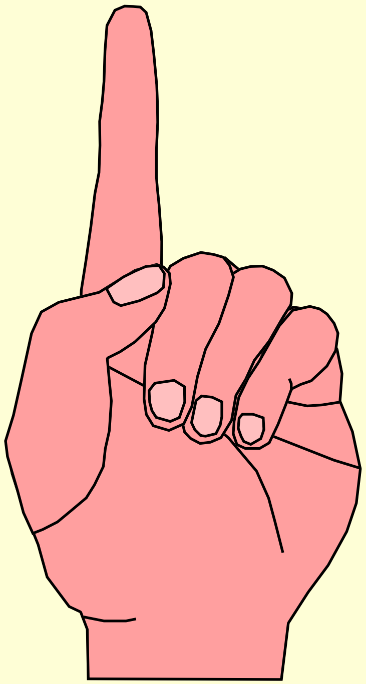
第二章 随机变量及其分布

- 随机变量的概念
- 离散型随机变量及其概率分布
- 随机变量的分布函数及性质
- 连续型随机变量及其概率分布
- 随机变量函数的分布

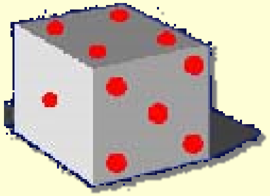


§2.1、随机变量的概念

上一章介绍了随机事件、概率等基本概念,对随机现象的统计规律有了初步的认识。

本章通过随机变量将随机试验的结果数值化,利用微积分等近代数学工具系统地、全面地对随机现象加以研究,从而进一步揭示随机现象的客观规律性。

例1、投掷一枚均匀骰子, 出现的点数Y是一个变量,它的可能取值为$1, 2, \ldots, 6$, 具体取哪个数值,在试验前不能预知, 由试验后出现的样本点对应确定, 即



$$Y=\begin{cases}1 & 若骰子“出现1点” \\ 2 & 若骰子“出现2点” \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 6 & 若骰子“出现6点”\end{cases}$$

例2、抛一硬币，可以用一个离散变量来描述

$$X=\begin{cases}1, & \text{正面}\ \omega_1 \\ 0, & \text{反面}\ \omega_2\end{cases}$$

例2—3 在一批电子元件中任取一只测试, 其使用寿命Z(单位：h)是一个变量, 它的可能取值是 $[0,+\infty)$

由上述实例共性抽象出下列随机变量的定义

一、随机变量 (Random Variable)

定义 设 Ω 是试验T的样本空间, 若

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{按一定法则}} \text{实数（数或区间）}$$

则称实值函数 $X(\omega)$为Ω上的 随机变量.

简记 r.v. X .

r.v.一般用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$
或小写希腊字母$\varsigma, \eta, \cdots$ 表示.

随机变量通常用大写字母 X,Y,Z 或希腊字母 ζ,η 等表示

而表示随机变量所取的值时,一般采用小写字母 x,y,z 等.

随机变量的特点

- **随机性** r.v. X 的可能取值不止一个,试验前只能预知它的可能的取值，但不能预知取哪个值。
- **概率特性** X以一定的概率取某个值。
- 引入r.v.后,可用r.v.的等式或不等式表达随机事件,例如

$\{X > 100\}$ —— 表示“某天9:00-10:00 接到电话次数超过100次” 这一事件

- r.v.的函数一般也是r.v.

- 在同一个样本空间可以同时定义多个r.v.,例如

$$\Omega = \{儿童的发育情况\ \omega\}$$

$$X(\omega) — 身高,$$

$$Y(\omega) — 体重,$$

$$Z(\omega) — 头围.$$

各 r.v.之间可能有一定的关系, 也可能没有关系——即 相互独立

二、引入随机变量的意义

有了随机变量,随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来.

如：单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用X表示，它是一个随机变量.

事件“收到不少于1次呼叫”$\Leftrightarrow\{X\geq 1\}$

{没有收到呼叫}

$\Leftrightarrow\{X=0\}$

引入 r.v. 重要意义

◇ 任何随机现象可被 r.v.描述

◇ 借助微积分方法将讨论进行到底

三、随机变量的分类:

随机变量
- 离散型随机变量
- 非离散型随机变量
  - (绝对) 连续型
  - 奇异型

r.v.所有取值可以逐个一一列举

全部可能取值不仅无穷多，而且还不能一一列举，而是充满一个区间.

随机变量即“其值随机会而定”的变量,正如随机事件是“其发生与否随机会而定”的事件.

掷骰子所得点数X是一个随机变量,它取哪个值,要等掷了骰子后才知道.故随机变量是试验结果的函数.从这一点看,它与通常的函数概念没什么不同.

把握这个概念的关键在于试验前后之分:在试验前我们不能预知它将取何值,这要凭机会,“随机”的意思就在这里,一旦试验后,取值就确定了.

比如某人星期一买了一张奖券, 在开奖前,中奖金额X是一个随机变量,其值要到星期五的“抽奖试验”做过以后才能知道.

随机变量的研究,是概率论的中心内容.这是因为,对一个随机试验,我们关心的往往是与所研究的特定问题有关的某个(某些)量——即随机变量.

有时我们关心的是某些特定的随机事件.如一个班级中,概率论成绩在90分以上及60分以下,各自的概率如何,看上去像是两个孤立的事件.

引进随机变量X="随机抽出一个学生的成绩",则上述两事件可分别表为$\{X > 90\}$和$\{X < 60\}$.

可见:随机事件概念实际上包容在随机变量这个更广的概念之内.

也可以说:随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是一种动态的观点,一如微积分中的常量与变量的区分那样.

变量概念是高等数学有别于初等数学的基础概念,概率论能从计算一些孤立事件的概率发展为一个更高的理论体系,其基础概念是随机变量.

随机变量的例子:某厂大批产品中随机抽出100个,其中所含废品数;一月内某交通路口的事故数;用天平秤量某物体的重量的误差;随意在市场上买来一台电视机,其使用寿命等,都是随机变量.

在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但我们可以引进一个变量来表示它的各种结果.也就是说，**把试验结果数值化.**

正如裁判员在运动场上不叫运动员的名字而叫号码一样，二者建立了一种对应关系.

例如，从某一学校随机选一学生，测量他的身高.

我们可以把可能的身高看作随机变量X，然后我们可以提出关于X 的各种问题.

如 $P(X>1.7)=?$ $P(X\le 1.5)=?$

$P(1.5<X<1.7)=?$ $\cdots$