第三章 平面与空间直线

§3.4 空间直线的方程

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§3.4 空间直线的方程

§3.4 空间直线的方程

教学内容: 直线方程各种形式及其相互关系

§3.4 空间直线的方程

教学内容: 直线方程各种形式及其相互关系

教学目的: 掌握直线方程的推导,会用几何条件求直线方程

§3.4 空间直线的方程

教学内容: 直线方程各种形式及其相互关系

教学目的: 掌握直线方程的推导,会用几何条件求直线方程

教学重难点: 直线的标准方程与一般方程

由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

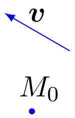
给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$,

由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$,

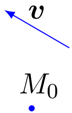
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$,



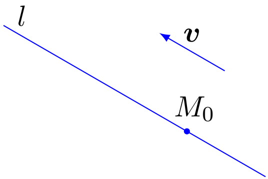
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定,



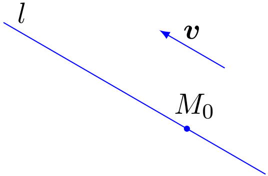
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定,



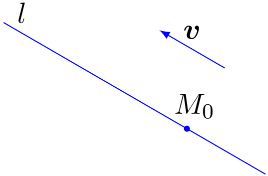
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量.



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

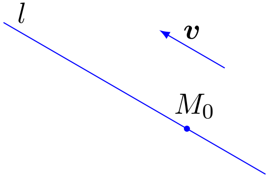
给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

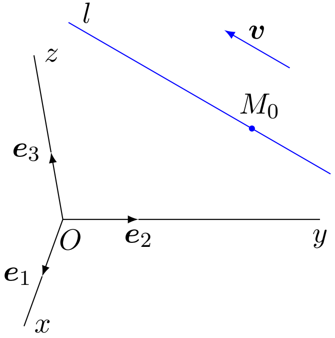
取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

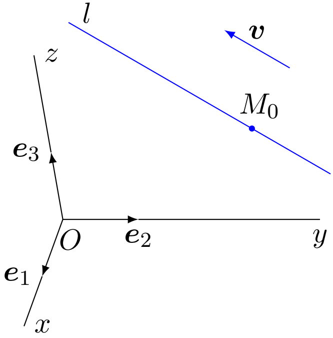
取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

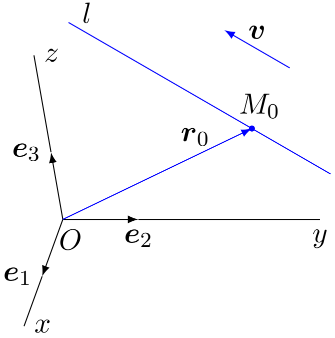
取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

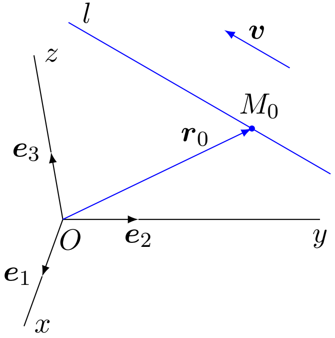
取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

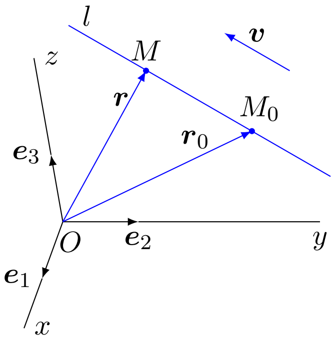
取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

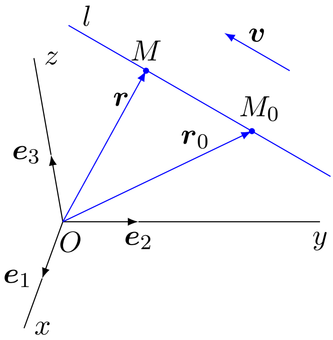
取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$,



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} /\!/ \boldsymbol{v}$,

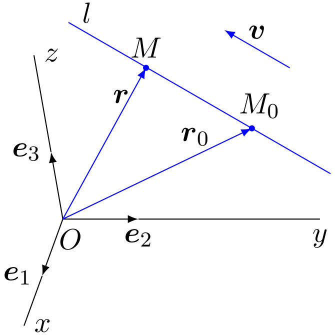


由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v}$$

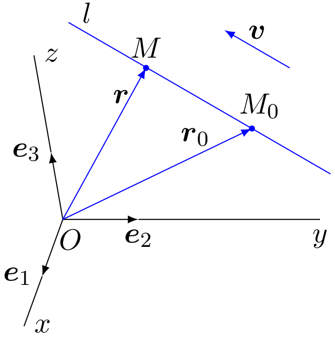


由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \,/\!/\, \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$



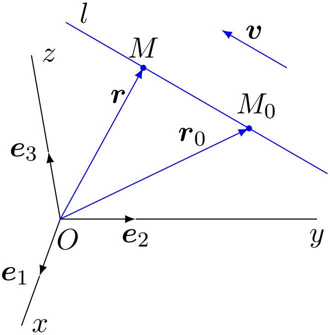
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$



由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

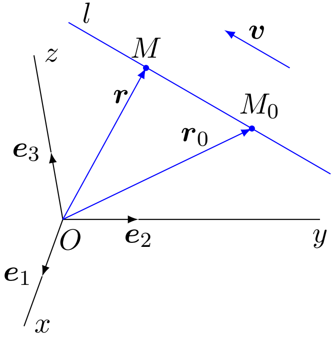
给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$

式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数.



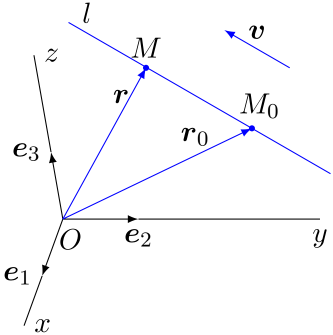
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$



式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数. 令 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$,

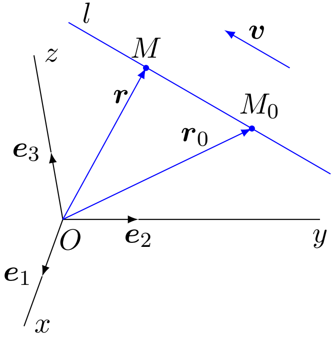
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \tag{1}$$



式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数. 令 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 那么

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0,y_0,z_0\},$$

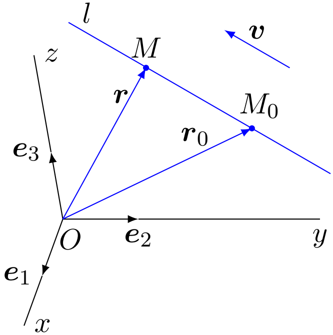
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$



式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数. 令 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 那么

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}, \quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$

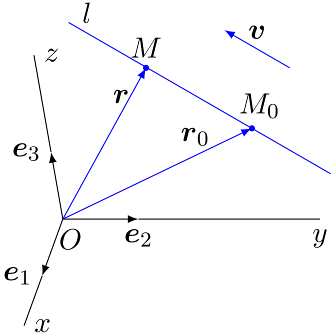
由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

给定空间一点 M_0 与向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 过 M_0 且与 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 被唯一确定, $\boldsymbol{v}$ 叫做 l 的方向向量. 任一与 l 平行的非零向量都可作为 l 的方向向量.

取仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 并设 M_0 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, l 上任意点 M 的向径 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 则点 M 在 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 即

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$

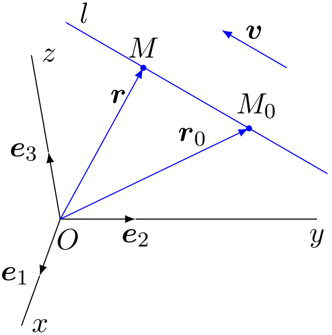


式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数. 令 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 那么

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0,y_0,z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x,y,z\},$$

令 $\boldsymbol{v} = \{X,Y,Z\}$, 则由式(1)得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}} \qquad (2)$$



$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},} \qquad (1)$$

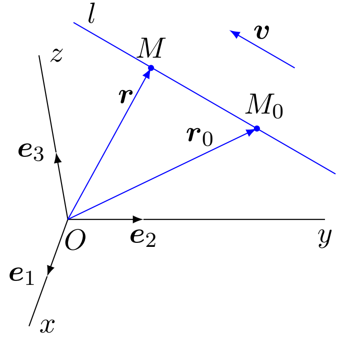
式(1)叫做直线 l 的向量式参数方程, 其中 t 为参数. 令 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, 那么

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\},$$

令 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 则由式(1)得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}} \tag{2}$$

式(2)叫做 l 的坐标式参数方程.

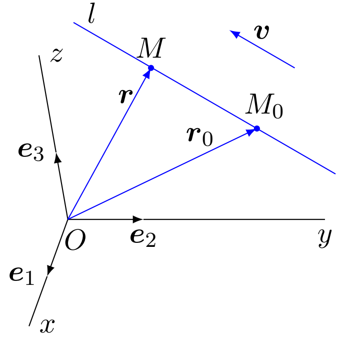


$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\},$$

令 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 则由式(1)得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}} \tag{2}$$

式(2)叫做 l 的坐标式参数方程. 式(2)中消去 t, 得



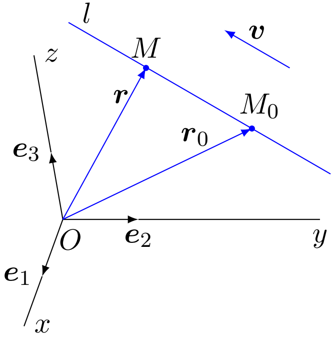
$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\},$$

令 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 则由式(1)得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}} \tag{2}$$

式(2)叫做 l 的坐标式参数方程. 式(2)中消去 t, 得

$$\boxed{\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}.} \tag{3}$$



$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\},$$

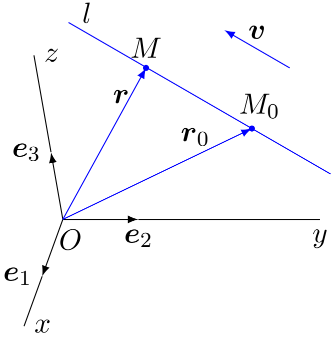
令 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 则由式(1)得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}} \qquad (2)$$

式(2)叫做 l 的坐标式参数方程. 式(2)中消去 t, 得

$$\boxed{\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}.} \qquad (3)$$

式(3)叫做 l 的对称式方程或标准方程.



$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\},$$

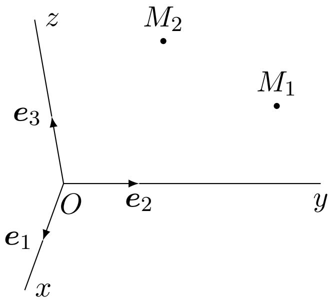
令 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 则由式(1)得

例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

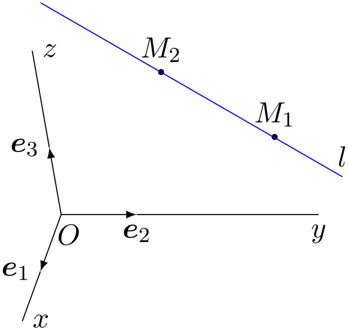
例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.



例 1

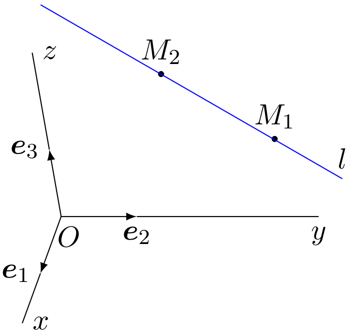
求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.



例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

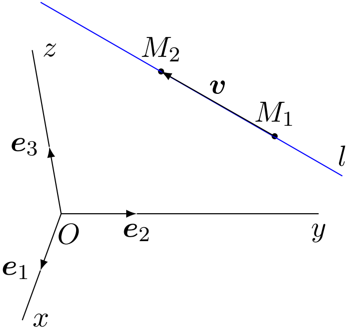
解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点,



例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

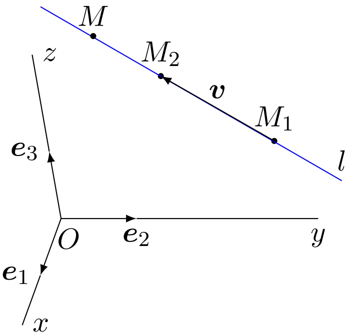
解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点,



例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点,

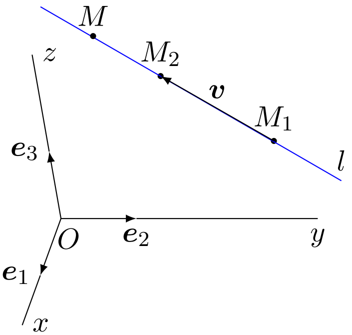


例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x,y,z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

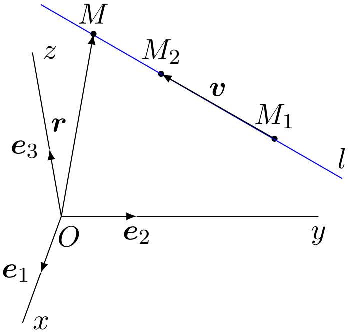


例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

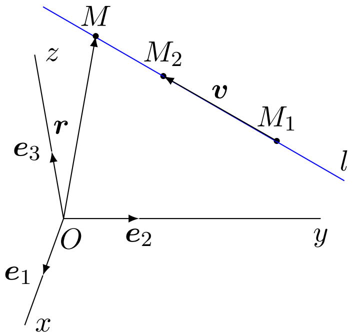


例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$



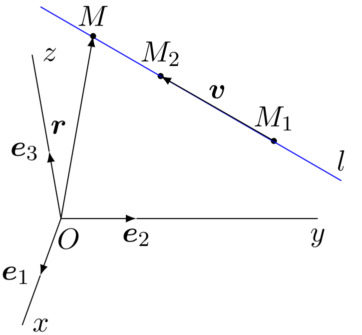
例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} \qquad (i = 1, 2),$$

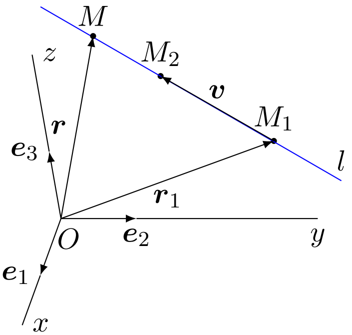


例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$
$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} \qquad (i = 1, 2),$$

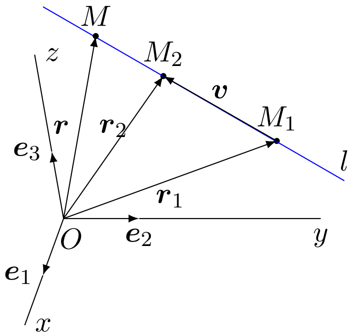


例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$
$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} \qquad (i = 1, 2),$$



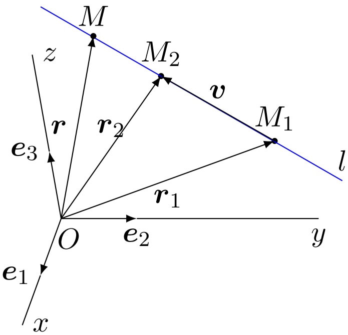
例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2),$$



例 1

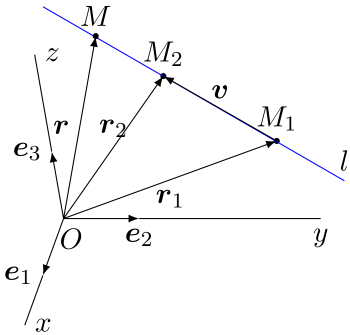
求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2),$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$



例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

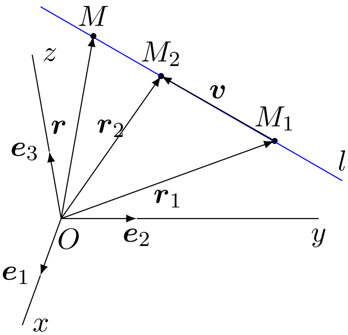
解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2),$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$



例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

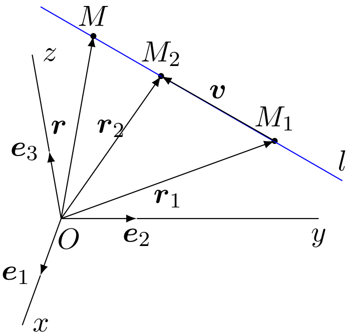
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2),$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}$$



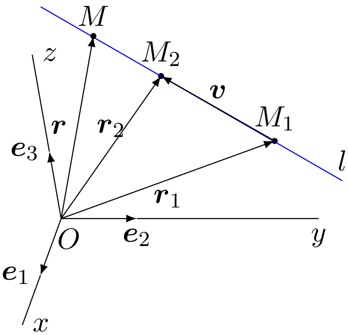
例 1

求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 如图, 取 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 为直线 l 的方向向量, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 l 上任意点, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2),$$



$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}$$

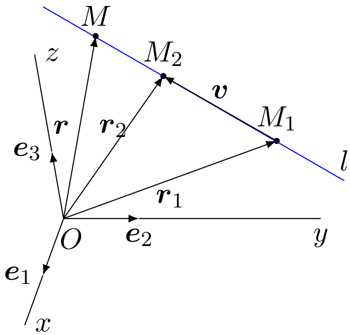
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.}$$

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$
$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2),$$

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$
$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

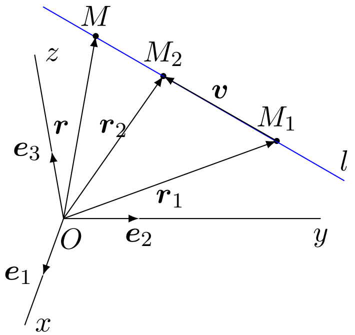
$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}$$



$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \\ z=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.}$$

以上三个直线方程分别称为直线 l 的向量式参数方程、坐标式参数方程及对称式方程，统称两点式方程.



$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2),$$

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1+t(y_2-y_1)\\ z=z_1+t(z_2-z_1)\end{cases}}$$

在直角坐标系下, 直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

在直角坐标系下，直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}^0$,

在直角坐标系下，直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}^0$，或

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

在直角坐标系下，直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}^0$，或

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

在直角坐标系下，直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}^0$，或

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cos\beta, \\ z=z_0+t\cos\gamma, \end{cases}$$

直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

此时

$$|t|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=|\overrightarrow{MM_0}|,$$

在直角坐标系下, 直线的方向向量常常取单位向量

$$\boldsymbol{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}^0$, 或

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$$

此时

$$|t| = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = |\overrightarrow{MM_0}|,$$

故参数 t 的绝对值恰好是直线 l 上两点 M_0 与 M 间的距离.

直线的方向向量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别叫直线的方向角与方向余弦;

直线的方向向量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别叫直线的方向角与方向余弦; 方向向量的坐标 X, Y, Z 或与它成比例的一组数 $l, m, n (l : m : n = X : Y : Z)$ 叫做直线的方向数.

直线的方向向量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别叫直线的方向角与方向余弦; 方向向量的坐标 X, Y, Z 或与它成比例的一组数 $l, m, n(l : m : n = X : Y : Z)$ 叫做直线的方向数.

由于与直线共线的非零向量均可作为直线的方向向量, 因此 $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ 以及

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta, \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma,$$

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦.

直线的方向向量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别叫直线的方向角与方向余弦; 方向向量的坐标 X, Y, Z 或与它成比例的一组数 $l, m, n(l : m : n = X : Y : Z)$ 叫做直线的方向数.

由于与直线共线的非零向量均可作为直线的方向向量, 因此 $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ 以及

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta, \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma,$$

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{l}{k}, \quad \cos\beta = \frac{m}{k}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{k}}$$

直线的方向向量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别叫直线的方向角与方向余弦; 方向向量的坐标 X, Y, Z 或与它成比例的一组数 $l, m, n(l : m : n = X : Y : Z)$ 叫做直线的方向数.

由于与直线共线的非零向量均可作为直线的方向向量, 因此 $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ 以及

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta, \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma,$$

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{l}{k}, \quad \cos\beta = \frac{m}{k}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{k}}$$

或

$$\boxed{\cos\alpha = -\frac{l}{k}, \quad \cos\beta = -\frac{m}{k}, \quad \cos\gamma = -\frac{n}{k}.}$$

$$k=\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta,\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma,$$

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{l}{k},\quad \cos\beta=\frac{m}{k},\quad \cos\gamma=\frac{n}{k}}$$

或

$$\boxed{\cos\alpha=-\frac{l}{k},\quad \cos\beta=-\frac{m}{k},\quad \cos\gamma=-\frac{n}{k}.}$$

其中

$$k=\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

由于这里所讨论的直线不是有向直线, 而且两非零向量 $\{X, Y, Z\}$ 与 $\{X', Y', Z'\}$ 共线的充要条件为 $X:Y:Z=X':Y':Z'$,

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \cos(\pi-\beta)=-\cos\beta, \cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma,$$

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{l}{k}, \quad \cos\beta=\frac{m}{k}, \quad \cos\gamma=\frac{n}{k}}$$

或

$$\boxed{\cos\alpha=-\frac{l}{k}, \quad \cos\beta=-\frac{m}{k}, \quad \cos\gamma=-\frac{n}{k}.}$$

其中

$$k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

由于这里所讨论的直线不是有向直线, 而且两非零向量 $\{X, Y, Z\}$ 与 $\{X', Y', Z'\}$ 共线的充要条件为 $X : Y : Z = X' : Y' : Z'$, 所以我们将用 $X : Y : Z$ 来表示与非零向量 $\{X, Y, Z\}$ 共线的直线的方向(数);

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{l}{k}, \quad \cos\beta = \frac{m}{k}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{k}}$$

或

$$\boxed{\cos\alpha = -\frac{l}{k}, \quad \cos\beta = -\frac{m}{k}, \quad \cos\gamma = -\frac{n}{k}.}$$

其中

$$k=\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

由于这里所讨论的直线不是有向直线, 而且两非零向量 $\{X,Y,Z\}$ 与 $\{X',Y',Z'\}$ 共线的充要条件为 $X:Y:Z=X':Y':Z'$, 所以我们将用 $X:Y:Z$ 来表示与非零向量 $\{X,Y,Z\}$ 共线的直线的方向(数); 同样, 在平面上用 $X:Y$ 表示与向量 $\{X,Y\}$ 共线的直线的方向(数).

也可以分别看做是直线的方向角与方向余弦. 显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{l}{k},\quad \cos\beta=\frac{m}{k},\quad \cos\gamma=\frac{n}{k}}$$

或

$$\boxed{\cos\alpha=-\frac{l}{k},\quad \cos\beta=-\frac{m}{k},\quad \cos\gamma=-\frac{n}{k}.}$$

其中

✍课堂练习: P 119, 习题 1

求下列各直线的方程.

(3) 通过点 $M(1,-5,3)$ 且与 x, y, z 三轴分别成角 $60°, 45°, 120°$ 的直线;

(4) 通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线.

课堂练习: P 119, 习题 1

求下列各直线的方程.

(3) 通过点 $M(1,-5,3)$ 且与 x, y, z 三轴分别成角 $60°, 45°, 120°$ 的直线;

(4) 通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线.

答案: (3) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$;

✍课堂练习: P 119, 习题 1

求下列各直线的方程.
(3) 通过点 $M(1,-5,3)$ 且与 x,y,z 三轴分别成角 $60°, 45°, 120°$ 的直线;
(4) 通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线.

答案: (3) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$;
(4) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

❒ 直线的一般方程

❒ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \quad \end{array} \right.} \qquad (*)$$

❒ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \qquad (*)$$

❒ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \qquad (*)$$

若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$,

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (*)$$

若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零,

❒ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \qquad (*)$$

若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

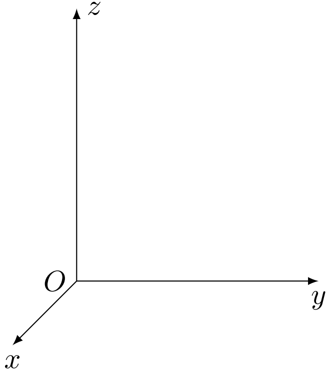
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l.

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

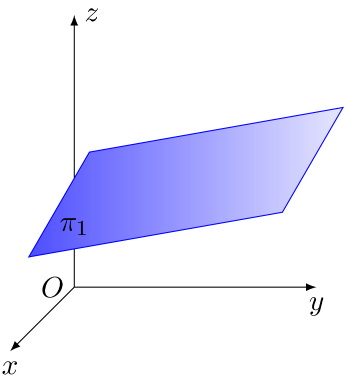
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l.

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

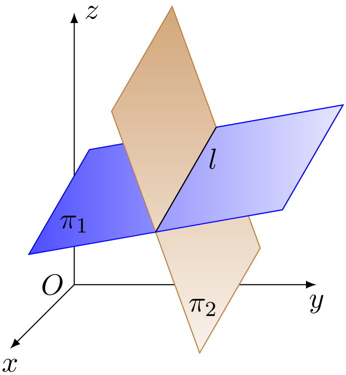
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l.

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \qquad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

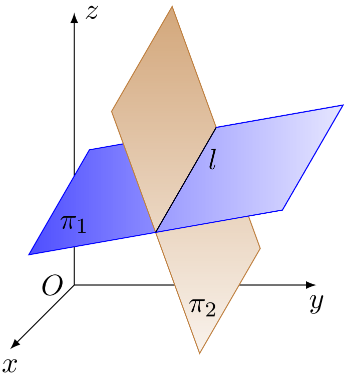
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l.

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

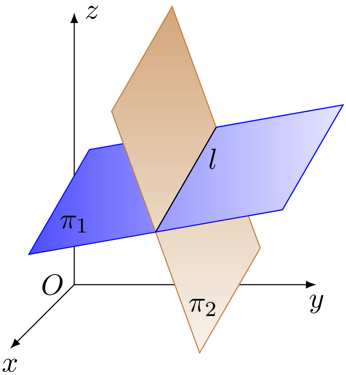
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l. 因为 l 上的任一点同在这两个平面上, 所以它们的坐标满足方程组$(*)$;

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

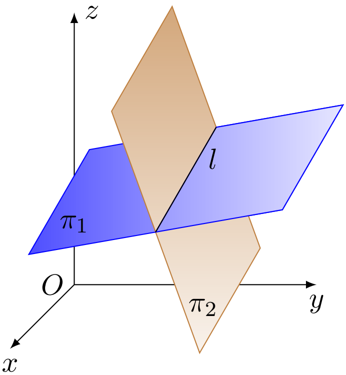
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l. 因为 l 上的任一点同在这两个平面上, 所以它们的坐标满足方程组$(*)$; 反过来, 满足方程组$(*)$的点同在平面 π_1, π_2 上, 因而在直线 l 上.

❐ 直线的一般方程

设两个平面 π_1, π_2 的方程组成方程组

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (*)$$



若 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, 即上面的方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零, 那么平面 π_1, π_2 相交, 它们的交线设为直线 l. 因为 l 上的任一点同在这两个平面上, 所以它们的坐标满足方程组$(*)$; 反过来, 满足方程组$(*)$的点同在平面 π_1, π_2 上, 因而在直线 l 上. 因此方程组$(*)$表示直线 l 的方程, 我们把它叫做直线的一般方程.

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形.

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式.

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X,Y,Z 不全为零(不妨设 $Z\neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z},\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z},\end{cases}$$

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X, Y, Z 不全为零(不妨设 $Z\neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z},\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z},\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}x=az+c,\\ y=bz+d,\end{cases}$$

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X, Y, Z 不全为零(不妨设 $Z\neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z},\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z},\end{array}\right.$$

整理得

$$\left\{\begin{array}{l}x=az+c,\\ y=bz+d,\end{array}\right.$$

其中 $a=\dfrac{X}{Z}$,

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X, Y, Z 不全为零(不妨设 $Z \neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z}, \\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d, \end{cases}$$

其中 $a=\dfrac{X}{Z}, b=\dfrac{Y}{Z},$

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X, Y, Z 不全为零(不妨设 $Z \neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z}, \\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d, \end{cases}$$

其中 $a=\dfrac{X}{Z}, b=\dfrac{Y}{Z}, c=x_0-\dfrac{X}{Z}z_0,$

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X,Y,Z 不全为零(不妨设 $Z\neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z},\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z},\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}x=az+c,\\ y=bz+d,\end{cases}$$

其中 $a=\dfrac{X}{Z},b=\dfrac{Y}{Z},c=x_0-\dfrac{X}{Z}z_0,d=y_0-\dfrac{Y}{Z}z_0.$

直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

也是一般方程的特殊情形. 事实上, 我们总可以把标准方程表示成一般方程的形式. 当 X,Y,Z 不全为零(不妨设 $Z\neq 0$)时, 标准方程可改成

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z},\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z},\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}x=az+c,\\ y=bz+d,\end{cases}$$

其中 $a=\dfrac{X}{Z},b=\dfrac{Y}{Z},c=x_0-\dfrac{X}{Z}z_0,d=y_0-\dfrac{Y}{Z}z_0$. 显然上式是一种特殊的一般方程.

方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线,

方程

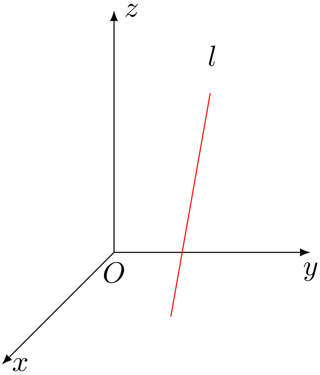
$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线, 而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图),

方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

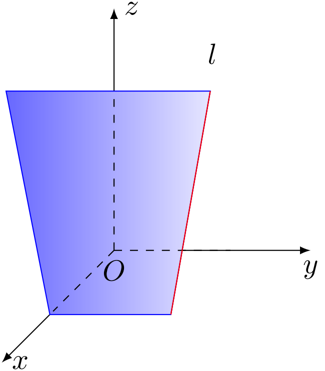
表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线，而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图)，



方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

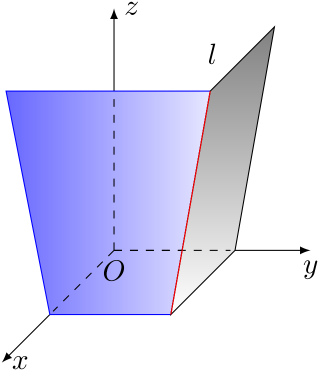
表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线, 而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图),



方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

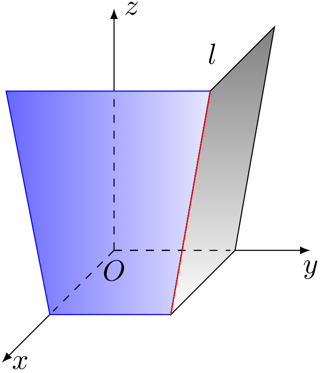
表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线, 而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图),



方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

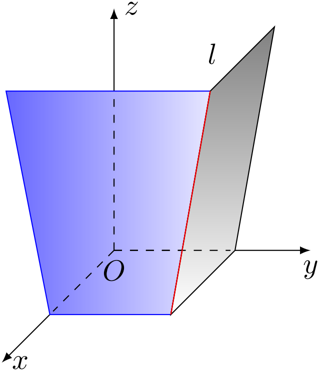
表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线，而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图)，在直角坐标系下它们又分别垂直于坐标面 xOz 与 yOz，



方程

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

表示的直线 l 可以看成是用 $\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}$ 中的两个方程表示的两个平面的交线，而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面(如图)，在直角坐标系下它们又分别垂直于坐标面 xOz 与 yOz，我们把



$$\boxed{\begin{cases} x=az+c, \\ y=bz+d \end{cases}}$$

叫做直线 l 的射影式方程.

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式.

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ \end{cases}$$

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

此即

$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}\perp\{A_1, B_1, C_1\}$,

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

此即

$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}\perp\{A_1, B_1, C_1\}, \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}\perp\{A_2, B_2, C_2\}$,

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0,y_0,z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0 \end{cases}$$

此即

$\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\perp\{A_1,B_1,C_1\},\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\perp\{A_2,B_2,C_2\}$,

从而 $\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\,/\!\!/\,\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$,

反过来, 直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

也总可以化为标准方程的形式. 方法是: 直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) (即方程$(*)$的任一特解), 则

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0 \end{cases}$$

此即
$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}\perp\{A_1, B_1, C_1\}, \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}\perp\{A_2, B_2, C_2\}$, 从而 $\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} \mathbin{/\!/} \{A_1, B_1, C_1\}\times\{A_2, B_2, C_2\}$, 即得标准方程

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0 = 1:(-2):0.$$

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 : 8 : 0 = 1 : (-2) : 0.$$

再设 $x=0$, 解得

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0 = 1:(-2):0.$$

再设 $x=0$, 解得 $y=4$, $z=1$,

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0 = 1:(-2):0.$$

再设 $x=0$, 解得 $y=4$, $z=1$, 那么 $M_0(0,4,1)$ 为直线上的一点, 所以 l 的标准方程为

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0 = 1:(-2):0.$$

再设 $x=0$, 解得 $y=4$, $z=1$, 那么 $M_0(0,4,1)$ 为直线上的一点, 所以 l 的标准方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{0}.$$

例 2

化直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 为标准方程.

解 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0 = 1:(-2):0.$$

再设 $x=0$, 解得 $y=4$, $z=1$, 那么 $M_0(0,4,1)$ 为直线上的一点, 所以 l 的标准方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{0}.$$

注: 本例中的 M_0 可取成在直线上的任意点.

在直角坐标系下, l 的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

在直角坐标系下, l 的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

所以直线 l 的方向向量可取为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

在直角坐标系下, l 的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

所以直线 l 的方向向量可取为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

这与前面的讨论是一致的.

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \quad = \quad \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\}$$

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\} = 4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\}\times\{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\}=4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{v}=\{2,1,0\}$ 为 l 的方向向量.

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\} = 4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{v}=\{2,1,0\}$ 为 l 的方向向量. 其次由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-3=-4 \neq 0,$$

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\} = 4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{v}=\{2,1,0\}$ 为 l 的方向向量. 其次由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-3 = -4 \neq 0,$$

因此令 $y=0$, 解方程组得 $x=1, z=1$,

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\} = 4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{v} = \{2,1,0\}$ 为 l 的方向向量. 其次由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-3 = -4 \neq 0,$$

因此令 $y=0$, 解方程组得 $x=1, z=1$, 那么 $(1,0,1)$ 为 l 上的一点,

例 3

把直线 l 的一般方程 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 化为标准方程.

解 因为 l 平行于向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 &= \{1,-2,3\} \times \{1,-2,-1\} \\ &= \{8,4,0\} = 4\{2,1,0\}, \end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{v}=\{2,1,0\}$ 为 l 的方向向量. 其次由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-3=-4 \neq 0,$$

因此令 $y=0$, 解方程组得 $x=1, z=1$, 那么 $(1,0,1)$ 为 l 上的一点, 所以 l 的标准方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}.$$

课堂练习: P 120, 习题 3

求下列各平面的方程:

(3) 通过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面.

课堂练习: P 120, 习题 3

求下列各平面的方程:

(3) 通过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面.

答案: $x-8y-13z+9=0$.

课堂练习: P 120, 习题 3

求下列各平面的方程:

(3) 通过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面.

答案: $x-8y-13z+9=0.$

下一节