第一章 向量与坐标

§1.4 向量的线性关系与向量的分解

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§1.4 向量的线性关系与向量的分解

§1.4 向量的线性关系与向量的分解

教学内容: 如何将几何图形看成特定的向量集合

§1.4 向量的线性关系与向量的分解

教学内容: 如何将几何图形看成特定的向量集合

教学目的: 运用向量的线性运算表示几何图形中特定向量之间的关系

§1.4 向量的线性关系与向量的分解

教学内容: 如何将几何图形看成特定的向量集合

教学目的: 运用向量的线性运算表示几何图形中特定向量之间的关系

教学重难点: 向量的线性表示及向量的分解

❐ 线性组合

❒ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算.

❒ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算. 有限个向量通过线性运算, 它的结果仍然是向量.

❐ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算. 有限个向量通过线性运算, 它的结果仍然是向量.

☞**线性组合的定义** 由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 组成的向量

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n}$$

叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合(linear combination).

❐ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算. 有限个向量通过线性运算, 它的结果仍然是向量.

线性组合的定义 由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 组成的向量

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n}$$

叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合(linear combination).

当向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合时, 我们也说 $\boldsymbol{a}$ 可以由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示(linear representation),

❐ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算. 有限个向量通过线性运算, 它的结果仍然是向量.

☞**线性组合的定义** 由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 组成的向量

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n}$$

叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合(linear combination).

当向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合时, 我们也说 $\boldsymbol{a}$ 可以由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示(linear representation), 或者说, $\boldsymbol{a}$ 可以分解(decompose) 为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

❐ 线性组合

向量的加法和向量的数乘统称为向量的线性运算. 有限个向量通过线性运算, 它的结果仍然是向量.

☞**线性组合的定义** 由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 组成的向量

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n}$$

叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合(linear combination).

当向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合时, 我们也说 $\boldsymbol{a}$ 可以由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示(linear representation), 或者说, $\boldsymbol{a}$ 可以分解(decompose) 为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

对实数 λ, 我们约定 $\lambda \boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的线性组合.

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示,

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$.

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$. 则

$$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 同向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = \frac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$. 则

$$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 同向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = \frac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}$$

$$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 反向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = -\frac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r}\parallel\boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r},\boldsymbol{e}\text{ 同向} \quad\Rightarrow\quad \text{取 } x=\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \\[2ex] \boldsymbol{r},\boldsymbol{e}\text{ 反向} \quad\Rightarrow\quad \text{取 } x=-\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}.}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\text{ 同向} & \Rightarrow & \text{取 } x = \dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\text{ 反向} & \Rightarrow & \text{取 } x = -\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}.}$$

唯一性.

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\ \text{同向} \quad \Rightarrow \quad \text{取}\ x = \dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\ \text{反向} \quad \Rightarrow \quad \text{取}\ x = -\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}.}$$

唯一性.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e} = x'\boldsymbol{e}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 同向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = \dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \\[2ex] \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 反向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = -\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}.}$$

唯一性.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e} = x'\boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad (x - x')\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r}\,/\!/\,\boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{lll}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}\text{ 同向} & \Rightarrow & \text{取 } x=\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}\\[2ex] \boldsymbol{r},\boldsymbol{e}\text{ 反向} & \Rightarrow & \text{取 } x=-\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}.}$$

唯一性.

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}=x'\boldsymbol{e}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{r}(x-x')\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}\end{array}$$

定理1.4.1

若 $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线向量的基底(basis).

证 充分性. 显然.

必要性. 设 $\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{e}$. 则

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 同向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = \dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \\[2ex] \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e} \text{ 反向} \quad \Rightarrow \quad \text{取 } x = -\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}.}$$

唯一性.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e} = x'\boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} (x - x')\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x' = x.}$$

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示,

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$,

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定.

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 +$
$y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$.

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定．此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定．此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性：$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行（或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行），则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图).

定理1.4.2

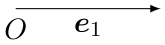
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图).



定理1.4.2

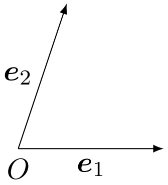
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图).



定理1.4.2

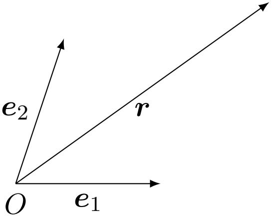
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图).



定理1.4.2

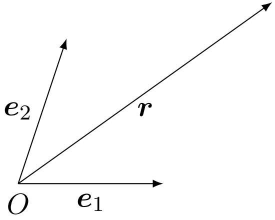
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行)，则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$,



定理1.4.2

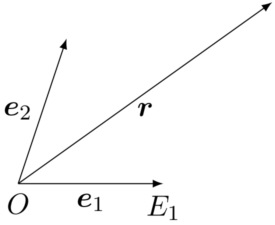
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行)，则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$,



定理1.4.2

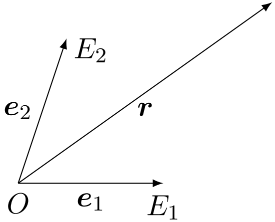
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定．此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行)，则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$,



定理1.4.2

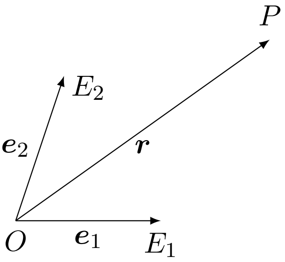
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定．此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底．

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行)，则由定理1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图)．设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$,



定理1.4.2

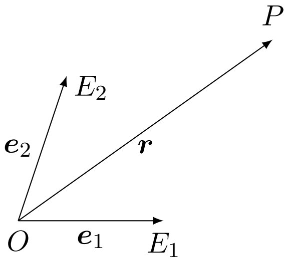
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行)，则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行，把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$，作平行四边形 $OAPB$.



定理1.4.2

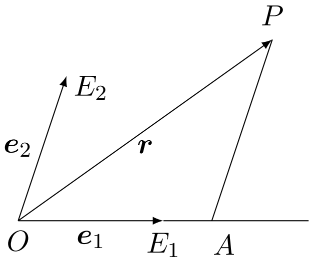
若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$, 作平行四边形 $OAPB$.



定理1.4.2

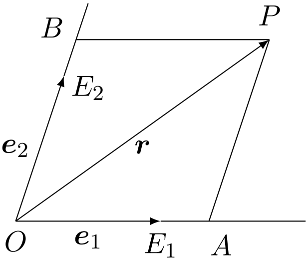
若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x,y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y=0$ (或 $x=0$).

若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$, $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$, 作平行四边形 $OAPB$.



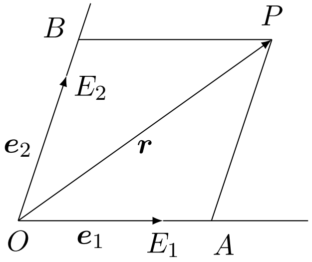
定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).



若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$, 作平行四边形 $OAPB$. 由定理 1.4.1, 可设 $\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{e}_2$,

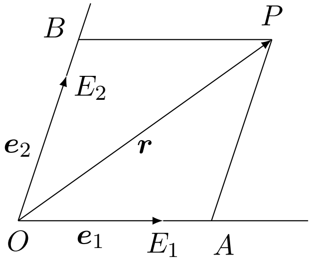
定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x,y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y=0$ (或 $x=0$).



若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$, $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$, 作平行四边形 $OAPB$. 由定理 1.4.1, 可设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{e}_2$, 所以根据向量加法的平行四边形法则, 有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

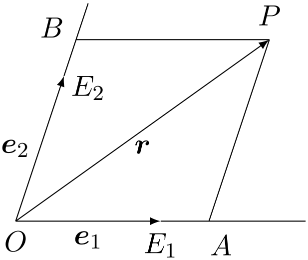
定理1.4.2

若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 称为共面向量的基底.

证 必要性: $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$共面 $\Rightarrow \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不平行 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面.

若 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1$ 平行 (或 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 平行), 则由定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y = 0$ (或 $x = 0$).



若 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1$ 不平行, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2$ 不平行, 把它们归结到共同的始点 O (如图). 设 $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$, 作平行四边形 $OAPB$. 由定理 1.4.1, 可设 $\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{e}_2$, 所以根据向量加法的平行四边形法则, 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 即

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.}$$

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面.

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定.

如果

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.
如果

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么

$$(x - x')\boldsymbol{e}_1 + (y - y')\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}.$$

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

如果

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么

$$(x - x')\boldsymbol{e}_1 + (y - y')\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}.$$

如果 $x - x' \neq 0$, 则 $\boldsymbol{e}_1 = -\dfrac{y - y'}{x - x'}\boldsymbol{e}_2$,

充分性: $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

如果

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么

$$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}.$$

如果 $x-x'\neq 0$, 则 $\boldsymbol{e}_1=-\dfrac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{e}_2$, 将有 $\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{e}_2$, 这与定理假设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线矛盾,

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.
如果

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么

$$(x - x')\boldsymbol{e}_1 + (y - y')\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}.$$

如果 $x - x' \neq 0$, 则 $\boldsymbol{e}_1 = -\dfrac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{e}_2$, 将有 $\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{e}_2$, 这与定理假设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线矛盾, 所以只能有$x = x'$.

充分性: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 由向量加法的平行四边形法则易知结论成立.

唯一性: 系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.
如果

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么

$$(x - x')\boldsymbol{e}_1 + (y - y')\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}.$$

如果 $x - x' \neq 0$, 则 $\boldsymbol{e}_1 = -\dfrac{y - y'}{x - x'}\boldsymbol{e}_2$, 将有 $\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{e}_2$, 这与定理假设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线矛盾, 所以只能有$x = x'$. 同理, $y = y'$, 所以 x, y 被唯一确定.

定理1.4.3

如果向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面，则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 线性表示，

定理1.4.3

如果向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面，则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$，且其中系数 x, y, z 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

定理1.4.3

如果向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面，则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$，且其中系数 x, y, z 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 称为空间向量的基底.

定理1.4.3

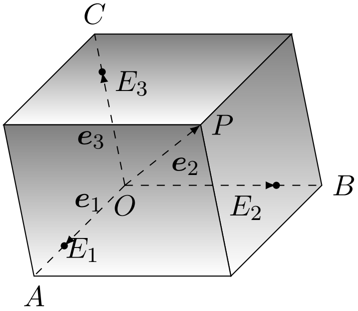
如果向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面, 则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$, 且其中系数 x, y, z 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 称为空间向量的基底.

证 (✍课堂练习.)

定理1.4.3

如果向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面，则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示，即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$，且其中系数 x, y, z 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 此时的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 称为空间向量的基底.

证 (✍课堂练习.)

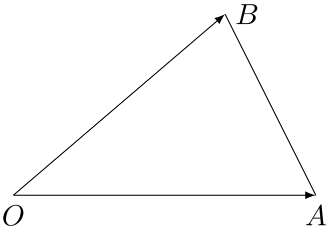


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,

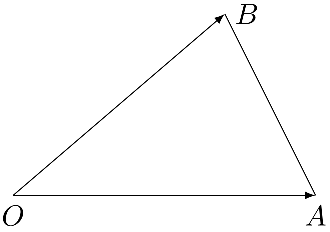
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$,



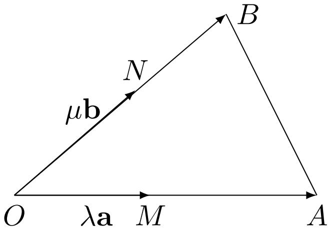
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$.



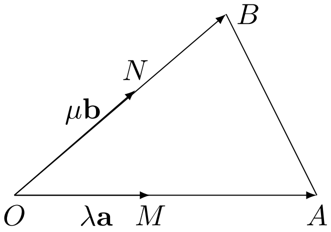
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$.



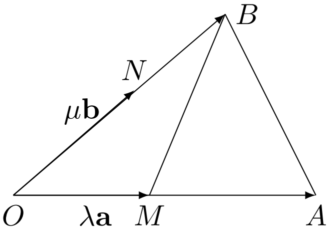
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.



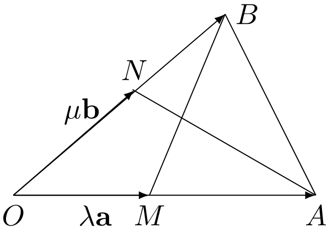
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.



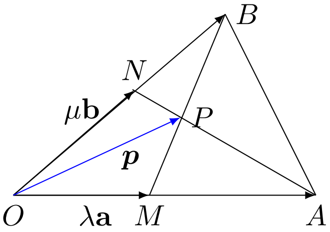
例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.



例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

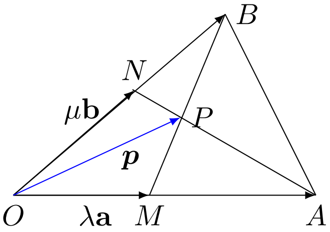


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}$$

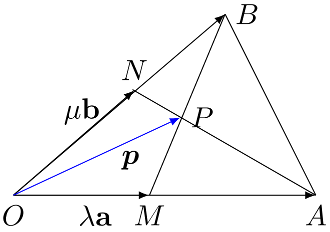


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

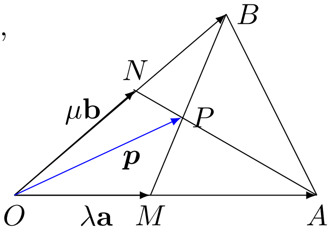


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$

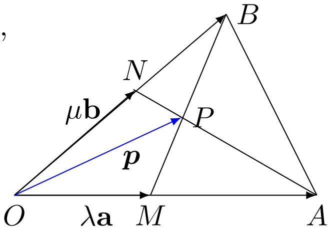


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})$$

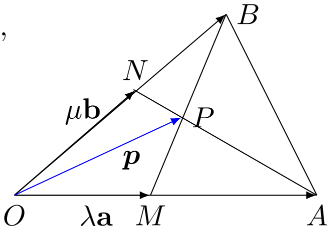


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



例 1

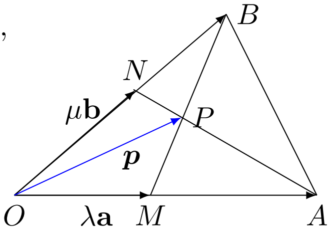
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$$



例 1

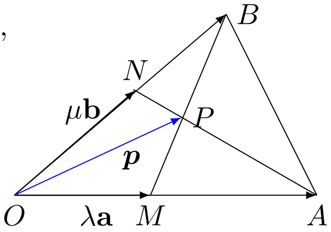
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),\\ \overrightarrow{NP}&=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$



例 1

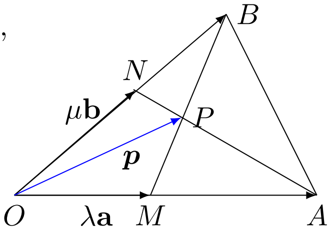
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})$$



例 1

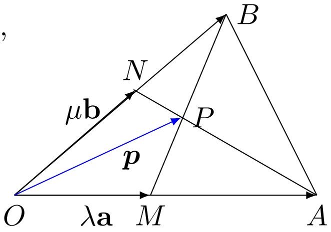
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$



例 1

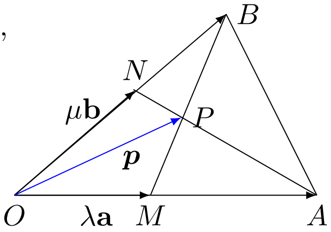
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),\\ \overrightarrow{NP}&=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\ &=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\end{aligned}$$

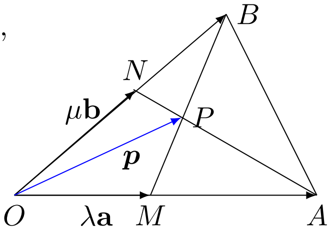


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\\&=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

例 1

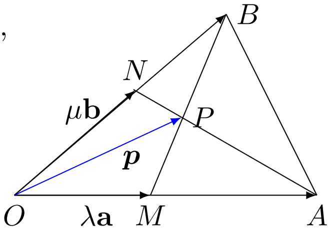
已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\\&=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

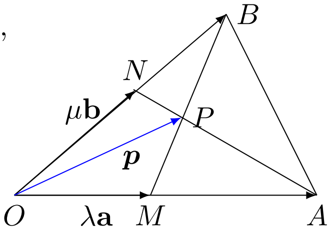


例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$
$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

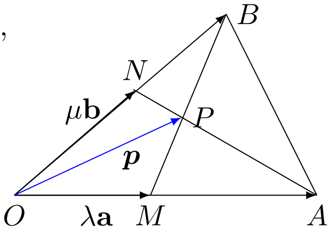
$$\Bigg\{$$

例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\\&=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

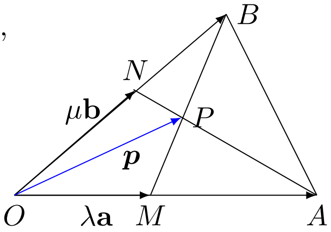
$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ \end{cases}$$

例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 是边 OA, OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1), \overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\\&=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

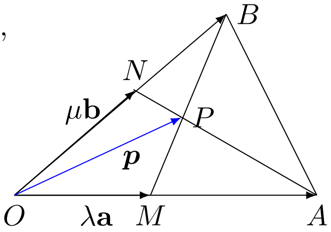
$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}$$

例 1

已知 $\triangle OAB$, 其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M,N 是边 OA,OB 上的点, 且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}(0<\lambda<1),\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$. 设 AN 与 BM 交于 P, 试将向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{p}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}\\&=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\m=\mu(1-n).\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

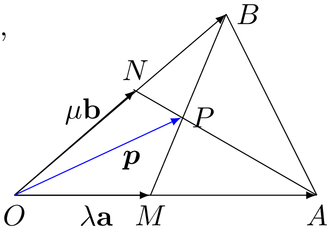
由上面方程组解得

解 设

$$\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{MB} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = m(\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP} = n\overrightarrow{NA} = n(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = n(\boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$
$$= \lambda\boldsymbol{a} + m(\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(1-m)\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$
$$= \mu\boldsymbol{b} + n(\boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{b}) = n\boldsymbol{a} + \mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$



因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

$$\begin{cases} \lambda(1-m) = n, \\ m = \mu(1-n). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda m + n = \lambda, \\ m + \mu n = \mu. \end{cases}$$

由上面方程组解得

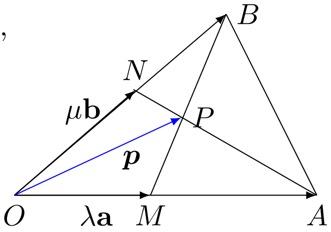
$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},$$

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$
$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$



因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

由上面方程组解得

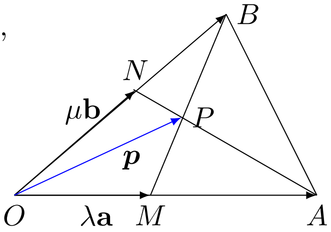
$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

解 设

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$
$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$



因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

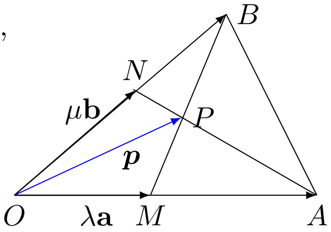
由上面方程组解得

$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

所以得

$$\boldsymbol{p}=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$
$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

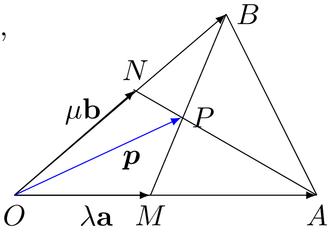
由上面方程组解得

$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

所以得

$$\boldsymbol{p}=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\lambda\left[1-\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\right]\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$



所以

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$
$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

由上面方程组解得

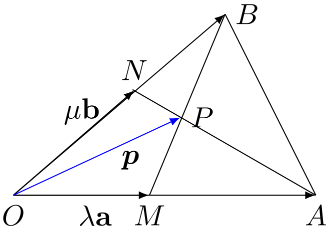
$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

所以得

$$\boldsymbol{p}=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\lambda\left[1-\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\right]\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b},$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{p}=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b}.}$$



$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

由上面方程组解得

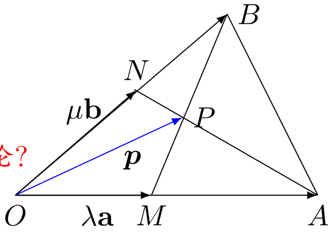
$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

所以得

$$\boldsymbol{p}=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\lambda\left[1-\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\right]\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b},$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{p}=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b}.}$$



✍思考: 当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时, 你能得到什么结论?

$$=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 由线性表示唯一性得

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda m+n=\lambda,\\ m+\mu n=\mu.\end{cases}$$

例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

分析：题目不仅要求证明对边中点连线共点，且要证相互平分，看上去好像难度增加，其实给出了证明思路：

例 2

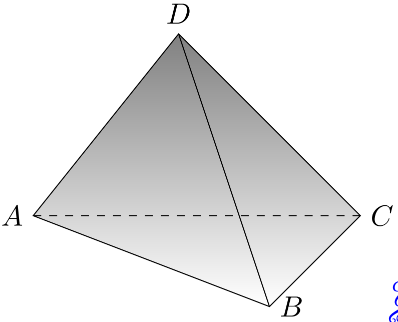
证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

分析：题目不仅要求证明对边中点连线共点，且要证相互平分，看上去好像难度增加，其实给出了证明思路：只需证明任一对对边中点连线的中点是同一个点(或定点)即可.

例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

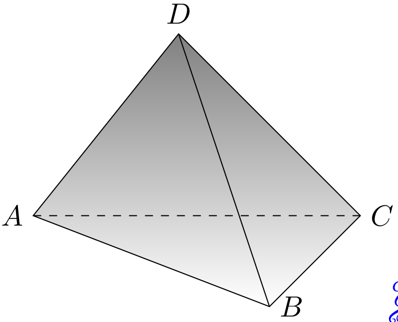
证



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

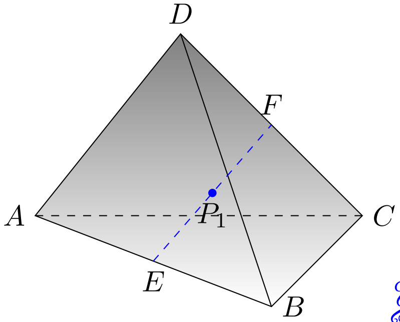
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图),



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

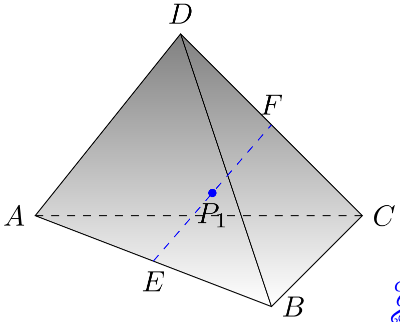
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图),



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

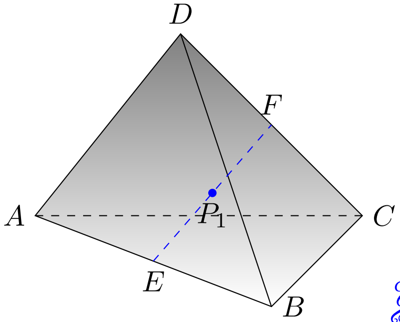
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可.



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

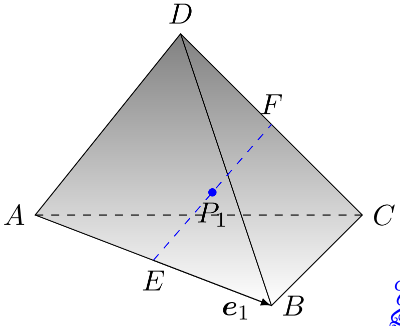
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

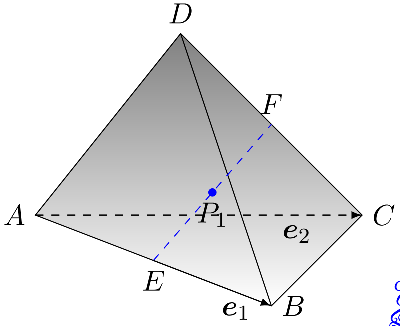
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

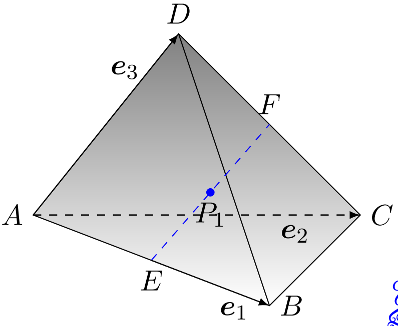
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为 P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

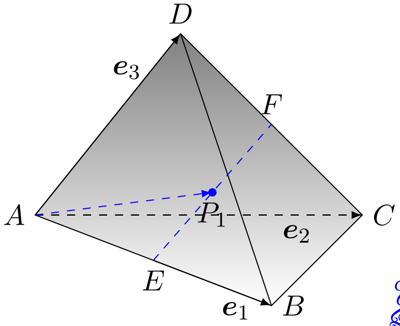
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

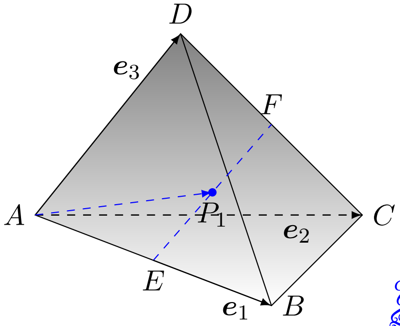
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

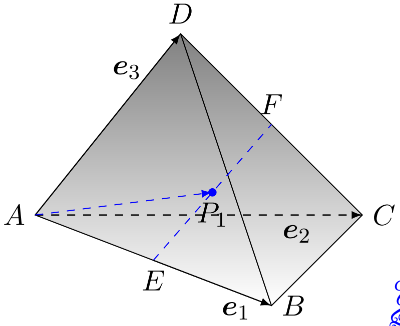
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式.



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

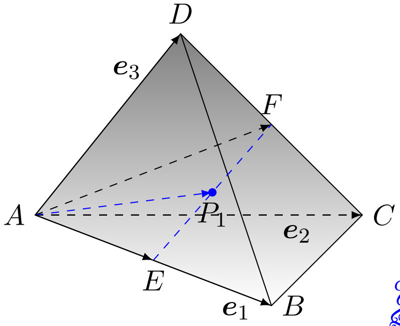
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

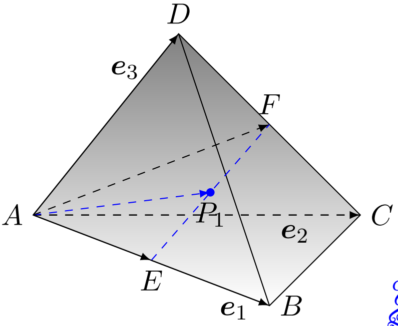
证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF,



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

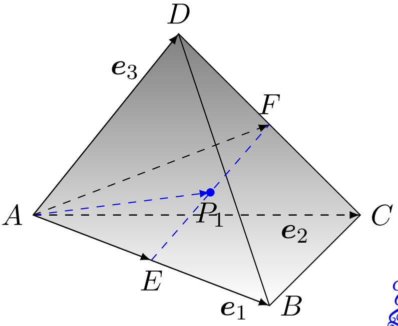


例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$



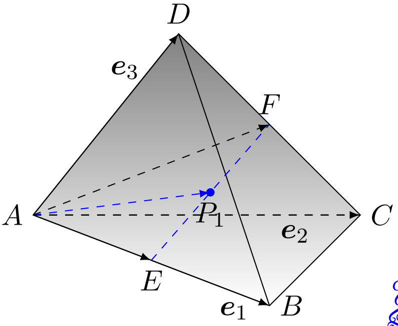
例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故



例 2

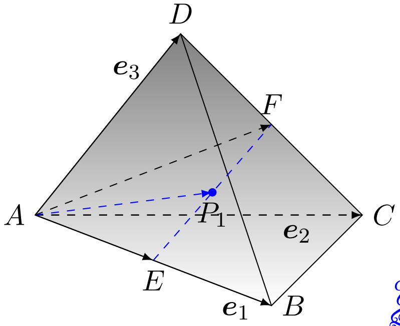
证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

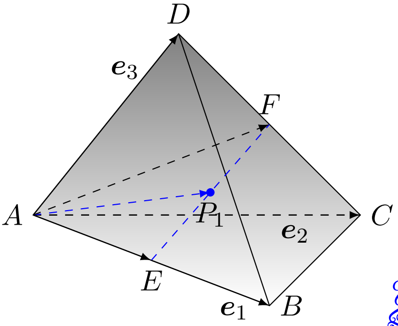
又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

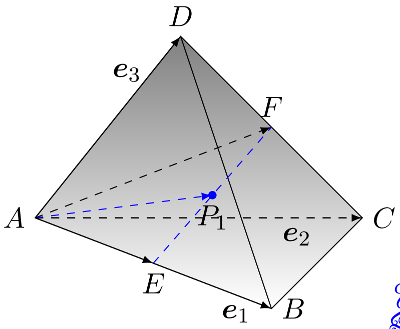
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)\right]$$



例 2

证明四面体对边中点的连线交于一点且相互平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1(如图), 其余两组对边中点连线的中点为P_2, P_3. 只要证明 P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

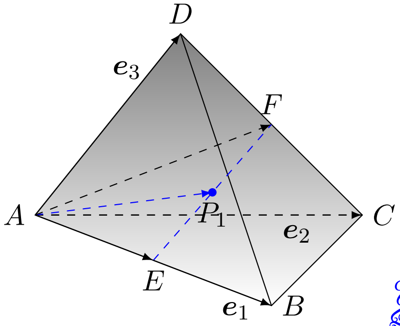
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)\right] = \frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

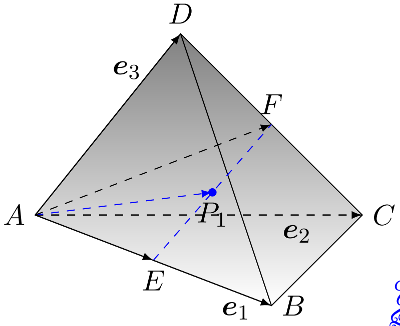


同理可得

$$\overrightarrow{AP_i}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\quad i=2,3,$$

P_1,P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}).$$



又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_1}&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\right]\\&=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).\end{aligned}$$

同理可得

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3), \quad i = 2, 3,$$

所以 $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AP_3}$, 故 P_1, P_2, P_3 三点重合, 证完.

P_1, P_2 与 P_3 三点重合即可. 令 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性表示式. 联结 AF, 由于 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 故有

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$

又因为 AF 是 ΔACD 的中线, 故

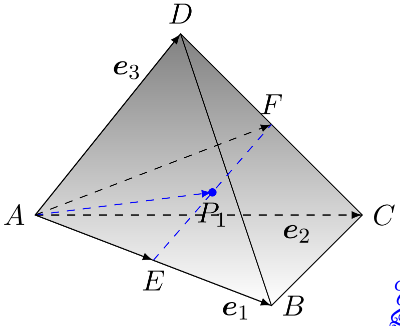
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)\right] = \frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$



❒ 线性相关与线性无关

❐ 线性相关与线性无关

☞**线性相关与线性无关的定义** 对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boxed{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},}$$

❐ 线性相关与线性无关

线性相关与线性无关的定义 对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boxed{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0},}$$

那么就称这 n 个向量线性相关 (linearly dependence),

❐ 线性相关与线性无关

☞**线性相关与线性无关的定义** 对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boxed{\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},}$$

那么就称这 n 个向量线性相关 (linearly dependence), 否则就称它们线性无关 (linearly independence).

❒ 线性相关与线性无关

☞**线性相关与线性无关的定义** 对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boxed{\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0},}$$

那么就称这 n 个向量线性相关 (linearly dependence), 否则就称它们线性无关 (linearly independence). 换言之, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性无关的就是指: 上式只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 才成立.

线性相关与线性无关

线性相关与线性无关的定义 对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boxed{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},}$$

那么就称这 n 个向量线性相关 (linearly dependence), 否则就称它们线性无关 (linearly independence). 换言之, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性无关的就是指: 上式只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 才成立.

推论

单个向量 $\boldsymbol{a}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时，向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时，向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性.

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时，向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，即
$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0,

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关, 即
$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0,
不妨设 $\lambda_n \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1}.$$

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关, 即
$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0, 不妨设 $\lambda_n \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1}.$$

充分性.

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时，向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，即 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0，不妨设 $\lambda_n \neq 0$，那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1}.$$

充分性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一个向量，不妨设 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成其余向量的线性组合，

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关, 即 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0, 不妨设 $\lambda_n \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1}.$$

充分性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一个向量, 不妨设 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成其余向量的线性组合, 即

$$\boldsymbol{a}_n = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1},$$

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关, 即
$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0, 不妨设 $\lambda_n \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1}.$$

充分性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一个向量, 不妨设 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成其余向量的线性组合, 即

$$\boldsymbol{a}_n = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1},$$

改写一下, 就有 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} - \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$.

定理 1.4.4

当 $n \geq 2$ 时, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关, 即 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不为 0, 不妨设 $\lambda_n \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} \boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \boldsymbol{a}_{n-1}.$$

充分性. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一个向量, 不妨设 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成其余向量的线性组合, 即

$$\boldsymbol{a}_n = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1},$$

改写一下, 就有 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1} - \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$. 由 $-1 \neq 0$ 可知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关，那么这一组向量就线性相关.

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一部分向量, 比如说前 s 个向量 $(s \leq n)$, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关,

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一部分向量, 比如说前 s 个向量 $(s \leq n)$, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关, 那么就有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}.$$

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一部分向量, 比如说前 s 个向量 $(s \leq n)$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关, 那么就有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}.$$

由上式显然有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{a}_s + 0\boldsymbol{a}_{s+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一部分向量, 比如说前 s 个向量 $(s \leq n)$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关, 那么就有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}.$$

由上式显然有

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s + 0\boldsymbol{a}_{s+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 不全为零, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

定理1.4.5

如果一组向量中的部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一部分向量, 比如说前 s 个向量 $(s \leq n)$, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关, 那么就有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{a}_s = \mathbf{0}.$$

由上式显然有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{a}_s + 0\boldsymbol{a}_{s+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0},$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 不全为零, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

推论

一组向量如果含有零向量, 那么这组向量必然线性相关.

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

充分性. 假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 λ, μ 使得

$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

充分性. 假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 λ, μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $\lambda \neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b},$$

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

充分性. 假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 λ, μ 使得 $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. 不妨设 $\lambda \neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \boldsymbol{b},$$

由定理 1.4.1立即有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

充分性. 假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $\lambda\neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b},$$

由定理 1.4.1立即有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

必要性. 假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 由定理 1.4.1知存在某个非零的 x 使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b},$$

定理1.4.6

两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是它们线性相关.

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少一个为零向量, 则结论显然成立, 现考虑它们都不为零向量的情形.

充分性. 假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $\lambda\neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b},$$

由定理 1.4.1立即有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

必要性. 假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 由定理 1.4.1知存在某个非零的 x 使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b},$$

即 $\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 也即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

定理1.4.6告诉我们, 如果要判别两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 只要判别是否存在两个不全为零的数 λ, μ 使得

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

定理1.4.6告诉我们, 如果要判别两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 只要判别是否存在两个不全为零的数 λ, μ 使得

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

类似地, 还可以证明下面的定理.

定理1.4.6告诉我们, 如果要判别两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 只要判别是否存在两个不全为零的数 λ, μ 使得

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

类似地, 还可以证明下面的定理.

定理1.4.7

三个向量共面的充要条件是它们线性相关.

定理1.4.6告诉我们, 如果要判别两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 只要判别是否存在两个不全为零的数 λ,μ 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

类似地, 还可以证明下面的定理.

定理1.4.7

三个向量共面的充要条件是它们线性相关.

证 (略.)

定理1.4.6告诉我们, 如果要判别两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 只要判别是否存在两个不全为零的数 λ,μ 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

类似地, 还可以证明下面的定理.

定理1.4.7

三个向量共面的充要条件是它们线性相关.

证 (略.)

定理1.4.7是定理1.4.6的推广, 要判别三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面, 只要判别是否存在三个不全为零的数 λ,μ,ν, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关, 则由定理 1.4.5, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 线性相关;

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关, 则由定理 1.4.5, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 线性相关; 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关, 则由定理 1.4.7知它们不共面,

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关, 则由定理 1.4.5, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 线性相关; 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关, 则由定理 1.4.7知它们不共面, 于是再由定理 1.4.3知 $\boldsymbol{d}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c},$$

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关, 则由定理 1.4.5, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 线性相关; 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关, 则由定理 1.4.7知它们不共面, 于是再由定理 1.4.3知 $\boldsymbol{d}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c},$$

最后由定理 1.4.4知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 线性相关.

定理1.4.8

空间中任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 总是线性相关的.

证 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关, 则由定理 1.4.5, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 线性相关; 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性无关, 则由定理 1.4.7知它们不共面, 于是再由定理 1.4.3知 $\boldsymbol{d}$ 可以写成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c},$$

最后由定理 1.4.4知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 线性相关.
由定理1.4.8和定理 1.4.5立即可得:

推论

空间中四个以上的向量总是线性相关的.

例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \mathbf{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性.

例3

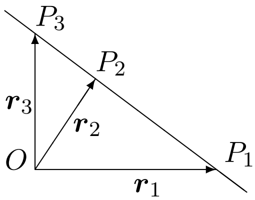
设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线,

例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

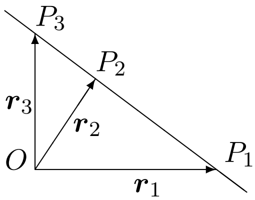
证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线,



例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关,

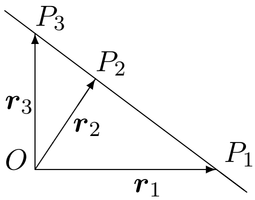


例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \mathbf{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使

$$\lambda_1 \overrightarrow{P_1P_3} + \lambda_2 \overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{0},$$



例3

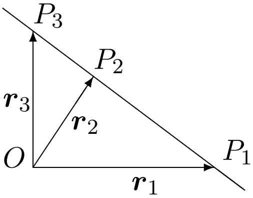
设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3)$, 试证 P_1,P_2,P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1,P_2,P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3}\,/\!/\,\overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1,λ_2 使

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0},$$

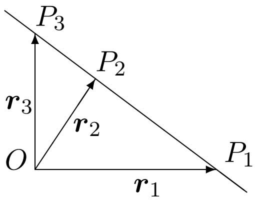


例3

设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3)$, 试证 P_1,P_2,P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1,P_2,P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3}\parallel\overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1,λ_2 使

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{0},$$



即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0},$$

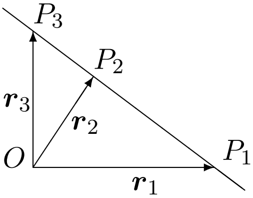
由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

例3

设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3)$, 试证 P_1,P_2,P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1,P_2,P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3}\parallel\overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1,λ_2 使



$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0},$$

由此得

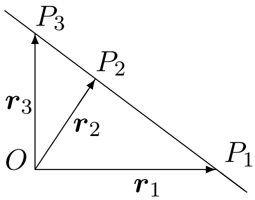
$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使



$$\lambda_1 \overrightarrow{P_1P_3} + \lambda_2 \overrightarrow{P_2P_3} = \boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{0},$$

由此得

$$\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}.$$

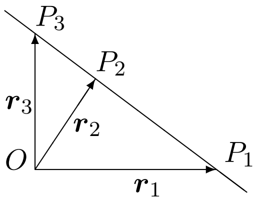
令 $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ 即得结论.

充分性.

例3

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i(i=1,2,3)$, 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使



$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3} + \lambda_2\overrightarrow{P_2P_3} = \boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{0},$$

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}.$$

令 $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0} \quad (*)$$

且

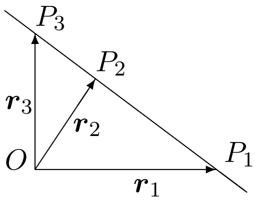
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

证 必要性. 如图, 设 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0},$$



由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

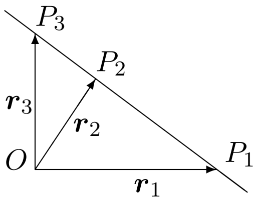
$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0} \qquad (*)$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

由条件不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$,

证 必要性. 如图, 设 P_1,P_2,P_3 三点共线, 则 $\overrightarrow{P_1P_3}\parallel\overrightarrow{P_2P_3}$, 从而线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1,λ_2 使



$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0},$$

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0} \tag{*}$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

由条件不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$, 代入(*)式整理得

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0},$$

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

由条件不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$, 代入(*)式整理得

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{0}.$$

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

由条件不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$, 代入$(*)$式整理得

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0},$$

即

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{0}.$$

由 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$ 知 λ_1,λ_2 不全为零, 所以 $\overrightarrow{P_1P_3}\parallel\overrightarrow{P_2P_3}$,

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0} \qquad (*)$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

由条件不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$, 代入(*)式整理得

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$ 知 λ_1,λ_2 不全为零, 所以 $\overrightarrow{P_1P_3}\,/\!\!/\,\overrightarrow{P_2P_3}$, 即 P_1,P_2,P_3 三点共线.

由此得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2-(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}.$$

令 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$ 即得结论.

充分性. 设有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

✍课堂练习: P 23, 习题 10

设 $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 试证 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3 + \lambda_4\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

课堂练习: P 23, 习题 10

设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3,4)$, 试证 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3+\lambda_4\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{0}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$.

下一节