frac{\varepsilon_1(s)}{\delta_1(s)}, \cdots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\delta_r(s)}, 0, \cdots, 0\}$$
$$\frac{\varepsilon_i'(s)}{d(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\delta_i(s)}$$

dove $\{\varepsilon_i(s), \delta_i(s)\}$ sono primi $\forall i$ e sono tali che:

$$\varepsilon_i(s)|\varepsilon_{i+1}(s), \quad \delta_{i+1}(s)|\delta_i(s) \quad i = 1, \cdots, r-1$$

La matrice M(s) si chiama forma di Smith-McMillan di G(s).

1 Poli e zeri di una matrice di f.d.t.

Definizione 3 - Sia M(s) la forma di Smith-McMillan di G(s). Si definiscono polinomio dei poli e polinomio degli zeri di G(s) rispettivamente i due polinomi:

$$p(s) = \delta_1(s) * \delta_2(s) * \cdots * \delta_r(s)$$
$$z(s) = \varepsilon_1(s) * \varepsilon_2(s) * \cdots * \varepsilon_r(s)$$

Le radici di p(s) e di z(s) si chiamano rispettivamente poli e zeri di trasmissione di G(s).

Corollario 1. Se G(s) e' quadrata, allora:

$$det[G(s)] = c\frac{z(s)}{p(z)} \quad c = costante$$

Osservazione 1. Nonostante $\{\varepsilon_i(s), \delta_i(s)\}$ siano primi $\forall i$, si possono verificare cancellazioni nell' espressione di det[G(s)].

Definizione 4 - Si definisce grado di McMillan di G(s) il grado del polinomio dei poli p(s).

Osservazione 2. La posizione dei poli di G(s) la si determina facilmente ispezionando i denominatori di $g_{i,j}(s)$. Al contrario il loro numero e la loro molteplicita' non e' di facile determinazione senza costruire la forma di Smith-McMillan. Per quanto concerne gli zeri, invece, non si possono individuare ne' posizione ne' numero e molteplicita' senza passare alla forma di Smith-McMillan.