第三章 平面与空间直线

§3.8 平面束

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§3.8 平面束

§3.8 平面束

教学内容: 平面束的方程

§3.8 平面束

教学内容: 平面束的方程

教学目的: 理解平面束的概念,会用平面束方程解决问题

§3.8 平面束

教学内容: 平面束的方程

教学目的: 理解平面束的概念,会用平面束方程解决问题

教学重难点: 平面束方程的应用

平面束的概念

平面束的概念

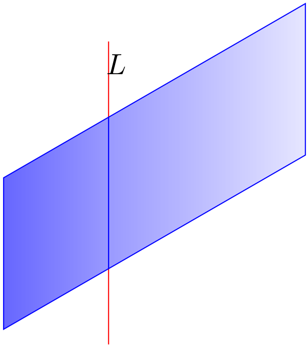
☞**有轴平面束的定义** 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束, 那条直线叫做平面束的轴.

平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做**有轴平面束**, 那条直线叫做**平面束的轴**.

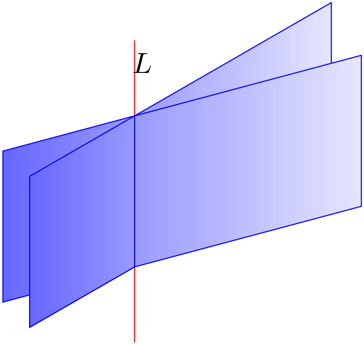
平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做**有轴平面束**，那条直线叫做**平面束的轴**.



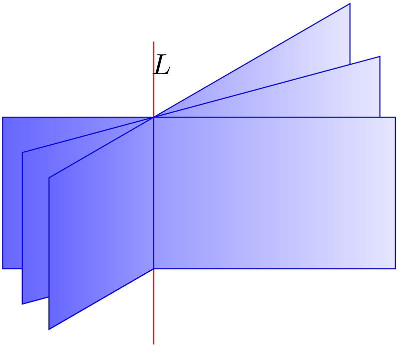
平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.



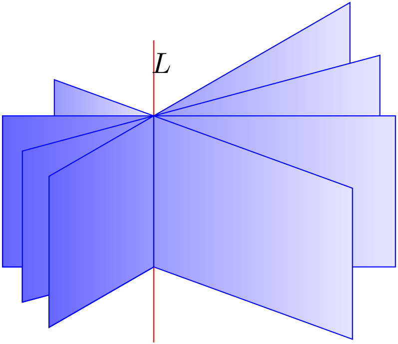
平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.



平面束的概念

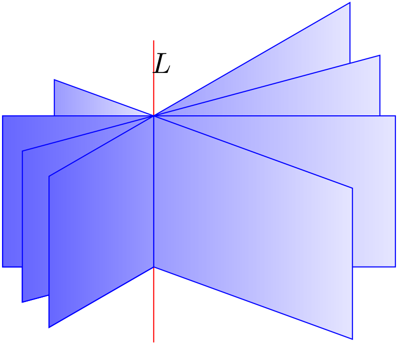
有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束, 那条直线叫做平面束的轴.



平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

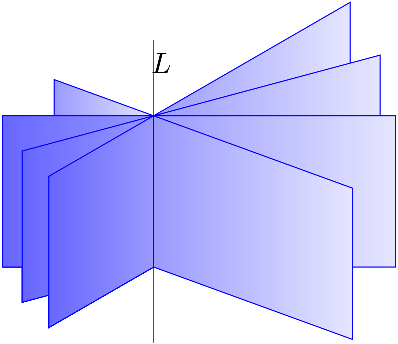
平行平面束的定义 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

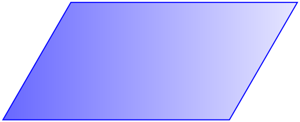


平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

平行平面束的定义 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

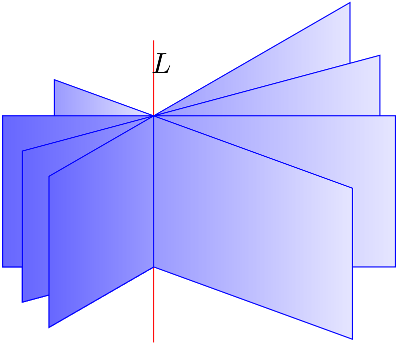


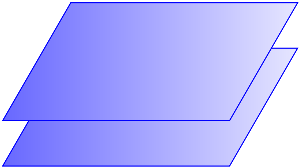


平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

平行平面束的定义 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

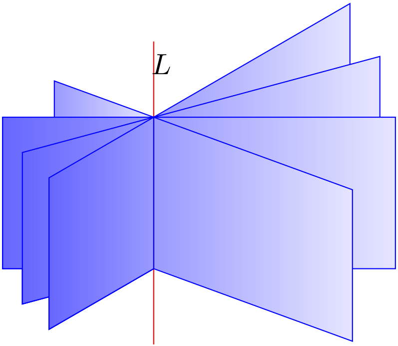


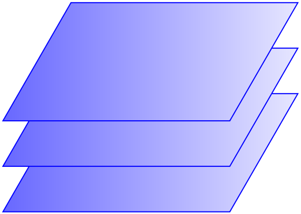


平面束的概念

☞**有轴平面束的定义** 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

☞**平行平面束的定义** 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

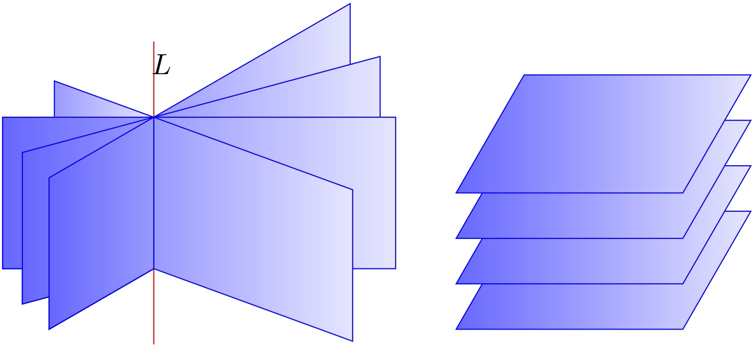




平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

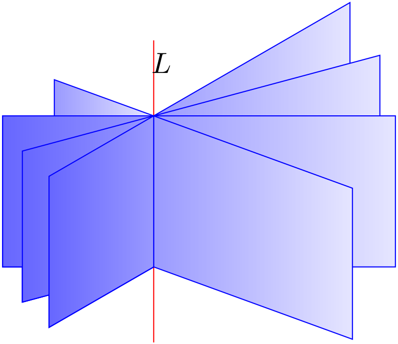
平行平面束的定义 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

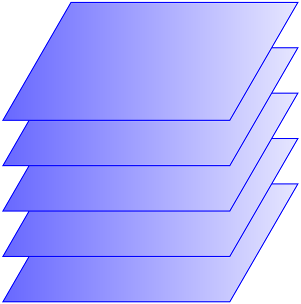


平面束的概念

有轴平面束的定义 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

平行平面束的定义 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.





定理 3.8.1

如果两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

交于一条直线 L, 那么以 L 为轴的有轴平面束的方程是

$$\boxed{l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,}$$

其中 l,m 是不全为零的任意实数.

定理 3.8.1

如果两个平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

交于一条直线 L, 那么以 L 为轴的有轴平面束的方程是

$$\boxed{l(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,}$$

其中 l, m 是不全为零的任意实数.

证 首先证明, 当任取两个不全为零的数 l, m 时, 平面 π_1, π_2 的方程的组合方程

$$l(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (*)$$

表示一个平面.

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

证 首先证明, 当任取两个不全为零的数 l, m 时, 平面 π_1, π_2 的方程的组合方程

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1+mA_2=0, lB_1+mB_2=0, lC_1+mC_2=0,$$

证 首先证明, 当任取两个不全为零的数 l,m 时, 平面 π_1,π_2 的方程的组合方程

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1 + mA_2)x + (lB_1 + mB_2)y + (lC_1 + mC_2)z + (lD_1 + mD_2) = 0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1 + mA_2 = 0, lB_1 + mB_2 = 0, lC_1 + mC_2 = 0,$$

即得 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, 这和 π_1, π_2 是两相交平面的假设矛盾.

证 首先证明, 当任取两个不全为零的数 l, m 时, 平面 π_1, π_2 的方程的组合方程

$$l(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1+mA_2=0, lB_1+mB_2=0, lC_1+mC_2=0,$$

即得 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, 这和 π_1,π_2 是两相交平面的假设矛盾. 因此组合方程(∗)是一个关于 x,y,z 的一次方程, 表示一个平面.

证 首先证明, 当任取两个不全为零的数 l,m 时, 平面 π_1,π_2 的方程的组合方程

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1+mA_2=0, lB_1+mB_2=0, lC_1+mC_2=0,$$

即得 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, 这和 π_1,π_2 是两相交平面的假设矛盾. 因此组合方程(∗)是一个关于 x,y,z 的一次方程, 表示一个平面.

因为平面 π_1,π_2 的交线 L 上的点的坐标都同时满足 π_1,π_2 的方程, 从而必定满足它们的组合方程(∗),

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1+mA_2=0, lB_1+mB_2=0, lC_1+mC_2=0,$$

即得 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, 这和 π_1,π_2 是两相交平面的假设矛盾. 因此组合方程(*)是一个关于 x,y,z 的一次方程, 表示一个平面.

因为平面 π_1,π_2 的交线 L 上的点的坐标都同时满足 π_1,π_2 的方程, 从而必定满足它们的组合方程(*), 因此方程(*)总代表通过 L 的平面,

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

方程的一次项系数不能全为零, 否则, 将有

$$lA_1+mA_2=0, lB_1+mB_2=0, lC_1+mC_2=0,$$

即得 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, 这和 π_1,π_2 是两相交平面的假设矛盾. 因此组合方程(*)是一个关于 x,y,z 的一次方程, 表示一个平面.

因为平面 π_1,π_2 的交线 L 上的点的坐标都同时满足 π_1,π_2 的方程, 从而必定满足它们的组合方程(*), 因此方程(*)总代表通过 L 的平面, 取不同的非零的 l,m 的值, 组合方程(*)就表示以 L 为轴的平面束中不同的平面.

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示一个平面. 将该方程改写成

反之, 可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π, 都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式.

反之，可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π，都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0)，则平面束中的某个平面通过该点的条件是

反之, 可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π, 都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0), 则平面束中的某个平面通过该点的条件是

$$l(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + m(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

反之，可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π，都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0)，则平面束中的某个平面通过该点的条件是

$$l(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + m(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

所以

$$l : m = (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) : [-(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)],$$

反之，可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π，都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0)，则平面束中的某个平面通过该点的条件是

$$l(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + m(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

所以

$$l : m = (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) : [-(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)],$$

而 (x_0, y_0, z_0) 不在 L 上，故 $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$ 和 $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$ 不能全为零，

反之, 可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π, 都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0), 则平面束中的某个平面通过该点的条件是

$$l(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + m(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

所以

$$l : m = (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) : [-(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)],$$

而 (x_0, y_0, z_0) 不在 L 上, 故 $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$ 和 $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$ 不能全为零, 因此 π 的方程可化为

$$\begin{aligned}&(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\\ -&(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.\end{aligned}$$

反之, 可以证明对于以 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π, 都能确定 l, m 的值使 π 的方程为 π_1, π_2 方程的组合形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点(x_0, y_0, z_0), 则平面束中的某个平面通过该点的条件是

$$l(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + m(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

所以

$$l : m = (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) : [-(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)],$$

而 (x_0, y_0, z_0) 不在 L 上, 故 $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$ 和 $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$ 不能全为零, 因此 π 的方程可化为

$$\begin{gathered}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \\ -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.\end{gathered}$$

注: 有轴平面束中平面由比值 $l : m$ 完全确定.

定理 3.8.2

如果两个平面 $\begin{aligned}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}$ 为平行平面，即 $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$，那么

$$\boxed{l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

表示平行平面束，平面束里任何一个平面都和平面 π_1,π_2 平行，其中 l,m 是不全为零的任意实数，且

$$-m:l\neq A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2.$$

定理 3.8.2

如果两个平面 $\begin{array}{l}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}$ 为平行平面，即 $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$，那么

$$\boxed{l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

表示平行平面束，平面束里任何一个平面都和平面 π_1,π_2 平行，其中 l,m 是不全为零的任意实数，且

$$-m:l\neq A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2.$$

证 显然成立.

推论

由平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 决定的平行平面束(即与平面 π 平行的全体平面)的方程是

$$\boxed{Ax+By+Cz+\lambda=0,}$$

其中 λ 是任意实数.

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0,$

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$, 由两平面垂直的条件得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$, 由两平面垂直的条件得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

即 $l+2m=0$,

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$, 由两平面垂直的条件得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

即 $l+2m=0$, 因此 $l:m=2:(-1)$, 所以所求平面方程为

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$, 由两平面垂直的条件得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

即 $l+2m=0$, 因此 $l:m=2:(-1)$, 所以所求平面方程为

$$2(2x+y-2z+1)-(x+2y-z-2)=0,$$

例 1

求通过直线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$, 由两平面垂直的条件得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

即 $l+2m=0$, 因此 $l:m=2:(-1)$, 所以所求平面方程为

$$2(2x+y-2z+1)-(x+2y-z-2)=0,$$

即 $3x-3z+4=0$.

例 2

求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

例 2

求与平面 $3x + y - z + 4 = 0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$3x + y - z + \lambda = 0,$$

例 2

求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$3x+y-z+\lambda=0,$$

因该平面在 z 轴上的截距为 -2, 所以它通过点 $(0,0,-2)$,

例 2

求与平面 $3x + y - z + 4 = 0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$3x + y - z + \lambda = 0,$$

因该平面在 z 轴上的截距为 -2, 所以它通过点 $(0, 0, -2)$, 由此得

$$2 + \lambda = 0,$$

例 2

求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$3x+y-z+\lambda=0,$$

因该平面在 z 轴上的截距为 -2, 所以它通过点 $(0,0,-2)$, 由此得

$$2+\lambda=0,$$

即 $\lambda=-2$,

例 2

求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$3x+y-z+\lambda=0,$$

因该平面在 z 轴上的截距为 -2, 所以它通过点 $(0,0,-2)$, 由此得

$$2+\lambda=0,$$

即 $\lambda=-2$, 因此所求方程为

$$3x+y-z-2=0.$$

例 3

试证两直线

$$l_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,\end{cases}$$

在同一平面上的充要条件是

$$\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0.}$$

证 因为通过 l_1 的任意平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 为不全为零的实数;

证 因为通过 l_1 的任意平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 为不全为零的实数; 通过 l_2 的任意平面为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 λ_3,λ_4 为不全为零实数.

证 因为通过 l_1 的任意平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 为不全为零的实数; 通过 l_2 的任意平面为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 λ_3,λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1,l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1,λ_2 和 λ_3,λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

证 因为通过 l_1 的任意平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 为不全为零的实数; 通过 l_2 的任意平面为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 λ_3,λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1,l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1,λ_2 和 λ_3,λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$\begin{aligned}&\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\\ \equiv\ &m[\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)],\end{aligned}$$

证 因为通过 l_1 的任意平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 为不全为零的实数; 通过 l_2 的任意平面为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 λ_3,λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1,l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1,λ_2 和 λ_3,λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$\begin{aligned}&\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\\ \equiv\ & m[\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)],\end{aligned}$$

化简整理得

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x$$

其中 λ_3, λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1, l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 和 λ_3, λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$\begin{aligned} &\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ \equiv\ & m[\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \lambda_4(A_4x + B_4y + C_4z + D_4)], \end{aligned}$$

化简整理得

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x \\
+ \ &(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4)y
\end{aligned}
$$

其中 λ_3, λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1, l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 和 λ_3, λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\
\equiv\ & m[\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \lambda_4(A_4x + B_4y + C_4z + D_4)],
\end{aligned}
$$

化简整理得

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x \\ + & (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4)y \\ + & (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4)z \end{aligned}$$

其中 λ_3, λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1, l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 和 λ_3, λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$\begin{aligned} &\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ \equiv\ & m[\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \lambda_4(A_4x + B_4y + C_4z + D_4)], \end{aligned}$$

化简整理得

$$
\begin{aligned}
& (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x \\
+ & (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4)y \\
+ & (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4)z \\
+ & \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 \equiv 0,
\end{aligned}
$$

其中 λ_3, λ_4 为不全为零实数. 因此 l_1, l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 和 λ_3, λ_4 使得上面两个组合方程表示同一个平面, 也就是上面两式的左边仅差一个不为零的因子 m, 即

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\
\equiv\ & m[\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \lambda_4(A_4x + B_4y + C_4z + D_4)],
\end{aligned}
$$

化简整理得

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x \\
+\ &(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4)y \\
+\ &(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4)z \\
+\ &\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 \equiv 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{cases}
\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4 = 0, \\
\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4 = 0, \\
\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4 = 0, \\
\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\
&\equiv m[\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \lambda_4(A_4x + B_4y + C_4z + D_4)],
\end{aligned}
$$

化简整理得

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4)x \\ + \quad &(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4)y \\ + \quad &(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4)z \\ + \quad &\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 \equiv 0, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4 = 0, \\ \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4 = 0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4 = 0, \\ \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 = 0; \end{cases}$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为零, 所以得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4 = 0, \\ \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4 = 0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4 = 0, \\ \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 = 0; \end{cases}$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为零, 所以得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

而 $m \neq 0$, 因此两直线 l_1, l_2 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为零, 所以得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

而$m \neq 0$, 因此两直线 l_1, l_2 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

而$m \neq 0$, 因此两直线 l_1, l_2 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.}$$

习题课