第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.1 柱面

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

本章介绍的曲面可以分为两类.

本章介绍的曲面可以分为两类. 第一类曲面具有突出的几何特征, 此时我们将从几何特征出发求它的方程;

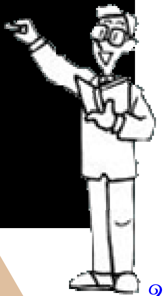
本章介绍的曲面可以分为两类. 第一类曲面具有突出的几何特征, 此时我们将从几何特征出发求它的方程; 第二类曲面的方程具有简单的标准形式, 此时我们将从其方程去研究其图形.

本章介绍的曲面可以分为两类. 第一类曲面具有突出的几何特征, 此时我们将从几何特征出发求它的方程; 第二类曲面的方程具有简单的标准形式, 此时我们将从其方程去研究其图形. 本章内容充分体现了几何图形与其代数方程之间的相互表示、相互解释的统一关系.

§4.1 柱面

§4.1 柱面

教学内容: 柱面、空间曲线的射影柱面



§4.1 柱面

教学内容: 柱面、空间曲线的射影柱面

教学目的: 掌握柱面方程的推导,能用射影柱面分析空间曲线的形状

§4.1 柱面

教学内容: 柱面、空间曲线的射影柱面

教学目的: 掌握柱面方程的推导,能用射影柱面分析空间曲线的形状

教学重难点: 柱面方程的推导

❐ 柱面

☞ 柱面的定义

❐ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间, 由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder),

❒ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间, 由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder), 定方向叫做柱面的方向 (direction),

❐ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间, 由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder), 定方向叫做柱面的方向 (direction), 定曲线叫做柱面的准线 (directrix),

❐ 柱面

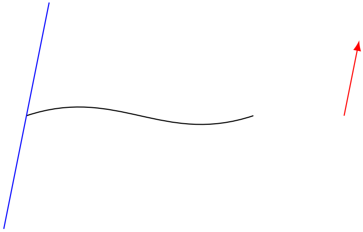
☞ **柱面的定义** 在空间, 由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder), 定方向叫做柱面的方向 (direction), 定曲线叫做柱面的准线 (directrix), 那族平行直线中的每一条直线, 叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line), 也称直母线.

❒ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.

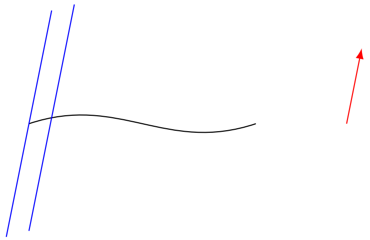
❒ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.



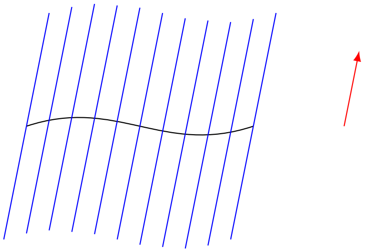
❐ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.



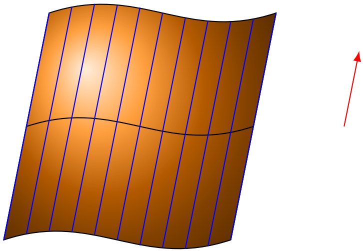
❒ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.



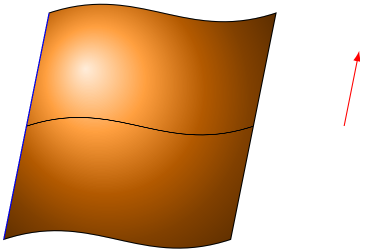
❐ 柱面

☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.

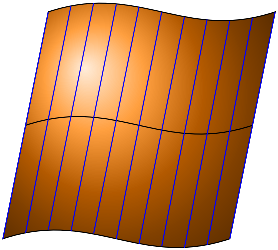


❐ 柱面

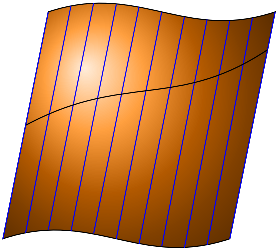
☞ **柱面的定义** 在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫做柱面 (cylinder)，定方向叫做柱面的方向 (direction)，定曲线叫做柱面的准线 (directrix)，那族平行直线中的每一条直线，叫做柱面的母线(generatrix 或 generating line)，也称直母线.



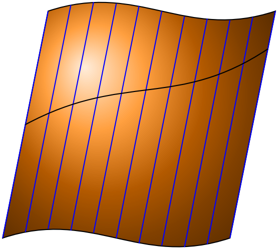
注： 柱面的准线不唯一(柱面上与每一条直母线相交的任意曲线均可作为准线)，



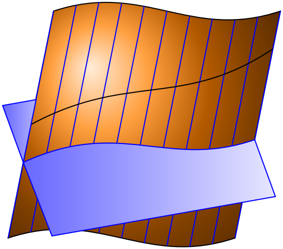
注： 柱面的准线不唯一(柱面上与每一条直母线相交的任意曲线均可作为准线),



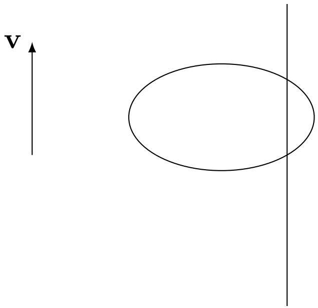
注： 柱面的准线不唯一(柱面上与每一条直母线相交的任意曲线均可作为准线), 且总可选平面曲线作为准线.



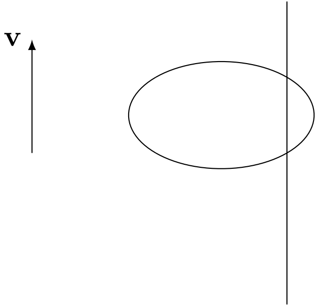
注: 柱面的准线不唯一(柱面上与每一条直母线相交的任意曲线均可作为准线), 且总可选平面曲线作为准线.



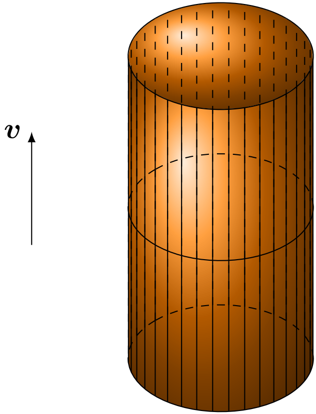
圆柱面



圆柱面



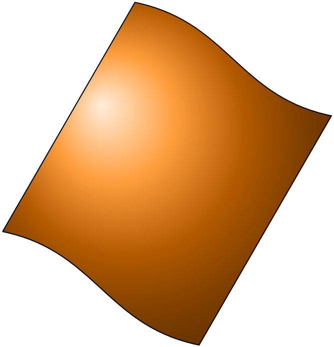
圆柱面



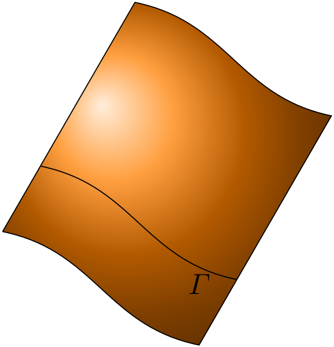
☞ 柱面的方程

☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$

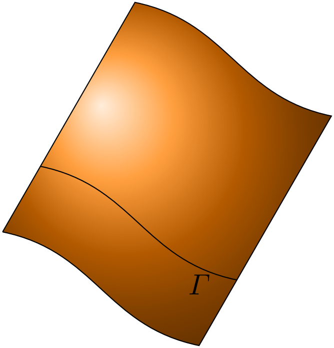
☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$



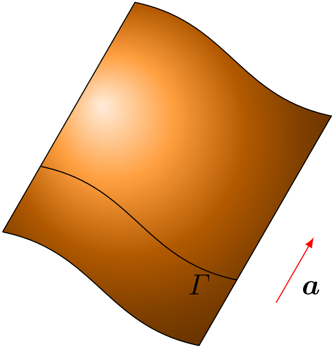
柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$



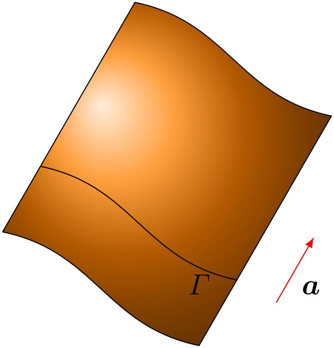
☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$.



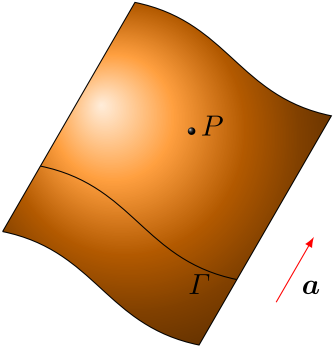
☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$.



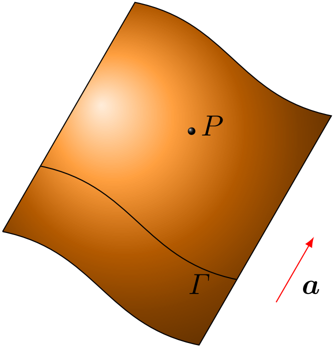
柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$,



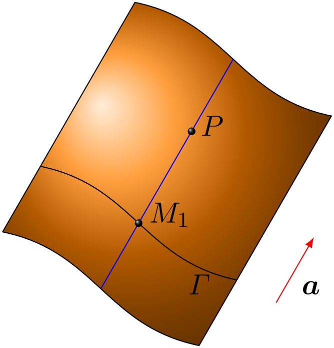
柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$,



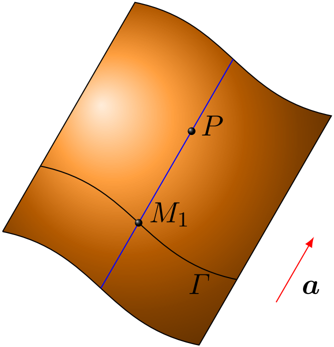
☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,



☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

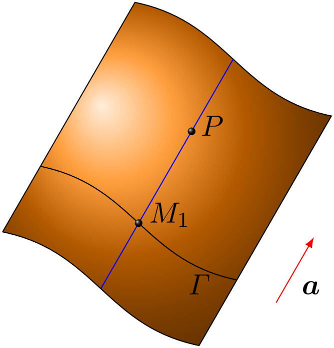


柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即



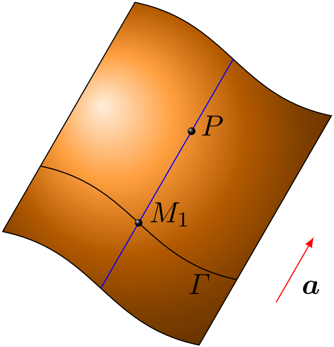
☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

$$\begin{cases} x-x_1=Xt, \\ y-y_1=Yt, \\ z-z_1=Zt. \end{cases}$$



☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

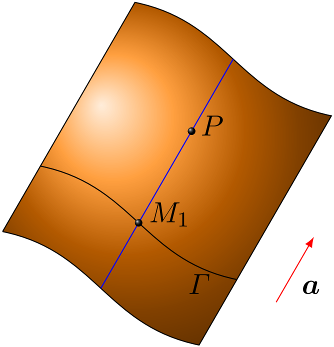
$$\begin{cases}x-x_1=Xt,\\y-y_1=Yt,\\z-z_1=Zt.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x-Xt,\\y_1=y-Yt,\\z_1=z-Zt.\end{cases}$$



☞ **柱面的方程** 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

$$\begin{cases}x-x_1=Xt,\\y-y_1=Yt,\\z-z_1=Zt.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x-Xt,\\y_1=y-Yt,\\z_1=z-Zt.\end{cases}$$

M_1 在准线上 $\Rightarrow$

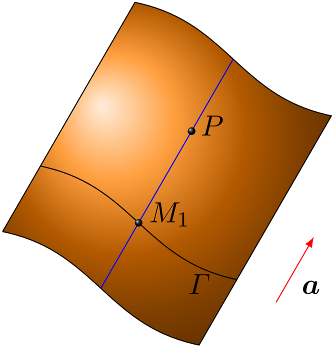


柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

$$\begin{cases}x-x_1=Xt,\\y-y_1=Yt,\\z-z_1=Zt.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x-Xt,\\y_1=y-Yt,\\z_1=z-Zt.\end{cases}$$

M_1 在准线上 $\Rightarrow$

$$\begin{cases}F_1(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0,\\F_2(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0.\end{cases}$$



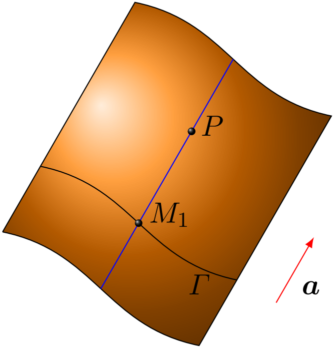
柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

$$\begin{cases} x-x_1=Xt, \\ y-y_1=Yt, \\ z-z_1=Zt. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x-Xt, \\ y_1=y-Yt, \\ z_1=z-Zt. \end{cases}$$

M_1 在准线上 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_1(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0, \\ F_2(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0. \end{cases}$$

上式消去参数 t, 得到三元方程
$F(x,y,z)=0$,

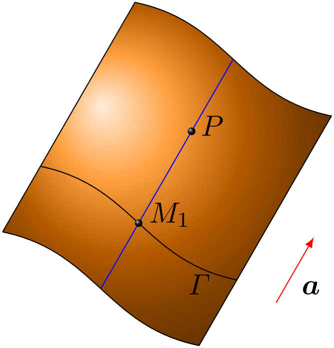


柱面的方程 设柱面准线为 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线的方向平行于 $\boldsymbol{a}\{X,Y,Z\}$. 在柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与柱面准线 Γ 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在实数 t 使 $\overrightarrow{M_1P}=t\cdot\mathbf{a}$, 即

$$\begin{cases}x-x_1=Xt,\\y-y_1=Yt,\\z-z_1=Zt.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x-Xt,\\y_1=y-Yt,\\z_1=z-Zt.\end{cases}$$

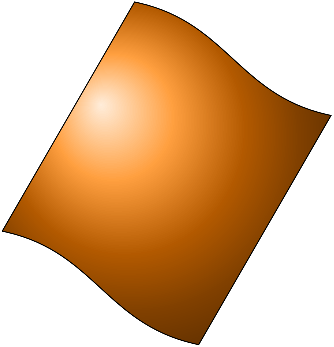
M_1 在准线上 $\Rightarrow$

$$\begin{cases}F_1(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0,\\F_2(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0.\end{cases}$$

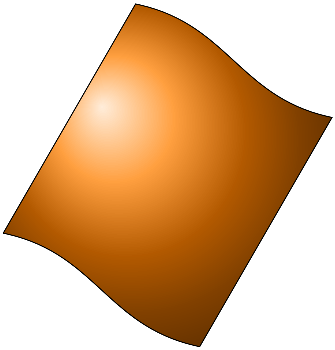


上式消去参数 t, 得到三元方程 $F(x,y,z)=0$, 即是以 Γ 为准线, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$ 的柱面方程.

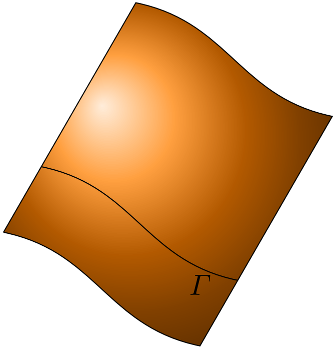
☞ 柱面的参数方程



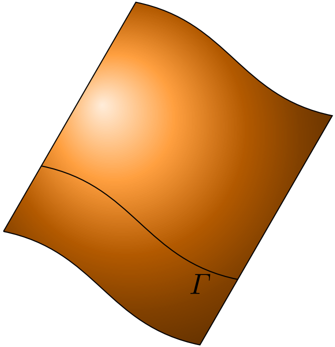
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a,b)$,



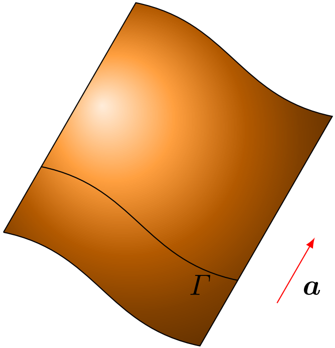
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$,



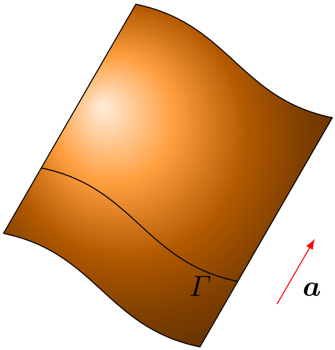
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$.



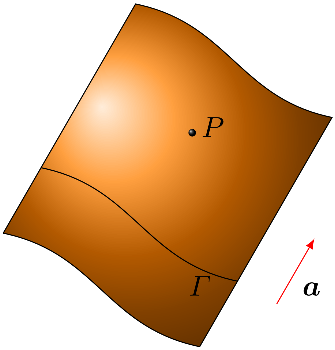
柱面的参数方程 设柱面准线 $\varGamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$.



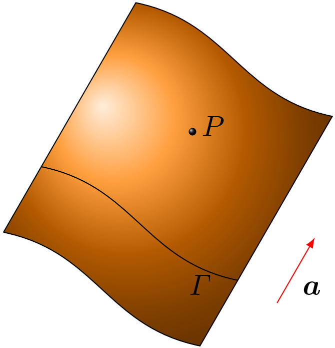
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$,



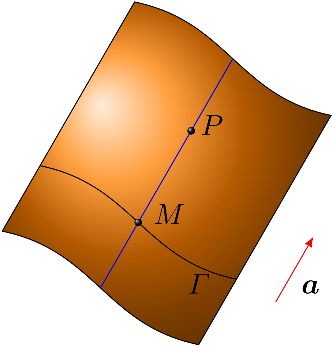
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$,



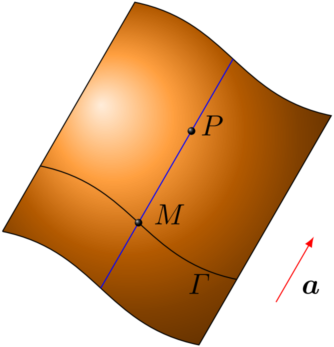
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M,



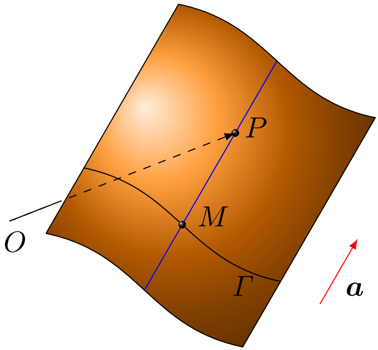
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M,



☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a,b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

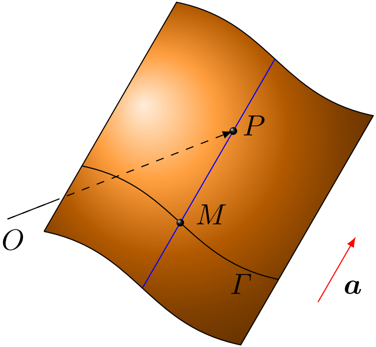


☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有



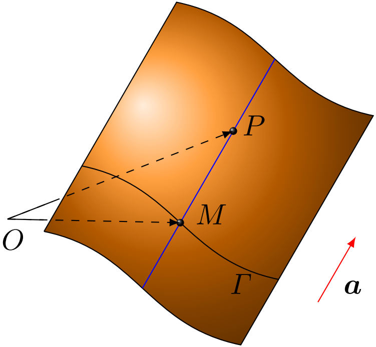
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$$



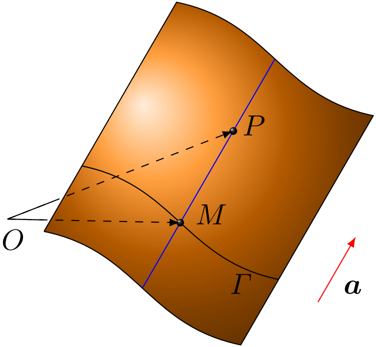
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$$



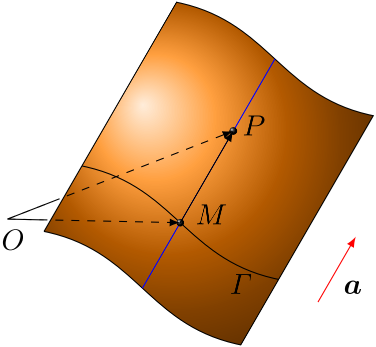
柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$$



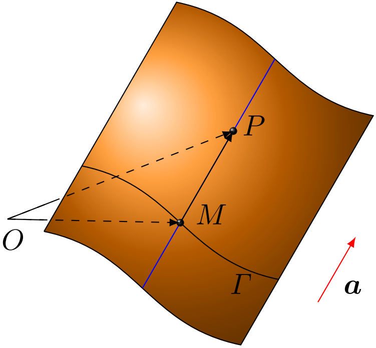
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a,b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$$



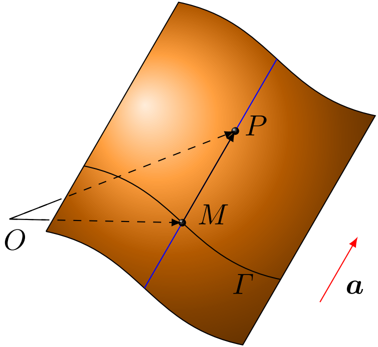
☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$



☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

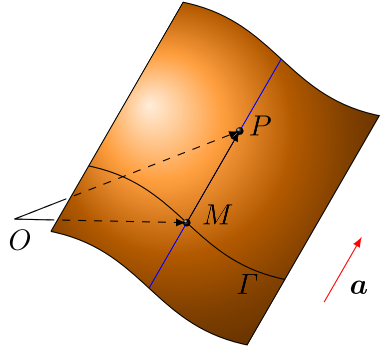
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$



柱面的参数方程 设柱面准线 $\varGamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 $\varGamma$ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

得参数方程

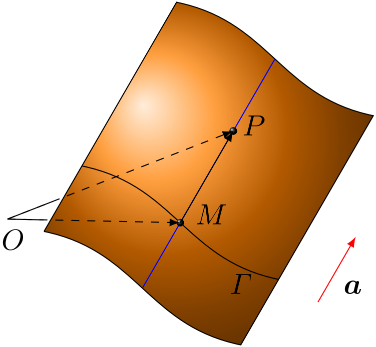


柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

得参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$



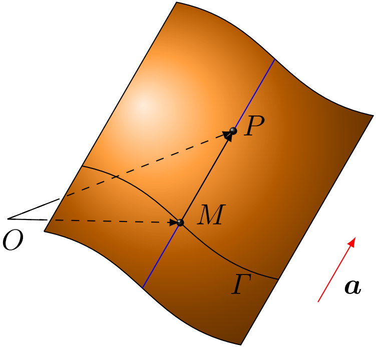
柱面的参数方程 设柱面准线 $\varGamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 $\varGamma$ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

得参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

$$u \in (a, b), v \in (-\infty, +\infty).$$



柱面的参数方程 设柱面准线 $\Gamma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u), u \in (a,b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x,y,z)$, 设过 P 的直母线与准线 Γ 的交点为 M, 则有

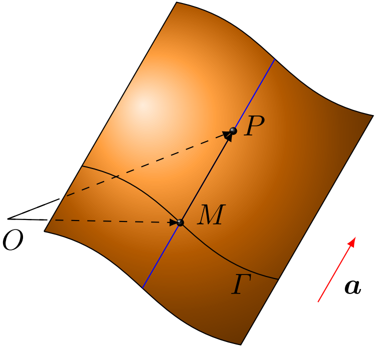
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a},$$

得参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a},$$

$$u \in (a,b), v \in (-\infty,+\infty).$$

若 $\Gamma: \boldsymbol{r}=\{x(u),y(u),z(u)\}$, $u \in (a,b), \boldsymbol{a}=\{X,Y,Z\}$



☞ **柱面的参数方程** 设柱面准线 $\varGamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u \in (a, b)$, 母线方向平行于 $\boldsymbol{a}$. 柱面上任取一点 $P(x, y, z)$, 设过 P 的直母线与准线 $\varGamma$ 的交点为 M, 则有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

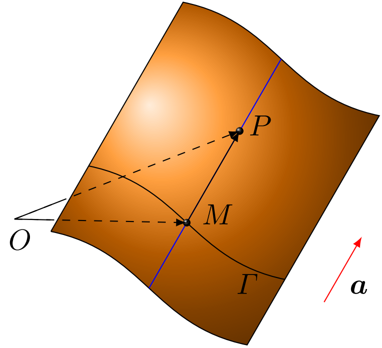
得参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a},$$

$$u \in (a, b), v \in (-\infty, +\infty).$$

若 $\varGamma : \boldsymbol{r} = \{x(u), y(u), z(u)\}$, $u \in (a, b), \boldsymbol{a} = \{X, Y, Z\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = x(u) + Xv, \\ y = y(u) + Yv, \\ z = z(u) + Zv. \end{cases}$$



例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1,$ 求该柱面的方程.

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点,

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1-t, \\ y=y_1, \\ z=z_1+t. \end{cases}$$

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1-t, \\ y=y_1, \\ z=z_1+t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x+t, \\ y_1=y, \\ z_1=z-t. \end{cases}$$

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1,$ 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1-t, \\ y=y_1, \\ z=z_1+t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x+t, \\ y_1=y, \\ z_1=z-t. \end{cases}$$

代入准线方程得

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1-t, \\ y=y_1, \\ z=z_1+t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x+t, \\ y_1=y, \\ z_1=z-t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

例 1

柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 而母线的方向数为 $-1,0,1$, 求该柱面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1-t, \\ y=y_1, \\ z=z_1+t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x+t, \\ y_1=y, \\ z_1=z-t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. \tag{2}$$

$(1) \times 2 - (2) \Rightarrow$

代入准线方程得

$$(x+t)^2 + y^2 + (z-t)^2 = 1, \tag{1}$$

$$2(x+t)^2 + 2y^2 + (z-t)^2 = 2. \tag{2}$$

$(1)\times 2-(2)\Rightarrow (z-t)^2=0$, 即 $t=z$.

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. \tag{2}$$

$(1)\times 2-(2)\Rightarrow(z-t)^2=0$, 即 $t=z$. 代入(1) 得所求柱面方程为

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. \tag{2}$$

$(1)\times 2-(2)\Rightarrow(z-t)^2=0$, 即 $t=z$. 代入(1) 得所求柱面方程为

$$(x+z)^2+y^2=1,$$

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. \tag{2}$$

$(1)\times 2-(2)\Rightarrow(z-t)^2=0$, 即 $t=z$. 代入(1) 得所求柱面方程为

$$(x+z)^2+y^2=1,$$

即

$$x^2+y^2+z^2+2xz-1=0.$$

代入准线方程得

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{1}$$

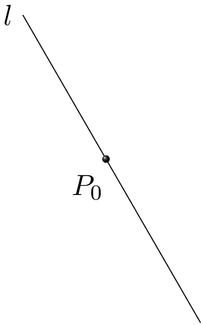
$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. \tag{2}$$

例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$,

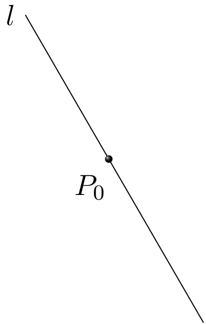
例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$,



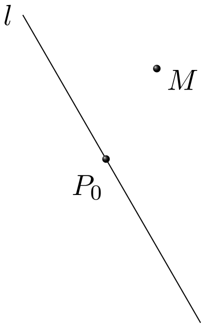
例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.



例 2

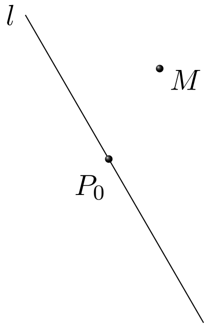
已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.



例 2

已知圆柱面的轴为 $l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

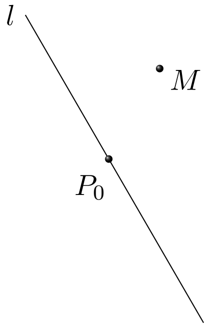


例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆,

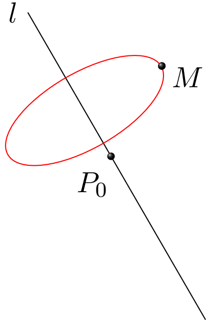


例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆,

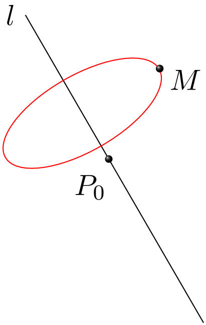


例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

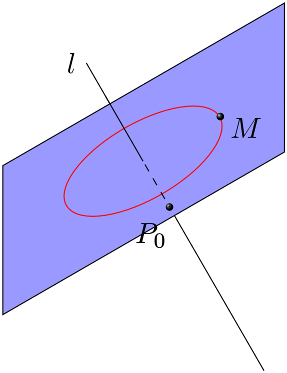


例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面



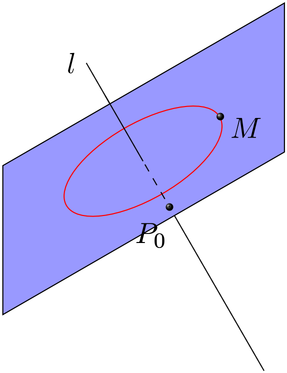
例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$1 \cdot (x-1)$



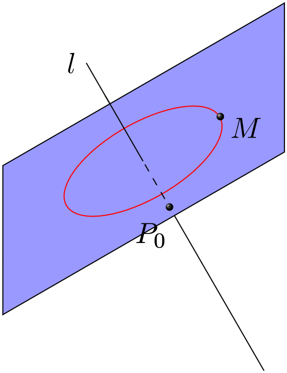
例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)$



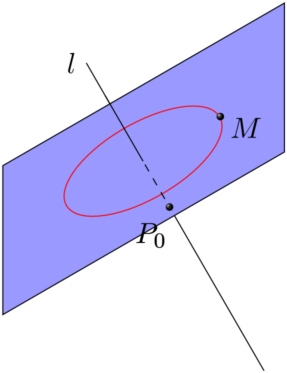
例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1, -2, 1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1, -2, 1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1) - 2\cdot(y+2) - 2\cdot(z-1) = 0$$



例 2

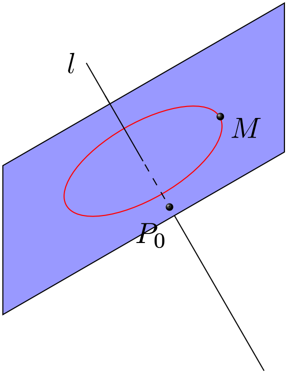
已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

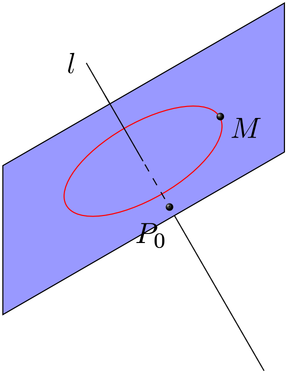
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$，点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上，求该圆柱面的方程.

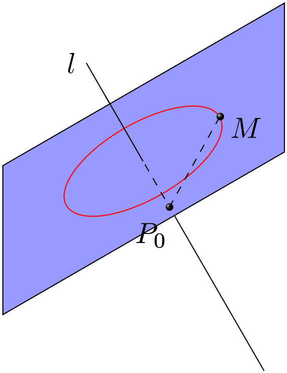
解题思路：先求出圆柱面的准线圆，再用上例的方法，即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆，它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心，半径为



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

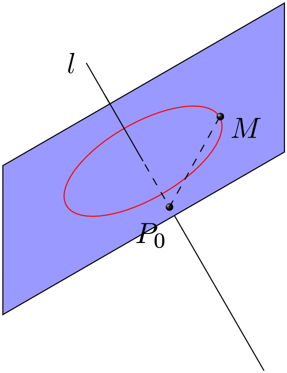
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|$



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

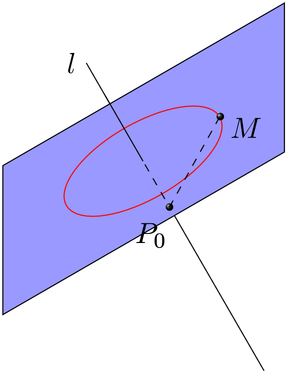
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r = |\overrightarrow{P_0M}| = |\{1,-3,2\}|$



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

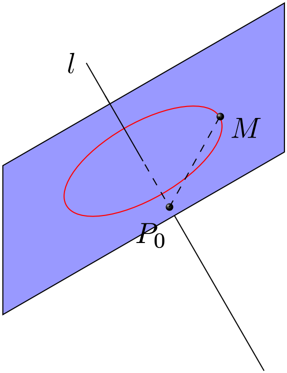
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

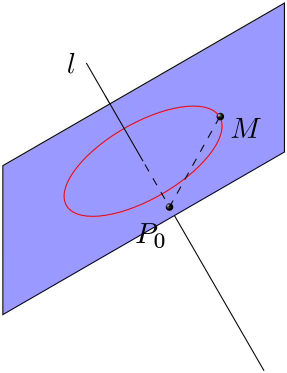
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面



例 2

已知圆柱面的轴为 $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$, 点 $M(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求该圆柱面的方程.

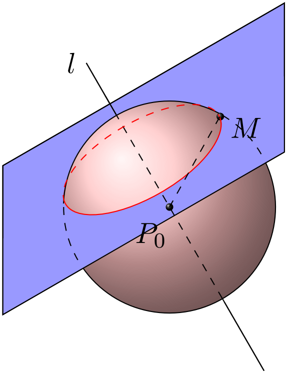
解题思路: 先求出圆柱面的准线圆, 再用上例的方法, 即可求出该圆柱面的方程.

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面



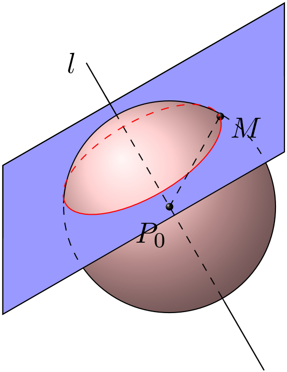
$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆，它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心，半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面



$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

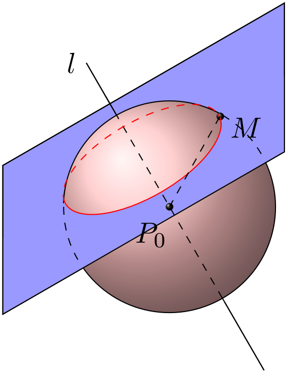
的交线, 故准线圆的方程为

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面



$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线，故准线圆的方程为

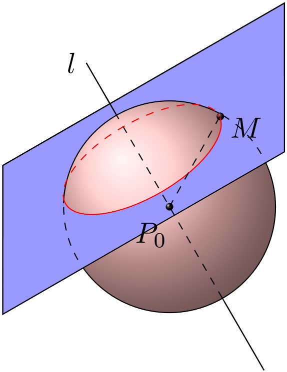
$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ \end{cases}$$

解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆，它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

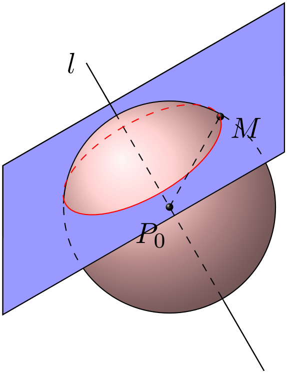
与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心，半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面



$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$



解法一 选取过 M 的纬线圆作为所求圆柱面的准线圆, 它可以看成过 $M(1,-2,1)$ 且垂直于轴 l 的平面

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-2\cdot(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y-2z-3=0$$

与以点 $P_0(0,1,-1)$ 为球心, 半径为 $r=|\overrightarrow{P_0M}|=|\{1,-3,2\}|=\sqrt{14}$ 的球面

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases}$$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线，故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点，过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x-t, \\ y_1=y+2t, \\ z_1=z+2t. \end{cases}$$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x-t, \\ y_1=y+2t, \\ z_1=z+2t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x-t, \\ y_1=y+2t, \\ z_1=z+2t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ \end{cases}$$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x-t, \\ y_1=y+2t, \\ z_1=z+2t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$$

的交线, 故准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为所求柱面上的任意一点, 过 P 的直母线与柱面的准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则存在 t 使

$$\begin{cases} x=x_1+t, \\ y=y_1-2t, \\ z=z_1-2t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x-t, \\ y_1=y+2t, \\ z_1=z+2t. \end{cases}$$

代入准线方程得

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$(9x-9t)^2+(9y+18t-9)^2+(9z+18t+9)^2=14\times 9^2,$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$(9x-9t)^2+(9y+18t-9)^2+(9z+18t+9)^2=14\times 9^2,$$

$$(8x+2y+2z+3)^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$(9x-9t)^2+(9y+18t-9)^2+(9z+18t+9)^2=14\times 9^2,$$

$$(8x+2y+2z+3)^2+(2x+5y-4z-15)^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$(9x-9t)^2+(9y+18t-9)^2+(9z+18t+9)^2=14\times 9^2,$$

$$(8x+2y+2z+3)^2+(2x+5y-4z-15)^2$$
$$+(2x-4y+5z+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$
\begin{aligned}
&(\underline{8x}+2y+2z+3)^2+(\underline{2x}+5y-4z-15)^2\\
&\quad+(\underline{2x}-4y+5z+3)^2=14\times 9^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\
x-2y-2z-3-9t=0.
\end{cases}
$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$64+4+4=72$$

$$(\underline{8x}+2y+2z+3)^2+(\underline{2x}+5y-4z-15)^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+5z+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2$

$$64+4+4=72$$

$$(\underline{8x}+2y+2z+3)^2+(\underline{2x}+5y-4z-15)^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+5z+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2$

$$64+4+4=72$$

$$(8x+\underline{2y}+2z+3)^2+(2x+\underline{5y}-4z-15)^2 \\ +(2x-\underline{4y}+5z+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2$

$$4+25+16=45$$

$$(8x+\underline{2y}+2z+3)^2+(2x+\underline{5y}-4z-15)^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+5z+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2 + 45y^2$

$$4 + 25 + 16 = 45$$

$$(8x + \underline{2y} + 2z + 3)^2 + (2x + \underline{5y} - 4z - 15)^2 + (2x - \underline{4y} + 5z + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x - t)^2 + (y + 2t - 1)^2 + (z + 2t + 1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2 + 45y^2$

$$4 + 25 + 16 = 45$$

$$(8x + 2y + \underline{2z} + 3)^2 + (2x + 5y - \underline{4z} - 15)^2 + (2x - 4y + \underline{5z} + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$72x^2 + 45y^2$

$$4 + 16 + 25 = 45$$

$$(8x + 2y + \underline{2z} + 3)^2 + (2x + 5y - \underline{4z} - 15)^2 + (2x - 4y + \underline{5z} + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2$$

$$4 + 16 + 25 = 45$$

$$(8x + 2y + \underline{2z} + 3)^2 + (2x + 5y - \underline{4z} - 15)^2$$
$$+ (2x - 4y + \underline{5z} + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2$$

$$4 + 16 + 25 = 45$$

$$(\underline{8x} + \underline{2y} + 2z + 3)^2 + (\underline{2x} + \underline{5y} - 4z - 15)^2$$
$$+ (\underline{2x} - \underline{4y} + 5z + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2$$

$$32 + 20 - 16 = 36$$

$$(\underline{8x} + \underline{2y} + 2z + 3)^2 + (\underline{2x} + \underline{5y} - 4z - 15)^2$$
$$+ (\underline{2x} - \underline{4y} + 5z + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy$$

$$32 + 20 - 16 = 36$$

$$(\underline{8x} + \underline{2y} + 2z + 3)^2 + (\underline{2x} + \underline{5y} - 4z - 15)^2$$
$$+ (\underline{2x} - \underline{4y} + 5z + 3)^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy$$

$$32+20-16=36$$

$$(\underline{8x}+2y+\underline{2z}+3)^2+(\underline{2x}+5y-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy$$

$$32-16+20=36$$

$$(\underline{8x}+2y+\underline{2z}+3)^2+(\underline{2x}+5y-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz$$

$$32-16+20=36$$

$$(\underline{8x}+2y+\underline{2z}+3)^2+(\underline{2x}+5y-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz$$

$$32-16+20=36$$

$$(8x+\underline{2y}+\underline{2z}+3)^2+(2x+\underline{5y}-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz$$

$$8-40-40=-72$$

$$(8x+\underline{2y}+\underline{2z}+3)^2+(2x+\underline{5y}-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz$$

$$8-40-40=-72$$

$$(8x+\underline{2y}+\underline{2z}+3)^2+(2x+\underline{5y}-\underline{4z}-15)^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+\underline{5z}+3)^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz$$

$$8 - 40 - 40 = -72$$

$$(\underline{8x} + 2y + 2z + \underline{3})^2 + (\underline{2x} + 5y - 4z - \underline{15})^2$$
$$+ (\underline{2x} - 4y + 5z + \underline{3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz$$

$$48-60+12=0$$

$$(\underline{8x}+2y+2z+\underline{3})^2+(\underline{2x}+5y-4z-\underline{15})^2$$
$$+(\underline{2x}-4y+5z+\underline{3})^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz$$

$$48 - 60 + 12 = 0$$

$$(8x + \underline{2y} + 2z + \underline{3})^2 + (2x + \underline{5y} - 4z - \underline{15})^2$$
$$+ (2x - \underline{4y} + 5z + \underline{3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz$$

$$12-150-24=-162$$

$$(8x+\underline{2y}+2z+\underline{3})^2+(2x+\underline{5y}-4z-\underline{15})^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+5z+\underline{3})^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz-162y$$

$$12-150-24=-162$$

$$(8x+\underline{2y}+2z+\underline{3})^2+(2x+\underline{5y}-4z-\underline{15})^2$$
$$+(2x-\underline{4y}+5z+\underline{3})^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz - 162y$$

$$12 - 150 - 24 = -162$$

$$(8x + 2y + \underline{2z} + \underline{3})^2 + (2x + 5y - \underline{4z} - \underline{15})^2$$
$$+ (2x - 4y + \underline{5z} + \underline{3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz-162y$$

$$12+120+30=162$$

$$(8x+2y+\underline{2z}+\underline{3})^2+(2x+5y-\underline{4z}-\underline{15})^2$$
$$+(2x-4y+\underline{5z}+\underline{3})^2=14\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz - 162y + 162z$$

$$12 + 120 + 30 = 162$$

$$(8x + 2y + \underline{2z} + \underline{3})^2 + (2x + 5y - \underline{4z} - \underline{15})^2$$
$$+ (2x - 4y + \underline{5z} + \underline{3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz - 162y + 162z$$

$$12 + 120 + 30 = 162$$

$$(8x + 2y + 2z \underline{+ 3})^2 + (2x + 5y - 4z - \underline{15})^2$$
$$+ (2x - 4y + 5z \underline{+ 3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz - 162y + 162z$$

$$9 + 15^2 + 9 - 14 \times 9^2 = 27 \times 9 - 14 \times 9^2 = -11 \times 9^2$$

$$(8x + 2y + 2z \underline{+\ 3})^2 + (2x + 5y - 4z - \underline{15})^2 + (2x - 4y + 5z \underline{+\ 3})^2 = 14 \times 9^2$$

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz-162y+162z-99\times 9=0.$$

$$9+15^2+9-14\times 9^2=27\times 9-14\times 9^2=-11\times 9^2$$

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\ x-2y-2z-3-9t=0.\end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2+45y^2+45z^2+36xy+36xz-72yz-162y+162z-99\times 9=0.$$

即

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3-9t=0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

$$72x^2 + 45y^2 + 45z^2 + 36xy + 36xz - 72yz - 162y + 162z - 99 \times 9 = 0.$$

即

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8yz - 18y + 18z - 99 = 0.$$

✍思考： 准线是圆的柱面一定是圆柱面吗？

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y+2t-1)^2 + (z+2t+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 - 9t = 0. \end{cases}$$

消去参数 t 即得所求圆柱面的方程为

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\,(0,1,-1)$,

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v} = \{1, -2, -2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0, 1, -1)$, 又点 $M(1, -2, 1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M} = \{1, -3, 2\}$,

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}} \end{aligned}$$

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{117}}{3}\end{aligned}$$

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{117}}{3}=\sqrt{13}. \end{aligned}$$

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{117}}{3}=\sqrt{13}. \end{aligned}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为圆柱面上的任意点, 那么有

分析: 圆柱面是一种特殊的柱面, 将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹, 那么该例又有第二种解法.

解法二 圆柱面轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,-2\}$, 轴上定点 $P_0\ (0,1,-1)$, 又点 $M(1,-2,1)$ 在所求圆柱面上, 故 $\overrightarrow{P_0M}=\{1,-3,2\}$, 因此点 $M(1,-2,1)$ 到轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{117}}{3}=\sqrt{13}. \end{aligned}$$

再设 $P(x,y,z)$ 为圆柱面上的任意点, 那么有

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|\{x,y-1,z+1\}\times\{1,-2,-2\}|}{|\{1,-2,-2\}|}=\sqrt{13},$$

即

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-1 & z+1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z+1 & x \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}} = \sqrt{13},$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_0M} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{117}}{3} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

再设 $P(x, y, z)$ 为圆柱面上的任意点, 那么有

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{|\{x, y-1, z+1\} \times \{1, -2, -2\}|}{|\{1, -2, -2\}|} = \sqrt{13},$$

即

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-1 & z+1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z+1 & x \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}} = \sqrt{13},$$

化简整理得所求圆柱面方程为

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

再设 $P(x,y,z)$ 为圆柱面上的任意点, 那么有

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{|\{x,y-1,z+1\}\times\{1,-2,-2\}|}{|\{1,-2,-2\}|} = \sqrt{13},$$

课堂练习: P 147, 习题 2

设柱面准线为 $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ 母线垂直于准线所在平面, 求这柱面的方程.

课堂练习: P 147, 习题 2

设柱面准线为 $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ 母线垂直于准线所在平面, 求这柱面的方程.

提示: 注意到准线所在平面是 $x = 2z$, 故柱面的母线方向平行于此平面法向量 $\{1, 0, -2\}$.

课堂练习: P 147, 习题 2

设柱面准线为 $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ 母线垂直于准线所在平面, 求这柱面的方程.

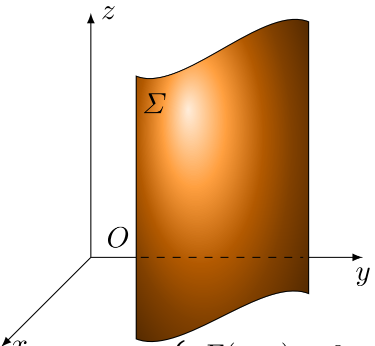
提示: 注意到准线所在平面是 $x = 2z$, 故柱面的母线方向平行于此平面法向量 $\{1, 0, -2\}$.

答案: $4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0$.

☞ 母线平行于坐标轴的柱面方程

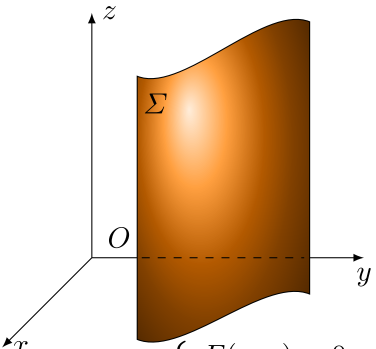
☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴, 它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

母线平行于坐标轴的柱面方程 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$



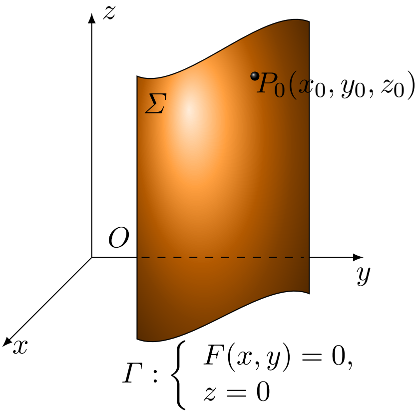
$\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$

☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,

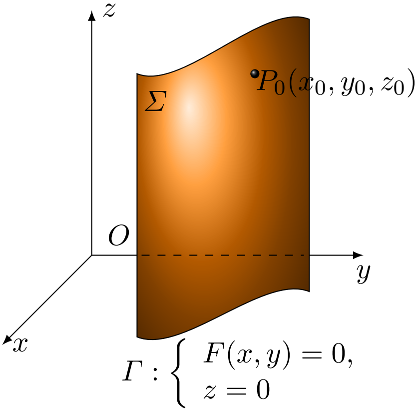


$\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$

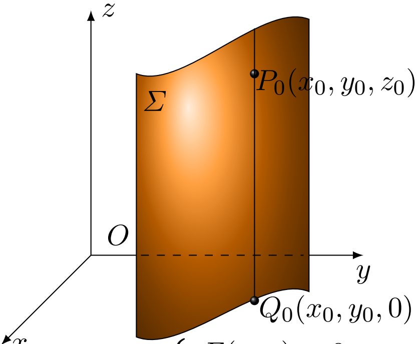
☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴, 它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,



☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，



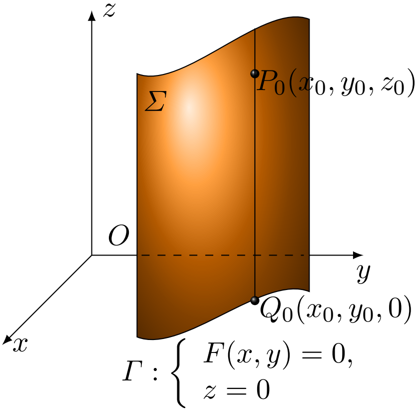
母线平行于坐标轴的柱面方程 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，



$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$$

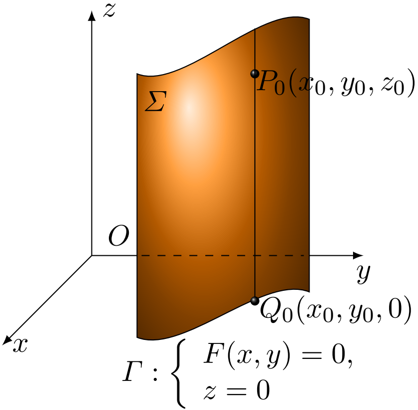
母线平行于坐标轴的柱面方程 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴, 它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上, 因此满足

$$F(x_0,y_0) = 0;$$



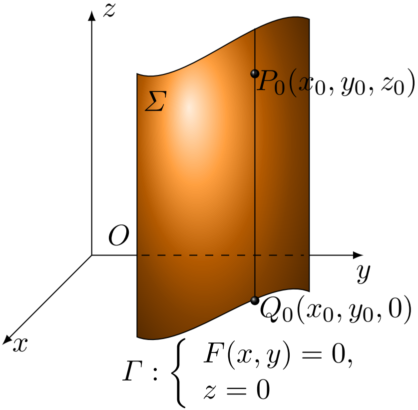
母线平行于坐标轴的柱面方程 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，因此满足

$F(x_0,y_0)=0$；另一方面，如果空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$，



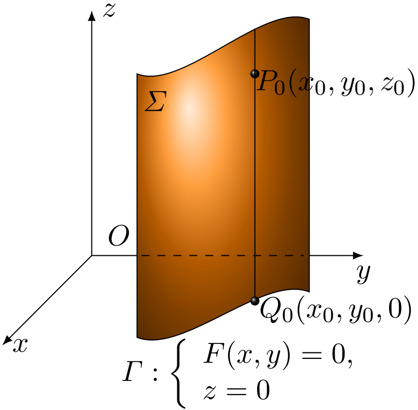
☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴, 它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上, 因此满足

$F(x_0,y_0)=0$; 另一方面, 如果空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$, 那么 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在 Γ 上,



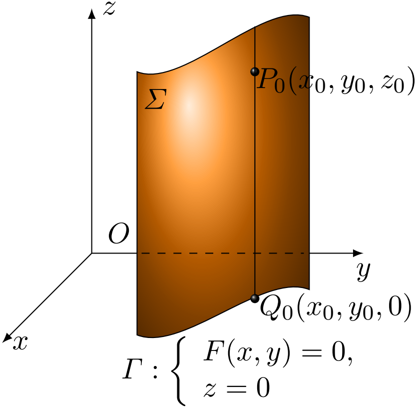
☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，因此满足

$F(x_0,y_0)=0$；另一方面，如果空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$，那么 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在 Γ 上，且直线 P_0Q_0 平行于 z 轴，



☞ **母线平行于坐标轴的柱面方程** 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，因此满足

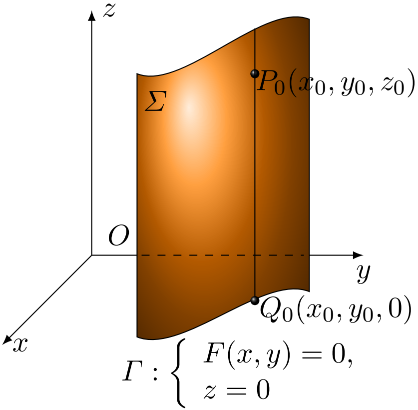
$F(x_0,y_0)=0$；另一方面，如果空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$，那么 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在 Γ 上，且直线 P_0Q_0 平行于 z 轴，故 P_0 必在柱面 Σ 上．因此 Σ 的方程是 $F(x,y)=0$.



母线平行于坐标轴的柱面方程 设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，它与 xOy 平面交于一条曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$ 任取柱面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么过该点的母线与 xOy 平面的交点 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在曲线 Γ 上，因此满足

$F(x_0,y_0)=0$；另一方面，如果空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$，那么 $Q_0(x_0,y_0,0)$ 在 Γ 上，且直线 P_0Q_0 平行于 z 轴，故 P_0 必在柱面 Σ 上. 因此 Σ 的方程是 $F(x,y)=0$.

反过来，容易说明方程 $F(x,y)=0$ 的图形一定是以平面曲线 $\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.



同理, 方程 $G(y,z)=0$ 与 $H(x,z)=0$ 都表示柱面, 它们的母线分别平行于 x 轴与 y 轴.

同理, 方程 $G(y,z)=0$ 与 $H(x,z)=0$ 都表示柱面, 它们的母线分别平行于 x 轴与 y 轴. 因此有如下结论.

同理, 方程 $G(y,z)=0$ 与 $H(x,z)=0$ 都表示柱面, 它们的母线分别平行于 x 轴与 y 轴. 因此有如下结论.

定理4.1.1

在空间直角坐标系中, 只含有两个元(坐标)的三元方程表示的曲面是一个柱面, 它的母线平行于所缺元(坐标)的同名坐标轴.

根据定理4.1.1, 以下方程都表示柱面:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

根据定理4.1.1, 以下方程都表示柱面:

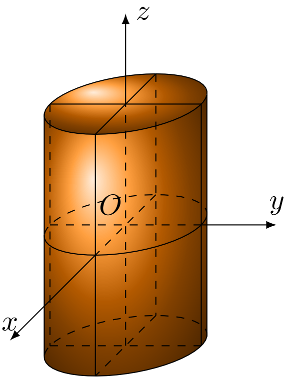
$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

在空间直角坐标系中, 因为上面这些柱面与 xOy 坐标面的交线分别是椭圆, 双曲线与抛物线, 所以它们依次叫做椭圆柱面(elliptic cylinder), 双曲柱面(hyperbolic cylinder)与抛物柱面(parabolic cylinder).

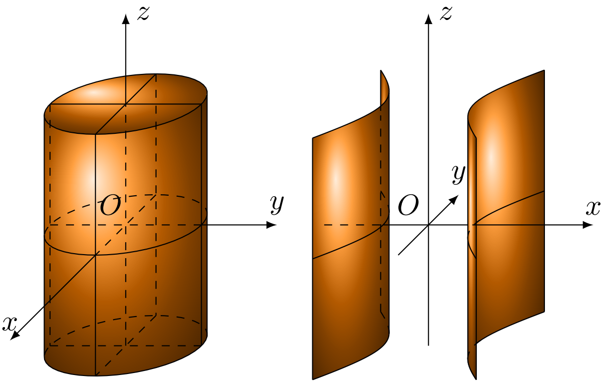
根据定理4.1.1, 以下方程都表示柱面:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

在空间直角坐标系中, 因为上面这些柱面与 xOy 坐标面的交线分别是椭圆, 双曲线与抛物线, 所以它们依次叫做椭圆柱面(elliptic cylinder), 双曲柱面(hyperbolic cylinder)与抛物柱面(parabolic cylinder). 它们的方程都是二次的, 所以统称为二次柱面(quadratic cylinder).

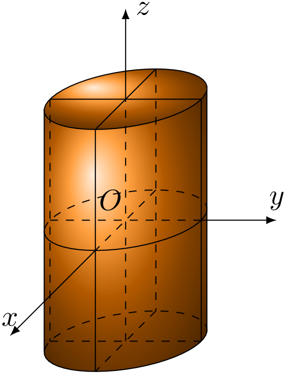


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

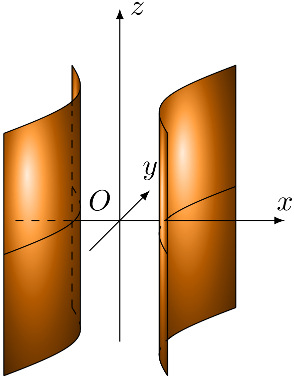


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

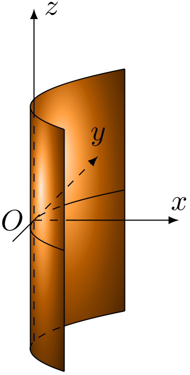
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$y^2=2px$$

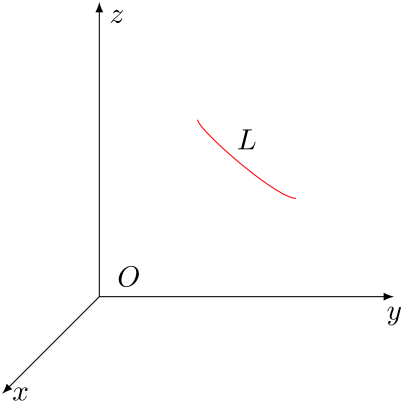
❐ 空间曲线的射影柱面

❒ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

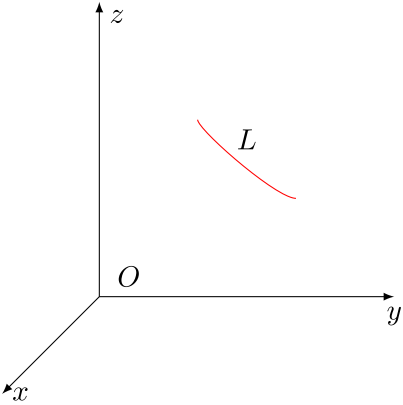
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$



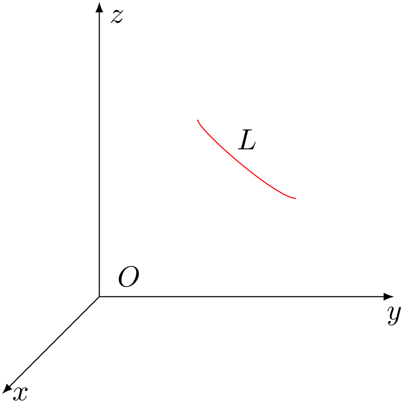
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$,



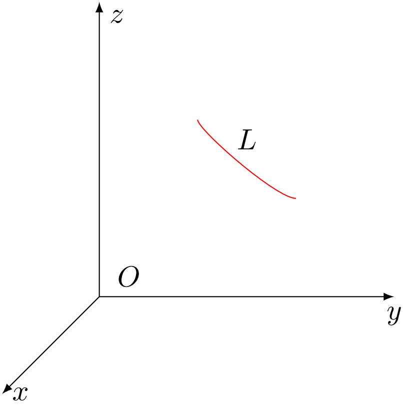
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面;



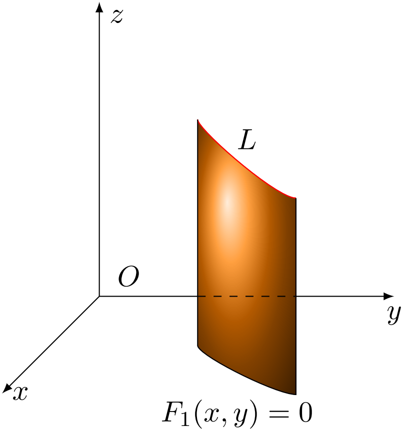
❒ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上.



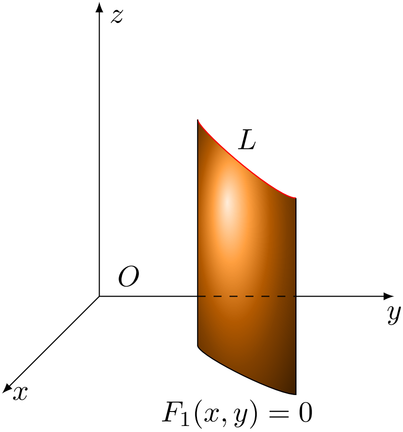
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L: \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上.



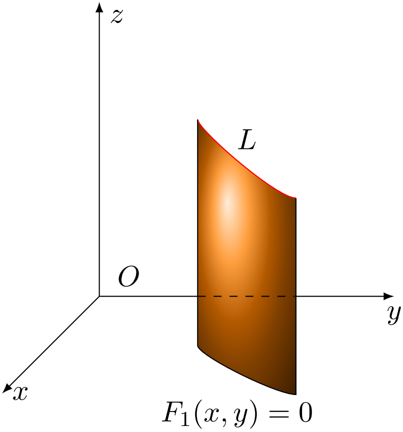
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上. 这个柱面叫做空间曲线 L 对 xOy 坐标面射影的射影柱面(projective cylinder).



❒ 空间曲线的射影柱面

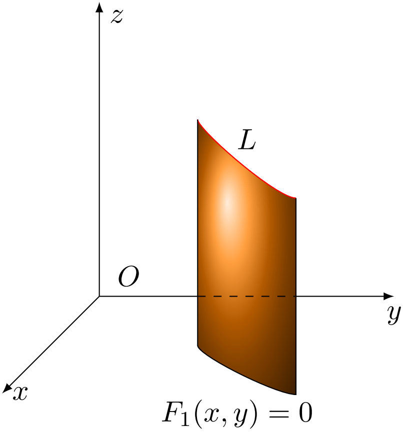
给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上. 这个柱面叫做空间曲线 L 对 xOy 坐标面射影的射影柱面(projective cylinder). 而曲线 $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOy 坐标面上的射影曲线(projective curve).



❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上. 这个柱面叫做空间曲线 L 对 xOy 坐标面射影的射影柱面(projective cylinder). 而曲线 $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOy 坐标面上的射影曲线(projective curve).

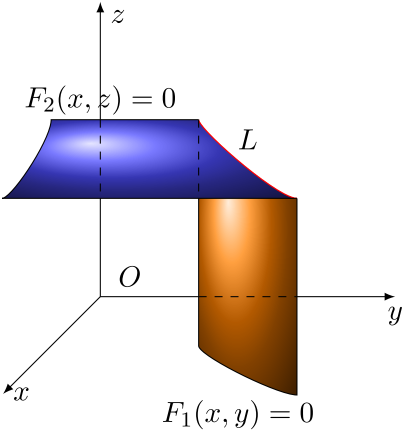
同理, 消去 y 可得 L 对xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$,



❒ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上. 这个柱面叫做空间曲线 L 对 xOy 坐标面射影的射影柱面(projective cylinder). 而曲线 $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOy 坐标面上的射影曲线(projective curve).

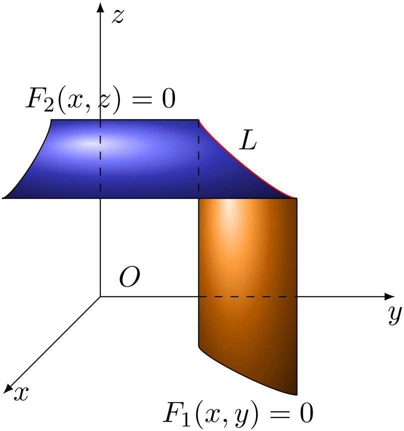
同理, 消去 y 可得 L 对xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$,



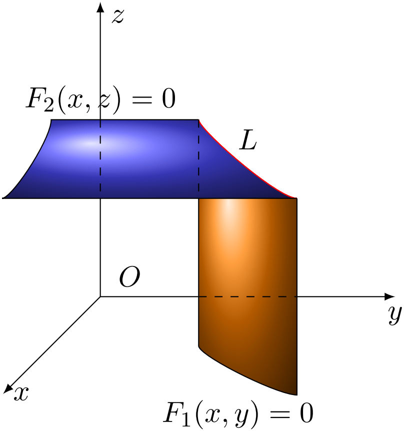
❐ 空间曲线的射影柱面

给定空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 从曲线的方程消去 z 可得 $F_1(x,y)=0$, 由定理 4.1.1 知它表示母线平行于 z 轴的柱面; 由消元的代数意义知曲线 L 必在此柱面上. 这个柱面叫做空间曲线 L 对 xOy 坐标面射影的射影柱面(projective cylinder). 而曲线 $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOy 坐标面上的射影曲线(projective curve).

同理, 消去 y 可得 L 对xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_2(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOz 坐标面上的射影曲线;

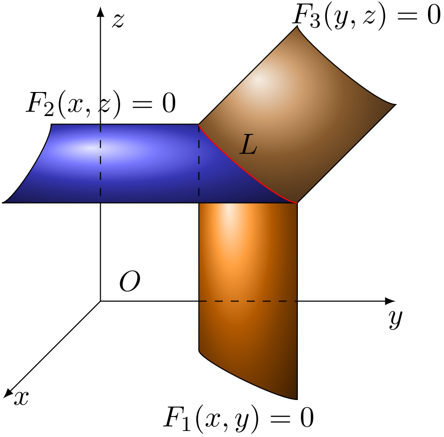


消去 x 可得 L 对 yOz 坐标面射影的射影柱面 $F_3(y,z)=0$,



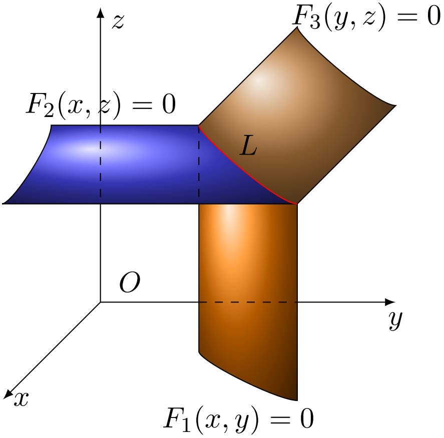
同理, 消去 y 可得 L 对xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_2(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOz 坐标面上的射影曲线;

消去 x 可得 L 对 yOz 坐标面射影的射影柱面 $F_3(y,z)=0$,



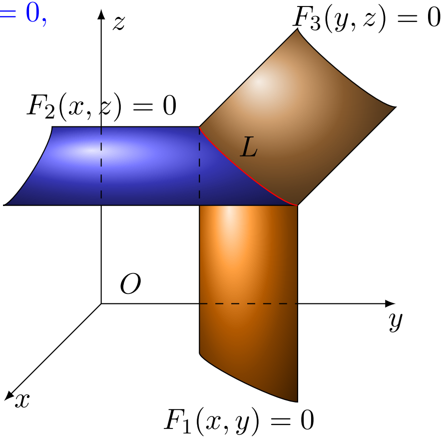
同理, 消去 y 可得 L 对 xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_2(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOz 坐标面上的射影曲线;

消去 x 可得 L 对 yOz 坐标面射影的射影柱面 $F_3(y,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_3(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 yOz 坐标面上的射影曲线.



同理, 消去 y 可得 L 对xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_2(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOz 坐标面上的射影曲线;

消去 x 可得 L 对 yOz 坐标面射影的射影柱面 $F_3(y,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_3(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 yOz 坐标面上的射影曲线. 因此 L 也可看成射影柱面的交线, 例如 $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,z)=0, \end{cases}$ 它对于我们认识曲线的形状是有帮助的.



同理, 消去 y 可得 L 对 xOz 坐标面射影的射影柱面 $F_2(x,z)=0$, 而曲线 $\begin{cases} F_2(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 叫做 L 在 xOz 坐标面上的射影曲线;

例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z,$$

例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2+(z-2)^2=4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面,

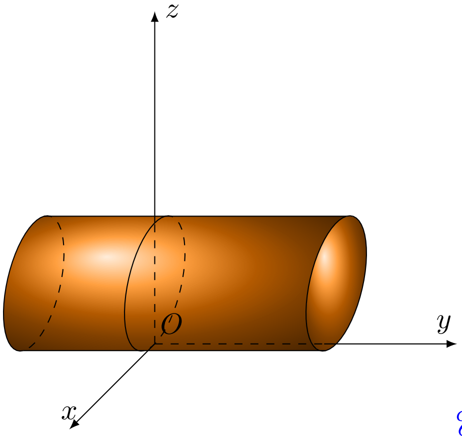
例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2+(z-2)^2=4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面,



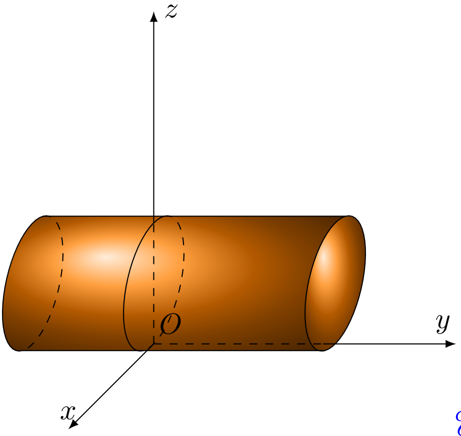
例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + z^2 + 4y = 4z, \\ x^2 + 3z^2 - 8y = 12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2 + z^2 = 4z, \qquad x^2 + 4y = 0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2 + (z-2)^2 = 4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面, 而后一个射影柱面是一个准线为 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2 = -4y$, 母线平行于 z 轴的抛物柱面,



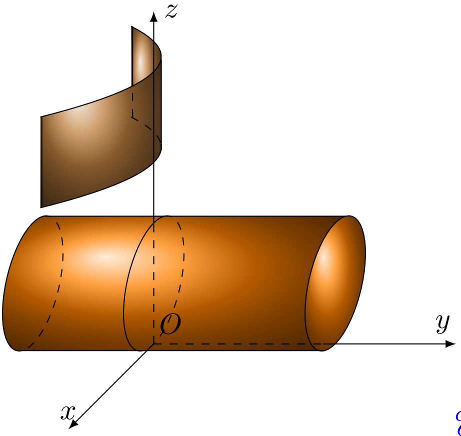
例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2+(z-2)^2=4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面, 而后一个射影柱面是一个准线为 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2=-4y$, 母线平行于 z 轴的抛物柱面,



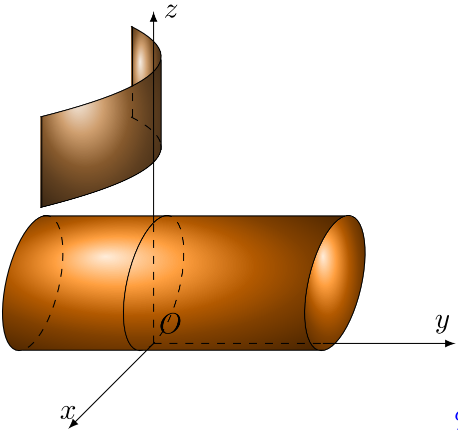
例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2+(z-2)^2=4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面, 而后一个射影柱面是一个准线为 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2=-4y$, 母线平行于 z 轴的抛物柱面, 因此曲线可以看成是这两个柱面的交线.



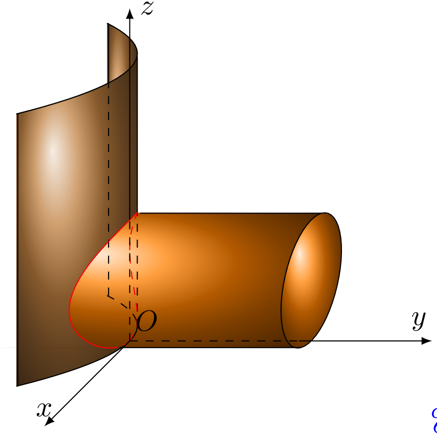
例 3

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z, \\ x^2+3z^2-8y=12z \end{cases}$ 对 xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面.

解 从曲线方程分别消去 y 及 z, 得

$$x^2+z^2=4z, \qquad x^2+4y=0.$$

前一个射影柱面是一个准线为 xOz 面上的圆 $x^2+(z-2)^2=4$, 母线平行于 y 轴的圆柱面, 而后一个射影柱面是一个准线为 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2=-4y$, 母线平行于 z 轴的抛物柱面, 因此曲线可以看成是这两个柱面的交线.



✍课堂练习: P 148, 习题 8

求下列空间曲线对三个坐标平面的射影柱面的方程.

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ z = x + 1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 + z^2 - 3yz - 2x + 3z - 3 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

课堂练习: P 148, 习题 8

求下列空间曲线对三个坐标平面的射影柱面的方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

答案: (1) $x^2+y^2-x-1=0$, $y^2+z^2-3z+1=0$, $x-z+1=0$;

课堂练习: P 148, 习题 8

求下列空间曲线对三个坐标平面的射影柱面的方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

答案: (1) $x^2+y^2-x-1=0$, $y^2+z^2-3z+1=0$, $x-z+1=0$;
(2) $x^2-2y^2-2x+2y+1=0$, $y-z+1=0$, $x^2-2z^2-2x+6z-3=0$.

课堂练习: P 148, 习题 8

求下列空间曲线对三个坐标平面的射影柱面的方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

答案: (1) $x^2+y^2-x-1=0$, $y^2+z^2-3z+1=0$, $x-z+1=0$;
(2) $x^2-2y^2-2x+2y+1=0$, $y-z+1=0$, $x^2-2z^2-2x+6z-3=0$.

下一节