# 第三章 平面与空间直线

## §3.1 平面方程

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

# §3.1 平面的方程

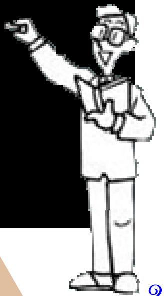
# §3.1 平面的方程

**教学内容**: 平面方程的各种形式及其推导过程

# §3.1 平面的方程

**教学内容:** 平面方程的各种形式及其推导过程

**教学目的:** 深刻理解并掌握平面和三元一次方程之间的相互关系



# §3.1 平面的方程

**教学内容**: 平面方程的各种形式及其推导过程

**教学目的**: 深刻理解并掌握平面和三元一次方程之间的相互关系

**教学重难点**: 平面的法式方程,一般方程的法式化

# ❒ 平面的点位式方程

## ❐ 平面的点位式方程

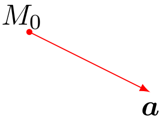
空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,

## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,

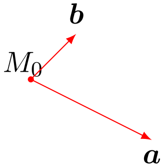
## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,



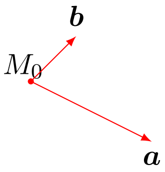
## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,



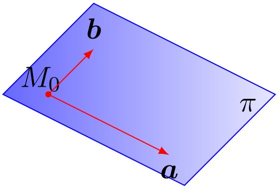
## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定.



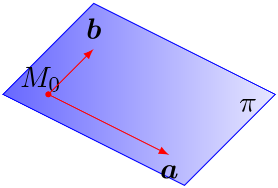
## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定.



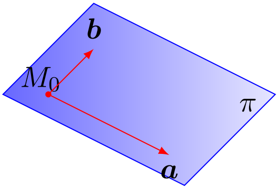
## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量.



## ❒ 平面的点位式方程

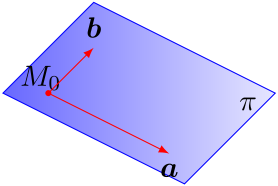
空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

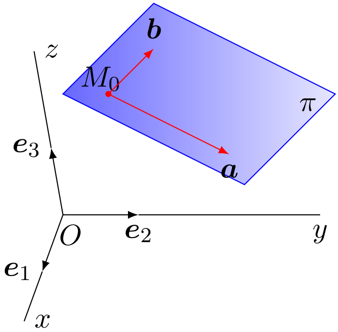
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$,



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

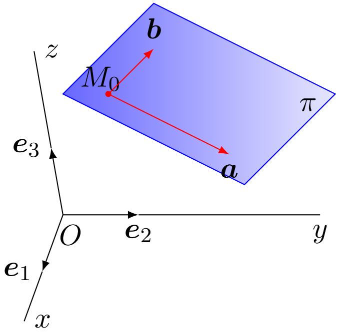
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$,



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

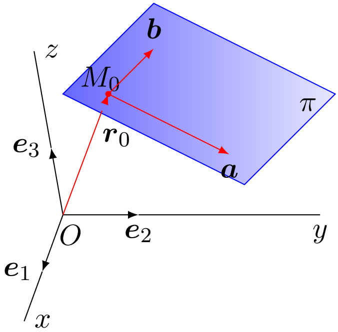
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM}_0 = \boldsymbol{r}_0$,



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

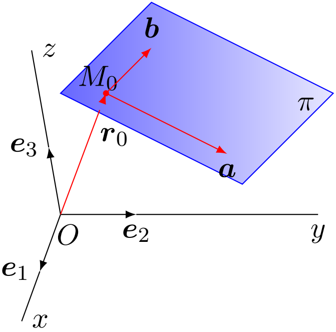
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM}_0 = \boldsymbol{r}_0$,



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

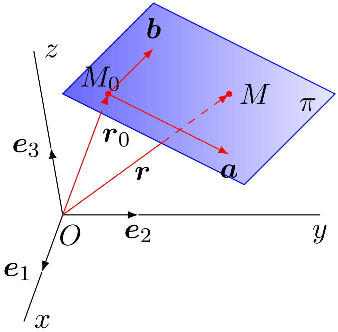
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$.



## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

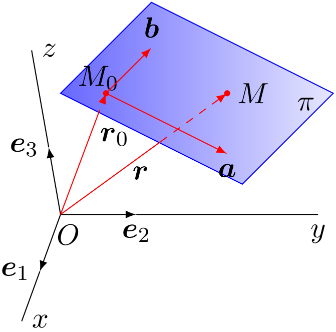
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM}_0 = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$.



## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

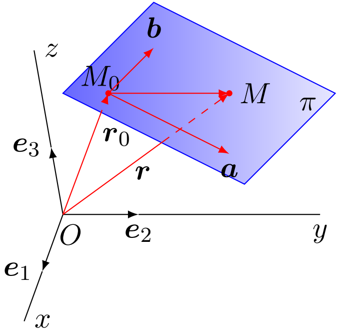
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面.



## ❒ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

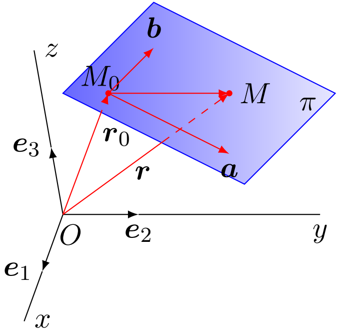
如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面.



## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

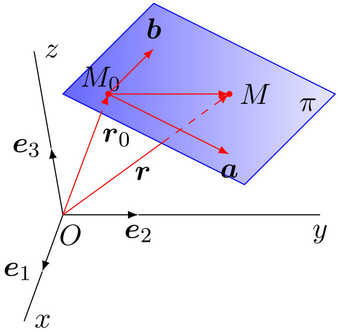


## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$



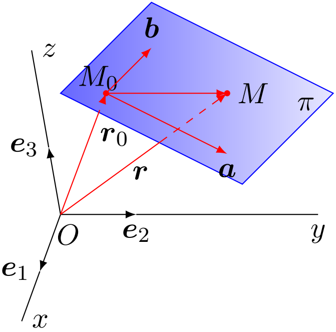
## ❐ 平面的点位式方程

空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$



## ❒ 平面的点位式方程

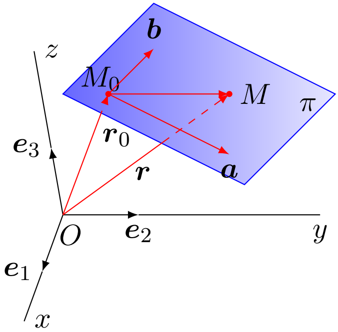
空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$



## ❐ 平面的点位式方程

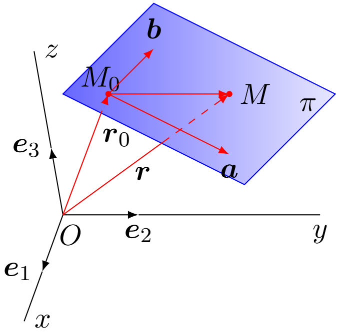
空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数.

## ❒ 平面的点位式方程

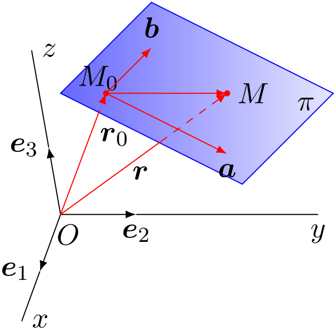
空间中给定一个点 $M_0$ 与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 那么通过 $M_0$ 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行的平面 $\pi$ 就唯一地被确定. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 $\pi$ 的方位向量. 任何一对与平面 $\pi$ 平行的不共线向量都可以作为 $\pi$ 的方位向量.

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \tag{1}$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$,

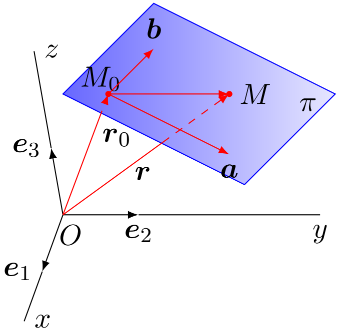
$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$

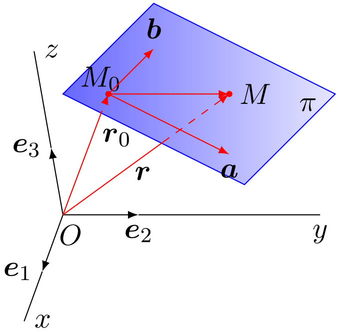



式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

再设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$,

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故




$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$

式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

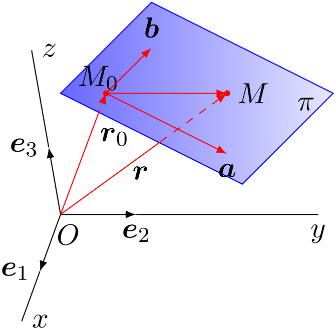
再设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 那么由向量式参数方程得

如图, 取仿射坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 $M_0$ 的向径 $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

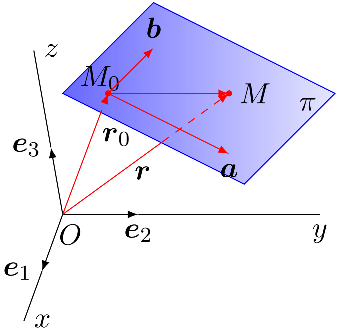
再设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 那么由向量式参数方程得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + X_1 u + X_2 v, \\ \\ \end{cases}} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \qquad (1)$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

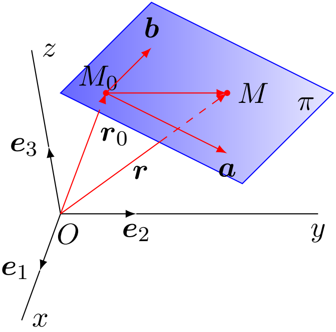
再设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 那么由向量式参数方程得

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + X_1 u + X_2 v, \\ y = y_0 + Y_1 u + Y_2 v, \\ \end{array}\right.} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{M_0 M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \tag{1}$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\};$$

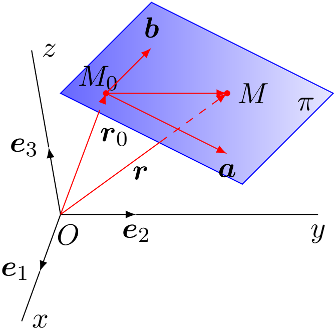
再设 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, 那么由向量式参数方程得

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+X_1u+X_2v, \\ y=y_0+Y_1u+Y_2v, \\ z=z_0+Z_1u+Z_2v, \end{cases}} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{M_0M}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}.} \tag{1}$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u,v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0,y_0,z_0)$ 和 $(x,y,z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\};$$

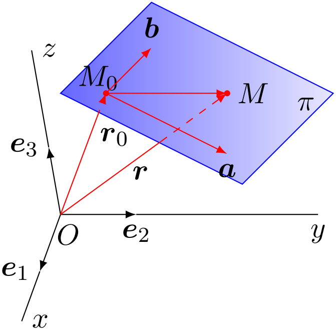
再设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 那么由向量式参数方程得

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + X_1 u + X_2 v, \\ y = y_0 + Y_1 u + Y_2 v, \\ z = z_0 + Z_1 u + Z_2 v, \end{cases}} \tag{2}$$

式(2)称为平面 $\pi$ 的坐标式参数方程.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.} \tag{1}$$




式(1)称为平面 $\pi$ 的向量式参数方程, 其中 $u, v$ 为参数. 设点 $M_0$ 和 $M$ 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x, y, z)$, 则

将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 作数量积, 消去参数 $u,v$ 得

将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 作数量积, 消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0;} \tag{3}$$

将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 作数量积, 消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0;} \tag{3}$$

在平面的坐标式参数方程 $\begin{cases} x=x_0+X_1u+X_2v, \\ y=y_0+Y_1u+Y_2v, \\ z=z_0+Z_1u+Z_2v \end{cases}$ 中消去参数 $u,v$ 得

将 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 作数量积, 消去参数 $u, v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0;} \tag{3}$$

在平面的坐标式参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + X_1 u + X_2 v, \\ y = y_0 + Y_1 u + Y_2 v, \\ z = z_0 + Z_1 u + Z_2 v \end{cases}$ 中消去参数 $u, v$ 得

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0.} \tag{4}$$

将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 作数量积, 消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0;} \tag{3}$$

在平面的坐标式参数方程 $\begin{cases} x=x_0+X_1u+X_2v,\\ y=y_0+Y_1u+Y_2v,\\ z=z_0+Z_1u+Z_2v \end{cases}$ 中消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0.} \tag{4}$$

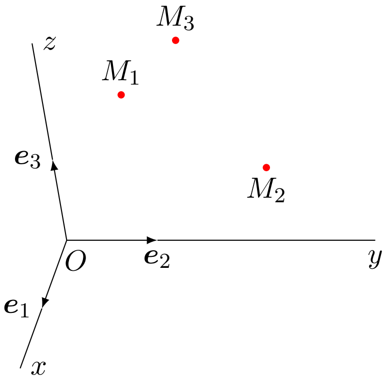
以上式(1)-(4)都叫做平面 $\pi$ 的点位式方程.

**例 1**

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

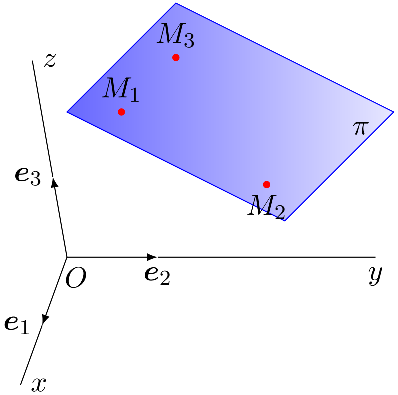
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.



## 例 1

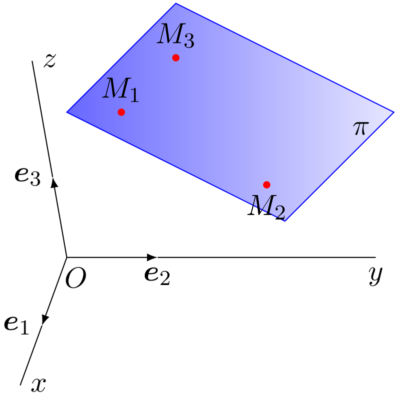
已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

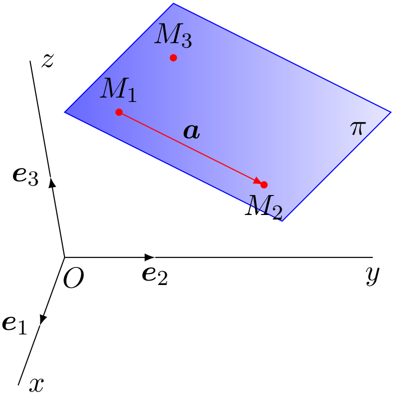
**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$,



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

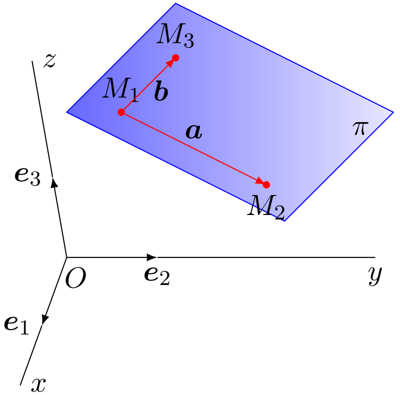
**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$,



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

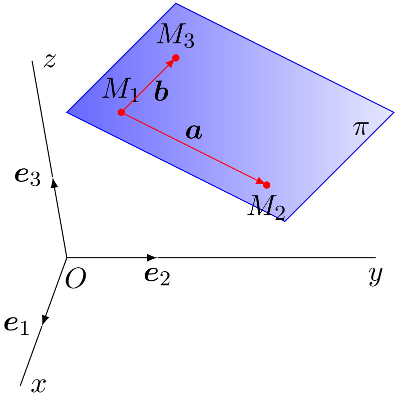
**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$,



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

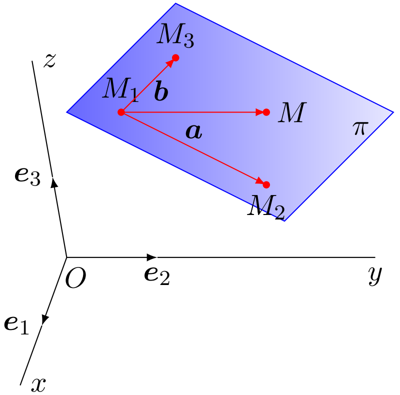
**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点,



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点,

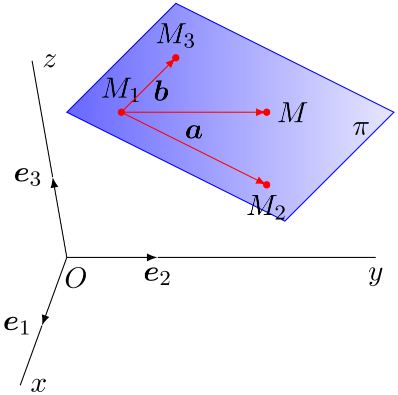


## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

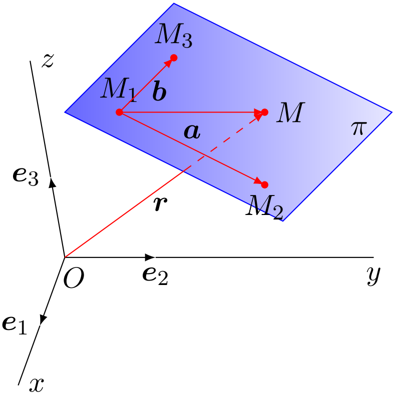


## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

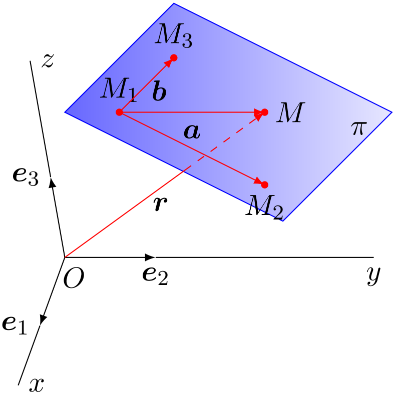


## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$



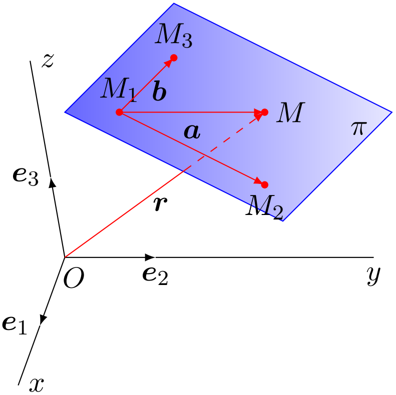
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}\qquad(i=1,2,3),$$



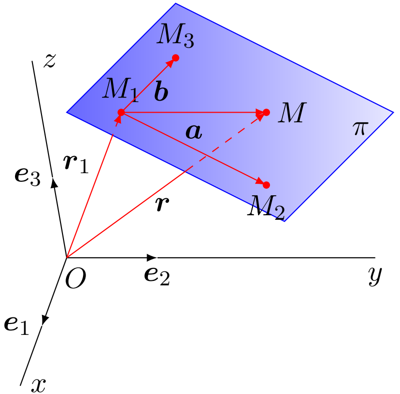
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}\qquad (i=1,2,3),$$



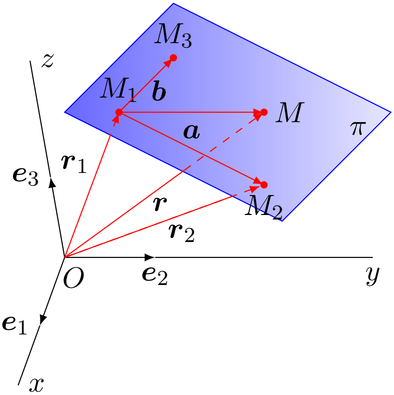
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i} \qquad (i=1,2,3),$$



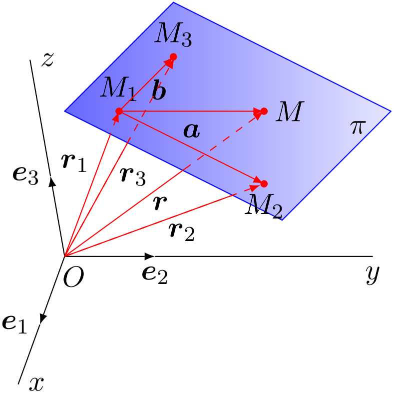
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}\qquad(i=1,2,3),$$



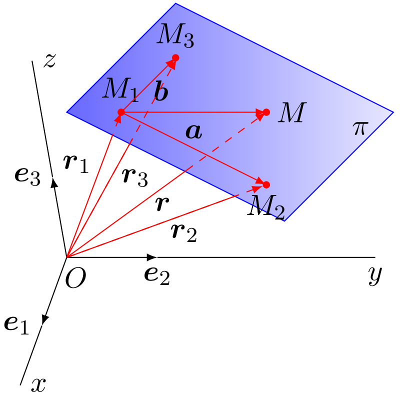
## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3),$$



## 例 1

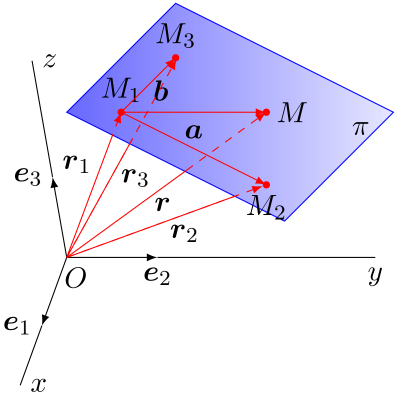
已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

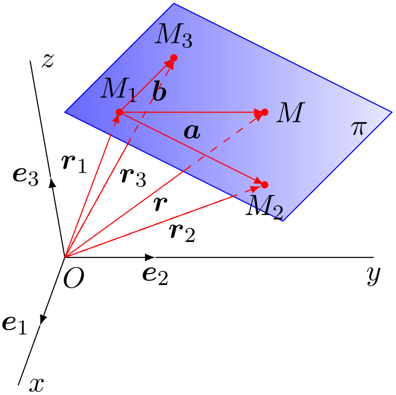
**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3),$$

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

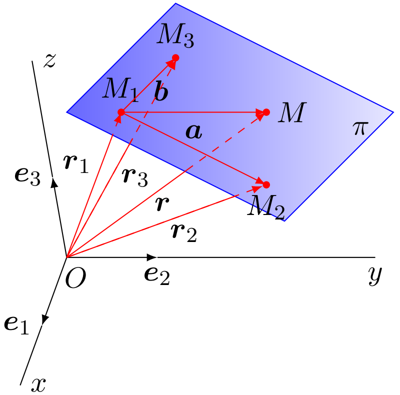
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求通过 $M_1,M_2,M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x,y,z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

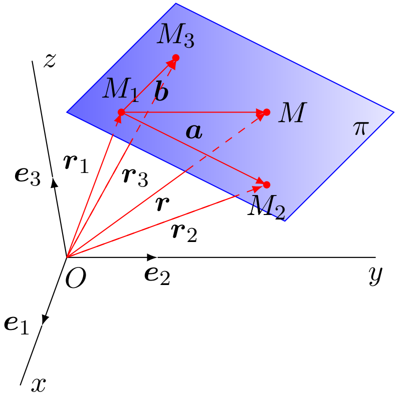
$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3),$$

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}.$$



## 例 1

已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求通过 $M_1, M_2, M_3$ 三点的平面 $\pi$ 的方程.

**解** 取平面 $\pi$ 的方位向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 $\pi$ 上任意一点, 那么

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

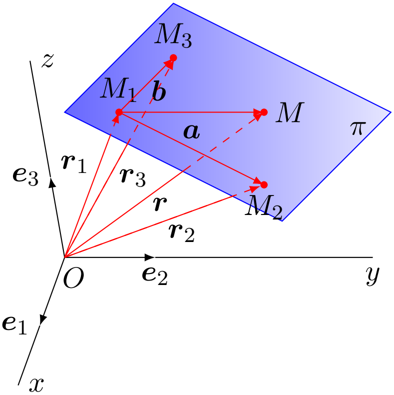
$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}.$$




因此平面 $\pi$ 的向量式参数方程为

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1);}$$

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3),$$

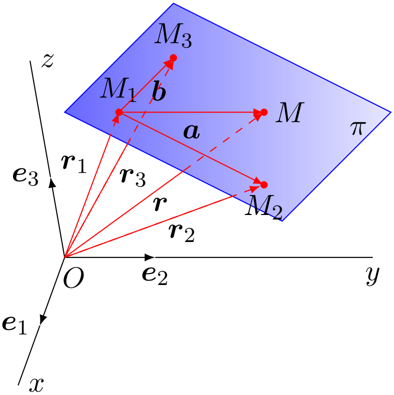
$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}.$$

因此平面 $\pi$ 的向量式参数方程为



$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + v(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

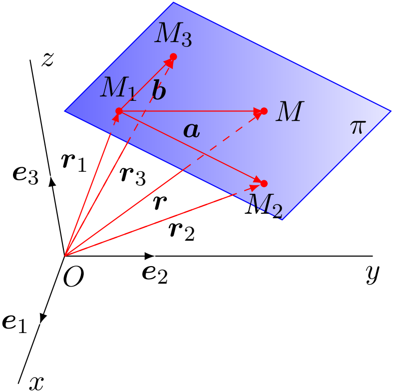
$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}.$$




因此平面 $\pi$ 的向量式参数方程为

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + v(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1); \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}(i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

$$= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}.$$

因此平面 $\pi$ 的向量式参数方程为

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boxed{\begin{cases} x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1), \\ y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1), \\ z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1); \end{cases}}$$

将上述向量式参数方程消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boxed{\begin{cases} x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1), \\ y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1), \\ z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1); \end{cases}}$$

将上述向量式参数方程消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0;}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boxed{\begin{cases} x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1), \\ y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1), \\ z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1); \end{cases}}$$

将上述向量式参数方程消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0;}$$

上式又可改写成

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + v(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1); \end{cases}}$$

将上述向量式参数方程消去参数 $u, v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0;}$$

上式又可改写成

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \text{ 或 } \boxed{\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1);}$$

坐标式参数方程为

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1), \\ y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1), \\ z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1); \end{array}\right.$$

将上述向量式参数方程消去参数 $u,v$ 得

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0;}$$

上式又可改写成

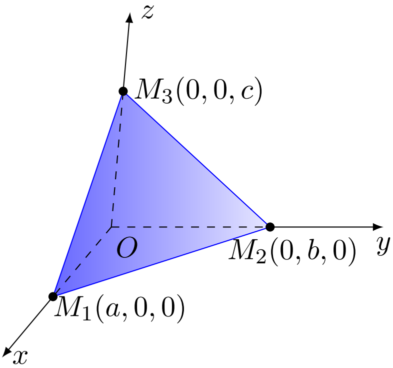
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \text{ 或 } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

以上五式都叫做平面的三点式方程.

## ☞三点式的特例

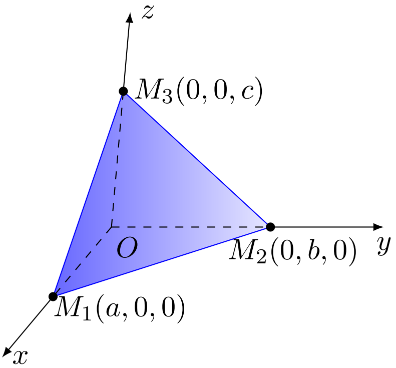
☞**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc \neq 0$,

**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc \neq 0$,



**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc \neq 0$, 那么有

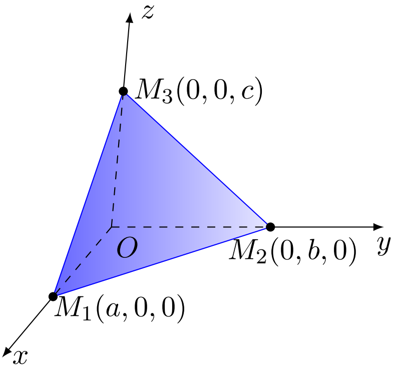
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$



**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc\neq 0$, 那么有

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad bcx+acy+abz=abc$$

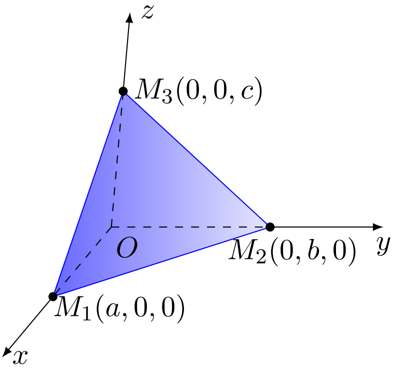


**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc\neq 0$, 那么有

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad bcx + acy + abz = abc$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.}$$

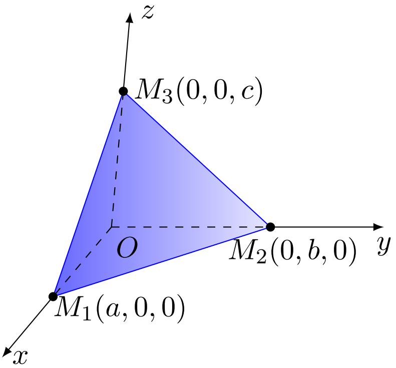


**三点式的特例** 若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, 其中 $abc\neq 0$, 那么有

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad bcx + acy + abz = abc$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.}$$




上式叫做平面的截距式方程, 其中 $a,b,c$ 分别叫做平面在三坐标轴上的截距.

# ❒ 平面的一般方程

## ❐ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定，因而任一平面都可以用方程

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$ 表示;

## ❐ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定, 因而任一平面都可以用方程

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$ 表示; 展开后得平面的一般方程:

## ❐ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定, 因而任一平面都可以用方程 $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示; 展开后得平面的一般方程:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

## ❒ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定, 因而任一平面都可以用方程 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示; 展开后得平面的一般方程:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

# ❐ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定，因而任一平面都可以用方程 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示；展开后得平面的一般方程:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix},$$

## 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定, 因而任一平面都可以用方程 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示; 展开后得平面的一般方程:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

## ❒ 平面的一般方程

空间任一平面都可用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位向量 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定，因而任一平面都可以用方程 $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示；展开后得平面的一般方程:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，故 $A, B, C$ 不全为零,

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都表示一个平面.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A, B, C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A \neq 0$.

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0,}$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D=-\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A, B, C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A \neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0,}$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D=-\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A, B, C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A \neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\left\{ y = \qquad\qquad u, \right.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A,B,C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x,y,z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x,y,z$ 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A,B,C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A\neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\begin{cases} \\ y = \qquad\qquad u, \\ z = \qquad\qquad\qquad v. \end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A, B, C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A \neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{D}{A} - \dfrac{B}{A}u - \dfrac{C}{A}v, \\ y = u, \\ z = v. \end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A,B,C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x,y,z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x,y,z$ 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A,B,C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A\neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{D}{A} & -\dfrac{B}{A}u & -\dfrac{C}{A}v, \\ y = & \quad u, & \\ z = & & \quad v. \end{cases}$$

显然它表示由点 $M_0\left(-\dfrac{D}{A},0,0\right)$ 和两个不共线向量 $\{B,-A,0\}$ 和 $\{C,0,-A\}$ 所决定的平面, 因此我们证明了以下结论.

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 故 $A, B, C$ 不全为零, 这表明空间任一平面都可用关于 $x, y, z$ 的三元一次方程来表示. 反之, 任一关于变元 $x, y, z$ 的一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都表示一个平面. 事实上, 因 $A, B, C$ 不全为零, 不失一般性, 设 $A \neq 0$. 那么前面的方程可改写为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{D}{A} & -\dfrac{B}{A}u & -\dfrac{C}{A}v, \\ y = & u, & \\ z = & & v. \end{cases}$$

显然它表示由点 $M_0\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$ 和两个不共线向量 $\{B, -A, 0\}$ 和 $\{C, 0, -A\}$ 所决定的平面, 因此我们证明了以下结论.

**定理 3.1.1 (空间中平面的基本定理)**

空间中任一平面的方程都可表示成一个关于 $x, y, z$ 的一次方程; 反之, 每一个关于变量 $x, y, z$ 的一次方程都表示一个平面.

## ☞一般方程 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的特例

## ☞一般方程 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的特例

☆$D = 0$

## ☞一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

## ☞一般方程 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 的特例

★$D = 0$

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi : Ax + By + Cz = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程}$$

## ☞一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$\Leftrightarrow$ $(0,0,0)$满足方程 $\Leftrightarrow$ $\pi$通过原点.

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A,B,C$ 中有一为零

## ☞一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

## ☞一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)$满足方程 $\quad \Leftrightarrow \quad \pi$通过原点.

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \\ \end{cases}$$

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点.}$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \parallel z\text{轴} \\ \end{cases}$$

## ☞一般方程 $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

☆$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi : Ax+By+Cz=0}$$

$\Leftrightarrow$ $(0,0,0)$满足方程 $\Leftrightarrow$ $\pi$通过原点.

☆$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi : Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \mathbin{/\!/} z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \end{cases}$$

## ☞一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点.}$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \parallel z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

☆ $D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

☆ $A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \mathbin{/\!/} z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时，可以得出类似结论.

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A, B, C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \,/\!/\, z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 可以得出类似结论.

**结论:**

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A, B, C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \,/\!/\, z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 可以得出类似结论.

**结论:** 当且仅当 $D=0$, 平面通过原点.

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 & \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \parallel z\text{轴} \\ D=0 & \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时，可以得出类似结论.

**结论：** 当且仅当 $D=0$，平面通过原点.

当且仅当 $D\neq 0$, $C=0$ $(B=0$或$A=0)$，平面平行于 $z$ 轴($y$ 轴或 $x$ 轴);

# 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 & \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \parallel z\text{轴} \\ D=0 & \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 可以得出类似结论.

**结论:** 当且仅当 $D=0$, 平面通过原点.
当且仅当 $D\neq 0$, $C=0$ ($B=0$或$A=0$), 平面平行于 $z$ 轴($y$ 轴或 $x$ 轴);
当且仅当 $D=0$, $C=0$($B=0$ 或 $A=0$), 平面通过 $z$ 轴($y$ 轴或 $x$ 轴).

## 一般方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的特例

★$D=0$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+Cz=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,0,0)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过原点}.$$

★$A,B,C$ 中有一为零

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi: Ax+By+D=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{不满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \,/\!/\, z\text{轴} \\ D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,z)\text{满足方程} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\text{通过}z\text{轴} \end{cases}$$

对于 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 可以得出类似结论.

**结论:** 当且仅当 $D=0$, 平面通过原点.
当且仅当 $D\neq 0$, $C=0$ $(B=0$或$A=0)$, 平面平行于 $z$ 轴($y$ 轴或 $x$ 轴);
当且仅当 $D=0$, $C=0(B=0$ 或 $A=0)$, 平面通过 $z$ 轴($y$ 轴或 $x$ 轴).

**课堂讨论:** $A,B,C$ 中有两个为零的情况.

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**例 2**

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax + By + D = 0,$$

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,$$

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,\quad 3A-2B+D=0,$$

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,\quad 3A-2B+D=0,$$

由以上两式得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$$

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,\quad 3A-2B+D=0,$$

由以上两式得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1:1:(-1).$$

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,\quad 3A-2B+D=0,$$

由以上两式得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1:1:(-1).$$

为什么?

## 例 2

求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 且平行于 $z$ 轴的平面的方程.

**解** 设平行于 $z$ 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因平面又通过 $M_1(2,-1,1)$ 与 $M_2(3,-2,1)$, 代入得

$$2A-B+D=0,\quad 3A-2B+D=0,$$

由以上两式得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1:1:(-1).$$

为什么? 所以所求的平面方程为

$$x+y-1=0.$$

**✍课堂练习: P 105, 习题 2**

化平面方程 $x + 2y - z + 4 = 0$ 为截距式与参数式.

**课堂练习: P 105, 习题 2**

化平面方程 $x+2y-z+4=0$ 为截距式与参数式.

答案:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1, \quad \begin{cases} x=-4-2u+v, \\ y=u, \\ z=v. \end{cases}$$

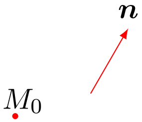
# 平面的法式方程

## 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定.

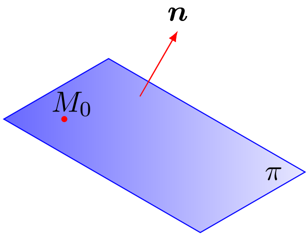
# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定.



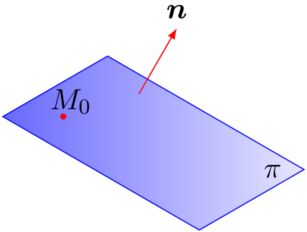
# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定.



## 平面的法式方程

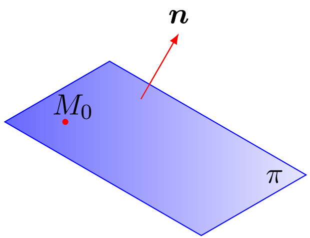
空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.



# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

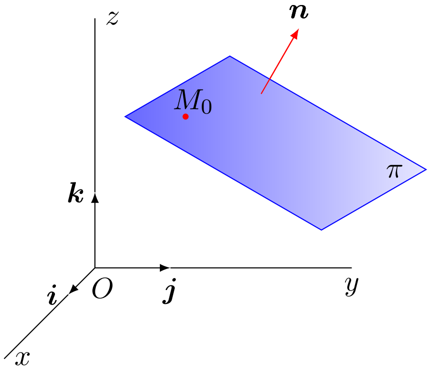
取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.



## 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

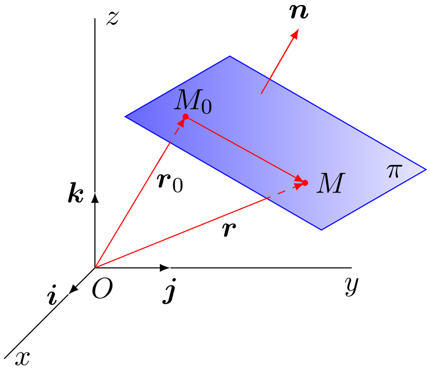
取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.



# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

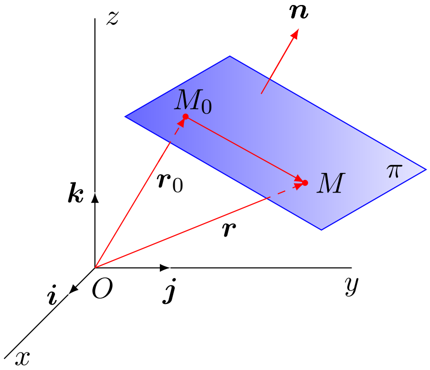
取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.



# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,

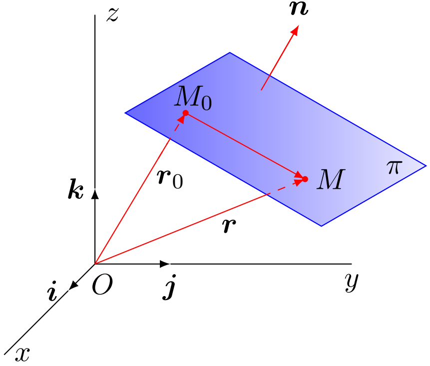


# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$

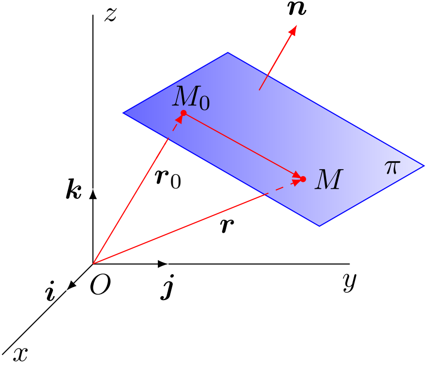


# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$



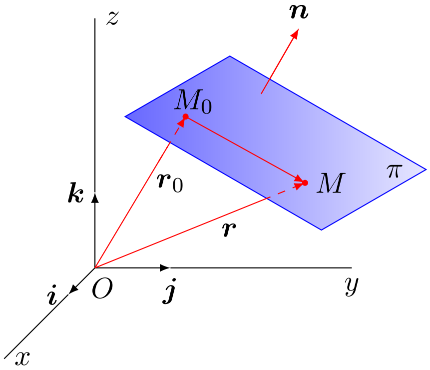

设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

## 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$




设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

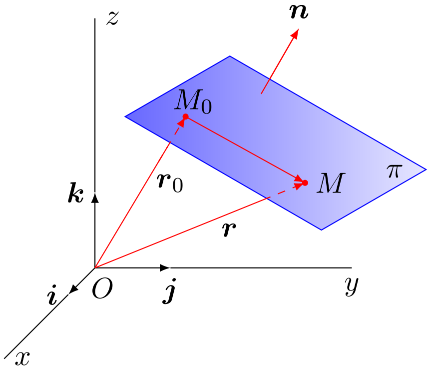
$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},$$

# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$




设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

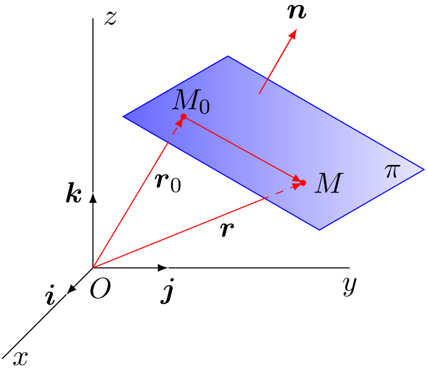
$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$

# 平面的法式方程

空间给定一个点 $M_0$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$, 则通过点 $M_0$ 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也被唯一地确定. 称与平面垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法向量.

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$




设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

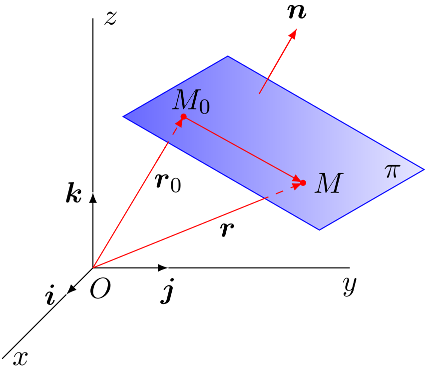
$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},$$

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$




设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $\quad M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

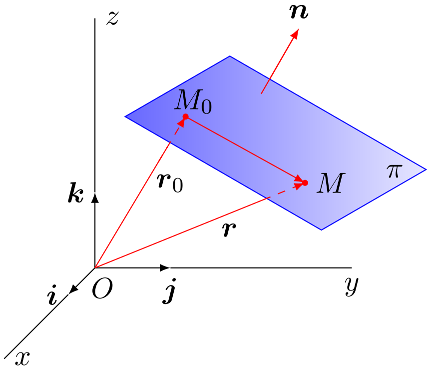
$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},$$

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,}$$

取空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 $M_0$ 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 平面 $\pi$ 上任意一点 $M$ 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 点 $M$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$




设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

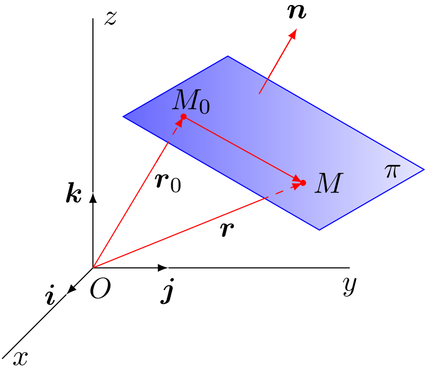
$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},$$

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,}$$

称这两个方程为平面的点法式方程.




$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.}$$

设 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, 则

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\},$$
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},$$

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,}$$

称这两个方程为平面的点法式方程.

若记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 则点法式方程又可表示为

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,}$$

称这两个方程为平面的点法式方程.

若记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 则点法式方程又可表示为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

于是 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ 又可以表示为

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,}$$

称这两个方程为平面的点法式方程.

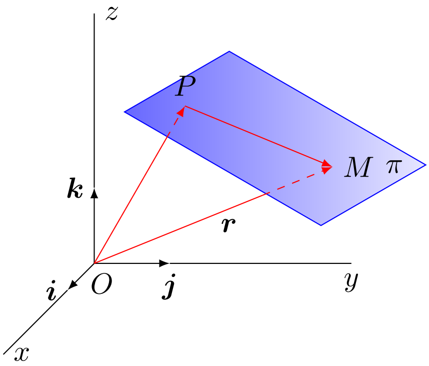
若记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 则点法式方程又可表示为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

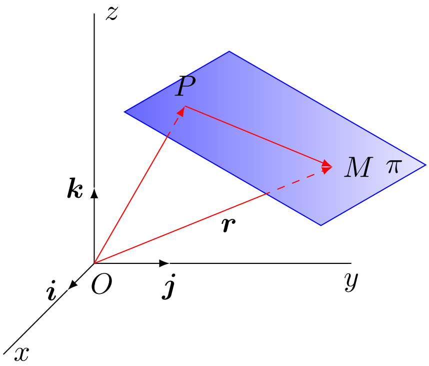
**结论:** 在直角坐标系下, 平面的一般方程中的一次项系数 $A,B,C$ 有着简明的几何意义, 它们是平面的一个法向量的坐标.

如图, 如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$,

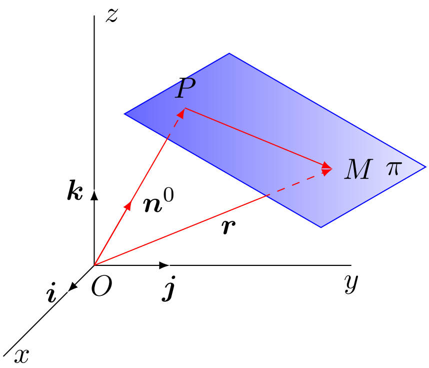
如图, 如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$,



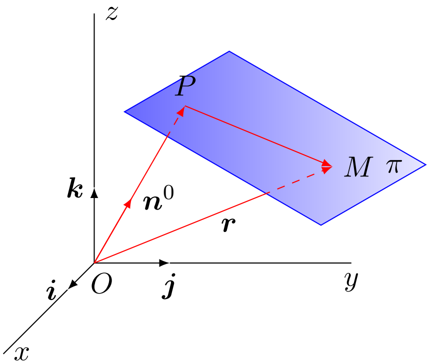
如图, 如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$, 而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$, 当平面不过原点 $O$ 时, $\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同;



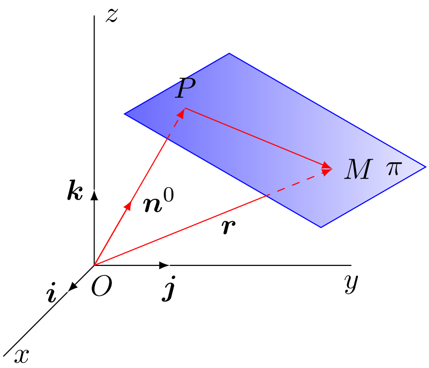
如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同;



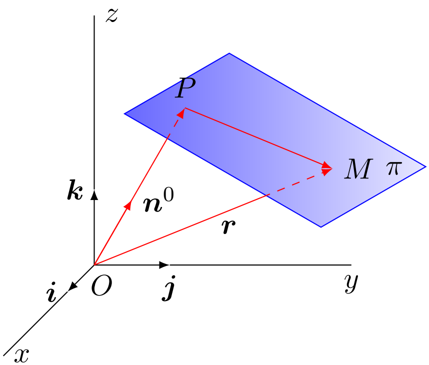
如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同；当平面过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个.



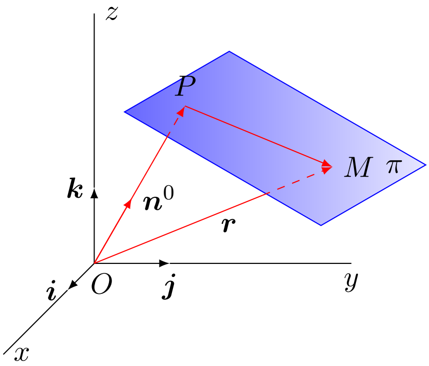
如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同；当平面过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个. 设 $|\overrightarrow{OP}| = p$,



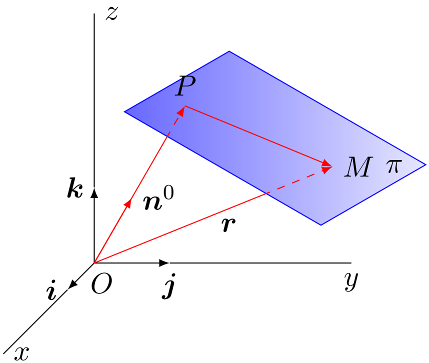
如图, 如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$, 而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$, 当平面不过原点 $O$ 时, $\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同; 当平面过原点时, $\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个. 设 $|\overrightarrow{OP}| = p$, 那么点 $P$ 的向径 $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}^0$,



如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同；当平面过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个．设 $|\overrightarrow{OP}| = p$，那么点 $P$ 的向径 $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}^0$，因此点 $P$ 和法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 决定的平面 $\pi$ 的方程为

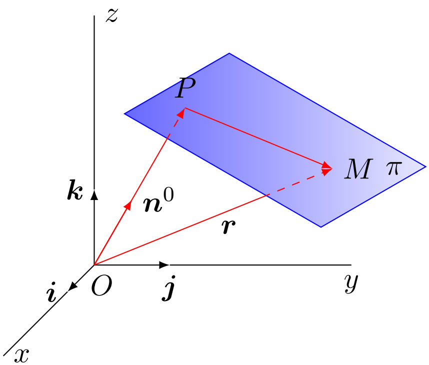


如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同；当平面过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个. 设 $|\overrightarrow{OP}| = p$，那么点 $P$ 的向径 $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}^0$，因此点 $P$ 和法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 决定的平面 $\pi$ 的方程为




$$\boldsymbol{n}^0 \cdot (\boldsymbol{r} - p\boldsymbol{n}^0) = 0,$$

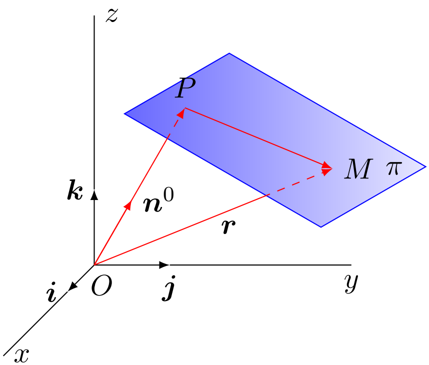
如图, 如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$, 而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$, 当平面不过原点 $O$ 时, $\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同; 当平面过原点时, $\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个. 设 $|\overrightarrow{OP}| = p$, 那么点 $P$ 的向径 $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}^0$, 因此点 $P$ 和法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 决定的平面 $\pi$ 的方程为




$$\boldsymbol{n}^0 \cdot (\boldsymbol{r} - p\boldsymbol{n}^0) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是 $\pi$ 上任意点 $M$ 的向径.

如图，如果平面上的点 $M_0$ 特殊地取自原点 $O$ 向平面 $\pi$ 所引垂线的垂足 $P$，而 $\pi$ 的法向量取单位向量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点 $O$ 时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取作与 $\overrightarrow{OP}$ 相同；当平面过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任取一个. 设 $|\overrightarrow{OP}| = p$，那么点 $P$ 的向径 $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}^0$，因此点 $P$ 和法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 决定的平面 $\pi$ 的方程为




$$\boldsymbol{n}^0 \cdot (\boldsymbol{r} - p\boldsymbol{n}^0) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是 $\pi$ 上任意点 $M$ 的向径. 上式又可写成

$$\boxed{\boldsymbol{n}^0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0,}$$

并叫做平面的向量式法式方程.

设 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0$ 得

设 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$, $\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}-p=0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.}$$

上式叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程.

设 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

上式叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程. 平面的法式方程是具有以下两个特征的一种一般方程:

设 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

上式叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程. 平面的法式方程是具有以下两个特征的一种一般方程:

- 一次项的系数是单位法向量的坐标, 它们的平方和等于1;

设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$, $\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}-p=0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.}$$

上式叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程. 平面的法式方程是具有以下两个特征的一种一般方程:

- 一次项的系数是单位法向量的坐标, 它们的平方和等于1;
- 因为 $p$ 是原点 $O$ 到平面 $\pi$ 的距离, 所以常数项 $-p\leq 0$.

设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$, $\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 那么由 $\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}-p=0$ 得

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.}$$

上式叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程. 平面的法式方程是具有以下两个特征的一种一般方程:

- 一次项的系数是单位法向量的坐标, 它们的平方和等于1;
- 因为 $p$ 是原点 $O$ 到平面 $\pi$ 的距离, 所以常数项 $-p\leq 0$.

根据平面法式方程的这两个特征, 我们不难把平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 化为平面的法式方程.

事实上, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘 $Ax+By+Cz+D=0$ 两边, 即可得法式方程

事实上, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘 $Ax+By+Cz+D=0$ 两边, 即可得法式方程

$$\begin{aligned} &\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ + &\frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0, \end{aligned}$$

事实上, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘 $Ax + By + Cz + D = 0$ 两边, 即可得法式方程

$$\begin{aligned} & \frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ + \quad & \frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0, \end{aligned}$$

其中 $\lambda$ 的正负号选取一个, 使它满足 $\lambda D = -p \leq 0$;

事实上, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘 $Ax+By+Cz+D=0$ 两边, 即可得法式方程

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0,$$

其中 $\lambda$ 的正负号选取一个, 使它满足 $\lambda D = -p \leq 0$; 或者说当 $D \neq 0$ 时, 取 $\lambda$ 的符号与 $D$ 异号;

事实上, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘 $Ax+By+Cz+D=0$ 两边, 即可得法式方程

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0,$$

其中 $\lambda$ 的正负号选取一个, 使它满足 $\lambda D = -p \leq 0$; 或者说当 $D \neq 0$ 时, 取 $\lambda$ 的符号与 $D$ 异号; 当 $D=0$时, $\lambda$ 的符号可以任意取.

前面已经指出, 在直角坐标系下, 平面的一般方程中的系数 $A, B, C$ 为平面的一个法向量的坐标.

前面已经指出，在直角坐标系下，平面的一般方程中的系数 $A, B, C$ 为平面的一个法向量的坐标. 此处又看到 $-\lambda D = p$等于原点到平面的距离.

前面已经指出, 在直角坐标系下, 平面的一般方程中的系数 $A, B, C$ 为平面的一个法向量的坐标. 此处又看到 $-\lambda D = p$等于原点到平面的距离. 平面的一般方程乘选定符号的 $\lambda$ 后, 便可得平面的法式方程.

前面已经指出, 在直角坐标系下, 平面的一般方程中的系数 $A, B, C$ 为平面的一个法向量的坐标. 此处又看到 $-\lambda D = p$等于原点到平面的距离. 平面的一般方程乘选定符号的 $\lambda$ 后, 便可得平面的法式方程. 通常我们将这个变形称为平面一般方程的法式化,

前面已经指出，在直角坐标系下，平面的一般方程中的系数 $A, B, C$ 为平面的一个法向量的坐标. 此处又看到 $-\lambda D = p$等于原点到平面的距离. 平面的一般方程乘选定符号的 $\lambda$ 后，便可得平面的法式方程. 通常我们将这个变形称为平面一般方程的法式化，而因子

$$\lambda = \frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(\text{在取定符号后})$$

就叫做法式化因子.

**例 3**

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**例 3**

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$,

**例 3**

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$, 所以 $\pi$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,1,-2\}.$$

**例 3**

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$, 所以 $\pi$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,1,-2\}.$$

所求平面 $\pi$ 又通过 $M_1M_2$ 的中点 $M_0(2,-1,1)$, 因此平面的点法式方程为

## 例 3

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$, 所以 $\pi$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,1,-2\}.$$

所求平面 $\pi$ 又通过 $M_1M_2$ 的中点 $M_0(2,-1,1)$, 因此平面的点法式方程为

$$1\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)-2\cdot(z-1)=0,$$

**例 3**

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$, 所以 $\pi$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,1,-2\}.$$

所求平面 $\pi$ 又通过 $M_1M_2$ 的中点 $M_0(2,-1,1)$, 因此平面的点法式方程为

$$1\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)-2\cdot(z-1)=0,$$

化简整理即得 $\pi$ 的方程为

## 例 3

已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 $M_1M_2$ 的垂直平分面 $\pi$ 的方程.

**解** 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,-4\}=2\{1,1,-2\}$ 垂直于平面 $\pi$, 所以 $\pi$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,1,-2\}.$$

所求平面 $\pi$ 又通过 $M_1M_2$ 的中点 $M_0(2,-1,1)$, 因此平面的点法式方程为

$$1\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)-2\cdot(z-1)=0,$$

化简整理即得 $\pi$ 的方程为

$$x+y-2z+1=0.$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将 $\lambda=-\frac{1}{7}$ 乘 $\pi$ 方程两边, 得 $\pi$的法式方程

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将 $\lambda=-\frac{1}{7}$ 乘 $\pi$ 方程两边, 得 $\pi$的法式方程

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0.$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将 $\lambda=-\frac{1}{7}$ 乘 $\pi$ 方程两边, 得 $\pi$的法式方程

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0.$$

原点指向 $\pi$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}^0=\left\{-\frac{3}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7}\right\}$,

## 例 4

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将 $\lambda=-\frac{1}{7}$ 乘 $\pi$ 方程两边, 得 $\pi$的法式方程

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0.$$

原点指向 $\pi$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}^0=\left\{-\frac{3}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7}\right\}$, 它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{3}{7}, \cos\beta=\frac{2}{7}, \cos\gamma=-\frac{6}{7},$$

**例 4**

把平面 $\pi$ 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程, 求自原点指向 $\pi$ 的单位法向量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离.

**解** 因为 $A=3, B=-2, C=6, D=14>0$, 所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将 $\lambda=-\frac{1}{7}$ 乘 $\pi$ 方程两边, 得 $\pi$的法式方程

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0.$$

原点指向 $\pi$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}^0=\left\{-\frac{3}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7}\right\}$, 它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{3}{7},\cos\beta=\frac{2}{7},\cos\gamma=-\frac{6}{7},$$

原点 $O$ 到 $\pi$ 的距离为 $p=2$.

**课堂练习: P 105, 习题 7**

求自坐标原点向以下各平面所引垂线的长和指向平面的单位法向量的方向余弦:

(1) $2x+3y+6z-35=0$; (2) $x-2y+2z+21=0$.

**课堂练习: P 105, 习题 7**

求自坐标原点向以下各平面所引垂线的长和指向平面的单位法向量的方向余弦:
(1) $2x+3y+6z-35=0$; (2) $x-2y+2z+21=0$.

答案: (1) $p=5, \cos\alpha=\frac{2}{7}, \cos\beta=\frac{3}{7}, \cos\gamma=\frac{6}{7}$;

**课堂练习: P 105, 习题 7**

求自坐标原点向以下各平面所引垂线的长和指向平面的单位法向量的方向余弦:
(1) $2x+3y+6z-35=0$; (2) $x-2y+2z+21=0$.

答案: (1) $p=5, \cos\alpha=\dfrac{2}{7}, \cos\beta=\dfrac{3}{7}, \cos\gamma=\dfrac{6}{7}$;
(2) $p=7, \cos\alpha=-\dfrac{1}{3}, \cos\beta=\dfrac{2}{3}, \cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

**课堂练习: P 105, 习题 7**

求自坐标原点向以下各平面所引垂线的长和指向平面的单位法向量的方向余弦:

(1) $2x+3y+6z-35=0$; (2) $x-2y+2z+21=0$.

答案: (1) $p=5, \cos\alpha=\dfrac{2}{7}, \cos\beta=\dfrac{3}{7}, \cos\gamma=\dfrac{6}{7}$;

(2) $p=7, \cos\alpha=-\dfrac{1}{3}, \cos\beta=\dfrac{2}{3}, \cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

下一节