第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.3 旋转曲面

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§4.3 旋转曲面

§4.3 旋转曲面

教学内容: 旋转曲面及其方程

§4.3 旋转曲面

教学内容: 旋转曲面及其方程

教学目的: 掌握旋转曲面的定义及其方程的求法

§4.3 旋转曲面

教学内容: 旋转曲面及其方程

教学目的: 掌握旋转曲面的定义及其方程的求法

教学重难点: 坐标平面曲线绕坐标轴旋转所得曲面的方程

☞ 旋转曲面的定义

☞ **旋转曲面的定义** 在空间, 一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面.

☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，

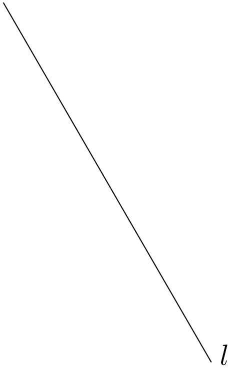
☞ **旋转曲面的定义** 在空间, 一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix), 定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation), 简称为轴.

☞ **旋转曲面的定义** 在空间, 一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix), 定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation), 简称为轴.

如图, 旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆, 这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线, 我们把它叫做纬圆或纬线.

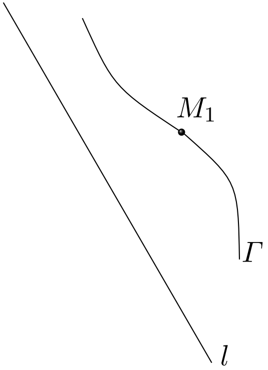
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴.

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线.



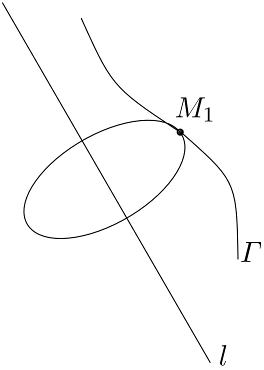
☞ **旋转曲面的定义** 在空间, 一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix), 定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation), 简称为轴.

如图, 旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆, 这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线, 我们把它叫做纬圆或纬线.



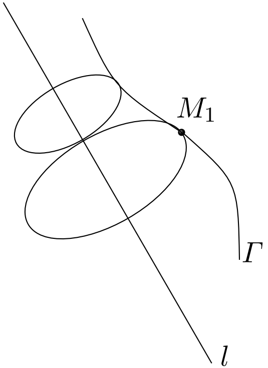
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴.

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线.



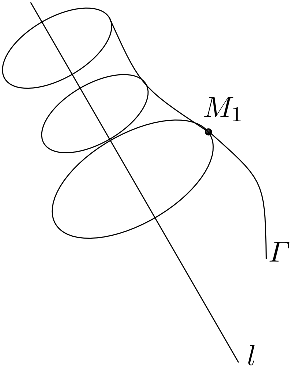
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面．曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴．

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线．



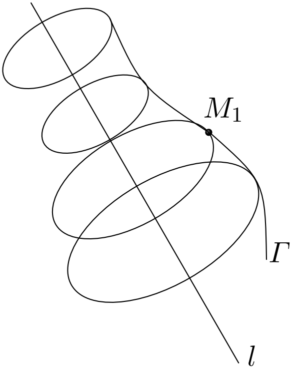
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴.

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线.



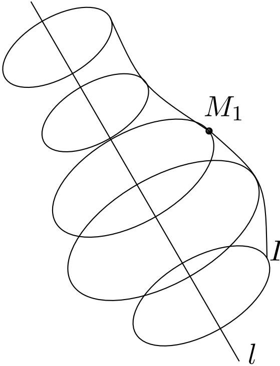
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面．曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴．

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线．



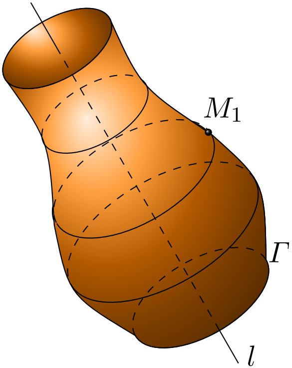
☞ **旋转曲面的定义** 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴.

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线.



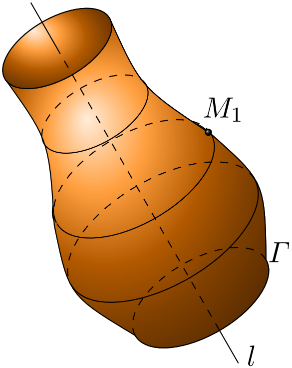
旋转曲面的定义 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution)，或称为回转曲面．曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix)，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation)，简称为轴．

如图，旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或纬线．



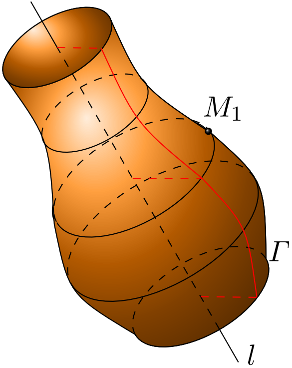
旋转曲面的定义 在空间, 一条曲线 $\varGamma$ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面. 曲线 $\varGamma$ 叫做旋转曲面的母线(generatrix), 定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation), 简称为轴.

如图, 旋转曲面的母线 $\varGamma$ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆, 这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线, 我们把它叫做纬圆或纬线. 在通过旋转轴 l 的平面上, 以 l 为界的每个半平面都与曲面交成一条曲线, 这些曲线显然在旋转中都能彼此重合, 这曲线叫做旋转面的经线.



旋转曲面的定义 在空间, 一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所生成的曲面叫做旋转曲面(surface of revolution), 或称为回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线(generatrix), 定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴(axis of rotation), 简称为轴.

如图, 旋转曲面的母线 Γ 上的任意一点 M_1 在旋转时形成一个圆, 这个圆也就是过 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线, 我们把它叫做纬圆或纬线. 在通过旋转轴 l 的平面上, 以 l 为界的每个半平面都与曲面交成一条曲线, 这些曲线显然在旋转中都能彼此重合, 这曲线叫做旋转面的经线.



☞ 旋转曲面的方程

旋转曲面的方程 在空间直角坐标系下, 设旋转曲面的母线为

$$\varGamma : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

旋转曲面的方程 在空间直角坐标系下, 设旋转曲面的母线为

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

旋转轴为直线

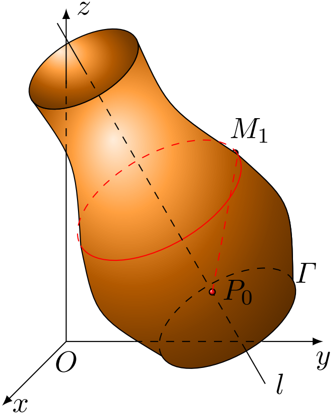
$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

☞ **旋转曲面的方程** 在空间直角坐标系下, 设旋转曲面的母线为

$$\varGamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

旋转轴为直线

$$l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$



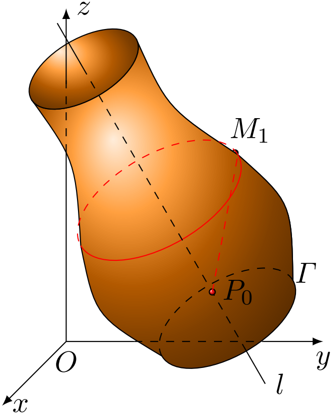
旋转曲面的方程 在空间直角坐标系下, 设旋转曲面的母线为

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

旋转轴为直线

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

这里 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为轴 l 上的一个定点, X,Y,Z 为 l 的方向数.



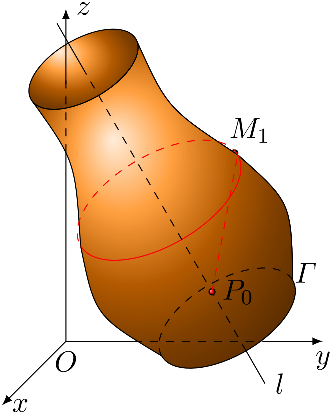
旋转曲面的方程 在空间直角坐标系下, 设旋转曲面的母线为

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

旋转轴为直线

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

这里 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为轴 l 上的一个定点, X,Y,Z 为 l 的方向数. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 P_0 为球心, $|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线, 所以过 M_1 的纬圆的方程为

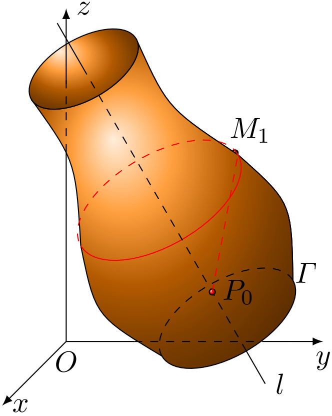


$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ \end{cases}$$

旋转轴为直线

$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

这里 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为轴 l 上的一个定点，X,Y,Z 为 l 的方向数. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线 $\varGamma$ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 P_0 为球心，$|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线，所以过 M_1 的纬圆的方程为

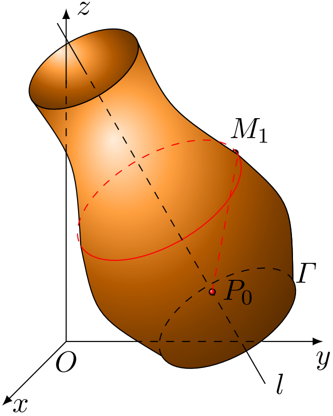


$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

旋转轴为直线

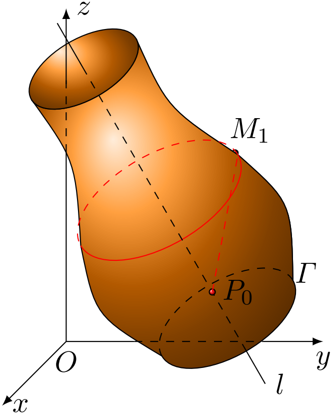
$$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z},$$

这里 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为轴 l 上的一个定点，X,Y,Z 为 l 的方向数. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线 $\varGamma$ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 P_0 为球心，$|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线，所以过 M_1 的纬圆的方程为



$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

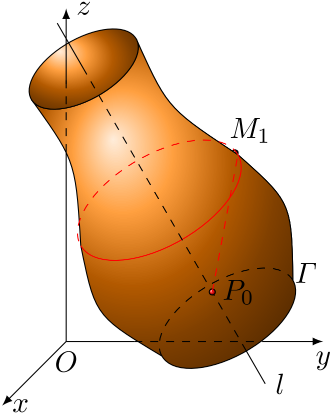
当点 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 就得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面.



设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 P_0 为球心, $|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线, 所以过 M_1 的纬圆的方程为

$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

当点 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 就得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面. 又由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 Γ 上, 所以又有

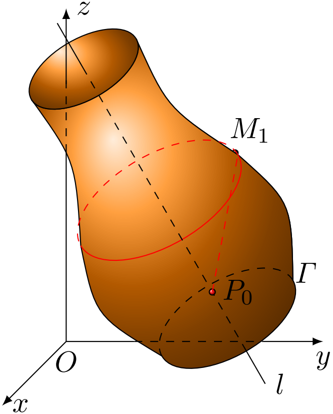


设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 P_0 为球心, $|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线, 所以过 M_1 的纬圆的方程为

$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

当点 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 就得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面. 又由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 Γ 上, 所以又有

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0, \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases}$$



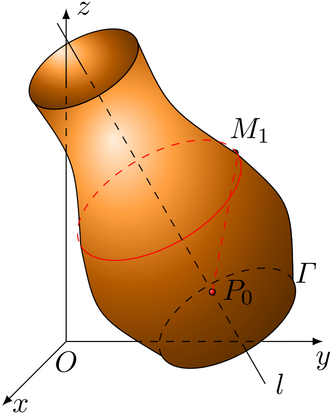
$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

当点 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 就得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面. 又由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 Γ 上, 所以又有

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0, \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases}$$

从以上方程中消去参数 x_1,y_1,z_1 最后得到一个三元方程

$$F(x,y,z)=0.$$



$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

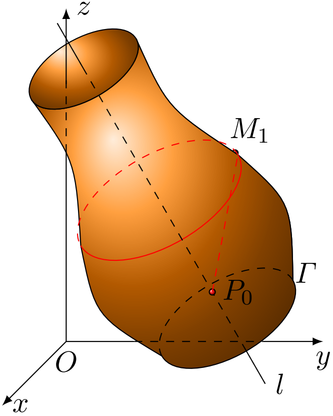
当点 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 就得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面. 又由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 Γ 上, 所以又有

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0, \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases}$$

从以上方程中消去参数 x_1,y_1,z_1 最后得到一个三元方程

$$F(x,y,z)=0.$$

这就是以 Γ 为母线, l 为轴的旋转曲面的方程.



例 1

求以直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

例 1

求以直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上的任意点, 因为旋转轴通过原点, 所以过 M_1 的纬圆方程是

例 1

求以直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上的任意点, 因为旋转轴通过原点, 所以过 M_1 的纬圆方程是

$$\begin{cases} (x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0, \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \end{cases}$$

例 1

求以直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上的任意点, 因为旋转轴通过原点, 所以过 M_1 的纬圆方程是

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0,\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2.\end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

例 1

求以直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上的任意点, 因为旋转轴通过原点, 所以过 M_1 的纬圆方程是

$$\begin{cases} (x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0, \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1=2y_1, z_1=1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$\begin{cases} (x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0, \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1=2y_1, z_1=1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$0 = x + y + z - x_1 - y_1 - z_1$$

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) + (z - z_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 - 1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$0 = x + y + z - x_1 - y_1 - z_1 = x + y + z - 3y_1 - 1$$

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) + (z - z_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 - 1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$0 = x + y + z - x_1 - y_1 - z_1 = x + y + z - 3y_1 - 1$$
$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}(x + y + z - 1),$$

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) + (z - z_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 - 1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$0 = x + y + z - x_1 - y_1 - z_1 = x + y + z - 3y_1 - 1$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}(x + y + z - 1),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) + (z - z_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 - 1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$0 = x + y + z - x_1 - y_1 - z_1 = x + y + z - 3y_1 - 1$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}(x + y + z - 1),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 5y_1^2 + 1$$

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) + (z - z_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \end{cases}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 - 1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$\begin{aligned}
0 &= x+y+z-x_1-y_1-z_1 = x+y+z-3y_1-1 \\
&\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}(x+y+z-1), \\
x^2+y^2+z^2 &= x_1^2+y_1^2+z_1^2 = 5y_1^2+1 \\
&\Rightarrow x^2+y^2+z^2-1 = 5y_1^2,
\end{aligned}$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1 = 2y_1, z_1 = 1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2,$$

$$0=x+y+z-x_1-y_1-z_1=x+y+z-3y_1-1$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{1}{3}(x+y+z-1),$$

$$x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2=5y_1^2+1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-1=5y_1^2,$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1=2y_1, z_1=1.$$

由此消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2,$$

即

$$2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz+yz)+5(x+y+z)-7=0.$$

由于 M_1 在母线上, 所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1=2y_1, z_1=1.$$

☞ 特殊旋转曲面的方程

☞ **特殊旋转曲面的方程** 旋转曲面的经线是平面曲线, 它总可以作为母线来产生旋转曲面.

☞ **特殊旋转曲面的方程** 旋转曲面的经线是平面曲线, 它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时, 把母线所在平面取作坐标面, 而旋转轴取作坐标轴, 这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线, 它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时, 把母线所在平面取作坐标面, 而旋转轴取作坐标轴, 这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图, 设旋转曲面的母线为 $\Gamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$

特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线, 它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时, 把母线所在平面取作坐标面, 而旋转轴取作坐标轴, 这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

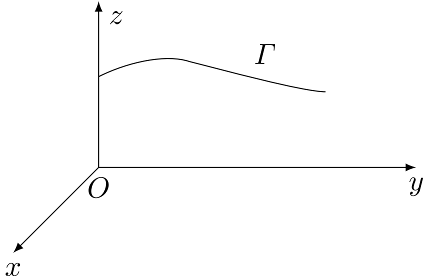
如图, 设旋转曲面的母线为$\Gamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 旋转轴为y轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

☞ **特殊旋转曲面的方程** 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为$\varGamma:\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0.\end{cases}$ 旋转轴为y轴

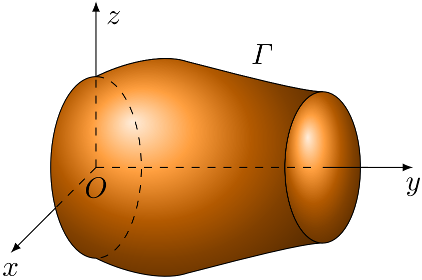
$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$



特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为$\varGamma:\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0.\end{cases}$ 旋转轴为y轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

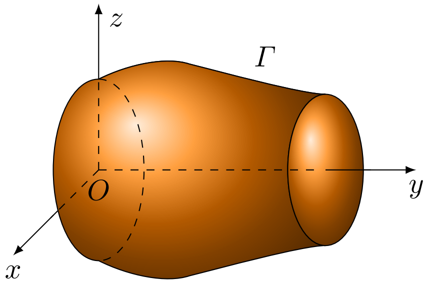


特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为 $\varGamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 旋转轴为 y 轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

如果 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为母线 $\varGamma$ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为

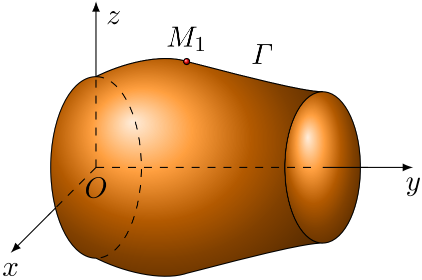


☞ **特殊旋转曲面的方程** 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为 $\Gamma : \begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 旋转轴为 y 轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

如果 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为

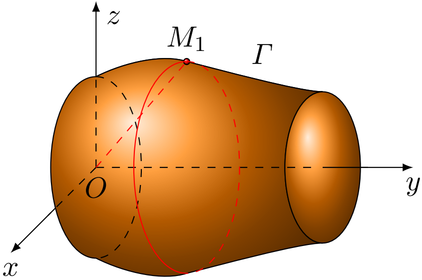


特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为$\Gamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 旋转轴为y轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

如果 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为



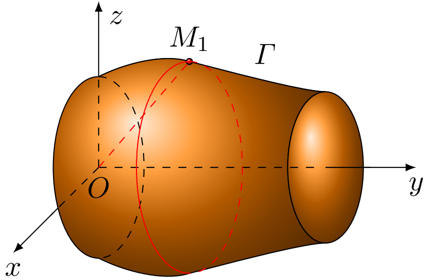
特殊旋转曲面的方程 旋转曲面的经线是平面曲线，它总可以作为母线来产生旋转曲面. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，把母线所在平面取作坐标面，而旋转轴取作坐标轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

如图，设旋转曲面的母线为 $\Gamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 旋转轴为 y 轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

如果 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y-y_1=0, \\ x^2+y^2+z^2=y_1^2+z_1^2, \end{cases}$$

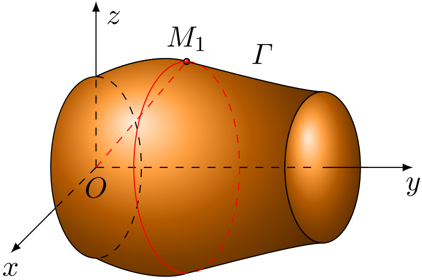


$$F(y_1, z_1) = 0.$$

如果 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y - y_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2, \end{cases}$$

且有



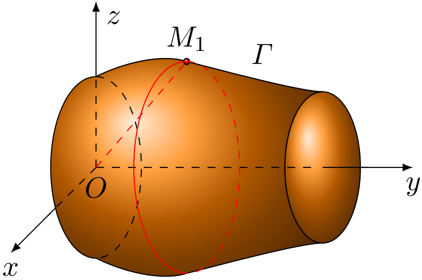
$$F(y_1, z_1) = 0.$$

从以上三式消去参数 y_1, z_1 得所求旋转曲面的方程为

如果 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y - y_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2, \end{cases}$$

且有



$$F(y_1, z_1) = 0.$$

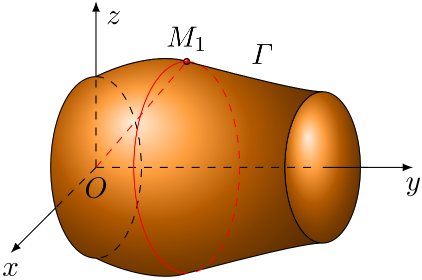
从以上三式消去参数 y_1, z_1 得所求旋转曲面的方程为

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

如果 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y - y_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2, \end{cases}$$

且有



$$F(y_1, z_1) = 0.$$

从以上三式消去参数 y_1, z_1 得所求旋转曲面的方程为

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

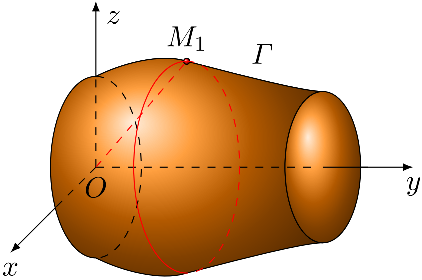
同样, 曲线 Γ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面的方程是

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

如果 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为母线 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y - y_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2, \end{cases}$$

且有



对于其他坐标面的曲线，绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，其方程可以类似地求出，这样我们就得出如下的规律:

对于其他坐标面的曲线，绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，其方程可以类似地求出，这样我们就得出如下的规律:

结论： 当坐标平面上的曲线 Γ 绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转时，为了求出该旋转曲面的方程，

对于其他坐标面的曲线，绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，其方程可以类似地求出，这样我们就得出如下的规律:

结论: 当坐标平面上的曲线 Γ 绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转时，为了求出该旋转曲面的方程，只要将曲线 Γ 在坐标面里的方程保留和旋转轴同名的坐标，

对于其他坐标面的曲线, 绕坐标轴旋转所得的旋转曲面, 其方程可以类似地求出, 这样我们就得出如下的规律:

结论: 当坐标平面上的曲线 Γ 绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转时, 为了求出该旋转曲面的方程, 只要将曲线 Γ 在坐标面里的方程保留和旋转轴同名的坐标, 同时以其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一个坐标.

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴，同名坐标就是 x，

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴，同名坐标就是 x，在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变，用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y，

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转, 求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴, 同名坐标就是 x, 在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变, 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y, 便得将椭圆 Γ 绕其长轴旋转的曲面方程为

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转, 求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴, 同名坐标就是 x, 在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变, 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y, 便得将椭圆 Γ 绕其长轴旋转的曲面方程为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.}$$

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴，同名坐标就是 x，在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变，用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y，便得将椭圆 Γ 绕其长轴旋转的曲面方程为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.}$$

这种旋转曲面叫做长形旋转椭球面.

例 2

将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),\\ z=0\end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴，同名坐标就是 x，在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变，用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y，便得将椭圆 Γ 绕其长轴旋转的曲面方程为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.}$$

这种旋转曲面叫做长形旋转椭球面. 同样，可得 Γ 绕其短轴旋转的曲面方程为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.}$$

例 2

将椭圆 $\Gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b), \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转, 求所得旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴是 x 轴, 同名坐标就是 x, 在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留 x 不变, 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 替代 y, 便得将椭圆 Γ 绕其长轴旋转的曲面方程为

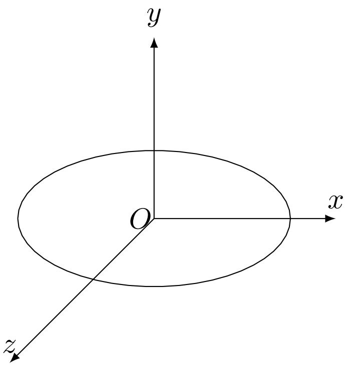
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.}$$

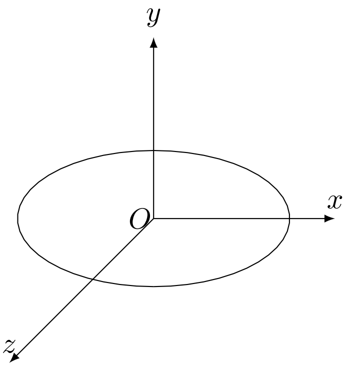
这种旋转曲面叫做长形旋转椭球面. 同样, 可得 Γ 绕其短轴旋转的曲面方程为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.}$$

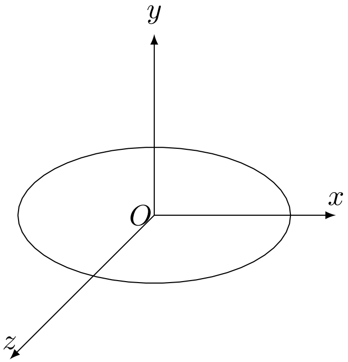
这种旋转曲面叫做扁形旋转椭球面.

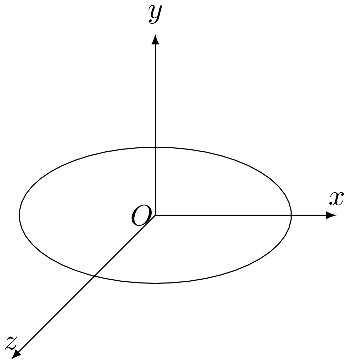
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1(a>b) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1(a>b)$$



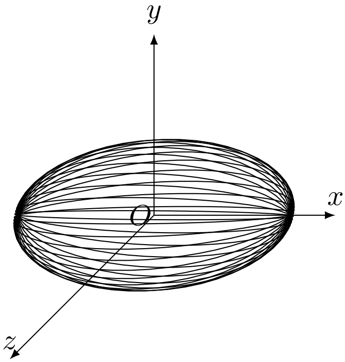


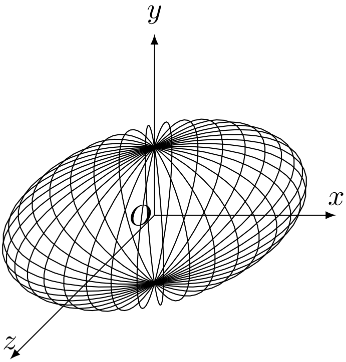
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1(a>b) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1(a>b)$$



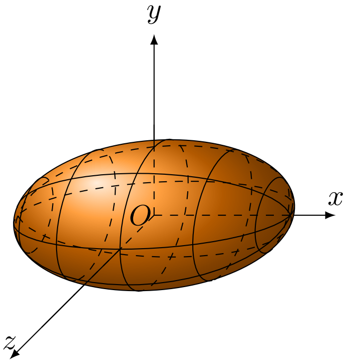


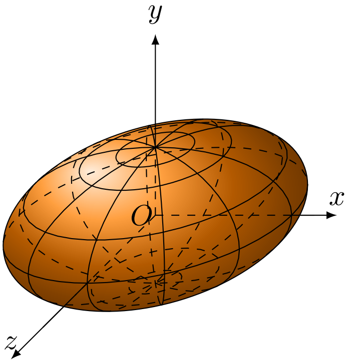
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1(a>b) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1(a>b)$$





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1(a>b) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1(a>b)$$





例 3

将双曲线

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

分别绕虚轴(即 z 轴)与实轴(即 y 轴)旋转, 所得旋转曲面的方程分别为

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \text{ 与 } \boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1};$$

例 3

将双曲线

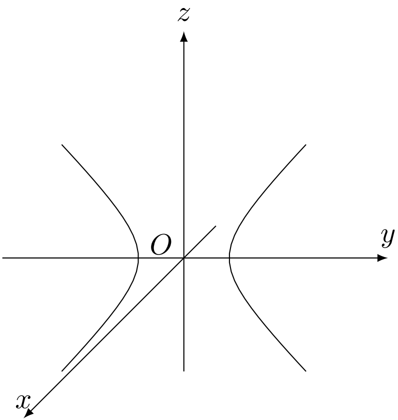
$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

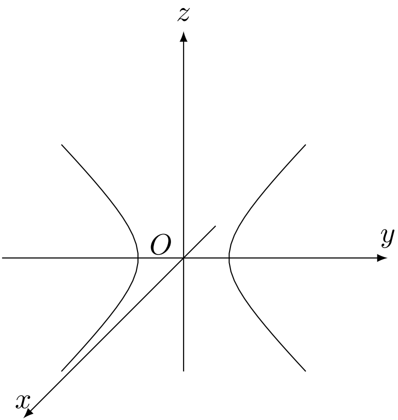
分别绕虚轴(即 z 轴)与实轴(即 y 轴)旋转，所得旋转曲面的方程分别为

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad 与 \quad \boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;}$$

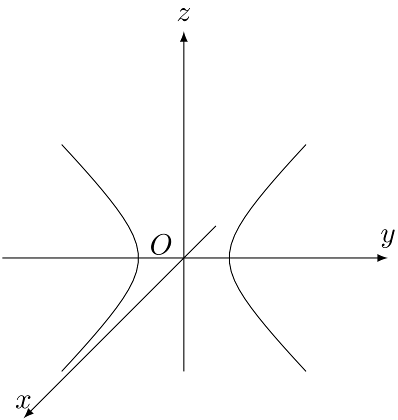
以上这两个曲面分别叫做单叶旋转双曲面与双叶旋转双曲面.

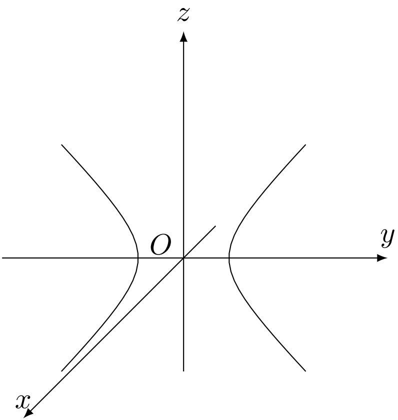
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



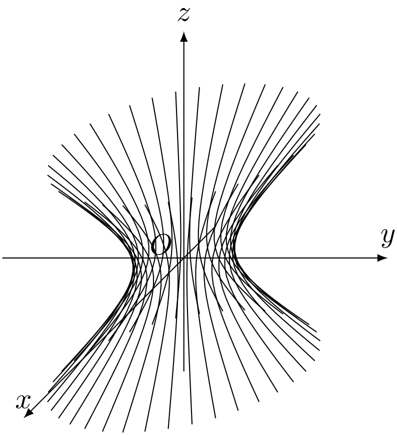


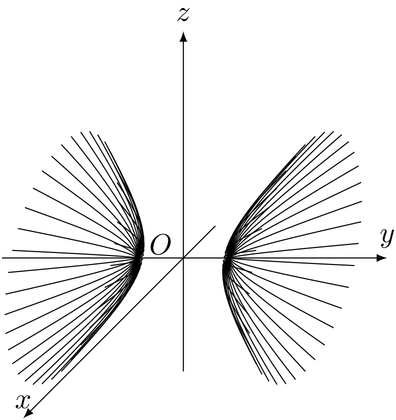
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





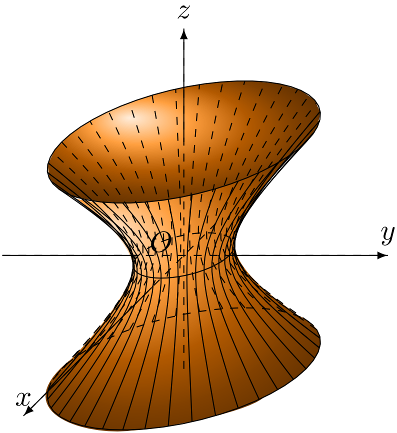
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

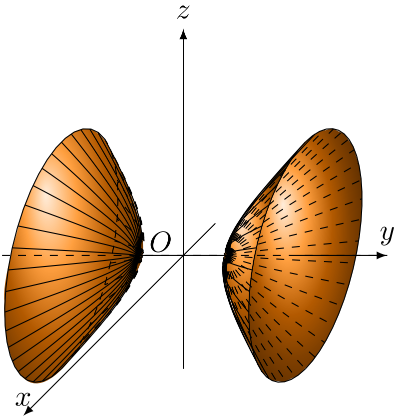




$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



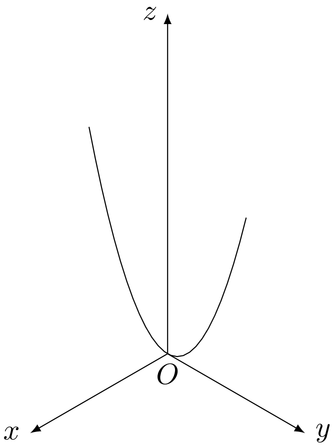


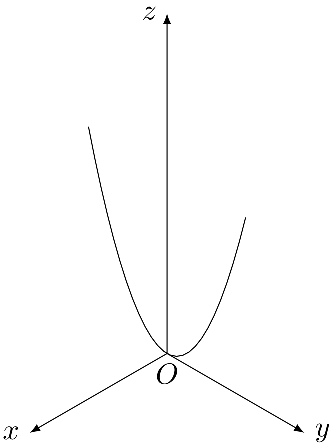
例 4

将抛物线 $\Gamma : \begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕它的对称轴旋转的旋转曲面方程为

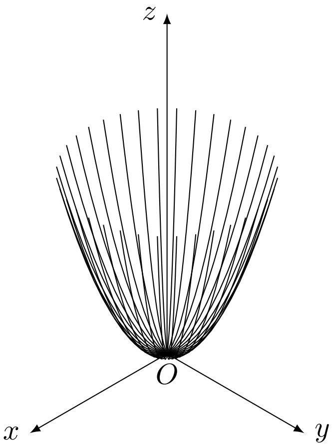
$$\boxed{x^2 + y^2 = 2pz,}$$

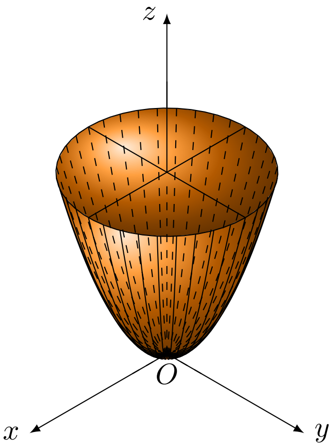
并称之为旋转抛物面.


z
O
x
y



z
O
x
y


z
O
x
y


z
O
x
y

例 5

将圆 $\Gamma : \begin{cases} (y-b)^2 + z^2 = a^2 \quad (b > a > 0), \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转，求所得的旋转曲面方程.

例 5

将圆 $\Gamma:\begin{cases}(y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0),\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转，求所得的旋转曲面方程.

解 因为绕 z 轴旋转，所以在方程 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变，而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入，

例 5

将圆 $\Gamma : \begin{cases} (y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0), \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转, 求所得的旋转曲面方程.

解 因为绕 z 轴旋转, 所以在方程 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变, 而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入, 就得将圆 Γ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

例 5

将圆 $\Gamma:\begin{cases}(y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0),\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转, 求所得的旋转曲面方程.

解 因为绕 z 轴旋转, 所以在方程 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变, 而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入, 就得将圆 Γ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

即 $x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{x^2+y^2}$,

例 5

将圆 $\Gamma:\begin{cases}(y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0),\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转, 求所得的旋转曲面方程.

解 因为绕 z 轴旋转, 所以在方程 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变, 而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入, 就得将圆 Γ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

即 $x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{x^2+y^2}$, 或

$$\boxed{(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2).}$$

例 5

将圆 $\Gamma: \begin{cases} (y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0), \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转, 求所得的旋转曲面方程.

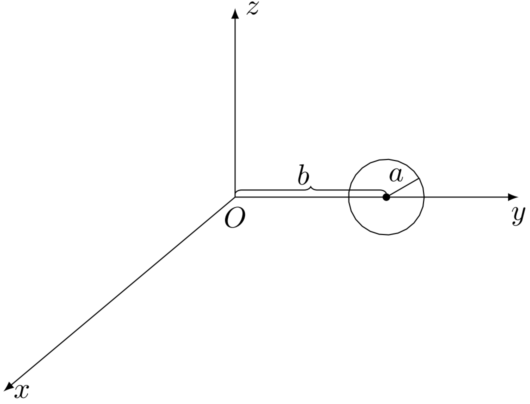
解 因为绕 z 轴旋转, 所以在方程 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变, 而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入, 就得将圆 Γ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

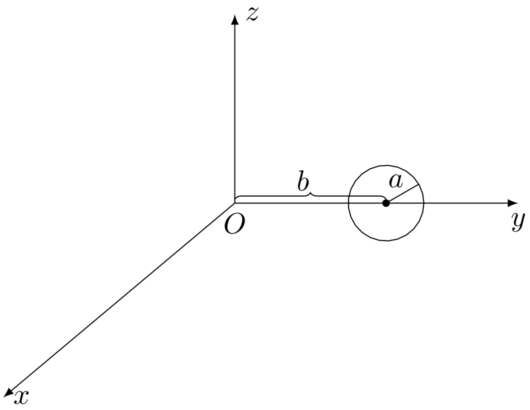
$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

即 $x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{x^2+y^2}$, 或

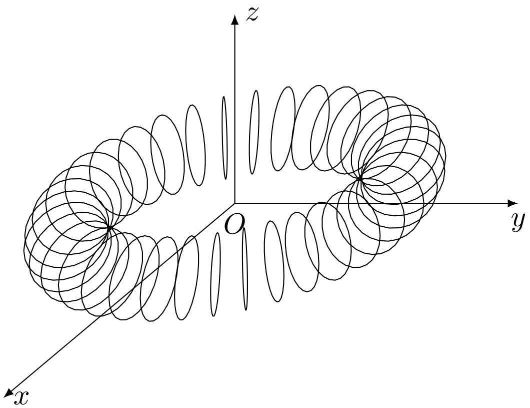
$$\boxed{(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2).}$$

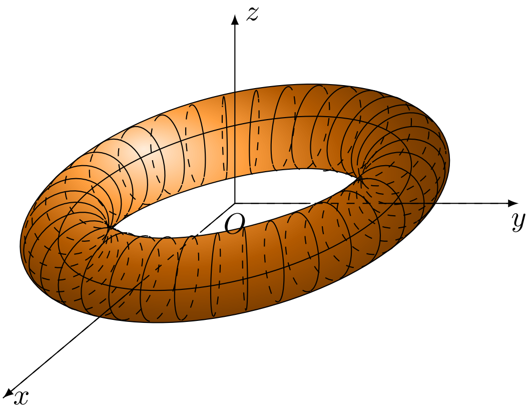
这样的曲面叫做环面(torus), 它的形状像救生圈.


z
b
a
O
y
x



z
b
a
O
y
x


z
O
y
x


z
O
y
x

✍思考: 一曲面既是柱面, 又是旋转曲面, 它是什么曲面? 若既是锥面, 又是旋转曲面, 它是什么曲面?

✍思考：一曲面既是柱面，又是旋转曲面，它是什么曲面？若既是锥面，又是旋转曲面，它是什么曲面？

下一节