GLI ZERI DI UN SISTEMA MULTIVARIABILE

- SISO lo zero e' la frequenza per la quale la funzione di trasferimento é nulla
- MIMO lo zero e' la frequenza per la quale la matrice di funzioni di trasferimento cade di rango

Consideriamo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

dove: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$.

Dato il sistema in rappresentazione in spazio di stato (A,B,C,D). La "Rosenbrock System matrix" associata (RSM) é data da

$$RSM(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{4}$$

Definizione: Il rango normale di $G(s)_{q \times p}$ é uguale a r se rank[G(s)]=r per quasi tutti i valori di s.

Ipotesi

- A1 rango normale di G(s)=min(p,q)
- A2 (A,B) controllabile
- A3 (A,C) osservabile

Si dimostra che

$$rank[RSM(s)] = n + \text{rango normale di G(s)} = n + min(p, q) \tag{5}$$

Definizione di zero di trasmissione

1. Supponiamo che le ipotesi A1-A3 siano soddisfatte, allora s_0 é uno zero di trasmissione del sistema (A,B,C,D) se

$$rank(RSM(s_0)) < n + min(p, q)$$

   ovvero la "System Matrix" perde di rango in $s = s_0$.
2. Supponiamo che: le ipotesi A1-A3 siano soddisfatte, s_0 é uno zero di trasmissione ed s_0 non é un polo di G(s) allora

$$rank(G(s_0)) < min(p, q)$$

Il comando tzero del Matlab calcola gli zeri del sistema che coincidono con gli zeri di trasmissione se le ipotesi A1)-A3) risultano essere soddisfatte.

Proprieta' di bloccaggio.
Gli zeri di trasmissione sono associati a quei modi dove l'ingresso e gli stati di un sistema sono non nulli mentre l'uscita é nulla.
Supponiamo che: le ipotesi A1-A3 siano soddisfatte, s_0 é uno zero di trasmissione e $p \leq q$. Allora esiste un ingresso $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, $u_0 \neq 0$ e uno stato iniziale x_0, tale che $y(t) = 0$, $\forall t \geq 0$.
Come determinare u_0 ed x_0

$$\begin{bmatrix} s_0 I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0 \tag{6}$$

In Matlab il comando null calcola lo spazio nullo (Ker) di una matrice.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = 0 \tag{7}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12}$$

G(s) ha uno zero in $s_0 = -2$.

$$\begin{bmatrix} -2I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ -0.3333 \\ -0.6667 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ne segue che: $u(t) = -0.6667e^{-2t}$ con $U(s) = \frac{-0.6667}{s+2}$ e
$x_0 = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ -0.3333 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\
Y_1(s) &= G(s)U(s) = \frac{-0.6667}{s^2 + 7s + 12} \\
Y_2(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 = \frac{0.6667}{s^2 + 7s + 12}
\end{aligned}
$$

Poiché $Y(s) = 0$ allora $y(t) = 0, \ \forall t \geq 0$.
Nota che in $Y_1(s)$ il termine corrispondente a e^{-2t} dell'ingresso u(t) e' stato bloccato (non trasmesso) in uscita.