Cours n° 5

Structures de données abstraites

Sommaire

Structure de données

Composition de données unies par une même sémantique

Sémantique d'une structure de données

Ensemble d'opérations abstraites définies sur les données
- Préconditions sur ces opérations et axiomatique

Utilisation de types abstraits de données (entiers, réels, …)

Implémentation d'une structure de données

Choix d'une structure concrète dans un langage donnée (C++, Java, …),
Critères de la réalisation
- Simplicité de l'implémentation
- Efficacité de l'accès aux données

Bibliographie

C. Carrez , «Structures de données en Java, C++ et Ada», Dunod.
www.cert.fr/dcsd/cd/MEMBRES/lemaitre/Enseignement/SA/polySA.pdf
www.nist.gov/dads (Dictionary of Algorithms and Data Structures)

Définition

Séquence d'éléments

$S = <e_1\ e_2\ e_3\ \ldots\ e_n>$ avec cardinalité(S) = n,
Opération successeur définie (précondition : sauf sur le dernier élément),
Type d'accès à un élément (séquentiel, direct)
Existence ou non d'une relation d'ordre entre éléments

Pile, File et Dèque (accès séquentiel à un élément, pas de relation d'ordre)

File à priorité (accès séquentiel à un élément, relation d'ordre)

Liste (accès direct à un élément), **Liste triée** (relation d'ordre)

Introduction

Séquence d'éléments accessibles par une seule extrémité appelée sommet

Modèle dernier entré – premier sorti (Last In – First Out) LIFO

Pile de quatre noms (Pn)

Définition abstraite

Type pile

Paramètre élément **utilise** booléen

Opérations

Pilevide : -> pile	Création d'une pile vide
Estvide : pile -> booléen	Est-ce que la pile est vide ?
Sommet : pile -> élément	Lecture du sommet d'une pile
Empiler : pile x élément -> pile	Ajout d'un élément en sommet de pile
Dépiler : pile -> pile	Suppression du sommet de pile

Préconditions (pile p, élément e)

Sommet(p) : ⌝Estvide(p)
Dépiler(p) : ⌝Estvide(p)

Sémantique (pile p, élément e)

Estvide(Pilevide),
⌝Estvide(Empiler(p,e)),
Sommet(Empiler(p,e)) := e
Dépiler(Empiler(p,e)) := p

Exemple

Création de la pile Pn

Pn := Pilevide

Empiler(Pn, Paul) Empiler(Pn, Luc) Empiler(Pn, André) Empiler(Pn, Michel)

Suite d'actions

Dépiler(Pn) Empiler (Pn, Jean) Dépiler(Pn) Dépiler(Pn) e : = Sommet(Pn)

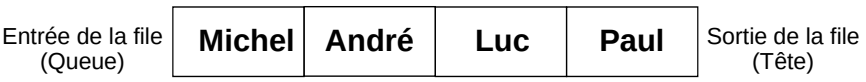
Question 1) Quelle est la valeur de l'élément e ?

Question 2) Dessiner la pile Pn

Introduction

Séquence d'éléments accessibles par deux extrémités appelées Tête et Queue (une en lecture, une en écriture)

Modèle premier entré – premier sorti (First In – First Out) FIFO



File de quatre noms (Fn)

Définition abstraite

Type file
Paramètre élément **utilise** booléen
Opérations

Filevide : -> file	Création d'une file vide
Estvide : file -> booléen	Est-ce que la file est vide ?
Tête : file -> élément	Lecture de l'élément en tête de file
Ajouter : file x élément -> file	Ajout d'un élément en queue de file
Retirer : file -> file	Suppression de l'élément en tête de file

Préconditions (file f, élément e)
Tête(f) : ⌉Estvide(f)
Retirer(f) : ⌉Estvide(f)
Sémantique (file f, élément e)
Estvide(Filevide),
⌉Estvide(Ajouter(f,e)),
Tête(Ajouter(f,e)) := si Estvide(f) alors e sinon tête(f) fsi
Retirer(Ajouter(f,e) := si Estvide(f) alors Filevide sinon Ajouter(Retirer(f), e) fsi

Exemple

Création de la file Fn

Fn := Filevide

Ajouter(Fn, Paul) Ajouter(Fn, Luc) Ajouter(Fn, André) Ajouter(Fn, Michel)

Suite d'actions

Retirer(Fn) Ajouter (Fn, Jean) Retirer(Fn) Retirer(Fn) e : = Tête(Fn)

Question 1) Quelle est la valeur de l'élément e ?

Question 2) Dessiner la file Fn

Introduction

Séquence d'éléments accessibles par deux extrémités appelées Gauche et Droite (en lecture et en écriture)

Propriétés cumulés d'une pile et d'une file

Entrée/sortie gauche de la dèque

Michel	André	Luc	Paul

Entrée/sortie droite de la dèque

Dèque de quatre noms (Dn)

Définition abstraite

Type dèque
Paramètre élément **utilise** booléen
Opérations

Dèquevide : -> dèque	Création d'une dèque vide
Estvide : dèque -> booléen	Est-ce que la dèque est vide ?
Extrémité : dèque x sens -> élément	Lecture de l'élément d'une l'extrémité
Ajouter : dèque x élément x sens -> dèque	Ajout d'un élément à une extrémité
Retirer : dèque x sens -> dèque	Suppression d'un l'élément à une extrémité

Préconditions (dèque d, élément e, sens s)
Extrémité(d, s) : ⌉Estvide(d) Retirer(d, s) : ⌉Estvide(d)
Sémantique (dèque d, élément e, sens s)
Estvide(Dèquevide), ⌉Estvide(Ajouter(d,e,s)),
Extrémité(Ajouter(d,e, s), ⌉s) := si Estvide(d) alors e sinon extrémité(d, ⌉s) fsi
Retirer(Ajouter(d,e, s), ⌉s) := si Estvide(d) alors Dèquevide
sinon Ajouter(Retirer(d,⌉s), s) fsi
Retirer(Ajouter(d,e, s), s) := d

Exemple

Création de la dèque Dn

Dn := Dèquevide

Ajouter(Dn, André, gauche) Ajouter(Dn, Luc, droite)

Ajouter(Dn, Michel, gauche) Ajouter(Dn, Paul, droite)

Suite d'actions

Retirer(Dn, gauche) Ajouter (Dn, Jean, droite) Retirer(Dn, gauche)

Retirer(Dn, droite) e : = Extrémité(Dn, gauche)

Question 1) Quelle est la valeur de l'élément e ?

Question 2) Dessiner la dèque Dn

Introduction

Séquence d'éléments accessibles par leur indice

Accès direct à un élément

Eléments	Michel	André	Luc	Paul
Indice	1	2	3	4

Liste de quatre noms (Ln)

Définition abstraite

Type liste

Paramètre élément, entier positif (indice) **utilise** entier positif

Opérations

Listevide : -> liste	Création d'une liste vide
Longueur : liste -> entier	Nombre d'éléments de la liste
Lire : liste x entier -> élément	Lecture de l'élément d'indice donné
Insérer : liste x élément x entier -> liste	Insertion d'un élément à un indice donné
Supprimer : liste x entier -> liste	Suppression de l'élément d'indice donné

Préconditions (liste l, élément e, entier i)

Lire(l, i) : ¬(Longueur(l) < i)

Supprimer(l, i) : ¬(Longueur(l) < i), Insérer(l, e, i) : ¬(Longueur(l) < i-1),

Sémantique (liste l, élément e, entiers i et j)

Longueur(Listevide) := 0,

Longueur(Insérer(l,e,i) := Longueur(l)+1, Longueur(Supprimer(l,e,i) := Longueur(l)-1,

Lire(Insérer(l,e,i), j) := si (j < i) alors Lire(l, j) sinon Lire(l,j-1)

Lire(Supprimer(l,i), j) := si (j < i) alors Lire(l, j) sinon Lire(l,j+1)

Supprimer(Insérer(l, e, i), i) := l

Exemple

Création de la file Ln

Ln := Listevide

Insérer(Ln, André, 1) Insérer(Ln, Michel, 1)

Insérer(Ln, Luc, 3) Insérer(Ln, Paul, 4)

Suite d'actions

Supprimer(Ln, 1) Insérer(Ln, Jean, 2) Supprimer(Ln, 1)

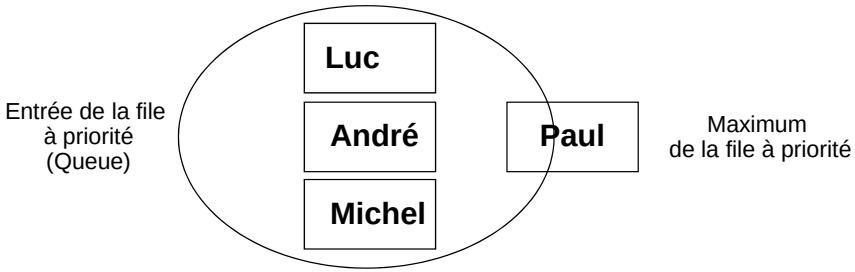
Supprimer(Ln, 2) e : = Lire(1)

Question 1) Quelle est la valeur de l'élément e ?

Question 2) Dessiner la liste Ln

Introduction

Structure de File + relation d'ordre entre les éléments



File à priorité de quatre noms (FPn)

Ordre lexicographique

Définition abstraite (1/2)

Type file à priorité

Paramètre élément **utilise** booléen

Opérations

Filevide : -> file à priorité — Création d'une file vide
Estvide : file à priorité -> booléen — Est-ce que la file est vide ?
Ordre : élément x élément -> booléen
Est-ce que les deux éléments sont dans le bon ordre?
Tête : file à priorité -> élément
Lecture de l'élément d'ordre maximal
Ajouter : file à priorité x élément -> file à priorité
Ajout d'un élément en queue de file
Retirer : file à priorité -> file à priorité
Suppression de l'élément de rang maximum

Préconditions (file à priorité fp, élément e)

Tête(fp) : ⌝Estvide(fp),
Retirer(fp) : ⌝Estvide(fp)

Définition abstraite (2/2)

Sémantique (file à priorité fp, élément e)

Estvide(Filevide),
⌝Estvide(Ajouter(fp,e)),
Tête(Ajouter(fp,e)) := si Estvide(fp) alors e sinon
si Ordre(Maximum(fp), e) alors e sinon Tête(fp) fsi fsi

Retirer(Ajouter(fp,e) := si Estvide(fp) alors Filevide sinon
si Ordre(Tête(fp), e) alors fp sinon Ajouter(Retirer(fp), e) fsi fsi

Exemple

Création de la file FPn

FPn := Filevide

Ajouter(FPn, Paul) Ajouter(FPn, André) Ajouter(FPn, Luc) Ajouter(FPn, Michel)

Suite d'actions

Retirer(FPn) Ajouter (FPn, Jean) Retirer(FPn) Retirer(FPn) e : = Maximum(FPn)

Question 1) Quelle est la valeur de l'élément e ?

Question 2) Dessiner la file FPn

Définition abstraite (1)

Type liste triée (extension liste)
Paramètre élément, entier positif (indice) **utilise** entier positif
Opérations

Ordre : élément x élément -> booléen	Relation d'ordre entre éléments
Premier : liste -> élément	Premier élément de la liste
Dernier : liste -> élément	Dernier élément de la liste
ListeInf : liste x entier -> liste	Liste des i premiers éléments
ListeSup : liste x entier -> liste	Liste des i derniers éléments
EstTriée : liste -> booléen	Est-ce une liste triée dans l'ordre?
EstTriéeI : liste -> booléen	Est-ce une liste triée dans l'ordre inverse?

Sémantique (liste l, élément e, entiers i et j)
Premier(l) := Lire(l, 0),
Dernier(l) := Lire(l, Longueur(l)-1)
ListeInf(l , i) := si (longueur(l) <= i) alors l sinon ListeInf(Supprimer(l, i))
ListeSup(l , i) := si (longueur(l) <= i) alors l sinon ListeInf(Supprimer(l, 0))

Définition abstraite (2)

EstTriée (l) := si (Longueur(l) = 0) alors vrai
sinon (Ordre(premier(l), premier(ListeSup(Longueur(l)-1)))
et EstTriée(ListeSup(Longueur(l)-1)))
EstTriéeI(l) := si (Longueur(l) = 0) alors vrai
sinon (Ordre(premier(ListeSup(Longueur(l)-1)), premier(l))
et EstTriéeI(ListeSup(Longueur(l)-1)))

Définitions

Ensemble X d'éléments (sommets) reliés deux à deux par des arcs valués

$u_{(x, y,)}$ arc du sommet x au sommet y avec comme valeur $v(u_{(x, y,)})$
G = <X ,U> avec U ensemble des arcs,
ordre(G) = cardinalité(X) = n, cardinalité(U) <= n^2

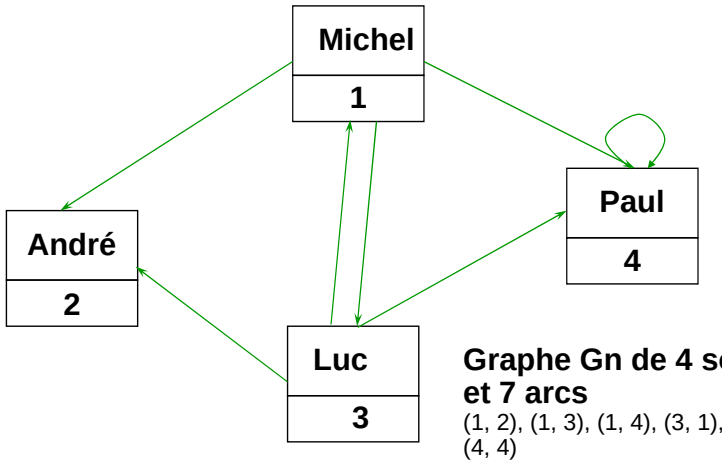
Graphe non orienté

si $u_{(x, y,)}$ existe, alors $u_{(y, x)}$ existe et $v(u_{(x, y,)}) = v(u_{(y, x,)})$

Arbre

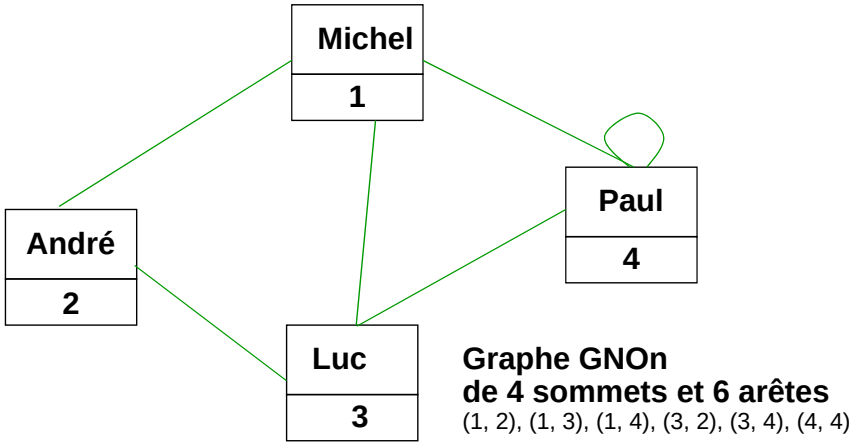
Sommet particulier appelé racine,
Chemin (suite d'arcs) unique de la racine jusqu'à chaque sommet,
Graphe connexe sans cycle

Exemple de graphe orienté



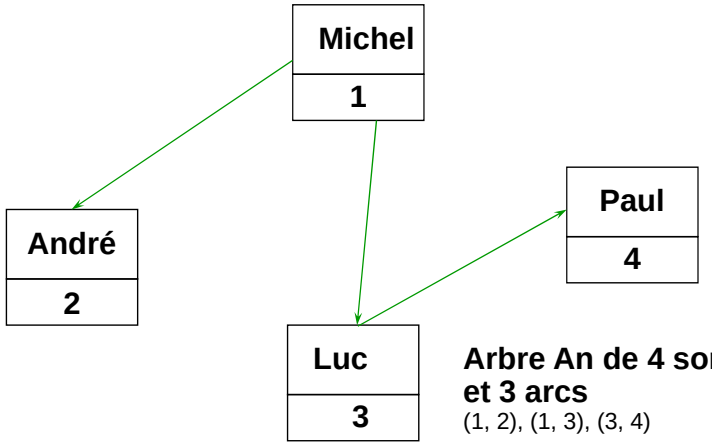
Graphe Gn de 4 sommets et 7 arcs
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 4)

Exemple de graphe non-orienté



Graphe GNOn
de 4 sommets et 6 arêtes
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 4)

Exemple d'arbre



Arbre An de 4 sommets
et 3 arcs
(1, 2), (1, 3), (3, 4)

Définition abstraite

Type graphe
Paramètre sommet **utilise** booléen
Opérations

Graphevide : -> graphe vide	Création d'un graphe vide
Ordre : graphe -> entier	Nombre de sommets
Arc : graphe x sommet x sommet -> booléen	Existence d'un arc
d+ : graphe x sommet -> entier	Nombre d'arcs partant d'un sommet
d- : graphe x sommet -> entier	Nombre d'arcs arrivant à un sommet

AjouterArc : graphe x sommet x sommet -> graphe
SupprimerArc : graphe x sommet x sommet -> graphe
AjouterSommet : graphe x sommet ->graphe
SupprimerSommet : graphe x sommet -> graphe

Sémantique (graphe g, sommets s1 et s2, entier i)
Ordre(Graphevide) := 0,

Exemple

Création de l'arbre An

An := Graphevide
AjouterSommet (An, Michel), AjouterSommet (An, André),
AjouterSommet (An, Luc), AjouterSommet (An, Paul),
AjouterArc (An, Michel, André), AjouterArc (An, Michel, Luc),
AjouterArc (An, Luc, Paul),

Suite d'actions

SupprimerSommet(An, Luc), AjouterSommet (An, Jean),

SupprimerSommet(An, Paul), AjouterArc (An, Michel, Jean),

b : = Arc(Luc, Paul)

Question 1) Quelle est la valeur de b ?

Question 2) Dessiner l'arbre An

Matrice d'adjacence

Matrice booléenne *A* de taille *N*×*N*

A_{ij} = 1 ssi l'arc (*i*, *j*) est dans le graphe

Taille : o(N^2)

Matrice de poids *W* pour un graphe pondéré

Avantages

détection facile des boucles, de la symétrie ;
test immédiat de l'existence d'un arc (*i*, *j*) ;
énumération facile des prédécesseurs / successeurs.

Inconvénients

Taille N^2, même si graphe peu dense ($M << N^2$) ;
désavantageux pour la complexité de certains algorithmes.

Listes d'adjacence

Codage par listes des successeurs

TSUC = liste des listes de successeurs

Exemple

Succ(*1*) = {*2*, *3*, *4*}, Succ(*2*) = {}, Succ(*3*) = {*1*, *2*, *4*} {}, Succ(*4*) = {*4*}

Avantages

Taille *N*+*M* (intéressant si $M << N^2$) ;
avantageux pour la complexité de certains algorithmes ;
calcul facile de $d^+(i)$.

Inconvénients

pas de test immédiat de la présence d'un arc ;
pas d'accès direct aux prédécesseurs.

Principe

Chemin passant une et une seule fois par tous les sommets (graphe connexe)

Deux types classiques de parcours : Largeur et Longueur

Deux opérations supplémentaires

Marquer : sommet -> graphe Mise d'une marque sur un sommet donné
marque : sommet -> booléen Existence d'une marque sur un sommet donné

Algorithmes

Parcours en profondeur

```
Pour tout s de G faire si ⌉marque(s) alors Pprofondeur (G, s) fsi fpour
Pprofondeur :
        Marquer(s)
        Pour tout x de G tel que Arc(s, x) faire
                si ⌉marque(x) alors Pprofondeur (G, x) fsi
        fpour
```

Parcours en largeur

```
Pour tout s de G faire si ⌉marque(s) alors Plargeur (G, s) fsi fpour
Plargeur :
        Marquer(s) f := Filevide Ajouter (f, s)
        tantque ⌉Estvide(f) faire
                p := tête(f) Retirer(f)
                pour tout x de G tel que Arc(p, x) faire
                        si ⌉marque(x) alors Marquer(x) Ajouter (f, x) fsi
                fpour
        ftantque
```