Assegnazione degli autovalori

Con la tecnica dell'assegnamento degli autovalori ci proponiamo, dato un sistema lineare tempo invariante, di progettare una legge di controllo in retroazione tale da posizionare gli autovalori del sistema in anello chiuso in punti desiderati del piano complesso.

E' noto che gli autovalori di un sistema ne determinano le caratteristiche dei transitori, in particolare dei transitori associati al moto libero. Disporre della possibilita' di posizionare gli autovalori del sistema in anello chiuso in punti diversi da quelli occupati dagli autovalori del sistema sotto controllo consente di risolvere due tipologie di problemi, entrambe di primaria importanza:

- Stabilizzare un sistema instabile, posizionando gli autovalori in anello chiuso nel semipiano sinistro aperto del piano complesso;

- Modificare le caratteristiche dei transitori, anche quelli associati ad autovalori a parte reale negativa, rendendoli pi smorzati o rapidi.

Per la soluzione del problema distinguiamo due scenari:

- Informazione completa (stato accessibile) Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure di tutte le variabili di stato.

- Informazione parziale (stato non accessibile) Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure solo delle variabili di uscita, non delle variabili di stato.

1 Assegnazione con stato accessibile

Consideriamo il seguente sistema

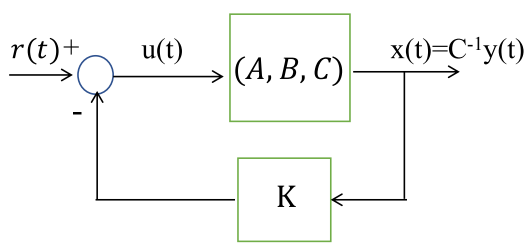
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Ipotizziamo che il controllore abbia accesso a tutte le variabili di stato (la matrice C e' invertibile). E' ragionevole supporre che il problema possa essere risolto da un regolatore non dinamico, ovvero da una legge di controllo puramente proporzionale tra stato e variabile di controllo:

$$u(t) = -Kx(t) + r(t)$$

L'equazione del sistema in anello chiuso si ottiene sostituendo la legge di controllo nell'equazione del sistema sotto controllo

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$$



Il problema di assegnazione degli autovalori mediante retroazione dallo stato ammette soluzione se e solo se la coppia di matrici (A,B) e' completamente raggiungibile.

$$K = \text{place}(A, B, [\lambda_1, \cdots, \lambda_n])$$

Se invece dell' assegnazione degli autovalori ci limitiamo ad imporre l' appartenza degli autovalori nel semipiano sinistro allora parliamo di stabilizzazione.

Il problema di stabilizzazione ammette soluzione se la coppia di matrici (A,B) e' stabilizzabile ovvero gli autovalori associati al sottospazio non raggiungibile appartengono al semipiano sinistro.

1.1 Progetto di K nel caso di (A,B) stabilizzabile

$$\dot{x} = (A - BK)x$$
$$\hat{x} = Tx$$
$$\dot{\hat{x}} = T\dot{x} = T(A - BK)x = T(A - BK)T^{-1}\hat{x} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x}$$

Decomposizione rispetto alla raggiungibilita' $\quad rango[M_r] = \rho < n$

$$[\hat{A}\ \hat{B}\ \hat{C}\ T\ l] = ctrbf(A, B, C)$$
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \end{bmatrix}$$
$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \quad \hat{K}_{p\times n} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \text{place}(a_{22}, b_{21}, [\lambda_1, \cdots, \lambda_\rho])$$
$$K_{11} = 0_{p\times(n-\rho)}$$
$$K = \hat{K}T$$

2 Assegnazione con stato non accessibile

Siamo nella situazione in cui lo stato del sistema non e' accessibile, ma disponiamo solo di misure delle uscite. Ci proponiamo di progettare un sistema che, alimentato da ingressi ed uscite del sistema oggetto dello studio, fornisca una stima ξ delle variabili di stato x del sistema con un errore di stima $e = x - \xi$ che si annulli asintoticamente. Chiameremo il sistema che fornisce la stima dello stato osservatore asintotico dello stato.

Costruiamo ora una replica del sistema, cioe' un sistema con le stesse equazioni ed alimentato dallo stesso ingresso:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$
$$\xi(0) = \xi_0$$
$$\tilde{y} = C\xi$$

La replica differisce dal sistema originario solo per lo stato iniziale, che non noto. Se lo stato iniziale fosse noto senza incertezza, l' uscita vera y e la sua replica $\tilde{y}$ coinciderebbero. In presenza di incertezza sullo stato iniziale si forma un errore tra le due uscite. Appare allora ragionevole correggere le equazioni dinamiche della replica del sistema con un termine che pesi la differenza tra y e $\tilde{y}$

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi} = A\xi + Bu + L(y - \tilde{y}) \\
&\xi(0) = \xi_0 \\
&\tilde{y} = C\xi
\end{aligned}$$

Dobbiamo trovare sotto quali condizioni il ricostruttore opera correttamente, ossia produce una stima dello stato ξ che differisce dallo stato vero x per un errore limitato nel tempo e asintoticamente nullo. Per questo, riscriviamo le equazioni del sistema e del ricostruttore,

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu \\
&\dot{\xi} = A\xi + Bu + LC(x - \xi)
\end{aligned}$$

Sottraiamo membro a membro le equazioni:

$$\dot{x} - \dot{\xi} = (A - LC)(x - \xi)$$

Introducendo quindi la variabile $e = x - \xi$ errore nella stima dello stato, si ottiene l' equazione dinamica

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

L' errore e' quindi governato da un sistema privo di ingresso di matrice dinamica A-LC. Se quindi fossimo in grado di scegliere la matrice L in modo tale da posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice A-LC, potremmo anzitutto assegnarli nel semipiano sinistro, in modo da rendere la dinamica dell' errore asintoticamente stabile, e anche scegliere arbitrariamente la velocita' con cui l' errore di stima tende a zero.

E' possibile progettare un osservatore asintotico dello stato con modalita' di convergenza stabilite a priori se e solo se la coppia di matrici (A,C) e' osservabile.

$$L^T = \text{place}(A^T, C^T, [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) \quad L = (L^T)^T$$

E' possibile progettare un osservatore asintotico dello stato se almeno la coppia di matrici (A,C) e' rilevabile ovvero gli autovalori del sottospazio non osservabile appartengono al semipiano sinistro.

2.1 Progetto di L nel caso di (A,C) rilevabile

$$\dot{e} = (A - LC)e$$
$$\hat{e} = Te$$
$$\dot{\hat{e}} = T\dot{e} = T(A - LC)e = T(A - LC)T^{-1}\hat{e} = (\hat{A} - \hat{L}\hat{C})\hat{e}$$

Decomposizione rispetto alla osservabilita' $\quad rango[M_o] = \rho < n$

$$[\hat{A}\ \hat{B}\ \hat{C}\ T\ l] = obsvf(A, B, C)$$
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$
$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \end{bmatrix} \quad \hat{L}_{n\times q} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix}$$

$$L_{21}^T = \text{place}(a_{22}^T, c_{12}^T, [\lambda_1, \cdots, \lambda_\rho]) \quad L_{21} = (L_{21}^T)^T$$
$$L_{11} = 0_{(n-\rho)\times q}$$
$$L = T^{-1}\hat{L}$$

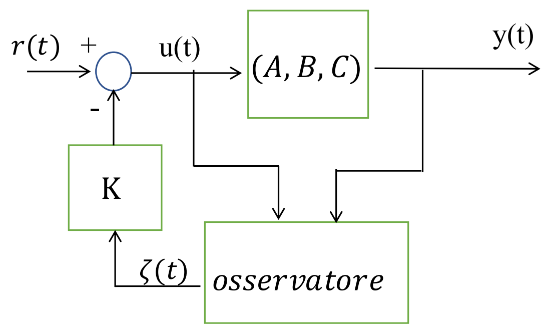
Una volta progettato il ricostruttore dello stato, ci si chiede se sia possibile risolvere il problema dell'assegnamento degli autovalori con una legge di controllo agente sulla stima dello stato: $u(t) = -K\xi(t) + r(t)$.

Ci poniamo nelle ipotesi che la coppia (A, B) sia raggiungibile e la coppia (A, C) osservabile. Scriviamo le equazioni del sistema sotto controllo, dell'osservatore e della legge di controllo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\xi(t) + Br(t) \\ \dot{\xi}(t) &= LCx(t) + (A - BK - LC)\xi(t) + Br(t) \end{aligned}$$

La rappresentazione in spazio di stato del sistema in anello chiuso risulta essere

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Effettuando un cambiamento di variabili di stato, esprimiamo il sistema nelle variabili $x(t)$ e $e(t) = x(t) - \xi(t)$. Sottraendo membro a membro le equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BKe(t) + Br(t) \\ \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t)\end{aligned}$$

La matrice dinamica del sistema in anello chiuso e' quindi:

$$A_f = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

e risulta triangolare a blocchi. Ne consegue che gli autovalori della matrice sono l'unione degli autovalori delle due sottomatrici, A-BK e A-LC, sulla diagonale. Sappiamo che se la coppia (A, B) e' raggiungibile, siamo in grado di posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice A-BK e che, se la coppia (A, C) e' osservabile, siamo in grado di posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice A-LC.

Conclusione: E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema in anello chiuso misurando la sola uscita del sistema se e solo se il sistema e' raggiungibile e osservabile.

Osservazioni 1. Di fatto se il sistema di ordine n si perviene ad un sistema dinamico in anello chiuso di ordine 2n i cui autovalori sono posizionabili arbitrariamente. Naturalmente se si usassero ricostruttori di ordine ridotto si perverrebbe ad un sistema in anello chiuso di ordine ridotto.

2. Si osservi che vige un importante principio di separazione: si puo' progettare la legge di controllo K come se lo stato fosse misurabile e si puo'

progettare il ricostruttore dello stato (matrice L) come se il sistema sotto controllo fosse in anello aperto.

3. Il fatto che gli autovalori del sistema in anello chiuso possano essere scelti in modo arbitrario naturalmente da intendersi come un risultato di notevolissima valenza concettuale, ma al quale vanno associate anche delle limitazioni di ordine pratico. Apparirebbe infatti possibile rendere un sistema in anello chiuso arbitrariamente piu' veloce del sistema in anello aperto, spostando gli autovalori in posizioni arbitrariamente lontane. E' evidente che cio' comporta conseguenze sulla variabile di controllo, che puo' risultare sollecitata in modo del tutto incompatibile con i limiti fisici degli attuatori.

4. L'osservatore dello stato non influenza il legame ingresso/uscita

$$A_f = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}, \ B_f = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \ C_f = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix};$$

$$W(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B_f = C(sI - (A - BK))^{-1}B$$