# 第二章 轨迹与方程

## §2.3 空间曲线的方程

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

# §2.3 空间曲线的方程

# §2.3 空间曲线的方程

**教学内容**: 空间曲线的概念与性质

# §2.3 空间曲线的方程

**教学内容**: 空间曲线的概念与性质

**教学目的**: 掌握空间曲线的建立与应用

# §2.3 空间曲线的方程

**教学内容**: 空间曲线的概念与性质

**教学目的**: 掌握空间曲线的建立与应用

**教学重难点**: 空间曲线方程的建立

## ❒ 空间曲线的一般方程

## ❐ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线.

## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

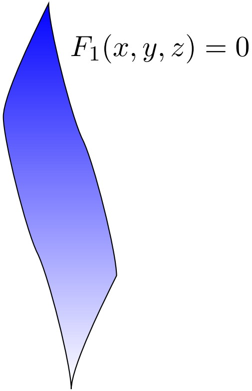
是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$.

## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$.

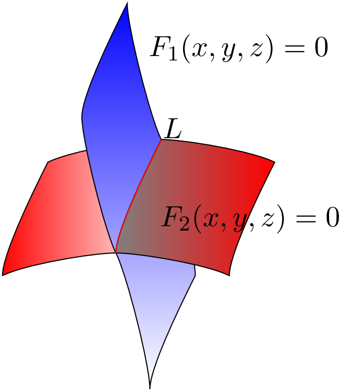


## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$.

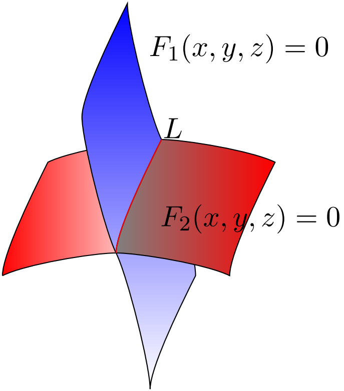


## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$. 这样, 曲线 $L$ 上的任意点同时在这两曲面上, 它的坐标 $(x,y,z)$ 满足方程组$(*)$;

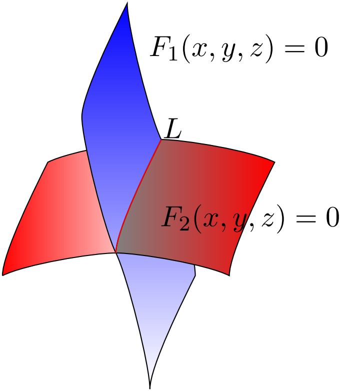


## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$. 这样, 曲线 $L$ 上的任意点同时在这两曲面上, 它的坐标 $(x,y,z)$ 满足方程组$(*)$; 反之, 方程组$(*)$的任何一组解 $(x,y,z)$ 所决定的点, 同时在这两曲面上, 即在这两曲面的交线上.

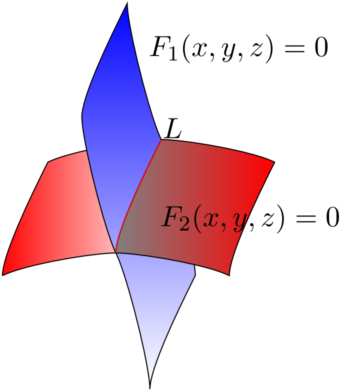


## ❒ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线.
设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$

是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$. 这样, 曲线 $L$ 上的任意点同时在这两曲面上, 它的坐标 $(x,y,z)$ 满足方程组$(*)$; 反之, 方程组$(*)$的任何一组解 $(x,y,z)$ 所决定的点, 同时在这两曲面上, 即在这两曲面的交线上.

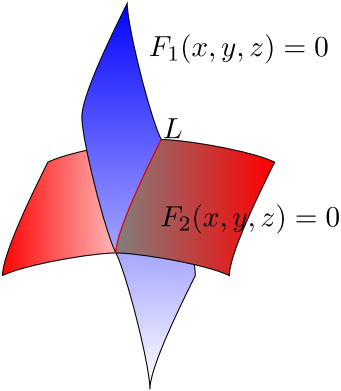



因此方程组$(*)$是一条空间曲线 $L$ 的方程, 我们把它叫做空间曲线的一般方程.

## ❐ 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看成是两个曲面的交线. 设

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \qquad (*)$$




是这样的两个曲面方程, 它们相交于曲线 $L$. 这样, 曲线 $L$ 上的任意点同时在这两曲面上, 它的坐标 $(x,y,z)$ 满足方程组$(*)$; 反之, 方程组$(*)$的任何一组解 $(x,y,z)$ 所决定的点, 同时在这两曲面上, 即在这两曲面的交线上.

因此方程组$(*)$是一条空间曲线 $L$ 的方程, 我们把它叫做空间曲线的一般方程.

从代数上知道, 任何方程组的解, 也一定是与它等价的方程组的解, 这说明空间曲线 $L$ 可以用不同形式的方程组来表达.

**例 1**

写出 $Oz$ 轴的方程.

**例 1**

写出 $Oz$ 轴的方程.

**解** $Oz$ 轴可以看成是两坐标平面 $yOz$, $xOz$ 的交线, 所以 $Oz$ 轴的方程可以写成

**例 1**

写出 $Oz$ 轴的方程.

**解** $Oz$ 轴可以看成是两坐标平面 $yOz$, $xOz$ 的交线, 所以 $Oz$ 轴的方程可以写成

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

## 例 1

写出 $Oz$ 轴的方程.

**解** $Oz$ 轴可以看成是两坐标平面 $yOz$, $xOz$ 的交线, 所以 $Oz$ 轴的方程可以写成

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

由于上面的方程组与方程组

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

同解, 所以 $Oz$ 轴的方程也可用第二个方程组来表示.

**例 2**

求在 $xOy$ 坐标面上, 半径等于 $R$, 圆心为原点的圆的方程.

**例 2**

求在 $xOy$ 坐标面上，半径等于 $R$，圆心为原点的圆的方程.

**解** 因为空间的圆总可以是球面与平面的交线，在这里可以把所求的圆看成是以原点 $O$ 为球心，半径为 $R$ 的球面与坐标平面 $xOy$ 的交线，所以所求的圆的方程为

**例 2**

求在 $xOy$ 坐标面上, 半径等于 $R$, 圆心为原点的圆的方程.

**解** 因为空间的圆总可以是球面与平面的交线, 在这里可以把所求的圆看成是以原点 $O$ 为球心, 半径为 $R$ 的球面与坐标平面 $xOy$ 的交线, 所以所求的圆的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

## 例 2

求在 $xOy$ 坐标面上, 半径等于 $R$, 圆心为原点的圆的方程.

**解** 因为空间的圆总可以是球面与平面的交线, 在这里可以把所求的圆看成是以原点 $O$ 为球心, 半径为 $R$ 的球面与坐标平面 $xOy$ 的交线, 所以所求的圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0. \end{cases}$$

因该方程组与

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0 \end{cases}$$

同解, 所以所求圆的方程也可以用上面的方程组表达.

## ❒ 空间曲线的参数方程

## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法.

## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后, 设向量函数
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 或

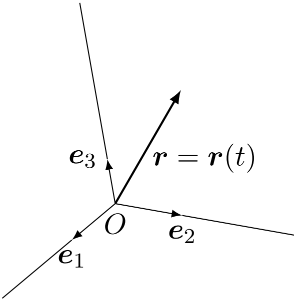
$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$

## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后, 设向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, 或

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$



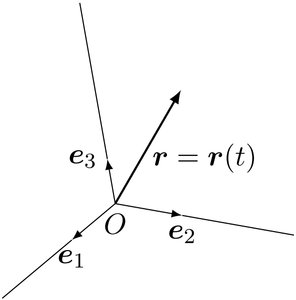
## ❒ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后, 设向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 或

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$

当 $t$ 在区间 $a \le t \le b$ 内变动时, $\boldsymbol{r}(t)$ 的终点 $M(x(t), y(t), z(t))$ 全部都在空间曲线 $L$ 上;



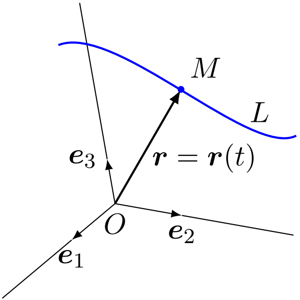
## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后, 设向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 或

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$

当 $t$ 在区间 $a \le t \le b$ 内变动时, $\boldsymbol{r}(t)$ 的终点 $M(x(t), y(t), z(t))$ 全部都在空间曲线 $L$ 上;



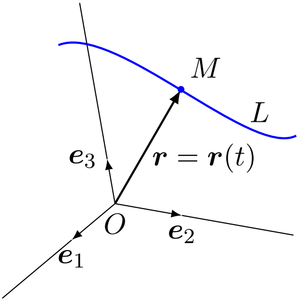
## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达，这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时，一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后，设向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，或

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$

当 $t$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 内变动时，$\boldsymbol{r}(t)$ 的终点 $M(x(t), y(t), z(t))$ 全部都在空间曲线 $L$ 上；反过来，空间曲线 $L$ 上的任意点的向径都可由 $t$ 的某个值通过 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 来表示，

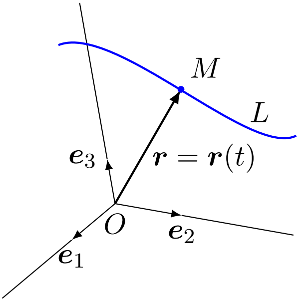


## ❐ 空间曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表达, 这是另一种表示空间曲线的方法. 特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时, 一般采用参数表示法.

在空间建立了坐标系之后, 设向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 或

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3,}$$




当 $t$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 内变动时, $\boldsymbol{r}(t)$ 的终点 $M(x(t), y(t), z(t))$ 全部都在空间曲线 $L$ 上; 反过来, 空间曲线 $L$ 上的任意点的向径都可由 $t$ 的某个值通过 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 来表示, 那么 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 就叫做空间曲线 $L$ 的向量式参数方程, 其中 $t(a \leq t \leq b)$ 为参数.

因为空间曲线上点的向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的坐标为 $\{x(t), y(t), z(t)\}$, 所以空间曲线的参数方程常写成

因为空间曲线上点的向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的坐标为 $\{x(t), y(t), z(t)\}$, 所以空间曲线的参数方程常写成

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (a \leq t \leq b), \\ z = z(t) \end{cases}}$$

因为空间曲线上点的向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的坐标为 $\{x(t), y(t), z(t)\}$, 所以空间曲线的参数方程常写成

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (a \leq t \leq b), \\ z = z(t) \end{cases}}$$

上式叫做空间曲线的坐标式参数方程, 其中 $t$ 为参数.

## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

## 例 3

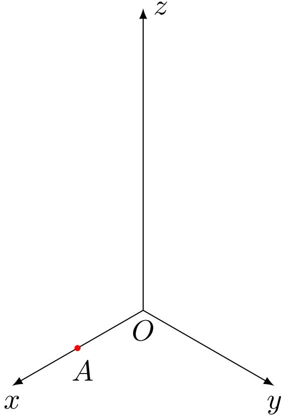
一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$,

## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

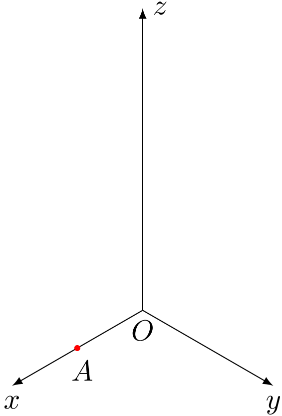
**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$,



## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

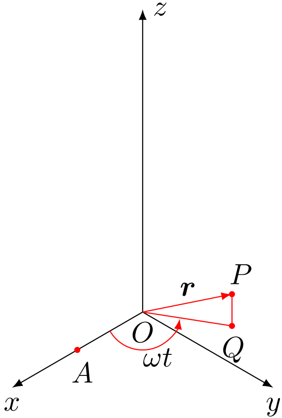
**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$,



## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动，另一方面作平行于轴线的直线运动，其速度与角速度成正比，求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图，在空间取坐标系 $O-xyz$，使 $Oz$ 轴重合于轴线，并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$，质点作圆周运动的角速度为 $\omega$，再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置，$P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$，

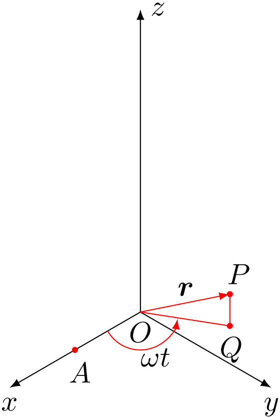


## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动，另一方面作平行于轴线的直线运动，其速度与角速度成正比，求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图，在空间取坐标系 $O-xyz$，使 $Oz$ 轴重合于轴线，并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$，质点作圆周运动的角速度为 $\omega$，再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置，$P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$，那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,$$

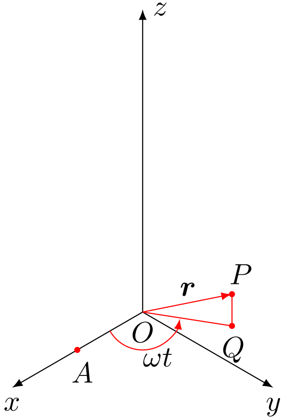


## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t, \quad \overrightarrow{QP} = b\omega t\boldsymbol{k}.$$



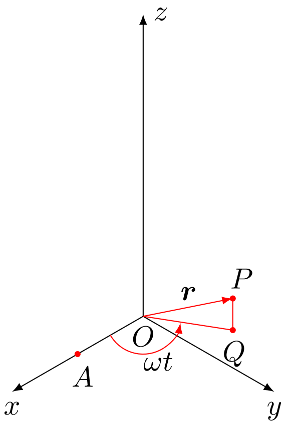
## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,\quad \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}.$$

这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega}=b$,



## 例 3

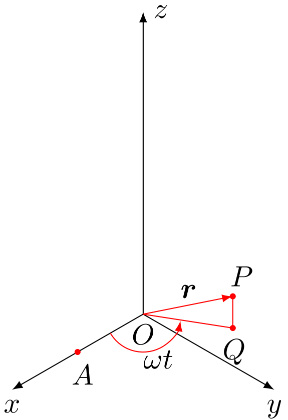
一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,\quad \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}.$$

这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega}=b$, 因此有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$



## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动，另一方面作平行于轴线的直线运动，其速度与角速度成正比，求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图，在空间取坐标系 $O-xyz$，使 $Oz$ 轴重合于轴线，并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$，质点作圆周运动的角速度为 $\omega$，再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置，$P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$，那么

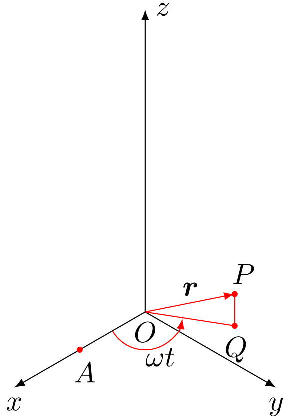
$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,\quad \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}.$$

这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$，即 $\frac{v}{\omega}=b$，因此有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\omega t+\boldsymbol{j}a\sin\omega t+\boldsymbol{k}b\omega t,$$



## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,\quad \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}.$$

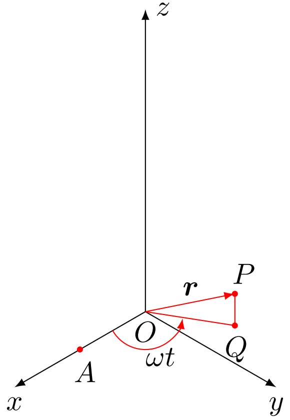
这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega}=b$, 因此有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\omega t+\boldsymbol{j}a\sin\omega t+\boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty<t<+\infty$.



## 例 3

一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动, 另一方面作平行于轴线的直线运动, 其速度与角速度成正比, 求这个质点的轨迹方程.

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ})=\omega t,\quad \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}.$$

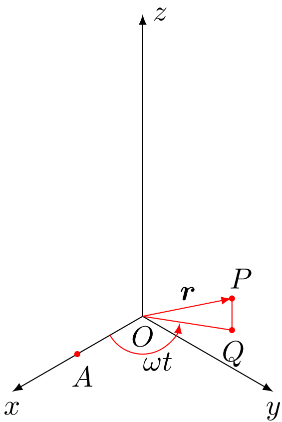
这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega}=b$, 因此有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\omega t+\boldsymbol{j}a\sin\omega t+\boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty<t<+\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数.



标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

**解** 如图, 在空间取坐标系 $O-xyz$, 使 $Oz$ 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$, 质点作圆周运动的角速度为 $\omega$, 再设在 $t$ 秒后质点从起点 $A$ 运动到 $P$ 的位置, $P$ 在 $xOy$ 坐标面上的射影为 $Q$, 那么

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t, \quad \overrightarrow{QP} = b\omega t\boldsymbol{k}.$$

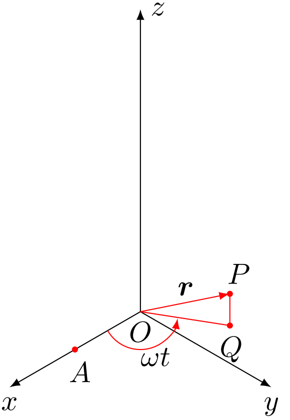
这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega} = b$, 因此有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

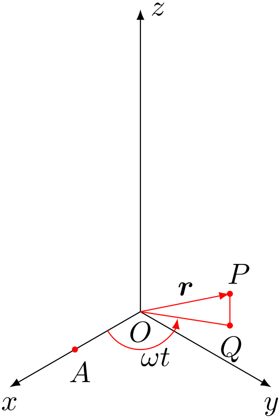
其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐



标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成




$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t, \quad \overrightarrow{QP} = b\omega t\boldsymbol{k}.$$

这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega} = b$, 因此有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

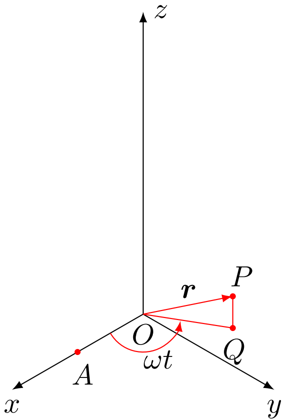
其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐

标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\theta + \boldsymbol{j}a\sin\theta + \boldsymbol{k}b\theta}$$




$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t, \quad \overrightarrow{QP} = b\omega t\boldsymbol{k}.$$

这里假设直线运动速度 $v$ 与角速度 $\omega$ 之比为 $b$, 即 $\frac{v}{\omega} = b$, 因此有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP},$$

所以

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐

标式参数方程为

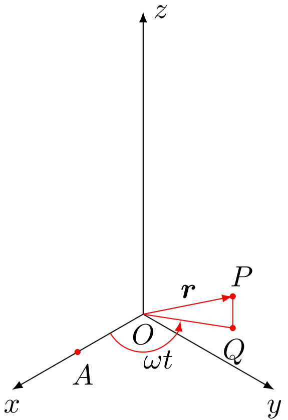
$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\theta + \boldsymbol{j}a\sin\theta + \boldsymbol{k}b\theta}$$

和

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$




$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐

标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\theta + \boldsymbol{j}a\sin\theta + \boldsymbol{k}b\theta}$$

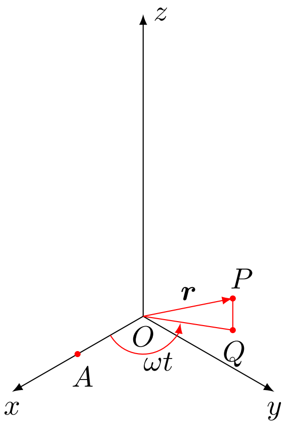
和

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

其中 $\theta(-\infty < \theta < +\infty)$ 为参数, 曲线的形状像弹簧.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐



标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\theta + \boldsymbol{j}a\sin\theta + \boldsymbol{k}b\theta}$$

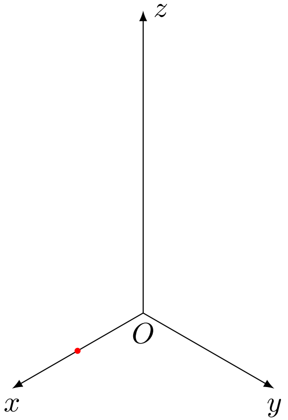
和

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

其中 $\theta(-\infty < \theta < +\infty)$ 为参数, 曲线的形状像弹簧.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐



标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, (-\infty < t < +\infty). \\ z = b\omega t \end{cases}$$

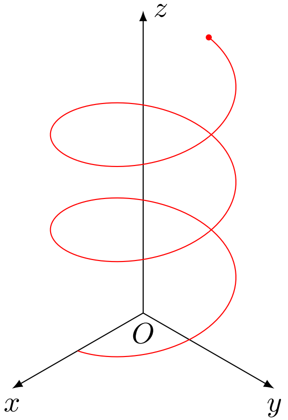
设 $\omega t = \theta$, 那么上面的两个方程分别可以改写成

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\theta + \boldsymbol{j}a\sin\theta + \boldsymbol{k}b\theta}$$

和

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

其中 $\theta(-\infty < \theta < +\infty)$ 为参数, 曲线的形状像弹簧.




$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\omega t + \boldsymbol{j}a\sin\omega t + \boldsymbol{k}b\omega t,$$

其中 $-\infty < t < +\infty$. 这就是质点运动轨迹的向量式参数方程, 其中 $t$ 为参数. 它的坐

方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}}$$

方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}}$$

易知 $x^2 + y^2 = a^2$, 它是一圆柱面,

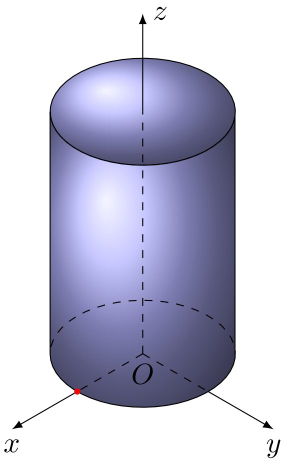
方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}}$$

易知 $x^2 + y^2 = a^2$, 它是一圆柱面,



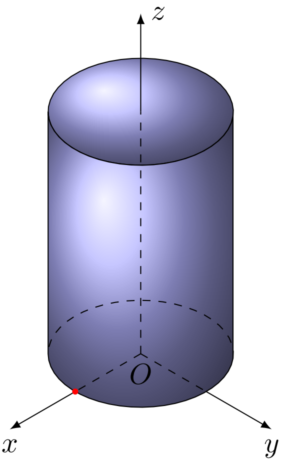
方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}}$$

易知 $x^2 + y^2 = a^2$, 它是一圆柱面, 这说明这条曲线在这个圆柱面上, 因此我们也常常将这条曲线称为 圆柱螺旋线(circular helix).



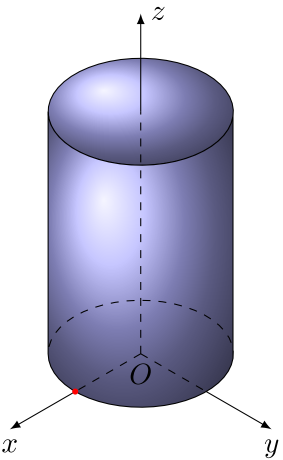
方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$, 得一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}}$$

易知 $x^2 + y^2 = a^2$, 它是一圆柱面, 这说明这条曲线在这个圆柱面上, 因此我们也常常将这条曲线称为 圆柱螺旋线(circular helix).



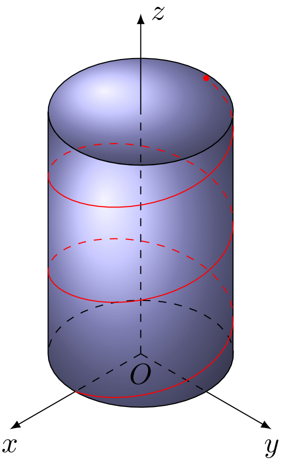
方程

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

第三式代入一、二两式可消去参数 $\theta$，得一般式方程

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}; \end{cases}$$

易知 $x^2 + y^2 = a^2$，它是一圆柱面，这说明这条曲线在这个圆柱面上，因此我们也常常将这条曲线称为圆柱螺旋线(circular helix).



比较

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

比较

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

我们可以看出，前者不仅表示出明确的质点运动的意义，而且从它也比较容易想象出轨迹的图形.

比较

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

我们可以看出, 前者不仅表示出明确的质点运动的意义, 而且从它也比较容易想象出轨迹的图形. 因此在有些问题中, 空间曲线的参数方程将显示出其优越性.

比较

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

我们可以看出，前者不仅表示出明确的质点运动的意义，而且从它也比较容易想象出轨迹的图形. 因此在有些问题中，空间曲线的参数方程将显示出其优越性.

习题课