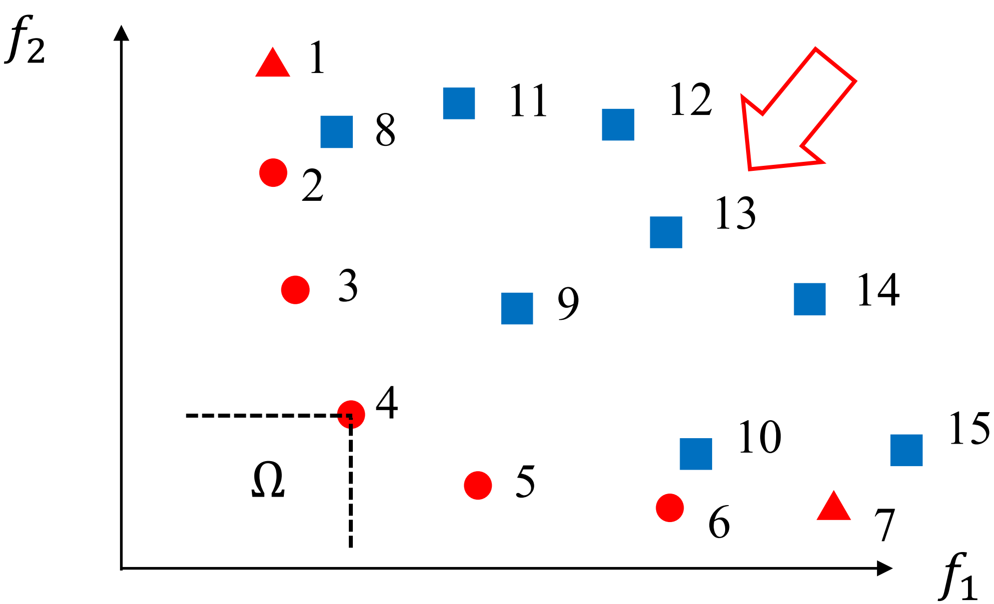
最適化理論 第11回

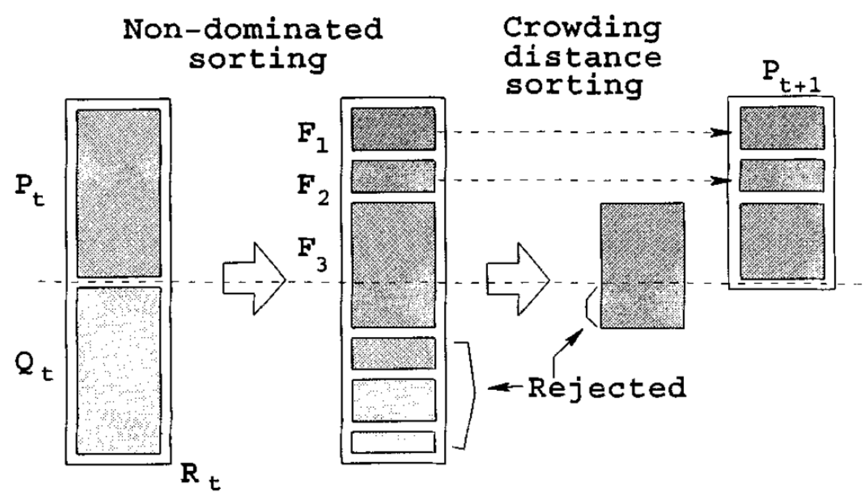
多目的最適化

$$f_1(\boldsymbol{x}) \to \min. \qquad f_2(\boldsymbol{x}) \to \min.$$

subjected to

$$g(\boldsymbol{x}) = 0$$
$$h(\boldsymbol{x}) \leq 0$$





NSGAIIのアルゴリズム

遺伝的アルゴリズムの循環セールスマン問題への適用

組み合わせ数: $c = \frac{(n-1)!}{2} = 4.34 \times 10^{36}$

遺伝的アルゴリズム:スキーマ定理

ビット型遺伝子　　$\langle 10010011 \rangle$

スキーマ:　部分的な遺伝子座.　例:$H = 1 ** 1$　$*$はdon't careを表す.

スキーマ H を持つ個体の例

$\langle 11110010 \rangle$　　$\langle 00010011 \rangle$

定義長:スキーマの長さ　$\delta(H) = 3$
(スキーマ中の遺伝子座間の境目の数)

$l = 8$

$H = *** 1 ** 1 *$

$\delta(H) = 3$

オーダ(次数):スキーマ中の*以外の数　$O(H) = 2$

スキーマ定理:単純遺伝的アルゴリズムを用いるとする.世代 t において
スキーマ H を持つ個体数を $m(H, t)$と表す.

突然変異・交叉を行わない場合:

$$m(H, t+1) \approx \frac{f(H)}{\bar{f}} m(H, t)$$

$\bar{f}$ は全個体の適合度の平均, $f(H)$はスキーマ H を持つ個体の適合度の平均

スキーマ定理

突然変異・交叉(1点交叉)を行う場合

$$\frac{\delta(H)}{l-1} = \frac{3}{7}$$

$$H = *\,*\,*\,1\,0\,*\,1\,*$$

$$m(H, t+1) \geq \frac{f(H)}{\bar{f}} m(H,t) \left(1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} - O(H) p_m\right)$$

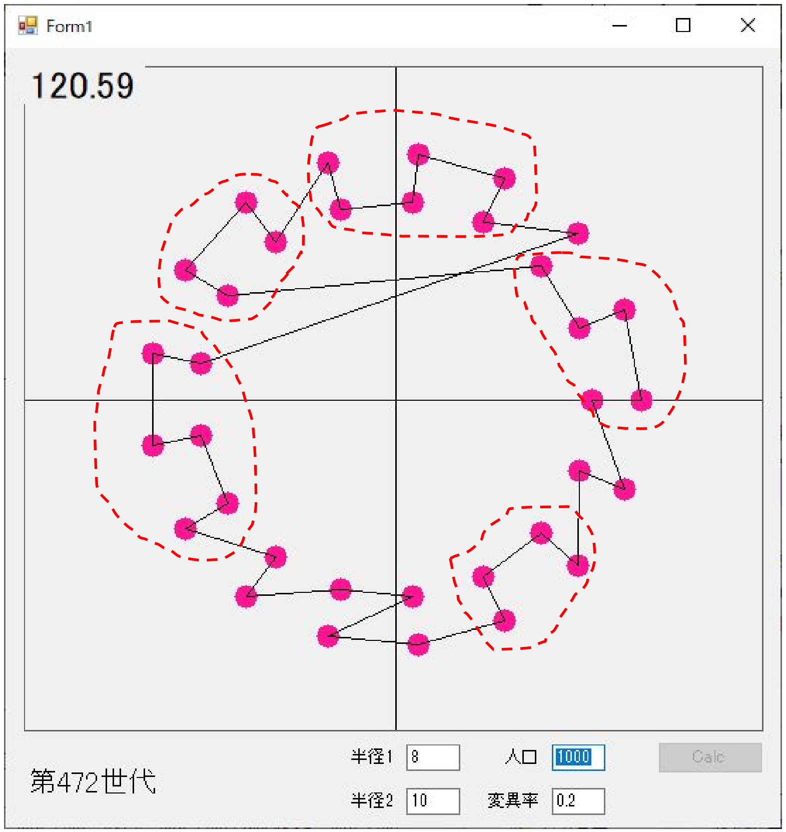
l は遺伝子長，p_c, p_mはそれぞれ交叉および突然変異確率
不等号は，交叉により新たにHを含む場合などもあるため

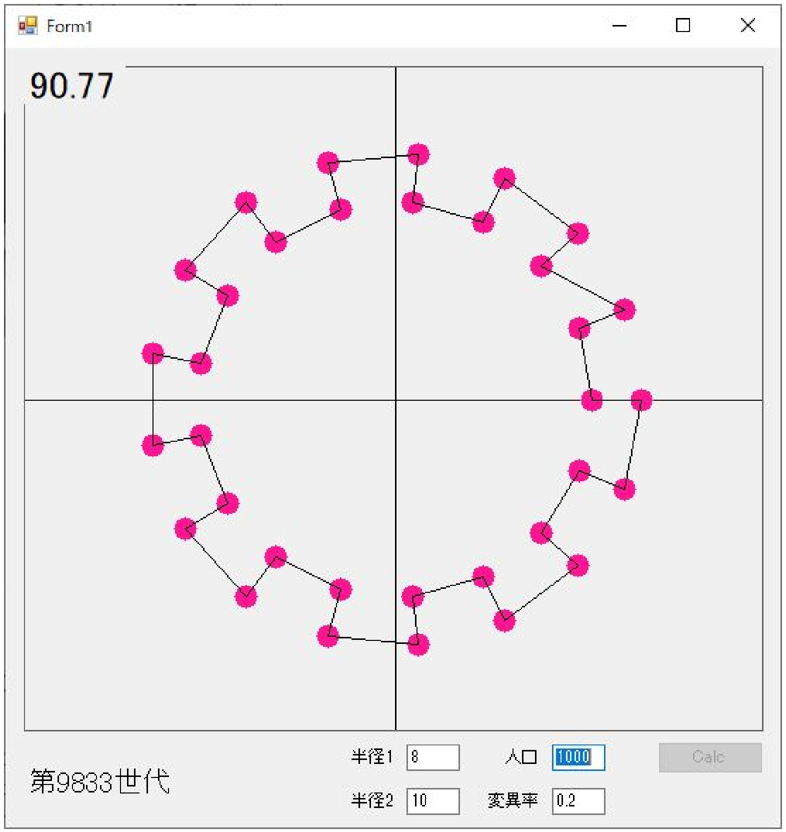
スキーマ定理からの帰結
(1)評価値の高いスキーマを持つ個体数が増加する
(2)同じ評価値のとき，$\delta(H)$が短く，$O(H)$が小さな個体が増加する.

積み木仮説(building-block hypothesis)

短く評価値の高いスキーマが交叉により結合され，高い適合度を持つ遺伝子が構成されていく. この過程により最適解に近づいていく.

評価値が高いスキーマの例





472世代の個体は，評価値が高いスキーマを含んでいる

9833世代．右図のスキーマを多く含んでいることが分かる

計算知能工学履修生　高石一平君のプログラムによる

GA困難問題

競合スキーマ:

H と H' が競合スキーマであるとは，$*$の位置が完全に一致して，しかも固定されているいずれかの遺伝子座の値が異なる場合を言う.

だまし的:

$f(x)$の最大値を与える x の集合をXとする．H はXの要素を含まないある次数mのスキーマとする．このとき，H に対してそれに競合する別のあるスキーマH'との間に

$$f(H) > f(H')$$

が成立するとき，f は次数 m でだまし的と言う.

だまし関数の例:

$f(111)$が最大値のとき，つぎの不等式のうちひとつでも成立すれば，f はだまし的である(不等式では，*の部分を変化させたときの平均値を評価する).

次数1: $f(**1) < f(**0), f(*1*) < f(*0*), f(1**) < f(0**)$

次数2: $f(*11) < f(*00), f(*11) < f(*01), f(*11) < f(*10),$

$f(11*) < f(00*), f(11*) < f(01*), f(11*) < f(10*),$

など$\rightarrow$課題

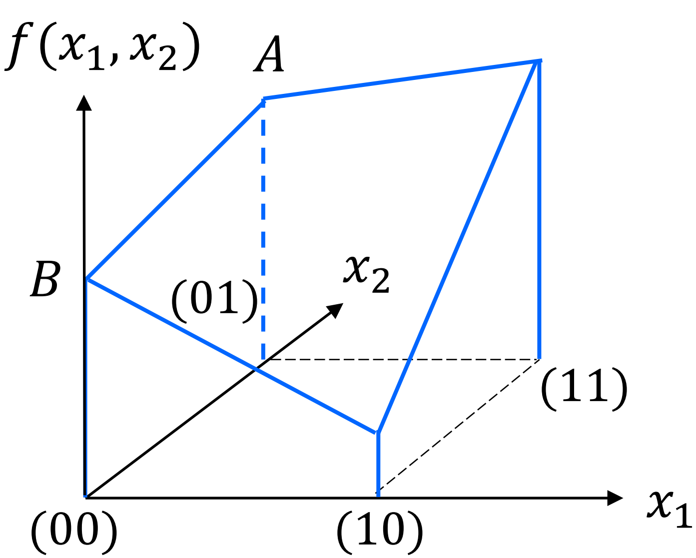
坂和，田中「遺伝的アルゴリズム」，朝倉書店

GA困難問題

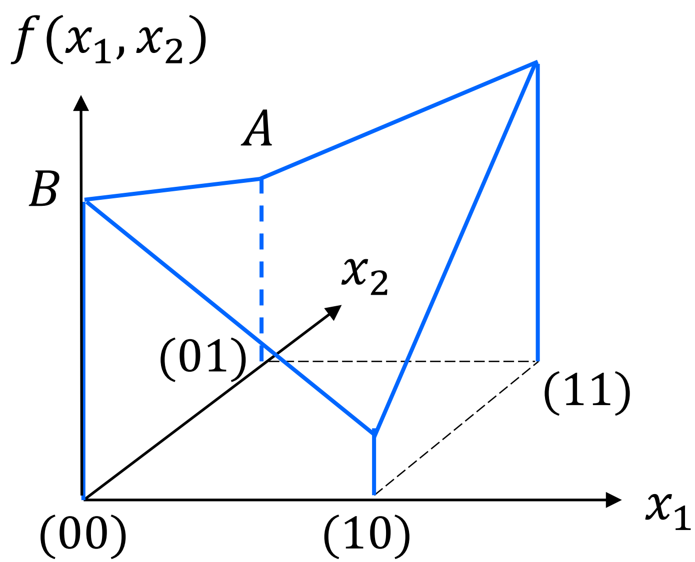
だまし関数のタイプ:

Goldbergは2ビットの最大化問題において，二つのクラスのだまし問題を定義した．11が最適解であるが，$H(0*) > H(1*)$であるものとする．すなわち

$$\frac{f(00)+f(01)}{2} > \frac{f(10)+f(11)}{2}$$



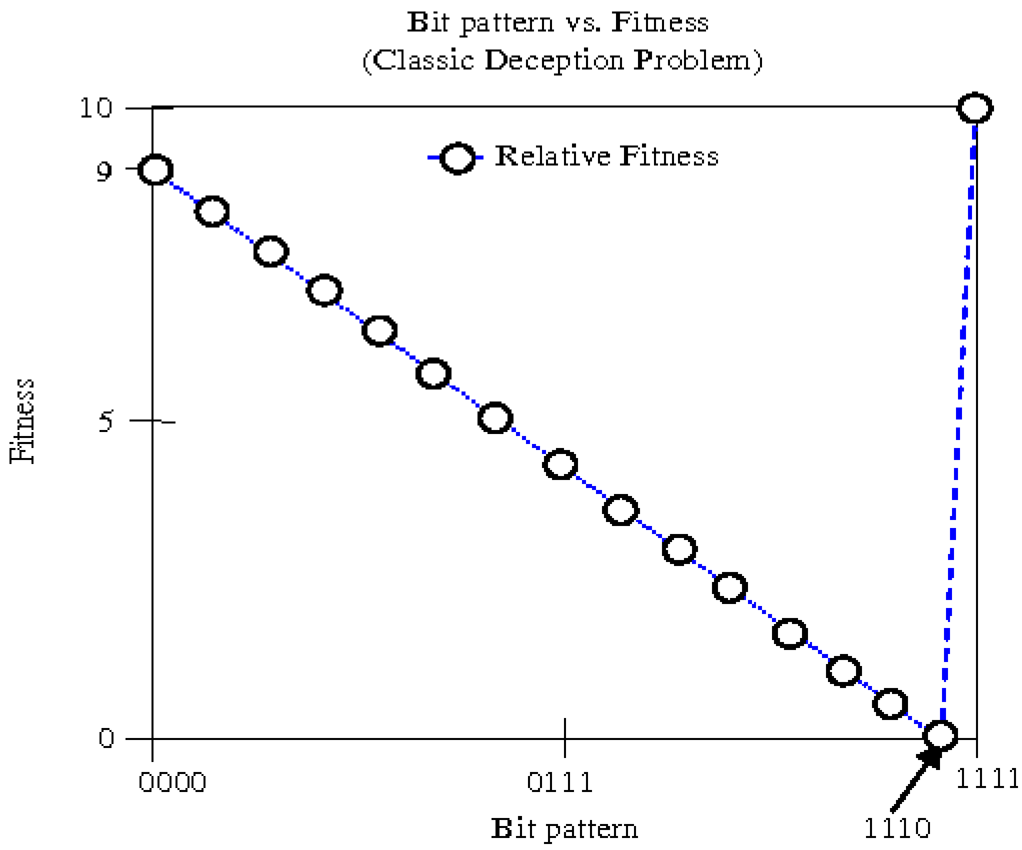
type I $f(A) > f(B)$



type II $f(A) < f(B)$

坂和，田中「遺伝的アルゴリズム」，朝倉書店

GA困難問題



https://www.semanticscholar.org/paper/Multi-objective-fast-messy-genetic-algorithm-Day-Kleeman/be1c13eade5f02078bbc1b50c085933e620636bb

GP困難問題の例

遺伝的アルゴリズムを用いた同期リラクタンスモータのトポロジー最適化

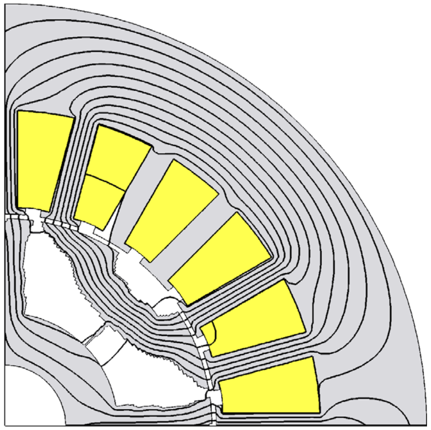


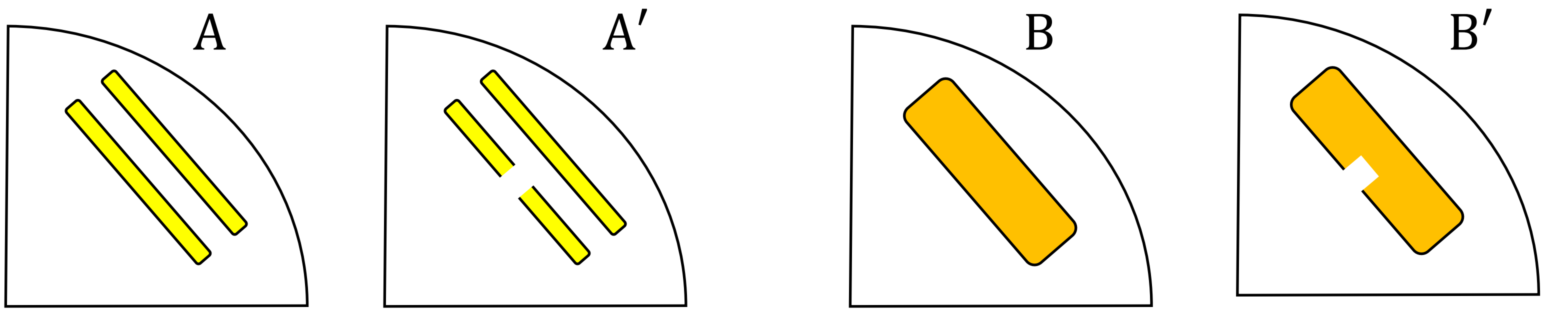
Fig.1 最適化結果

佐藤俊平　2014年度修士論文

Fig.2 広く使われている形状

https://new.abb.com/motors-generators/iec-low-voltage-motors/process-performance-motors/synchronous-reluctance-motors

最適解



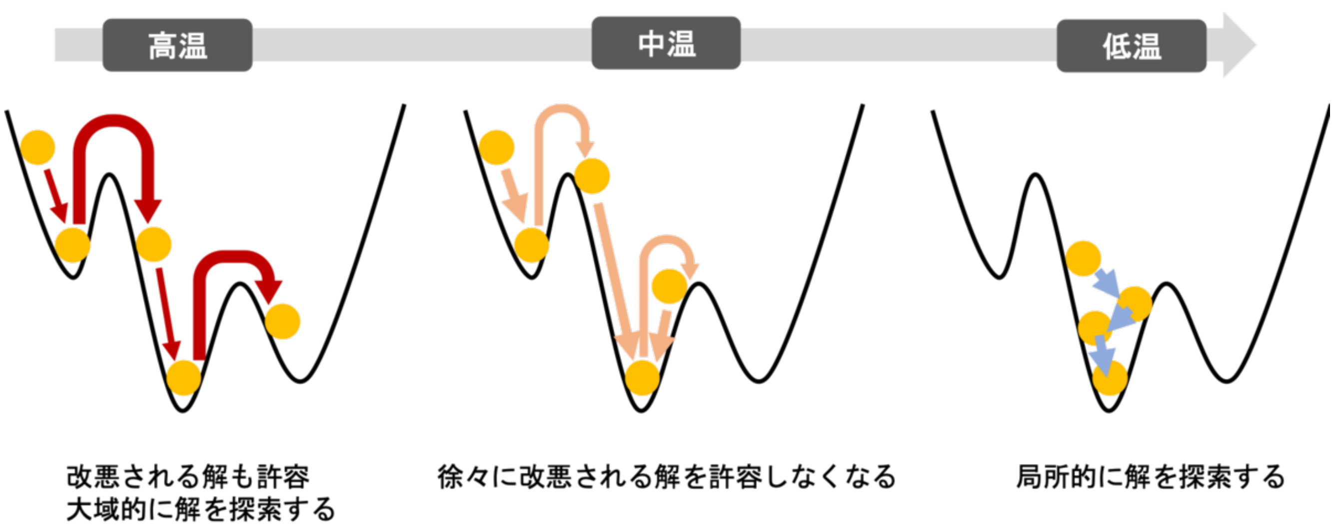
$f(**\ 10101010\ **) \gg f(**\ 10111010\ **)$　　$f(**\ 11111111\ **) \approx f(**\ 11101111\ **)$

$$f(**\ 101 * 1010\ **) < f(**\ 111 * 1111\ **)$$

焼きなまし法 simulated annealing (SA)

へぎ (小銭カウンター)

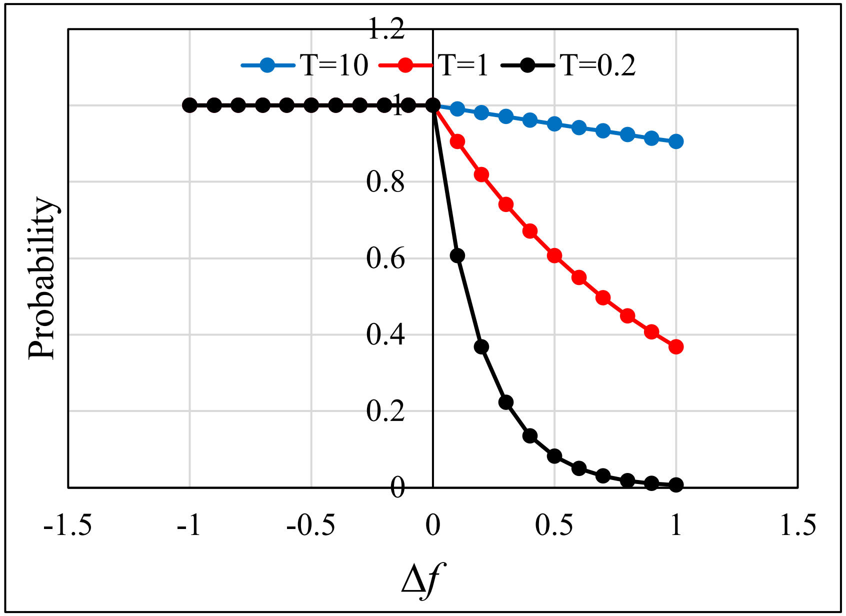
焼きなまし



焼きなまし法 https://kumagallium.hatenablog.com/entry/2019/07/24/124501

焼きなまし法のアルゴリズム

(1) 初期解 x の生成．初期温度 $T = T_0$の設定．
冷却率$0.8 \le \gamma \le 1$の設定．
(2) xの近傍$N(x)$から任意にx'を選ぶ．
(3) $\Delta f = f(x') - f(x)$を求める．($\Delta f > 0$なら改悪)
(4) $\Delta f \le 0$ なら確率 $P = 1$で受理
$\Delta f > 0$ なら確率 $P = e^{-\frac{\Delta f}{T}}$で受理
受理なら$x' \to x$
(5) 終了条件が満たされれば終了．それ以外は
$T \to \gamma T$として(2)にもどる．



焼きなまし法による最適化例

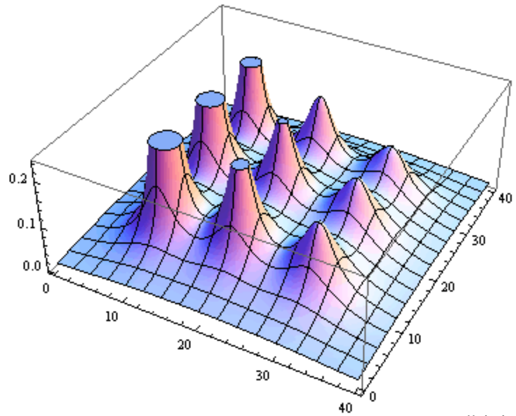


Fig.1 $f(\boldsymbol{x})$の分布

De-Jongの関数 f5

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1} \frac{1}{j + \sum_{i=1}^{N} (x_i - a_{ij})^2} \qquad (1)$$

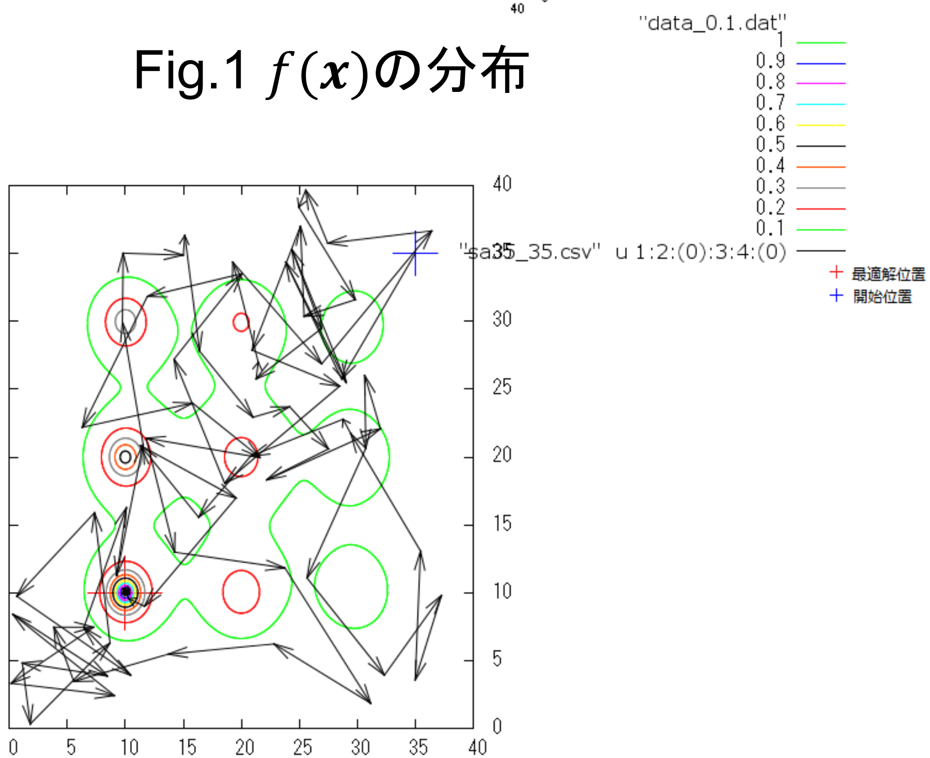


Fig.2 収束過程

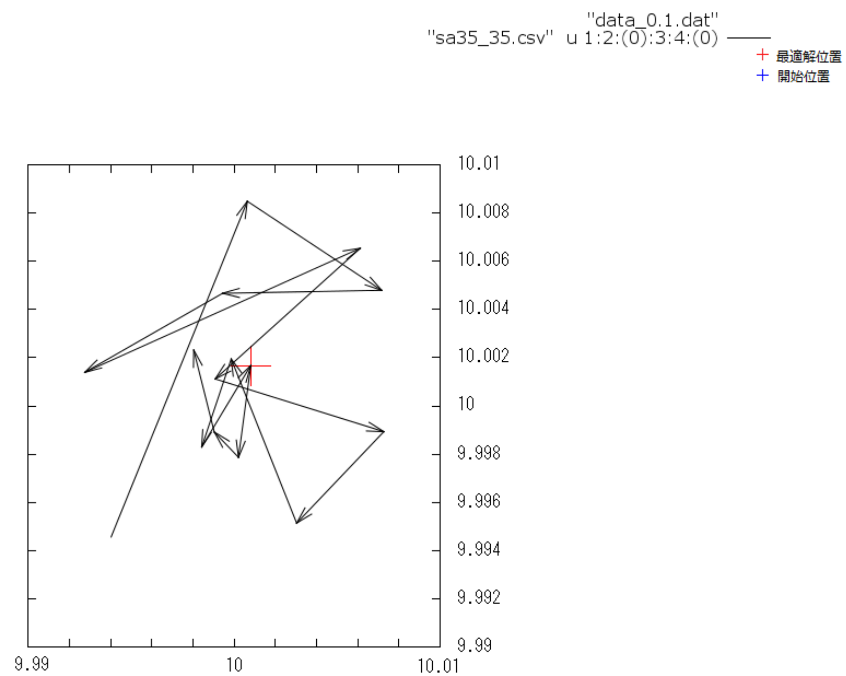


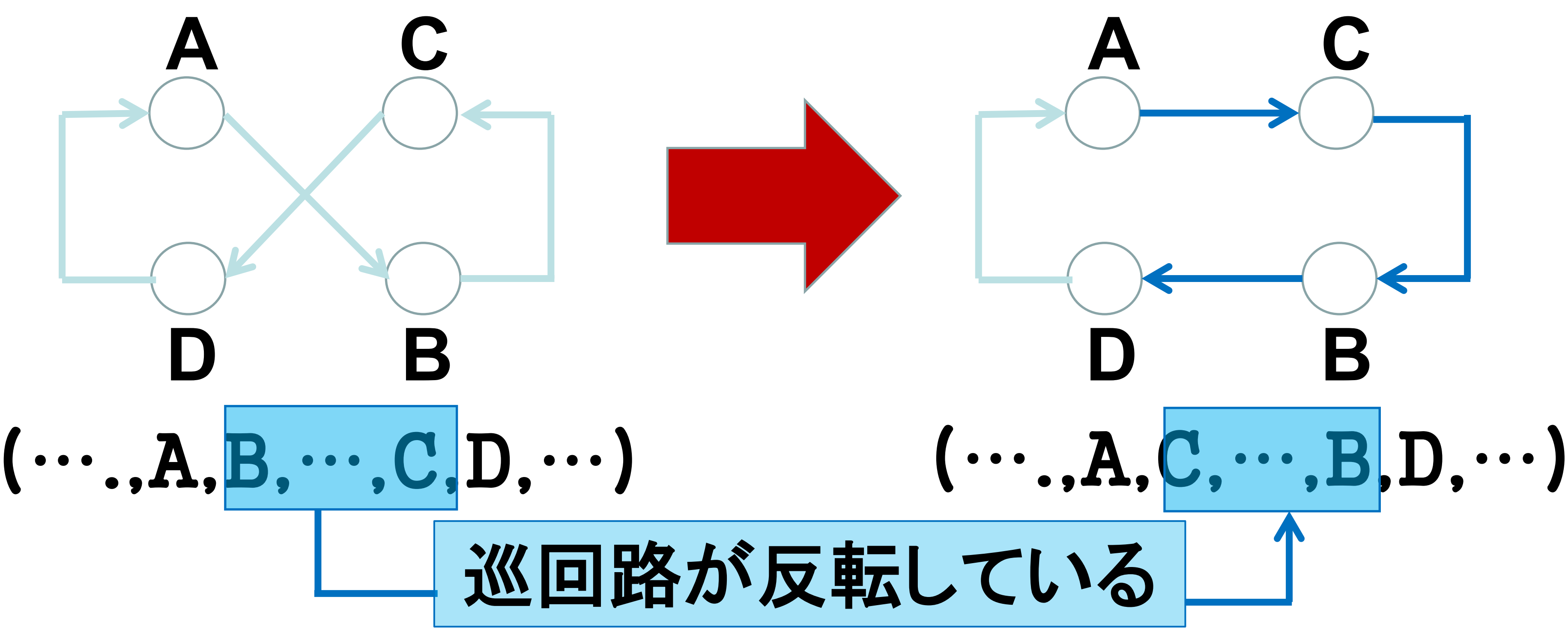
Fig.3 最適解近傍

巡回セールスマン問題
近傍解X’の求め方：2-opt法

①巡回路Tを作成する

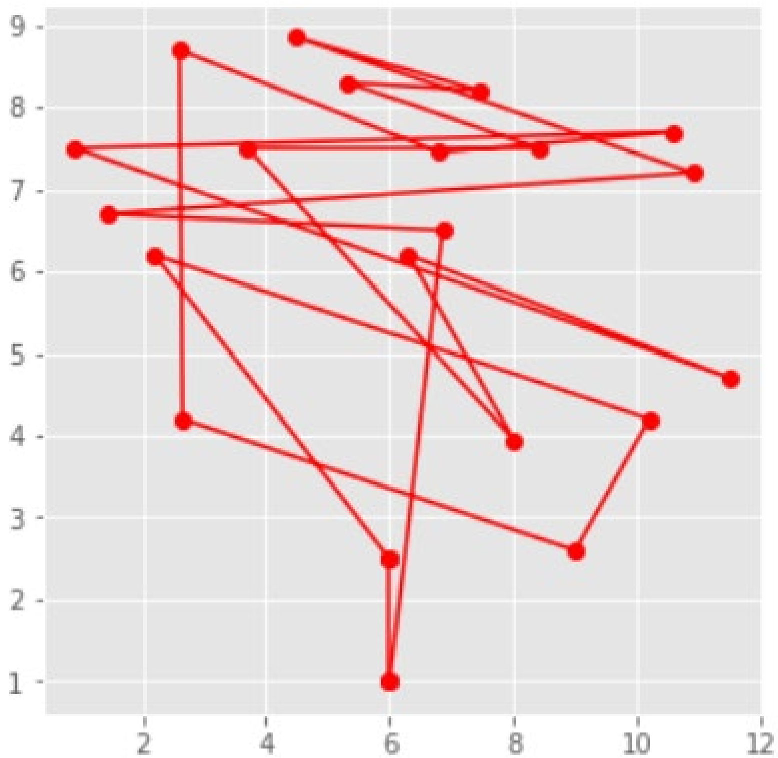
②2つの枝を入れ替える

③どの2つの枝を入れ替えても巡回路が改善できなくなったら終了

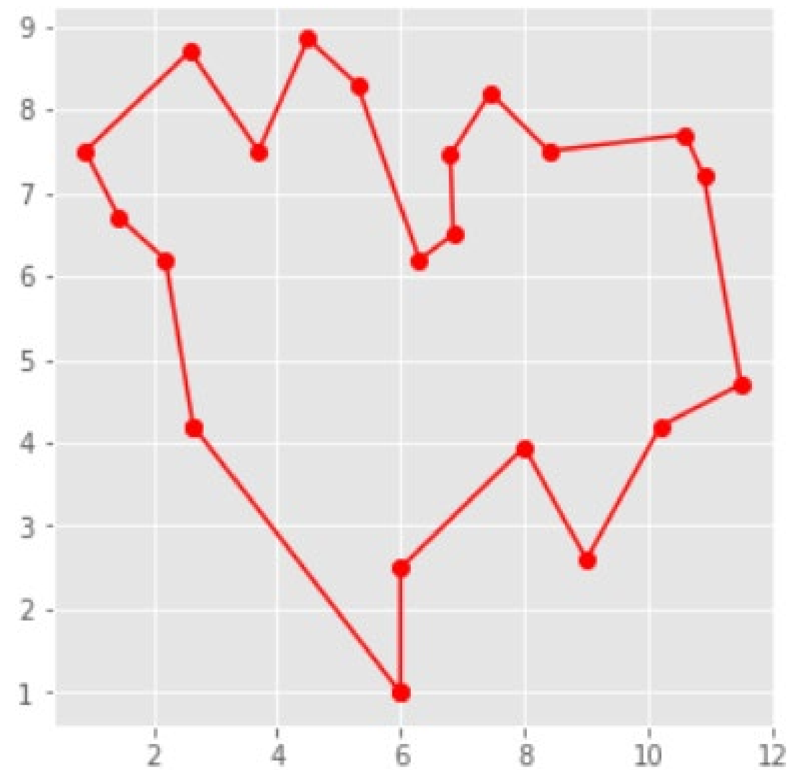


焼きなまし法の循環セールスマン問題への適用

TDLの人気トップ20アトラクションを巡礼
$T_0 = 1, \gamma = 0.95$



総移動距離：110.88
初期経路



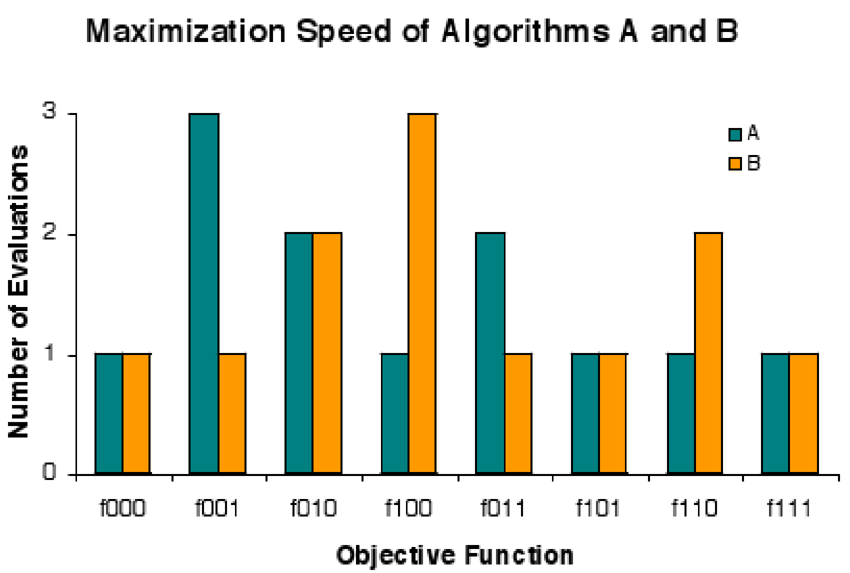
総移動距離：35.29
最適化後

計算知能工学履修生 大宝君による

ノーフリーランチ定理
no-free-lunch theorem

コストト関数の極値を探索するあらゆるアルゴリズムは，
全ての可能なコスト関数に適用した結果を平均すると同じ性能となる

すなわち，すべての最適化問題に関して，他より優れた万能アルゴリズムは存在しない．



https://en.wikipedia.org/wiki/No_free_lunch_in_search_and_optimization#/media/File:No_free_lunch_theorems_figure.png

課題11

(1)p.6の次数2のだまし問題には，他に3つの例がある．これらを列挙せよ．

(2)焼きなまし法で冷却率を1に極めて近くした場合たとえば，$\gamma = 0.999$の場合，どのようなことが起きるか，また逆に0に近くした場合はどのようになるか予想されることを述べよ．