第一章 向量与坐标

§1.3 数量乘向量

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§1.3 数量乘向量

§1.3 数量乘向量

教学内容: 向量与数量的线性运算

§1.3 数量乘向量

教学内容: 向量与数量的线性运算

教学目的: 掌握线性运算的规律及向量运算的几何意义

§1.3 数量乘向量

教学内容: 向量与数量的线性运算

教学目的: 掌握线性运算的规律及向量运算的几何意义

教学重难点: 线性运算与运算规律的运用

数量乘向量的定义

数量乘向量的定义

实例

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等.

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$;

数量乘向量的定义

☞ **实例** 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同.

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义

☞ **实例** 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

☞ **数量乘向量的定义**

数量乘向量的定义

☞ **实例** 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

☞ **数量乘向量的定义** 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$,

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$;

数量乘向量的定义

☞ **实例** 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

☞ **数量乘向量的定义** 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做**数量与向量的乘法**, 简称为**数乘**.

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad |\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;
$\lambda = -1$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$ $\Rightarrow$ $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$; $\lambda=-1$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 存在着如下关系:

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况，比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;
$\lambda = -1$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 存在着如下关系:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \quad \text{或者} \quad \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}$$

数量乘向量的定义

实例 物理学中经常会碰到向量与数量发生某些结合关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}s$ 等. 沿同一直线运动的两物体的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 可进行比较: $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$; 几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

数量乘向量的定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记做 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

特例 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$ $\Rightarrow$ $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;
$\lambda=-1$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 存在着如下关系:

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \quad \text{或者} \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}$$

也就是一个非零向量乘它的模的倒数得一个与之同方向的单位向量 (向量的幺化或单位化).

运算规律

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}|$$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}|$$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda|\cdot|\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\mu|\cdot|\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|$$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即它们的模相等;

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即它们的模相等; 而它们的方向, 当 λ 与 μ 同号时, 都与 $\boldsymbol{a}$的方向一致,

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即它们的模相等; 而它们的方向, 当 λ 与 μ 同号时, 都与 $\boldsymbol{a}$的方向一致, 当 λ 和 μ 异号时, 都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即它们的模相等; 而它们的方向, 当 λ 与 μ 同号时, 都与 $\boldsymbol{a}$的方向一致, 当 λ 和 μ 异号时, 都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 因此向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同,

运算规律

定理1.3.1 向量的数乘满足以下规律:

1) 结合律: $\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};}$

2) 第一分配律: $\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};}$

3) 第二分配律: $\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$

上面叙述中的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ, μ 为任意实数.

证 1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少一个为 0 时, 结合律显然成立.

下设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda\mu \neq 0$. 此时

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\boldsymbol{a}| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即它们的模相等; 而它们的方向, 当 λ 与 μ 同号时, 都与 $\boldsymbol{a}$的方向一致, 当 λ 和 μ 异号时, 都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 因此向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 所以有

$$\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.}$$

2) 第一分配律 $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向,

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形. 假设 $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda+\mu>0$.

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形. 假设 $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda+\mu>0$. 这时 $-\mu(\lambda+\mu)>0$, 根据 (i) 有

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形. 假设 $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda+\mu>0$. 这时 $-\mu(\lambda+\mu)>0$, 根据 (i) 有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形. 假设 $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda+\mu>0$. 这时 $-\mu(\lambda+\mu)>0$, 根据 (i) 有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0, 那么等式显然成立. 因此只需证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$ 的情形, 分两种情况.

(i) $\lambda\mu>0$. 此时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

(ii) $\lambda\mu<0$. 不失一般性, 设 $\lambda>0,\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 只证前一种情形. 假设 $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda+\mu>0$. 这时 $-\mu(\lambda+\mu)>0$, 根据 (i) 有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

所以

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立.

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$$

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.
若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \;=\; \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \;=\; \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}] \\ &= (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}] \\ &= (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]\\ &= (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\\ &= \lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]\\ &= (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\\ &= \lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\mathbf{0}$, 等式显然成立. 因此不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\neq 0$, 分两种情况.

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 则

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{同向, 取}\quad m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\\[2ex] \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{反向, 取}\quad m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}.$$

依结合律和第一分配律有

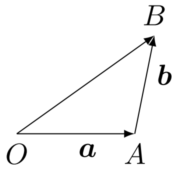
$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]\\ &= (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\\ &= \lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

故

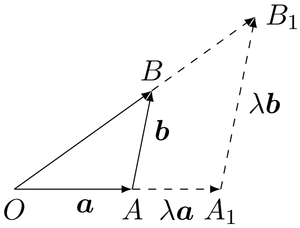
$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行.

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行.

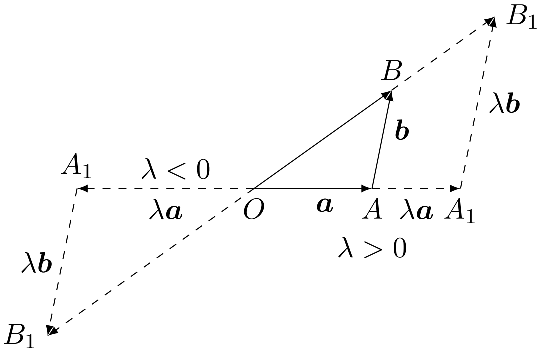


(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行.



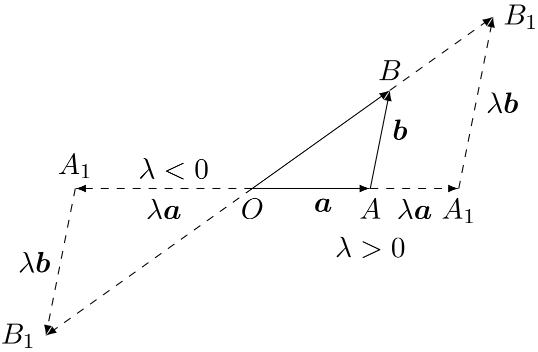
$\lambda > 0$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行.



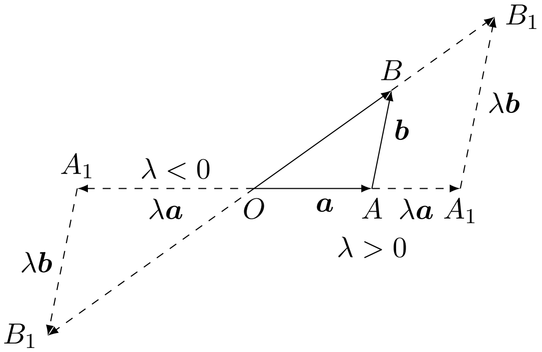
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$



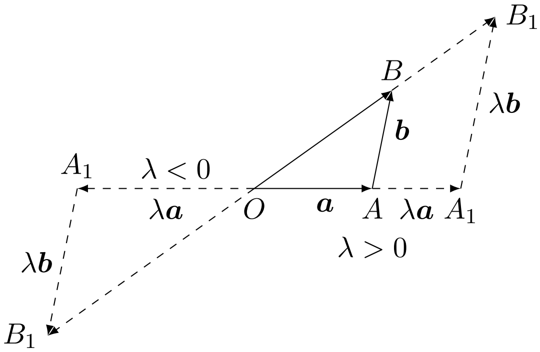
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$$



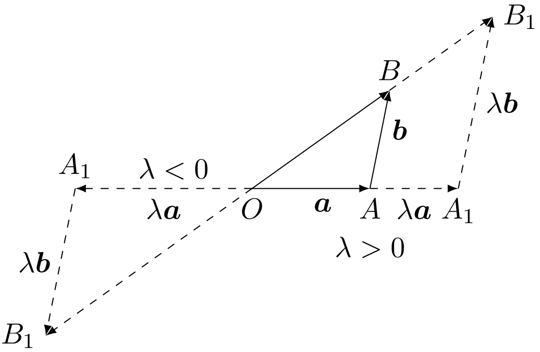
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$$
$$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$



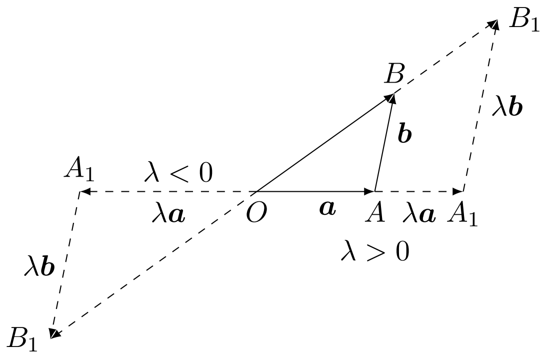
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$$
$$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \qquad \overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$



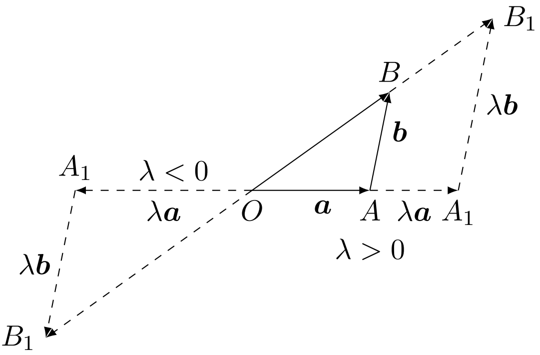
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 & \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, & \overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.}$$



(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

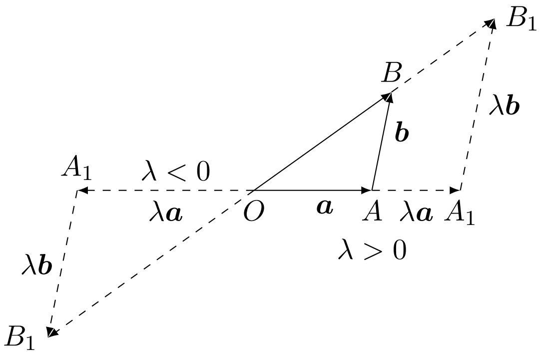
$$\left.\begin{array}{rcl} \triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 & \Rightarrow & \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, & & \overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$



总结： 向量也可以像实数及多项式那样去运算,

(ii) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\left.\begin{array}{ll}\triangle OAB\sim\triangle OA_1B_1 & \Rightarrow\quad \lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}\\ \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, & \overrightarrow{OB_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$

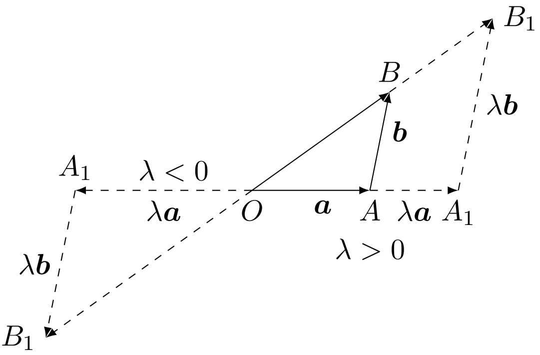


总结: 向量也可以像实数及多项式那样去运算, 例如

$$\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}-\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b})=$$

(ii) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\left.\begin{array}{ll}\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 & \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, & \overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$

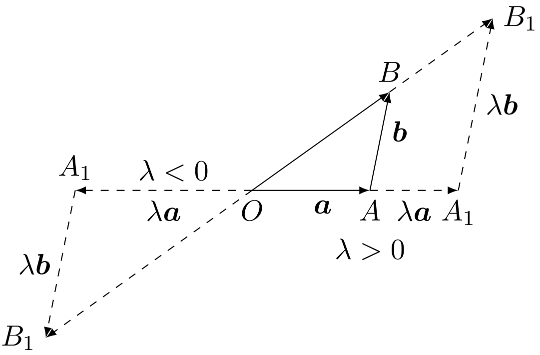


总结： 向量也可以像实数及多项式那样去运算, 例如

$$\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}-\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b}) = (\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)\boldsymbol{a}$$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行. 由图可得

$$\left.\begin{array}{lll} \triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 & \Rightarrow & \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, & & \overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$



总结: 向量也可以像实数及多项式那样去运算, 例如

$$\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}-\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b}) = (\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)\boldsymbol{a}-(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)\boldsymbol{b}.$$

例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

例 1

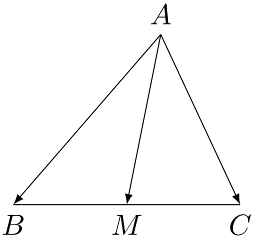
设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，

例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，

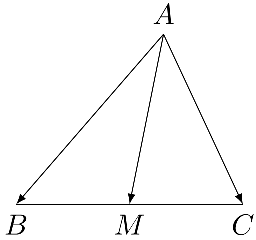


例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$



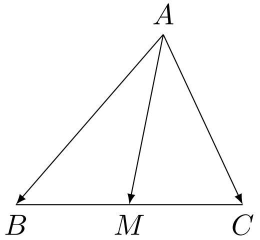
例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$



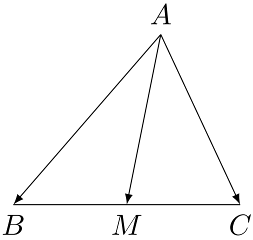
例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$



所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

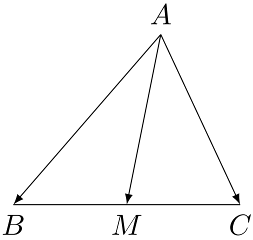
例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线, 求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示, 有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$



所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

但

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

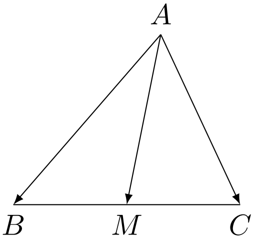
例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$



所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

但

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

因而

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

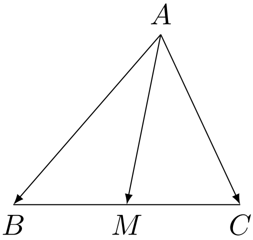
例 1

设AM是$\triangle ABC$的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 如图所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$



所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

但

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

因而

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

例 2

用向量法证明: 联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

例 2

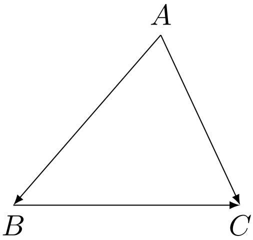
用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N
(如图),

例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

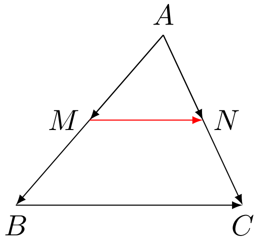
证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图),



例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图),

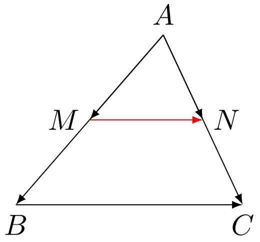


例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

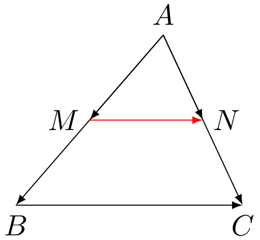


例 2

用向量法证明: 联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



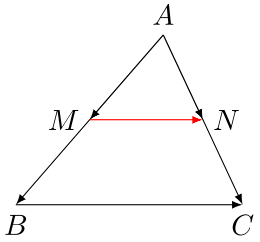
例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$



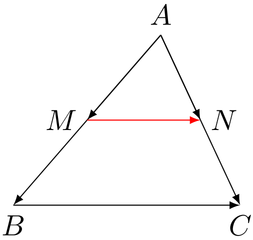
例 2

用向量法证明: 联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$



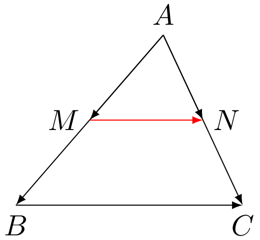
例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$



所以

$$\overrightarrow{MN} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BC},$$

例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

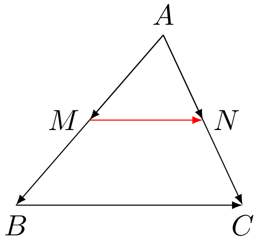
证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以

$$\overrightarrow{MN} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BC}, \quad |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$



例 2

用向量法证明：联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

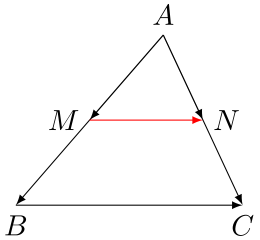
证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 之中点分别为 M, N (如图), 那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以

$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}, \quad |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$



由此例可见, 利用向量可以比较简洁地证明一些几何命题.

习题讲解：P 14, 习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},$$

习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\end{gathered}$$

习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}&=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}&=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

✍习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\end{gathered}$$

习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\
\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\\
\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},
\end{gathered}$$

习题讲解：P 14, 习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\\ \overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},\end{gathered}$$

且 $\lambda\neq 2$ (为什么?).

习题讲解：P 14, 习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\
\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\\
\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},
\end{gathered}$$

且 $\lambda\neq 2$ (为什么？). 所以

$$2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$$

习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\\ \overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},\end{gathered}$$

且 $\lambda\neq 2$ (为什么？). 所以

$$\begin{gathered}2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})\\ \Rightarrow\quad(\lambda-2)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\mathbf{0}\end{gathered}$$

✍习题讲解：P 14，习题 12

设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

证 易知

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},\\ \overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},\end{gathered}$$

且 $\lambda\neq 2$ (为什么？). 所以

$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})&=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})\\ \Rightarrow\quad(\lambda-2)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})&=\mathbf{0}\\ \Rightarrow\quad\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

✍课堂练习: P 13, 习题 2

(1) 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(2)已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(3) 从向量方程组 $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}, \\ 2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \end{cases}$ 解出向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

✍课堂练习: P 13, 习题 2

(1) 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;
(2)已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;
(3) 从向量方程组 $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}, \\ 2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \end{cases}$ 解出向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

答案: (1) $-2y\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{b}$;

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$,
$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$;

(3) $\boldsymbol{x}=\dfrac{3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}}{17}, \boldsymbol{y}=\dfrac{2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}}{17}$.

课堂练习: P 14, 习题 5

在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, \overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, 证明 $ABCD$ 为梯形.

课堂练习: P 14, 习题 5

在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, \overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, 证明 $ABCD$ 为梯形.

下一节