第一章 向量与坐标

§1.1 向量的概念

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

解析几何的基本思想是运用代数的方法来研究几何, 从而把几何问题的讨论, 从定性的研究推广到可以计算的定量的层面.

解析几何的基本思想是运用代数的方法来研究几何, 从而把几何问题的讨论, 从定性的研究推广到可以计算的定量的层面. 为了把代数的方法引入到几何中来, 必须将空间的几何结构代数化.

解析几何的基本思想是运用代数的方法来研究几何, 从而把几何问题的讨论, 从定性的研究推广到可以计算的定量的层面. 为了把代数的方法引入到几何中来, 必须将空间的几何结构代数化. 这一章我们系统介绍向量代数的基本知识, 它实质是一个使空间几何结构代数化的过程.

§1.1 向量的概念

§1.1 向量的概念

教学内容: 向量及一些特殊向量的概念

§1.1 向量的概念

教学内容: 向量及一些特殊向量的概念

教学目的: 掌握向量、单位向量、零向量、自由向量、相等向量、反向量等概念

§1.1 向量的概念

教学内容: 向量及一些特殊向量的概念

教学目的: 掌握向量、单位向量、零向量、自由向量、相等向量、反向量等概念

教学重难点: 相等向量、共线向量、共面向量

❐ 向量的定义

❐ 向量的定义

日常生活与自然科学中存在着两种量: 向量(vector)与数量(scalar).

❒ 向量的定义

日常生活与自然科学中存在着两种量: 向量(vector)与数量(scalar). 对向量我们并不陌生, 在初中物理中就接触过它, 位移、力、速度等就是向量, 它们既有大小, 又有方向.

❒ 向量的定义

日常生活与自然科学中存在着两种量: 向量(vector)与数量(scalar). 对向量我们并不陌生, 在初中物理中就接触过它, 位移、力、速度等就是向量, 它们既有大小, 又有方向. 而长度、面积、体积等量, 它们只有大小, 是数量, 又称标量.

❒ 向量的定义

日常生活与自然科学中存在着两种量: 向量(vector)与数量(scalar). 对向量我们并不陌生, 在初中物理中就接触过它, 位移、力、速度等就是向量, 它们既有大小, 又有方向. 而长度、面积、体积等量, 它们只有大小, 是数量, 又称标量.

☞ **向量的定义** 既有大小又有方向的量叫向量，或称矢量，简称矢.

❒ 向量的定义

日常生活与自然科学中存在着两种量：向量(vector)与数量(scalar). 对向量我们并不陌生, 在初中物理中就接触过它, 位移、力、速度等就是向量, 它们既有大小, 又有方向. 而长度、面积、体积等量, 它们只有大小, 是数量, 又称标量.

☞ **向量的定义** 既有大小又有方向的量叫向量， 或称矢量， 简称矢.

☞ 注： 一般两向量不能比较大小.

❒ 向量的表示

❒ 向量的表示

☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).

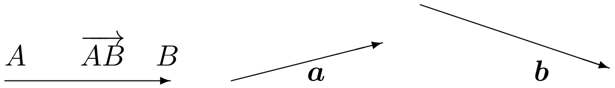
❒ 向量的表示

☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).

$$A \xrightarrow{\quad \overrightarrow{AB} \quad} B$$

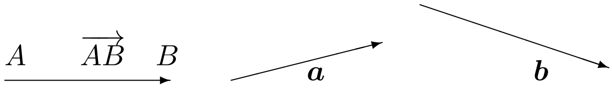
❒ 向量的表示

☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).



❒ 向量的表示

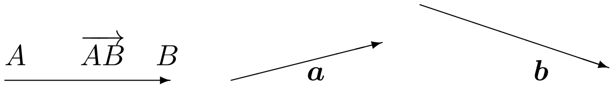
☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).



☞**向量的始点与终点** 有向线段的始点与终点.

❐ 向量的表示

☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).

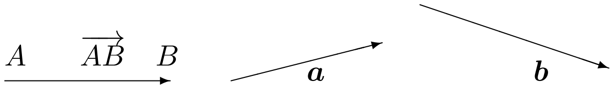


☞**向量的始点与终点** 有向线段的始点与终点.

☞**向量的模** 向量的大小称为模(norm), 记为 $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|, |\boldsymbol{a}|, \cdots$.

❒ 向量的表示

☞**向量的几何表示** 有向线段, 如 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \cdots$, 或用黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记向量(如图所示).



☞**向量的始点与终点** 有向线段的始点与终点.

☞**向量的模** 向量的大小称为模(norm), 记为 $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|, |\boldsymbol{a}|, \cdots$.

☞**向量的方向** 有向线段的方向.

特殊向量

特殊向量

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector).

特殊向量

☞**单位向量** 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

特殊向量

☞**单位向量** 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

☞**零向量** 模等于 0 的向量称为零向量.

特殊向量

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量 模等于 0 的向量称为零向量. 零向量方向不确定.

特殊向量

☞**单位向量** 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定(非零)向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

☞**零向量** 模等于 0 的向量称为零向量. 零向量方向不确定.

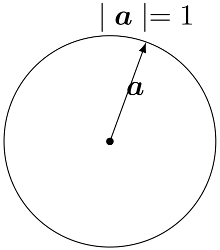
把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的始点构成单位圆(unit circle);

特殊向量

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量 模等于 0 的向量称为零向量. 零向量方向不确定.

把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的始点构成单位圆(unit circle);

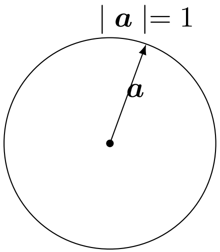


特殊向量

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量 模等于 0 的向量称为零向量. 零向量方向不确定.

把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的始点构成单位圆(unit circle); 把空间中的一切单位向量归结到共同的始点构成单位球面(unit sphere).

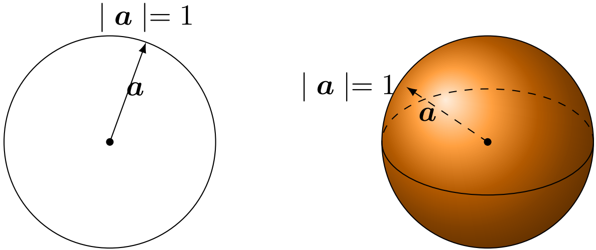


特殊向量

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量(unit vector). 与给定（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量 模等于 0 的向量称为零向量. 零向量方向不确定.

把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的始点构成单位圆(unit circle); 把空间中的一切单位向量归结到共同的始点构成单位球面(unit sphere).



❒ 向量的关系

❒ 向量的关系

用有向线段表示向量，与线段一样，向量亦有平行关系，相等关系，及正交（垂直）关系.

❐ 向量的关系

用有向线段表示向量, 与线段一样, 向量亦有平行关系, 相等关系, 及正交（垂直）关系.

☞**两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行**: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的直线相互平行,记做 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

❒ 向量的关系

用有向线段表示向量, 与线段一样, 向量亦有平行关系, 相等关系, 及正交（垂直）关系.

☞两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的直线相互平行,记做 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

☞两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 正交（垂直）: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的直线相互正交（垂直）,记做 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫相等向量, 所有的零向量都相等.

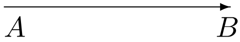
两向量相等 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫相等向量, 所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等, 记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫相等向量, 所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等, 记做 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定:

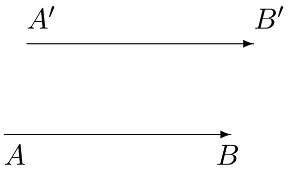
☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫相等向量，所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定:



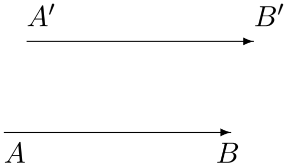
☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫相等向量，所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定:



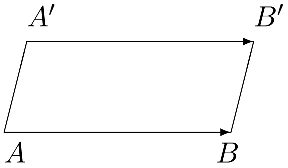
两向量相等 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫相等向量，所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定：始点终点构成平行四边形 $ABB'A'$.



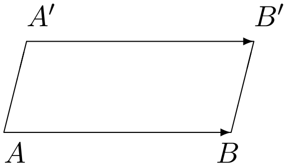
☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫相等向量, 所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等, 记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}$ 的判定: 始点终点构成平行四边形 $ABB'A'$.



☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫相等向量，所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

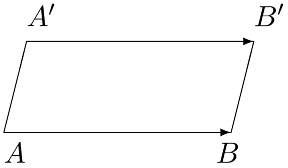
不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定：始点终点构成平行四边形 $ABB'A'$.



可以看出，两向量是否相等与始点无关，只与模和方向有关.

☞**两向量相等** 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫相等向量, 所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等, 记做 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

不在同一直线上的两相等非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的判定: 始点终点构成平行四边形 $ABB'A'$.



可以看出, 两向量是否相等与始点无关, 只与模和方向有关. 始点位置任意, 模和方向确定的向量叫自由向量.

☞**反向量** 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量；

☞**反向量** 两个模相等, 方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

☞**反向量** 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

☞**反向量** 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量；$\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上；

☞**反向量** 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上; 若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点，这组向量一定在同一个平面上.

反向量 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上; 若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点，这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

反向量 两个模相等, 方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量, 即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点, 这组向量一定在同一直线上; 若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点, 这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

注: 零向量与任何共线的向量组共线.

反向量 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量；$\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上；若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点，这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

注： 零向量与任何共线的向量组共线.

共面向量 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量(coplanar vectors).

反向量 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量；$\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上；若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点，这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

注：零向量与任何共线的向量组共线.

共面向量 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量(coplanar vectors). 易知，一组共线向量一定是共面向量；

反向量 两个模相等，方向相反的向量叫互为反向量；$\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一直线上；若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点，这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

注： 零向量与任何共线的向量组共线.

共面向量 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量(coplanar vectors). 易知，一组共线向量一定是共面向量；任意两向量必共面；

反向量 两个模相等, 方向相反的向量叫互为反向量; $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量, 即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点, 这组向量一定在同一直线上; 若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点, 这组向量一定在同一个平面上.

共线向量 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量(collinear vectors).

注: 零向量与任何共线的向量组共线.

共面向量 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量(coplanar vectors). 易知, 一组共线向量一定是共面向量; 任意两向量必共面; 三向量中若有两向量共线, 则三向量共面.

课堂练习: P 3, 习题 3

设在平面上给了一个四边形 $ABCD$，点 K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，求证：$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时，这等式是否也成立？

下一节