数学系 2021 级常微分方程期中考查试卷

姓名____________班级________学号________成绩___

一、填空：（3*8=24 分）

1. ______联系着一个自变量和未知元及其导数的等式________称为常微分方程；

2. $x^2x''' + t^4\sin x' + (x')^5 = 1$ 为____三____阶微分方程；

3. 以 $\sin 2t, \cos 2t$ 为基本解组的二阶常系数齐线性方程为__$x''+4x=0$__；

4. 初值问题方程 $y' = 2x^2 + 3y^2,\ y(0) = 0,\ |x| \le 1, |y| \le 1$ 解的存在区间是__[-1/5, 1/5]__，

第二次逼近解 $\varphi_2(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{21}x^7$________；

5. 函数 $x_1(t), x_2(t), x_3(t) \in C^2[a,b]$ 线性相关的必要条件是__$W(x_1,x_2,x_3) \equiv 0,\ t \in [a,b]$__；

6. 方程 $x''' - x = 0$ 的通解为 _$x = c_1e^t + e^{\frac{-t}{2}}(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$________；

7. 若 $(y\sin x + ay^3\cos x)dx + (y^2\sin x - \cos x + y^3)dy = 0$ 为恰当方程，则 $a =$ __1/3__.

二. 求解下列方程：（7*8=56 分）

1. $e^{2x}y^2dx + (e^{2x}y - 2y)dy = 0;$ --变量分离方程

解：分离变量 $\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}dx + \frac{1}{y}dy = 0$

两边积分得：$\ln|e^{2x} - 2| + 2\ln|y| = 2\ln|C|$

通解为：$(e^{2x} - 2)y^2 = C^2, C$ 为任意常数。

2. $(2x^2 - xy + y^2)dx + x^2dy = 0;$

解：$\frac{dy}{dx} = -2 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ --- 齐次方程

作变换：$u = \frac{y}{x}$

原方程变为：$x\frac{du}{dx} = -2 - u^2$

分离变量两边积分得：$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} = -\ln|x| + C$

代回原变量得通解：$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{y}{x\sqrt{2}} = -\ln|x| + C, C$ 为任意常数。

3. $e^y y'=2\sin x+e^y$；

解：令 $z=e^y$ 原方程变为: $z'=z+2\sin x$　一阶线性方程

其通解为：

$e^y=z=e^x(c+2\int\sin xe^{-x}dx)=e^xc-\sin x-\cos x$， c 为任意常数。

4. $y'+xy=\frac{x}{y}e^{x^2}$;---伯努利方程

解：令 $z=y^2$ 原方程改写为： $z'=-2xz+2xe^{x^2}$ ---一阶线性方程

通解为： $y^2=z=e^{\int-2xdx}(c+2\int xe^{x^2}e^{\int 2xdx}dx)=e^{-x^2}c+\frac{1}{2}e^{x^2}$， c 为任意常数。

5. $y=(y')^2-xy'+\frac{1}{2}x^2$；　--一阶隐式方程

解：令 $y'=p$ 原方程化为: $y=p^2-xp+\frac{1}{2}x^2$，

两边对 x 求导得： $(2p-x)=p'(2p-x)$

由此可得： $p=\frac{x}{2}\ or\ p=x+c$

原方程的通解为： $y=\frac{1}{2}x^2+xc+c^2, y=\frac{1}{4}x^2$， c 为任意常数。

6. $(\tan^2 x+\cos x\sin y)dx-\sin x\cos ydy=0$;--非恰当方程

解： $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-2\cos x}{\sin x}\Rightarrow\mu=\frac{1}{\sin^2 x}$ 为积分因子

则 $\frac{1}{\sin^2 x}(\tan^2 x+\cos x\sin y)dx-\frac{1}{\sin x}\cos ydy=0$ 为恰当方程

通解为： $\tan x-\frac{\sin y}{\sin x}=C, C$ 为任意常数。

7. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x^2$;---欧拉方程

解：令 $x=e^t$ 原方程化为: $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=e^{2t}$ (1)---常系数非齐线性方程

对应的齐线性方程： $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$　(2)

特征方程： $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0,$

(2) 的基本 解组为： e^t, te^t

（1）的形式特解为：$\tilde{y}=Ae^{2t}$,代入得:$A=1$,则$\tilde{y}=e^{2t}$

（1）的通解为：$y=c_1e^t+c_2te^t+e^{2t}$

则原方程的通解为：$y=c_1x+c_2x\ln|x|+x^2$，c_1,c_2 为任意常数。

8. $x''+x=1-\dfrac{1}{\sin t}$ （1）.

解：对应的齐线性方程：$x''+x=0$ （2）

特征根为：$\lambda=\pm i$，

（2）的基本解组为：$\cos t,\sin t$

（2）的通解为：$x=c_1\cos t+c_2\sin t$

变易常数，令 $x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$ 为（1）的解，

解代数方程组 $\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(t)\\ c_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1-\dfrac{1}{\sin t}\end{pmatrix}$

$c_1'(t)=1-\sin t\Rightarrow c_1(t)=t+\cos t+c_1$, $c_2'(t)=\cos t-\cot t\Rightarrow c_2(t)=\sin t-\ln|\sin t|+c_2$

则（1）的通解为：$x=c_1\cos t+c_2\sin t+1-\sin t\ln|\sin t|+t\cos t$, c_1,c_2 为任意常数。

三、(6 分) 证明方程 $x''+2x'+3x=f(t)$,⑴ $f(t)\in C[0,+\infty)$ 的任意两解 $x_1(t),x_2(t)$ 有

$\lim\limits_{t\to+\infty}(x_1(t)-x_2(t))=0$.

证明:（1）对应齐线性方程为：$x''+2x'+3x=0$ （2），其特征根为：$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$，

则（1）任意两解 $x_1(t),x_2(t)$ 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}(x_1(t)-x_2(t))=\lim\limits_{t\to+\infty}(c_1e^{-t}\cos\sqrt{2}t+c_2e^{-t}\sin\sqrt{2}t)$

因为 $0\le|c_1e^{-t}\cos\sqrt{2}t+c_2e^{-t}\sin\sqrt{2}t|\le(|c_1|+|c_2|)e^{-t}$，

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}(x_1(t)-x_2(t))=0$。

四. **证明题**（7 分）设 $\mu(x,y)$ 为方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$（1）的积分因子，则

$\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=du(x,y)$.

1）. 证明：$\mu(x,y)\varphi(u(x,y))$ 也是方程（1）的积分因子，$\varphi(u)$ 为任意连续函数；

2）. 写出方程 $((2x^2+2)y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$（2）两个不同的积分因子.

证明：1）. 因为 $\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=du(x,y)$，则

$\varphi(u)\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=\varphi(u)du(x,y)=d\int\varphi(u)du$

从而 $\mu(x,y)\varphi(u(x,y))$ 也是方程（1）的积分因子。

2）. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{-2x}{1+x^2}\Rightarrow \mu=e^{\int\frac{-2x}{1+x^2}dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ 为（2）的积分因子，则

$$\frac{1}{1+x^2}(((2x^2+2)y+5)dx+(2x^3+2x)dy)=d(2xy+5\arctan x)$$

则 $\mu_1=\dfrac{1}{1+x^2},\mu_2=\dfrac{1}{1+x^2}(2xy+5\arctan x)$ 为（2）的两个积分因子。

五、证明题(7 分). 设 $a_1(t),a_2(t),f(t)\in C[a,b]$，函数 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 为二阶非齐线性方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=f(t) \quad (1)$$

的三个线性无关解.

1). 证明：$x_1(t)-x_3(t),x_2(t)-x_3(t)$ 为方程 $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$ (2) 的基本解组；

2). 证明方程（1）的通解为 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_3(t),$

且常数 $c_i(i=1,2,3)$ 满足 $c_1+c_2+c_3=1.$

证明：1). 由解的性质得 $x_1(t)-x_3(t),x_2(t)-x_3(t)$ 为（2）的解，下证它们线性无关。若

$$c_1(x_1-x_3)+c_2(x_2-x_3)=0\Rightarrow c_1x_1+c_2x_2-(c_1+c_2)x_3=0$$

由于函数 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 为线性无关，则 $c_1=c_2=0,$ 则 $x_1(t)-x_3(t),x_2(t)-x_3(t)$ 为(2)的基本解组。

2). 由非齐线性方程的通解结构定理得（1）的通解为

$x=c_1(x_1-x_3)+c_2(x_2-x_3)+x_3=c_1x_1+c_2x_2+(1-c_1-c_2)x_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3,c_1+c_2+c_3=1,$ 故结论成立。