第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 §4.5 双曲面

研制者: 吴炳烨

高等教育出版社 高等教育电子音像出版社



教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质



教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论双曲面的几何形状与性质



教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论双曲面的几何形状与性质

教学重难点: 单叶双曲面与双叶双曲面的联系与区别



单叶双曲面的定义

🖙 单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面,

单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面,上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面,上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

[©] 单叶双曲面的简单性质

单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面,上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

学 单叶双曲面的简单性质 从单叶双曲面的方程可以看出,与椭球面一样,它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的.

单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面,上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

单叶双曲面的简单性质 从单叶双曲面的方程可以看出,与椭球面一样,它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的. 双曲面与 z 轴不相交,与 x 轴与 y 轴分别交于点 $(\pm a,0,0)$ 与 $(0,\pm b,0)$,

;等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏶 §4.5 双曲面 🕏 3/19

□ 单叶双曲面

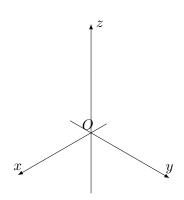
单叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

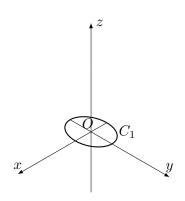
所表示的曲面叫做单叶双曲面,上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

单叶双曲面的简单性质 从单叶双曲面的方程可以看出,与椭球面一样,它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的. 双曲面与 z 轴不相交,与 x 轴与 y 轴分别交于点 $(\pm a,0,0)$ 与 $(0,\pm b,0)$, 这四点叫做单叶双曲面的顶点.

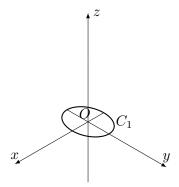
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$$



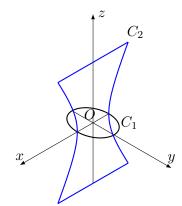
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$$



$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} C_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

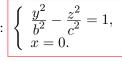


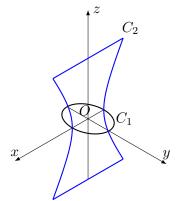
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} C_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$



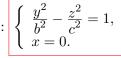
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$$

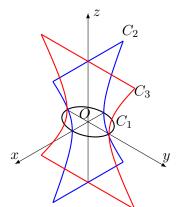
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$





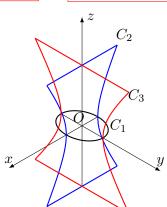
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} C_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases} C_3: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$





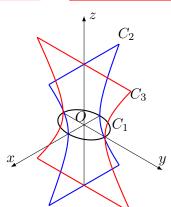
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆;



$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

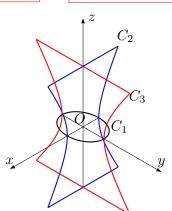


№ 2 単叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似, 考虑主截线

$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2 , C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

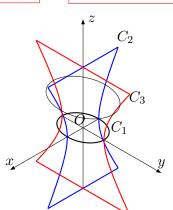


№ 2 単叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似, 考虑主截线

$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$



№ 2 単叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似, 考虑主截线

$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

别是
$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

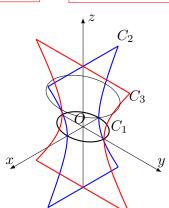
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

平面 z=h 与单叶双曲面 相截, 得椭

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

别是 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,

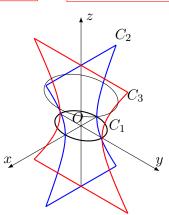


$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{array} \right. C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双 曲线,它们有共同的虚轴与虚轴长.

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

别是
$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, 两轴端 点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$

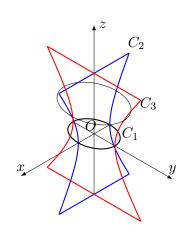


$$\left(0, \pm b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, h\right),$$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双 曲线,它们有共同的虚轴与虚轴长.

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

別是
$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 两轴端 点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},0,h\right)$ 与

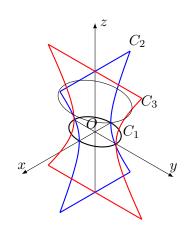


$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight)$$
,它们分别在双曲线 $C_2: \left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{array}
ight.$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双 曲线,它们有共同的虚轴与虚轴长.

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

别是
$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},0,h\right)$ 与

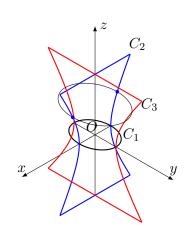


$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight)$$
,它们分别在双曲线 $C_2:$ $\left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \end{array}
ight.$

 C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双 曲线,它们有共同的虚轴与虚轴长.

圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$
 两半轴分

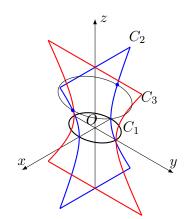
别是
$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},0,h\right)$ 与



$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight),$$
 它们分别在双曲线 $C_2:$ $\left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \end{array}
ight.$ 与

$$C_3: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \bot.$$

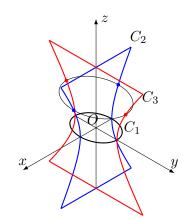
$$a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},0,h
ight)$ 与



$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight),$$
 它们分别在双曲线 $C_2:$ $\left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \end{array}
ight.$ 与

$$C_3: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \bot.$$

$$a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$, 两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},0,h
ight)$ 与



$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight),$$
 它们分别在双曲线 $C_2:$ $\left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \end{array}
ight.$ 与

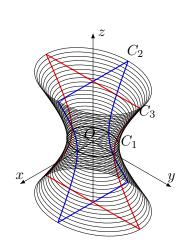
$$C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{array} \right. \bot.$$

$$a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},0,h
ight)$ 与

$$\left(0,\pm b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},h
ight)$$
,它们分别在双曲线 $C_2:$ $\left\{egin{array}{c} rac{x^2}{a^2}-rac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \end{array}
ight.$ 与

$$C_3: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \bot.$$

$$a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$$
 与 $b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,两轴端
点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}},0,h
ight)$ 与



由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

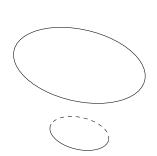
由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2 , C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶 双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

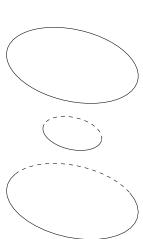


等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 • 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 • §4.5 双曲面 • 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2 , C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

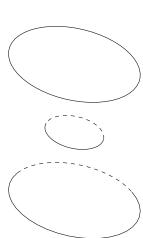
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;



等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 • 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 • §4.5 双曲面 • 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

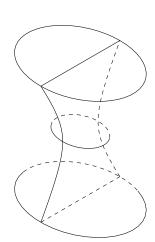
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截 线及正面轮廓双曲线;



等学校数学专业基础课程《解析几何》 🕏 吴炳烨研制 🌸 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏶 🖇 4.5 双曲面 🟶 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

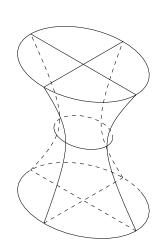
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;



亭学校数学专业基础课程《解析几何》 ® 吴炳烨研制 ® 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ® §4.5 双曲面 ® 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2 , C_3 滑动.

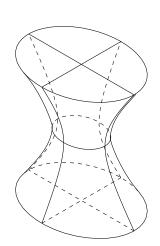
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截 线及正面轮廓双曲线;



等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 • 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 • §4.5 双曲面 • 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

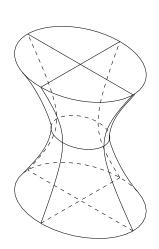
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;



等学校数学专业基础课程《解析几何》 ® 吴炳烨研制 🐞 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 📽 🖇 4.5 双曲面 🟶 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2 , C_3 滑动.

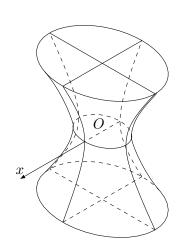
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;
- (3) 最后依次画出坐标轴即可.



等学校数学专业基础课程《解析几何》 ◉ 吴炳烨研制 ◉ 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ◉ §4.5 双曲面 ◉ 5/19 ◆

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

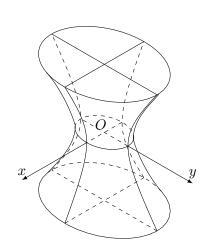
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;
- (3) 最后依次画出坐标轴即可.



等学校数学专业基础课程《解析几何》 ● 吴炳烨研制 ● 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ● §4.5 双曲面 ● 5/19 ◇◇◇

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

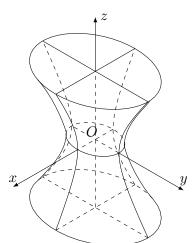
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截 线及正面轮廓双曲线:
- (3) 最后依次画出坐标轴即可.



等学校数学专业基础课程《解析几何》 : 吴炳烨研制 : 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 : §4.5 双曲面 : 5/19 🐼

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2,C_3 滑动.

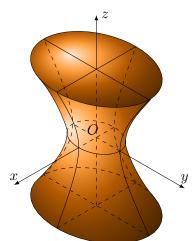
- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线:
- (3) 最后依次画出坐标轴即可.



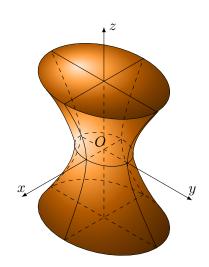
高等学校数学专业基础课程《解析几何》 * 吴炳烨研制 * 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 * 84.5 双曲面 * 5/19

因此,单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的,这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行,且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2 , C_3 滑动.

- (1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
- (2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线:
- (3) 最后依次画出坐标轴即可.

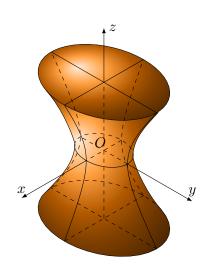


$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$



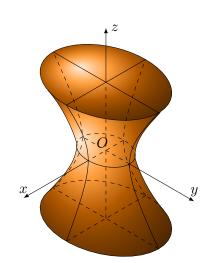
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| < b 时, 上面的截线 为双曲线, 它的实轴平行于 x轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

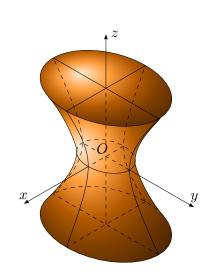
当 |h| < b 时,上面的截线为双曲线,它的实轴平行于 x 轴,实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,虚轴平行于 z 轴,虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| < b 时, 上面的截线 为双曲线, 它的实轴平行于 x轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 虚 轴平行于 z 轴, 虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 且该双曲线的顶点 $(\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - h^2}, h, 0)$ 在腰椭圆

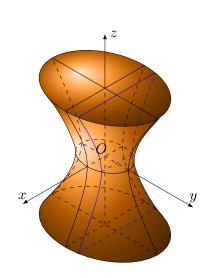
$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$



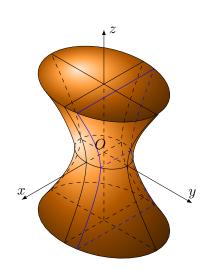
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| < b 时, 上面的截线 为双曲线, 它的实轴平行于 x轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 虚 轴平行于 z 轴, 虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 且该双曲线的顶点 $(\pm \frac{a}{h} \sqrt{b^2 - h^2}, h, 0)$ 在腰椭圆

$$C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

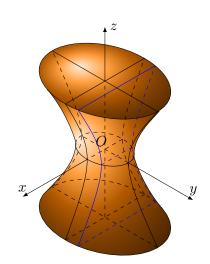


$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$



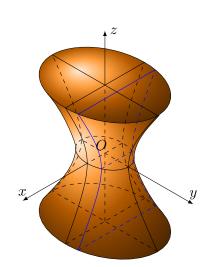
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| > b 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴 长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| > b 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴 长为 $\frac{c}{h}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,

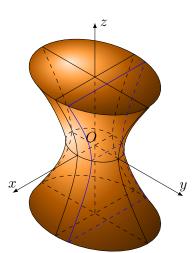


y = n y = n y = n

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当 |h| > b 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴 长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 而 且它的顶点 $(0,h,\pm\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2})$ 在双曲线

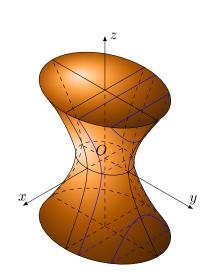
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$



 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$

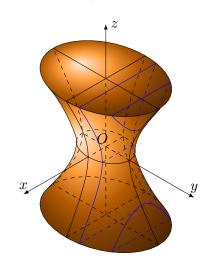
当 |h| > b 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴 长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 而且它的顶点 $(0,h,\pm\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2})$ 在双曲线

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$



高等學校教學专业基础课程《解析几何》會 吳納粹研制 會 第四章 柱面、锥面、栽特曲面与二次曲面 會 $\S 4.5$ 双曲面 會 8/19 如果用平行于 xOz 的平面 y=h 来截割单叶双曲面,那么截线的方程为 \S

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

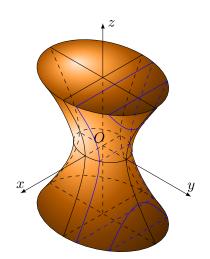


如果用平行于xOz的平面y=h来截割单叶双曲面,那么截线的方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当|h| = b时, 截线方程变为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = b \end{cases} \stackrel{?}{\bowtie} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = -b. \end{cases}$$



如果用平行于xOz的平面y=h来截割单叶双曲面,那么截线的方程为

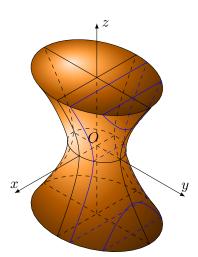
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当|h|=b时, 截线方程变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = b \end{array} \right. \quad \not \lesssim \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = -b. \end{array} \right.$$

这是两条直线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0, \\ y = b \end{cases} \quad \text{if } \begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0, \\ y = -b. \end{cases}$$



如果用平行于xOz的平面y=h来截割单叶双曲面,那么截线的方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

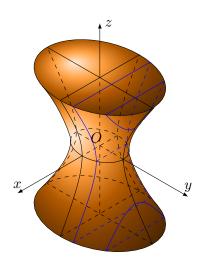
当|h|=b时, 截线方程变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = b \end{array} \right. \quad \not \lesssim \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = -b. \end{array} \right.$$

这是两条直线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0,\\ y=b \end{array} \right. \quad \not \propto \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0,\\ y=-b. \end{array} \right.$$

交点是 (0, b, 0) 或 (0, -b, 0).



如果用平行于 xOz 的平面 y=h 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

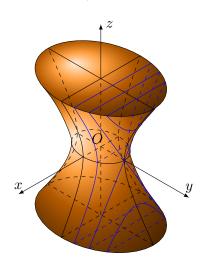
当|h| = b时, 截线方程变为

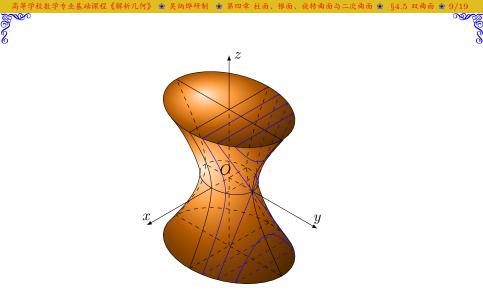
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = b \end{array} \right. \quad \not \lesssim \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = -b. \end{array} \right.$$

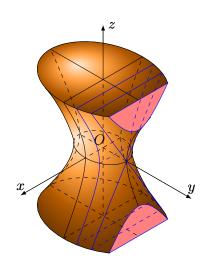
这是两条直线

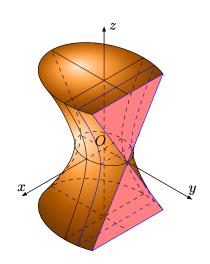
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0,\\ y=b \end{array} \right. \quad \text{if} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0,\\ y=-b. \end{array} \right.$$

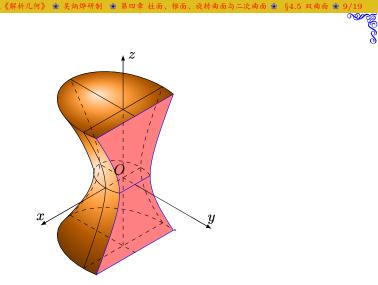
交点是 (0, b, 0) 或 (0, -b, 0).











若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似.

等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 • 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 • §4.5 双曲面 • 10/19

若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似. 在单叶双曲面的方程中, 如果 a=b , 那么它就成为单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🟶 🖇 4.5 双曲面 🎕 10/19

若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似. 在单叶双曲面的方程中, 如果 a=b , 那么它就成为单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

另外, 以下方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
 $\not \propto -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

所表示的图形, 也都是单叶双曲面.

□ 双叶双曲面

□ 双叶双曲面

双叶双曲面的定义

□ 双叶双曲面

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

双叶双曲面的简单性质

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

双叶双曲面的简单性质 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项,因此该曲面关于三个坐标平面,三坐标轴以及坐标原点都对称,

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程,其中 a,b,c 是任意的正常数.

双叶双曲面的简单性质 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项,因此该曲面关于三个坐标平面,三坐标轴以及坐标原点都对称,而且曲面与 x 轴, y 轴都不相交,只与 z 轴交于两点 $(0,0,\pm c)$,

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🐞 §4.5 双曲面 🕏 11/19

□ 双叶双曲面

双叶双曲面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面,上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程,其中 a.b.c 是任意的正常数.

双叶双曲面的简单性质 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项,因此该曲面关于三个坐标平面,三坐标轴以及坐标原点都对称,而且曲面与 x 轴, y 轴都不相交,只与 z 轴交于两点 $(0,0,\pm c)$,这两点叫做双叶双曲面的顶点.

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \le -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x = 0 分别交曲面于两条双曲线

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \le -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x = 0 分别交曲面于两条双曲线

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, y = 0$$

 $^{\circ}$ 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x = 0 分别交曲面干两条双曲线

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

8 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \le -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x = 0 分别交曲面干两条双曲线

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \not\ni \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

[©] 双叶双曲面的形状

8 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 z < -c. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x=0 分别交曲面干两条双曲线

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \not= \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

 $^{\prime}$ 双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双 曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

 Z^{∞} 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $Z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 x=0 分别交曲面干两条双曲线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双 曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

当 |h| = c 时, 截得的图形为一点;

时才才以及了?正整明你在《所刊几日》 最 天州不可則 重 邦日子 在山、非山、《代书山刊一八叫山 曹 34.0 八叫山 曹 12/-000

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \le -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x = 0 分别交曲面于两条双曲线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \ge c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

8 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 z = 0 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 y = 0 与 x=0 分别交曲面干两条双曲线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双 曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

 从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \ge c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \ge c$ 与 $z \ge c^2$ 出 $z \ge c^2$ 出 $z \ge c^2$ 出 $z \ge c^2$ と $z \ge c^2$ と x = 0 分别交曲面干两条双曲线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双 曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

% 此时椭圆
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{array} \right.$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \ge c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} > b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$
.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ z \\ z \\ z = h \end{array} \right.$$
 此时椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \\ z^2 \\ z \\ z = h \end{array} \right.$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right)$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \ge c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

% 此时椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, &$ 的两轴端点 z = h

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) \ \ \backsimeq \ \ \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

双叶双曲面的形状 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \ge c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} + b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

% 此时椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \quad$ 的两轴端点 z = h

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) = \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2: \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} + b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

% 此时椭圆
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \quad$$
的两轴端点 $z = h$

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) \ \ \backsimeq \ \ \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2: \left[\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right] \not= C_3: \left[\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{array} \right. \right]$$

上

影 此时椭圆
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \quad$$
的两轴端点 $z = h$

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) = \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} \not\subseteq C_3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{array} \right.$$

上. 因此, 双叶双曲面可看成由一族相似的椭圆的变动而产生的,



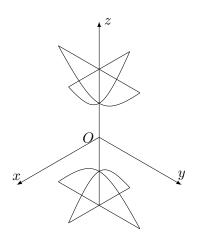
% 此时椭圆
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \end{array} \right.$$
 的两轴端点 $z = h$

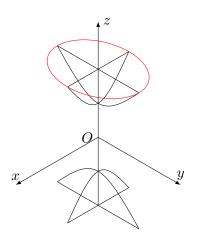
$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) = \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

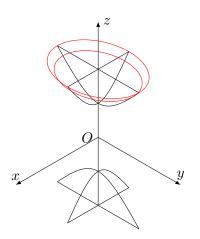
分别在双曲线

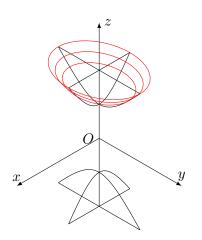
$$C_2: \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{array} \right\} \not\equiv C_3: \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{array} \right\} \end{bmatrix}$$

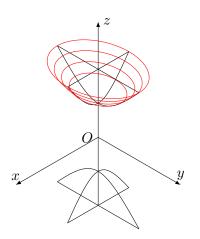
上. 因此, 双叶双曲面可看成由一族相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中, 保持所在的平面平行于 xOy 面, 且两轴的端点分别沿着双曲线 C_2 , C_3 滑动.

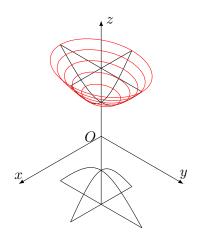


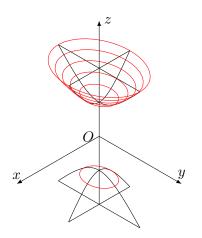


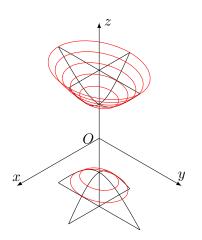


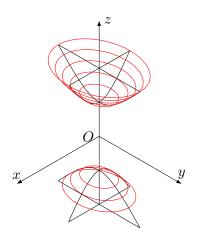


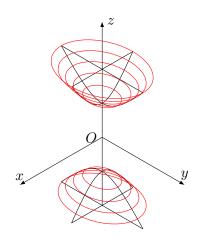


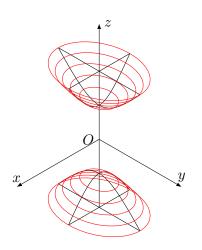


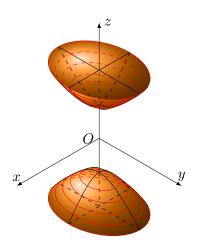












在方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
 中,如果 $a = b$,那么这时截线

$$-1$$
 中,如果 $a=b$,那么这时截约

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{array} \right.$$

为一圆.

在方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
 中,如果 $a = b$,那么这时截线

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{array} \right.$$

为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面.

在方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
 中, 如果 $a = b$, 那么这时截线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases}$$

为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面. 另外, 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1} \Rightarrow \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1}$$

所表示的图形, 也都是双叶双曲面.

在方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
 中, 如果 $a = b$, 那么这时截线

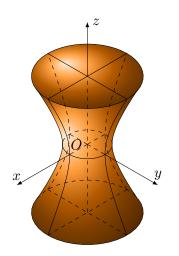
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases}$$

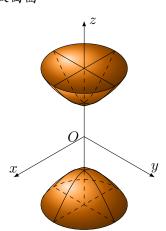
为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面. 另外, 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1} \stackrel{\cancel{z}}{=} \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1}$$

所表示的图形, 也都是双叶双曲面. 单叶双曲面和双叶双曲面统称为双曲面.

旋转双曲面





双曲面的参数方程

$$\begin{cases} x = a \sec u \cos v, \\ y = b \sec u \sin v, \\ z = c \tan u \end{cases}$$

双曲面的参数方程 容易验证, 单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为

$$\begin{cases} x = a \sec u \cos v, \\ y = b \sec u \sin v, \\ z = c \tan u \end{cases}$$

些

$$\begin{cases} x = a \tan u \cos v, \\ y = b \tan u \sin v, \\ z = c \sec u. \end{cases}$$

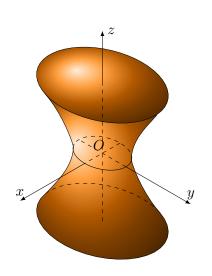
渐近锥面

渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$

1

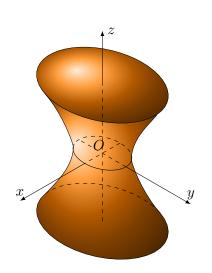
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$

1,



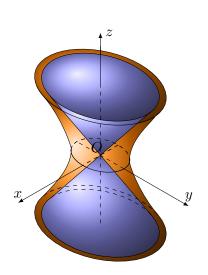
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

1.
$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



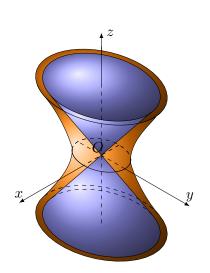
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

1.
$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



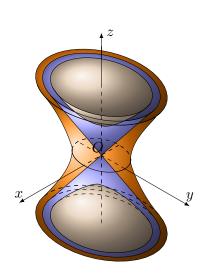
渐近锥面 曲面
$$\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$$
1、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与
$$\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

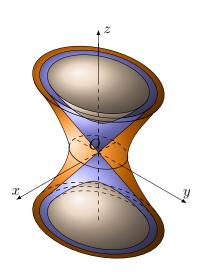


渐近锥面 曲面
$$\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

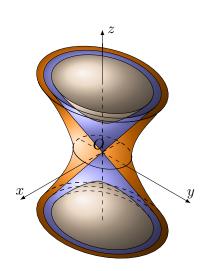
$$\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



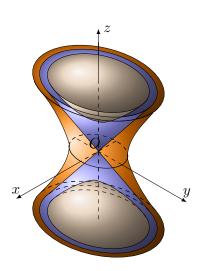
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$ $1 \quad \Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad 5$ $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \beta \quad \text{別是}$ 单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面,



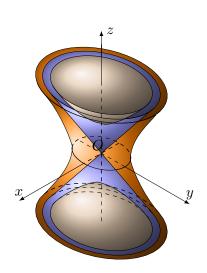
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 分别是 单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面、它们与 z = h(h > c) 的截线是相 似椭圆



渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$ 1、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 分别是 单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面, 它们与 z = h(h > c) 的截线是相 似椭圆 C_1 : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$



渐近锥面 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$ 1、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 分别是 单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面, 它们与 z = h(h > c) 的截线是相 似椭圆 C_1 : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$ $C_0: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$

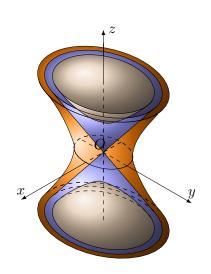


渐近锥面 曲面
$$\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 分别是 单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面、它们与 $z = h(h > c)$ 的截线是相

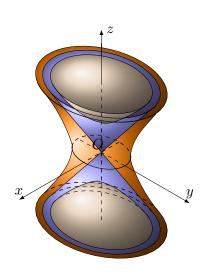
似椭圆
$$C_1$$
:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

$$C_0: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} :$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$



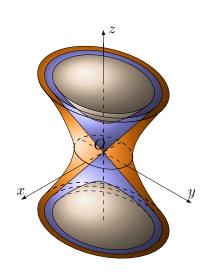
它们与
$$z=h(h>c)$$
 的截线是相似椭圆 $C_1: \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z=h, \end{array}\right.$ $C_0: \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2},\\ z=h, \end{array}\right.$ $\mathcal{L}_{0}: \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h, \end{array}\right.$



$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

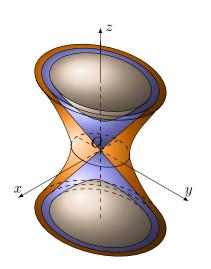
它们与 z = h(h > c) 的截线是相

似椭圆
$$C_1:$$
 $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{array}\right.$ $C_0:$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{array}\right.$ $\mathcal{L}_{-1}:$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{array}\right.$



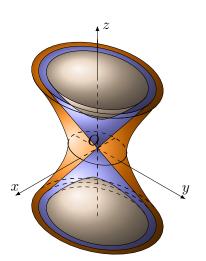
$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}}$$



$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

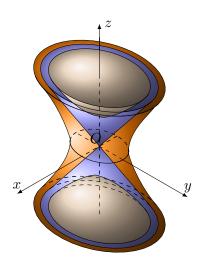
$$= \frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}} \to 0(h \to \infty).$$



$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}} \to 0(h \to \infty).$$

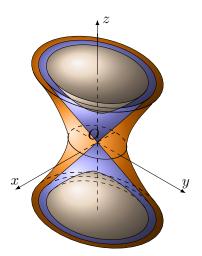
同理当 $h \to \infty$ 时, C_1 与 C_{-1} 的平行于 y 轴的两半轴之差也趋向于零.



$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}} \to 0(h \to \infty).$$

同理当 $h \to \infty$ 时, C_1 与 C_{-1} 的平行于 y 轴的两半轴之差也趋向于零. 锥面 Σ_0 称为双曲面 $\Sigma_{\pm 1}$ 的 渐近锥面.



例

用一组平行平面z = h(h) 任意实数) 截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a > b)得到一族椭圆, 求这些椭圆焦点的轨迹.

例

用一组平行平面z = h(h) 任意实数) 截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a > b)得到一族椭圆, 求这些椭圆焦点的轨迹.

解 这一族椭圆的方程为
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{array} \right.$$

例

用一组平行平面z = h(h) 任意实数) 截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a > b)得到一族椭圆, 求这些椭圆焦点的轨迹.

解 这一族椭圆的方程为
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, & p \\ z = h, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

多 因为
$$a>b$$
,所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,

解 这一族椭圆的方程为
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, & \mathbb{P} \\ z = h, \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

多 因为
$$a>b$$
,所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,短半轴为 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,

解 这一族椭圆的方程为 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, & \text{pr} \\ z = h, \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ x = h \end{cases}$$

8 因为 a>b,所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,短半轴为 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,从而 a 椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases}$$



因为 a>b,所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,短半轴为 $b\sqrt{1+rac{h^2}{c^2}}$,从而 s椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

消去参数 h 得

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

8 因为 a>b,所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,短半轴为 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$,从而 a 椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

消去参数 h 得

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

显然这族椭圆焦点的轨迹是一条在坐标面 xOz 上的双曲线, 双曲线的实轴为 x 轴, 虚轴为 z 轴.

△3 习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 $l \vdash m$ 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点,

高等学校数学专业基础课程《解析几何》 🎓 吴炳烨研制 🏚 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏚 🚱 4.5 双曲面 🏚 19/19

△3 习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点,

△3 习题讲解: P 168, 习题 6

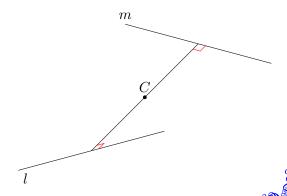
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点,

l

m

◎ □ 习题讲解: P 168, 习题 6

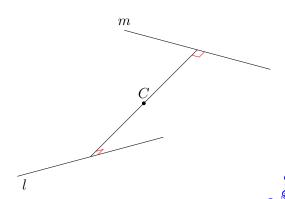
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点,



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 · 吴炳烨研制 · 密 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 · ⑧ · §4.5 双曲面 · ⑨ · 19/19

◎ △ 习题讲解: P 168, 习题 6

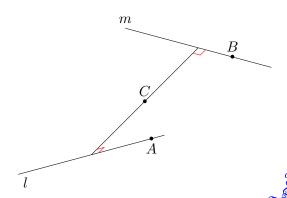
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, 且 $\angle ACB = 90^{\circ}$.



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 · 吴炳烨研制 · 密 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 · ⑧ · §4.5 双曲面 · ⑨ · 19/19

◎ △ 习题讲解: P 168, 习题 6

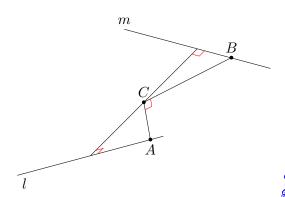
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, 且 $\angle ACB = 90^{\circ}$.



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 · 吴炳烨研制 · 密 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 · ⑧ · §4.5 双曲面 · ⑨ · 19/19

◎ △ 习题讲解: P 168, 习题 6

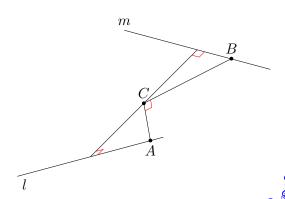
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, 且 $\angle ACB = 90^{\circ}$.



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 · 第 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 · § §4.5 双曲面 · • 19/19

△3 习题讲解: P 168, 习题 6

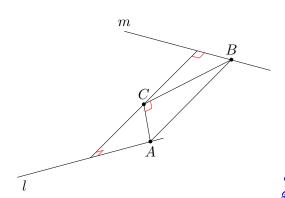
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 • 吴炳烨研制 · 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 · § 4.5 双曲面 · 19/19

△3习题讲解: P 168, 习题 6

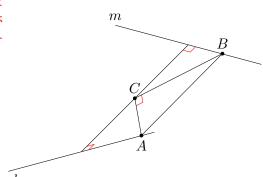
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.



▲3习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, L $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

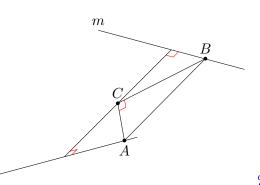


△3月题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点.

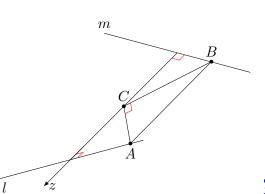


▲3月题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点.

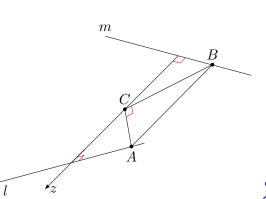


▲3习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB=90^{\circ}$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l,m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标 原点, x 轴与两异面直线成相等的角.

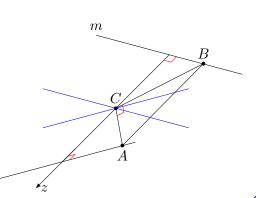


△习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标 原点, x 轴与两异面直线成相等的角.

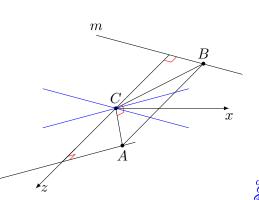


△习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB=90^{\circ}$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l,m 公垂线所在直线为 z 轴,公垂线中点 C 为坐标 原点,x 轴与两异面直线成相等的角.

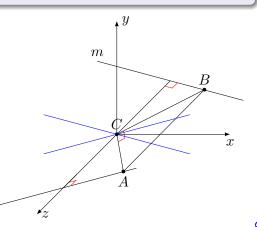


▲3习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, L $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.

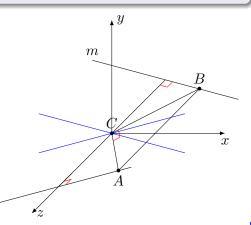
证 取 l,m 公垂线所在直线为 z 轴,公垂线中点 C 为坐标 原点,x 轴与两异面直线成相等的角.



△习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, \mathbb{L} $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

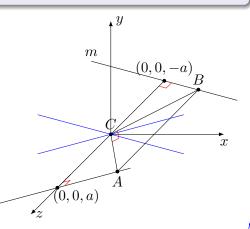
分析:解本题坐标系选择是关键.为使得到的轨迹方程是标准方程,要选取坐标系使其具有最大的对称性.



▶ 3 习题讲解: P 168, 习题 6

设直线 l = m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90^{\circ}$. 试证明直线 AB 的 轨迹是一个单叶双曲面.

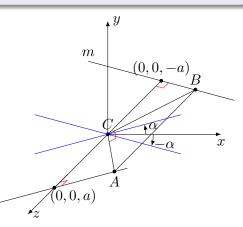
分析: 解本题坐标系选择是关 键. 为使得到的轨迹方程是标 准方程,要选取坐标系使其具 有最大的对称性.



△3习题讲解: P 168, 习题 6

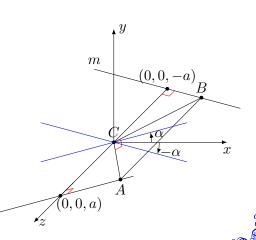
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动, L $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.



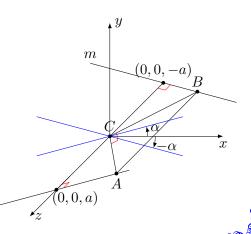
$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right.$$

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.



$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

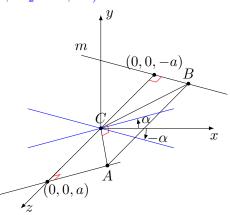
分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.



$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a).$

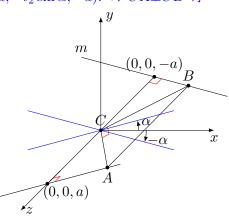
分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.



$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.



$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设
$$A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$$
. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得
$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为
$$2\alpha \neq 90^{\circ}$$
, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$,

$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\bot\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^{\circ}$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^{\circ}$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$



$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\bot\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^{\circ}$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ (**) \end{cases}$$

$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^{\circ}$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \end{cases}$$
 (**)

$$l: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{array} \right. \quad m: \left\{ \begin{array}{l} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{array} \right.$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1 t_2 \cos^2 \alpha - t_1 t_2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^{\circ}$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

由 (*), (**) 消去 u, t_1 , t_2 得直线 AB 的轨迹方程为 $\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u$,

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

由 (*),(**) 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为 $\frac{x}{\cos\alpha}=t_1+(t_2-t_1)u,\quad \frac{y}{\sin\alpha}=t_1-(t_1+t_2)u,$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$(*),(**)$$
 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为
$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u),$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$a_{0}(*),(**)$$
 消去 u,t_{1},t_{2} 得直线 AB 的轨迹方程为
$$\frac{x}{\cos\alpha}=t_{1}+(t_{2}-t_{1})u, \quad \frac{y}{\sin\alpha}=t_{1}-(t_{1}+t_{2})u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=t_{1}(2-2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}=t_{2}\cdot 2u,$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u$$

$$a(*),(**)$$
 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为
$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$
$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right) \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\sin \alpha} = t_2(2 - 2u), \quad \frac{z}{\sin \alpha} = t_3(2u), \quad \frac{z}{\sin \alpha} = t$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$
$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right) \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right) \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha}$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.$$
(*

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$
$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\sin \alpha + \frac{1}{(z - 2u)} \cos \alpha + \sin \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2u} \cos \alpha + \frac{1}{2$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x}{\cos \alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right) \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha} \left(1 - \frac{z}{a} \right) \left(1 + \frac{z}{a} \right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.$$
(8)

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x^2}{\frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right) \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 + \frac{z}{a}\right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.$$
(*)

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

它是一个单叶双曲面.

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

它是一个单叶双曲面.

下一节

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.\tag{*}$$

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \alpha + (t_2 - t_1) \cos \alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases}$$
 (**)