第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.4 椭球面

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§4.4 椭球面

§4.4 椭球面

教学内容: 椭球面及其几何性质

§4.4 椭球面

教学内容: 椭球面及其几何性质

教学目的: 掌握用平行割线法分析椭球面的几何性质

§4.4 椭球面

教学内容: 椭球面及其几何性质

教学目的: 掌握用平行割线法分析椭球面的几何性质

教学重难点: 椭球面的参数方程

☞ 椭球面的定义

☞ **椭球面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做椭球面(ellipsoid)或椭圆面;

☞ **椭球面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做椭球面(ellipsoid)或椭圆面；上面的方程称为椭球面的标准方程，

☞ **椭球面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做椭球面(ellipsoid)或椭圆面; 上面的方程称为椭球面的标准方程, 其中 a, b, c 为任意正常数, 通常假定 $a \geq b \geq c$.

☞ 椭球面的简单性质

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取.

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称.

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

椭球面与它的三个对称轴即坐标轴的交点分别为 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$, 这六个点叫做椭球面的顶点.

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

椭球面与它的三个对称轴即坐标轴的交点分别为 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$, 这六个点叫做椭球面的顶点. 同一条对称轴上的两顶点间的线段以及它们的长度 $2a$, $2b$ 与 $2c$ 叫做椭球面的轴,

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

椭球面与它的三个对称轴即坐标轴的交点分别为 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$, 这六个点叫做椭球面的顶点. 同一条对称轴上的两顶点间的线段以及它们的长度 $2a$, $2b$ 与 $2c$ 叫做椭球面的轴, 轴的一半, 即中心与各顶点间的线段及它们的长度 a, b 与 c 叫做椭球面的半轴,

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

椭球面与它的三个对称轴即坐标轴的交点分别为 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$, 这六个点叫做椭球面的顶点. 同一条对称轴上的两顶点间的线段以及它们的长度 $2a$, $2b$ 与 $2c$ 叫做椭球面的轴, 轴的一半, 即中心与各顶点间的线段及它们的长度 a, b 与 c 叫做椭球面的半轴, 当 $a > b > c$ 时, $2a, 2b$ 与 $2c$ 分别叫做椭球面的长轴, 中轴与短轴.

☞ **椭球面的简单性质** 因为椭球面的方程中仅含有坐标的平方项, 从而当 (x, y, z) 满足方程时, 点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也一定满足, 其中正负号可以任意选取. 因此椭球面关于三坐标面、三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面、对称轴与对称中心分别叫做它的主平面、主轴与中心.

椭球面与它的三个对称轴即坐标轴的交点分别为 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$, 这六个点叫做椭球面的顶点. 同一条对称轴上的两顶点间的线段以及它们的长度 $2a$, $2b$ 与 $2c$ 叫做椭球面的轴, 轴的一半, 即中心与各顶点间的线段及它们的长度 a, b 与 c 叫做椭球面的半轴, 当 $a > b > c$ 时, $2a, 2b$ 与 $2c$ 分别叫做椭球面的长轴, 中轴与短轴. 而 a, b 与 c 分别叫做长半轴, 中半轴与短半轴.

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面，而三轴相等的椭球面就是球面.

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面, 而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a > b = c$ 时, 椭球面方程就变成 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, 它是一个长形旋转椭球面;

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面, 而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a > b = c$ 时, 椭球面方程就变成 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, 它是一个长形旋转椭球面; 而当 $a = b = c$ 时, 椭球面方程变成球面方程.

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面，而三轴相等的椭球面就是球面．例如当 $a > b = c$ 时，椭球面方程就变成 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$，它是一个长形旋转椭球面；而当 $a = b = c$ 时，椭球面方程变成球面方程．所以旋转椭球面和球面都是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的特例，

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面, 而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a > b = c$ 时, 椭球面方程就变成 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, 它是一个长形旋转椭球面; 而当 $a = b = c$ 时, 椭球面方程变成球面方程. 所以旋转椭球面和球面都是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的特例, 当 a, b, c 两两不相等时, 叫做三轴椭球面.

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面，而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a > b = c$ 时，椭球面方程就变成 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$，它是一个长形旋转椭球面；而当 $a = b = c$ 时，椭球面方程变成球面方程. 所以旋转椭球面和球面都是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的特例，当 a, b, c 两两不相等时，叫做三轴椭球面.

因为椭球面上的任何一点的坐标 (x, y, z) 总有

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c,$$

任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面，而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a > b = c$ 时，椭球面方程就变成 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$，它是一个长形旋转椭球面；而当 $a = b = c$ 时，椭球面方程变成球面方程. 所以旋转椭球面和球面都是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的特例，当 a, b, c 两两不相等时，叫做三轴椭球面.

因为椭球面上的任何一点的坐标 (x, y, z) 总有

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c,$$

因此椭球面完全被封闭在以下长方体的内部:

$$x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c.$$

☞ 椭球面的图形

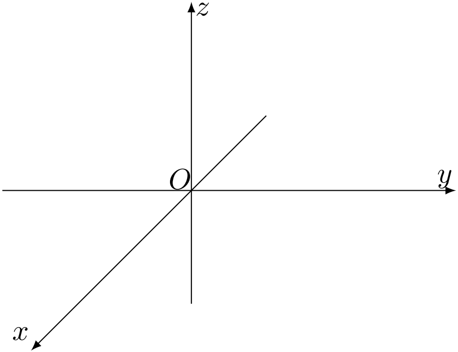
☞ **椭球面的图形** 为看出曲面的大致形状, 我们考虑曲面与一组平行平面的交线, 这些交线都是平面曲线.

☞ **椭球面的图形** 为看出曲面的大致形状, 我们考虑曲面与一组平行平面的交线, 这些交线都是平面曲线. 当我们对这些平面曲线的形状都已清楚时, 曲面的大致形状也就看出来了.

☞ **椭球面的图形** 为看出曲面的大致形状, 我们考虑曲面与一组平行平面的交线, 这些交线都是平面曲线. 当我们对这些平面曲线的形状都已清楚时, 曲面的大致形状也就看出来了. 这就是所谓利用平行平面的截口(即曲面与平面的交线)来研究曲面图形的方法, 简称为平行割线法.

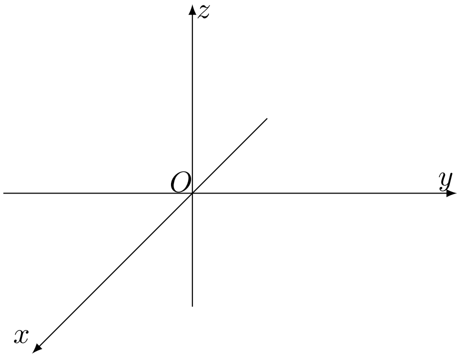
☞ **椭球面的图形** 为看出曲面的大致形状, 我们考虑曲面与一组平行平面的交线, 这些交线都是平面曲线. 当我们对这些平面曲线的形状都已清楚时, 曲面的大致形状也就看出来了. 这就是所谓利用平行平面的截口(即曲面与平面的交线)来研究曲面图形的方法, 简称为平行割线法. 为方便, 常取与坐标平面平行的一组平面.

三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是



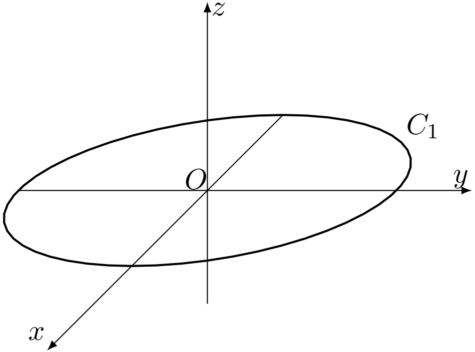
三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$



三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是

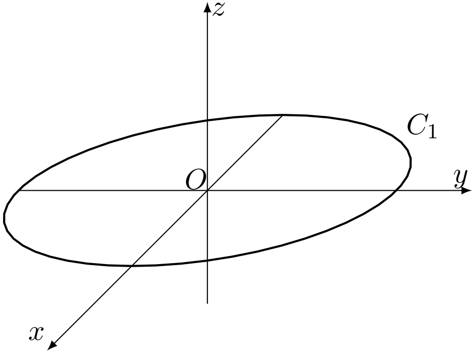
$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$



三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$

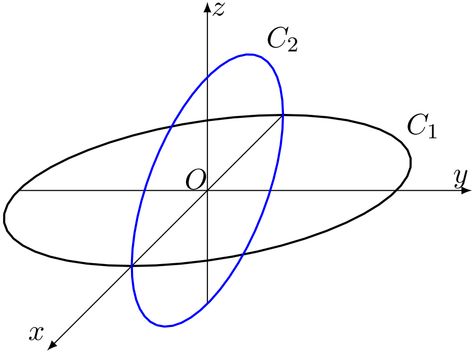
$$C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}$$



三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是

$$C_1: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0; \end{cases}}$$

$$C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0; \end{cases}}$$

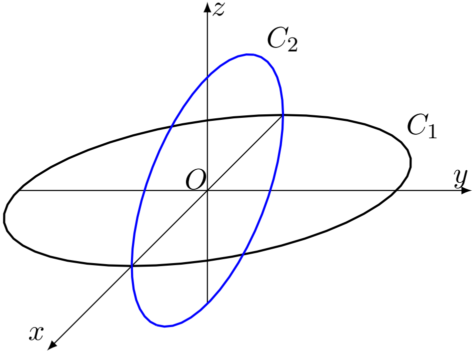


三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆，它们的方程分别是

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$

$$C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}$$

$$C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

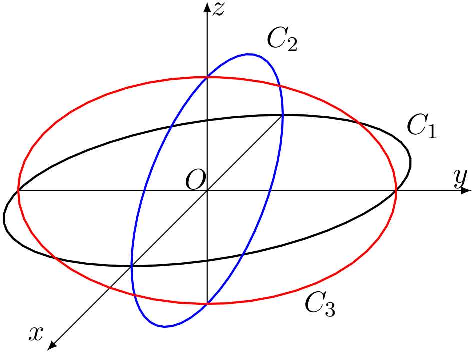


三个坐标平面与椭球面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ 的截线叫做椭球面的主截线或主椭圆, 它们的方程分别是

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$

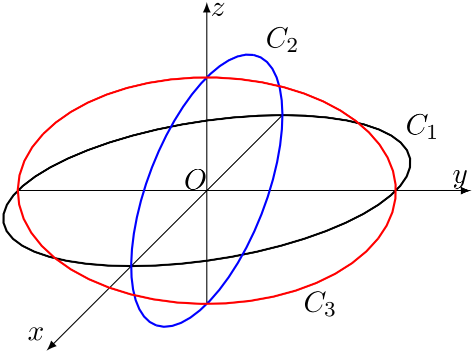
$$C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}$$

$$C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

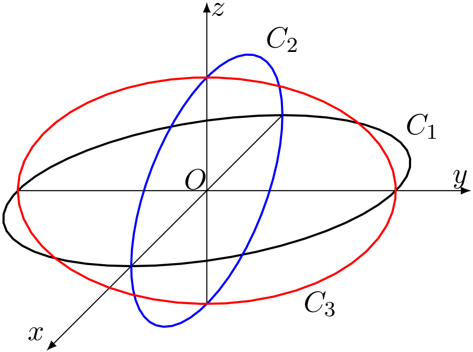


以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}}$

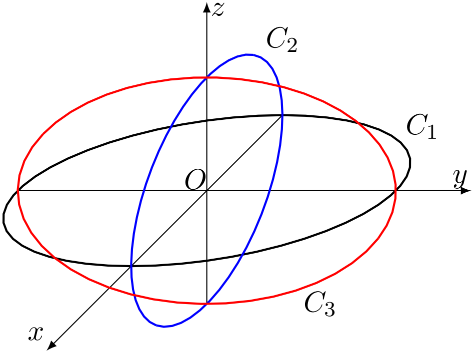


以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交;



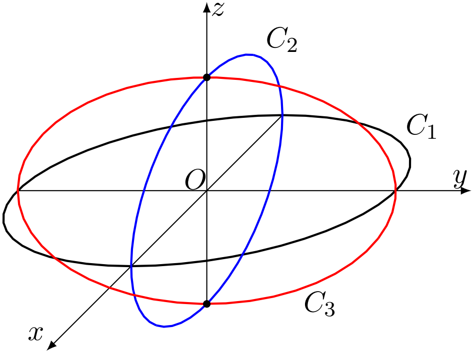
以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面不相交；当 $|h|=c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$;



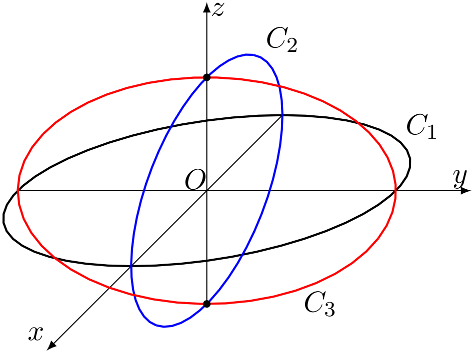
以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交; 当 $|h|=c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$;



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z = h$ 截割椭球面

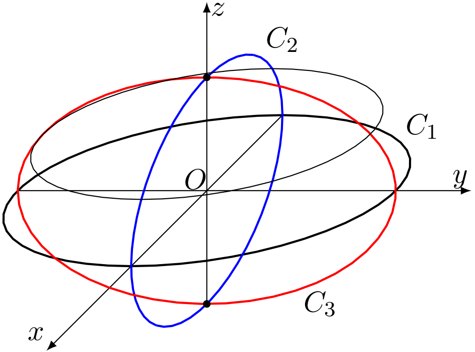
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}}$ 当 $|h| > c$ 时, 平面 $z = h$ 与椭球面不相交; 当 $|h| = c$ 时, 平面 $z = h$ 与椭球面交于顶点 $(0, 0, c)$ 或 $(0, 0, -c)$; 当 $|h| < c$ 时, 交出的图形 Γ 是一个椭圆, 该椭圆的两个半轴分别为



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}}$ 当 $|h|>c$

时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交; 当 $|h|=c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$; 当 $|h|<c$ 时, 交出的图形 Γ 是一个椭圆, 该椭圆的两个半轴分别为

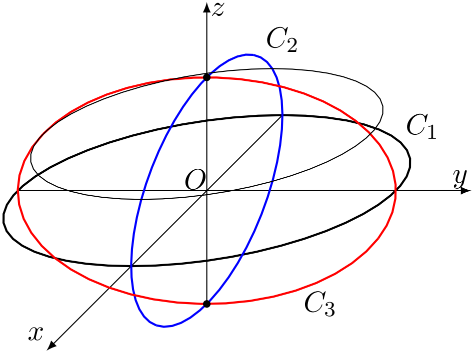


以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$

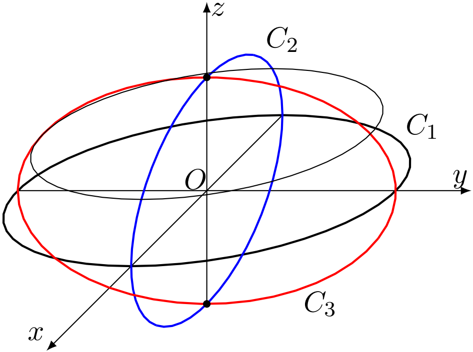
时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交; 当 $|h|=c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$; 当 $|h|<c$ 时, 交出的图形 Γ 是一个椭圆, 该椭圆的两个半轴分别为

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right),$$



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面不相交；当 $|h|=c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$；当 $|h|<c$ 时，交出的图形 Γ 是一个椭圆，该椭圆的两个半轴分别为

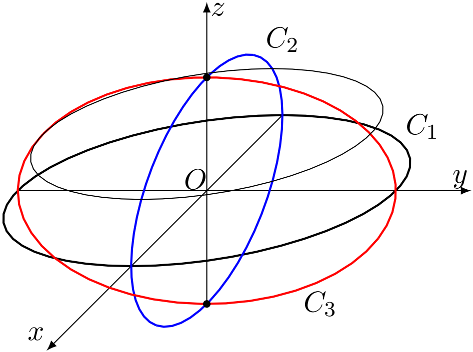
$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交; 当 $|h|=c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$; 当 $|h|<c$ 时, 交出的图形 Γ 是一个椭圆, 该椭圆的两个半轴分别为

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

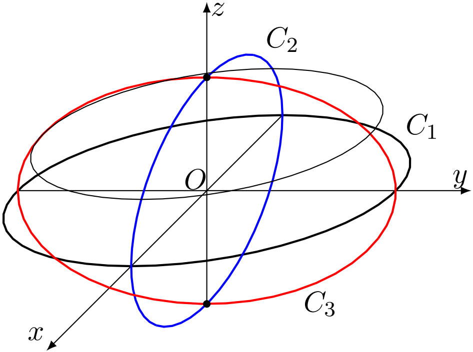
两半轴之比是 $a:b$, 与 h 无关, 它与主椭圆 C_1 是相似的,



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，得截线方程 Γ : $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面不相交；当 $|h|=c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$；当 $|h|<c$ 时，交出的图形 Γ 是一个椭圆，该椭圆的两个半轴分别为

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

两半轴之比是 $a:b$，与 h 无关，它与主椭圆 C_1 是相似的，椭圆两轴的端点分别是



以平行于 xOy 坐标面的一组平行平面 $z=h$ 截割椭球面

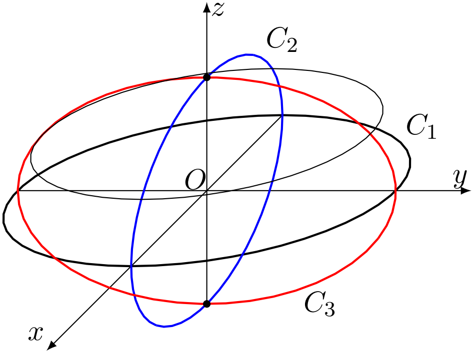
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得截线方程 $\varGamma$: $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}}$ 当 $|h|>c$

时, 平面 $z=h$ 与椭球面不相交; 当 $|h|=c$ 时, 平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$; 当 $|h|<c$ 时, 交出的图形 $\varGamma$ 是一个椭圆, 该椭圆的两个半轴分别为

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

两半轴之比是 $a:b$, 与 h 无关, 它与主椭圆 C_1 是相似的, 椭圆两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},0,h\right),$$



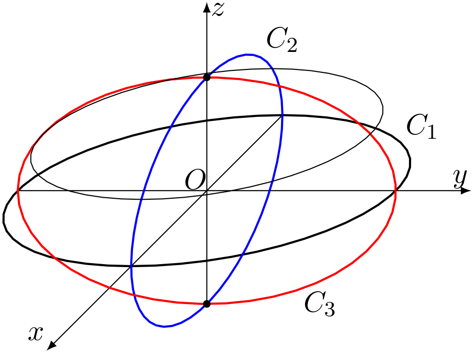
$$\left(0, \pm b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, h\right),$$

$$\Gamma : \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}}$$ 当 $|h|>c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面不相交；当 $|h|=c$ 时，平面 $z=h$ 与椭球面交于顶点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$；当 $|h|<c$ 时，交出的图形 Γ 是一个椭圆，该椭圆的两个半轴分别为

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

两半轴之比是 $a:b$，与 h 无关，它与主椭圆 C_1 是相似的，椭圆两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right),$$

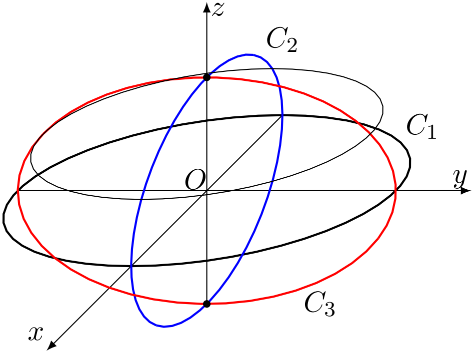


$\left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，它们分别在椭圆 C_2：$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$

$a\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)$.

两半轴之比是 $a:b$，与 h 无关，它与主椭圆 C_1 是相似的，椭圆两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right),$$

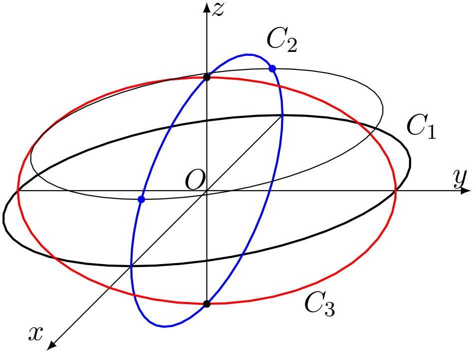


$\left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，它们分别在椭圆 C_2 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$

$a\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)$.

两半轴之比是 $a:b$，与 h 无关，它与主椭圆 C_1 是相似的，椭圆两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right),$$



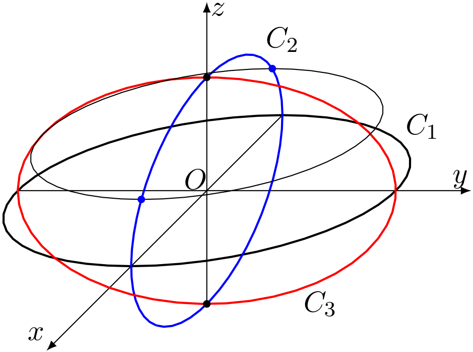
$\left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，它们分别在椭圆 $C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$ 与

$C_3: \boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$ 上.

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

两半轴之比是 $a:b$，与 h 无关，它与主椭圆 C_1 是相似的，椭圆两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right),$$



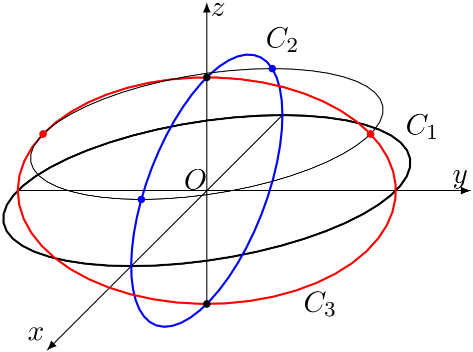
$\left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在椭圆 $C_2:$ $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$ 与

$C_3:$ $\boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$ 上.

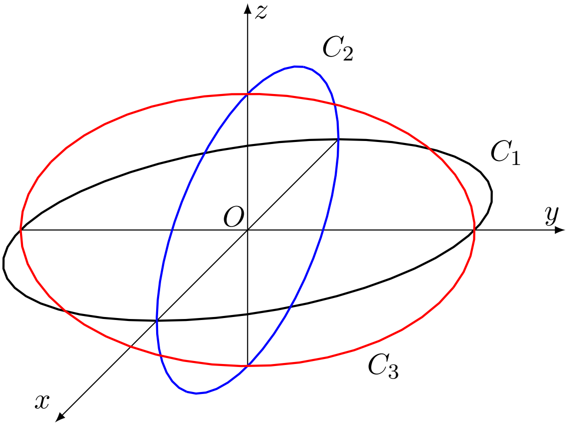
$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right), b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right).$$

两半轴之比是 $a:b$, 与 h 无关, 它与主椭圆 C_1 是相似的, 椭圆两轴的端点分别是

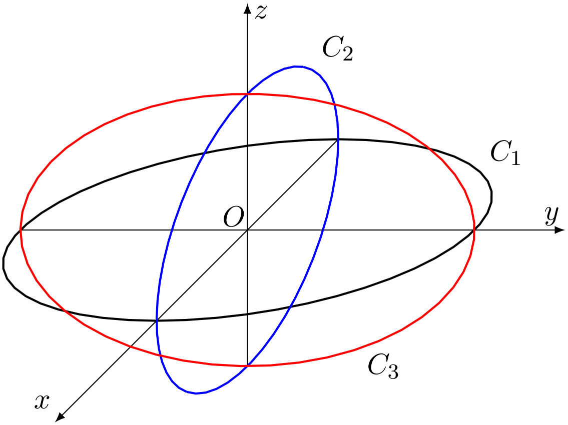
$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right),$$



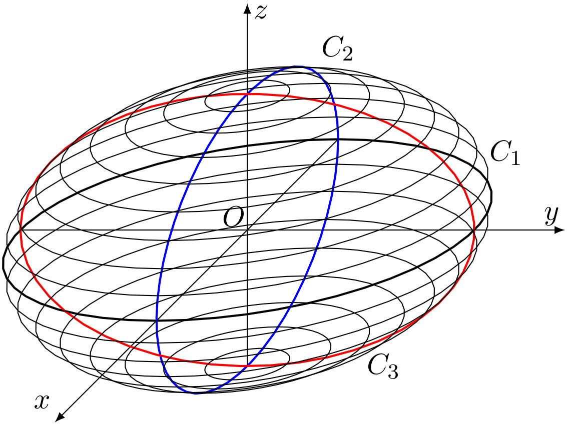
这样，椭球面就可以看成是由一族与主椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的，这族椭圆在变动中保持所在平面与 xOy 面平行，且两轴的端点分别在另外两个定椭圆 C_2 和 C_3 上滑动.



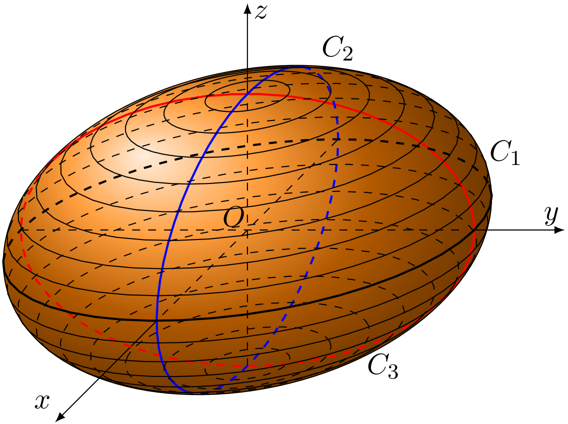
这样，椭球面就可以看成是由一族与主椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的，这族椭圆在变动中保持所在平面与 xOy 面平行，且两轴的端点分别在另外两个定椭圆 C_2 和 C_3 上滑动.



这样, 椭球面就可以看成是由一族与主椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在平面与 xOy 面平行, 且两轴的端点分别在另外两个定椭圆 C_2 和 C_3 上滑动.



这样, 椭球面就可以看成是由一族与主椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在平面与 xOy 面平行, 且两轴的端点分别在另外两个定椭圆 C_2 和 C_3 上滑动.



椭球面的方程除了用标准方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

来表达外,

椭球面的方程除了用标准方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

来表达外，有时也用参数方程

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi, \\ y=b\cos\theta\sin\varphi, \\ z=c\sin\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le\varphi<2\pi \end{array} \right)}$$

来表达，

椭球面的方程除了用标准方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

来表达外，有时也用参数方程

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi, \\ y=b\cos\theta\sin\varphi, \\ z=c\sin\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le\varphi<2\pi \end{array}\right)}$$

来表达，其中 θ,φ 为参数，它们有着球面参数方程相似的几何意义.

椭球面的方程除了用标准方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

来表达外，有时也用参数方程

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi, \\ y=b\cos\theta\sin\varphi, \\ z=c\sin\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le\varphi<2\pi \end{array}\right)}$$

来表达，其中 θ,φ 为参数，它们有着球面参数方程相似的几何意义．如果消去参数 θ,φ，就得到了标准方程．

例

已知椭球面的轴与坐标轴重合, 且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

与点 $M(1,2,\sqrt{23})$, 求这个椭球面的方程.

例

已知椭球面的轴与坐标轴重合, 且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

与点 $M(1,2,\sqrt{23})$, 求这个椭球面的方程.

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合, 所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

例

已知椭球面的轴与坐标轴重合, 且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

与点 $M(1, 2, \sqrt{23})$, 求这个椭球面的方程.

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合, 所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

比较,

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合, 所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases}$ 将其与已知椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

比较, 知

$$a^2 = 9, b^2 = 16.$$

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合, 所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 将其与已知椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

比较，知

$$a^2=9, b^2=16.$$

又因为椭球面过点$M(1,2,\sqrt{23})$，所以又有

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1,$$

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合，所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases}$ 将其与已知椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

比较, 知

$$a^2 = 9, b^2 = 16.$$

又因为椭球面过点$M(1, 2, \sqrt{23})$, 所以又有

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{16} + \frac{23}{c^2} = 1,$$

所以$c^2 = 36$,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

比较, 知

$$a^2 = 9, b^2 = 16.$$

又因为椭球面过点$M(1, 2, \sqrt{23})$, 所以又有

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{16} + \frac{23}{c^2} = 1,$$

所以$c^2 = 36$, 因此所求的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

比较, 知

$$a^2 = 9, b^2 = 16.$$

又因为椭球面过点$M(1, 2, \sqrt{23})$, 所以又有

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{16} + \frac{23}{c^2} = 1,$$

所以$c^2 = 36$, 因此所求的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

下一节