定理：设p是素数，n是正整数，则：

$$ord_p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty}[\frac{n}{p^r}]$$

（注意：在p的指数r充分大时，$\frac{n}{p^r}$是大于0小于1的，取整后为0。所以上述级数其实只是有限多个非零整数的求和。）

证明思路：

我们考虑从1到n的所有整数，

每一个被p整除而不被p^2整除的整数对$n!$在p处的阶的贡献是1；

每一个被p^2整除而不被p^3整除的整数对$n!$在p处的阶的贡献是2；

每个被p^3整除而不被p^4整除的整数对$n!$在p处的阶的贡献是3;

……以此类推……每个被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数对n在p处的阶的贡献是r;

这些贡献加起来就是$n!$在p处的阶$ord_p(n!)$。

换言之，$ord_p(n!)=$ “从1到n中被p整除而不被p^2整除的整数的个数”$\times 1+$“从1到n中被p^2整除而不被p^3整除的整数的个数”$\times 2+$“从1到n中被p^3整除而不被p^4整除的整数的个数”$\times 3+\cdots$“从1到n中被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数的个数”$\times r+\cdots$

另一方面，由之前的引理，1到n中有正好$[\frac{n}{p}]$个整数被p整除，

这个$[\frac{n}{p}]=$“从1到n中被p整除而不被p^2整除的整数的个数”$+$“从1到n中被p^2整除而不被p^3整除的整数的个数”$+\cdots$“从1到n中被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数的个数”$+\cdots$

同理，1到n中有正好$[\frac{n}{p^2}]$个整数被p^2整除，

这个$[\frac{n}{p^2}]$= “从1到n中被p^2整除而不被p^3整除的整数的个数” + “从1到n中被p^3整除而不被p^4整除的整数的个数” $+\cdots$ “从1到n中被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数的个数” $+\cdots$

同样的，1到n中有正好$[\frac{n}{p^3}]$个整数被p^3整除，

这个$[\frac{n}{p^2}]$= “从1到n中被p^3整除而不被p^4整除的整数的个数” + “从1到n中被p^4整除而不被p^5整除的整数的个数” $+\cdots$ “从1到n中被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数的个数” $+\cdots$

以此类推……

于是，$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots=$ “从1到n中被p整除而不被p^2整除的整数的个数” $\times 1+$ “从1到n中被p^2整除而不被p^3整除的整数的个数” $\times 2+$ “从1到n中被p^3整除而不被p^4整除的整数的个数” $\times 3+\cdots$ “从1到n中被p^r整除而不被p^{r+1}整除的整数的个数” $\times r+\cdots$

所以，

$$ord_p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty}[\frac{n}{p^r}]$$

推论：设p是素数，n是正整数，则：

$$n! = \prod_{p} p^{ord_p(n!)}$$

其中

$$ord_p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty}[\frac{n}{p^r}]$$