第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

教学内容: 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

教学内容: 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

教学目的: 掌握直母线的方程及其性质

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

教学内容: 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

教学目的: 掌握直母线的方程及其性质

教学重难点: 单叶双曲面与双曲抛物面上直母线性质的联系与区别

☞ 单叶双曲面上的直母线

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface),

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface), 而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线.

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface), 而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面.

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface), 而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线.

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface), 而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明, 这两曲面不仅包含直线, 而且可由一族直线所生成, 因而它们都是直纹曲面.

单叶双曲面上的直母线 柱面与锥面都由一族直线所生成，这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface)，而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明，这两曲面不仅包含直线，而且可由一族直线所生成，因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数.

单叶双曲面上的直母线 柱面与锥面都由一族直线所生成，这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface)，而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明，这两曲面不仅包含直线，而且可由一族直线所生成，因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$,

☞ **单叶双曲面上的直母线** 柱面与锥面都由一族直线所生成，这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface)，而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明，这两曲面不仅包含直线，而且可由一族直线所生成，因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$，或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

单叶双曲面上的直母线 柱面与锥面都由一族直线所生成, 这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface), 而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明, 这两曲面不仅包含直线, 而且可由一族直线所生成, 因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$, 或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

单叶双曲面上的直母线 柱面与锥面都由一族直线所生成，这种由一族直线所生成的曲面叫直纹曲面(ruled surface)，而生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线. 柱面、锥面都是直纹曲面. 我们在 §4.5 和 §4.6 中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线. 下面证明，这两曲面不仅包含直线，而且可由一族直线所生成，因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$，或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u，并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}}$$

与两方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}}$$

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a,b,c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$, 或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

与两方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \quad 和 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases}}$$

首先考察单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,}$ 其中 a, b, c 为正常数. 把上式改写为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$, 或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

与两方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \text{ 和 } \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases}}$$

上面两方程组实际上是当参数 $u \to 0$ 和 $u \to \infty$ 时的极限情形.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

与两方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \quad 和 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases}}$$

上面两方程组实际上是当参数 $u\to 0$ 和 $u\to\infty$ 时的极限情形. 不论 u 取何值, 上面三方程组都表示直线, 我们把这三类直线合起来称为单叶双曲面的 u 族直线.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

与两方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \quad \text{和} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases}}$$

上面两方程组实际上是当参数 $u \to 0$ 和 $u \to \infty$ 时的极限情形. 不论 u 取何值, 上面三方程组都表示直线, 我们把这三类直线合起来称为单叶双曲面的 u 族直线. 下面证明 u 族直线可以生成单叶双曲面, 从而它是单叶双曲面的一族直母线.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在引进非零参数 u, 并考察由上式得到的方程组

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

容易知道, u 族直线中的任何一条直线上的点都在单叶双曲面上, 这是因为 $u \neq 0$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的两个方程两边相乘即得

容易知道, u 族直线中的任何一条直线上的点都在单叶双曲面上, 这是因为 $u \neq 0$ 时, 方程组

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{array}\right.$$

的两个方程两边相乘即得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 所以该方程组所表示的直线都在单叶双曲面上;

容易知道, u 族直线中的任何一条直线上的点都在单叶双曲面上, 这是因为 $u \neq 0$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的两个方程两边相乘即得 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 所以该方程组所表示的直线都在单叶双曲面上; 而满足

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

的点显然都满足

容易知道, u 族直线中的任何一条直线上的点都在单叶双曲面上, 这是因为 $u \neq 0$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的两个方程两边相乘即得 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 所以该方程组所表示的直线都在单叶双曲面上; 而满足

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

的点显然都满足 $\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$,

容易知道, u 族直线中的任何一条直线上的点都在单叶双曲面上, 这是因为 $u \neq 0$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的两个方程两边相乘即得 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 所以该方程组所表示的直线都在单叶双曲面上; 而满足

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

的点显然都满足 $\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, 即满足单叶双曲面的方程, 所以也都在单叶双曲面上.

反过来, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点, 从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

反过来，设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点，从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零，

反过来, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点, 从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零, 因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

反过来，设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点，从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零，因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$，那么取 u 的值，使得

反过来, 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是单叶双曲面上的点, 从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零, 因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$, 那么取 u 的值, 使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

反过来, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点, 从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零, 因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$, 那么取 u 的值, 使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

于是有 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$,

反过来，设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是单叶双曲面上的点，从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\dfrac{y_0}{b}$ 与 $1-\dfrac{y_0}{b}$ 不能同时为零，因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\neq 0$，那么取 u 的值，使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

于是有 $\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)$，所以点 M_0 在直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$

上.

反过来, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的点, 从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

显然 $1+\frac{y_0}{b}$ 与 $1-\frac{y_0}{b}$ 不能同时为零, 因此不妨设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$, 那么取 u 的值, 使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

于是有 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$, 所以点 M_0 在直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$

上.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$,

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$, 那么取 u 的值, 使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

于是有 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$, 所以点 M_0 在直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$

上.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

立即得 $1-\frac{y_0}{b}=0$,

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$, 那么取 u 的值, 使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

于是有 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$, 所以点 M_0 在直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$

上.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

立即得 $1-\frac{y_0}{b}=0$, 所以 M_0 也在直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\\ 1-\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

上.

于是有 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$, 所以点 M_0 在直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$

上.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

立即得 $1-\frac{y_0}{b}=0$, 所以 M_0 也在直线

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \\ 1-\frac{y}{b}=0 \end{cases}$$

上.

因此, 单叶双曲面上的任意点 M_0 必在 u 族直线中的某一条直线上.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

立即得 $1-\frac{y_0}{b}=0$, 所以 M_0 也在直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\\ 1-\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

上.

因此, 单叶双曲面上的任意点 M_0 必在 u 族直线中的某一条直线上. 这样就证明了单叶双曲面是由 u 族直线所生成, 因此单叶双曲面是直纹曲面, 而 u 族直线是单叶双曲面的一族直母线, 称之为 u 族直母线.

如果 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由

同样可以证明, 由直线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

同样可以证明, 由直线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

(其中 v 为非零任意实数)与另两直线(相当于 $v\to 0$ 和 $v\to\infty$ 的情形)

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \quad 和 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}}$$

同样可以证明，由直线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}}$$

(其中 v 为非零任意实数)与另两直线(相当于 $v\to 0$ 和 $v\to\infty$ 的情形)

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}} \quad \text{和} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}}$$

合在一起组成的直线族是单叶双曲面的另一族直母线，我们称之为单叶双曲面的 v 族直母线.

为避免取极限, 我们常把单叶双曲面的 u 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 u, w 不同时为零.

为避免取极限, 我们常把单叶双曲面的 u 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 u, w 不同时为零. 当 $uw \neq 0$ 时, 上式可化为前面的形式;

为避免取极限, 我们常把单叶双曲面的 u 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 u, w 不同时为零.当 $uw \neq 0$ 时, 上式可化为前面的形式; 当 $u=0$ 或 $w=0$时, 又分别化为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases}$$

为避免取极限, 我们常把单叶双曲面的 u 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 u, w 不同时为零. 当 $uw \neq 0$ 时, 上式可化为前面的形式; 当 $u=0$ 或 $w=0$时, 又分别化为

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \\ 1-\frac{y}{b}=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \\ 1+\frac{y}{b}=0. \end{cases}$$

而 v 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 v, t 不同时为零.

为避免取极限, 我们常把单叶双曲面的 u 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 u,w 不同时为零.当 $uw\neq 0$ 时, 上式可化为前面的形式; 当 $u=0$ 或 $w=0$时, 又分别化为

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \\ 1-\frac{y}{b}=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \\ 1+\frac{y}{b}=0. \end{cases}$$

而 v 族直母线写成

$$\boxed{\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}}$$

其中 v,t 不同时为零. 这里需要指出, 上面两式所表示的直线只依赖于 $u:w$ 和 $v:t$ 的值.

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$,

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \beta\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{x}{a}\right), \\ \beta\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线.

注: 若将单叶双曲面方程改写成 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{x}{a}\right), \\ \beta\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{x}{a}\right), \\ \beta\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)\frac{y}{b}+(\alpha-\beta)\frac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\frac{x}{a}, \\ \end{cases}$$

注: 若将单叶双曲面方程改写成 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{x}{a}\right),\\ \beta\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right),\end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)\frac{y}{b}+(\alpha-\beta)\frac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\frac{x}{a},\\ (\alpha-\beta)\frac{y}{b}+(\alpha+\beta)\frac{z}{c}=-(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\frac{x}{a},\end{cases}$$

注：若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{x}{a}\right),\\ \beta\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right),\end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)\frac{y}{b}+(\alpha-\beta)\frac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\frac{x}{a},\\ (\alpha-\beta)\frac{y}{b}+(\alpha+\beta)\frac{z}{c}=-(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\frac{x}{a},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\alpha-\beta)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=(\alpha+\beta)\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \end{cases}$$

注： 若将单叶双曲面方程改写成 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

类似作方程组

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{x}{a}\right),\\ \beta\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\end{cases}$$

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha-\beta)\dfrac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\dfrac{x}{a},\\ (\alpha-\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha+\beta)\dfrac{z}{c}=-(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\alpha-\beta)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha+\beta)\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ (\alpha+\beta)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha-\beta)\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

同理可说明, 方程组

$$\begin{cases} \alpha'\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \\ \beta'\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

表示 u 族直母线.

可以说明它实际上是 v 族直母线. 事实上, 上面两式相加, 两式相减,得

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha-\beta)\dfrac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\dfrac{x}{a}, \\ (\alpha-\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha+\beta)\dfrac{z}{c}=-(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha-\beta)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha+\beta)\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ (\alpha+\beta)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha-\beta)\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

同理可说明, 方程组

$$\begin{cases} \alpha'\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \\ \beta'\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

表示 u 族直母线.

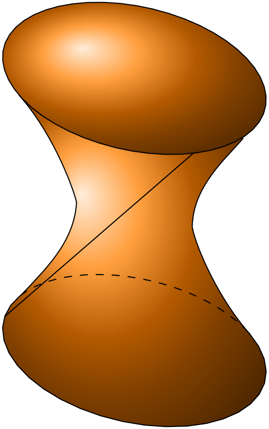
推论

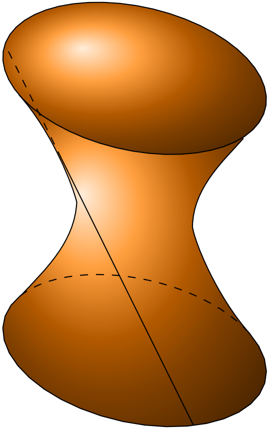
对于单叶双曲面上的点, 两族直母线中各有一条直母线通过该点.

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha-\beta)\dfrac{z}{c}=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\dfrac{x}{a}, \\ (\alpha-\beta)\dfrac{y}{b}+(\alpha+\beta)\dfrac{z}{c}=-(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha-\beta)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha+\beta)\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ (\alpha+\beta)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=(\alpha-\beta)\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

下图表示了单叶双曲面上的两族直母线的大概分布情况.





课堂练习: P 181, 习题 1

求下列直纹曲面的直母线族方程.

$$(1)x^2 - y^2 - z^2 = 0; \quad (2)z = axy.$$

课堂练习: P 181, 习题 1

求下列直纹曲面的直母线族方程.

$$(1)x^2 - y^2 - z^2 = 0; \quad (2)z = axy.$$

答案: (1) $\begin{cases} w(x+y) = uz, \\ u(x-y) = wz \end{cases}$ $(w, u$ 不全为零$)$;

(2) $\begin{cases} x = u, \\ z = auy \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y = v, \\ z = avx. \end{cases}$

☞ 双曲抛物面上的直母线

☞ **双曲抛物面上的直母线** 对于双曲抛物面

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,}$$

同样可以证明它也有两组直母线，它们的方程分别是

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = z \end{cases}} \quad \text{和} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = z. \end{cases}}$$

☞ 双曲抛物面上的直母线 对于双曲抛物面

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,}$$

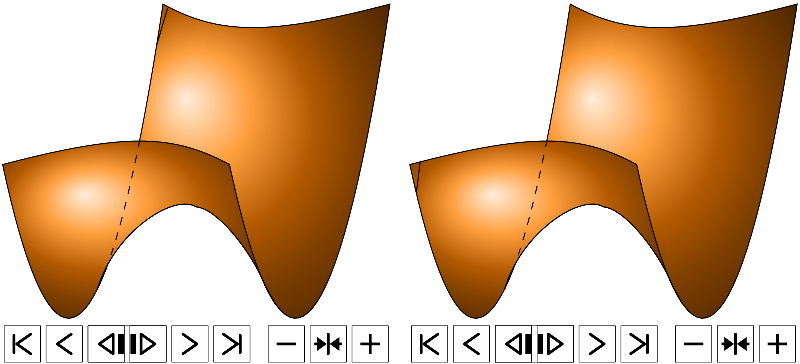
同样可以证明它也有两组直母线，它们的方程分别是

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u,\\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}} \text{ 和 } \boxed{\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z.\end{cases}}$$

并且也有下面的推论:

推论

对于双曲抛物面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过该点.



直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架．这两类曲面还有下面的一些性质．

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用, 常常用它来构成建筑的骨架. 这两类曲面还有下面的一些性质.

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面, 而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交.

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架. 这两类曲面还有下面的一些性质.

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交.

证 只证第一个结论.

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架. 这两类曲面还有下面的一些性质.

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交.

证 只证第一个结论. 由

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架. 这两类曲面还有下面的一些性质.

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交.

证 只证第一个结论. 由

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架. 这两类曲面还有下面的一些性质.

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交.

证 只证第一个结论. 由

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix}$$

直母线的性质 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线在建筑上有着重要的应用，常常用它来构成建筑的骨架．这两类曲面还有下面的一些性质．

定理 4.7.1

单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交．

证 只证第一个结论．由

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & w & u \\ 0 & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \text{和} \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & w & u \\ 0 & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix} = -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & 0 & u \\ 0 & w & -u & 0 \\ t & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \text{和} \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & w & u \\ 0 & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix} = -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & 0 & u \\ 0 & w & -u & 0 \\ t & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}(wuvt - wuvt)$$

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & w & u \\ 0 & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix} = -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & 0 & u \\ 0 & w & -u & 0 \\ t & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}(wuvt - wuvt) = 0.$$

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \text{和} \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & w & u \\ 0 & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix} = -\frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & 0 & 0 & u \\ 0 & w & -u & 0 \\ t & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{abc}(wuvt - wuvt) = 0.$$

根据 §3.8 的例 3 知这两条直线一定是共面的, 所以单叶双曲面上异族的两条直母线必共面.

的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & u \\ u & w & -u & w \\ t & v & t & v \\ v & -t & -v & t \end{vmatrix}$$

定理 4.7.2

单叶双曲面或双曲抛物面上同族的任意两直母线总是异面直线，而且双曲抛物面同族的全体直母线平行于同一平面.

定理 4.7.2

单叶双曲面或双曲抛物面上同族的任意两直母线总是异面直线，而且双曲抛物面同族的全体直母线平行于同一平面.

证 略(思考题).

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases}$$

例

求过单叶双曲面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=u\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ u\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=w\left(1-\frac{y}{2}\right) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=v\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ v\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=t\left(1+\frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{2}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{2}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \text{和} \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{2}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=2\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ 2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=1-\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

例

求过单叶双曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程.

解 该单叶双曲面的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{2}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=2\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ 2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=1-\dfrac{y}{2} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} 1-\dfrac{y}{2}=0, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}=0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0 \end{cases}$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=2\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ 2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=1-\dfrac{y}{2} \end{cases} \text{和} \begin{cases} 1-\dfrac{y}{2}=0, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}=0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y-2=0, \\ 4x-3z=0. \end{cases}$

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w:u=1:2 \text{ 与 } t=0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=2\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ 2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=1-\dfrac{y}{2} \end{cases} \text{和} \begin{cases} 1-\dfrac{y}{2}=0, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}=0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 4x - 12y + 3z - 24 = 0, \\ 4x + 3y - 3z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{与} \begin{cases} y - 2 = 0, \\ 4x - 3z = 0. \end{cases}$$

思考: 空间两条不同的直线, 其中一条绕另一条旋转, 得一曲面, 它是什么曲面?

将点$(6,2,8)$代入上面两组方程, 求得

$$w : u = 1 : 2 \text{ 与 } t = 0,$$

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{z}{4} = 2\left(1 + \frac{y}{2}\right), \\ 2\left(\frac{x}{3} - \frac{z}{4}\right) = 1 - \frac{y}{2} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 1 - \frac{y}{2} = 0, \\ \frac{x}{3} - \frac{z}{4} = 0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y-2=0, \\ 4x-3z=0. \end{cases}$

✍思考: 空间两条不同的直线, 其中一条绕另一条旋转, 得一曲面, 它是什么曲面?

习题课

代入直母线方程, 得两条直母线分别为

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{z}{4}=2\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ 2\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=1-\frac{y}{2} \end{cases} \text{和} \begin{cases} 1-\frac{y}{2}=0, \\ \frac{x}{3}-\frac{z}{4}=0, \end{cases}$$