第一章 向量与坐标

§1.8 两向量的向量积

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§1.8 两向量的向量积

§1.8 两向量的向量积

教学内容: 了解向量积的定义、几何意义及其运算

§1.8 两向量的向量积

教学内容: 了解向量积的定义、几何意义及其运算

教学目的: 掌握向量积的运规律算规律及应用

§1.8 两向量的向量积

教学内容: 了解向量积的定义、几何意义及其运算

教学目的: 掌握向量积的运规律算规律及应用

教学重难点: 向量积运算规律定理的证明

❒ 向量积的概念

❒ 向量积的概念

☞向量积的定义

❒ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{ab}]$，

❒ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量, 记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$, 它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

❐ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量, 记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$, 它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

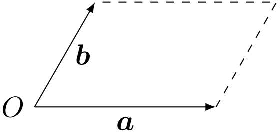
它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直, 并且按照 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.

❒ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$，它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且按照 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.

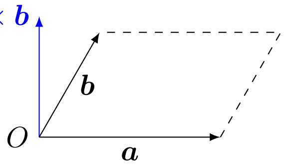


❐ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$，它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且按照 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.

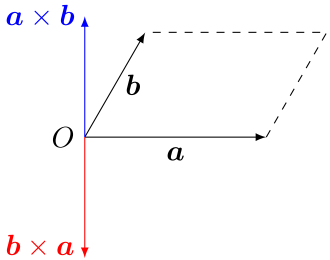


❐ 向量积的概念

☞**向量积的定义** 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(vector product)(也称外积(exterior product)、叉积(cross product))是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$，它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且按照 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.



物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性.

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \Rightarrow \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \Rightarrow \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \Rightarrow \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性.

物理学上，通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦，故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模，等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \Rightarrow \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$

物理学上, 通电导线在磁场中的受力(安培力) $\boldsymbol{F}$ 与导线的电流强度 $\boldsymbol{I}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.

由于平行四边形的面积等于它的两邻边长乘以夹角的正弦, 故得

定理 1.8.1

两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模, 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.8.2

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \Rightarrow \sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \Rightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

❐ 运算规律

❒ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的, 即 $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.}$

❐ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的，即 $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线，那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，即定理成立.

❒ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的, 即 $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 即定理成立.
若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 那么

❐ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的，即 $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线，那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，即定理成立。若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，那么

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

❒ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的，即 $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线，那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，即定理成立.
若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，那么

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}| \sin \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}|,$$

❐ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的，即 $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即定理成立. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，那么

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等.

❒ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的, 即 $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 即定理成立. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等.

再根据向量积的定义, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 所以它们共线;

❐ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的, 即 $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 即定理成立.
若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等.

再根据向量积的定义, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 所以它们共线; 其次由于按顺序 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 分别构成右手标架
$\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 和 $\{O;\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$,

❐ 运算规律

定理 1.8.3 (反交换律)

向量积是反交换的, 即 $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.}$

证 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 那么由定理 1.8.2 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 即定理成立. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等.

再根据向量积的定义, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 所以它们共线; 其次由于按顺序 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 分别构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 和 $\{O;\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$, 所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 方向相反, 从而得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.

若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.

若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$\begin{aligned}|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|&=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|&=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$\begin{aligned}
|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})| &= |\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\
|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}| &= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\
|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})| &= |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}),
\end{aligned}$$

所以向量$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$的模相等.

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$\begin{aligned}|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|&=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|&=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

所以向量$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$的模相等. 其次, 当 $\lambda>0$ 时, 这三个向量都和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 方向相同;

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda \neq 0$, 且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$\begin{aligned}
|\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})| &= |\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \\
|(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}| &= |\lambda \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \angle(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \\
|\boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})| &= |\boldsymbol{a}||\lambda \boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}),
\end{aligned}$$

所以向量$\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$的模相等. 其次, 当 $\lambda > 0$ 时, 这三个向量都和 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时都和 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 方向相反.

定理 1.8.4 (数因子的结合律)

向量积满足关于数因子的结合律, 即

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量, λ 为任意实数.

证 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 等式显然成立.
若 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么因为

$$\begin{aligned}|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|&=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|&=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

所以向量$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$的模相等. 其次, 当 $\lambda>0$ 时, 这三个向量都和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 方向相同; 当 $\lambda<0$ 时都和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 方向相反. 因此这三个向量方向也相同, 从而它们相等.

推论

设λ, μ为任意实数, 那么

$$\boxed{(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).}$$

推论

设λ, μ为任意实数，那么

$$\boxed{(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).}$$

定理 1.8.5 (分配律)

向量积满足分配律，即 $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.}$

推论

设λ, μ为任意实数, 那么

$$\boxed{(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).}$$

定理 1.8.5 (分配律)

向量积满足分配律, 即 $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.}$

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 中有一个是零向量, 或它们为一组共线向量, 定理显然成立.

推论

设λ, μ为任意实数, 那么

$$\boxed{(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).}$$

定理 1.8.5 (分配律)

向量积满足分配律, 即 $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.}$

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 中有一个是零向量, 或它们为一组共线向量, 定理显然成立.

现假设不是上述情形.

推论

设λ, μ为任意实数, 那么

$$\boxed{(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).}$$

定理 1.8.5 (分配律)

向量积满足分配律, 即 $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.}$

证 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 中有一个是零向量, 或它们为一组共线向量, 定理显然成立.

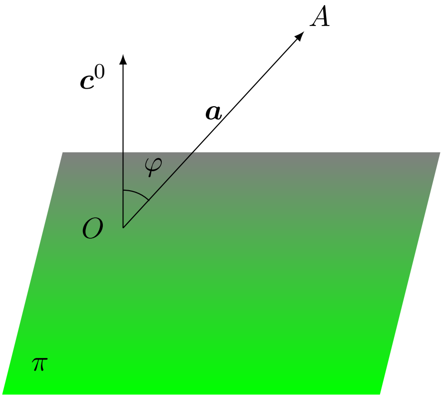
现假设不是上述情形. 设 $\boldsymbol{c}^0$ 为 $\boldsymbol{c}$ 的单位向量, 先证明下式成立:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0 + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}^0.$$

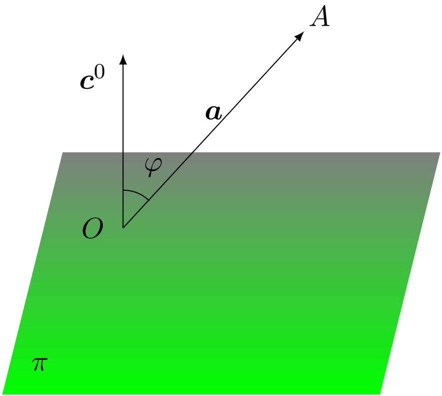
首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$:

首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$: 将向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O, 并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$;

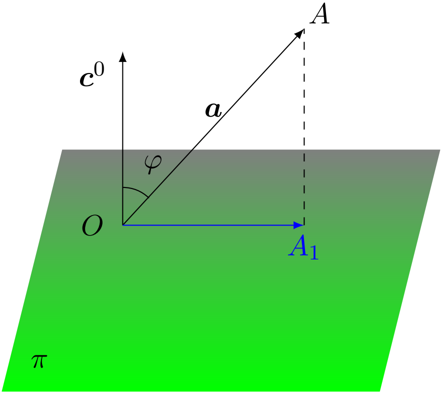
首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$: 将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O, 并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$;



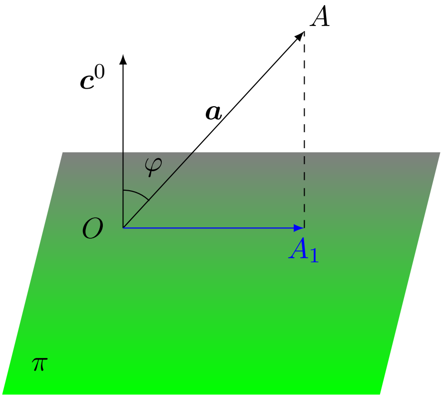
首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$: 将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O, 并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$; 作 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 在平面 π 上的射影 A_1,



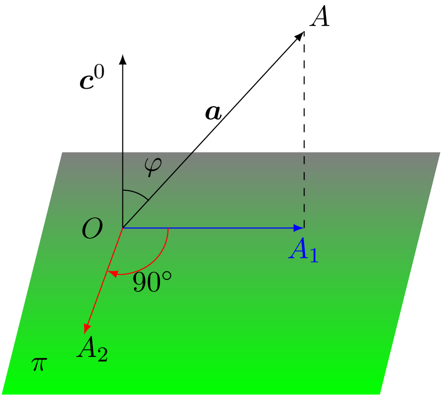
首先，通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$：将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O，并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$；作 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 在平面 π 上的射影 A_1，



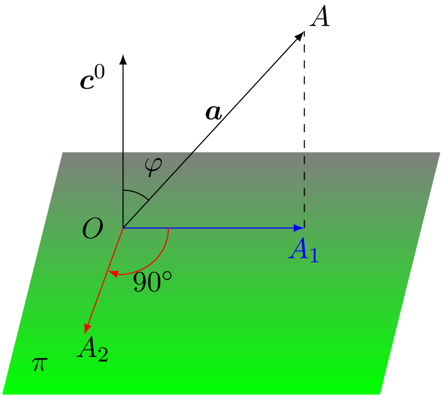
首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$: 将向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O, 并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$; 作 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 在平面 π 上的射影 A_1, 再将 $\overrightarrow{OA_1}$ 在平面 π 上沿顺时针方向(从 $\boldsymbol{c}^0$ 的终点看平面 π) 旋转 $90°$, 得 $\overrightarrow{OA_2}$, 则 $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$.



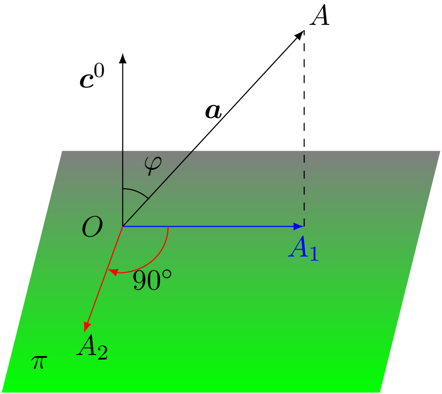
首先, 通过以下作图法作出向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$: 将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0$ 的始点移到公共点 O, 并过 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$; 作 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 在平面 π 上的射影 A_1, 再将 $\overrightarrow{OA_1}$ 在平面 π 上沿顺时针方向(从 $\boldsymbol{c}^0$ 的终点看平面 π) 旋转 $90°$, 得 $\overrightarrow{OA_2}$, 则 $\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$.



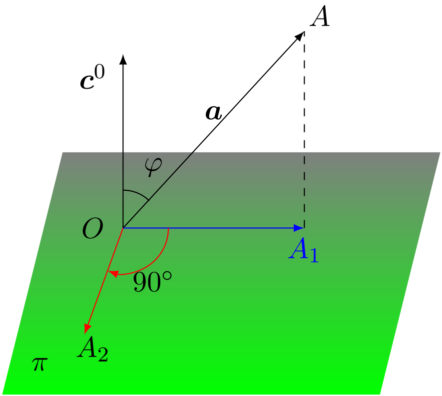
事实上, 由作图法知 $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{c}^0$,



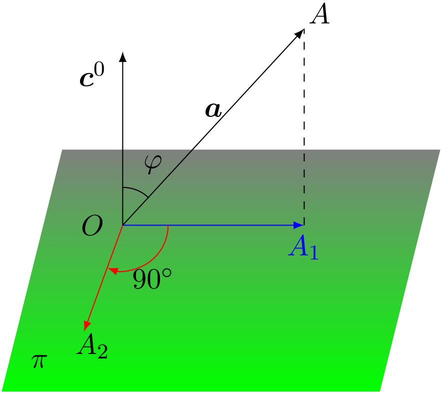
事实上，由作图法知 $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{c}^0$, 且 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OA_2}\}$ 构成右手标架,



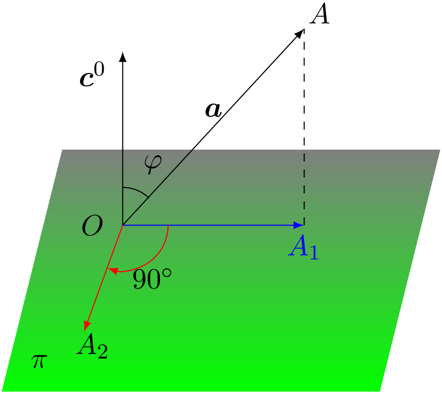
事实上, 由作图法知 $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{c}^0$, 且 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OA_2}\}$ 构成右手标架, 所以 $\overrightarrow{OA_2}$ 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$ 同方向;



事实上，由作图法知 $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{c}^0$, 且 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OA_2}\}$ 构成右手标架，所以 $\overrightarrow{OA_2}$ 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$ 同方向；如果设 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0) = \varphi$, 那么
$|\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_1}| = |\boldsymbol{a}| \sin\varphi = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{c}^0| \cdot \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0)$,



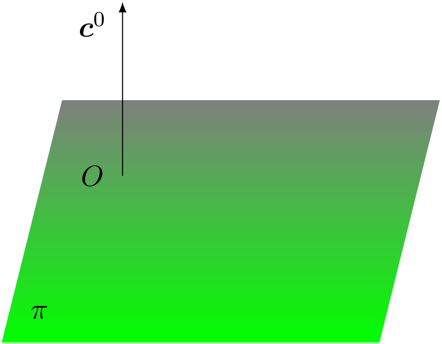
事实上，由作图法知 $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2} \perp \boldsymbol{c}^0$, 且 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OA_2}\}$ 构成右手标架，所以 $\overrightarrow{OA_2}$ 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$ 同方向；如果设 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0) = \varphi$, 那么 $|\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_1}| = |\boldsymbol{a}| \sin\varphi = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{c}^0| \cdot \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0)$, 所以 $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$.



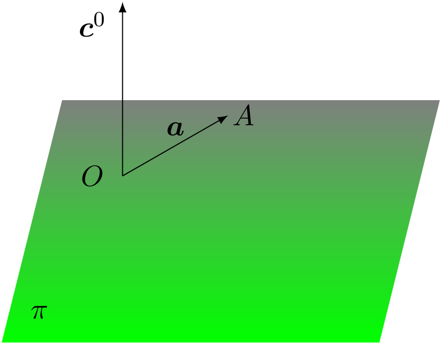
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$.

下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,

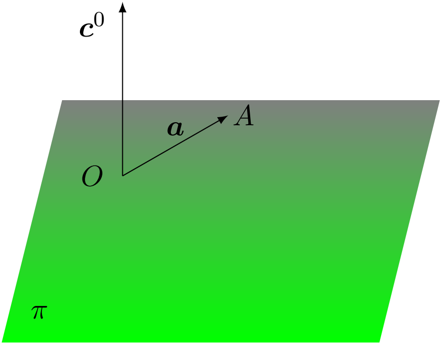
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,



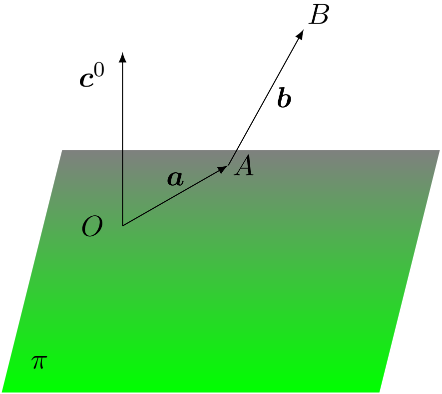
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,



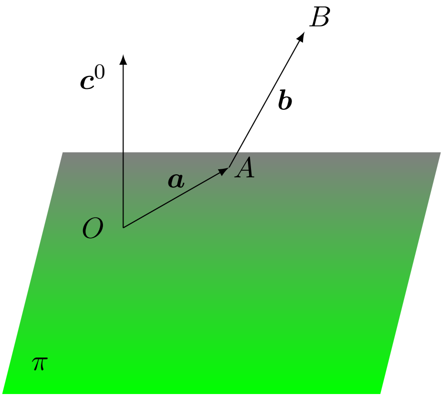
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,



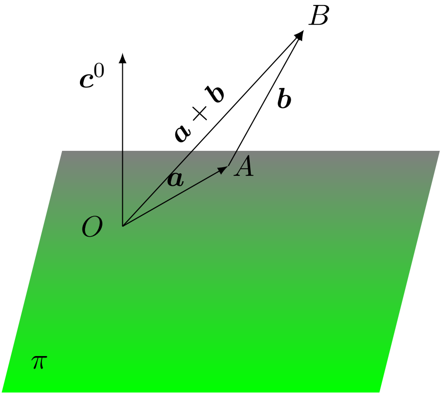
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,



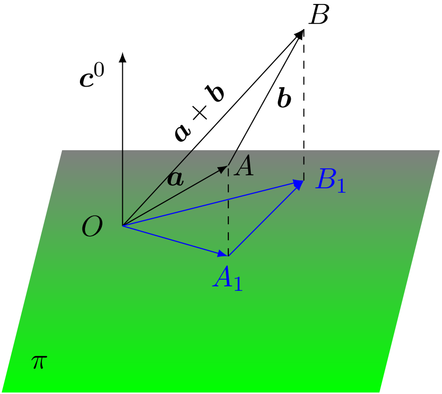
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图.



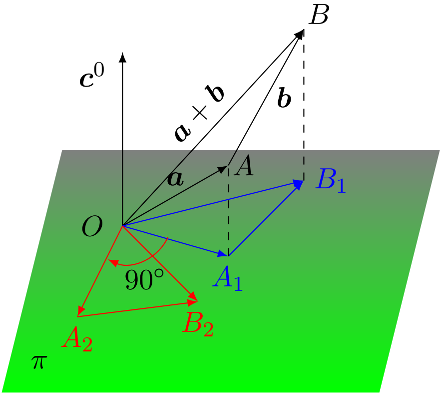
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图.



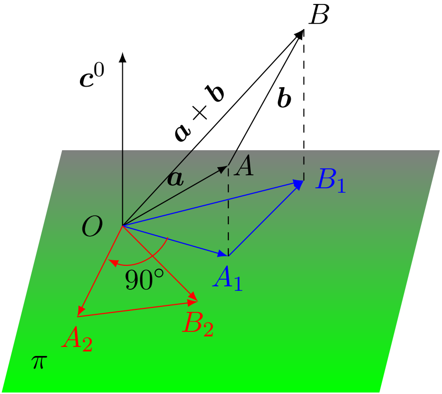
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图.



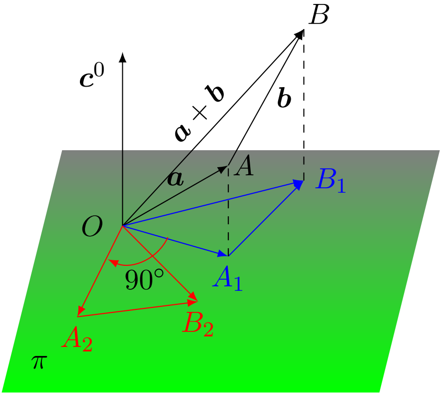
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图.



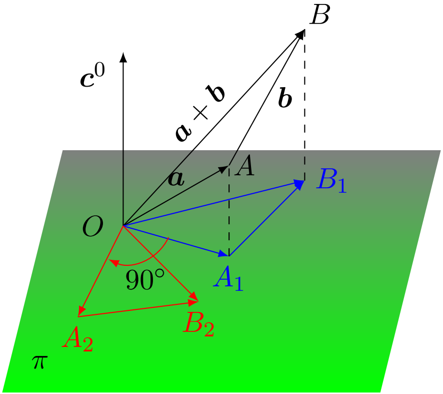
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知



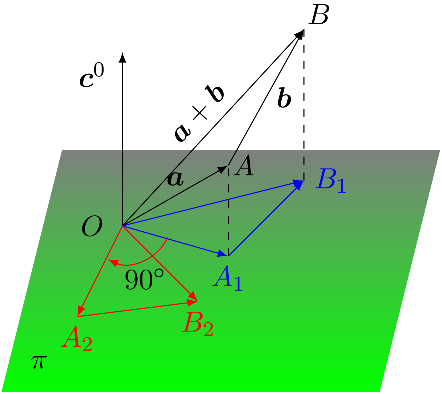
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知
$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$,



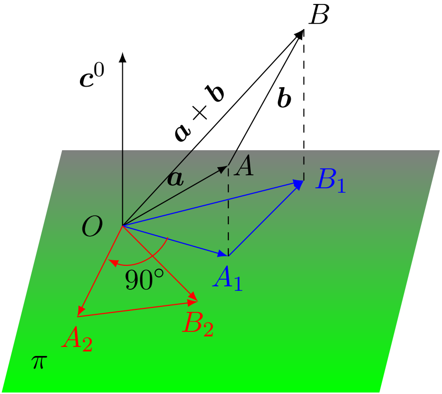
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知
$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$,



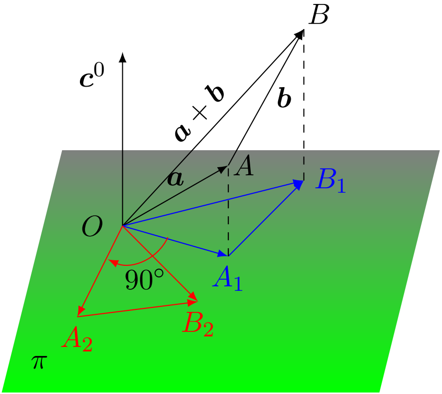
下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知
$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0$.



下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知 $\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0$. 而 $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$,

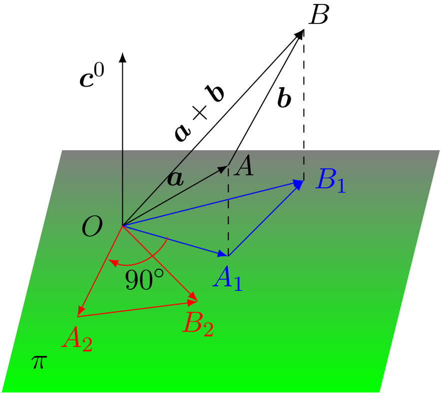


下证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$. 如图所示, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 且有类似上面的构图. 依上述作图法可知 $\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0$. 而 $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$, 所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$.



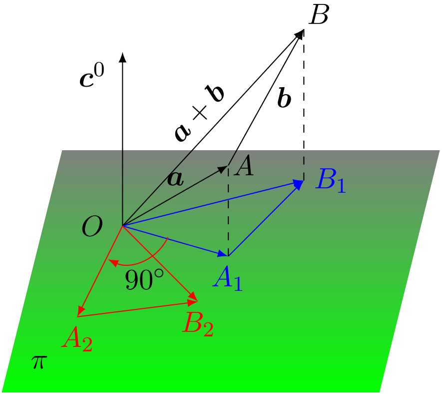
将上式两边同时乘以 $|\boldsymbol{c}|$, 利用向量积对数因子的结合律, 有 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0$.

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$.



将上式两边同时乘以 $|\boldsymbol{c}|$, 利用向量积对数因子的结合律, 有 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0$. 最后由 $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0$ 知定理成立.

$$\text{所以 } (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0.$$



推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

$$(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2) \times (\lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{a}_4)$$

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

$$\begin{aligned}&(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4)\\=\ &\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+\lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_4)+\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\end{aligned}$$

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

$$\begin{aligned}&(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4)\\=\;&\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+\lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_4)+\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\\&+\lambda_2\lambda_4(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_4).\end{aligned}$$

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律，因此它与向量的数量积一样，也可以像多项式的乘法一样进行展开，如

$$\begin{aligned}&(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4)\\=\ &\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+\lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_4)+\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\\&+\lambda_2\lambda_4(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_4).\end{aligned}$$

注： 向量积满足的是反交换律，而非交换律，

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

$$\begin{aligned}&(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4)\\=\;&\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+\lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_4)+\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\\&+\lambda_2\lambda_4(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_4).\end{aligned}$$

注: 向量积满足的是反交换律, 而非交换律, 因此在向量积的运算过程中, 其因子向量的次序不能任意颠倒,

推论

$$\boxed{\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}.}$$

证 由定理 1.8.5和向量积的反交换律可直接验证.

由于向量积满足以上这些运算规律, 因此它与向量的数量积一样, 也可以像多项式的乘法一样进行展开, 如

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2) \times (\lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{a}_4) \\ = \; & \lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_3) + \lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_4) + \lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) \\ & + \lambda_2\lambda_4(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_4). \end{aligned}$$

注: 向量积满足的是反交换律, 而非交换律, 因此在向量积的运算过程中, 其因子向量的次序不能任意颠倒, 如果交换向量积的两个因子的向量, 就必须改变符号, 即换成其反向量.

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

证

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$$

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

证

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

证

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\ &= \mathbf{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\mathbf{0}\\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

证

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \\ &= 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

例 1

证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明其几何意义.

证

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0}\\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\ &= 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

它的几何意义是: 平行四边形的面积的两倍等于以它的对角线为边的平行四边形的面积.

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\=\;&\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2[\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]\end{aligned}$$

例 2

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\=\ &\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2[\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]\\=\ &\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.\end{aligned}$$

课堂练习: P 52, 习题 1

已知 $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=5, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$, 试求:
(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$; (2) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$; (3) $[(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})]^2$.

✍课堂练习: P 52, 习题 1

已知 $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 5, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3$, 试求:
(1) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$; (2) $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})]^2$; (3) $[(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})]^2$.

答案: (1) 4; (2) 64; (3) 144.

❒ 向量积的坐标表示

❒ 向量积的坐标表示

下面我们在右手直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下, 用向量的坐标表示向量积.

❒ 向量积的坐标表示

下面我们在右手直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，用向量的坐标表示向量积.

定理 1.8.6

如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},}$$

❐ 向量积的坐标表示

下面我们在右手直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，用向量的坐标表示向量积.

定理 1.8.6

如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},}$$

或写成

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})$$
$$=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}) \times (X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k})$$

$$= X_1X_2(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + X_1Y_2(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) + X_1Z_2(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k})$$

$$+ Y_1X_2(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i})$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})$$
$$=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})$$
$$+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})$$
$$+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}) \\
&= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) \\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) \\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\quad\boldsymbol{i}\quad)\\ &\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= \cancel{X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\cancel{Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\quad\boldsymbol{i}\quad)\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+\cancel{Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\ &\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= \cancel{X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\cancel{Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+\cancel{Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量，且成右手系，故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= \cancel{X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\cancel{Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+\cancel{Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}) \\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ ) \\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ ) \\
&\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= \cancel{X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\cancel{Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+\cancel{Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\quad\boldsymbol{k}\quad)+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\quad\boldsymbol{i}\quad)\\
&\quad +Z_1X_2(\quad\boldsymbol{j}\quad)+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}$$

证 因为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\ \boldsymbol{k}\ )+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\
&= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\ \boldsymbol{k}\ )+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\
&\quad +Y_1X_2(\ -\boldsymbol{k}\ )+Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\
&\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{gathered}
$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= X_1X_2\cancel{(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\ \boldsymbol{k}\ )+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\ &\quad +Y_1X_2(\ -\boldsymbol{k}\ )\ +Y_1Y_2\cancel{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\ &\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+Z_1Z_2\cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\ &= \cancel{X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})}+X_1Y_2(\ \boldsymbol{k}\ )+X_1Z_2(\ -\boldsymbol{j}\ )\\ &\quad +Y_1X_2(\ -\boldsymbol{k}\ )\ +\cancel{Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})}+Y_1Z_2(\ \boldsymbol{i}\ )\\ &\quad +Z_1X_2(\ \boldsymbol{j}\ )+Z_1Y_2(\ -\boldsymbol{i}\ )+\cancel{Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个两两相互垂直的单位向量, 且成右手系, 故

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =$$

从而得

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)\boldsymbol{i} + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1)\boldsymbol{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},}$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

从而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},$$

此即定理结论, 也可以改写成二阶或三阶行列式的形式:

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

例 3

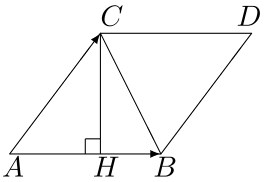
已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积.

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

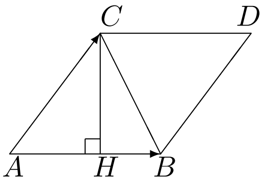
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积.



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

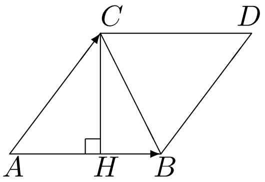
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

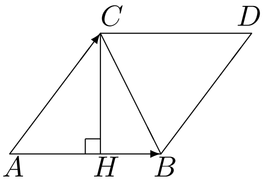
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

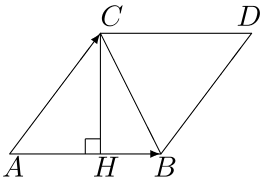
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$,



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

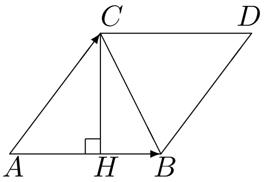
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$,



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

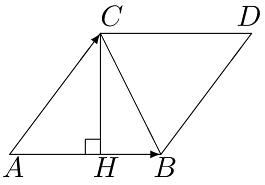
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}$



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

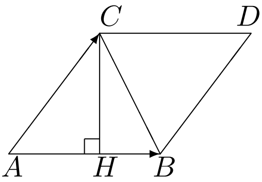
解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=$
$24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,
从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}$

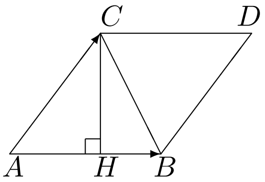


例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=$ $24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

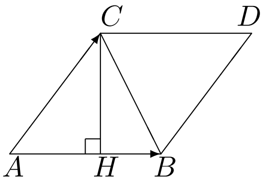
从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$,



例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=$ $24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

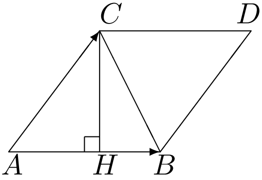


从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$, 所以 $S=3\sqrt{21}$.

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

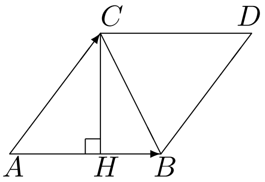


从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$, 所以 $S=3\sqrt{21}$.

(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.



解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

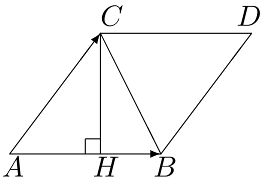
从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$, 所以 $S=3\sqrt{21}$.

(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,



从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$, 所以 $S=3\sqrt{21}$.

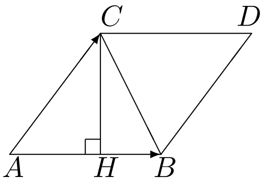
(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

$$|\overrightarrow{CH}|=\frac{\text{平行四边形}ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

例 3

已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求: (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB}=\{1,-3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,-8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,



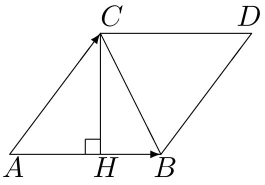
从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$, 所以 $S=3\sqrt{21}$.

(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

$$|\overrightarrow{CH}|=\frac{\text{平行四边形}ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$



解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB} = \{1, -3, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, 0, -8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 24\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$,

从而 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{21}$, 所以 $S = 3\sqrt{21}$.

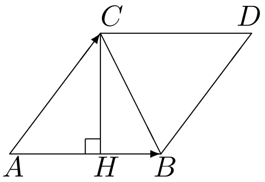
(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{\text{平行四边形}ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}}$$

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB} = \{1, -3, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, 0, -8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 24\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$,



从而 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{21}$, 所以 $S = 3\sqrt{21}$.

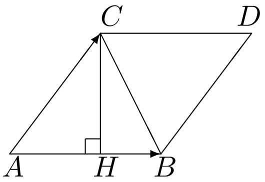
(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{\text{平行四边形}ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{6}.$$

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积. 如图, 由于 $\triangle ABC$ 的面积 S 为平行四边形 $ABDC$ 面积的一半, 得 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. 同时 $\overrightarrow{AB} = \{1, -3, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, 0, -8\}$, 于是 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 24\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$,



从而 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{21}$, 所以 $S = 3\sqrt{21}$.

(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高. 因为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高 CH 是平行四边形 $ABDC$ 的边 AB 上的高, 所以

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{\text{平行四边形}ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, 所以

✍课堂练习: P 53, 习题 2

证明:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 \le \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$, 并说明在什么情况下等号成立;

(2) 如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 并说明它的几何意义;

(3) 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线;

(4) 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$, 那么 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

课堂练习: P 53, 习题 2

证明:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leq\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$, 并说明在什么情况下等号成立;

(2) 如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 并说明它的几何意义;

(3) 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线;

(4) 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$, 那么 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

下一节