第一章 向量与坐标

§1.9 三向量的混合积

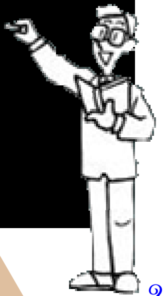
研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§1.9 三向量的混合积

§1.9 三向量的混合积

教学内容: 三向量混合积的定义及其运算规律



§1.9 三向量的混合积

教学内容: 三向量混合积的定义及其运算规律

教学目的: 掌握三向量混合积的性质及其应用

§1.9 三向量的混合积

教学内容: 三向量混合积的定义及其运算规律

教学目的: 掌握三向量混合积的性质及其应用

教学重难点: 在右手直角坐标系下, 混合积的分量表示法

❒ 混合积的定义

❒ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积.

❒ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积. 给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,

❒ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积. 给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 显然如果先把 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 作数量积, 再与向量 $\boldsymbol{c}$ 做乘积,

❐ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积. 给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 显然如果先把 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 作数量积, 再与向量 $\boldsymbol{c}$ 做乘积, 则只能得到与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量, 因此这种平凡的情形, 不必再讨论.

❒ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积. 给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 显然如果先把 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 作数量积, 再与向量 $\boldsymbol{c}$ 做乘积, 则只能得到与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量, 因此这种平凡的情形, 不必再讨论.

我们先讨论乘积 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 的情形.

❐ 混合积的定义

本节在向量的数量积和向量积的基础上, 继续研究三个向量的乘积. 给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 显然如果先把 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 作数量积, 再与向量 $\boldsymbol{c}$ 做乘积, 则只能得到与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量, 因此这种平凡的情形, 不必再讨论.

我们先讨论乘积 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 的情形.

☞**混合积的定义** 称形如 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的二重积为混合积(mixed product), 也记做 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 或 $(\boldsymbol{abc})$.

❒ 混合积的几何性质

❒ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V,

❐ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积是正数;

❒ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积是正数; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成左手系时, 混合积是负数,

❒ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积是正数; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成左手系时, 混合积是负数, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = \varepsilon V,}$$

❐ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V，并且当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系时，混合积是正数；当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成左手系时，混合积是负数，即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = \varepsilon V,}$$

当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是右手系时，$\varepsilon = 1$;

❒ 混合积的几何性质

定理1.9.1 混合积的几何意义

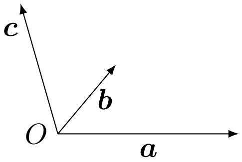
三个不共面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积是正数; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成左手系时, 混合积是负数, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = \varepsilon V,}$$

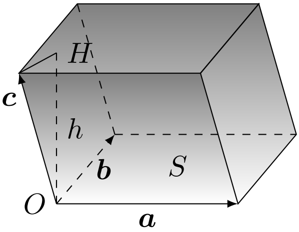
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是右手系时, $\varepsilon = 1$; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成左手系时, $\varepsilon = -1$.

证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体,

证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体,

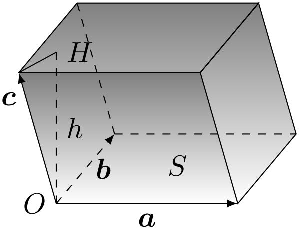


证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体,

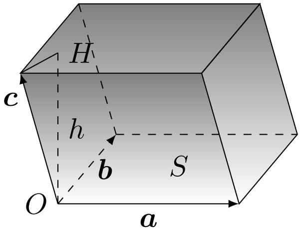


证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积

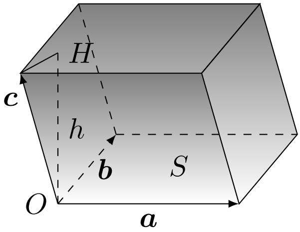
$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$,



证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$.

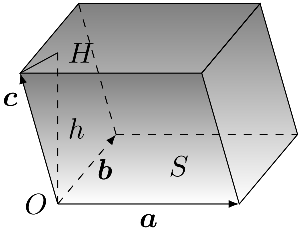


证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, 它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义, 有



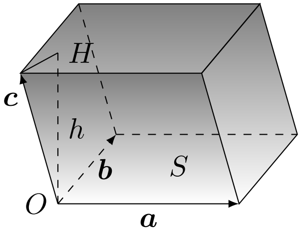
证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$$



证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, 它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义, 有

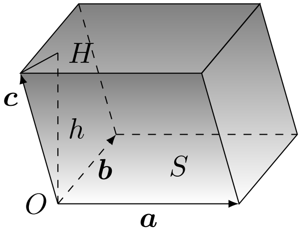
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$



证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

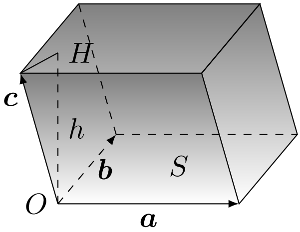
其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角.



证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, 它的高 $h = |\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V = S \cdot h$. 由数量积的定义, 有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos\theta = S \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

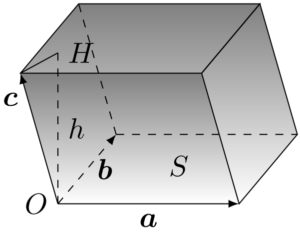


证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，

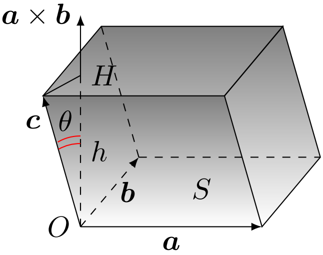


证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时,

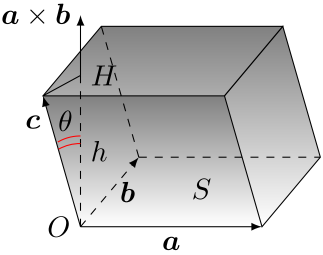


证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形，面积 $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$，它的高 $h = |\overrightarrow{OH}|$，体积 $V = S \cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos\theta = S \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$，

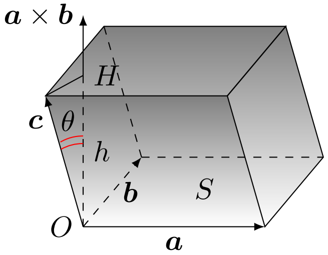


证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, 它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时, $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$, $h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$,



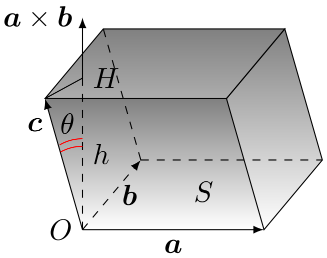
证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, 它的高 $h = |\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V = S \cdot h$. 由数量积的定义, 有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos\theta = S \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成右手系时, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $h = |\boldsymbol{c}| \cos\theta$, 此时

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = S \cdot h = V.$$



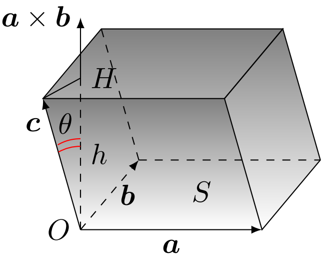
证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，此时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=S\cdot h=V.$$



(ii) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，

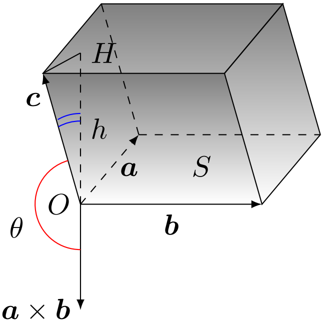
证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，此时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=S\cdot h=V.$$



(ii) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，

证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

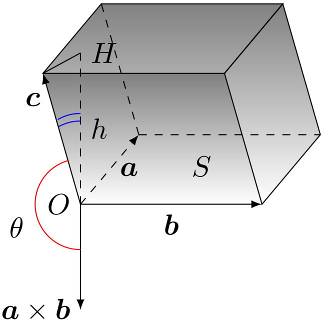
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，此时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=S\cdot h=V.$$

(ii) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$，



证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体, 其底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为边的平行四边形, 面积 $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, 它的高 $h = |\overrightarrow{OH}|$, 体积 $V = S \cdot h$. 由数量积的定义, 有

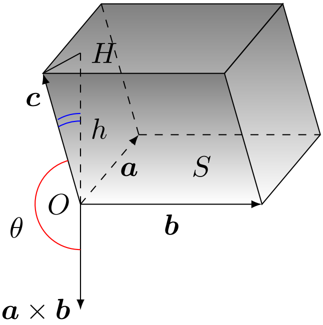
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos\theta = S \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成右手系时, $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$, $h = |\boldsymbol{c}| \cos\theta$, 此时

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = S \cdot h = V.$$

(ii) 当 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成左手系时, $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$, $h = |\boldsymbol{c}| \cos(\pi - \theta) = -|\boldsymbol{c}| \cos\theta$,



证 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体，其底面是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形，面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $h=|\overrightarrow{OH}|$，体积 $V=S\cdot h$. 由数量积的定义，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

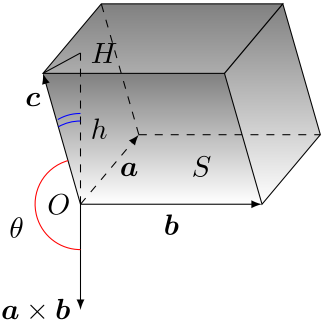
其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的交角. 下面可分两种情形:

(i) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，此时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=S\cdot h=V.$$

(ii) 当 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta)=-|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，此时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-S\cdot h=-V.$$



定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线，或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时，定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$,

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$,

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 另外又由向量积的定义知, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$,

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 另外又由向量积的定义知, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 另外又由向量积的定义知, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

反过来, 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面,

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 另外又由向量积的定义知, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

反过来, 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 那么由 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$ 知 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$,

定理1.9.2 (三向量共面的混合积判定条件)

三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = 0.}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 或 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 时, 定理显然成立.
现设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

如果 $(\boldsymbol{abc}) = 0$, 即 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 那么有 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 另外又由向量积的定义知, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

反过来, 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 那么由 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$ 知 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$, 于是 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 即 $(\boldsymbol{abc}) = 0$.

❐ 混合积的运算性质

混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab})$$

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时, 定理显然成立;

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变乘积的符号，即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时，定理显然成立；
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时，轮换因子或对调因子，混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时, 定理显然成立;
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时, 轮换因子或对调因子, 混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 又因为轮换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的顺序时, 右手系或左手系保持不变, 因而混合积不变,

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时, 定理显然成立;
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时, 轮换因子或对调因子, 混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 又因为轮换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的顺序时, 右手系或左手系保持不变, 因而混合积不变, 而当对调任意两个因子时, 就会改变左、右手系, 因此此时混合积要改变符号.

混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积的符号, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时, 定理显然成立;
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时, 轮换因子或对调因子, 混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 又因为轮换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的顺序时, 右手系或左手系保持不变, 因而混合积不变, 而当对调任意两个因子时, 就会改变左、右手系, 因此此时混合积要改变符号.

推论

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).}$$

❐ 混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变乘积的符号，即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时，定理显然成立；
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时，轮换因子或对调因子，混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 又因为轮换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的顺序时，右手系或左手系保持不变，因而混合积不变，而当对调任意两个因子时，就会改变左、右手系，因此此时混合积要改变符号.

推论

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).}$$

证 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca})$

混合积的运算性质

定理1.9.3 (混合积的相等轮换式)

轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变乘积的符号，即

$$\boxed{(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).}$$

证 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面时，定理显然成立；
当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面时，轮换因子或对调因子，混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 又因为轮换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的顺序时，右手系或左手系保持不变，因而混合积不变，而当对调任意两个因子时，就会改变左、右手系，因此此时混合积要改变符号.

推论

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).}$$

证 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$

例 1

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 试证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

例 1

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 试证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

证 将 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积, 得

例 1

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 试证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

证 将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积, 得

$$(\boldsymbol{abc})+(\boldsymbol{bcc})+(\boldsymbol{cac})=0,$$

例 1

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 试证 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

证 将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积, 得

$$(\boldsymbol{abc})+(\boldsymbol{bcc})+(\boldsymbol{cac})=0,$$

由 $(\boldsymbol{bcc})=(\boldsymbol{cac})=0$ 得

$$(\boldsymbol{abc})=0,$$

例 1

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 试证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

证 将 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积, 得

$$(\boldsymbol{abc}) + (\boldsymbol{bcc}) + (\boldsymbol{cac}) = 0,$$

由 $(\boldsymbol{bcc}) = (\boldsymbol{cac}) = 0$ 得

$$(\boldsymbol{abc}) = 0,$$

因而 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

课堂练习: P 58, 习题 2

设向径 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2, \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$, 证明 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)+(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)$ 垂直于 ABC 平面.

❐ 混合积的坐标表示

❒ 混合积的坐标表示

下面在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下, 用坐标表示三个向量的混合积.

❒ 混合积的坐标表示

下面在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，用坐标表示三个向量的混合积.

定理1.9.4

如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=X_3\boldsymbol{i}+Y_3\boldsymbol{j}+Z_3\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boxed{(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.}$$

混合积的坐标表示

下面在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下, 用坐标表示三个向量的混合积.

定理1.9.4

如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=X_3\boldsymbol{i}+Y_3\boldsymbol{j}+Z_3\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boxed{(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

❒ 混合积的坐标表示

下面在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，用坐标表示三个向量的混合积.

定理1.9.4

如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=X_3\boldsymbol{i}+Y_3\boldsymbol{j}+Z_3\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boxed{(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法，有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法, 有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法, 有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法, 有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

所以定理结论成立.

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法, 有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

所以定理结论成立.

根据定理1.9.2和定理1.9.4立即可重新得到定理1.5.5的结论.

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

根据数量积的坐标表示法, 有

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

所以定理结论成立.

根据定理1.9.2和定理1.9.4立即可重新得到定理1.5.5的结论.

推论

向量 $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = X_3\boldsymbol{i} + Y_3\boldsymbol{j} + Z_3\boldsymbol{k}$ 共面的充要条件是

$$\boxed{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.}$$

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|;$$

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB} = \{6,0,6\}$,

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB}=\{6,0,6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{4,3,0\}$,

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB} = \{6,0,6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,3,0\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2,-1,3\}$,

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB} = \{6,0,6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,3,0\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2,-1,3\}$, 所以

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB}=\{6,0,6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{4,3,0\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2,-1,3\}$, 所以

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}6&0&6\\4&3&0\\2&-1&3\end{vmatrix}=-6,$$

例 2

已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标是 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体体积的六分之一, 因此

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|;$$

但 $\overrightarrow{AB} = \{6,0,6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,3,0\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2,-1,3\}$, 所以

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

从而 $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = 1.$

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量，求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$.

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有 $(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}) + y(\boldsymbol{bbc}) + z(\boldsymbol{cbc})$,

例 3

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有 $(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc})+y(\boldsymbol{bbc})+z(\boldsymbol{cbc})$, 而 $(\boldsymbol{bbc})=(\boldsymbol{cbc})=0$,

例 3

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有 $(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc})+y(\boldsymbol{bbc})+z(\boldsymbol{cbc})$, 而 $(\boldsymbol{bbc})=(\boldsymbol{cbc})=0$, 所以

$$(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc}),$$

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有 $(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}) + y(\boldsymbol{bbc}) + z(\boldsymbol{cbc})$, 而 $(\boldsymbol{bbc}) = (\boldsymbol{cbc}) = 0$, 所以

$$(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}),$$

由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $(\boldsymbol{abc}) \neq 0$,

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量, 求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值, 等式两边分别与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 作数量积, 那么有 $(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}) + y(\boldsymbol{bbc}) + z(\boldsymbol{cbc})$, 而 $(\boldsymbol{bbc}) = (\boldsymbol{cbc}) = 0$, 所以

$$(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}),$$

由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面, 故 $(\boldsymbol{abc}) \neq 0$, 因此

$$x = \frac{(\boldsymbol{dbc})}{(\boldsymbol{abc})}.$$

例 3

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量，求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，故 $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值，等式两边分别与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 作数量积，那么有 $(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}) + y(\boldsymbol{bbc}) + z(\boldsymbol{cbc})$，而 $(\boldsymbol{bbc}) = (\boldsymbol{cbc}) = 0$，所以

$$(\boldsymbol{dbc}) = x(\boldsymbol{abc}),$$

由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，故 $(\boldsymbol{abc}) \neq 0$，因此

$$x = \frac{(\boldsymbol{dbc})}{(\boldsymbol{abc})}.$$

同理

$$y = \frac{(\boldsymbol{adc})}{(\boldsymbol{abc})},$$

例 3

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个不共面向量，求 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，故 $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 为决定 x 的值，等式两边分别与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 作数量积，那么有 $(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc})+y(\boldsymbol{bbc})+z(\boldsymbol{cbc})$，而 $(\boldsymbol{bbc})=(\boldsymbol{cbc})=0$，所以

$$(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc}),$$

由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，故 $(\boldsymbol{abc})\neq 0$，因此

$$x=\frac{(\boldsymbol{dbc})}{(\boldsymbol{abc})}.$$

同理

$$y=\frac{(\boldsymbol{adc})}{(\boldsymbol{abc})},\quad z=\frac{(\boldsymbol{abd})}{(\boldsymbol{abc})}.$$

如果取直角坐标系，并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

如果取直角坐标系，并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\},$$

如果取直角坐标系, 并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

如果取直角坐标系, 并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\},$$

如果取直角坐标系, 并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}, \quad \boldsymbol{d} = \{d_1, d_2, d_3\},$$

如果取直角坐标系, 并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}, \quad \boldsymbol{d} = \{d_1, d_2, d_3\},$$

将这些坐标代入上面的 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分解式与 x, y, z 的表达式, 那么容易看出, 上面的解法就是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

的克拉默(Cramer)法则.

如果取直角坐标系, 并设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}, \quad \boldsymbol{d} = \{d_1, d_2, d_3\},$$

将这些坐标代入上面的 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分解式与 x, y, z 的表达式, 那么容易看出, 上面的解法就是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

的克拉默(Cramer)法则.

下一节