第三章 平面与空间直线

§3.5 直线与平面的相关位置

§3.6 空间直线与点的相关位置

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§3.5 直线与平面的相关位置

§3.5 直线与平面的相关位置

教学内容: 直线与平面的位置关系及其判定

§3.5 直线与平面的相关位置

教学内容: 直线与平面的位置关系及其判定

教学目的: 掌握直线与平面的相关位置的判定条件及其应用

§3.5 直线与平面的相关位置

教学内容: 直线与平面的位置关系及其判定

教学目的: 掌握直线与平面的相关位置的判定条件及其应用

教学重难点: 直线与平面的交角

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x, y, z),

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x, y, z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt; \end{cases}$

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x,y,z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程, 整理得

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x,y,z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程, 整理得

$$(AX+BY+CZ)t = -(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x,y,z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程, 整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x,y,z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程, 整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$时, 方程$(*)$有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

空间直线与平面的相关位置有两者相交、平行和包含这三种情况.

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求 l 与 π 相互位置关系的条件, 先求两者的交点 (x,y,z), 为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程, 整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$时, 方程$(*)$有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，

为求 l 与 π 相互位置关系的条件，先求两者的交点 (x,y,z)，为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程，整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点;

为求 l 与 π 相互位置关系的条件，先求两者的交点 (x,y,z)，为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程，整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，

为求 l 与 π 相互位置关系的条件，先求两者的交点 (x,y,z)，为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程，整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

为求 l 与 π 相互位置关系的条件，先求两者的交点 (x,y,z)，为此将 l 的方程改写为参数式 $\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases}$ 代入 π的 方程，整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (*)$$

由位置关系的代数意义得

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$ 时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$ 时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (*) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (*) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件：

(1) 相交：$\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$ 时，方程(*)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时, 方程 (∗) 无解, 这时 l 与 π 没有公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时, 方程 (∗) 有无数解, 这时 l 与 π 有无数公共点, 即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$ 时, 方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

(3) 包含: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$.

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$ 时，方程(∗)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时 l 与 π 有唯一公共点;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

(3) 包含: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$.

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$,

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

(3) 包含: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$.

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$，在直角坐标系下，π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，

☞ 当且仅当 $\boxed{AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0}$ 时，方程 (∗) 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}$ 时，方程 (∗) 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x - x_0}{X} = \dfrac{y - y_0}{Y} = \dfrac{z - z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX + BY + CZ \neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0}$;

(3) 包含: $\boxed{AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}$.

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$，在直角坐标系下，$\pi$ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$，此时从几何上看，相交的条件(1)就是 $\boldsymbol{v}$ 不垂直于 $\boldsymbol{n}$;

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 $(*)$ 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 $(*)$ 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

(3) 包含: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$.

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$，在直角坐标系下，π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，此时从几何上看，相交的条件(1)就是 $\boldsymbol{v}$ 不垂直于 $\boldsymbol{n}$；平行的条件(2)就是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，且 l 上的点 (x_0,y_0,z_0) 不在平面 π 上；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$ 时，方程 $(*)$ 无解，这时 l 与 π 没有公共点；

☞ 当且仅当 $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$ 时，方程 $(*)$ 有无数解，这时 l 与 π 有无数公共点，即 l 在 π 上.

定理 3.5.1

直线 $l: \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的相互位置关系有下面的充要条件:

(1) 相交: $\boxed{AX+BY+CZ\neq 0}$;

(2) 平行: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$;

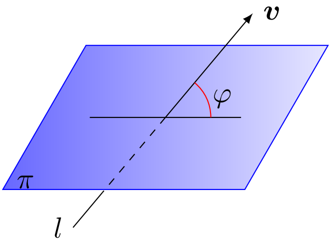
(3) 包含: $\boxed{AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$.

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$，在直角坐标系下，π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，此时从几何上看，相交的条件(1)就是 $\boldsymbol{v}$ 不垂直于 $\boldsymbol{n}$；平行的条件(2)就是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，且 l 上的点 (x_0,y_0,z_0) 不在平面 π 上；包含的条件 (3) 就是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，且 l 上的点 (x_0,y_0,z_0) 在平面 π 上.

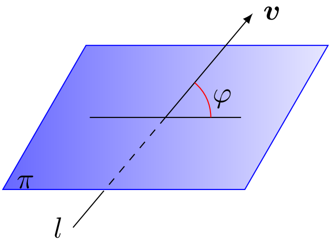
当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角.

当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图);

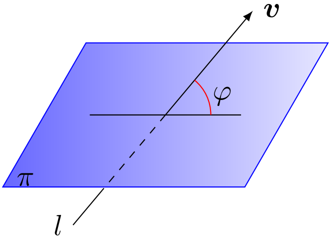
当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图);



当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l \perp \pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.

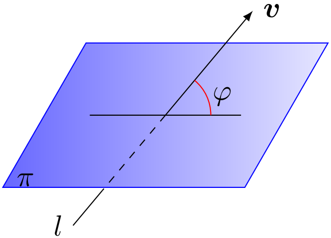


当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l \perp \pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.



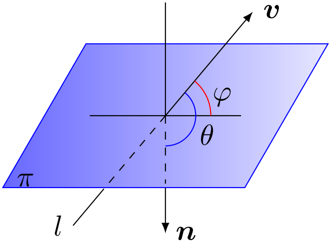
交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定.

当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l \perp \pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.



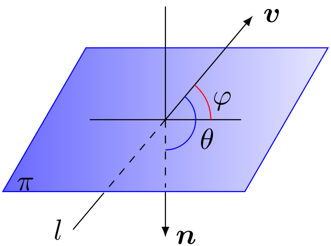
交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = \theta(0 \le \theta \le \pi)$,

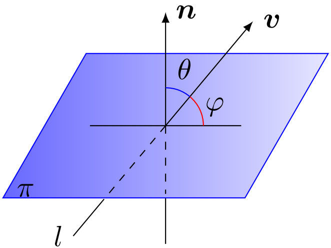
当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l \perp \pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.



交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = \theta(0 \leq \theta \leq \pi)$,

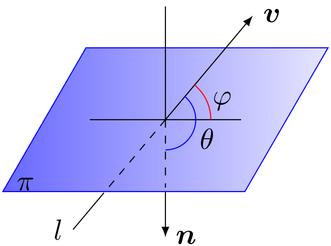
当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l\perp\pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.

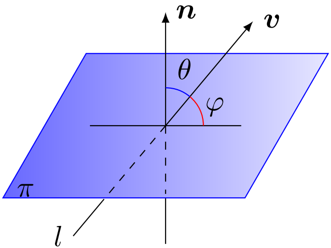




交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=\theta(0\leq\theta\leq\pi)$,

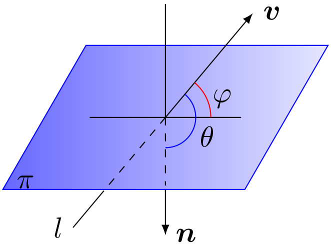
当直线 l 与平面 π 相交时，在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时，l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图)；当 $l \perp \pi$ 时，规定交角 φ 为直角.

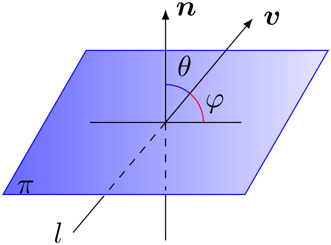




交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}) = \theta(0 \le \theta \le \pi)$，则 $\varphi = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$，

当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l \perp \pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.

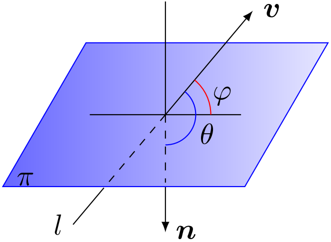


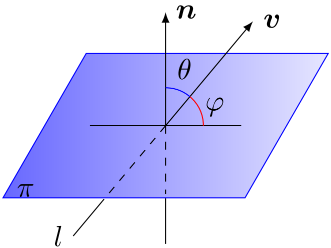


交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = \theta(0 \leq \theta \leq \pi)$, 则 $\varphi = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$, 故

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}$$

当直线 l 与平面 π 相交时, 在直角坐标系下来求它们的交角. 当 l 不和 π 垂直时, l 与 π 间的交角 φ 是指 l 与它在 π 上的射影所构成的锐角(如图); 当 $l\perp\pi$ 时, 规定交角 φ 为直角.



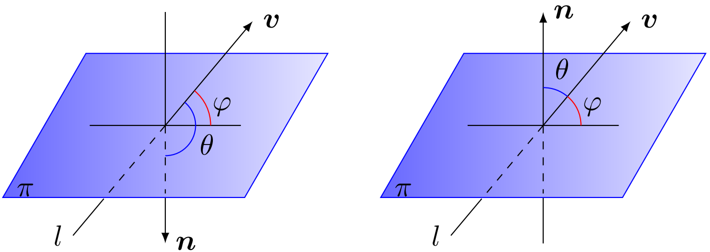


交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=\theta(0\le\theta\le\pi)$, 则 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-\theta\right|$, 故

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

即

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.}$$



交角 φ 可以由 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=\theta(0\le\theta\le\pi)$, 故

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

即

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.}$$

由此易知 l 与 π 平行或 l 在平面 π 上的充要条件

$$\boxed{AX+BY+CZ=0;}$$

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

即

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.}$$

由此易知 l 与 π 平行或 l 在平面 π 上的充要条件

$$\boxed{AX+BY+CZ=0;}$$

而 l 与 π 垂直的充要条件显然是 $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{n}$,

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

即

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.}$$

由此易知 l 与 π 平行或 l 在平面 π 上的充要条件

$$\boxed{AX+BY+CZ=0;}$$

而 l 与 π 垂直的充要条件显然是 $\boldsymbol{v}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$, 即

$$\boxed{\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}.}$$

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

课堂练习: P 123, 习题 2

试验证直线 $l: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ 相交,并求出它们的交点与交角.

课堂练习: P 123, 习题 2

试验证直线 $l: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ 相交,并求出它们的交点与交角.

答案: $(1, 0, -1), \dfrac{\pi}{6}$.

§3.6 空间直线与点的相关位置

§3.6 空间直线与点的相关位置

教学内容: 空间直线与点的相关位置

§3.6 空间直线与点的相关位置

教学内容: 空间直线与点的相关位置

教学目的: 掌握空间点到直线距离的计算

§3.6 空间直线与点的相关位置

教学内容: 空间直线与点的相关位置

教学目的: 掌握空间点到直线距离的计算

教学重难点: 点到直线距离的计算公式

空间直线与点的位置关系只有两种情形：点在直线上或不在直线上.

空间直线与点的位置关系只有两种情形：点在直线上或不在直线上．当点在直线上时，点的坐标满足直线的方程；

空间直线与点的位置关系只有两种情形：点在直线上或不在直线上. 当点在直线上时，点的坐标满足直线的方程；当点不在直线上时，我们需要求出点到直线的距离.

空间直线与点的位置关系只有两种情形：点在直线上或不在直线上．当点在直线上时，点的坐标满足直线的方程；当点不在直线上时，我们需要求出点到直线的距离．

☞**点到直线距离的定义** 一点与空间直线上的点之间的最短距离叫做该点到空间的直线间的距离．

空间直线与点的位置关系只有两种情形：点在直线上或不在直线上．当点在直线上时，点的坐标满足直线的方程；当点不在直线上时，我们需要求出点到直线的距离．

☞**点到直线距离的定义** 一点与空间直线上的点之间的最短距离叫做该点到空间的直线间的距离．

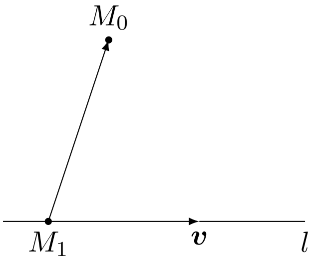
和点到平面的距离一样，过该点作与空间直线垂直相交的直线，得垂足，那么该点与垂足之间的距离即是点到空间直线之间的距离，证明留作✍课堂练习．

如图，在空间直角坐标系下，给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l: \frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$

如图, 在空间直角坐标系下, 给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

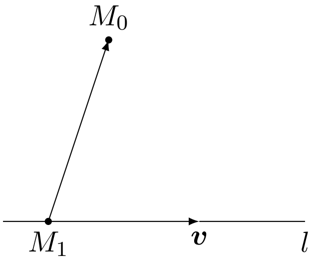
$$l: \frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$



如图, 在空间直角坐标系下, 给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l: \frac{x-x_1}{X} = \frac{y-y_1}{Y} = \frac{z-z_1}{Z}.$$

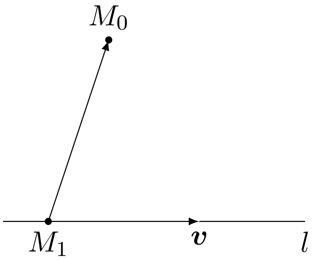
这里设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 l 上的一点, $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$ 为 l 的方向向量.



如图，在空间直角坐标系下，给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l : \frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$

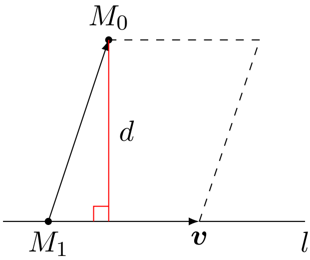
这里设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 l 上的一点，$\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$ 为 l 的方向向量. 我们考虑以 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形，



如图，在空间直角坐标系下，给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l: \frac{x-x_1}{X} = \frac{y-y_1}{Y} = \frac{z-z_1}{Z}.$$

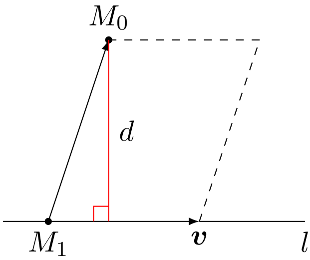
这里设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 l 上的一点，$\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$ 为 l 的方向向量. 我们考虑以 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形，



如图, 在空间直角坐标系下, 给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l : \frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$

这里设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 l 上的一点, $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$ 为 l 的方向向量. 我们考虑以 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形, 这个平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{M_1M_0}|$, 显然点 M_0 到 l 的距离 d 就是该平行四边形的对应于以 $|\boldsymbol{v}|$ 为底的高,

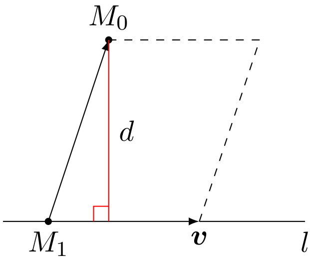


如图，在空间直角坐标系下，给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l : \frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$

这里设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 l 上的一点，$\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$ 为 l 的方向向量. 我们考虑以 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形，这个平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{M_1M_0}|$，显然点 M_0 到 l 的距离 d 就是该平行四边形的对应于以 $|\boldsymbol{v}|$ 为底的高，因此我们有

$$d = \frac{|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\boldsymbol{v}|},$$



$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

下一节

$$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\boldsymbol{v}|},$$

代入各项坐标后，有