第三章 平面与空间直线

内容提要与典型例题

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

本章内容提要

本章内容提要

平面的方程

本章内容提要

平面的方程

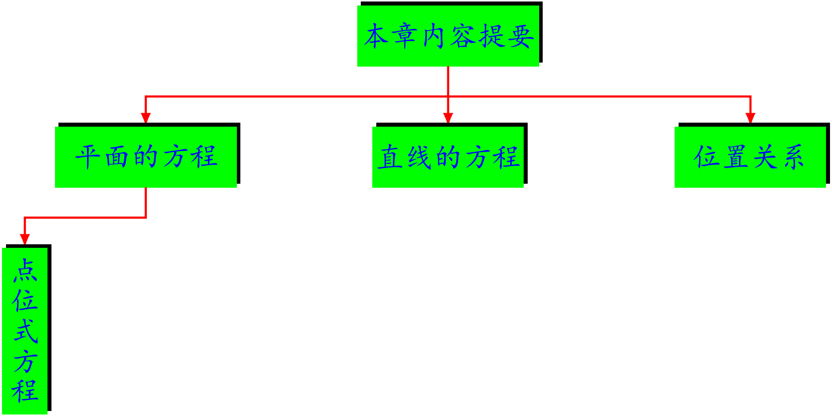
直线的方程

本章内容提要

平面的方程

直线的方程

位置关系


本章内容提要
平面的方程
直线的方程
位置关系
点位式方程

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
- 直线的方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
- 直线的方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
- 直线的方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
- 位置关系

一般方程一次项系数的几何意义

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
- 位置关系

平面方程的法式化

本章内容提要

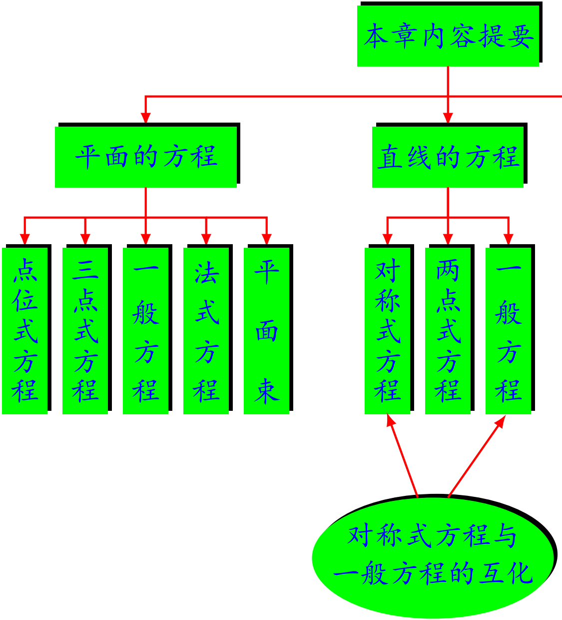
- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
- 位置关系

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系


本章内容提要
平面的方程
直线的方程
位置关系
点位式方程
三点式方程
一般方程
法式方程
平面束
对称式方程
两点式方程
一般方程
对称式方程与一般方程的互化

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
  - 直线与直线

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
  - 直线与直线

点到平面的离差与距离

本章内容提要

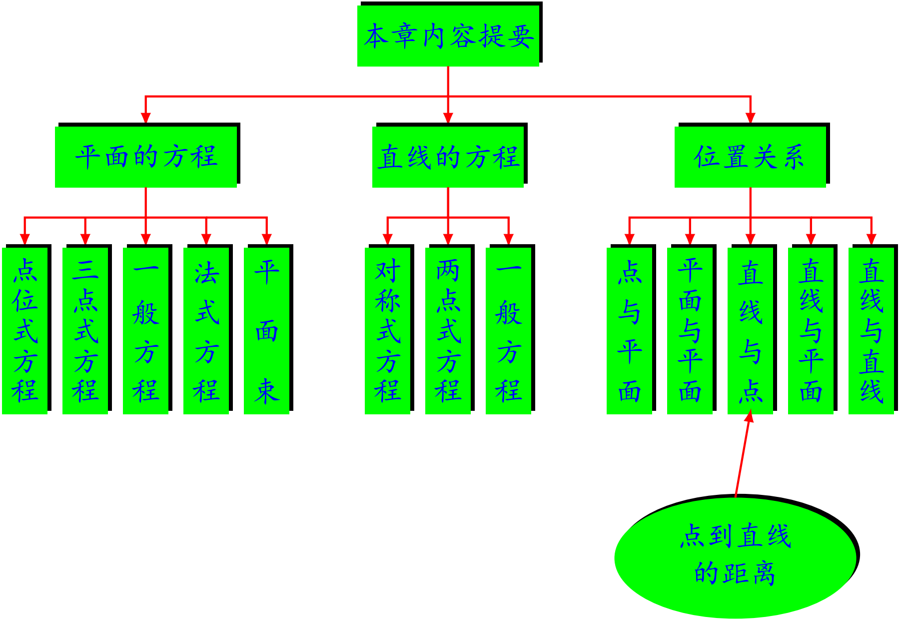
- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
  - 直线与直线

平面划分空间

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
  - 直线与直线

两平面间的夹角


本章内容提要
平面的方程
直线的方程
位置关系
点位式方程
三点式方程
一般方程
法式方程
平面束
对称式方程
两点式方程
一般方程
点与平面
平面与平面
直线与点
直线与平面
直线与直线
点到直线的距离

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
    - 直线与平面的夹角
  - 直线与直线

本章内容提要

- 平面的方程
  - 点位式方程
  - 三点式方程
  - 一般方程
  - 法式方程
  - 平面束
- 直线的方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 一般方程
- 位置关系
  - 点与平面
  - 平面与平面
  - 直线与点
  - 直线与平面
  - 直线与直线
    - 异面直线间的公垂线与距离

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}$$

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

故可设所求平面方程为

$$2x+y-2z+D=0.$$

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

故可设所求平面方程为

$$2x+y-2z+D=0.$$

将点 $M(3,-1,5)$ 的坐标代入得

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

故可设所求平面方程为

$$2x+y-2z+D=0.$$

将点 $M(3,-1,5)$ 的坐标代入得

$$2\cdot 3+(-1)-2\cdot 5+D=0$$

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

故可设所求平面方程为

$$2x+y-2z+D=0.$$

将点 $M(3,-1,5)$ 的坐标代入得

$$2\cdot 3+(-1)-2\cdot 5+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=5.$$

例 1

求过点 $M(3,-1,5)$ 且垂直于平面 $3x-2y+2z+7=0$ 和 $5x-4y+3z+1=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-2,2\}\times\{5,-4,3\}=\{2,1,-2\},$$

故可设所求平面方程为

$$2x+y-2z+D=0.$$

将点 $M(3,-1,5)$ 的坐标代入得

$$2\cdot 3+(-1)-2\cdot 5+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=5.$$

于是所求平面方程为

$$2x+y-2z+5=0.$$

例 2

试求由平面 $\pi_1 : 2x - 2y + z + 4 = 0$ 与 $\pi_2 : 2x + 3y - 6z - 9 = 0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1, -1, 2)$.

例 2

试求由平面 $\pi_1: 2x-2y+z+4=0$ 与 $\pi_2: 2x+3y-6z-9=0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1,-1,2)$.

解 将点 M 的坐标代入平面 π_1, π_2 方程的左边易知 M 到两给定平面的离差符号相反,

例 2

试求由平面 $\pi_1: 2x-2y+z+4=0$ 与 $\pi_2: 2x+3y-6z-9=0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1,-1,2)$.

解 将点 M 的坐标代入平面 π_1, π_2 方程的左边易知 M 到两给定平面的离差符号相反, 因此所求平分面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 到两平面的离差互为相反数,

例 2

试求由平面 $\pi_1: 2x-2y+z+4=0$ 与 $\pi_2: 2x+3y-6z-9=0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1,-1,2)$.

解 将点 M 的坐标代入平面 π_1, π_2 方程的左边易知 M 到两给定平面的离差符号相反, 因此所求平分面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 到两平面的离差互为相反数, 即

$$\frac{-2x_0+2y_0-z_0-4}{3}=-\frac{2x_0+3y_0-6z_0-9}{7}$$

例 2

试求由平面 $\pi_1: 2x-2y+z+4=0$ 与 $\pi_2: 2x+3y-6z-9=0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1,-1,2)$.

解 将点 M 的坐标代入平面 π_1, π_2 方程的左边易知 M 到两给定平面的离差符号相反, 因此所求平分面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 到两平面的离差互为相反数, 即

$$\frac{-2x_0+2y_0-z_0-4}{3} = -\frac{2x_0+3y_0-6z_0-9}{7}$$

$$\Rightarrow \quad 8x_0-23y_0+25z_0+55=0.$$

例 2

试求由平面 $\pi_1: 2x-2y+z+4=0$ 与 $\pi_2: 2x+3y-6z-9=0$ 所组成两面角的角平分面的方程, 在此两面角内有点 $M(1,-1,2)$.

解 将点 M 的坐标代入平面 π_1, π_2 方程的左边易知 M 到两给定平面的离差符号相反, 因此所求平分面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 到两平面的离差互为相反数, 即

$$\frac{-2x_0+2y_0-z_0-4}{3} = -\frac{2x_0+3y_0-6z_0-9}{7}$$

$$\Rightarrow \quad 8x_0-23y_0+25z_0+55=0.$$

故所求平分面是

$$8x-23y+25z+55=0.$$

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x - 3y - 2z - 6 = 0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$,

例 3

在空间直角坐标系下, 平面 $\pi : 6x - 3y - 2z - 6 = 0$ 与三坐标平面组成四面体, 求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$, 故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$, 其中 $R > 0$ 是半径.

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$，故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$，其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

例 3

在空间直角坐标系下, 平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体, 求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$, 故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$, 其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

例 3

在空间直角坐标系下, 平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体, 求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$, 故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$, 其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R$$

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$，故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$，其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R \quad\Rightarrow\quad R=\frac{3}{2}\text{或}\frac{1}{3}.$$

例 3

在空间直角坐标系下, 平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体, 求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$, 故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$, 其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R \quad \Rightarrow \quad R=\frac{3}{2}\text{或}\frac{1}{3}.$$

将点 $P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 代入平面 π 的法式方程, 得离差 $\delta(P_1)>0$,

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$，故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$，其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R \quad \Rightarrow \quad R=\frac{3}{2}\text{或}\frac{1}{3}.$$

将点 $P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 代入平面 π 的法式方程，得离差 $\delta(P_1)>0$，而原点 O 的离差 $\delta(O)<0$，故 P_1 与 O 在平面 π 的异侧，不符合题意.

例 3

在空间直角坐标系下, 平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体, 求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$, 故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$, 其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R \quad \Rightarrow \quad R=\frac{3}{2}\text{或}\frac{1}{3}.$$

将点 $P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 代入平面 π 的法式方程, 得离差 $\delta(P_1)>0$, 而原点 O 的离差 $\delta(O)<0$, 故 P_1 与 O 在平面 π 的异侧, 不符合题意. 故所求内切球球心为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,

例 3

在空间直角坐标系下，平面 $\pi: 6x-3y-2z-6=0$ 与三坐标平面组成四面体，求此四面体内切球的球心坐标与半径.

解 给定平面 π 与三坐标轴 Ox, Oy, Oz 的截距依次是 $1, -2, -3$，故内切球球心坐标可设为 $(R, -R, -R)$，其中 $R>0$ 是半径. 平面 π 的法式方程是

$$\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0.$$

球心 $(R, -R, -R)$ 到平面 π 的距离满足

$$d=\left|\frac{6}{7}R+\frac{3}{7}R+\frac{2}{7}R-\frac{6}{7}\right|=R \quad \Rightarrow \quad R=\frac{3}{2}\text{或}\frac{1}{3}.$$

将点 $P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 代入平面 π 的法式方程，得离差 $\delta(P_1)>0$，而原点 O 的离差 $\delta(O)<0$，故 P_1 与 O 在平面 π 的异侧，不符合题意. 故所求内切球球心为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$，半径是 $R=\frac{1}{3}$.

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上，求反射光线的方程.

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上, 求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + 2t, \end{cases}$$

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上，求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1-t, \\ y = 2+t, \\ z = -1+2t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0$$

例 4

光线沿直线 $l:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上, 求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=2+t, \\ z=-1+2t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{3}{2},$$

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上, 求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1-t, \\ y = 2+t, \\ z = -1+2t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}, -4\right)$.

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上, 求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=2+t, \\ z=-1+2t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2},-4\right)$. 下求 l 上点 $M(1,2,-1)$ 关于 π 的对称点 P.

例 4

光线沿直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ 投射到平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上, 求反射光线的方程.

解 直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + 2t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1,2,-1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x + y + z + 1 = 0$ 得

$$(1 - t) + (2 + t) + (-1 + 2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1 + t) + (2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0$$

代入平面方程 $x + y + z + 1 = 0$ 得

$$(1 - t) + (2 + t) + (-1 + 2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1 + t) + (2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

代入平面方程 $x + y + z + 1 = 0$ 得

$$(1 - t) + (2 + t) + (-1 + 2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1+t)+(2+t)+(-1+t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1.$$

由参数 t 的几何意义知 P 对应于 $t=-2$,

代入平面方程 $x+y+z+1=0$ 得

$$(1-t)+(2+t)+(-1+2t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1,2,-1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1 + t) + (2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

由参数 t 的几何意义知 P 对应于 $t = -2$, 即 P 的坐标是 $(-1, 0, -3)$.

代入平面方程 $x + y + z + 1 = 0$ 得

$$(1 - t) + (2 + t) + (-1 + 2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1 + t) + (2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

由参数 t 的几何意义知 P 对应于 $t = -2$, 即 P 的坐标是 $(-1, 0, -3)$.
所求直线即为 P_0 与 P 连线,

代入平面方程 $x + y + z + 1 = 0$ 得

$$(1 - t) + (2 + t) + (-1 + 2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2},$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1 + t) + (2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

由参数 t 的几何意义知 P 对应于 $t = -2$, 即 P 的坐标是 $(-1, 0, -3)$. 所求直线即为 P_0 与 P 连线, 故所求方程是

$$\frac{x + 1}{\frac{5}{2} + 1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z + 3}{-4 + 3}$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

代入平面方程得

$$(1+t) + (2+t) + (-1+t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

由参数 t 的几何意义知 P 对应于 $t = -2$, 即 P 的坐标是 $(-1, 0, -3)$. 所求直线即为 P_0 与 P 连线, 故所求方程是

$$\frac{x+1}{\frac{5}{2}+1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z+3}{-4+3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2}.$$

求得直线 l 与平面 π 的交点 $P_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$. 下求 l 上点 $M(1, 2, -1)$ 关于 π 的对称点 P. 过 M 且垂直于 π 的直线的参数方程是

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M.

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}$$

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0$$

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-3y-5z+9=0.$$

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x-3y-5z+9=0.$$

P 在直线 l 上的射影 M 即为上述平面与 l 的交点,

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x-3y-5z+9=0.$$

P 在直线 l 上的射影 M 即为上述平面与 l 的交点, 易求得 $M(2,2,1)$.

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-3y-5z+9=0.$$

P 在直线 l 上的射影 M 即为上述平面与 l 的交点, 易求得 $M(2,2,1)$.
设 Q 的坐标为 (x,y,z), 由于 M 是 PQ 的中点,

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x-3y-5z+9=0.$$

P 在直线 l 上的射影 M 即为上述平面与 l 的交点, 易求得 $M(2,2,1)$.
设 Q 的坐标为 (x,y,z), 由于 M 是 PQ 的中点, 故

$$\frac{x-1}{2}=2$$
$$\frac{y+1}{2}=2$$
$$\frac{z+1}{2}=1$$

例 5

求点 $P(-1,1,1)$ 关于直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的对称点 Q 的坐标.

解 先求点 P 在直线 l 上的射影 M. 直线 l 的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\},$$

因此过 P 且与 l 垂直的平面方程是

$$-(x+1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-3y-5z+9=0.$$

P 在直线 l 上的射影 M 即为上述平面与 l 的交点, 易求得 $M(2,2,1)$.
设 Q 的坐标为 (x,y,z), 由于 M 是 PQ 的中点, 故

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2}=2 \\ \dfrac{y+1}{2}=2 \\ \dfrac{z+1}{2}=1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q(5,3,1).$$

例 6

证明直线 $l_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

例 6

证明直线 $l_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

例 6

证明直线 $l_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0,$

例 6

证明直线 $l_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线.

例 6

证明直线 $l_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta=\begin{vmatrix}3&-3&1\\2&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=5\neq 0$,所以 l_1,l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,1,1\}\times\{1,0,1\}$$

例 6

证明直线 $l_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ 是异面直线，并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v} = \{2,1,1\} \times \{1,0,1\} = \{1,-1,-1\},$$

例 6

证明直线 $l_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ 是异面直线, 并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v} = \{2,1,1\} \times \{1,0,1\} = \{1,-1,-1\},$$

因此公垂线的方程是

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

例 6

证明直线 $l_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 与 $l_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 是异面直线，并求它们的距离及公垂线的方程.

解 由于 $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v}=\{2,1,1\}\times\{1,0,1\}=\{1,-1,-1\},$$

因此公垂线的方程是

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y-z+2=0, \\ x+2y-z-3=0. \end{array}\right.$$

两直线间的距离是

$$d = \frac{|\Delta|}{|\boldsymbol{v}|}$$

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v} = \{2,1,1\} \times \{1,0,1\} = \{1,-1,-1\},$$

因此公垂线的方程是

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - z + 2 = 0, \\ x + 2y - z - 3 = 0. \end{array}\right.$$

两直线间的距离是

$$d = \frac{|\Delta|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{5}{|\{1,-1,-1\}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

解 由于 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,所以 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的方向向量是

$$\boldsymbol{v} = \{2,1,1\} \times \{1,0,1\} = \{1,-1,-1\},$$

因此公垂线的方程是

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y - z + 2 = 0, \\ x + 2y - z - 3 = 0. \end{array} \right.$$

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1:\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\3x-y+2z+5=0,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}4x-2y+z-8=0,\\5x+2y-z-9=0\end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1:\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\3x-y+2z+5=0,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}4x-2y+z-8=0,\\5x+2y-z-9=0\end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

解 本题可利用平面束方程求解.

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1: \begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ 3x-y+2z+5=0, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} 4x-2y+z-8=0, \\ 5x+2y-z-9=0 \end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

解 本题可利用平面束方程求解. 过直线 l_1 的平面束的方程是

$$\pi_{l_1}: 2x+y-z-3+\lambda(3x-y+2z+5)=0,$$

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1:\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\3x-y+2z+5=0,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}4x-2y+z-8=0,\\5x+2y-z-9=0\end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

解 本题可利用平面束方程求解. 过直线 l_1 的平面束的方程是

$$\pi_{l_1}:2x+y-z-3+\lambda(3x-y+2z+5)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中, 解得 $\lambda=-4$,

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1: \begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ 3x-y+2z+5=0, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} 4x-2y+z-8=0, \\ 5x+2y-z-9=0 \end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

解 本题可利用平面束方程求解. 过直线 l_1 的平面束的方程是

$$\pi_{l_1}: 2x+y-z-3+\lambda(3x-y+2z+5)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中, 解得 $\lambda=-4$, 因此过 M_0 与 l_1 的平面方程是

$$10x-5y+9z+23=0.$$

例 7

已知直线 l 通过点 $M_0(1,3,-2)$, 且分别与两条直线

$$l_1:\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\3x-y+2z+5=0,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}4x-2y+z-8=0,\\5x+2y-z-9=0\end{cases}$$

共面, 求直线 l 的方程.

解 本题可利用平面束方程求解. 过直线 l_1 的平面束的方程是

$$\pi_{l_1}:2x+y-z-3+\lambda(3x-y+2z+5)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中, 解得 $\lambda=-4$, 因此过 M_0 与 l_1 的平面方程是

$$10x-5y+9z+23=0.$$

另一方面, 过直线 l_2 的平面束的方程是

$$\pi_{l_2}:4x-2y+z-8+\mu(5x+2y-z-9)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_2} 之中, 解得 $\mu=3$,

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中, 解得 $\lambda=-4$, 因此过 M_0 与 l_1 的平面方程是

$$10x-5y+9z+23=0.$$

另一方面, 过直线 l_2 的平面束的方程是

$$\pi_{l_2}: 4x-2y+z-8+\mu(5x+2y-z-9)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_2} 之中，解得 $\mu=3$，因此过 M_0 与 l_2 的平面方程是

$$19x+4y-2z-35=0.$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中，解得 $\lambda=-4$，因此过 M_0 与 l_1 的平面方程是

$$10x-5y+9z+23=0.$$

另一方面，过直线 l_2 的平面束的方程是

$$\pi_{l_2}: 4x-2y+z-8+\mu(5x+2y-z-9)=0,$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_2} 之中，解得 $\mu=3$，因此过 M_0 与 l_2 的平面方程是

$$19x+4y-2z-35=0.$$

所以直线 l 的方程是

$$\begin{cases} 10x-5y+9z+23=0, \\ 19x+4y-2z-35=0. \end{cases}$$

将点 $M_0(1,3,-2)$ 代入平面束 π_{l_1} 之中，解得 $\lambda=-4$，因此过 M_0 与 l_1 的平面方程是

$$10x-5y+9z+23=0.$$

另一方面，过直线 l_2 的平面束的方程是

$$\pi_{l_2}: 4x-2y+z-8+\mu(5x+2y-z-9)=0,$$