第一章 向量与坐标

内容提要与典型例题

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

本章内容提要

本章内容提要

向量线性运算

本章内容提要

- 向量线性运算
- 标架与坐标

本章内容提要

- 向量线性运算
- 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
- 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

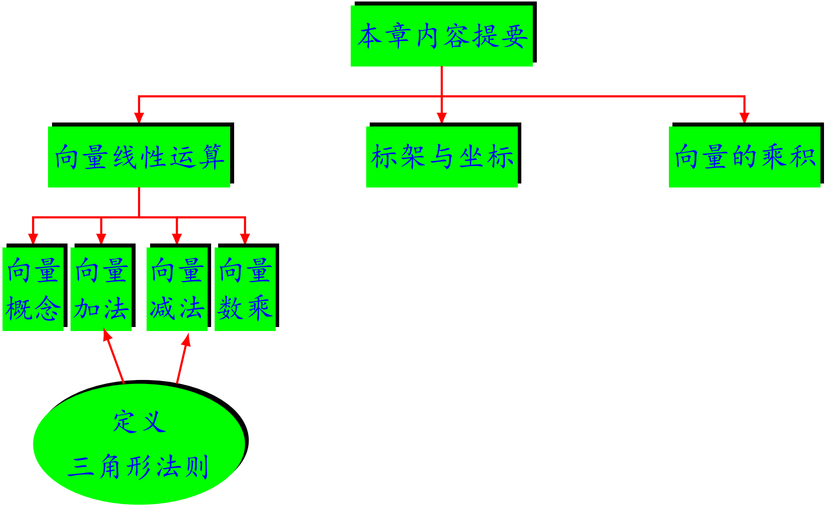
- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
- 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
- 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
- 向量的乘积


本章内容提要
向量线性运算
标架与坐标
向量的乘积
向量概念
向量加法
向量减法
向量数乘
定义
三角形法则

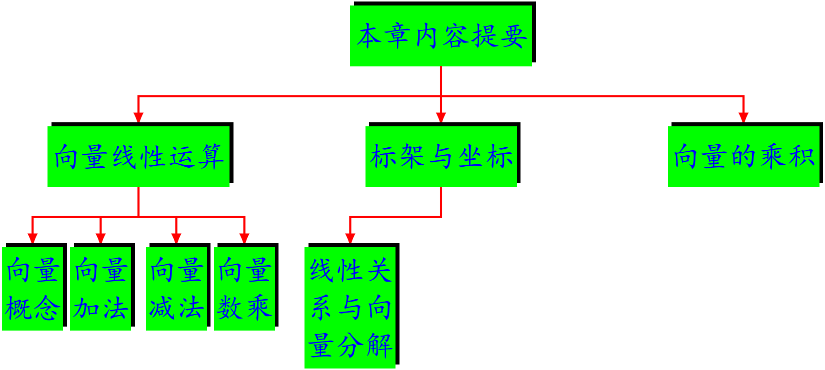
本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
    - 运算规律 交换律、结合律
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
- 向量的乘积

运算规律
交换律、分配律

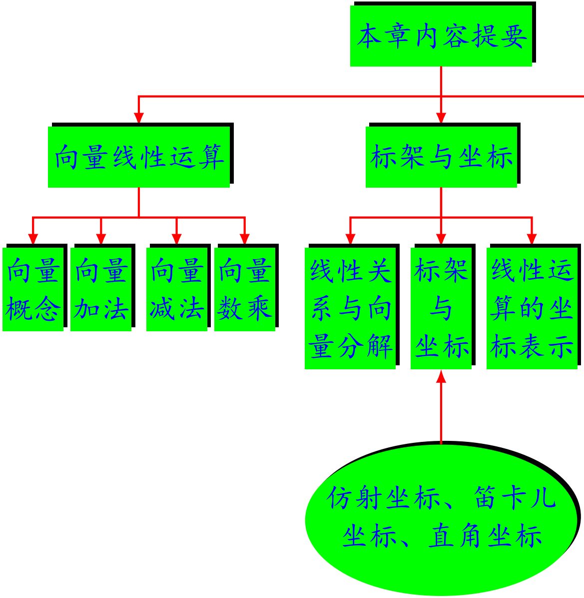

本章内容提要
向量线性运算
标架与坐标
向量的乘积
向量概念
向量加法
向量减法
向量数乘
线性关系与向量分解

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
- 向量的乘积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积


本章内容提要
向量线性运算
标架与坐标
向量的乘积
向量概念
向量加法
向量减法
向量数乘
线性关系与向量分解
标架与坐标
线性运算的坐标表示
仿射坐标、笛卡儿坐标、直角坐标

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积
  - 混合积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积
  - 混合积
  - 双重向量积

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积
  - 混合积
  - 双重向量积

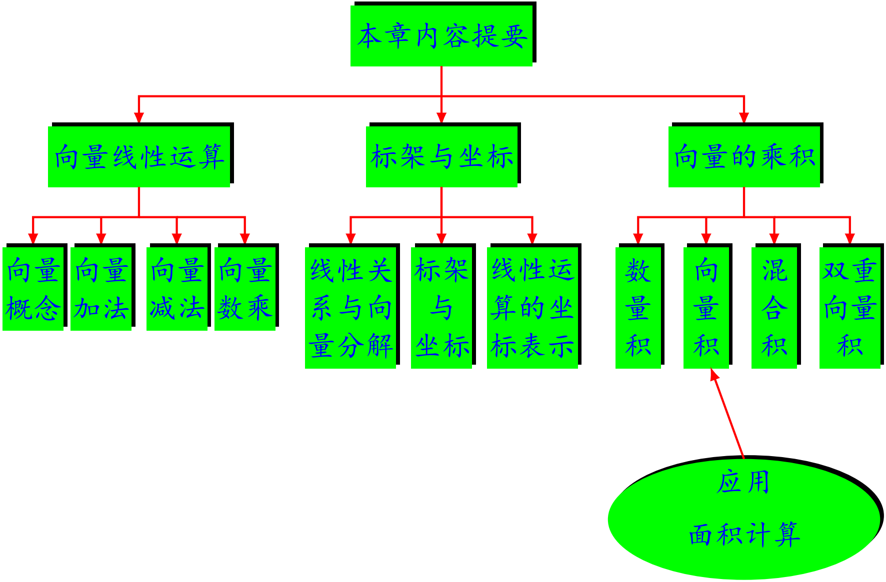
预备知识
向量在轴上的射影

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积
  - 混合积
  - 双重向量积

应用

距离、角度


本章内容提要
向量线性运算
标架与坐标
向量的乘积
向量概念
向量加法
向量减法
向量数乘
线性关系与向量分解
标架与坐标
线性运算的坐标表示
数量积
向量积
混合积
双重向量积
应用
面积计算

本章内容提要

- 向量线性运算
  - 向量概念
  - 向量加法
  - 向量减法
  - 向量数乘
- 标架与坐标
  - 线性关系与向量分解
  - 标架与坐标
  - 线性运算的坐标表示
- 向量的乘积
  - 数量积
  - 向量积
  - 混合积
    - 应用 体积、线性相关、线性无关判断
  - 双重向量积

例 1

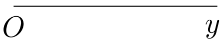
在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是:

例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右,

例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是：y 轴水平指向右，

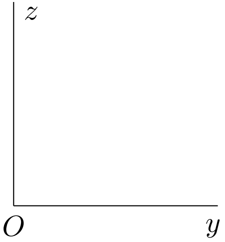


例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上,

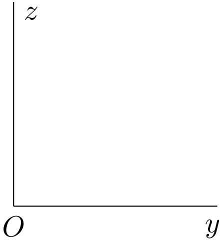
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是：y 轴水平指向右，z 轴为竖直指向上，



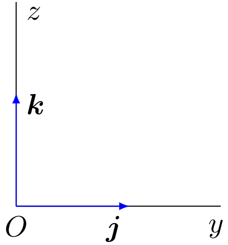
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度;



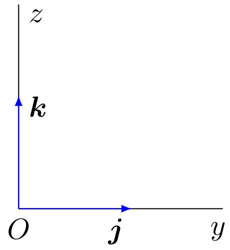
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度;



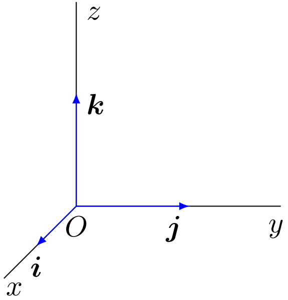
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y, z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半.



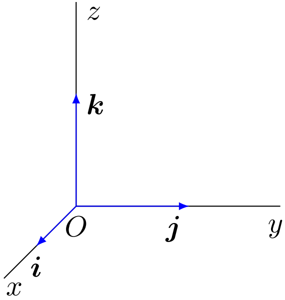
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y, z 两轴成等角$135°$, 单位长度是前两轴的一半.



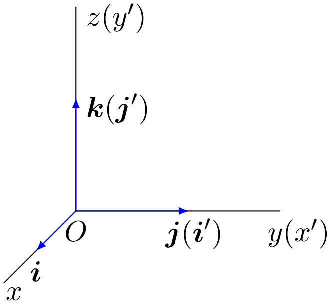
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合.



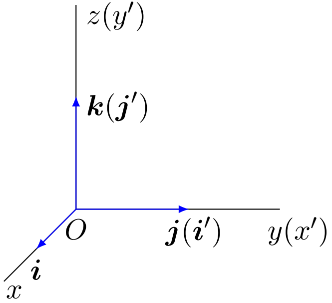
例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合.



例 1

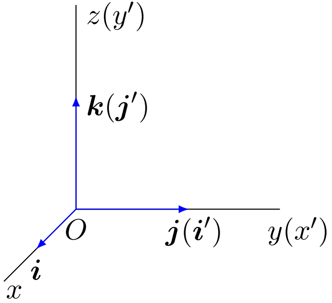
在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合. 试求空间点坐标 (x,y,z) 与平面上点坐标 (x',y') 的变换式.



例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合. 试求空间点坐标 (x,y,z) 与 平面上点坐标 (x',y') 的变换式.

解 依题意, 有

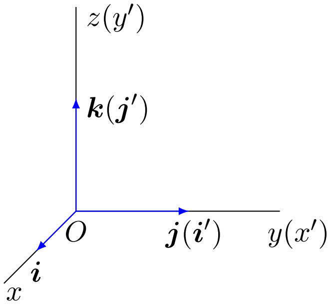


例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是：y 轴水平指向右，z 轴为竖直指向上，两轴有相同单位长度；而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°，单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$，使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合. 试求空间点坐标 (x,y,z) 与平面上点坐标 (x',y') 的变换式.

解 依题意，有

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}',\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}',$$

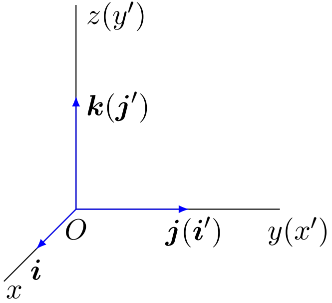


例 1

在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y, z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x', y' 轴分别与 y, z 轴重合. 试求空间点坐标 (x, y, z) 与平面上点坐标 (x', y') 的变换式.

解 依题意, 有

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}', \quad \boldsymbol{i}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i}'+\mathbf{j}')$$



例 1

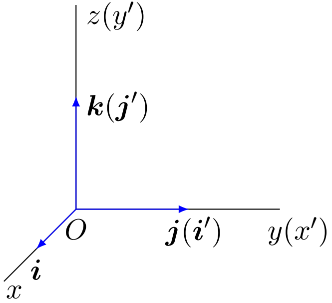
在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角$135°$, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合. 试求空间点坐标 (x,y,z) 与平面上点坐标 (x',y') 的变换式.

解 依题意, 有

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}',\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}',\quad \boldsymbol{i}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i}'+\mathbf{j}')$$

$$\Rightarrow\quad x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{i}'$$

$$+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{j}'$$



例 1

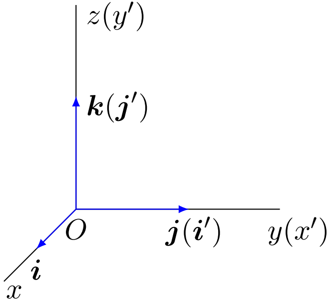
在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 的斜二侧画法是: y 轴水平指向右, z 轴为竖直指向上, 两轴有相同单位长度; 而 x 轴与 y,z 两轴成等角135°, 单位长度是前两轴的一半. 另在平面上建立坐标系 $O-x'y'$, 使 x',y' 轴分别与 y,z 轴重合. 试求空间点坐标 (x,y,z) 与平面上点坐标 (x',y') 的变换式.

解 依题意, 有

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}',\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}',\quad \boldsymbol{i}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i}'+\mathbf{j}')$$

$$\Rightarrow\quad x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{i}'$$

$$+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{j}'=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'$$



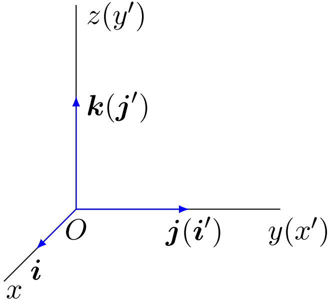
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x, \\ y' = z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x. \end{cases}$$

解 依题意, 有

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}', \quad \boldsymbol{i} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i}' + \mathbf{j}')$$

$$\Rightarrow \quad x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{i}'$$

$$+\left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{j}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$$



$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = y - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x, \\ y' = z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x. \end{cases}$$

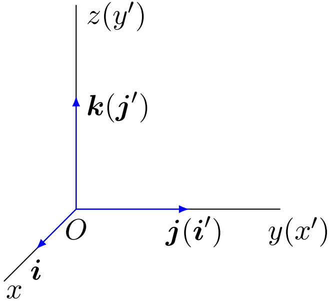
注: 此题给出了在平面上绘制空间图形的代数基础, 本课件许多几何图形就是照此原理绘制的.

解 依题意, 有

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}', \quad \boldsymbol{i} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i}' + \mathbf{j}')$$

$$\Rightarrow \quad x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{i}'$$

$$+ \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\boldsymbol{j}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$$

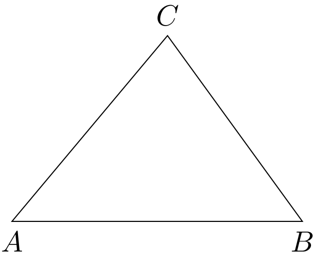


例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H.

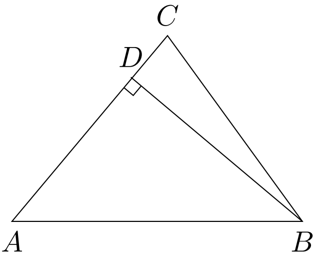
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H.



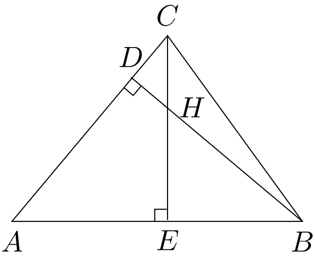
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H.



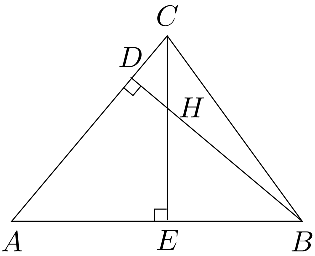
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H.



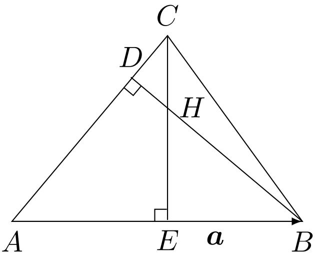
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$,



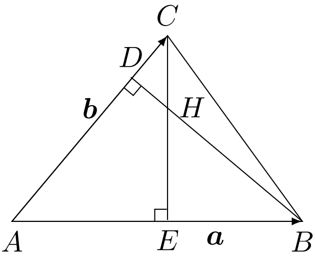
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$,



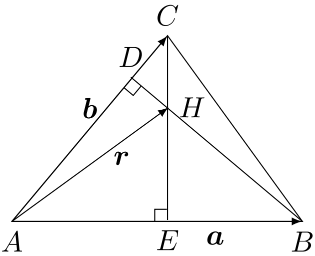
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$,



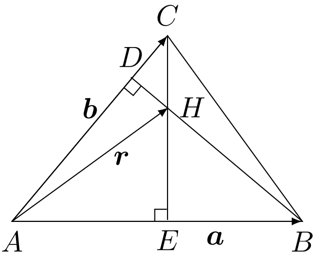
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$,



例 2

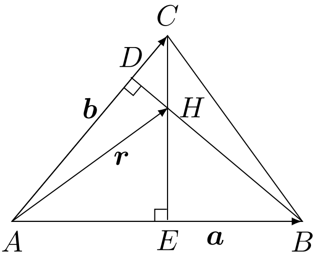
设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.



例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, 则

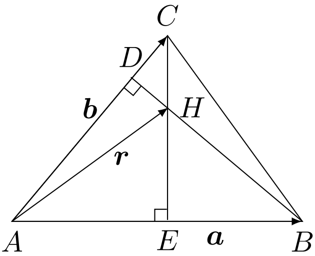


例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则

$$CH\perp AB$$

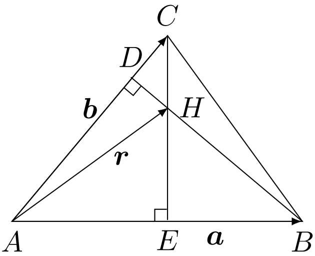


例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则

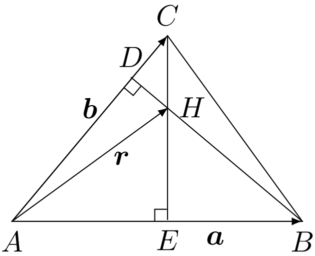
$$CH \perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+(\mu-1)\boldsymbol{b})=0$$



例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, 则

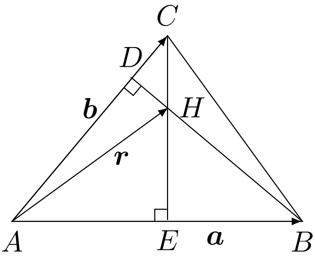


$$CH \perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{a} + (\mu - 1)\boldsymbol{b}) = 0$$
$$BH \perp AC$$

例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则



$$CH\perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+(\mu-1)\boldsymbol{b})=0$$
$$BH\perp AC \Rightarrow \boldsymbol{b}\cdot((\lambda-1)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0$$

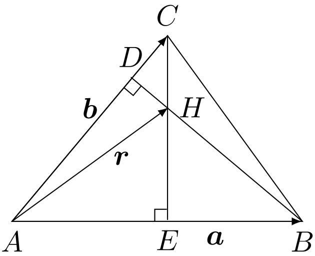
例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH} = \boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, 则

$$\left.\begin{array}{l} CH \perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{a} + (\mu - 1)\boldsymbol{b}) = 0 \\ BH \perp AC \Rightarrow \boldsymbol{b} \cdot ((\lambda - 1)\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\boldsymbol{a}^2 + \mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \mu\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \end{cases}$$

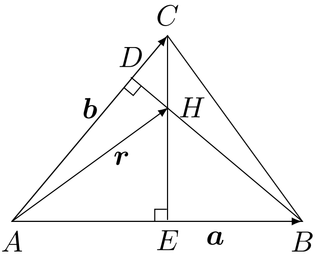


例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则

$$\left.\begin{array}{l} CH\perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+(\mu-1)\boldsymbol{b})=0 \\ BH\perp AC \Rightarrow \boldsymbol{b}\cdot((\lambda-1)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0 \end{array}\right\}$$



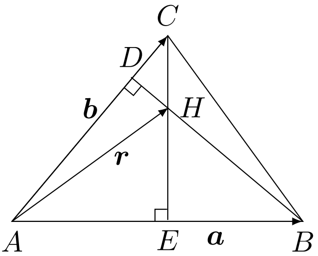
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda\boldsymbol{a}^2+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \\ \mu=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \end{cases}$$

例 2

设 $\triangle ABC$ 的高 BD, CE 交于 H. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{r}$, 试将 $\boldsymbol{r}$ 表示为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则



$$\left.\begin{array}{l} CH\perp AB \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+(\mu-1)\boldsymbol{b})=0 \\ BH\perp AC \Rightarrow \boldsymbol{b}\cdot((\lambda-1)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda\boldsymbol{a}^2+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \\ \mu=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{r}=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{a}+\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{b}.$$

例 3

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 60°, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 60°, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 60°, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1+9-3=7$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 60°, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=1+9-3=7$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 60°, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=1+9-3=7$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

(2)

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1+9-3=7$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

(2)

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1+9-3=7$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

(2)

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

例 3

(1) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 1 和 3, 夹角为 $60°$, 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
(2) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 (1)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1+9-3=7$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

(2)

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

例 4

已知 $\boldsymbol{a} = \{1, -2, 1\}, \boldsymbol{b} = \{2, 1, 0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c} \cdot \{1, 1, 1\} = 18$.

解

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \{1, -2, 1\} \times \{2, 1, 0\}$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\}, \boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\}, \boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}$$

$$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$，求一向量 $\boldsymbol{c}$，使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}\\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c}=\lambda\{-1,2,5\}(\lambda\in\mathbb{R})$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}\\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{r}\boldsymbol{c}=\lambda\{-1,2,5\}(\lambda\in\mathbb{R})\\ \boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18\end{array}$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$，求一向量 $\boldsymbol{c}$，使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}\\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{c}=\lambda\{-1,2,5\}(\lambda\in\mathbb{R})\\ \boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lambda\{-1,2,5\}\cdot\{1,1,1\}=6\lambda=18$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}\\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{c}=\lambda\{-1,2,5\}(\lambda\in\mathbb{R})\\ \boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lambda\{-1,2,5\}\cdot\{1,1,1\}=6\lambda=18$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=3$$

例 4

已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,1,0\}$, 求一向量 $\boldsymbol{c}$, 使它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18$.

解

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,5\}\\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{c}=\lambda\{-1,2,5\}(\lambda\in\mathbb{R})\\ \boldsymbol{c}\cdot\{1,1,1\}=18\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lambda\{-1,2,5\}\cdot\{1,1,1\}=6\lambda=18$$

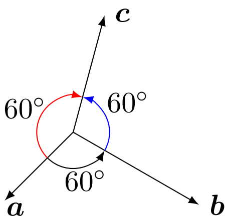
$$\Rightarrow\quad \lambda=3\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\{-3,6,15\}.$$

例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:

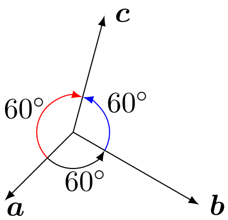
例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 $60°$ 等角, 试求:



例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角，试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;

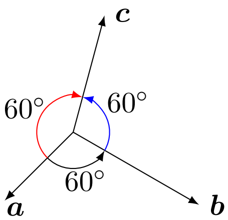


例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:

(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;

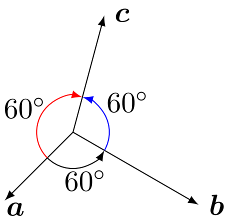
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.



例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 $60°$ 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

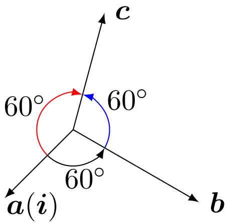
解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上.



例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 $60°$ 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

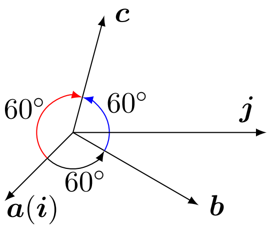
解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上.



例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

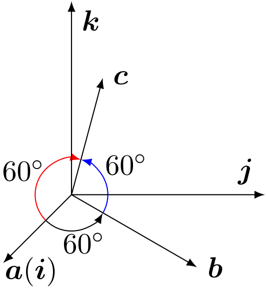
解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上.



例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上.

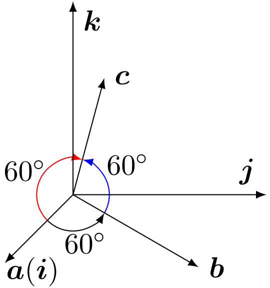


例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设

$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},$$

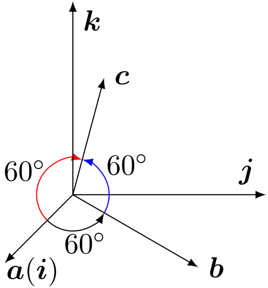


例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设

$$\boldsymbol{a} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{b} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\},$$



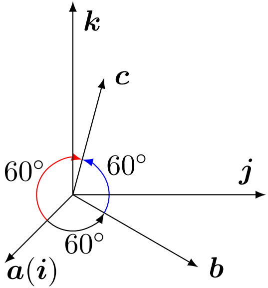
例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设

$$\boldsymbol{a} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{b} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\},$$

$$\boldsymbol{c} = \left\{\frac{1}{2}, \lambda, \sqrt{\frac{3}{4} - \lambda^2}\right\}.$$



例 5

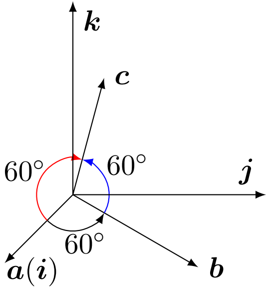
设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角，试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系，使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意，可设

$$\boldsymbol{a} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{b} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\},$$

$$\boldsymbol{c} = \left\{\frac{1}{2}, \lambda, \sqrt{\frac{3}{4} - \lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 60^\circ$$

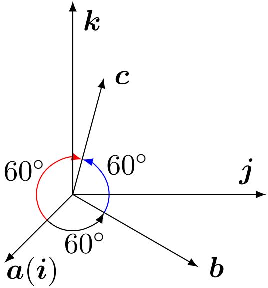


例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设

$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{b}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\},$$



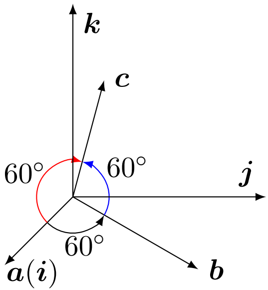
$$\boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\lambda,\sqrt{\frac{3}{4}-\lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相互成 60° 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设



$$\boldsymbol{a} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{b} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\},$$

$$\boldsymbol{c} = \left\{\frac{1}{2}, \lambda, \sqrt{\frac{3}{4} - \lambda^2}\right\}.$$

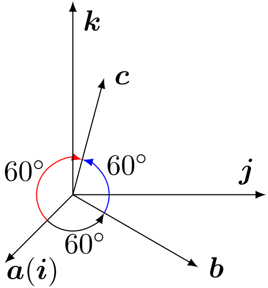
$$\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

例 5

设三单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互成 $60°$ 等角, 试求:
(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面的交角;
(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体的体积.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设



$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{b}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\},$$

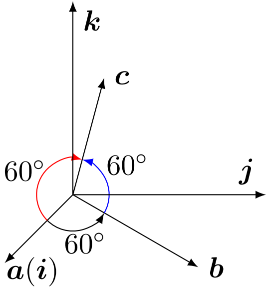
$$\boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\lambda,\sqrt{\frac{3}{4}-\lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60° \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设



$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{b}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\},$$

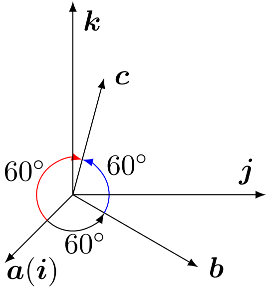
$$\boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\lambda,\sqrt{\frac{3}{4}-\lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设



$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{b}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\},$$

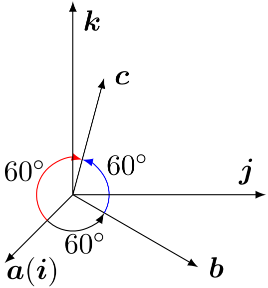
$$\boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\lambda,\sqrt{\frac{3}{4}-\lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面 (即 xOy 平面) 的夹角是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

解 选取空间直角坐标系, 使 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面上. 依题意, 可设



$$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{b}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\},$$

$$\boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\lambda,\sqrt{\frac{3}{4}-\lambda^2}\right\}.$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面 (即 xOy 平面) 的夹角是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix}$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面 (即 xOy 平面) 的夹角是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

(1) 由于 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面 (即 xOy 平面) 的夹角是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & \dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成平行六面体的体积等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))) = a^4\boldsymbol{b}$.

例 6

已知 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))) = \boldsymbol{a}^4 \boldsymbol{b}$.

证

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$.

证

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$.

证

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$.

证

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$.

证

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))$$

例 6

已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求证: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$.

证

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}.$$