第二章 轨迹与方程

§2.2 曲面的方程

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

在平面或空间取定坐标系之后，平面上的点或空间中的点就与有序实数组 (x, y) 或 (x, y, z) 建立了一一对应的关系.

在平面或空间取定坐标系之后, 平面上的点或空间中的点就与有序实数组 (x, y) 或 (x, y, z) 建立了一一对应的关系. 在这一章, 我们将进一步建立作为点的轨迹的曲线、曲面与其方程之间的关系, 把研究曲线与曲面的几何问题, 归结为研究其方程的代数问题,

在平面或空间取定坐标系之后，平面上的点或空间中的点就与有序实数组 (x, y) 或 (x, y, z) 建立了一一对应的关系. 在这一章，我们将进一步建立作为点的轨迹的曲线、曲面与其方程之间的关系，把研究曲线与曲面的几何问题，归结为研究其方程的代数问题，一方面为用代数方法对一些曲线与曲面进行研究创造了条件，同时也为某些代数问题给出了几何解释.

§2.2 曲面的方程

§2.2 曲面的方程

教学内容: 曲面方程的概念及其建立

§2.2 曲面的方程

教学内容: 曲面方程的概念及其建立

教学目的: 正确理解空间曲面与曲面方程的意义，掌握根据已知条件建立空间曲面方程的基本方法

§2.2 曲面的方程

教学内容: 曲面方程的概念及其建立

教学目的: 正确理解空间曲面与曲面方程的意义，掌握根据已知条件建立空间曲面方程的基本方法

教学重难点: 根据已知条件建立空间曲面方程

❐ 曲面的一般方程

❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，

❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x, y, z) = 0}$ 或 $\boxed{z = f(x, y)}$ 来表示;

❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x, y, z) = 0}$ 或 $\boxed{z = f(x, y)}$ 来表示；

反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面.

❒ 曲面的一般方程

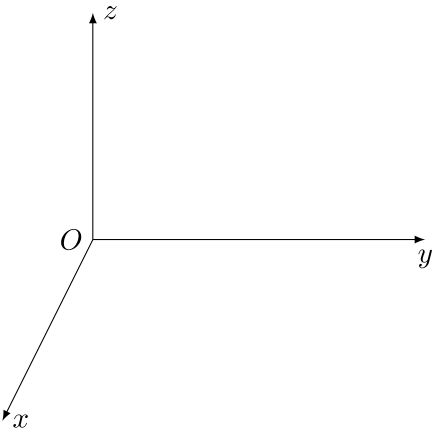
空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示；

反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点，

❐ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示;

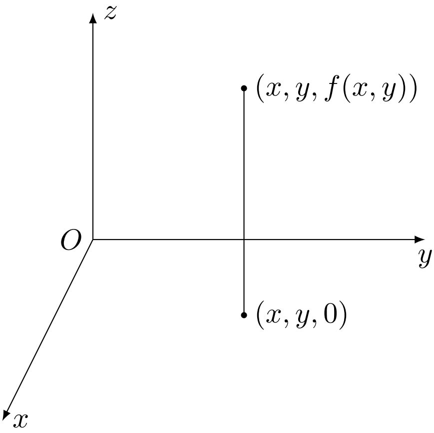
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点,



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x, y, z) = 0}$ 或 $\boxed{z = f(x, y)}$ 来表示;

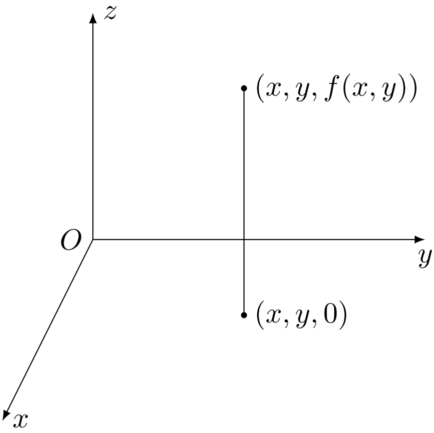
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z = f(x, y)$ 的任意一组解 (x, y, z) 确定了一个点,



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示；

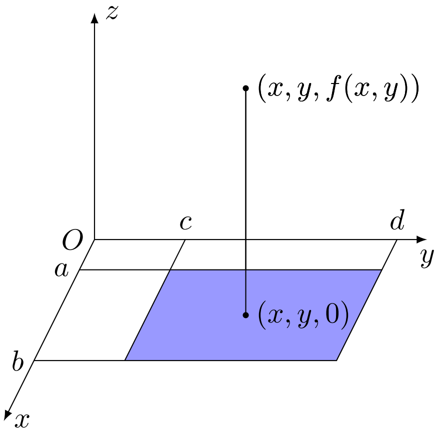
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点，而当 $x,y(a\le x\le b, c\le y\le d)$ 连续变化时，



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示；

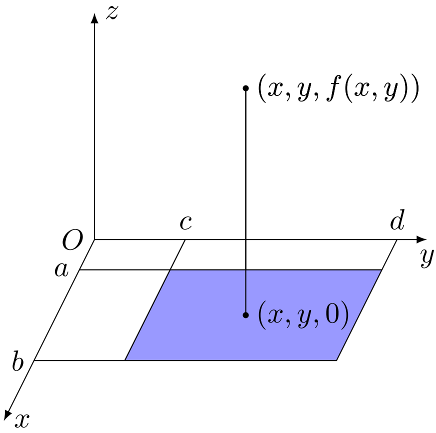
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面．方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点，而当 $x, y (a\le x\le b, c\le y\le d)$ 连续变化时，



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示;

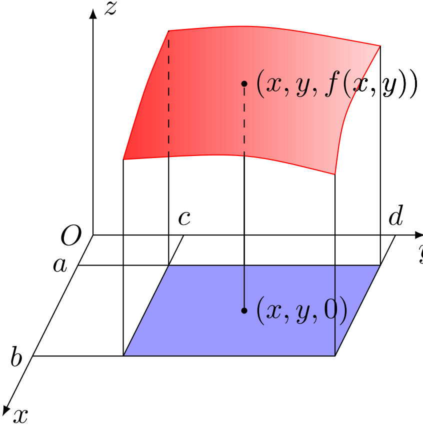
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点，而当 $x, y(a \le x \le b, c \le y \le d)$ 连续变化时，点 $(x,y,f(x,y))$ 就画出一个图形来(如图)，



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x, y, z) = 0}$ 或 $\boxed{z = f(x, y)}$ 来表示；

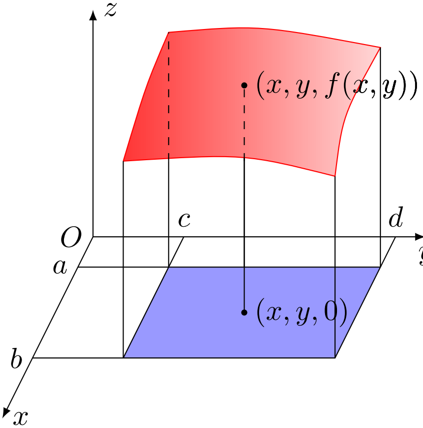
反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z = f(x, y)$ 的任意一组解 (x, y, z) 确定了一个点，而当 $x, y(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ 连续变化时，点 $(x, y, f(x, y))$ 就画出一个图形来(如图)，



❒ 曲面的一般方程

空间中建立坐标系之后，把曲面上点的特征性质，用点的坐标 x, y, z 之间的关系式来表达，一般用方程 $\boxed{F(x,y,z)=0}$ 或 $\boxed{z=f(x,y)}$ 来表示;

反过来，每一个形如上面的方程通常表示空间的一个曲面. 方程 $z=f(x,y)$ 的任意一组解 (x,y,z) 确定了一个点，而当 $x,y(a\le x\le b, c\le y\le d)$ 连续变化时，点 $(x,y,f(x,y))$ 就画出一个图形来(如图)，这就是方程的图形. 一般它是一个曲面.



☞**曲面一般方程的定义** 如果一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x, y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形,

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形, 例如 $x^2+y^2+z^2+1=0$;

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形, 例如 $x^2+y^2+z^2+1=0$; 有时候只有一个实点满足它, 如 $x^2+y^2+z^2=0$, 因此它只表示坐标原点;

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形, 例如 $x^2+y^2+z^2+1=0$; 有时候只有一个实点满足它, 如 $x^2+y^2+z^2=0$, 因此它只表示坐标原点; 有时也代表一条曲线, 如 $x^2+y^2=0$,

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x, y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x, y, z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x, y, z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形, 例如 $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; 有时候只有一个实点满足它, 如 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, 因此它只表示坐标原点; 有时也代表一条曲线, 如 $x^2 + y^2 = 0$, 只有当 $x = 0$, $y = 0$ 的点 $(0, 0, z)$能够满足它,

曲面一般方程的定义 如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系:

1° 满足方程的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标;

2° 曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程.

那么方程就称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称做方程的图形.

曲面的方程有时候没有实数点满足它, 这表示方程不表示任何实图形, 此时我们称它为虚图形, 例如 $x^2+y^2+z^2+1=0$; 有时候只有一个实点满足它, 如 $x^2+y^2+z^2=0$, 因此它只表示坐标原点; 有时也代表一条曲线, 如 $x^2+y^2=0$, 只有当 $x=0$, $y=0$ 的点 $(0,0,z)$能够满足它, 因而它表示 z 轴, 是一条直线.

例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

例 1

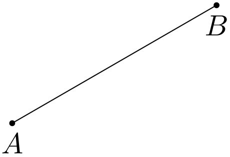
求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 设线段 AB 的垂直平分面为 π,

例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

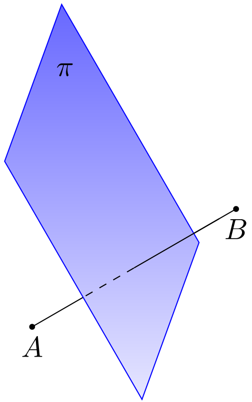
解 设线段 AB 的垂直平分面为 π,



例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

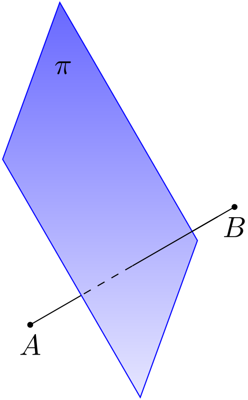
解 设线段 AB 的垂直平分面为 π,



例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

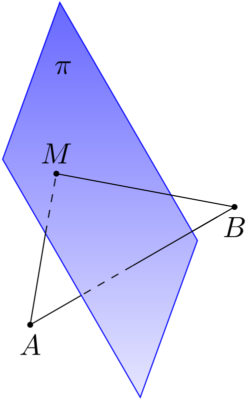
解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$,



例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$,

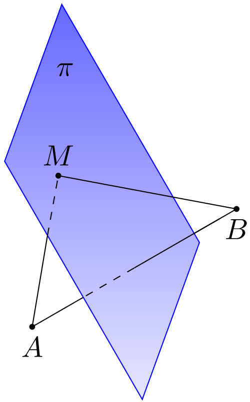


例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$, 而

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$



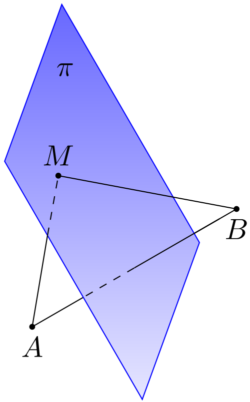
例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$, 而

$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$

$$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$



例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

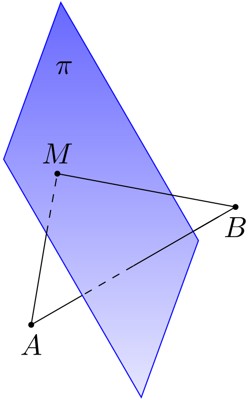
解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$, 而

$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$

$$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$



例 1

求连接两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 设线段 AB 的垂直平分面为 π, 则动点 $M(x,y,z)$ 在 π 上等价于 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$, 而

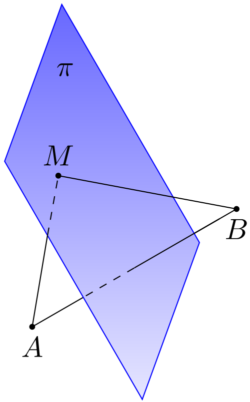
$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$

$$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-6y+2z-7=0.$$



例 2

求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

例 2

求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

解 因所求的平分面是与两坐标平面 xOz 和 yOz 有等距离的点, 因此点 $M(x, y, z)$ 在平分面上的充要条件是

例 2

求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

解 因所求的平分面是与两坐标平面 xOz 和 yOz 有等距离的点, 因此点 $M(x, y, z)$ 在平分面上的充要条件是

$$|y| = |x|,$$

例 2

求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

解 因所求的平分面是与两坐标平面 xOz 和 yOz 有等距离的点, 因此点 $M(x, y, z)$ 在平分面上的充要条件是

$$|y| = |x|,$$

所以 $y = \pm x$ 或改写成

$$x \pm y = 0,$$

例 2

求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

解 因所求的平分面是与两坐标平面 xOz 和 yOz 有等距离的点, 因此点 $M(x,y,z)$ 在平分面上的充要条件是

$$|y| = |x|,$$

所以 $y = \pm x$ 或改写成

$$x \pm y = 0,$$

因此所求的平分面的方程是

$$x + y = 0 \quad 与 \quad x - y = 0.$$

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

解 显然该坐标平面是 x 坐标为零的点的轨迹, 因此其方程为 $x = 0$.

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

解 显然该坐标平面是 x 坐标为零的点的轨迹, 因此其方程为 $x=0$. 同样, 坐标平面 xOz 与 xOy 的方程分别为 $y=0$ 与 $z=0$.

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

解 显然该坐标平面是 x 坐标为零的点的轨迹, 因此其方程为 $x=0$. 同样, 坐标平面 xOz 与 xOy 的方程分别为 $y=0$ 与 $z=0$.

例 4

一平面平行于坐标平面 xOz, 且在 y 轴的正向一侧与平面 xOz 相隔的距离为 k, 求它的方程.

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

解 显然该坐标平面是 x 坐标为零的点的轨迹, 因此其方程为 $x = 0$. 同样, 坐标平面 xOz 与 xOy 的方程分别为 $y = 0$ 与 $z = 0$.

例 4

一平面平行于坐标平面 xOz, 且在 y 轴的正向一侧与平面 xOz 相隔的距离为 k, 求它的方程.

解 显然所求平面与 y 轴交于点 $(0, k, 0)$, 平面其余点的 y 坐标也都等于 k,

例 3

求坐标平面 yOz 的方程.

解 显然该坐标平面是 x 坐标为零的点的轨迹, 因此其方程为 $x=0$. 同样, 坐标平面 xOz 与 xOy 的方程分别为 $y=0$ 与 $z=0$.

例 4

一平面平行于坐标平面 xOz, 且在 y 轴的正向一侧与平面 xOz 相隔的距离为 k, 求它的方程.

解 显然所求平面与 y 轴交于点 $(0,k,0)$, 平面其余点的 y 坐标也都等于 k, 因此平面的方程为 $y=k$.

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}| = r$,

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}| = r$, 而

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}|=r$, 而

$$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

所以所求球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}|=r$, 而

$$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

所以所求球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

特别地, 以原点为球心的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}|=r$, 而

$$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

所以所求球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

特别地, 以原点为球心的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

将球面方程展开后, 得

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0,$$

例 5

设球面的中心点为 $C(a,b,c)$, 并且半径为 r, 求它的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面的任意点, 则 $|\overrightarrow{CM}|=r$, 而

$$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

所以所求球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

特别地, 以原点为球心的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

将球面方程展开后, 得

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0,$$

因此球面方程是一个三元二次方程, 它的所有平方项 x^2,y^2,z^2 的系数相等, 交叉项 xy,xz,yz 的系数都等于零.

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当$A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

当 $A=B=C\neq 0$, $D=E=F=0$时, 方程就可以化为

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0,$$

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

当$A=B=C\neq 0$, $D=E=F=0$时, 方程就可以化为

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0,$$

配方得

$$(x+g)^2+(y+h)^2+(z+k)^2=m,$$

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当$A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x+g)^2 + (y+h)^2 + (z+k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l.$

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当 $A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x + g)^2 + (y + h)^2 + (z + k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

当$A=B=C\neq 0$, $D=E=F=0$时, 方程就可以化为

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0,$$

配方得

$$(x+g)^2+(y+h)^2+(z+k)^2=m,$$

其中 $m=g^2+h^2+k^2-l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m>0$, 那么方程表示实球面;

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当 $A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x+g)^2 + (y+h)^2 + (z+k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m > 0$, 那么方程表示实球面;

(ii) 如果$m = 0$, 那么方程表示空间一点;

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当$A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x + g)^2 + (y + h)^2 + (z + k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m > 0$, 那么方程表示实球面;

(ii) 如果$m = 0$, 那么方程表示空间一点;

(iii) 如果$m < 0$, 那么方程无实图形.

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当$A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x + g)^2 + (y + h)^2 + (z + k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m > 0$, 那么方程表示实球面;

(ii) 如果$m = 0$, 那么方程表示空间一点;

(iii) 如果$m < 0$, 那么方程无实图形.

习惯上将上面(ii)的点叫做点球,

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

当$A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$时, 方程就可以化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0,$$

配方得

$$(x+g)^2 + (y+h)^2 + (z+k)^2 = m,$$

其中 $m = g^2 + h^2 + k^2 - l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m > 0$, 那么方程表示实球面;

(ii) 如果$m = 0$, 那么方程表示空间一点;

(iii) 如果$m < 0$, 那么方程无实图形.

习惯上将上面(ii)的点叫做点球, 无实图形时称为虚球面,

反过来, 如果一个三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

当$A=B=C\neq 0$, $D=E=F=0$时, 方程就可以化为

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0,$$

配方得

$$(x+g)^2+(y+h)^2+(z+k)^2=m,$$

其中 $m=g^2+h^2+k^2-l$. 依 m 的取值, 该方程所表示的图形可分为以下三种情形:

(i) 如果$m>0$, 那么方程表示实球面;

(ii) 如果$m=0$, 那么方程表示空间一点;

(iii) 如果$m<0$, 那么方程无实图形.

习惯上将上面(ii)的点叫做点球, 无实图形时称为虚球面, 这三种情形统称为球面.

✍课堂练习: P 87, 习题 1

一动点移动时, 与 $A(4,0,0)$ 及 xOy 平面等距离, 求该动点的轨迹方程.

课堂练习: P 87, 习题 1

一动点移动时, 与 $A(4,0,0)$ 及 xOy 平面等距离, 求该动点的轨迹方程.

答案: $(x-4)^2+y^2=0.$

课堂练习: P 87, 习题 1

一动点移动时, 与 $A(4,0,0)$ 及 xOy 平面等距离, 求该动点的轨迹方程.

答案: $(x-4)^2+y^2=0.$

思考: 该轨迹表示什么图形?

曲面的参数方程

曲面的参数方程

设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$

曲面的参数方程

设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 或

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

曲面的参数方程

设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 或

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 是变向量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标，它们都是 u, v 的函数.

曲面的参数方程

设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 或

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 是变向量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标, 它们都是 u, v 的函数. 当 u, v 取遍变动区域内的一切值时,

曲面的参数方程

设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 或

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 是变向量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标, 它们都是 u, v 的函数. 当 u, v 取遍变动区域内的一切值时, 向径

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3$$

的终点 $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 所
成的轨迹, 一般为一张曲面(如图).

曲面的参数方程

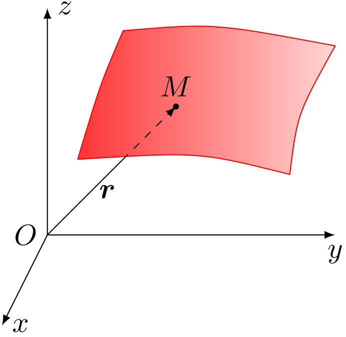
设在两个变量 u, v 的变动区域内定义了双参数向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 或

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 是变向量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标，它们都是 u, v 的函数. 当 u, v 取遍变动区域内的一切值时，向径

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\boldsymbol{e}_3$$

的终点 $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 所成的轨迹，一般为一张曲面(如图).



曲面参数方程的定义 如果取 $u, v(a \leq u \leq b, c \leq v \leq d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上;

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 完全确定,

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \leq u \leq b, c \leq v \leq d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \leq u \leq b, c \leq v \leq d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 完全确定, 那么我们就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 为曲面的向量式参数方程, 其中 u, v 为参数.

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 完全确定, 那么我们就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 为曲面的向量式参数方程, 其中 u, v 为参数.

因为向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标为 $\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, 所以曲面的参数方程也可改写为如下坐标式参数方程

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 完全确定, 那么我们就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 为曲面的向量式参数方程, 其中 u, v 为参数.

因为向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标为 $\{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$, 所以曲面的参数方程也可改写为如下坐标式参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ \\ \\ \end{cases}$$

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 完全确定, 那么我们就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 为曲面的向量式参数方程, 其中 u, v 为参数.

因为向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标为 $\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, 所以曲面的参数方程也可改写为如下坐标式参数方程

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ \end{array}\right.$$

☞**曲面参数方程的定义** 如果取 $u, v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切值, 向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的终点 M 总在一个曲面上; 反之, 在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径, 而这个向径可由 u, v 的值 $(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 通过 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 完全确定, 那么我们就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 为曲面的向量式参数方程, 其中 u, v 为参数.

因为向径 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的坐标为 $\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, 所以曲面的参数方程也可改写为如下坐标式参数方程

$$\boxed{\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}}$$

例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

例 6

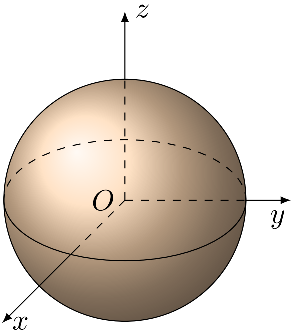
求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点,

例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

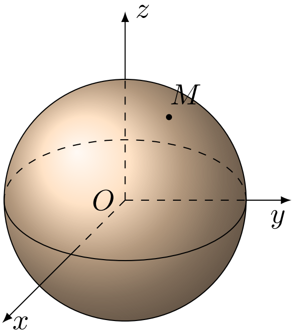
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

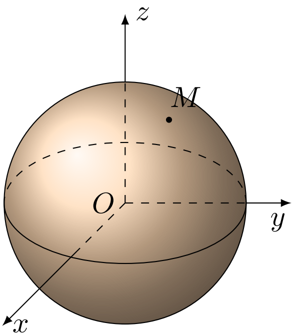
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

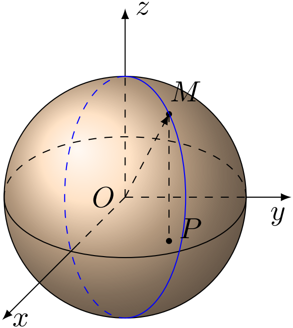
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

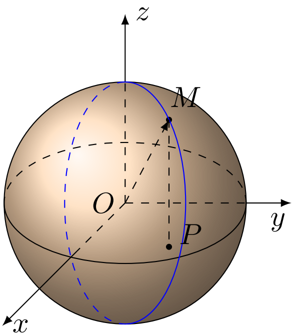
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

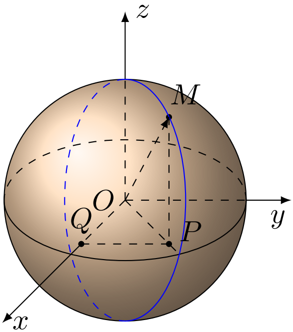
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q.



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

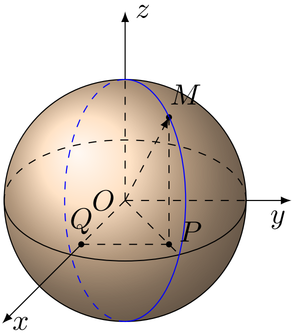
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q.



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

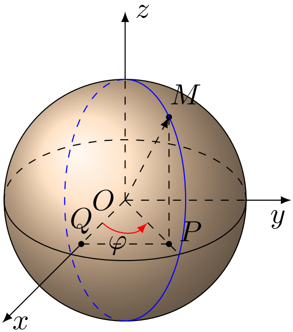
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

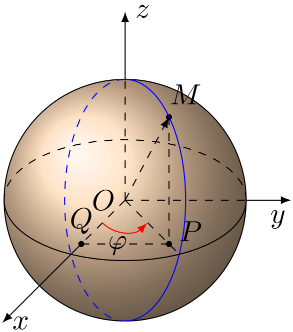
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

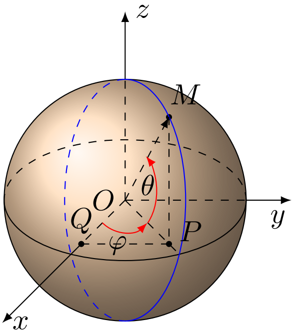
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$,



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

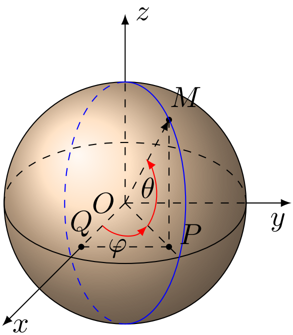
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$,



例 6

求球心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

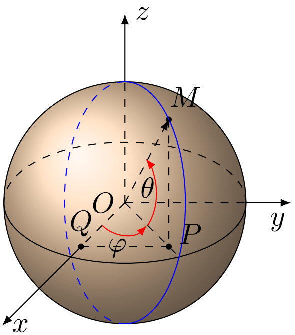
解 设 M 是以原点为球心，r 为半径的球面上的任意点，M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P，而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$，$\angle POM = \theta$，当 M 在 xOy 坐标平面的上方时，θ 取正值;



例 6

求球心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心，r 为半径的球面上的任意点，M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P，而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$，$\angle POM = \theta$，当 M 在 xOy 坐标平面的上方时，θ 取正值；在另一侧时 θ 取负值.

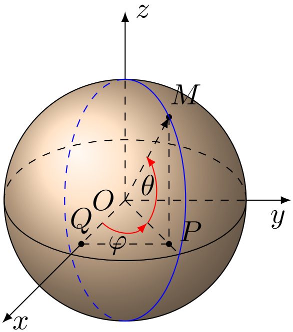


例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OP})=\varphi$, $\angle POM=\theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

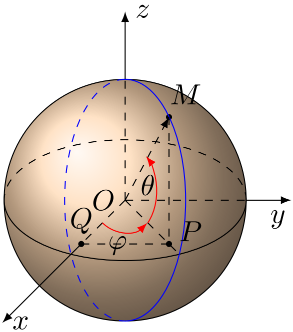


例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OP})=\varphi$, $\angle POM=\theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}$$



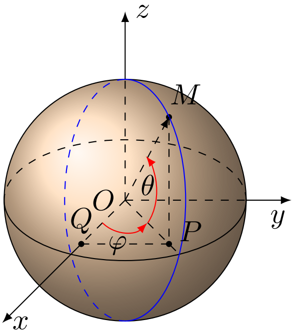
例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k}$$



例 6

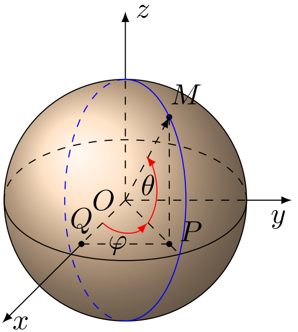
求球心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心，r 为半径的球面上的任意点，M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P，而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OP})=\varphi$，$\angle POM=\theta$，当 M 在 xOy 坐标平面的上方时，θ 取正值；在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PM}=(r\sin\theta)\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{QP}=(|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

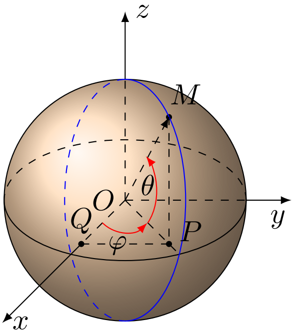


例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\ \overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} = (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$



例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

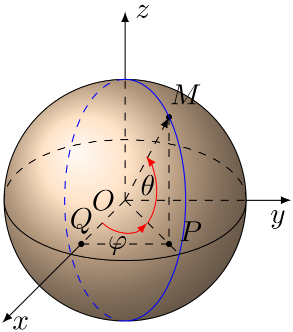
解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} = (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i}$$

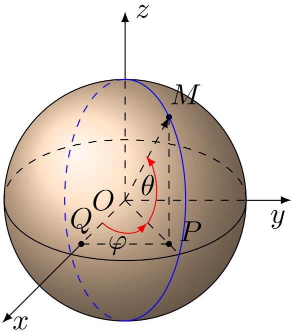


例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\
\overrightarrow{PM} &= (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\
\overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} &= (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\
\overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} &= (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

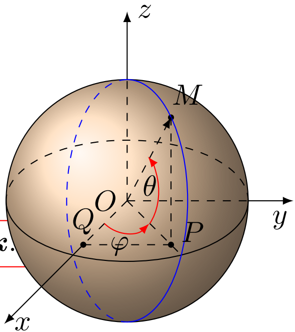


例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\ \overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} = (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



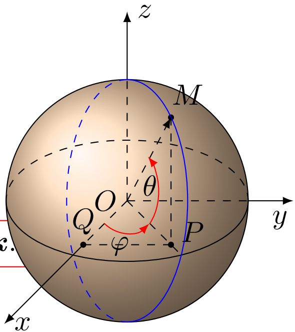
$$\boxed{\boldsymbol{r} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} + (r\sin\theta)\boldsymbol{k}.}$$

例 6

求球心在原点, 半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心, r 为半径的球面上的任意点, M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P, 而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$, $\angle POM = \theta$, 当 M 在 xOy 坐标平面的上方时, θ 取正值; 在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\ \overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} = (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\boxed{\boldsymbol{r} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} + (r\sin\theta)\boldsymbol{k}.}$$

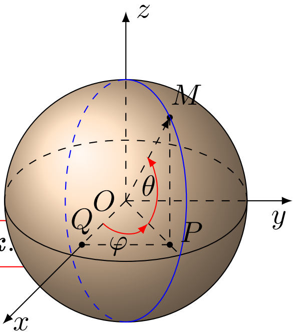
这就是所求球面的向量式参数方程.

例 6

求球心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以原点为球心，r 为半径的球面上的任意点，M 在 xOy 坐标平面上的射影为 P，而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$，$\angle POM = \theta$，当 M 在 xOy 坐标平面的上方时，θ 取正值；在另一侧时 θ 取负值. 那么

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PM} &= (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\ \overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} &= (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} &= (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

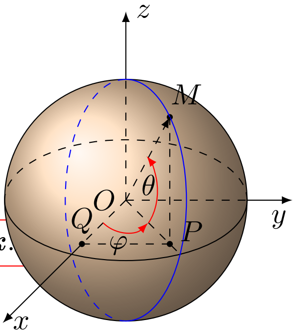


$$\boxed{\boldsymbol{r} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} + (r\sin\theta)\boldsymbol{k}.}$$

这就是所求球面的向量式参数方程. 它的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \qquad -\pi < \varphi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

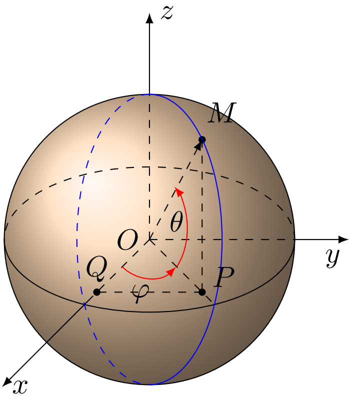
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PM} = (r\sin\theta)\boldsymbol{k} \\ \overrightarrow{QP} = (|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j} = (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{OQ} = (|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



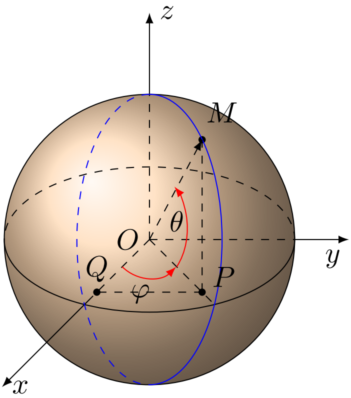
$$\boxed{\boldsymbol{r} = (r\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j} + (r\sin\theta)\boldsymbol{k}.}$$

这就是所求球面的向量式参数方程. 它的坐标式参数方程为

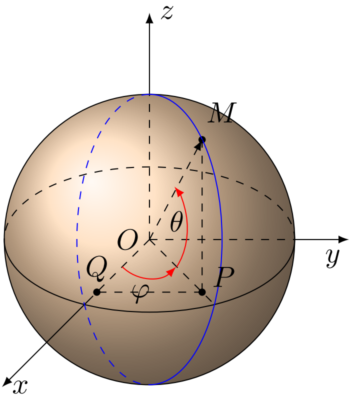
容易看出，球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外，



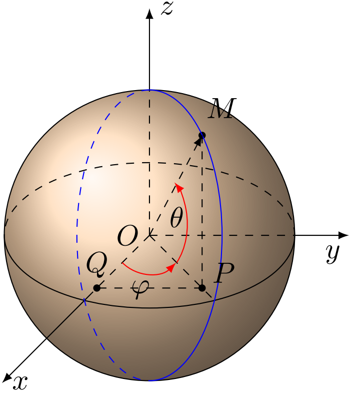
容易看出，球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外，其余所有的点与有序实数对 φ, θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系，



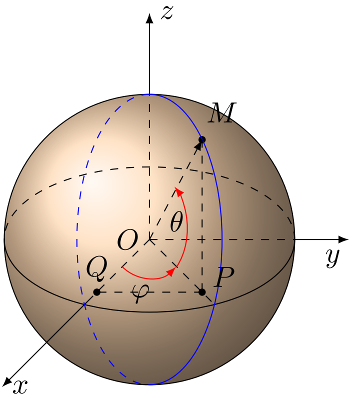
容易看出，球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外，其余所有的点与有序实数对 φ, θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系，所以可以把 φ, θ 作为球面上点的坐标，这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标.



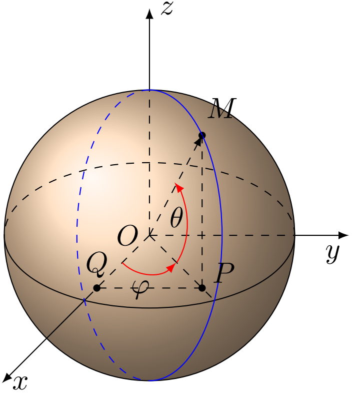
容易看出, 球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外, 其余所有的点与有序实数对 φ, θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系, 所以可以把 φ, θ 作为球面上点的坐标, 这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值,



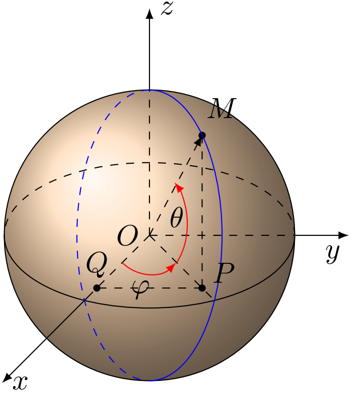
容易看出, 球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外, 其余所有的点与有序实数对 φ, θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系, 所以可以把 φ, θ 作为球面上点的坐标, 这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值, 经度分东经和西经, 这就相当于 φ 的正值和负值;



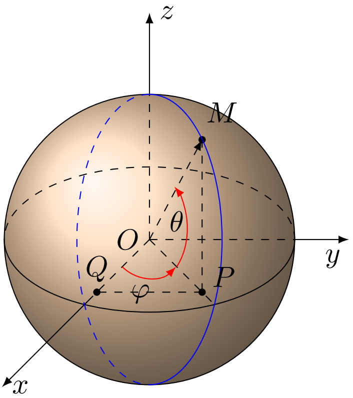
容易看出，球面上除掉 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0,0,\pm r)$ (两个极点)以外，其余所有的点与有序实数对 φ,θ (其中 $-\pi<\varphi\leq\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系，所以可以把 φ,θ 作为球面上点的坐标，这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值，经度分东经和西经，这就相当于 φ 的正值和负值; 地理坐标中的纬度就是 θ 的值，



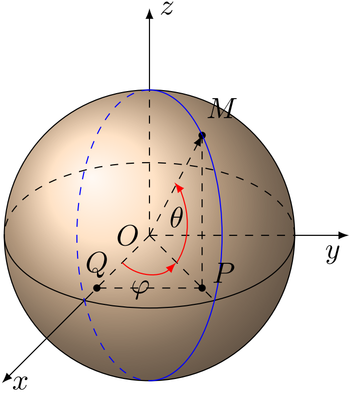
容易看出, 球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0, 0, \pm r)$ (两个极点)以外, 其余所有的点与有序实数对 φ, θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系, 所以可以把 φ, θ 作为球面上点的坐标, 这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值, 经度分东经和西经, 这就相当于 φ 的正值和负值; 地理坐标中的纬度就是 θ 的值, 纬度分为北纬和南纬, 就相当于 θ 的正值与负值;



容易看出, 球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0,0,\pm r)$ (两个极点)以外, 其余所有的点与有序实数对 φ,θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系, 所以可以把 φ,θ 作为球面上点的坐标, 这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值, 经度分东经和西经, 这就相当于 φ 的正值和负值; 地理坐标中的纬度就是 θ 的值, 纬度分为北纬和南纬, 就相当于 θ 的正值与负值; 地球上的南北两极, 就是前面提到的两个极点.



容易看出，球面上除掉 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时的两点 $(0,0,\pm r)$ (两个极点)以外，其余所有的点与有序实数对 φ,θ (其中 $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 之间有一个一一对应的关系，所以可以把 φ,θ 作为球面上点的坐标，这种坐标实际上是我们在地球上定地理位置的地理坐标. 地理坐标中的经度就是 φ 的值，经度分东经和西经，这就相当于 φ 的正值和负值；地理坐标中的纬度就是 θ 的值，纬度分为北纬和南纬，就相当于 θ 的正值与负值；地球上的南北两极，就是前面提到的两个极点.



从球面的参数方程中消去参数 φ,θ 就得到它的普通方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

例 7

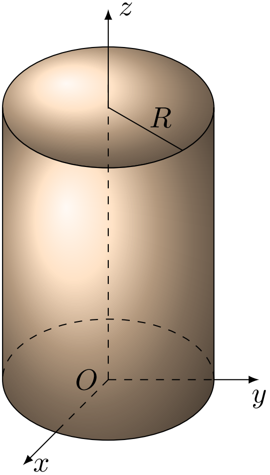
求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点,

例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

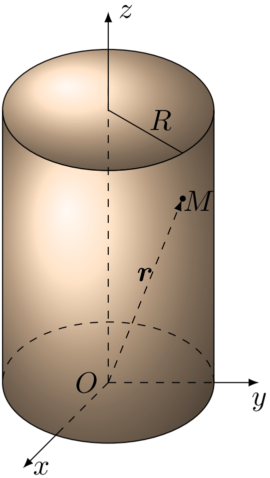
解 设 M 是圆柱面上的任意一点,



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

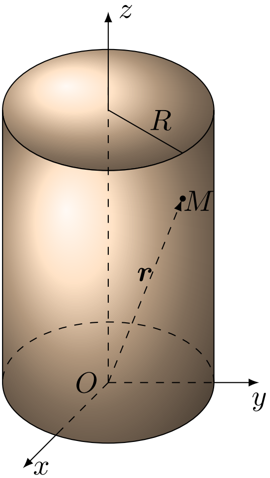
解 设 M 是圆柱面上的任意一点,



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

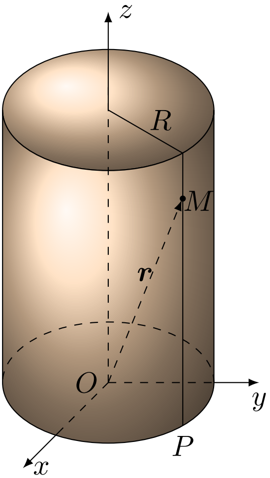
解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P.



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

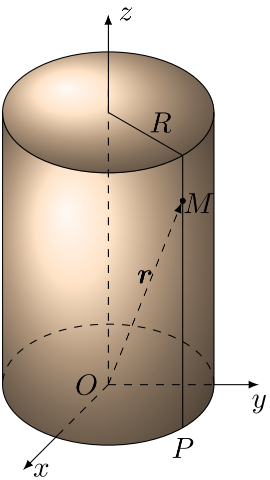
解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P.



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

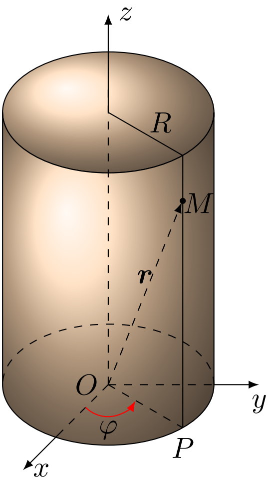
解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$,



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

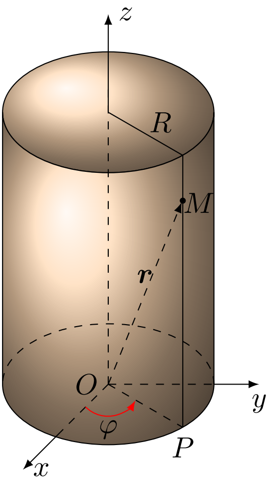
解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$,



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

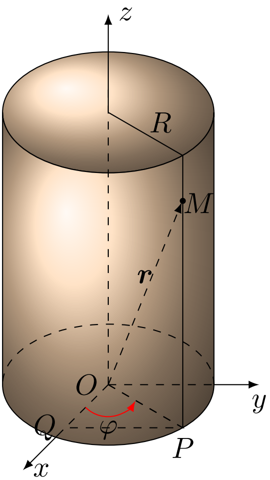
解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q,



例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q,

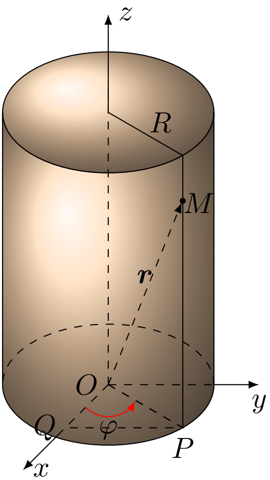


例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

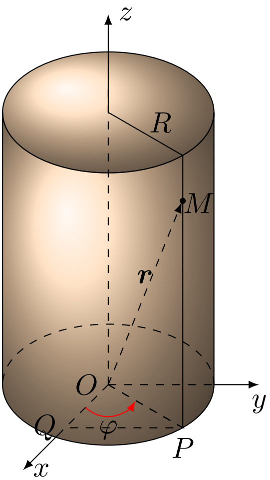


例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}$$



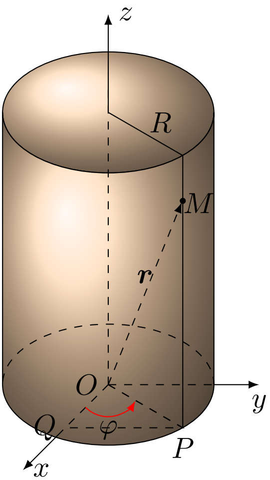
例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i}$$



例 7

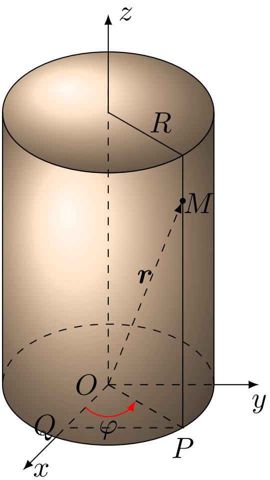
求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i}$$

$$\overrightarrow{QP} = (R\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

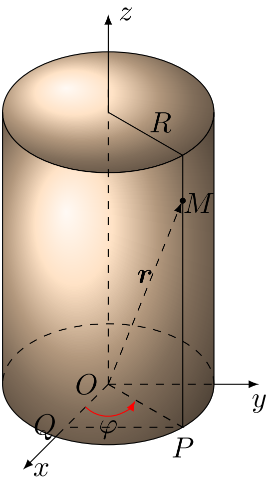


例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{QP} = (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PM} = u\boldsymbol{k}\end{aligned}$$



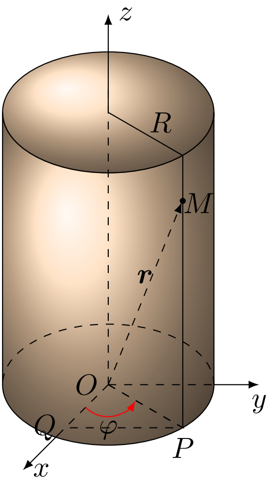
例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{QP} = (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PM} = u\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.}$$

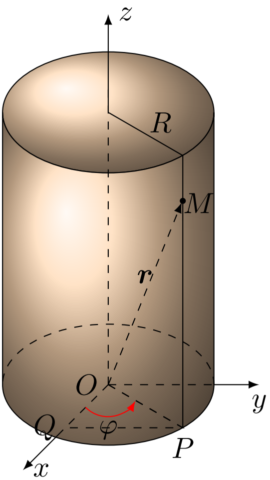


例 7

求以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点, M 在 xOy 平面上的射影为 P. 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi = \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} &+ \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OQ} &= (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{QP} &= (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PM} &= u\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

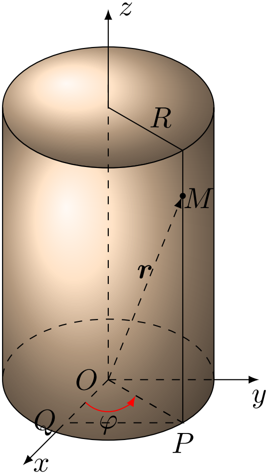


$$\boxed{\boldsymbol{r} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.}$$

此即圆柱面的参数方程, 其坐标式参数方程是

$$\boxed{\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u, \end{cases}}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{QP} = (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PM} = u\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\boxed{\boldsymbol{r} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.}$$

此即圆柱面的参数方程, 其坐标式参数方程是

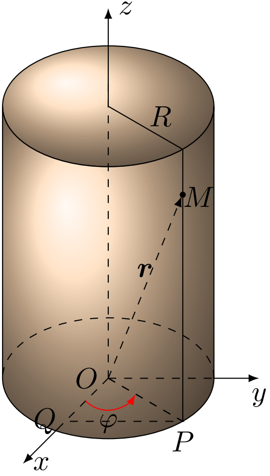
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u, \end{cases}$$

其中参数 φ, u 的取值范围分别为 $(-\pi,\pi]$ 和 $(-\infty,\infty)$.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OQ} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{QP} = (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PM} = u\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.}$$

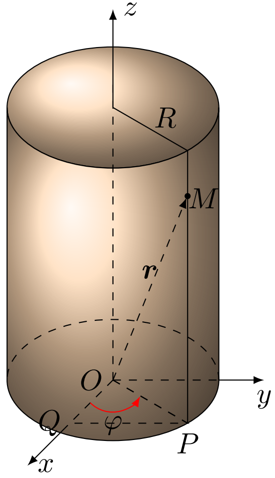
此即圆柱面的参数方程, 其坐标式参数方程是



$$\boxed{\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u, \end{cases}}$$

其中参数 φ, u 的取值范围分别为 $(-\pi, \pi]$ 和 $(-\infty, \infty)$. 消去参数 φ, u, 就得到圆柱面的普通方程

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$



$$\boxed{\boldsymbol{r} = (R\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin\varphi)\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.}$$

此即圆柱面的参数方程, 其坐标式参数方程是

空间曲面的参数方程表达式不是唯一的.

空间曲面的参数方程表达式不是唯一的. 如对球面, 如果把参数 θ 改为 $\overrightarrow{OM}$ 与 Oz 轴的交角, 那么球面的参数方程为

空间曲面的参数方程表达式不是唯一的. 如对球面, 如果把参数 θ 改为 $\overrightarrow{OM}$ 与 Oz 轴的交角, 那么球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

空间曲面的参数方程表达式不是唯一的. 如对球面, 如果把参数 θ 改为 $\overrightarrow{OM}$ 与 Oz 轴的交角, 那么球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

其中 $-\pi < \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$.

球坐标系与柱坐标系

球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上,

球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上, 故将 r 看成变量时, 公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

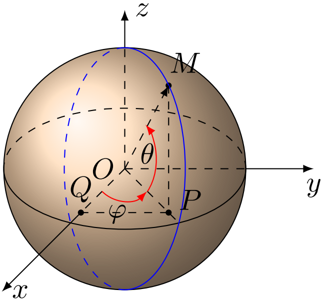
说明了空间一点 M 的位置.

球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上, 故将 r 看成变量时, 公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

说明了空间一点 M 的位置.

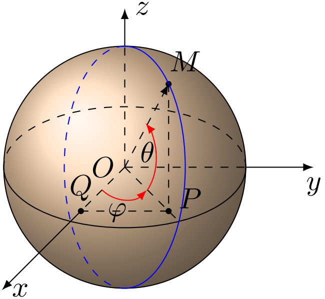


球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上, 故将 r 看成变量时, 公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

说明了空间一点 M 的位置. 如果将 r 改写成 ρ, 并设



球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上, 故将 r 看成变量时, 公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

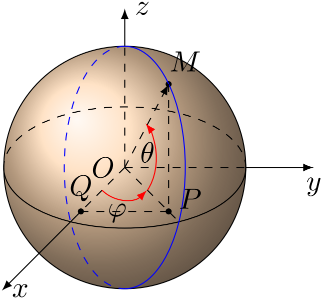
说明了空间一点 M 的位置. 如果将 r 改写成 ρ, 并设

$$|\overrightarrow{OM}| = \rho(\rho \geq 0),$$

$$\angle xOP = \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi),$$

$$\angle POM = \theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

的值都确定,



球坐标系与柱坐标系

空间中与原点距离为 r 的任意点, 总可以看成在以原点为中心, 半径为 r 的球面上, 故将 r 看成变量时, 公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

说明了空间一点 M 的位置. 如果将 r 改写成 ρ, 并设

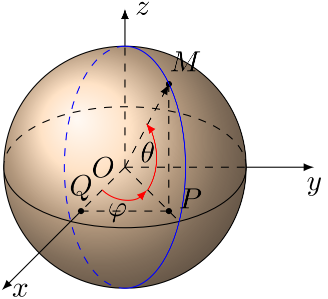
$$|\overrightarrow{OM}| = \rho(\rho \geq 0),$$

$$\angle xOP = \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi),$$

$$\angle POM = \theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

的值都确定, 那么便有

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$



M 点的位置也就被确定了;

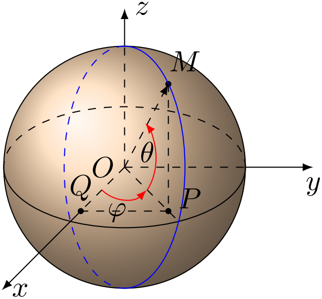
$$|\overrightarrow{OM}| = \rho(\rho \geq 0),$$

$$\angle xOP = \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi),$$

$$\angle POM = \theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

的值都确定, 那么便有

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$



M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

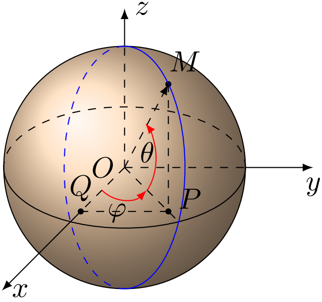
$$|\overrightarrow{OM}| = \rho(\rho \geq 0),$$

$$\angle xOP = \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi),$$

$$\angle POM = \theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

的值都确定, 那么便有

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$



M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho = 0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

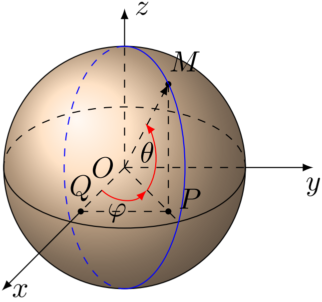
$$|\overrightarrow{OM}| = \rho(\rho \geq 0),$$

$$\angle xOP = \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi),$$

$$\angle POM = \theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

的值都确定, 那么便有

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$



M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ,φ,θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho=0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

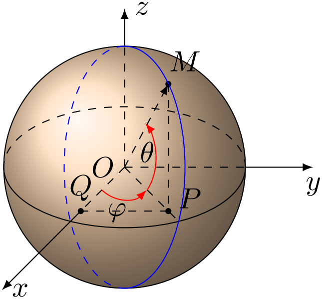
(ii) 如果 M 在 z 轴上, 但不在原点, 这时 φ 可以在 $-\pi$与π 内任意取定, 而 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

$$\angle xOP=\varphi(-\pi<\varphi\le\pi),$$

$$\angle POM=\theta(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

的值都确定, 那么便有

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z=\rho\sin\theta, \end{cases}$$



M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho = 0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

(ii) 如果 M 在 z 轴上, 但不在原点, 这时 φ 可以在 $-\pi$与π 内任意取定, 而 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

这样就使空间的点除去 z 轴上的点, 其余的点与有序三数组 ρ, φ, θ 建立了一一对应的关系,

M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho = 0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

(ii) 如果 M 在 z 轴上, 但不在原点, 这时 φ 可以在 $-\pi$与π 内任意取定, 而 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

这样就使空间的点除去 z 轴上的点, 其余的点与有序三数组 ρ, φ, θ 建立了一一对应的关系, 这种一一对应的关系叫做空间点的球坐标系 (spherical coordinate system), 或称做空间极坐标系(polar coordinate system),

M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho = 0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

(ii) 如果 M 在 z 轴上, 但不在原点, 这时 φ 可以在 $-\pi$与π 内任意取定, 而 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

这样就使空间的点除去 z 轴上的点, 其余的点与有序三数组 ρ, φ, θ 建立了一一对应的关系, 这种一一对应的关系叫做空间点的球坐标系 (spherical coordinate system), 或称做空间极坐标系(polar coordinate system), 并把有序三数组 ρ, φ, θ 叫做空间点 M 的球坐标或空间极坐标, 记做 $M(\rho, \varphi, \theta)$,

M 点的位置也就被确定了; 反过来, 空间 M 点的位置如果已确定, 那么三个值 ρ, φ, θ 也就确定了. 特别地,

(i) 如果 M 是原点, 那么 $\rho = 0$, φ 与 θ 分别在 $-\pi$ 到 π 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 内任意取定;

(ii) 如果 M 在 z 轴上, 但不在原点, 这时 φ 可以在 $-\pi$与π 内任意取定, 而 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

这样就使空间的点除去 z 轴上的点, 其余的点与有序三数组 ρ, φ, θ 建立了一一对应的关系, 这种一一对应的关系叫做空间点的球坐标系 (spherical coordinate system), 或称做空间极坐标系(polar coordinate system), 并把有序三数组 ρ, φ, θ 叫做空间点 M 的球坐标或空间极坐标, 记做 $M(\rho, \varphi, \theta)$, 这里的 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

当建立了球坐标系后, 空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

当建立了球坐标系后, 空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 反过来, 又有关系

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \\ \\ \end{cases}$$

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \end{cases}$$

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \\ \end{cases}$$

当建立了球坐标系后，空间中点的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间就有了下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \theta = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases}$$

在空间建立了球坐标后, 空间的某些曲面在球坐标系里的方程将非常简单.

在空间建立了球坐标后，空间的某些曲面在球坐标系里的方程将非常简单. 例如在直角坐标系里由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

决定的球面，

在空间建立了球坐标后，空间的某些曲面在球坐标系里的方程将非常简单. 例如在直角坐标系里由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

决定的球面，在球坐标系里的方程是

$$\rho = a;$$

在空间建立了球坐标后，空间的某些曲面在球坐标系里的方程将非常简单. 例如在直角坐标系里由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

决定的球面，在球坐标系里的方程是

$$\rho = a;$$

而在球坐标系里的方程

$$\varphi = \alpha(\text{常数})$$

表示一个半平面，

在空间建立了球坐标后, 空间的某些曲面在球坐标系里的方程将非常简单. 例如在直角坐标系里由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

决定的球面, 在球坐标系里的方程是

$$\rho=a;$$

而在球坐标系里的方程

$$\varphi=\alpha(\text{常数})$$

表示一个半平面, 方程

$$\theta=\theta_0(\text{常数})$$

表示一个圆锥面(只有一腔).

空间中与 z 轴的距离为 R 的点, 总可以把它看成在以 z 轴为轴, 半径为 R 的圆柱面

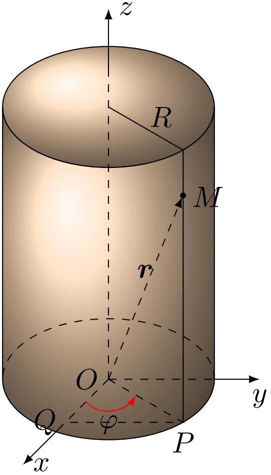
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u \end{cases}$$

上(如图),

空间中与 z 轴的距离为 R 的点, 总可以把它看成在以 z 轴为轴, 半径为 R 的圆柱面

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u \end{cases}$$

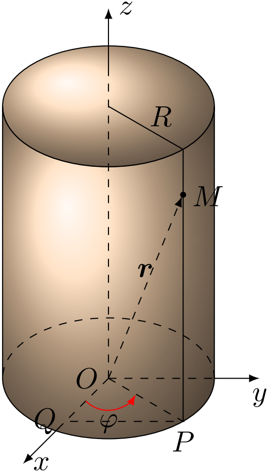
上(如图),



空间中与 z 轴的距离为 R 的点, 总可以把它看成在以 z 轴为轴, 半径为 R 的圆柱面

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u \end{cases}$$

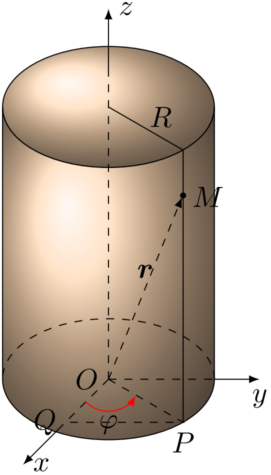
上(如图), 因此当我们把圆柱面半径 R 看成变量, 并改用 $\rho(\rho \geq 0)$ 来表示时,



空间中与 z 轴的距离为 R 的点, 总可以把它看成在以 z 轴为轴, 半径为 R 的圆柱面

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u \end{cases}$$

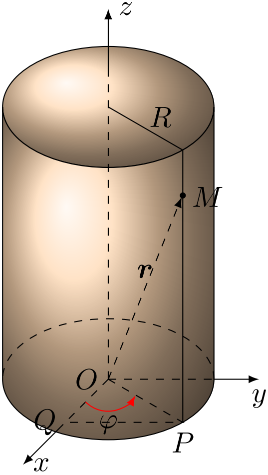
上(如图), 因此当我们把圆柱面半径 R 看成变量, 并改用 $\rho(\rho \geq 0)$ 来表示时, 那么 ρ, φ, u 的值可以确定空间一点 M 的位置;



空间中与 z 轴的距离为 R 的点, 总可以把它看成在以 z 轴为轴, 半径为 R 的圆柱面

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u \end{cases}$$

上(如图), 因此当我们把圆柱面半径 R 看成变量, 并改用 $\rho(\rho \geq 0)$ 来表示时, 那么 ρ, φ, u 的值可以确定空间一点 M 的位置; 反过来, 如果 M 点位置确定时, 那么 ρ, φ, u 的值也就确定了(如果 M 在 z 轴上, 那么 φ 可以任意确定).



这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ, φ, u 的一一对应关系，此处 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\infty < u < +\infty$,

这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ, φ, u 的一一对应关系, 此处 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\infty < u < +\infty$, 这种一一对应关系叫做柱坐标系(cylindrical coordinate system), 或称空间半极坐标系(semi-polar coordinate system),

这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ, φ, u 的一一对应关系, 此处 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\infty < u < +\infty$, 这种一一对应关系叫做柱坐标系(cylindrical coordinate system), 或称空间半极坐标系(semi-polar coordinate system), 并把有序三数组 ρ, φ, u 叫做点 M 的柱坐标或称半极坐标, 记做 $M(\rho, \varphi, u)$.

这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ, φ, u 的一一对应关系, 此处 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\infty < u < +\infty$, 这种一一对应关系叫做柱坐标系(cylindrical coordinate system), 或称空间半极坐标系(semi-polar coordinate system), 并把有序三数组 ρ, φ, u 叫做点 M 的柱坐标或称半极坐标, 记做 $M(\rho, \varphi, u)$.

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ,φ,u 的一一对应关系, 此处 $\rho\geq 0$, $-\pi<\varphi\leq\pi$, $-\infty<u<+\infty$, 这种一一对应关系叫做柱坐标系(cylindrical coordinate system), 或称空间半极坐标系(semi-polar coordinate system), 并把有序三数组 ρ,φ,u 叫做点 M 的柱坐标或称半极坐标, 记做 $M(\rho,\varphi,u)$.

空间点的直角坐标 (x,y,z) 与柱坐标 (ρ,φ,u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=u \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho\geq 0, \\ -\pi<\varphi\leq\pi, \\ -\infty<u<+\infty \end{pmatrix}.$$

这样我们在空间建立了另一种空间的点(除去 z 轴上的点外)与有序三数组 ρ, φ, u 的一一对应关系，此处 $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\infty < u < +\infty$, 这种一一对应关系叫做柱坐标系(cylindrical coordinate system)，或称空间半极坐标系(semi-polar coordinate system)，并把有序三数组 ρ, φ, u 叫做点 M 的柱坐标或称半极坐标，记做 $M(\rho, \varphi, u)$.

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \\ \\ \end{cases}$$

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \end{cases}$$

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来, 又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \end{cases}$$

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来, 又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ u = z. \end{cases}$$

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来，又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ u = z. \end{cases}$$

注: 对球坐标与柱坐标而言, ρ 一般不相等, 但 φ 是相同的.

空间点的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, u) 有着下面的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \geq 0, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ -\infty < u < +\infty \end{array} \right).$$

反过来, 又有关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ u = z. \end{cases}$$

注: 对球坐标与柱坐标而言, ρ 一般不相等, 但 φ 是相同的.

与球坐标一样, 某些曲面的方程, 在柱坐标系里比较简单.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ u = z. \end{cases}$$

注: 对球坐标与柱坐标而言, ρ 一般不相等, 但 φ 是相同的.

与球坐标一样, 某些曲面的方程, 在柱坐标系里比较简单. 例如圆柱面方程 $x^2+y^2=a^2$ 在柱坐标系里的方程是

$$\rho = a;$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ u = z. \end{cases}$$

注: 对球坐标与柱坐标而言, ρ 一般不相等, 但 φ 是相同的.

与球坐标一样, 某些曲面的方程, 在柱坐标系里比较简单. 例如圆柱面方程 $x^2+y^2=a^2$ 在柱坐标系里的方程是

$$\rho = a;$$

而在柱坐标系里的方程

$$\varphi = \alpha(\text{常数})$$

所表示的轨迹是一个半平面.

✍课堂练习: P 89, 习题 9

在球坐标系中,下列方程表示什么图形?

(1) $\rho = 3$; (2) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; (3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

✍课堂练习: P 89, 习题 9

在球坐标系中,下列方程表示什么图形?
(1) $\rho = 3$; (2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; (3) $\theta = \frac{\pi}{3}$.

答案: (1) 以原点为球心,半径为3的球面; (2) 以 z 轴为界且含 $y \geq 0$ 半个 yOz 平面; (3) 顶点在原点, 轴为 z 轴, 圆锥角一半为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面的上半部分.

课堂练习: P 89, 习题 10

在柱坐标系中,下列方程表示什么图形?

(1) $\rho = 2$; (2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; (3) $u = -1$.

课堂练习: P 89, 习题 10

在柱坐标系中,下列方程表示什么图形?
(1) $\rho = 2$; (2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; (3) $u = -1$.

答案: (1) 以 z 轴为轴, 半径为 2 的圆柱面; (2) 以 z 轴为界, 且过点 $\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ 的半平面; (3) 过点 $(0, 0, -1)$ 且平行于 xOy 平面的平面.

课堂练习: P 89, 习题 10

在柱坐标系中,下列方程表示什么图形?
(1) $\rho = 2$; (2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; (3) $u = -1$.

答案: (1) 以 z 轴为轴, 半径为 2 的圆柱面; (2) 以 z 轴为界, 且过点 $\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ 的半平面; (3) 过点 $(0, 0, -1)$ 且平行于 xOy 平面的平面.

下一节