第三章 平面与空间直线

§3.7 空间两直线的相关位置

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§3.7 空间两直线的相关位置

§3.7 空间两直线的相关位置

教学内容: 空间两直线的位置关系及相关问题

§3.7 空间两直线的相关位置

教学内容: 空间两直线的位置关系及相关问题

教学目的: 理解并能判断空间两直线的位置关系，会求两条直线的夹角及异面直线的距离与公垂线方程

§3.7 空间两直线的相关位置

教学内容: 空间两直线的位置关系及相关问题

教学目的: 理解并能判断空间两直线的位置关系, 会求两条直线的夹角及异面直线的距离与公垂线方程

教学重难点: 两异面直线间的距离及公垂线方程

❒ 空间两直线的相关位置

❐ 空间两直线的相关位置

空间两直线的位置有异面和共面，在共面中又有相交、平行和重合三种情形.

❒ 空间两直线的相关位置

空间两直线的位置有异面和共面, 在共面中又有相交、平行和重合三种情形. 现在我们来导出这些相关位置成立的条件.

❒ 空间两直线的相关位置

空间两直线的位置有异面和共面，在共面中又有相交、平行和重合三种情形. 现在我们来导出这些相关位置成立的条件.

设两直线 l_1 与 l_2 的方程为

$$l_1 : \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1},$$

❐ 空间两直线的相关位置

空间两直线的位置有异面和共面，在共面中又有相交、平行和重合三种情形. 现在我们来导出这些相关位置成立的条件.
设两直线 l_1 与 l_2 的方程为

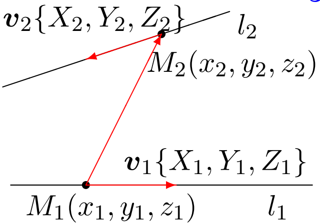
$$l_1 : \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$
$$l_2 : \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2},$$

❒ 空间两直线的相关位置

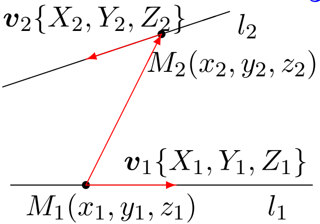
空间两直线的位置有异面和共面, 在共面中又有相交、平行和重合三种情形. 现在我们来导出这些相关位置成立的条件.
设两直线 l_1 与 l_2 的方程为

$$l_1 : \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$
$$l_2 : \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2},$$

这里的 l_i 是由点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 与向量 $\boldsymbol{v}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}$ 决定的, 其中 $i = 1, 2$.

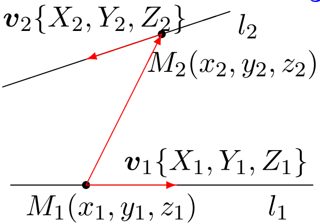

$\boldsymbol{v}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$
l_2
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$\boldsymbol{v}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$
$M_1(x_1, y_1, z_1)$
l_1

l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面

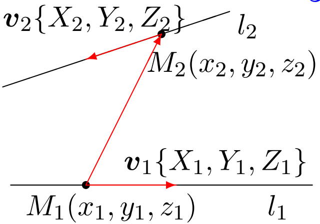


l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面

$\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;



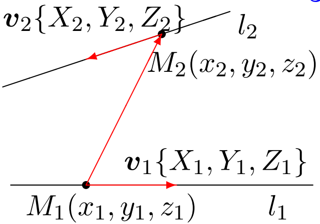
l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面
$\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;
l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;



l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面 $\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;

l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;

l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;

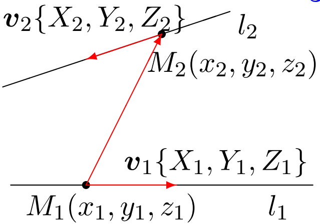


l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面 $\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;

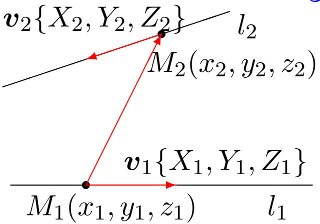
l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;

l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;

l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.



l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面
$\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;
l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;
l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;
l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.



定理 3.7.1

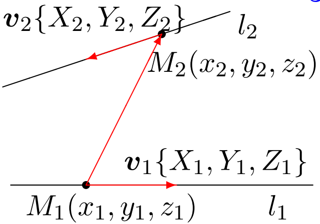
判断空间两直线l_1与l_2的相关位置的充要条件为

l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面
$\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;

l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;

l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;

l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.

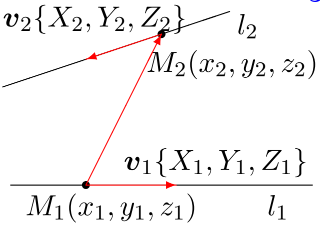


定理 3.7.1

判断空间两直线l_1与l_2的相关位置的充要条件为

(1) 异面: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0}$;

l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面
$\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;
l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;
l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;
l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.



定理 3.7.1

判断空间两直线l_1与l_2的相关位置的充要条件为

(1) 异面: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0}$;

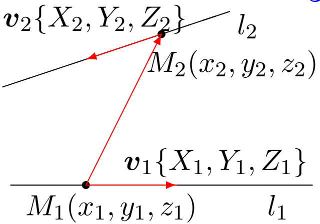
(2) 相交: $\boxed{\Delta = 0, X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2}$;

l_1, l_2 异 面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不 共 面 $\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;

l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;

l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;

l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.



定理 3.7.1

判断空间两直线l_1与l_2的相关位置的充要条件为

(1) 异面: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0}$;

(2) 相交: $\boxed{\Delta = 0, X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2}$;

(3) 平行:

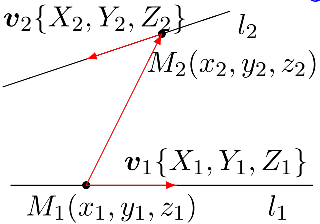
$\boxed{X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)}$;

l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共面 $\Leftrightarrow$ $\Delta := (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$;

l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ 且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不平行;

l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不平行;

l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 相互平行.



定理 3.7.1

判断空间两直线l_1与l_2的相关位置的充要条件为

(1) 异面: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0}$;

(2) 相交: $\boxed{\Delta = 0, X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2}$;

(3) 平行:

$\boxed{X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)}$;

(4) 重合: $\boxed{X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)}$.

✍课堂练习: P 131, 习题 1

直线方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使 (1) 直线与 x 轴相交; (2) 直线与 x 轴平行; (3) 直线与 x 轴重合.

课堂练习: P 131, 习题 1

直线方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使 (1) 直线与 x 轴相交; (2) 直线与 x 轴平行; (3) 直线与 x 轴重合.

答案: (1) A_1 与 A_2 不全为零, $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$;

课堂练习: P 131, 习题 1

直线方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使 (1) 直线与 x 轴相交; (2) 直线与 x 轴平行; (3) 直线与 x 轴重合.

答案: (1) A_1 与 A_2 不全为零, $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$;

(2) $A_1=A_2=0$, D_1 与 D_2 不全为零;

✍课堂练习: P 131, 习题 1

直线方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使
(1) 直线与 x 轴相交; (2) 直线与 x 轴平行; (3) 直线与 x 轴重合.

答案: (1) A_1 与 A_2 不全为零, $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$;
(2) $A_1 = A_2 = 0$, D_1 与 D_2 不全为零;
(3) $A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = 0$.

❒ 空间两直线的夹角

❐ 空间两直线的夹角

☞**定义** 平行于空间两直线 l_1, l_2 的两向量间的角, 叫做空间两直线的夹角, 记做 $\angle(l_1, l_2)$.

❐ 空间两直线的夹角

☞**定义** 平行于空间两直线 l_1, l_2 的两向量间的角, 叫做空间两直线的夹角, 记做 $\angle(l_1, l_2)$.

空间两直线 l_1, l_2 的夹角, 如果用它们的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的角来表示, 就是

❐ 空间两直线的夹角

☞**定义** 平行于空间两直线 l_1, l_2 的两向量间的角, 叫做空间两直线的夹角, 记做 $\angle(l_1, l_2)$.

空间两直线 l_1, l_2 的夹角, 如果用它们的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的角来表示, 就是

$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \text{ 或 } \angle(l_1, l_2) = \pi - \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$

❒ 空间两直线的夹角

☞**定义** 平行于空间两直线 l_1, l_2 的两向量间的角, 叫做空间两直线的夹角, 记做 $\angle(l_1, l_2)$.

空间两直线 l_1, l_2 的夹角, 如果用它们的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的角来表示, 就是

$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \text{ 或 } \angle(l_1, l_2) = \pi - \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$

于是我们得到了以下定理:

定理 3.7.2

在直角坐标系下，空间两直线l_1, l_2的夹角的余弦为

$$\boxed{\cos\angle(l_1, l_2) = \pm\frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.}$$

定理 3.7.2

在直角坐标系下，空间两直线l_1, l_2的夹角的余弦为

$$\boxed{\cos\angle(l_1, l_2) = \pm\frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.}$$

推论

两直线l_1, l_2垂直的充要条件是

$$\boxed{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.}$$

❒ 两异面直线间的距离与公垂线的方程

❐ 两异面直线间的距离与公垂线的方程

☞**两直线间距离的定义** 空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离.

❐ 两异面直线间的距离与公垂线的方程

☞**两直线间距离的定义** 空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离.

显然，两相交直线之间的距离为零;

❒ 两异面直线间的距离与公垂线的方程

☞**两直线间距离的定义** 空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离.

显然，两相交直线之间的距离为零；两平行直线间的距离等于其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离.

❒ 两异面直线间的距离与公垂线的方程

☞**两直线间距离的定义** 空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离.

显然，两相交直线之间的距离为零；两平行直线间的距离等于其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离.

☞**公垂线的定义** 与两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两异面直线的公垂线，两个交点之间的线段长叫做公垂线的长.

定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

定理3.7.3

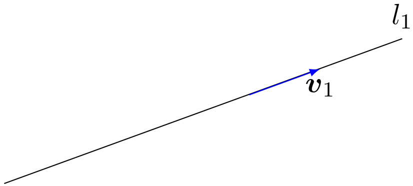
两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2,

定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

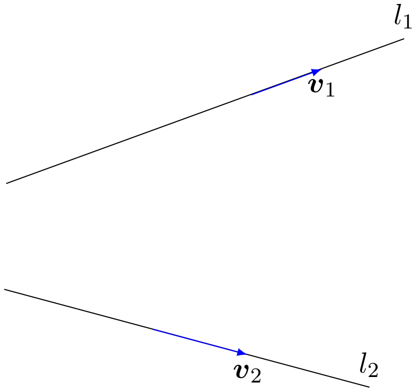
证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2,



定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

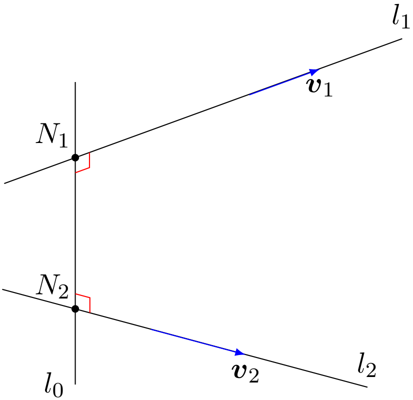
证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2,



定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

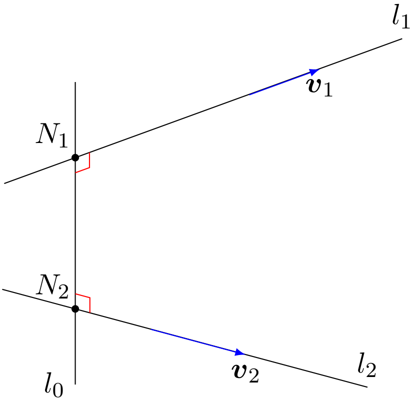
证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2,



定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

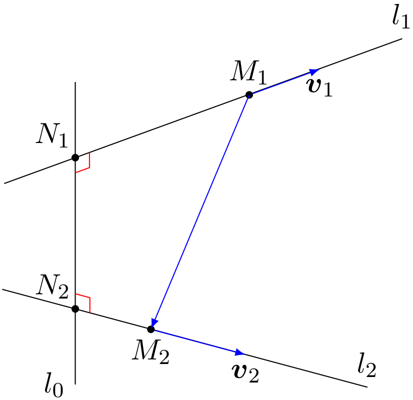
证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点,



定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点,

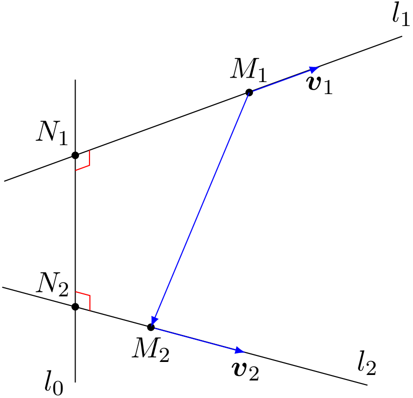


定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点, 于是公垂线的长

$$|\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|$$



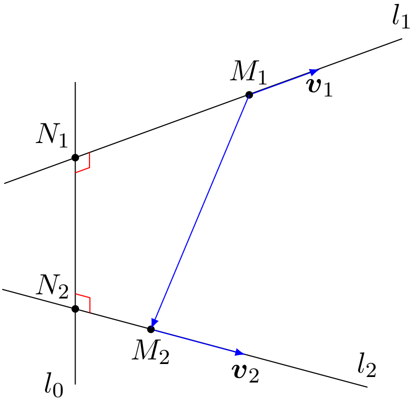
定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点, 于是公垂线的长

$$|\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\cos\angle(l_0, \overrightarrow{M_1M_2})|$$

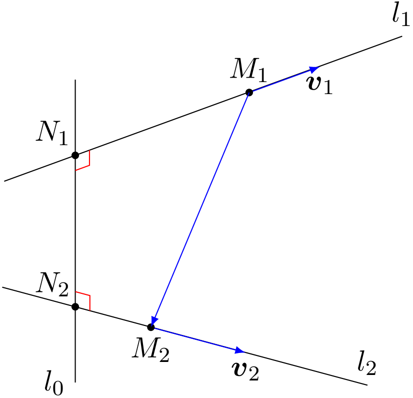


定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点, 于是公垂线的长

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{N_1N_2}| &= |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}| \\
&= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\cos\angle(l_0, \overrightarrow{M_1M_2})| \\
&\leq |\overrightarrow{M_1M_2}|,
\end{aligned}
$$

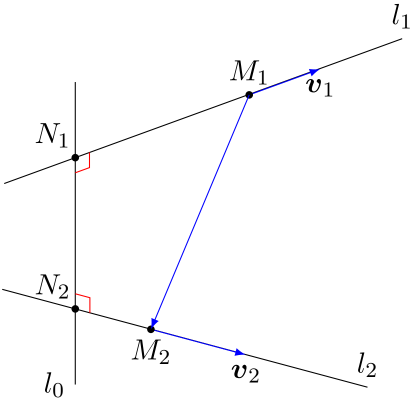


定理3.7.3

两异面直线间的距离等于它们公垂线的长.

证 如图, 设两异面直线 l_1, l_2 与它们的公垂线的交点分别为 N_1, N_2, 而 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 上的任意点, 于是公垂线的长

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{N_1N_2}| &= |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}| \\
&= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\cos\angle(l_0, \overrightarrow{M_1M_2})| \\
&\le |\overrightarrow{M_1M_2}|,
\end{aligned}
$$



于是由 M_1, M_2 的任意性, 知线段 N_1N_2 的长度为 l_1, l_2 之间的距离.

定理3.7.4

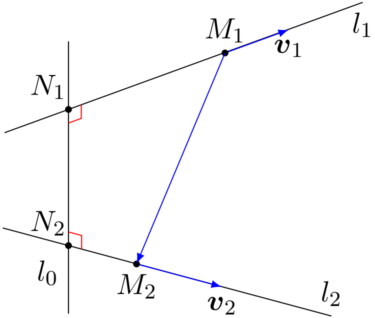
两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$

定理3.7.4

两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$



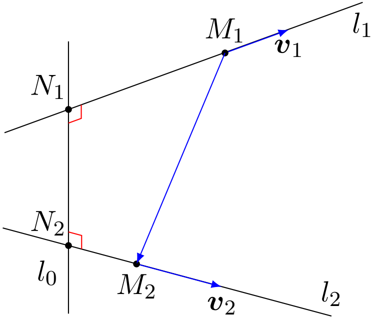
定理3.7.4

两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$

证 由前知，两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长，即

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$



定理3.7.4

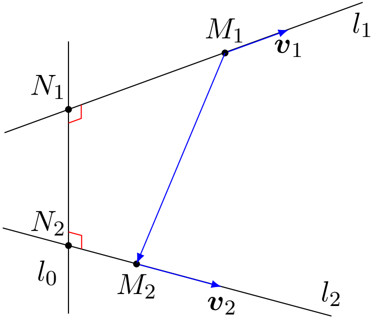
两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.}$$

证 由前知, 两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长, 即

$$d=|\overrightarrow{N_1N_2}|=|\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标,



定理3.7.4

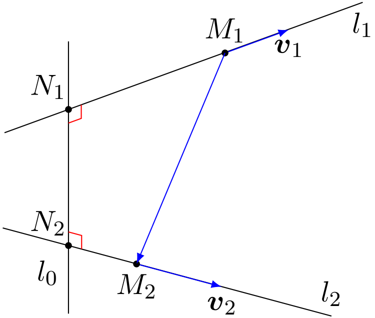
两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$

证 由前知, 两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长, 即

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标, 而 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 显然平行于公垂线,



定理3.7.4

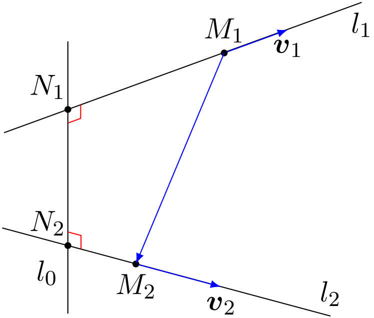
两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$

证 由前知，两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长，即

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标，而 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 显然平行于公垂线，即 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 是公垂线 l_0 的一个方向向量，



定理3.7.4

两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

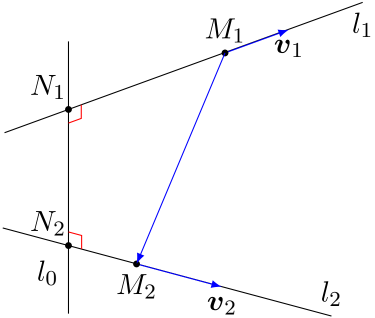
$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.}$$

证 由前知，两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长，即

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标，而 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 显然平行于公垂线，即 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 是公垂线 l_0 的一个方向向量，因此

$$d = |\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2}\overrightarrow{M_1M_2}|$$



定理3.7.4

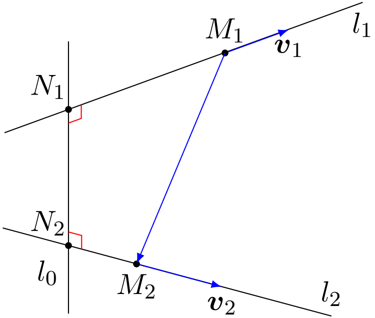
两异面直线 l_1, l_2 之间的距离计算公式为

$$\boxed{d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}}.$$

证 由前知, 两异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 等于它们公垂线的长, 即

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = |\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}|,$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标, 而 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 显然平行于公垂线, 即 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 是公垂线 l_0 的一个方向向量, 因此



$$d = |\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}\overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.$$

如果用坐标表示上式就是

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 l_1, l_2 上已知点的坐标，而 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 显然平行于公垂线，即 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 是公垂线 l_0 的一个方向向量，因此

$$d = |\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2} \overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.$$

如果用坐标表示上式就是

$$\boxed{d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.}$$

因为 $|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|$ 为由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行六面体的体积,

$$d = |\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2} \overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.$$

如果用坐标表示上式就是

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

因为 $|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|$ 为由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行六面体的体积，而 $|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|$ 为由向量 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行四边形的面积，也就是上述平行六面体的一个面的面积，

$$d = |\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2} \overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.$$

如果用坐标表示上式就是

$$d=\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}\right|.$$

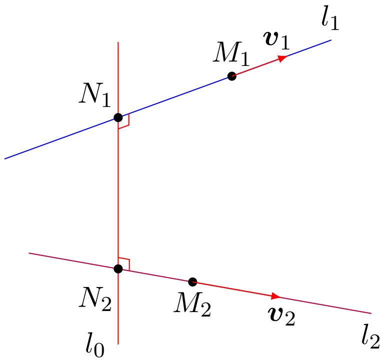
因为 $|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)|$ 为由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行六面体的体积, 而 $|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|$ 为由向量 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行四边形的面积, 也就是上述平行六面体的一个面的面积, 因此两异面直线间的距离 d 恰好为三向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行六面体的在向量 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 构成的平行四边形底面上的高.

$$d=|\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}\overrightarrow{M_1M_2}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

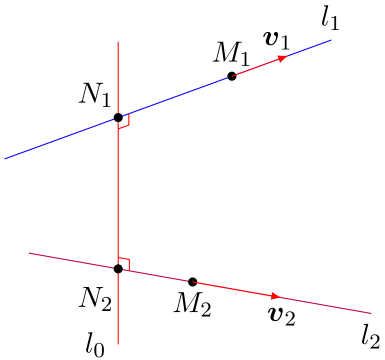
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程.

现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$,

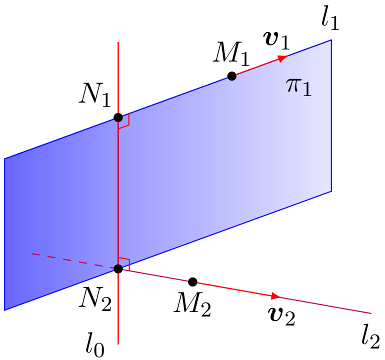
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$,



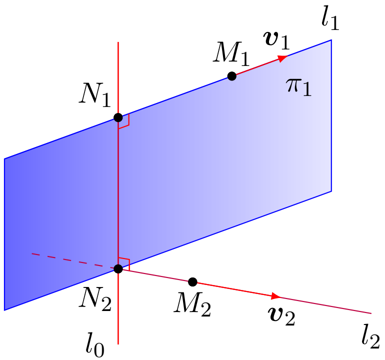
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1



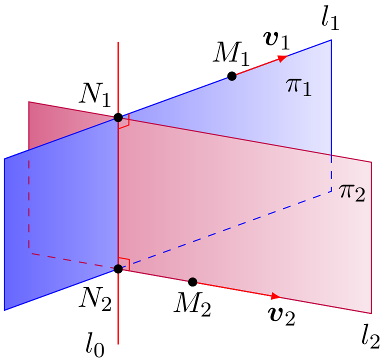
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1



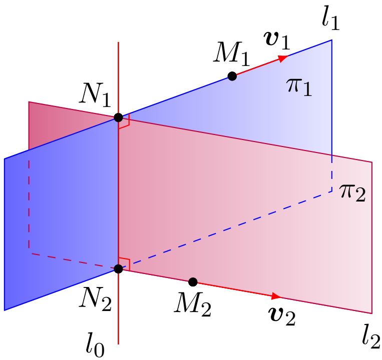
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1 与过 l_2 上的点 M_2, 以 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_2 的交线.



现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1 与过 l_2 上的点 M_2, 以 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_2 的交线.



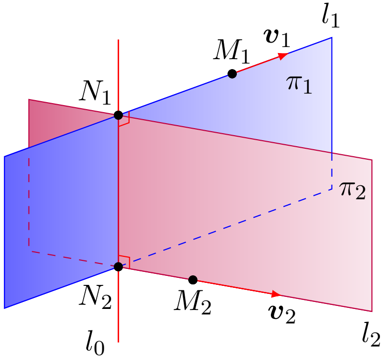
现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1 与过 l_2 上的点 M_2, 以 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_2 的交线. 令
$\{X, Y, Z\} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}$, 则 l_0 的一般方程是



现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1 与过 l_2 上的点 M_2, 以 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_2 的交线. 令

$\{X, Y, Z\} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}$, 则 l_0 的一般方程是

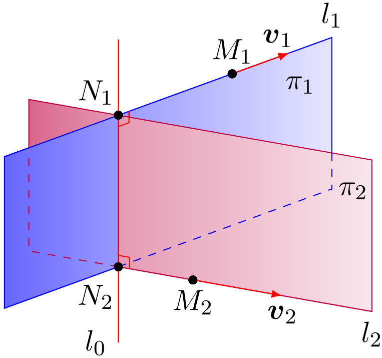
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \\ \end{array} \right.$$



现在来求异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方程. 如图, 公垂线 l_0 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, 而公垂线可以看成是由过 l_1 上的点 M_1, 以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_1 与过 l_2 上的点 M_2, 以 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 为方位向量的平面 π_2 的交线. 令

$\{X, Y, Z\} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$, 则 l_0 的一般方程是

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$



例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$,

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1,l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\{1,2,3\}$,

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$.

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, l_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1,l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=\{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v})=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\X&Y&Z\end{vmatrix}=0,$$

例 1

求通过点 $P(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X + 2Y - Z = 0,$$

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,\text{ 即 } X + 2Y - Z = 0,$$

由上两式得 $X : Y : Z = 0 : 2 : 4 = 0 : 1 : 2$,

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,\text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X + 2Y - Z = 0,$$

由上两式得 $X : Y : Z = 0 : 2 : 4 = 0 : 1 : 2$, 显然又有

$$0 : 1 : 2 \neq 1 : 2 : 3, \quad 0 : 1 : 2 \neq 2 : 1 : 4,$$

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{X, Y, Z\}$, 那么所求直线 l 的方程可写成

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X + 2Y - Z = 0,$$

由上两式得 $X : Y : Z = 0 : 2 : 4 = 0 : 1 : 2$, 显然又有

$$0 : 1 : 2 \neq 1 : 2 : 3, \quad 0 : 1 : 2 \neq 2 : 1 : 4,$$

即 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 都不平行,

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } X - 2Y + Z = 0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,\ \text{即}\ X + 2Y - Z = 0,$$

由上两式得 $X : Y : Z = 0 : 2 : 4 = 0 : 1 : 2$, 显然又有

$$0 : 1 : 2 \neq 1 : 2 : 3, \quad 0 : 1 : 2 \neq 2 : 1 : 4,$$

即 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 都不平行, 所以直线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

$$\frac{x-1}{X} = \frac{y-1}{Y} = \frac{z-1}{Z}.$$

因 l 与 l_1, l_2 都相交, 且 l_1 过点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,2,3\}$, l_2 过点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,\ \text{即}\ X - 2Y + Z = 0,$$

例 2

已知两直线

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}, \quad l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线, 并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

例 2

已知两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0},\ l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线，并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$;

例 2

已知两直线

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}, \ l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线，并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$；直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$，

例 2

已知两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}, \ l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线, 并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2

已知两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}, \quad l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线, 并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

例 2

已知两直线

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}, \quad l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线, 并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以 l_1, l_2 为两异面直线.

例 2

已知两直线

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0},\ l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0},$$

试证明 l_1, l_2 为异面直线, 并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以 l_1, l_2 为两异面直线. 又 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \{0,0,2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|} = \frac{4}{2} = 2.$$

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以 l_1, l_2 为两异面直线. 又 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \{0,0,2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|} = \frac{4}{2} = 2.$$

于是公垂线 l_0 的方程为

解 直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \{1,-1,0\}$; 直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \{1,1,0\}$, 故有

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以 l_1, l_2 为两异面直线. 又 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \{0,0,2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|} = \frac{4}{2} = 2.$$

于是公垂线 l_0 的方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以 l_1, l_2 为两异面直线. 又 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \{0, 0, 2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}=\frac{4}{2}=2.$$

于是公垂线 l_0 的方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x & y & z+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

$$\varDelta=(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0.$$

所以 l_1,l_2 为两异面直线. 又 l_1,l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\{0,0,2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}=\frac{4}{2}=2.$$

于是公垂线 l_0 的方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x & y & z+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$

所以 l_1,l_2 为两异面直线. 又 l_1,l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\{0,0,2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|} = \frac{4}{2} = 2.$$

于是公垂线 l_0 的方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ 显然它就是 z 轴.

所以 l_1, l_2 为两异面直线. 又 l_1, l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \{0, 0, 2\}$, 所以 l_1 与 l_2之 间的距离为

课堂练习: P 132, 习题 7

求通过点 $P(1,0,-2)$ 而与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行, 且与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交的直线方程.

✍课堂练习: P 132, 习题 7

求通过点 $P(1,0,-2)$ 而与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行, 且与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交的直线方程.

答案:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}.$$

✍课堂练习: P 132, 习题 7

求通过点 $P(1,0,-2)$ 而与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行, 且与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交的直线方程.

答案:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}.$$

下一节