**第一章 复数与复变函数**

第一节 复数

一、一些基本概念

1. 复数：，，，记：

若，则为虚数；若，则为实数；若，则为纯虚数。

注：虚数不能比较大小。

2. 共轭复数：

3. 复数相等：设，，则。

4. 复平面：复数平面上点。

实轴，虚轴，半平面等概念。

5. 模与辐角：复数的向量表示

模：， 辐角为整数，这里称

为主辐角（注意等号位置）。

原点的模为0，但没有定义辐角。

6. 复数的三种表达式：

代数式：

三角式：，若，称为单位复数。

指数式：， 欧拉公式：。

二、复数的运算

设，

1. 

三角不等式：

2. ， ，，

的几何意义。

3. 

4. 乘幂与方根

设，则，

，n个值。

例：求的值。

解：，

。

第二节 复平面上的点集

一、基本概念

1. 点的邻域：，几何上是以为心，为半径的圆盘。

2. 平面点与平面点集的关系：

聚点或极限点，孤立点，外点，边界点，内点。

3. 开集，闭集，边界，连通集，有界集，无界集，区域，闭区域。

例：圆盘，是开集、区域、有界区域。

闭圆盘，是闭集、闭区域，但不是区域。

，非开、非闭有界集合。

有一个例外：复平面既是区域，也是闭区域。

4. 曲线

连续曲线：，其中在上连续，起点，终点。

简单曲线：除起点、终点外，自身无重点的连续曲线。

简单闭曲线：起点与终点重合的简单曲线。

光滑曲线：存在、连续且不全为零的简单曲线，记。

光滑闭曲线，逐段光滑曲线等。

5. 单连通区域，多连通区域

6. 常见曲线与区域的复数表达式

单位圆，或 。

，或。注：这里是的辐角。

单位圆盘，一般圆盘，圆环。

上半平面， 左半平面，等等。

例：下列关系表示的点的轨迹图形是什么？

1. 

2. 

3. 且

第三节 复变函数

1. 复变函数的定义，单值，多值。

例： ，均为单值函数。

，，为多值函数。

2. 复变函数与二元实函数的关系

令，，则

。

例：

1. 复变函数的极限与连续性（见书）

**第二章 解析函数**

第一节 解析函数的概念与柯西-黎曼条件

一、复变函数的导数与微分

1. **定义**（与实函数基本相同）：设在区域内有定义，，若

，

则称在可导或可微，记为，称为在的微分。

若在内处处可微，则称在内可微，记。

2. 可导函数的运算性质与求导法则：

若、在可导，则

， ，

。

若在区域内可导，在区域内可导，且，则

在内可导，且。

3. 复函数可导的充要条件

设，，上节已知道：

连续连续。

那么，可导是否等价于可导呢？

**例1**：设，则在全平面连续、可微（可导），从而在全平面连续。但

 极限不存在，即在全平面处处不可导。

**定理1**：函数在点可微（可导）的充分必要条件是在点可微，并满足柯西-黎曼条件：，且。

二、解析函数及其简单性质

1. 解析函数与奇点的定义

**定义**：若函数在区域内可导，则称在区域内解析，或称是区域内的解析函数。

**定义**：若函数在点的一个邻域内处处可导，则称在点解析。否则称为奇点。

**注**：在区域内，解析可导连续。

在点处，解析可导连续。

2. 解析函数的简单性质

解析函数的和、差、积、商，复合运算，求导法则（略）

**例2**：常数函数在全平面处处解析，且 。

多项式在全平面处处解析。

1. 解析函数的充要条件

**定理2**：函数在区域内解析在可微，并满足条件：，且。

**例3.** 验证函数在平面上的可导性与解析性。

解: 在全平面处处可微。

，

满足：，从而数在全平面上解析，且

。

**例4**. 考察的可导性与解析性。

解：在全平面处处可微。

，已满足：。

进一步，当时，，满足条件。

因此，当时，函数可导，但在全平面处处不解析。

**例5**．设函数在区域内解析，若满足下列条件之一，则在内必为常数。

（1）在内； （2）在内解析；

（3）或或在内为常数。

证：（1），从而，，

即为常数，也即为常数。

其余证明略。

**第二节 初等解析函数**（单值）

**一、指数函数**

**定义** ，

性质：（1）当时，为实指数函数。 （2）

（3）在平面上处处解析，。 （4）

（5）由于，是以为周期的周期函数，称为的基本周期。

例 方程的解。

**二、 三角函数**

由， ，得：

， 

**定义** ，，分别称为复余弦函数、正弦函数。

**性质**：（1）全平面内解析，，。

（2）为偶函数，为奇函数。

（3），。

（4）以为最小正周期。

（5）当时，是无界函数。考虑：令，则

。

同理，可以定义正切函数、余切函数（略）。

思考：=？

**第三节 初等多值函数**

**1. 根式函数**

，扩充复平面，，

。

反函数，设，则，解释几何意义。

特别：将平面上角形域变成平面上除去原点及负实轴的区域。

**从原点起割破负实轴，则得到的个单值解析分支，其中有一支在正实轴上取正实值，称为的主值支**。

称和为的支点，即绕该点一周时，函数值发生变化，则称此点为多值函数的支点。

推广：以为支点，以从出发并伸向无穷的广义简单曲线为支割线。

**例1.** 设确定在从原点起沿负实轴割破了的平面上，并且，求。

**例2.** 在以为割线的区域内（1的上沿，），求。

**2. 对数函数**

的反函数：。

设。

从而，

。

主值： 

从原点起割破负实轴，得到无穷多个单值解析分支。

以为支点。

**例**：

而，代入即可。

 

性质：，。

**例**：设为割线的区域内，，求。

**3. 一般幂函数与一般指数函数**

**定义** ，

。

**例**：

，

**4. 具有多个有限支点的情形（不做要求）**

**例** 考察下列函数有哪些支点？

（1） （2）

解：（1），按支点的定义分别判断得支点：0，1.

（2），分别判断得支点：。

**例** 将适当割开后，能分出三个单值解析分支，求在点取负值的那个分支在的值。

解：，从原点起割破正实轴，得到的三个单值解析分支。

，

，得：。

。

**第三章 复变函数的积分**

1. **复积分概念及其简单性质**

**一、复积分定义**

以下提到的曲线除特别说明外，一般指光滑曲线或分段光滑曲线，称光滑或分段光滑的闭曲线为**围线**。

复积分定义类似于第二类曲线积分，记：，这里有向曲线（见书）

**定理** 设则且



**二、基本性质**

设

1. ； 2. 

3. 

4. 若，则

5. 设，则



**注**：定积分中值定理不能直接推广到复积分。

考虑：

但 

**三、复积分的计算**

**参数方程法：**

设则

。

**例1．**，其中是圆

解： 。

。

当时，；当时，。

**例2．**计算，其中：（1）是从1沿上半单位圆周到-1；（2）是从1沿下半单位圆周到-1。

解：（1）

1. 。

**例3**：计算，其中：（1）从原点到1+i的线段；（2）从原点沿圆到1+i的劣弧。

解：（1），

。

（2） 注：是的辐角。

。

**第二节 柯西积分定理**

**一、柯西积分定理**

**定理** 设在单连通区域内解析，为内任一围线，则。

黎曼证法：设，由于，因此的一阶偏导数连续，从而可微。令由格林公式及条件，

。

**单连通域内解析函数积分与路径无关**：设，

。

**二、柯西积分定理的推广**

1. 设是一条围线，则。

2. 设是复围线，，其中：

内解析，连续到则。

**例**：计算

**例：**。

**第三节** **柯西积分公式及其应用**

**一、柯西积分公式**

**定理** 设是围线或复围线，，，则。

证 作及其内部均在D内，由复连通域柯西定理，有：

，与无关。

下面证明： 

由，故对。

取，则

。

证毕。

**注**：（1）计算积分。

（2）解析函数在区域内的函数值，可以用边界上的函数值表示。

**例1.** 求下列积分：

（1）

（2）

**例2．**设是一条围线，均在且在上，试问有何关系？

**解析函数平均值定理**：

如果函数在圆内解析，在闭圆盘上连续，则

，

即在圆心的值等于它在圆周上的值的算术平均数。

证：设表示圆周，则

，

由柯西积分公式：

。

**例**：设在闭圆盘上解析，若存在，使当时，，而且。试证：在圆内至少有一个零点。

证：假设在内无零点，由题设知函数在闭圆盘上解析，且



由解析函数平均值定理：

，

从而

， 矛盾。

**二、高阶导数公式**---解析函数无穷可微性

**定理** 在柯西公式条件下，，且

。

**注:** 1.可用于计算积分。

2. 解析函数的各阶导数仍然是解析函数。

**例**：计算

**第三节** **柯西积分公式及其应用**

**三、柯西不等式与刘维尔（Liouville）定理**

**柯西不等式** 设在区域内解析，，圆周及其内部在内，则

，其中。

**证明**： 。证毕

特别地，当时，。

若在全平面解析且有界，即，则

，从而，即为常数。

**刘维尔（Liouville）定理** 全平面上解析且有界的函数必为常数。

**整函数**：全平面上解析的函数。（例如：但 等）

**刘维尔（Liouville）定理** 有界整函数必为常数。

**注**：用**刘维尔定理**说明 的无界性。

**四、代数学基本定理的证明**

**代数学基本定理** 次多项式必有个根。

**说明**：上述定理等价于至少有一个根。

**证**：（反证法）若，则在全平面解析。

由，，当时，。

当时，。综合得：，即在全平面上有界。由刘维尔定理，为常数，从而为常数，矛盾。

**例**：如果为一整函数，且，试证为常数。

**证**：设，则为整函数，且

，

由刘维尔定理，为常数，从而为常数，也即为常数。

**Morera定理** 若在单连通区域内连续，是内任意一条围线，有，则在内解析。

**解析函数充要条件（积分型）**在区域内解析在内连续，对任一围线，及其内部全含于，有。

**第四节** **解析函数与调和函数的关系**

**定义** 如果二元实函数在区域内有二阶连续偏导数，且满足Laplace方程

，

则称为区域内的调和函数。

若在区域内解析，则由条件得：

，，

即为内的调和函数，并称的共轭调和函数。

**定理** 设是在单连通区域内的调和函数，则存在

，

使若是内的解析函数。

**例** 说明为调和函数，并求其共轭调和函数。

**第四章** **解析函数的幂级数表示法**

**第一节 复级数的基本性质**

**一、复数项级数**

1. 复数项数列；，令，，则 。

。

2. 复数项级数 （1）， 部分和：。

若，则称（1）收敛于，记。若无极限，则称（1）发散。

若收敛，则称（1）绝对收敛，否则称为条件收敛。

若则。

3. 敛散性判别

若，则（1）发散。

若收敛，则（1）收敛。

若收敛，则（1）收敛。

柯西准则：收敛

。

**二、一致收敛函数项级数**

**1. 函数项级数**

设在点集上有定义，称

 （2） 为上函数项级数。

若收敛，则称（2）在收敛。

若（2）在上每一点均收敛，则称（2）在上收敛，其和为z的函数记为：

。

设部分和函数，。**2. 一致收敛函数项级数**

若则称（2）在上**一致收敛**于。

**柯西一致收敛准则**：在上一致收敛，对任意的自然数。

**一致收敛优级数判别法**：

**定理** 如果在上有为正数列，且收敛，则在上一致收敛。

证明：由收敛，，对任意的自然数。

考虑，得证。

**例** 若在上一致收敛，，试证：在上一致收敛。

证 ，对任意的自然数。

考虑，得证。

**一致收敛函数项级数和函数性质**

（i）一致收敛连续函数项级数的和函数连续。

（ii）逐项可积：设在曲线上连续，且在上一致收敛于，则沿可逐项积分，即。

**3. 解析函数项级数**

**定义** 设在区域内定义，若在内任意一个有界闭集上

一致收敛，则称在内内闭一致收敛。

**例** 在内内闭一致收敛在

上一致收敛。

证：显然

对内任意一个有界闭集，而上一致收敛，故在上一致收敛，从而在内内闭一致收敛。

**例** 在内内闭一致收敛于，但在内不一致收敛。

一般地，一致收敛内闭一致收敛，反之不真。

内闭一致收敛解析函数项级数（Weierstrass定理）

**定理** 设在内解析函数，在内内闭一致收敛于，则在内解析，且。

证 使上一致收敛于，则 设任意一条围线，则 从而

，故解析，由的任意性，

由高阶导数公式：



=

**第二节 幂级数**

幂级数： （1）

这是解析函数项级数，在点处收敛，和为。

**一、幂级数敛散性**

**阿贝尔（Abel）定理**：若（1）在收敛，则在圆盘K： 内绝对收敛，且内闭一致收敛。

证：先证绝对收敛。因为收敛，它的各项必有界，存在正数。从而

，

由于，故级数为收敛的等比级数，从而在K内绝对收敛。

再证内闭一致收敛。对K内任一闭圆盘上的一切点，有

，

而优级数收敛，由优级数判别法，级数（1）在上一致收敛，从而在K内内闭一致收敛。证毕。

**推论**：若（1）在点发散，则（1）在发散。

**二、幂级数的收敛半径与收敛圆盘**

由上述过程，必存在R>0,使得（1）在内收敛、绝对收敛、内闭一致收敛，在发散。称R为（1）的收敛半径，且约定：

若（1）仅在收敛，称R=0；

若（1）在全平面收敛，则。

称为（1）的收敛圆盘，称为收敛圆。

**注**：在收敛圆上（1）未必收敛，有下列三种情况：

1）处处发散：，在上处处发散。

2）有收敛点，也有发散点：内收敛，在z=1收敛，在z= -1发散。

3）处处收敛：，R=1，在上处处收敛。

三、 **收敛半径的求法**

若。

**例**：求的收敛半径。

解：，故，即仅在收敛。

**例**：求的收敛半径。

解：当幂指数是平方数时，；其它情形。故，从而。

四、 **幂级数和函数性质**

1. 幂级数在收敛圆盘内的和函数解析。

2. 幂级数在收敛圆盘内逐项可积。

**第三节 解析函数的泰勒展式**

**一、泰勒定理**

设在点解析（不妨设），则

1）内有唯一的幂级数展式，其中，

。

2）展式的收敛半径为：与最接近的奇点之间的距离。

例：，收敛半径？

**定理（级数型）** 在区域内解析在内任一点可展开成泰勒级数。

**二、函数泰勒展式的求法**

一些初等函数的泰勒展式：

1. ；

2. ；

3. ；

4. ；

5. ；

6. 。

**例** 求在处的泰勒展式。

解：

**第四节 解析函数零点的孤立性及唯一性定理**

**一、解析函数的零点与零点的阶（级）**

1. 有关概念

解析函数的零点：若在解析，且，则称。

零点的阶：若的零点，且

，

则称的n阶零点。

2. 解析函数零点阶的判定：

1） 用定义。

2） 用泰勒级数。若，且，但，则阶零点。

3），其中。

**例**： 判断的几阶零点。

解：，其中，故的3阶零点。

**注**：若则阶零点；若

阶零点。

**练习**：1. 以 为 阶零点。

2. 以 为 阶零点。

3.  阶零点。

**二、解析函数零点孤立性**

先考察实函数的一个例子：



在实轴上可导，，即是零点，但不是孤立零点。

因为也是的零点，且以为极限，即的零点聚点，但不恒为零。

**解析函数不会出现这种情况**。

**1. 解析函数零点孤立性定理**：

若在解析（），且。如果不恒为零，那么的孤立零点（即内无零点）。

若在解析（），且。如果的零点聚点，那么。

证：不妨设阶零点，则，其中解析，且。

下证：内无零点，即。

由在点连续且，则

时，有，故

，

取，则有，从而内无零点。

**例** 是否存在函数，在原点解析，且在上依次取值为。

解：不存在。假设存在在内解析，且在点上取值为0，则。又的零点聚点，则，从而不能有，矛盾。

**2. 区域内解析函数零点孤立性：**设内解析，不恒为零，则在内的零点是孤立的。

证：假设的零点聚点。设是内任意一点，下证。在内作连续曲线。设的边界为，的距离为。

从开始在上依次作分点，使，

。作圆盘，则内解析，且

。

由于的零点聚点，由零点孤立性，内恒为零。由，知的零点聚点，故内恒为零。以此类推，内恒为零。因为，由的任意性，内恒为零，矛盾。

**三、解析函数唯一性定理**

设内解析，点列，。若，则。

证：令，则在内解析，且有零点聚点，故在内，从而。

**注**：内解析，在全平面解析。

在，但并不恒等，原因在于。

**例**：在原点解析且在处取下列各组值的函数是否存在？

1）

2）

解：1）不存在。如果存在在原点解析，且，则。又点列，故，这与矛盾。

2）存在。点列，且，故。

**最大模原理**：设在区域内解析，且不为常数，则在内任何点都不能达到最大值。（除非在内恒为常数）

证：假设在内有一点，使。作内圆盘。

由解析函数平均值定理：，从而

。

下证在圆周上，。

若不然，如果对于某个值，有，则由的连续性，不等式在某个小区间内严格成立，而在区间上，有。由此，



=



矛盾。这说明：在以为中心的每一个充分小圆周上，，从而上为常数，也即内为常数。

**推论**：设内解析，在上连续，，则除为常数情形外，有。

**例**：设在闭圆盘上解析，如果存在，使当时，，且，则在圆内，至少有一个零点。

证：假设在内无零点，则在上解析，且

，而在上，，这与最大模原理矛盾。

**第五章** **解析函数的罗朗展式与孤立奇点**

**第一节 解析函数的罗朗展式**

**一、双边幂级数**

如果(1) 收敛于，则（1）在内绝对收敛、内闭一致收敛。

考察负幂项级数的敛散性：

 （2）

作变换，则（2）变为正幂项级数：

 （3）

若（3）的收敛域为，则（2）在内绝对收敛、内闭一致收敛于解析函数，且逐项可积、逐项可导。

双边幂级数：

当时，（4）处处发散；当时，即在圆环内，（4）绝对收敛、内闭一致收敛于解析函数，且逐项可积，逐项可导任意次。

**二、解析函数的罗朗展式**

**罗朗定理**：在内的解析函数可展开为唯一的双边幂级数：

 （5）

其中

 （6）

，称（5）为在内的罗朗展式，（6）为罗朗系数。

**注**：1. 将 视为圆环的特殊情形，则若在的泰勒展式为罗朗展式的特例。

2. 展式唯一性是对解析圆环而言，同一函数在同一点为中心的解析圆环可能不止一个，则在不同圆环内展式是不同的。

3. 由（6），。

**例** 将分别在以下圆环内展开成罗朗级数：

（1）以原点为中心的圆环：； ； 。

（2）以为中心的圆环：；。

（3）以为中心的圆环：；。

解：。

(1) 当时：



当时：



当时：



(2) 当时：



当时：



（3）略

**例**：求在内的罗朗展式，并求。

解：

=。

利用注3，得：。

**第二节 解析函数的孤立奇点**

**一、解析函数孤立奇点及其分类**

**1. 解析函数孤立奇点**：若函数在内解析，在不解析，则称。若内解析，则称为的孤立奇点。**例** (1) 是的孤立奇点。也是其孤立奇点。

(2) 的奇点：，且均为孤立奇点，但不是孤立奇点。

(3) 的奇点：。由于，因此不是孤立奇点，是孤立奇点。

**2. 孤立奇点分类**

若是的孤立奇点，罗朗展式为：

 （\*）

1. 若，则称是的**可去奇点**，此时



定义，则在内解析，孤立奇点被去掉了。

**例** ，补充定义，则在解析。

2） 若（\*）有有限个，则的**极点**。特别地，若即



则称是的**m阶极点**。

**例** ，故是的二阶极点。

3）若（\*）有无限个，则称是的**本性奇点**。

**例** ，故是的本性奇点。

从上可见，主要看罗朗展式的负幂项，故称为展式的主要部分，称为展式的解析部分。

**二、解析函数在孤立奇点处的性质**

1. 是的可去奇点

，补充定义，则在解析

内有界是的可去奇点。

证其中之一：令，，则

，故。

2. 是的m阶极点

）

，这里在解析，且

以为m阶零点。

**例**：求在有限复平面内的孤立奇点，并判断其类型。

解：的孤立奇点有。

是的一阶零点，也是的一阶零点，不是的零点，故是的二阶零点，因此是的二阶极点。

是的一阶零点，故是的一阶极点。

**定理**：是的极点的孤立奇点，且。

**第二节 解析函数的孤立奇点（续）**

**希瓦尔兹(Schwarz)引理**：如果函数在单位圆内解析，并且满足条件

，则在单位圆内恒有：

。

若上式等号成立，则，其中为实常数。

证：设，令，定义，则内解析。

设内任一点，取满足条件，由最大模原理，有

，

令得：，于是。

如果这些不等式中，有一个取等号，这表明在内某点，模达到最大值，从而常数，即。证毕。

**第三节 解析函数在无穷远点的性质**

**一、孤立奇点的分类**

若是的孤立奇点，即内解析。令

，

则在内解析，即以为孤立奇点。

**定义** 若的可去奇点，则称的可去奇点。

若的m阶极点，则称的m阶极点。

若的本性奇点，则称的本性奇点。

从罗朗展式来看：设

， （1）

记，则

. （2）

**注：**（1）中的主要部分为负幂项部分；（2）中的主要部分为正幂项部分。

因此，为的可去奇点、m阶极点、本性奇点的充要条件分别是：

；；有无穷多个。

**例** ，是的本性奇点。

**二、解析函数在处的性质**

1. 是的可去奇点





内有界。

2. 是的m阶极点，即



，其中解析，且。

以为m阶零点。

**定理**：是的极点的孤立奇点，且。

**第四节 整函数与亚纯函数的概念**

**一、整函数**

1. 定义：全平面上解析的函数称为整函数，也称全纯函数。

常数函数，多项式，都是整函数。

2. 分类

若是整函数，那么是唯一的孤立奇点。

是的可去奇点为常数

是的m阶极点为m次多项式。

**二、亚纯函数**

定义：全平面上除可能有极点外解析的函数，称为亚纯函数。

注：1. 全平面上解析的函数是亚纯函数。

1. 极点个数可能是有限个，也可能是无限个。

**第六章** **留数理论及其应用**

**第一节 留数（residue）**

1. **留数的定义及留数定理**

若函数在点解析，邻域内的任意一条简单闭曲线，则。

若的一个孤立奇点，的某个去心邻域内包含的任意一条正向简单闭曲线，则一般不等于0。

考虑的罗朗展式：

两端沿逐项积分得：

 或 。

**定义**：设以有限点为孤立奇点，即内解析，称

 

为的留数，记作：。

**定理1（留数定理）**设函数在区域内除有限个孤立奇点外处处解析，内包含各奇点的一条正向简单闭曲线，那么

。 （1）

**证**：将在内的孤立奇点用互不包含的正向简单闭曲线包围起来，则根据复合闭路定理：



以除等式两边即得证。

**注**：求沿封闭曲线的积分，就转化为求被积函数在内各孤立奇点处的留数。

**2. 留数的求法**

1. 若是的可去奇点，则，即。
2. 若是的本性奇点，则将展开成罗朗级数求。
3. 若是的极点：

**规则I** 如果是的一级极点，则

。

**规则II** 如果是的m级极点，则

。

事实上，由于



以乘上式两端，得：



两边求m-1阶导数，得：

。

**规则III** 设，都解析，如果，

，则是的一级极点，从而

。

**例1** 计算积分.

解：是被积函数在内的一级极点，因此







代入得：。

**注**：也可用规则III计算。

**例2**计算积分。

解：是被积函数在内的一级极点，为二级极点。

，

，

从而。

**思考**：求1. ****； 2. 

**3. 函数在无穷远点的留数**

**定义**：设函数在圆环内解析，为该圆环内绕原点的任何一条正向简单闭曲线，则称积分



为在点的留数，记作

。

**定理2** 如果函数在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则在所有各奇点（包括点）的留数之和等于0。

**证**：除点外，设的有限个奇点为，又设为一条绕原点的并将包含在它内部的正向简单闭曲线，则

。

**规则IV** 

**例3** 计算积分。

解：除点外，被积函数的奇点是：-i,1,3，由定理2：

。

，

，（**利用规则IV计算**），

。

**注**：由于计算-i处的留数比较复杂，因此进行转换。

**例4** 计算积分。

解：。

**第二节 用留数定理计算实积分**

1. 形如的积分，其中为的有理函数

**方法**：令，则，，从而

，

其中的有理函数，且在单位圆周上分母不为零，因此满足留数定理的条件。

**例1**：计算。

解：令，则，，

。

**例2：**计算。

解：令，则，



。

**例3：**计算。

解：首先。

设，则



=。

1. 形如的积分，其中为的有理函数，分母的次数至少比分子次数高二次，在实轴上没有孤立奇点。

**引理1**. 设沿圆弧上连续，且

上一致成立，则

。

**证**：时，有，于是

，证毕。

**注**：这里使用了。

**定理** 设为有理分式，其中

，为互质多项式，且满足：（1）；（2）在实轴上，于是

，

这里为的孤立奇点。

证：从条件知，。

取上半圆周，充分大，由线段及组成围线，使内部包含在上半平面内的所有孤立奇点，由条件（2），在上没有奇点。从留数定理：

，

即

，

而，由引理1，定理得证。

**例1：**计算

解：设，符合定理条件。

，

，，

于是。

**例2：**计算

解：首先，设，有4个一级极点：

， 。

于是。

**3.** 形如的积分，其中为的有理函数，分母的次数至少比分子次数高一次，在实轴上没有孤立奇点，则

，

这里为的孤立奇点。

特别地，将上式分开成实部和虚部，就可得到形如：和的积分。

**引理2**. 设沿上半圆周上连续，且

上一致成立，则

。

如果，

，则是的一级极点，从而

。

**例1** 计算积分。

解：

=。

**例2** 计算积分.

解：

=。

**4**. 积分路径上有奇点的积分

**引理3**. 设沿圆弧上连续，且

上一致成立，则

。

**例**：计算

解：。

以原点为心分别作正向上半圆周和，曲线，则沿曲线上的积分：，即

。

由引理2，，

由引理3，。

令，得 ****。

**第三节 辐角原理及其应用**

1. **对数留数**

具有形式的积分，称为关于曲线的对数留数。

名称来源：

显然函数的零点和奇点都可能是函数的奇点，由留数定理：

。

**引理**： （1）设级零点，则的一级极点，且

。

（2）设为级极点，则的一级极点，且

。

**证：**（1）设，其中的邻域内解析，且，

 ，

。

由于的邻域内解析，故。

（2）略。

**定理1：**设是一条围线，符合条件：

（1）的内部除可能有极点外解析；

（2）上解析且不为零，则

， （1）

其中分别表示内部的零点与极点的个数。

**证**：由条件知，内部零点与极点的个数有限。设在内部的不同零点，其级为；内部的不同极点，其级为。由留数定理：



=，证毕。

**例1**：求函数关于圆周的对数留数。

解：有两个一级零点，。

令，则。

，，

即的二级零点，从而是的二级极点。

在圆周内部有有两个一级零点和七个二级极点，故，

，从而。

1. **辐角原理**

将公式（1）写成：



由于，（终点与起点辐角之差），故，

这里表示的正向绕行一周后的改变量，它是的整数倍。

**辐角原理**：在定理1的条件下，在围线内部的零点个数与极点个数之差，等于当的正向绕行一周后的改变量除以，即

， （2）

特别地，若在围线上及内部都解析，且在上不为零，则

。 （3）

**例2：**设的正向，试验证辐角原理。

解：，，

。

**3．儒歇(Rouche)定理**

**定理2** 设是一条围线，函数满足条件：

（1）在内部都解析，且连续到；

（2）在上，

则函数在的内部有同样多的零点个数，即

。

证：从条件（2）知，在在上：，且

。

考虑关系式：对于，，

。

令，从条件（2）知：，从而，即将平面上曲线映射成平面上曲线，且全含在圆周的内部，即没有包围原点，从而

，

于是，证毕。

**例1** 设，满足

，则在单位圆内有个零点。

证：设，。

则在内有个零点。在上，有。

由儒歇定理：。证毕。

**例**2：方程在内有 个根。

方程在内有 个根。

方程在内有 个根。