第一章 向量与坐标

§1.6 向量在轴上的射影

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§1.6 向量在轴上的射影

§1.6 向量在轴上的射影

教学内容: 向量在轴上射影的定义与性质

§1.6 向量在轴上的射影

教学内容: 向量在轴上射影的定义与性质

教学目的: 掌握射影向量与射影的联系与区别

§1.6 向量在轴上的射影

教学内容: 向量在轴上射影的定义与性质

教学目的: 掌握射影向量与射影的联系与区别

教学重难点: 向量在轴 ℓ 上射影概念的引入

射影的定义

❐ 射影的定义

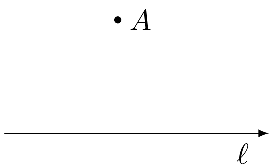
已知空间中一点 A 与一轴 ℓ,

❒ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ,

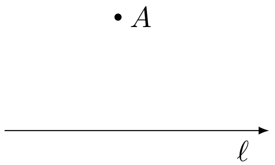
❐ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ,



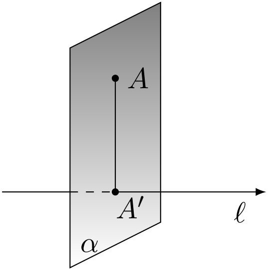
❐ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection).



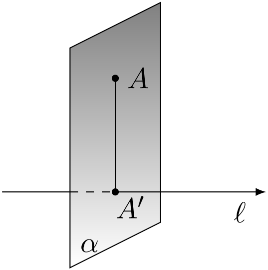
❐ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection).



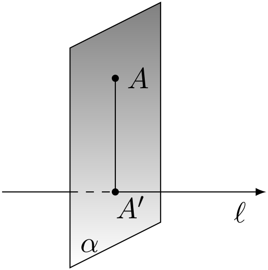
❐ 射影的定义

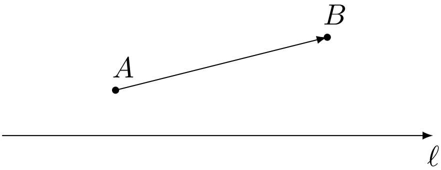
已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B',



❐ 射影的定义

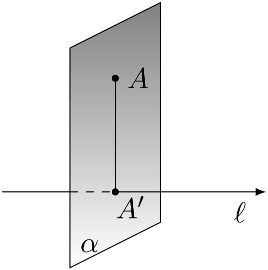
已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B',

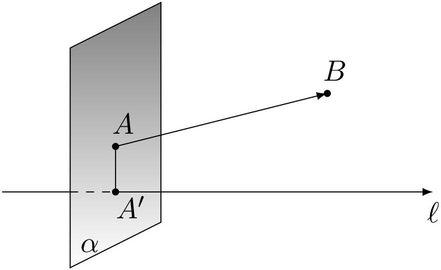




❐ 射影的定义

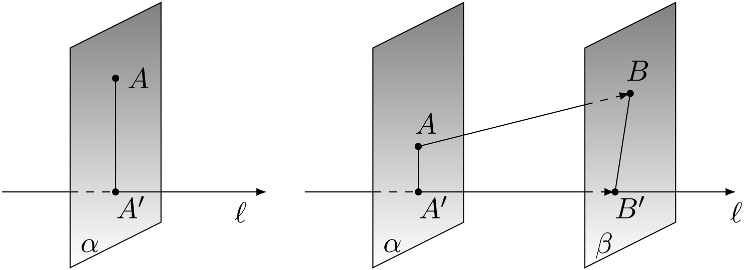
已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B',





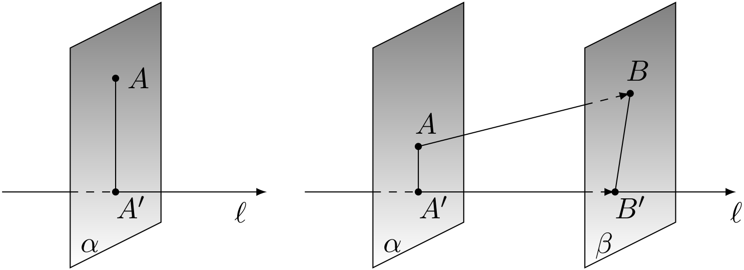
❒ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B',



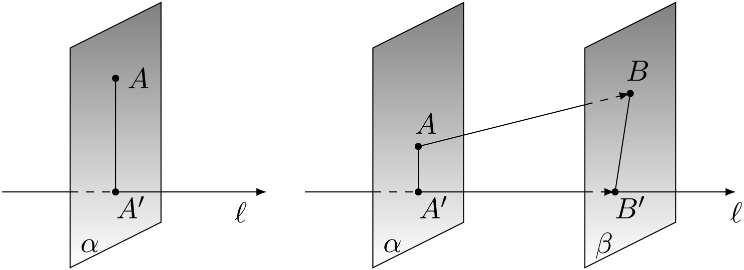
❐ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影向量, 记做 射影向量$_\ell\overrightarrow{AB}$.



❐ 射影的定义

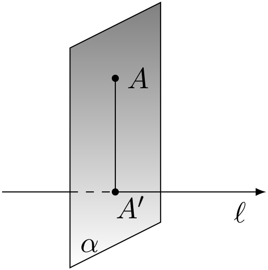
已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影向量, 记做 射影向量$_\ell\overrightarrow{AB}$.

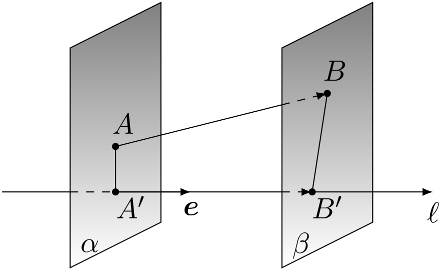


如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$,

❒ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影向量, 记做 射影向量$_\ell \overrightarrow{AB}$.

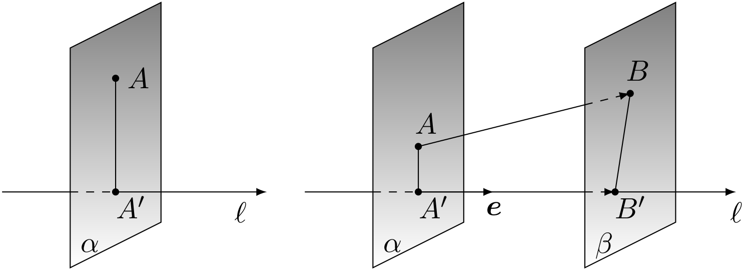




如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$,

❒ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影向量, 记做 射影向量$_\ell\overrightarrow{AB}$.

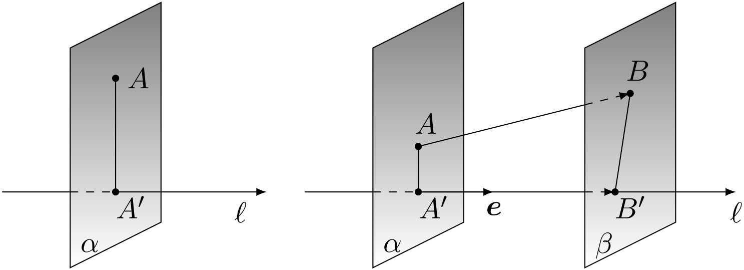


如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$\text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}.$$

❐ 射影的定义

已知空间中一点 A 与一轴 ℓ, 过点 A 作垂直于 ℓ 的平面 α, 称 α 与 ℓ 的交点 A' 为 A 在 ℓ 上的 射影(projection). 另一方面,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 ℓ 上的射影分别为 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影向量, 记做 射影向量$_\ell\overrightarrow{AB}$.

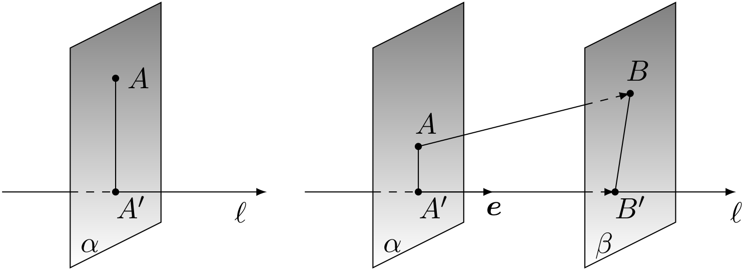


如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$射影向量_\ell\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}.$$

这里的 x 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影, 记做射影$_\ell\overrightarrow{AB}$, 即

$$射影_\ell \overrightarrow{AB} = x.$$



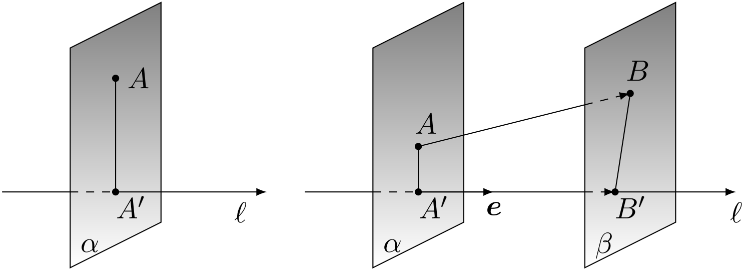
如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$射影向量_\ell \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}.$$

这里的 x 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影, 记做射影$_\ell \overrightarrow{AB}$, 即

$$\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = x.$$

我们也把射影向量$_\ell \overrightarrow{AB}$ 与射影$_\ell \overrightarrow{AB}$ 分别写成射影向量$_{\boldsymbol{e}} \overrightarrow{AB}$ 与射影$_{\boldsymbol{e}} \overrightarrow{AB}$,



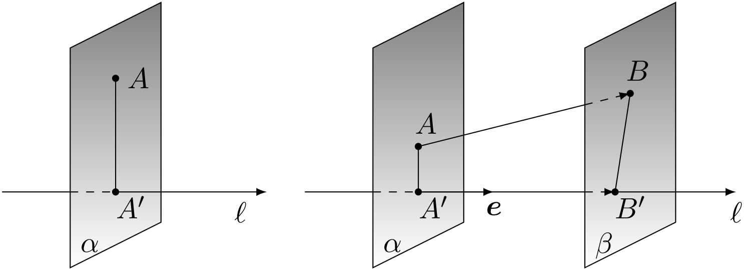
如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$\text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}.$$

这里的 x 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影, 记做射影$_\ell \overrightarrow{AB}$, 即

$$\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = x.$$

我们也把射影向量$_\ell \overrightarrow{AB}$ 与射影$_\ell \overrightarrow{AB}$ 分别写成射影向量$_{\boldsymbol{e}} \overrightarrow{AB}$ 与射影$_{\boldsymbol{e}} \overrightarrow{AB}$, 分别叫做 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的射影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$上的射影,



如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

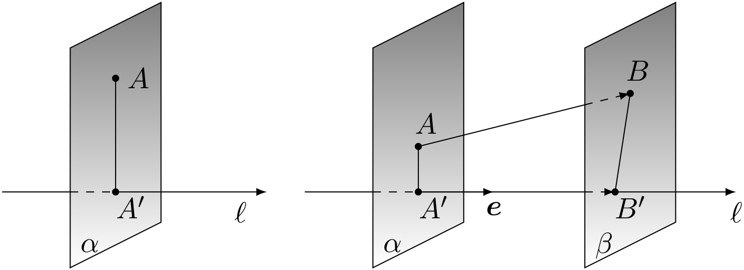
$$\text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}.$$

这里的 x 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影, 记做射影$_\ell \overrightarrow{AB}$, 即

$$\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB}=x.$$

我们也把射影向量$_\ell\overrightarrow{AB}$ 与射影$_\ell\overrightarrow{AB}$ 分别写成射影向量$_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB}$ 与射影$_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB}$, 分别叫做 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的射影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$上的射影, 两者之间的关系是

$$\boxed{\text{射影向量}_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB}=(\text{射影}_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}.}$$



如果在轴上取与轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$\text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=x\boldsymbol{e}.$$

这里的 x 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影, 记做射影$_\ell\overrightarrow{AB}$, 即

❒ 射影的计算

❒ 射影的计算

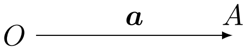
☞向量间夹角的定义

❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$,

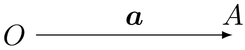
❒ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$,



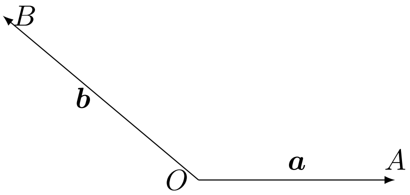
❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,



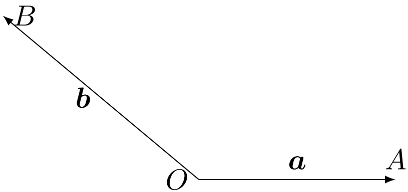
❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$,



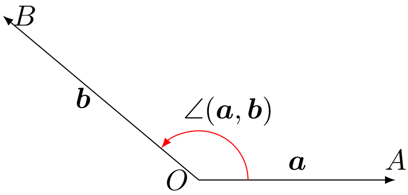
❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间, 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记做 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.



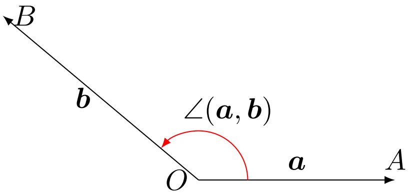
❐ 射影的计算

☞向量间夹角的定义 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间, 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



❒ 射影的计算

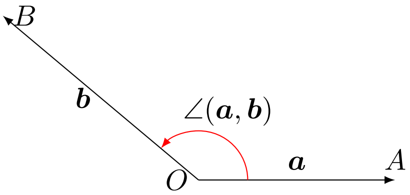
☞向量间夹角的定义 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间, 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



☞特殊情况

❒ 射影的计算

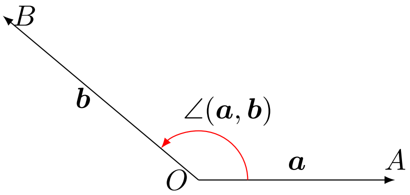
☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间，叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记做 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.



☞**特殊情况** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$;

❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间, 叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**, 记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

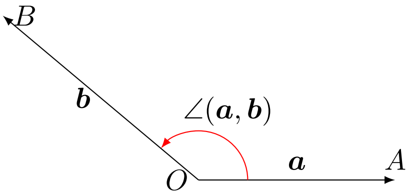


☞**特殊情况** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \pi$;

❐ 射影的计算

☞**向量间夹角的定义** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间，叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



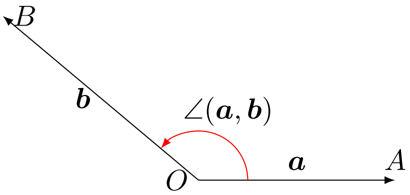
☞**特殊情况** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \pi$;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ $0 < \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \pi$.

❒ 射影的计算

向量间夹角的定义 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到 π 之间, 叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**, 记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



特殊情况 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反向 $\Leftrightarrow$ $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \pi$;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ $0 < \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \pi$.

注: 此处定义的向量间夹角是无向角.

定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_{\ell}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}_{\ell}\overrightarrow{AB}$.

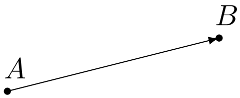
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_{\ell}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}\ {}_{\ell}\overrightarrow{AB}$.



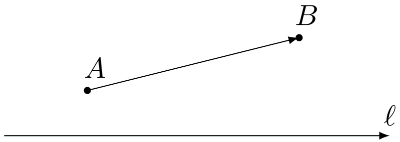
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}\ {}_\ell\overrightarrow{AB}$.



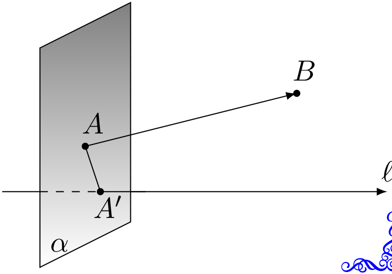
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_{\ell}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}\ {}_{\ell}\overrightarrow{AB}$.



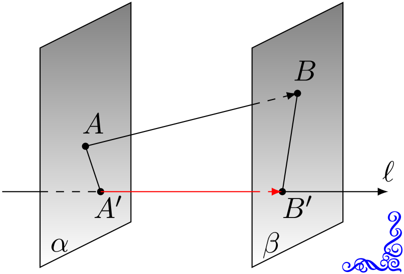
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{射影_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$.



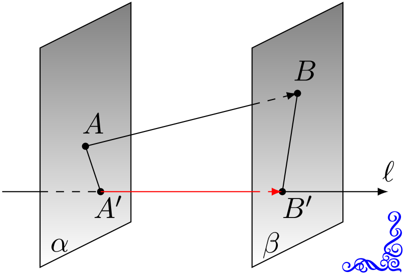
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 ${}_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上.



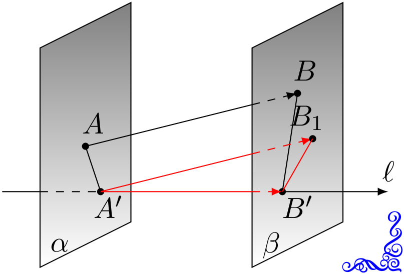
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上.



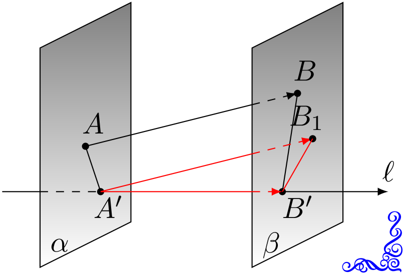
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell \overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$.



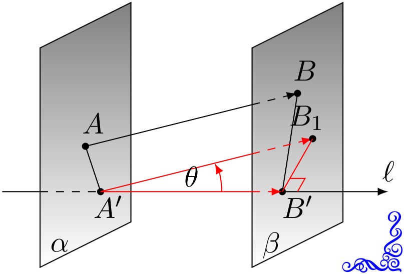
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell \overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$.



定理1.6.1

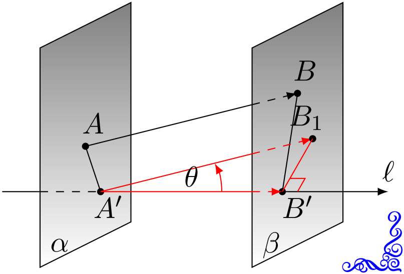
向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$.

设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量,



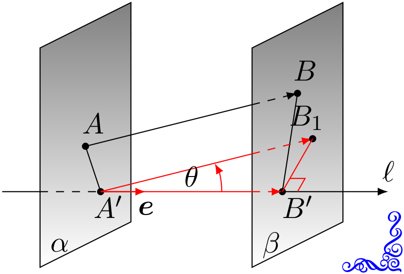
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}\ {}_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量,



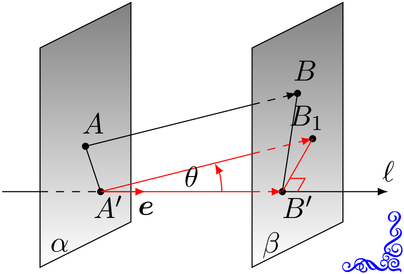
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$.



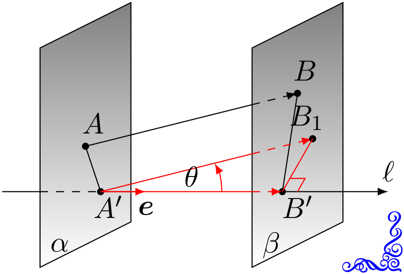
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 $\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = x$.



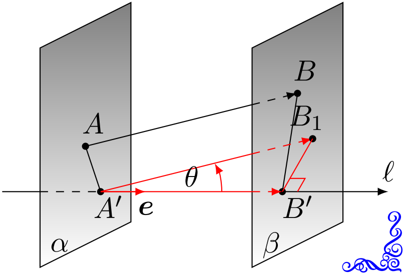
定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.



定理1.6.1

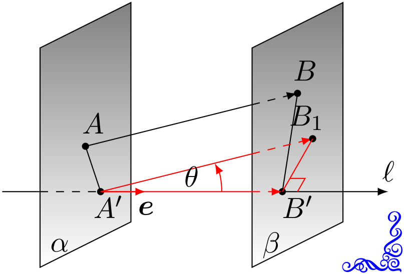
向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$



定理1.6.1

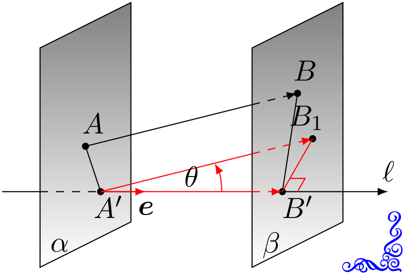
向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} = $ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向



定理1.6.1

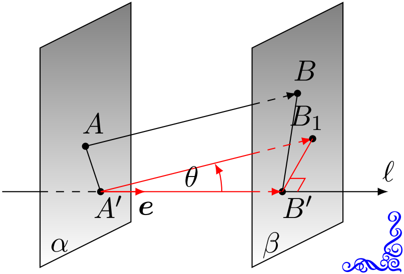
向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow$ $x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;



定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

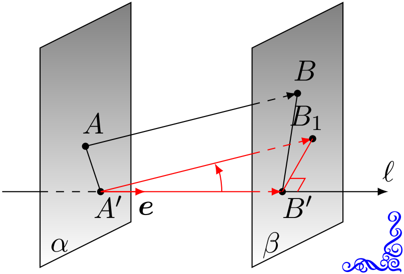
$$\boxed{射影_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow$ $x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$



定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

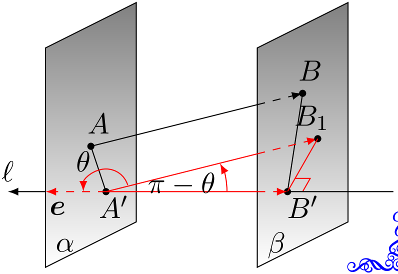
$$\boxed{\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta;$

$\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$



定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

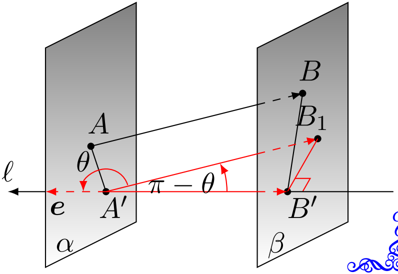
$$\boxed{射影_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow$ $x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 反向



定理1.6.1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ℓ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

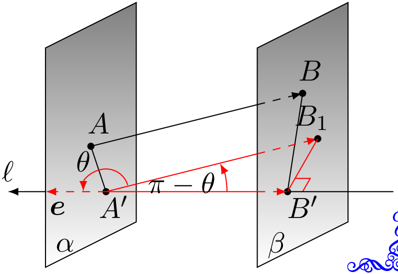
$$\boxed{射影_\ell \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}).}$$

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'} =$ 射影向量 $_\ell \overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell \overrightarrow{AB} = x$. 分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 反向 $\Rightarrow x = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|\overrightarrow{A'B_1}| \cdot \cos(\pi - \theta) = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.



由此易知相等的向量在同一轴上的射影相等; 互反向量在同一轴上的射影互为相反数; 同一向量在两方向相同的轴上的射影相等.

证 特殊情况: $\theta = \frac{\pi}{2}$. 结论显然成立.

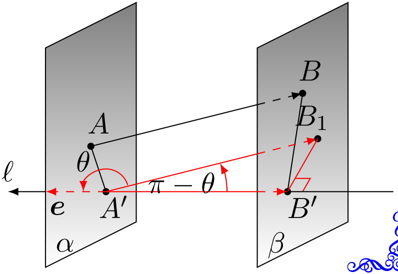
一般情况: $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. 作 $\overrightarrow{A'B'}$ = 射影向量 $_\ell\overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 终点 B_1 在 β 平面上. 因 $\beta \perp \ell$, 则 $B_1B' \perp \ell$, 且 $\angle(\ell, \overrightarrow{A'B_1}) = \angle(\ell, \overrightarrow{AB}) = \theta$.

设 $\boldsymbol{e}$ 为 ℓ 上与 ℓ 同方向的单位向量, 则 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$. 故 射影$_\ell\overrightarrow{AB} = x$.

分两种情况.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 同向 $\Rightarrow x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}, \boldsymbol{e}$ 反向 $\Rightarrow x = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|\overrightarrow{A'B_1}| \cdot \cos(\pi - \theta) = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.



射影的性质

射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

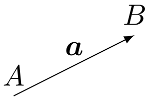
证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,

射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,

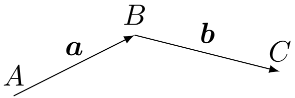


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,

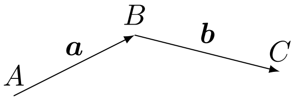


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

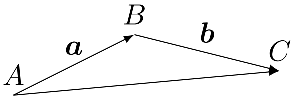


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell\boldsymbol{a} + 射影_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

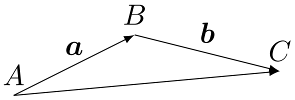


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影,

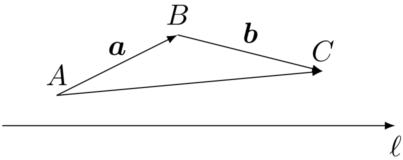


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影,

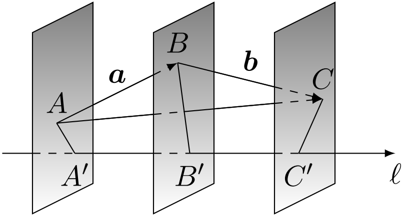


射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影,



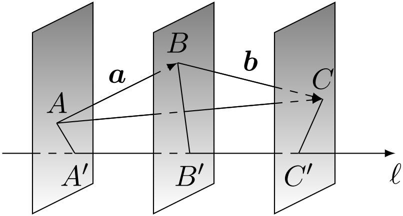
射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell\boldsymbol{a} + 射影_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$$



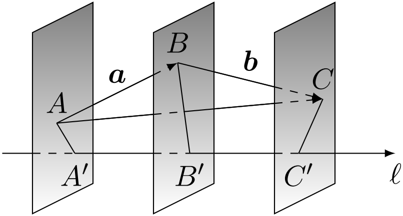
射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell\boldsymbol{a} + 射影_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$$
$$\overrightarrow{A'C'} = 射影向量_\ell\overrightarrow{AC}$$



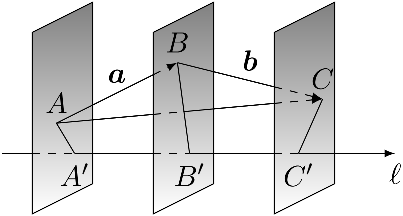
射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell\boldsymbol{a} + 射影_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$$
$$\overrightarrow{A'C'} = 射影向量_\ell\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{A'B'} = 射影向量_\ell\overrightarrow{AB}$$



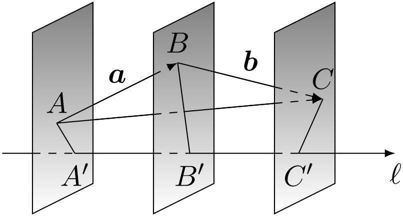
射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$$
$$\overrightarrow{A'C'} = \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{B'C'} = \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{BC}$$



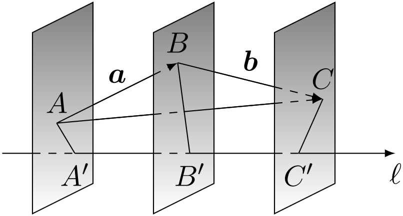
射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{A'C'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'B'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{B'C'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{BC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



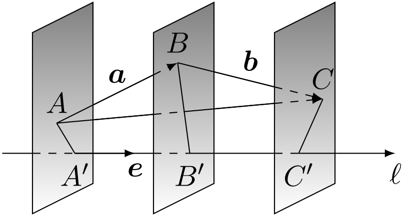
$$\text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AC} = \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} + \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{BC}$$

射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{射影}_\ell\boldsymbol{a} + \text{射影}_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则



$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{A'C'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'B'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{B'C'} &= \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{BC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AC} = \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} + \text{射影向量}_\ell\overrightarrow{BC}$$

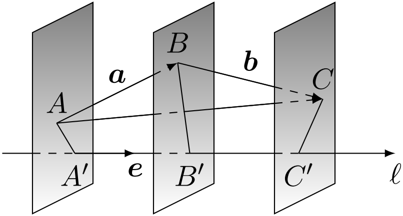
$$\text{射影向量}_\ell\overrightarrow{AB} = (\text{射影}_\ell\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}$$

射影的性质

定理1.6.2

$$\boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell\boldsymbol{a} + 射影_\ell\boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则



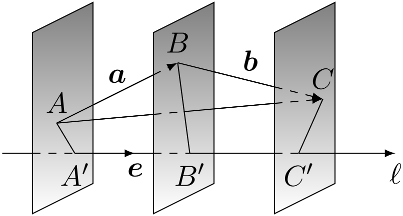
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}\\ \overrightarrow{A'C'} &= 射影向量_\ell\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{A'B'} &= 射影向量_\ell\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{B'C'} &= 射影向量_\ell\overrightarrow{BC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}射影向量_\ell\overrightarrow{AC} = 射影向量_\ell\overrightarrow{AB} + 射影向量_\ell\overrightarrow{BC}\\ 射影向量_\ell\overrightarrow{AB} = (射影_\ell\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$(射影_\ell\overrightarrow{AC})\boldsymbol{e} = (射影_\ell\overrightarrow{AB} + 射影_\ell\overrightarrow{BC})\boldsymbol{e}$$

$$\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{射影}_\ell \overrightarrow{BC}$$

证 取 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则



$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{A'C'} = \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'B'} = \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{B'C'} = \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

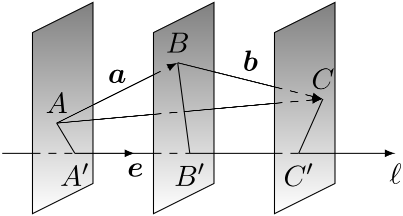
$$\left.\begin{array}{r} \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{BC} \\ \text{射影向量}_\ell \overrightarrow{AB} = (\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB})\boldsymbol{e} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\text{射影}_\ell \overrightarrow{AC})\boldsymbol{e} = (\text{射影}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{射影}_\ell \overrightarrow{BC})\boldsymbol{e}$$

$$\Rightarrow \quad 射影_\ell \overrightarrow{AC} = 射影_\ell \overrightarrow{AB} + 射影_\ell \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{射影_\ell(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 射影_\ell \boldsymbol{a} + 射影_\ell \boldsymbol{b}.}$$

证 取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 ℓ 上的射影, 则



$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{A'C'} &= 射影向量_\ell \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'B'} &= 射影向量_\ell \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{B'C'} &= 射影向量_\ell \overrightarrow{BC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 射影向量_\ell \overrightarrow{AC} &= 射影向量_\ell \overrightarrow{AB} + 射影向量_\ell \overrightarrow{BC} \\ 射影向量_\ell \overrightarrow{AB} &= (射影_\ell \overrightarrow{AB})\boldsymbol{e} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$(射影_\ell \overrightarrow{AC})\boldsymbol{e} = (射影_\ell \overrightarrow{AB} + 射影_\ell \overrightarrow{BC})\boldsymbol{e}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{射影}_\ell \boldsymbol{a}.}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot射影_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

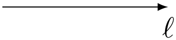
证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{a}\neq 0$, 且 $\theta=\angle(\ell,\boldsymbol{a})$.

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{射影}_\ell \boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$.

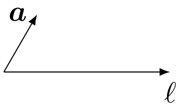


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$.

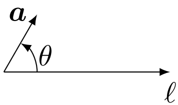


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$.

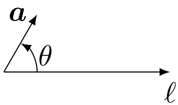


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{a}\neq 0$, 且 $\theta=\angle(\ell,\boldsymbol{a})$. 分两种情况.

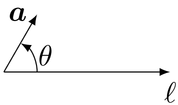


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_{\ell}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 射影_{\ell}\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知

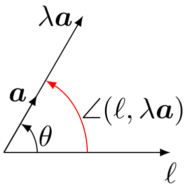


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知

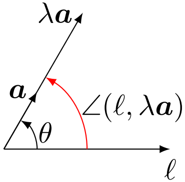


定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, 定理显然成立. 设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知



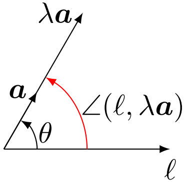
$$\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 定理显然成立. 设 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{a}\neq 0$, 且 $\theta=\angle(\ell,\boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda>0$. 由定理 1.6.1 知

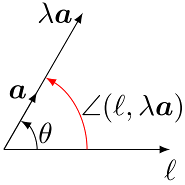


$$\begin{aligned} \lambda>0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell,\lambda\boldsymbol{a})=\angle(\ell,\boldsymbol{a})=\theta \\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta \end{aligned}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$



证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立. 设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知

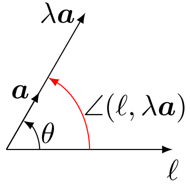
$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad & \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta \\ \Rightarrow \quad & \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta \\ & = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立. 设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知



$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta \\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta \\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda \cdot \text{射影}_\ell\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

(ii) $\lambda < 0$. 仍由定理 1.6.1 知

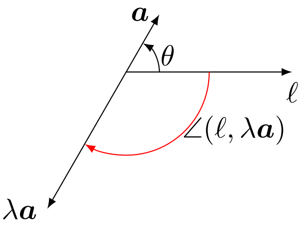
定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知

$$\begin{aligned}\lambda > 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta\\ &\Rightarrow \quad 射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta\\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda\cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$



(ii) $\lambda < 0$. 仍由定理 1.6.1 知

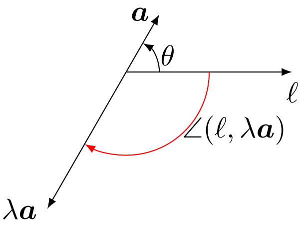
定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{a}\neq 0$, 且 $\theta=\angle(\ell,\boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda>0$. 由定理 1.6.1 知

$$\begin{aligned}\lambda>0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell,\lambda\boldsymbol{a})=\angle(\ell,\boldsymbol{a})=\theta\\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta\\ &\qquad =\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$



(ii) $\lambda<0$. 仍由定理 1.6.1 知

$$\lambda<0 \quad \Rightarrow \quad \angle(\ell,\lambda\boldsymbol{a})=\pi-\angle(\ell,\boldsymbol{a})=\pi-\theta$$

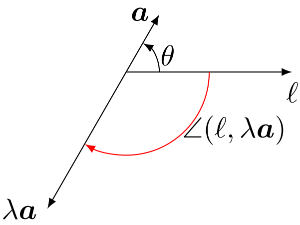
定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_{\ell}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{射影}_{\ell}\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta \\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_{\ell}(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}| \cos\theta \\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}| \cos\theta = \lambda \cdot \text{射影}_{\ell}\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$



(ii) $\lambda < 0$. 仍由定理 1.6.1 知

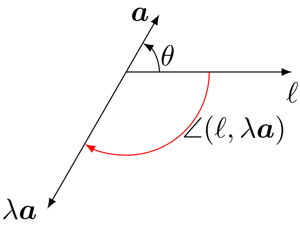
$$\begin{aligned} \lambda < 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \pi - \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \pi - \theta \\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_{\ell}(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}| \cos(\pi - \theta) \end{aligned}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 射影_\ell \boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知



$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta \\ &\Rightarrow \quad 射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta \\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda \cdot 射影_\ell \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

(ii) $\lambda < 0$. 仍由定理 1.6.1 知

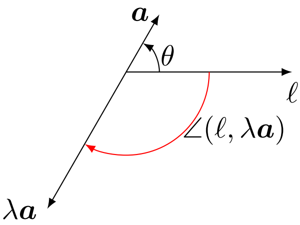
$$\begin{aligned} \lambda < 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \pi - \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \pi - \theta \\ &\Rightarrow \quad 射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\pi - \theta) = (-\lambda)|\boldsymbol{a}|(-\cos\theta) \end{aligned}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{\text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 定理显然成立. 设 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{a}\neq 0$, 且 $\theta=\angle(\ell,\boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda>0$. 由定理 1.6.1 知



$$\begin{aligned}\lambda>0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell,\lambda\boldsymbol{a})=\angle(\ell,\boldsymbol{a})=\theta\\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta\\ &\qquad =\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\lambda\cdot\text{射影}_\ell\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

(ii) $\lambda<0$. 仍由定理 1.6.1 知

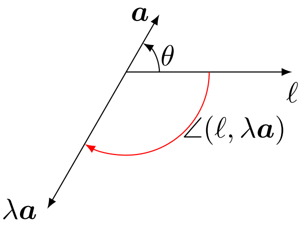
$$\begin{aligned}\lambda<0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell,\lambda\boldsymbol{a})=\pi-\angle(\ell,\boldsymbol{a})=\pi-\theta\\ &\Rightarrow \quad \text{射影}_\ell(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\theta)=(-\lambda)|\boldsymbol{a}|(-\cos\theta)\\ &\qquad =\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta\end{aligned}$$

定理1.6.3

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 λ 有

$$\boxed{射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}.}$$

证 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 定理显然成立.
设 $\lambda \neq 0, \boldsymbol{a} \neq 0$, 且 $\theta = \angle(\ell, \boldsymbol{a})$. 分两种情况. (i) $\lambda > 0$. 由定理 1.6.1 知



$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \theta \\ &\Rightarrow \quad 射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta \\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda \cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

(ii) $\lambda < 0$. 仍由定理 1.6.1 知

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \quad &\Rightarrow \quad \angle(\ell, \lambda\boldsymbol{a}) = \pi - \angle(\ell, \boldsymbol{a}) = \pi - \theta \\ &\Rightarrow \quad 射影_\ell(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\pi - \theta) = (-\lambda)|\boldsymbol{a}|(-\cos\theta) \\ &\qquad = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda \cdot 射影_\ell\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

例

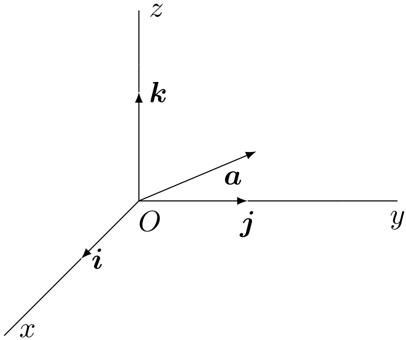
设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下, 向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, 证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

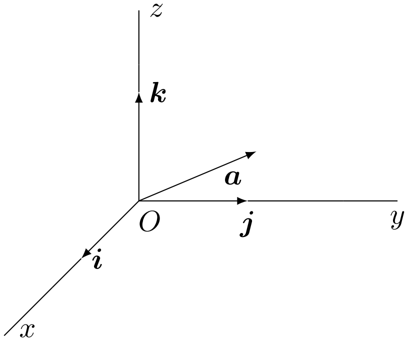


例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,

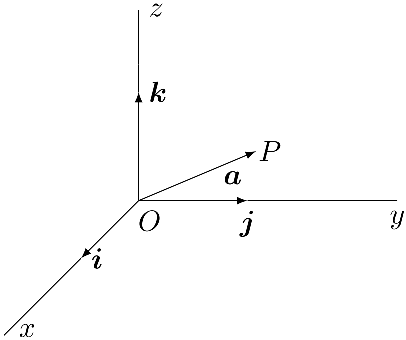


例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,

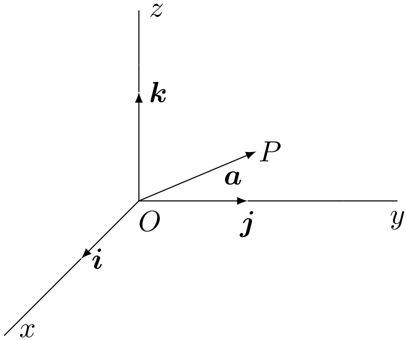


例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影.

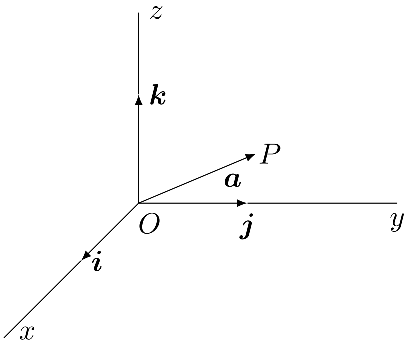


例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么

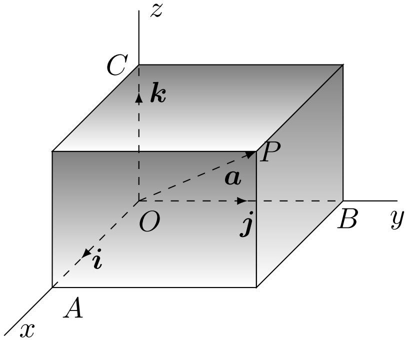


例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ \text{射影}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ \text{射影}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么



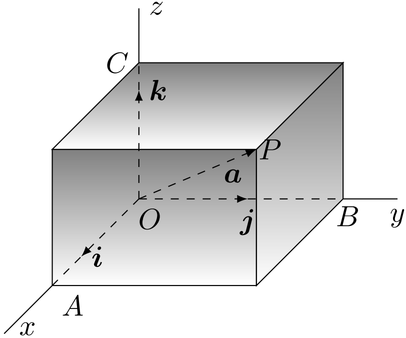
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下, 向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, 证明

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ \text{射影}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ \text{射影}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$, 那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴, y 轴, z 轴上的射影分别为 A,B,C, 那么

$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$



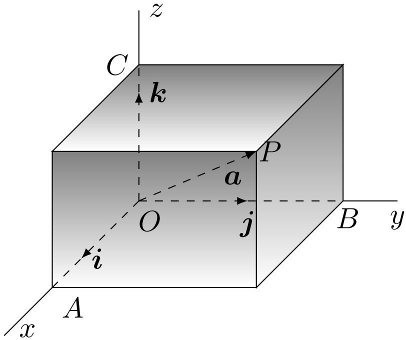
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么

$$射影向量_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$



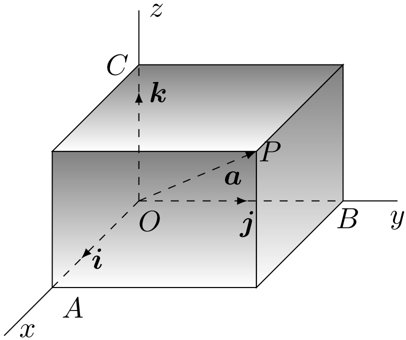
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下, 向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, 证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$, 那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴, y 轴, z 轴上的射影分别为 A,B,C, 那么

$$射影向量_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}=Z\boldsymbol{k},$$



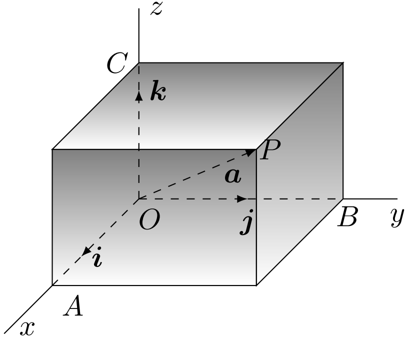
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么

$$射影向量_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}=Z\boldsymbol{k},$$



由向量在轴上的射影定义，得

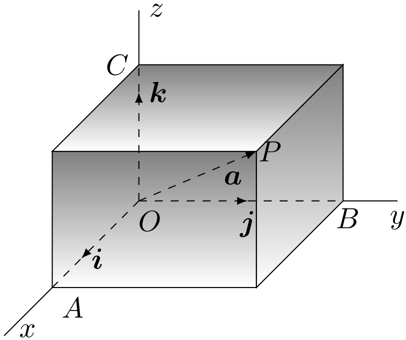
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ \text{射影}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ \text{射影}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么

$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$
$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}=Z\boldsymbol{k},$$



由向量在轴上的射影定义，得

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,$$

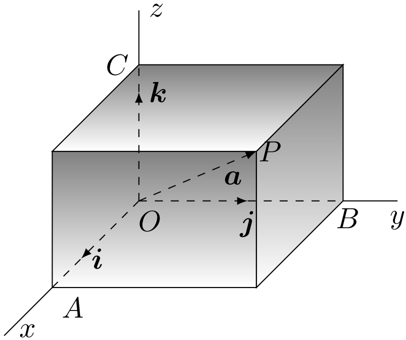
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，证明

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ \text{射影}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ \text{射影}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的射影分别为 A,B,C，那么

$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$
$$\text{射影向量}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}=Z\boldsymbol{k},$$



由向量在轴上的射影定义，得

$$\text{射影}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,$$
$$\text{射影}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,$$

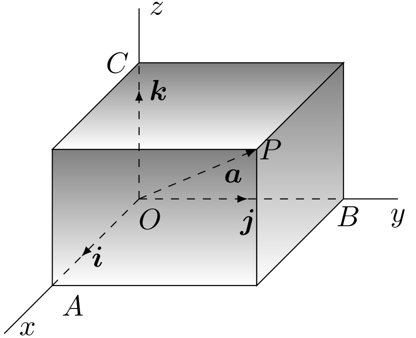
例

设在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下, 向量$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, 证明

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,\ 射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,\ 射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

证 设向径 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$, 那么 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影. 设 P 点在 x 轴, y 轴, z 轴上的射影分别为 A,B,C, 那么

$$射影向量_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=X\boldsymbol{i},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}=Y\boldsymbol{j},$$
$$射影向量_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}=Z\boldsymbol{k},$$



由向量在轴上的射影定义, 得

$$射影_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=X,$$
$$射影_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=Y,$$
$$射影_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=Z.$$

下一节