第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.2 锥面

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§4.2 锥面

§4.2 锥面

教学内容: 锥面及其方程

§4.2 锥面

教学内容: 锥面及其方程

教学目的: 掌握锥面方程的计算

§4.2 锥面

教学内容: 锥面及其方程

教学目的: 掌握锥面方程的计算

教学重难点: 锥面方程的特征

☞ 锥面的定义

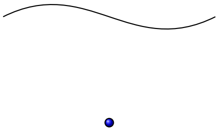
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface),

☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线,

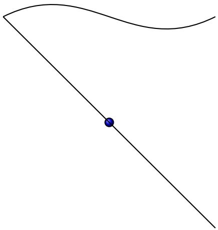
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex),

☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex), 定曲线叫做锥面的准线.

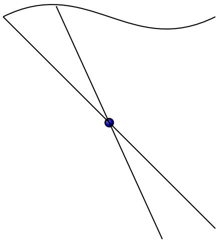
锥面的定义 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex), 定曲线叫做锥面的准线.



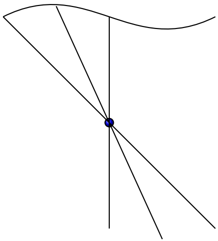
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface)，这些直线都叫做锥面的母线，那个定点叫做锥面的顶点(vertex)，定曲线叫做锥面的准线.



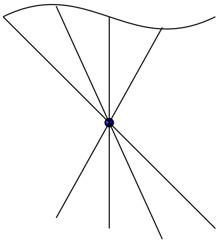
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface)，这些直线都叫做锥面的母线，那个定点叫做锥面的顶点(vertex)，定曲线叫做锥面的准线.



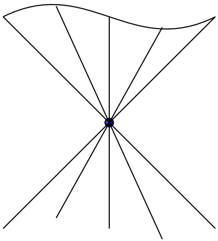
锥面的定义 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex), 定曲线叫做锥面的准线.



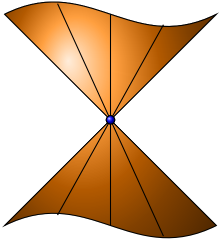
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex), 定曲线叫做锥面的准线.



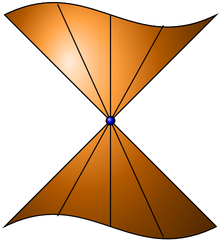
☞ **锥面的定义** 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface), 这些直线都叫做锥面的母线, 那个定点叫做锥面的顶点(vertex), 定曲线叫做锥面的准线.



锥面的定义 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface)，这些直线都叫做锥面的母线，那个定点叫做锥面的顶点(vertex)，定曲线叫做锥面的准线.

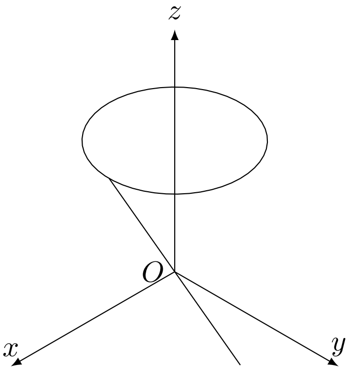


锥面的定义 在空间中通过一定点且与一定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面(conical surface)，这些直线都叫做锥面的母线，那个定点叫做锥面的顶点(vertex)，定曲线叫做锥面的准线.

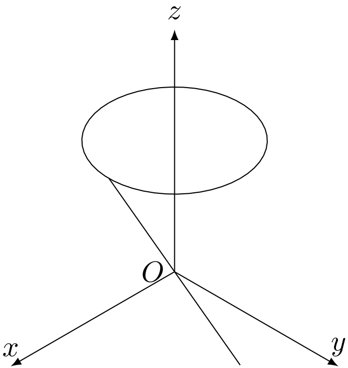


注： 锥面的准线不唯一(锥面上与每一条直母线相交的任意曲线均可作为准线)，且总可选平面曲线作为准线.

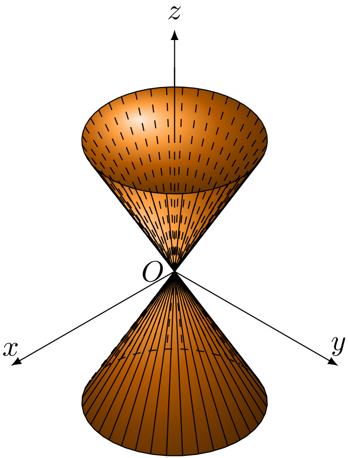
圆锥面



圆锥面



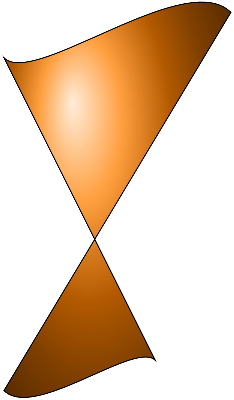
圆锥面



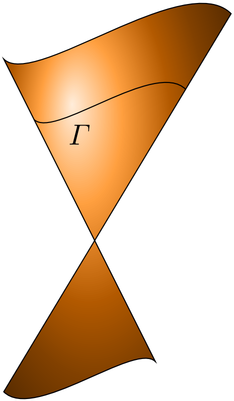
☞ 锥面的方程

锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$

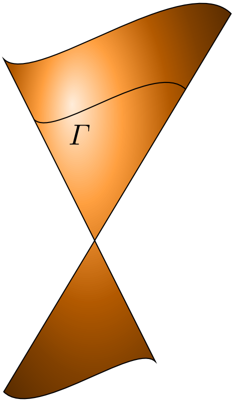
锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$



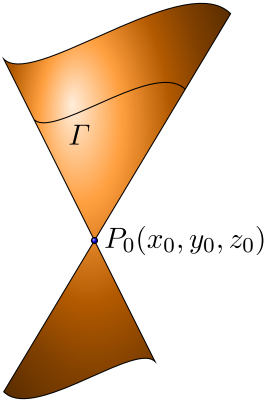
锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$



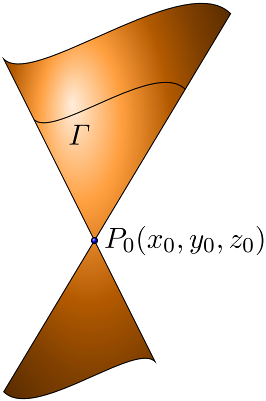
☞ **锥面的方程** 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.



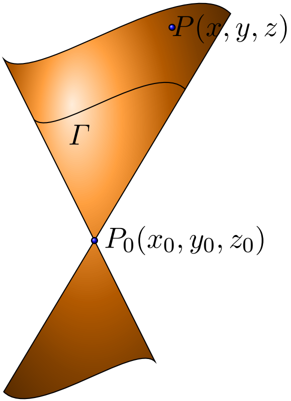
☞ **锥面的方程** 设锥面准线 $\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.



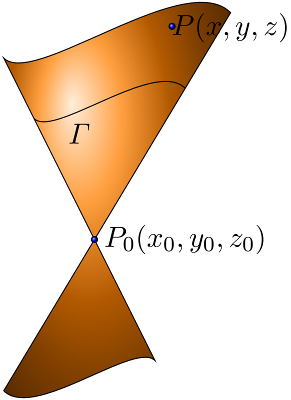
锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$,



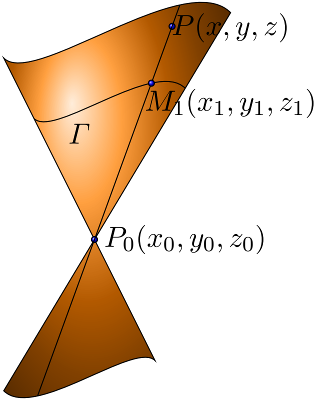
锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$,



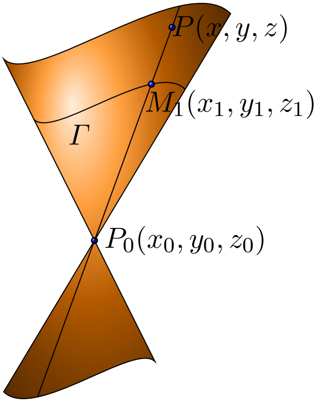
☞ **锥面的方程** 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,



锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

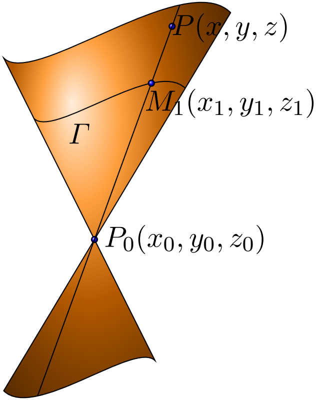


锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0M_1}=t\overrightarrow{P_0P}$, 即



☞ **锥面的方程** 设锥面准线 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0M_1}=t\overrightarrow{P_0P}$, 即

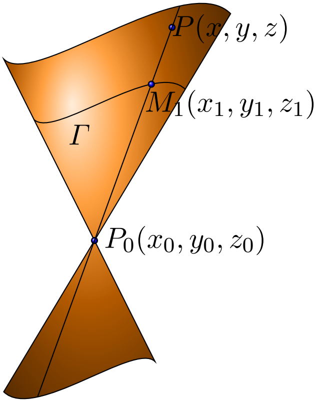
$$\begin{cases}x_1-x_0=t(x-x_0),\\y_1-y_0=t(y-y_0),\\z_1-z_0=t(z-z_0).\end{cases}$$



☞ **锥面的方程** 设锥面准线 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0M_1}=t\overrightarrow{P_0P}$, 即

$$\begin{cases} x_1-x_0=t(x-x_0), \\ y_1-y_0=t(y-y_0), \\ z_1-z_0=t(z-z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_0+t(x-x_0), \\ y_1=y_0+t(y-y_0), \\ z_1=z_0+t(z-z_0). \end{cases}$$

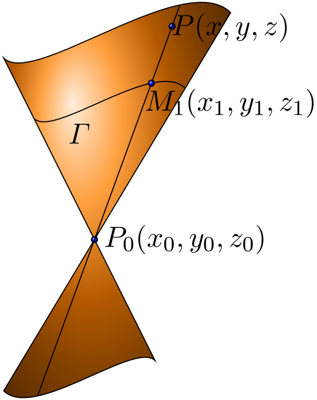


锥面的方程 设锥面准线 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 锥面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的母线与 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0M_1}=t\overrightarrow{P_0P}$, 即

$$\begin{cases} x_1-x_0=t(x-x_0), \\ y_1-y_0=t(y-y_0), \\ z_1-z_0=t(z-z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_0+t(x-x_0), \\ y_1=y_0+t(y-y_0), \\ z_1=z_0+t(z-z_0). \end{cases}$$

M_1 在 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上

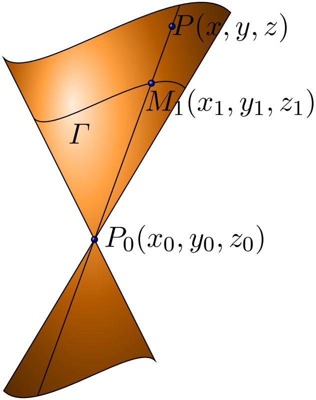


$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0, \\ F_2(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = t(x-x_0), \\ y_1 - y_0 = t(y-y_0), \\ z_1 - z_0 = t(z-z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + t(x-x_0), \\ y_1 = y_0 + t(y-y_0), \\ z_1 = z_0 + t(z-z_0). \end{cases}$$

M_1 在 $\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 上



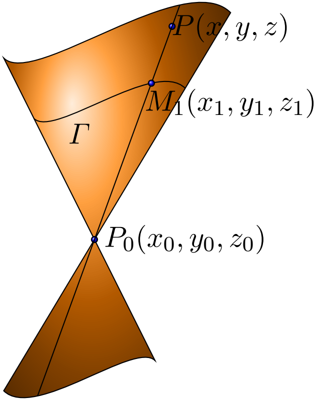
$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0, \\ F_2(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0. \end{cases}$$

从上面方程组消去参数 t, 得到三元方程 $F(x,y,z)=0$,

$$\begin{cases} x_1-x_0 = t(x-x_0), \\ y_1-y_0 = t(y-y_0), \\ z_1-z_0 = t(z-z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0+t(x-x_0), \\ y_1 = y_0+t(y-y_0), \\ z_1 = z_0+t(z-z_0). \end{cases}$$

M_1 在 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上



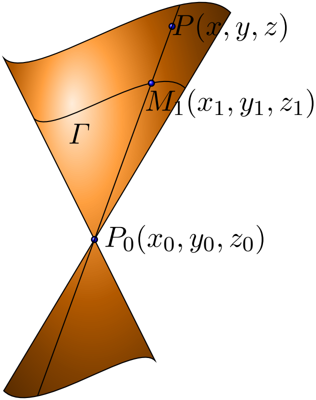
$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0, \\ F_2(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)) = 0. \end{cases}$$

从上面方程组消去参数 t, 得到三元方程 $F(x,y,z)=0$, 即是以 Γ 为准线, 以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为顶点的锥面方程.

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = t(x-x_0), \\ y_1 - y_0 = t(y-y_0), \\ z_1 - z_0 = t(z-z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + t(x-x_0), \\ y_1 = y_0 + t(y-y_0), \\ z_1 = z_0 + t(z-z_0). \end{cases}$$

M_1 在 $\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 上



例 1

设锥面的顶点在原点，准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

例 1

设锥面的顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为准线上任意一点, 则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

例 1

设锥面的顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点, 则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$

例 1

设锥面的顶点在原点，准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点，则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$ 将 $z_1=c$ 代入上式，得

例 1

设锥面的顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点, 则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$ 将 $z_1=c$ 代入上式, 得

$$x_1=c\frac{x}{z}, y_1=c\frac{y}{z},$$

例 1

设锥面的顶点在原点，准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点，则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$ 将 $z_1=c$ 代入上式，得

$$x_1=c\frac{x}{z}, y_1=c\frac{y}{z},$$

代入二次方程中，有

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1$$

例 1

设锥面的顶点在原点，准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点，则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$ 将 $z_1=c$ 代入上式，得

$$x_1=c\frac{x}{z}, y_1=c\frac{y}{z},$$

代入二次方程中，有

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

例 1

设锥面的顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$ 求该锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上任意一点, 则过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

且 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c. \end{cases}$ 将 $z_1=c$ 代入上式, 得

$$x_1=c\frac{x}{z}, y_1=c\frac{y}{z},$$

代入二次方程中, 有

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

这个锥面叫做二次锥面.

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 30° 角. 试求这圆锥面的方程.

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 $30°$ 角. 试求这圆锥面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上的任意一点, 那么过 M 的母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{x-1,y-2,z-3\}$;

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 30° 角. 试求这圆锥面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上的任意一点, 那么过 M 的母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{x-1,y-2,z-3\}$; 另一方面, 圆锥面的轴线的方向向量即为平面 $2x+2y-z+1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,-1\}$.

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 30° 角. 试求这圆锥面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上的任意一点, 那么过 M 的母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{x-1,y-2,z-3\}$; 另一方面, 圆锥面的轴线的方向向量即为平面 $2x+2y-z+1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,-1\}$. 根据题意, 有

$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\pm\cos 30^\circ,$$

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 30° 角. 试求这圆锥面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上的任意一点, 那么过 M 的母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{x-1,y-2,z-3\}$; 另一方面, 圆锥面的轴线的方向向量即为平面 $2x+2y-z+1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,-1\}$. 根据题意, 有

$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\pm\cos 30^\circ,$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

例 2

已知圆锥面顶点 $(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴成 $30°$ 角. 试求这圆锥面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上的任意一点, 那么过 M 的母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{x-1,y-2,z-3\}$; 另一方面, 圆锥面的轴线的方向向量即为平面 $2x+2y-z+1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,-1\}$. 根据题意, 有

$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\pm\cos 30°,$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$

$$+16(x-1)(z-3)$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$

$$+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0.$$

$$27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$$
$$-4\left[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)\right]^2=0$$

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$

$$+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0.$$

因为圆锥面是一种特殊的锥面, 上例中的解法是一种适合于圆锥面的特殊方法.

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$

$$+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0.$$

因为圆锥面是一种特殊的锥面, 上例中的解法是一种适合于圆锥面的特殊方法. 至于先求出圆锥面的准线, 利用顶点与准线求锥面的一般方法, 留作课后练习.

于是得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求圆锥面的方程为

设 λ 为实数, 对于函数 $f(x,y,z)$, 若对任意有意义的 t 和 t^λ, 有

$$f(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z),$$

设 λ 为实数, 对于函数 $f(x,y,z)$, 若对任意有意义的 t 和 t^λ, 有

$$f(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z),$$

则 $f(x,y,z)$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次函数(homogeneous function),

设 λ 为实数，对于函数 $f(x,y,z)$，若对任意有意义的 t 和 t^λ，有

$$f(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z),$$

则 $f(x,y,z)$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次函数(homogeneous function)，而 $f(x,y,z)=0$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次方程 (homogeneous equation).

设 λ 为实数, 对于函数 $f(x,y,z)$, 若对任意有意义的 t 和 t^λ, 有

$$f(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z),$$

则 $f(x,y,z)$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次函数(homogeneous function), 而 $f(x,y,z)=0$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次方程 (homogeneous equation). 例如

$$f(x,y,z)=x^2+xy+3y^2-yz+2z^2$$

是关于 x,y,z 的2次齐次函数,

设 λ 为实数, 对于函数 $f(x,y,z)$, 若对任意有意义的 t 和 t^λ, 有

$$f(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z),$$

则 $f(x,y,z)$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次函数(homogeneous function), 而 $f(x,y,z)=0$ 叫做关于 x,y,z 的 λ 次齐次方程 (homogeneous equation). 例如

$$f(x,y,z)=x^2+xy+3y^2-yz+2z^2$$

是关于 x,y,z 的2次齐次函数, 但

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-(z-1)^2$$

和

$$f(x,y,z)=x^2+yz-z$$

就都不是关于 x,y,z 的齐次函数.

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x, y, z) = 0$, 那么根据齐次方程的定义有

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x, y, z) = 0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx, ty, tz) = t^{\lambda} F(x, y, z),$$

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x, y, z) = 0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx, ty, tz) = t^{\lambda} F(x, y, z),$$

因此当 $t = 0$ 时, 有 $F(0, 0, 0) = 0$, 这表明曲面经过原点.

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x,y,z)=0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx,ty,tz)=t^{\lambda}F(x,y,z),$$

因此当 $t=0$ 时, 有 $F(0,0,0)=0$, 这表明曲面经过原点. 再设非原点的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足齐次方程, 即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$,

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x, y, z) = 0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx, ty, tz) = t^\lambda F(x, y, z),$$

因此当 $t = 0$ 时, 有 $F(0, 0, 0) = 0$, 这表明曲面经过原点. 再设非原点的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足齐次方程, 即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 那么直线 OM_0 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t, \end{cases}$$

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x,y,z)=0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx,ty,tz)=t^{\lambda}F(x,y,z),$$

因此当 $t=0$ 时, 有 $F(0,0,0)=0$, 这表明曲面经过原点. 再设非原点的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足齐次方程, 即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, 那么直线 OM_0 的方程为

$$\begin{cases} x=x_0t, \\ y=y_0t, \\ z=z_0t, \end{cases}$$

代入 $F(x,y,z)=0$ 得

$$F(x_0t,y_0t,z_0t)=t^{\lambda}F(x_0,y_0,z_0)=0,$$

定理4.2.1

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设齐次方程为 $F(x, y, z) = 0$, 那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx, ty, tz) = t^{\lambda} F(x, y, z),$$

因此当 $t = 0$ 时, 有 $F(0, 0, 0) = 0$, 这表明曲面经过原点. 再设非原点的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足齐次方程, 即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 那么直线 OM_0 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t, \end{cases}$$

代入 $F(x, y, z) = 0$ 得

$$F(x_0 t, y_0 t, z_0 t) = t^{\lambda} F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

即整条直线都在曲面上, 因此曲面 $F(x, y, z) = 0$ 是由通过原点的直线组成, 即它是以原点为顶点的锥面.

在特殊情况下, 关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点, 即除原点以外, 曲面上不再包含别的实点.

在特殊情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点，即除原点以外，曲面上不再包含别的实点．例如 $x^2+y^2+z^2=0$，我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面．

在特殊情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点，即除原点以外，曲面上不再包含别的实点. 例如 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$，我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面.

推论

关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的齐次方程总表示顶点在 (x_0, y_0, z_0) 的锥面.

在特殊情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点，即除原点以外，曲面上不再包含别的实点．例如 $x^2+y^2+z^2=0$，我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面．

推论

关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的齐次方程总表示顶点在 (x_0, y_0, z_0) 的锥面．

例如函数

$$f(x, y, z-1) = x^2 + y^2 - (z-1)^2$$

满足

$$f(tx, ty, t(z-1)) = t^2[x^2 + y^2 - (z-1)^2],$$

在特殊情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点，即除原点以外，曲面上不再包含别的实点. 例如 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$，我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面.

推论

关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的齐次方程总表示顶点在 (x_0, y_0, z_0) 的锥面.

例如函数

$$f(x, y, z-1) = x^2 + y^2 - (z-1)^2$$

满足

$$f(tx, ty, t(z-1)) = t^2[x^2 + y^2 - (z-1)^2],$$

所以它是关于 $x, y, z-1$ 的 2 次齐次方程，它表示顶点在 $(0, 0, 1)$ 的锥面.

在特殊情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能表示一个原点，即除原点以外，曲面上不再包含别的实点. 例如 $x^2+y^2+z^2=0$, 我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面.

推论

关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的齐次方程总表示顶点在 (x_0, y_0, z_0) 的锥面.

例如函数

$$f(x, y, z-1)=x^2+y^2-(z-1)^2$$

满足

$$f(tx, ty, t(z-1))=t^2[x^2+y^2-(z-1)^2],$$

所以它是关于 $x, y, z-1$ 的 2 次齐次方程，它表示顶点在 $(0,0,1)$ 的锥面.

下一节