第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

§4.5 双曲面

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

§4.5 双曲面

§4.5 双曲面

教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质

§4.5 双曲面

教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论双曲面的几何形状与性质

§4.5 双曲面

教学内容: 单叶双曲面与双叶双曲面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论双曲面的几何形状与性质

教学重难点: 单叶双曲面与双叶双曲面的联系与区别

❒ 单叶双曲面

☞ 单叶双曲面的定义

❒ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，

❒ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面, 上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程, 其中 a, b, c 是任意的正常数.

❐ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程，其中 a,b,c 是任意的正常数.

☞ **单叶双曲面的简单性质**

❐ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程，其中 a,b,c 是任意的正常数.

☞ **单叶双曲面的简单性质** 从单叶双曲面的方程可以看出，与椭球面一样，它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的.

❒ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面, 上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程, 其中 a, b, c 是任意的正常数.

☞ **单叶双曲面的简单性质** 从单叶双曲面的方程可以看出, 与椭球面一样, 它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的. 双曲面与 z 轴不相交, 与 x 轴与 y 轴分别交于点 $(\pm a, 0, 0)$ 与 $(0, \pm b, 0)$,

❐ 单叶双曲面

☞ **单叶双曲面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

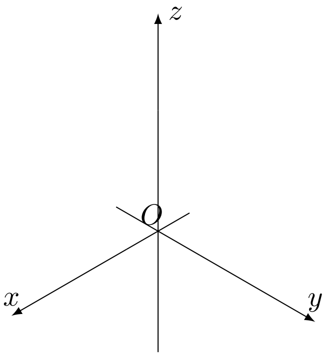
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面, 上面的方程叫做单叶双曲面的标准方程, 其中 a,b,c 是任意的正常数.

☞ **单叶双曲面的简单性质** 从单叶双曲面的方程可以看出, 与椭球面一样, 它也是关于三个坐标面、三坐标轴以及坐标原点对称的. 双曲面与 z 轴不相交, 与 x 轴与 y 轴分别交于点 $(\pm a,0,0)$ 与 $(0,\pm b,0)$, 这四点叫做单叶双曲面的顶点.

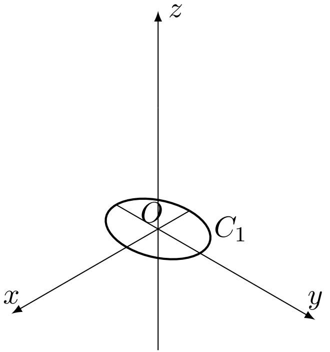
☞ **单叶双曲面的形状** 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$$



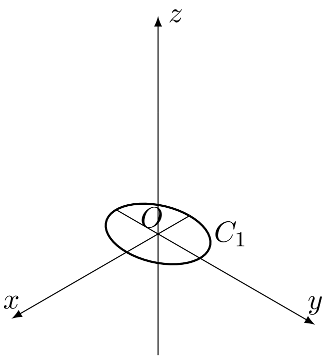
单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases}}$$



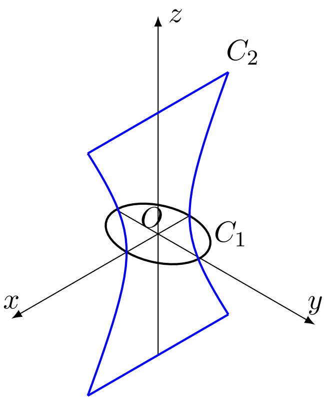
单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0; \end{cases}} \quad C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0; \end{cases}}$$



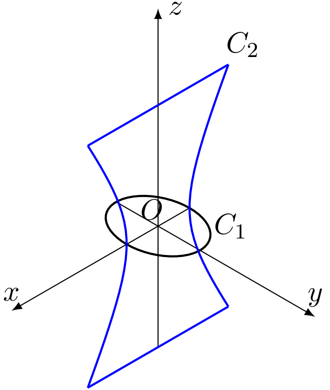
单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0; \end{cases}} \quad C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0; \end{cases}}$$



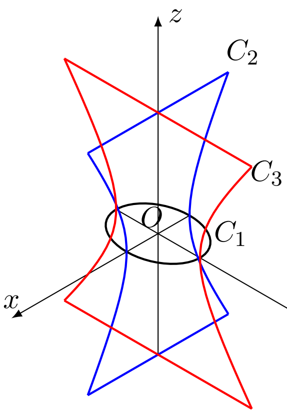
单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad C_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad C_3:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$



单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

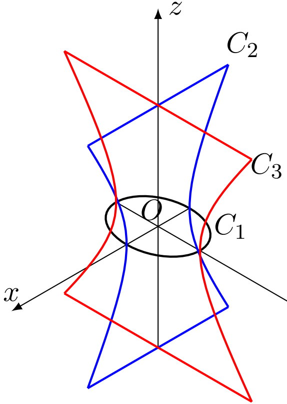
$$C_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad C_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad C_3:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$



单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}\quad C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}\quad C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；

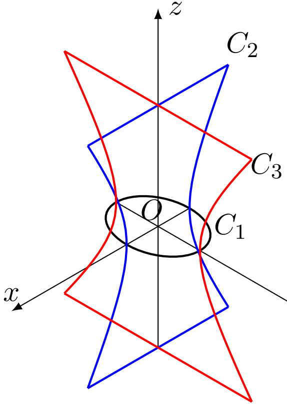


单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}\quad C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}\quad C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；

C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

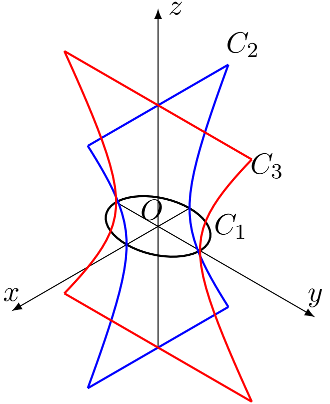


☞ **单叶双曲面的形状** 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\ \boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}\quad C_2:\ \boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}\quad C_3:\ \boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}}$

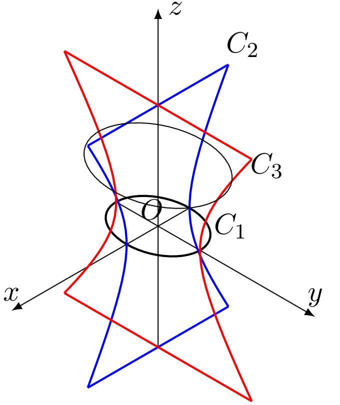


单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}$ $C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}$ $C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

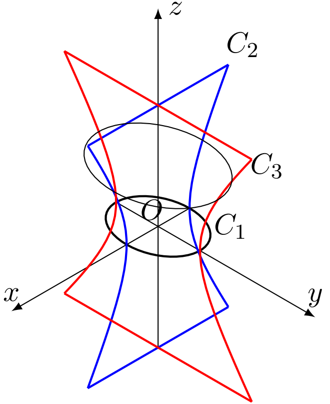
平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}}$



单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$C_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}$ $C_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}$ $C_3:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.



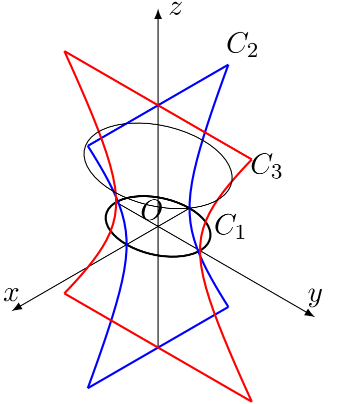
平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$

单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad C_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad C_3:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

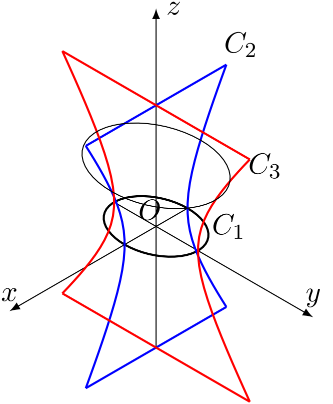
平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$,



单叶双曲面的形状 与椭球面讨论类似，考虑主截线

$$C_1:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}}\quad C_2:\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}}\quad C_3:\boxed{\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}}$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；
C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

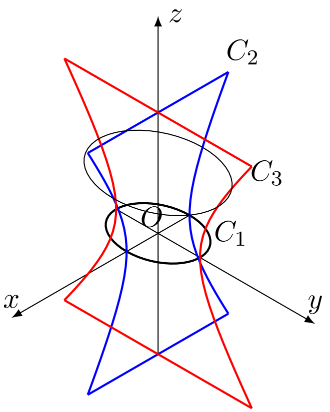


平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$，两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}},0,h\right)$

$$\left(0, \pm b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, h\right),$$

C_1 为椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；C_2, C_3 分别为 xOz 面，yOz 面上的双曲线，它们有共同的虚轴与虚轴长.

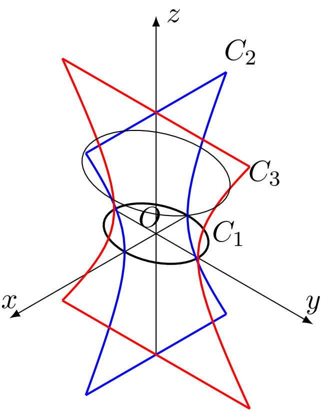
平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截，得椭圆 $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$，两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与



$\left(0, \pm b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在双曲线 C_2 : $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$

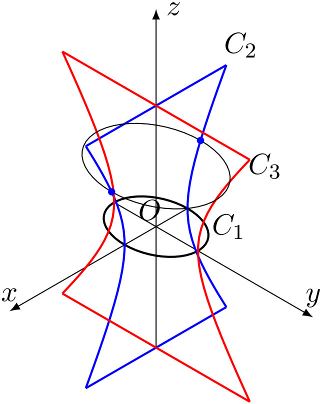
C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.

平面 $z=h$ 与单叶双曲面 相截, 得椭圆 $\boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与



$\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在双曲线 C_2 : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$

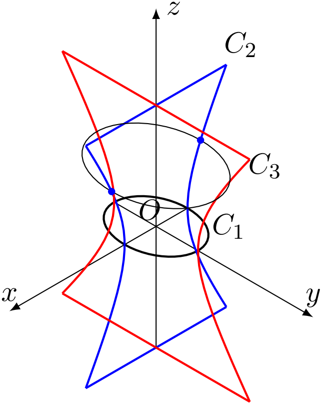
C_1 为椭圆, 叫做单叶双曲面的腰椭圆; C_2, C_3 分别为 xOz 面, yOz 面上的双曲线, 它们有共同的虚轴与虚轴长.



平面 $z = h$ 与单叶双曲面 相截, 得椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$ 两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与

$\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在双曲线 C_2 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}}$ 与

C_3 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}}$ 上.

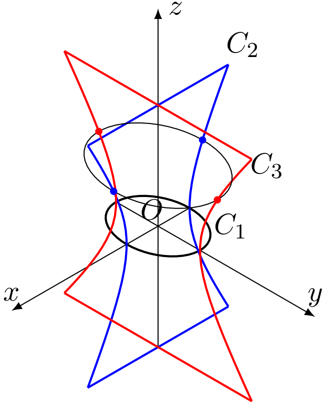


$a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与

$\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在双曲线 $C_2 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}}$ 与

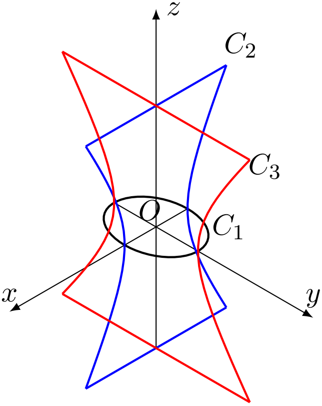
$C_3 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}}$ 上.

$a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与



$\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，它们分别在双曲线 C_2 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}}$ 与

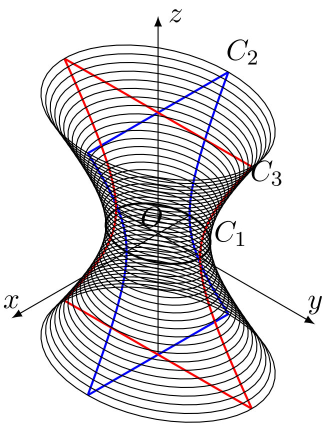
C_3 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}}$ 上.



$a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与

$\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$, 它们分别在双曲线 C_2 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$ 与

C_3 : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$ 上.



$a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 两轴端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与

因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

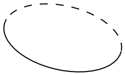
由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

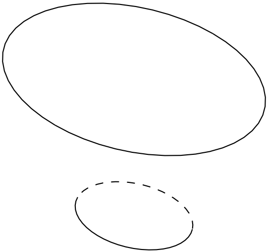
由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;



因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

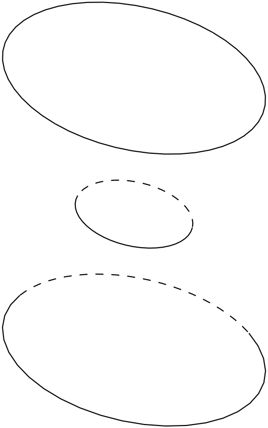
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;



因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

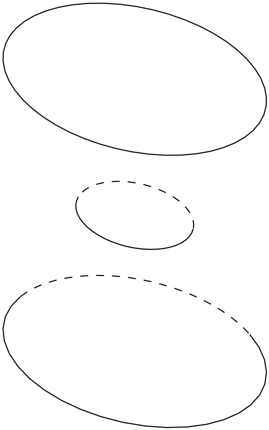


因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

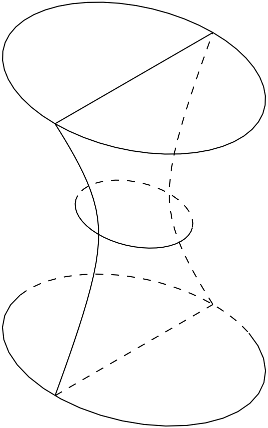


因此，单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的，这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行，且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆，上椭圆，下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

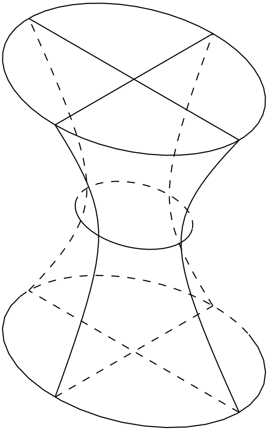


因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

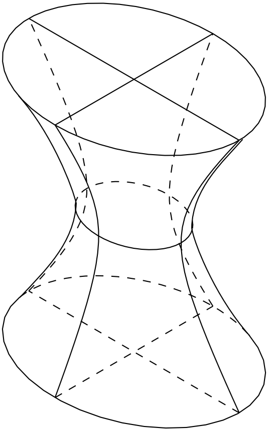
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;



因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:
(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;
(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;



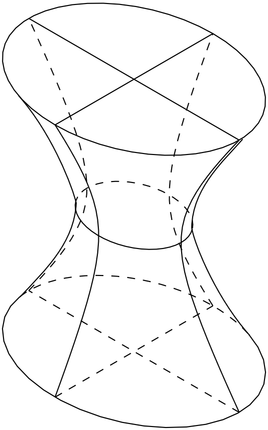
因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

(3) 最后依次画出坐标轴即可.



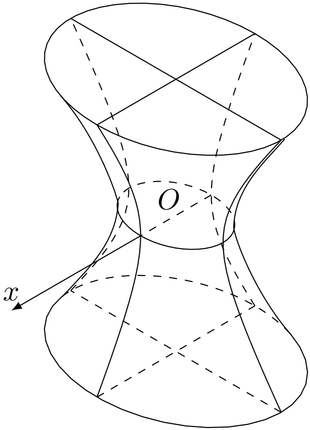
因此，单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的，这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行，且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆，上椭圆，下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

(3) 最后依次画出坐标轴即可.



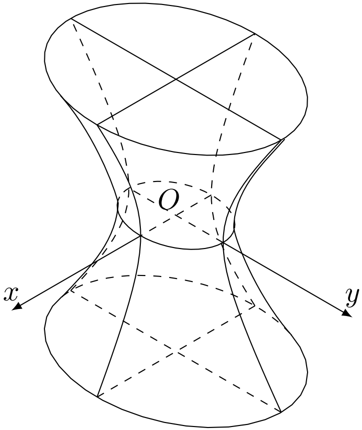
因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

(3) 最后依次画出坐标轴即可.



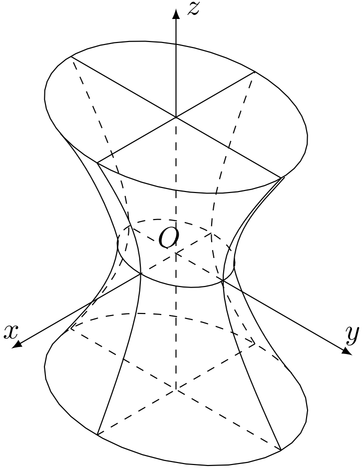
因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

(3) 最后依次画出坐标轴即可.



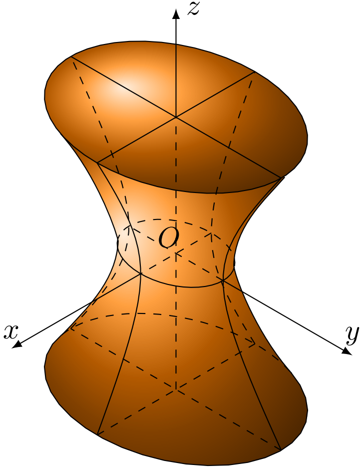
因此, 单叶双曲面可以看成是由一族与腰椭圆 C_1 相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行, 且两对顶点分别沿两个定双曲线 C_2, C_3 滑动.

由此可按以下步骤作出单叶双曲面的图形:

(1) 依次作出腰椭圆, 上椭圆, 下椭圆;

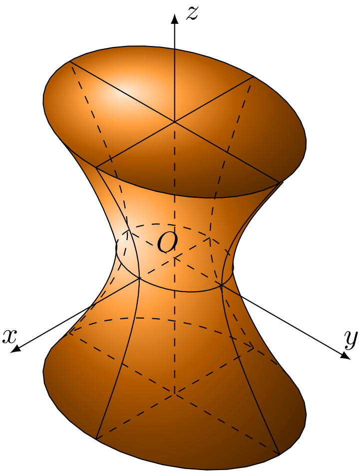
(2) 依次作出两条双曲线主截线及正面轮廓双曲线;

(3) 最后依次画出坐标轴即可.



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

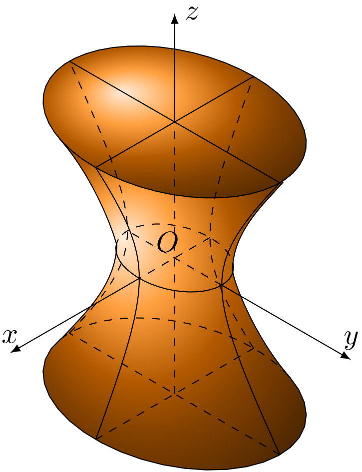
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}}$$

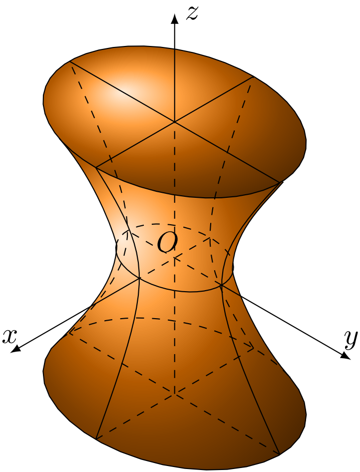
当 $|h|<b$ 时, 上面的截线为双曲线, 它的实轴平行于 x 轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

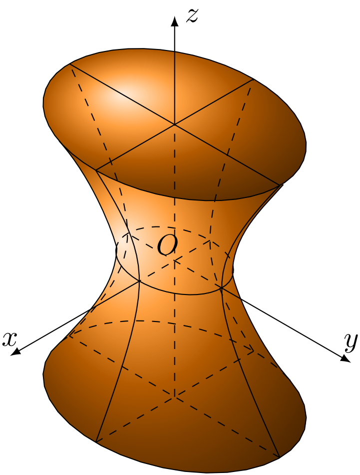
当 $|h|<b$ 时, 上面的截线为双曲线, 它的实轴平行于 x 轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 虚轴平行于 z 轴, 虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面，那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

当 $|h|<b$ 时，上面的截线为双曲线，它的实轴平行于 x 轴，实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$，虚轴平行于 z 轴，虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$，且该双曲线的顶点 $(\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2},h,0)$ 在腰椭圆



$$C_1:\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}}$$

上.

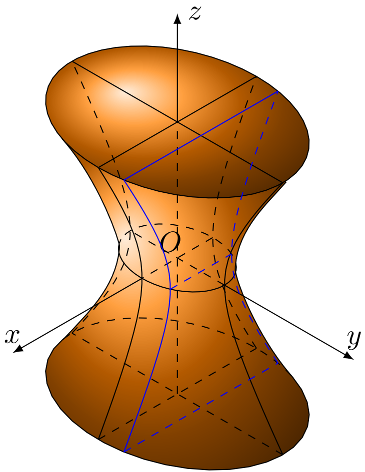
如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

当 $|h|<b$ 时, 上面的截线为双曲线, 它的实轴平行于 x 轴, 实半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 虚轴平行于 z 轴, 虚半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$, 且该双曲线的顶点 $(\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2},h,0)$ 在腰椭圆

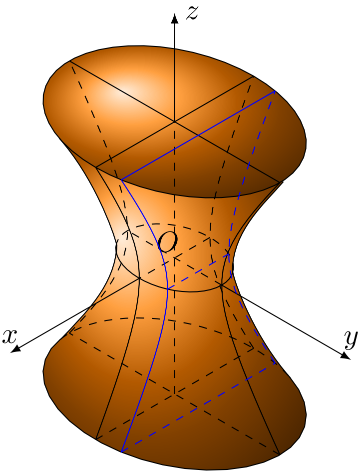
$$C_1:\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}}$$

上.



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

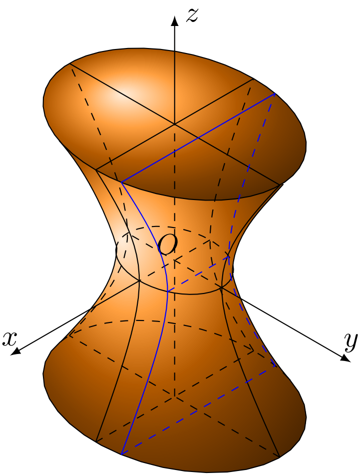
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面，那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

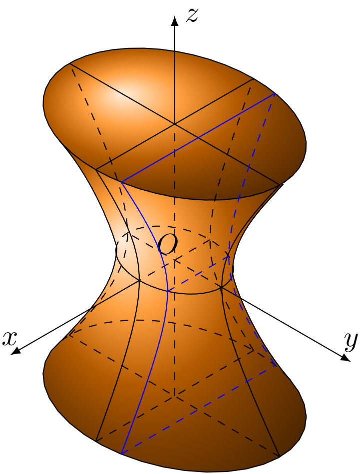
当 $|h|>b$ 时，截线仍为双曲线，但它的实轴平行于 z 轴，实半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

当 $|h|>b$ 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,



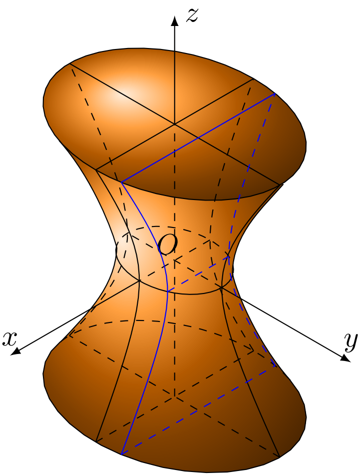
如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$$

当 $|h|>b$ 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 而且它的顶点 $(0,h,\pm\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2})$ 在双曲线

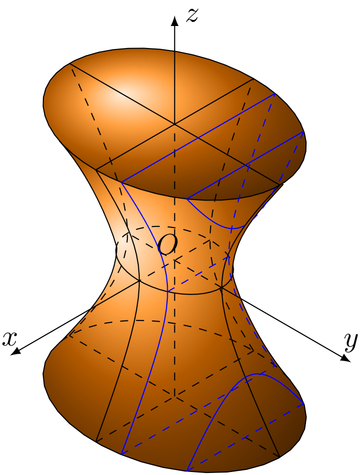
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

上.



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$$



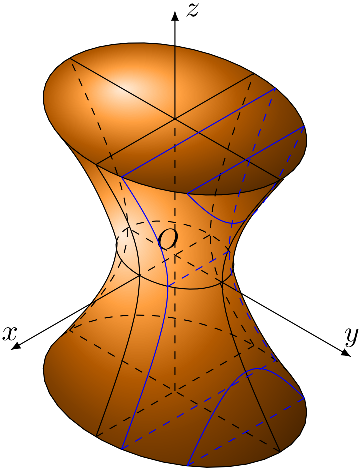
当 $|h|>b$ 时, 截线仍为双曲线, 但它的实轴平行于 z 轴, 实半轴长为 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$, 而且它的顶点 $(0,h,\pm\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2})$ 在双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

上.

如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

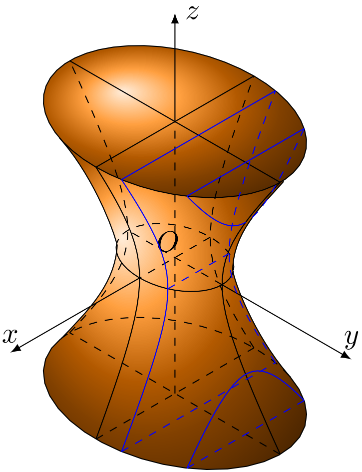


如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$

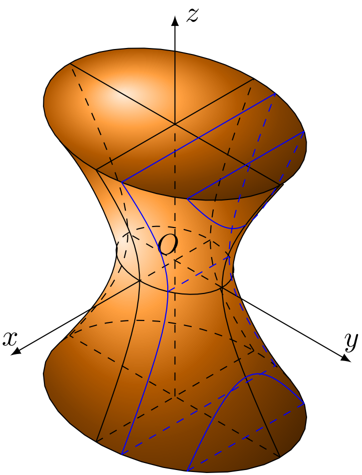
当 $|h|=b$ 时, 截线方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$



如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$



当 $|h|=b$ 时, 截线方程变为

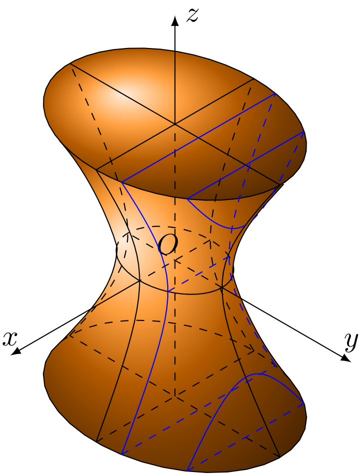
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

这是两条直线

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$



当 $|h|=b$时, 截线方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

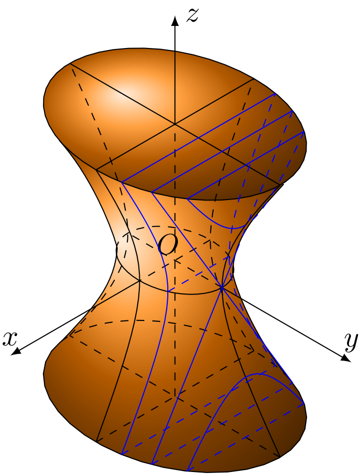
这是两条直线

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

交点是 $(0,b,0)$ 或 $(0,-b,0)$.

如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面, 那么截线的方程为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}}$$



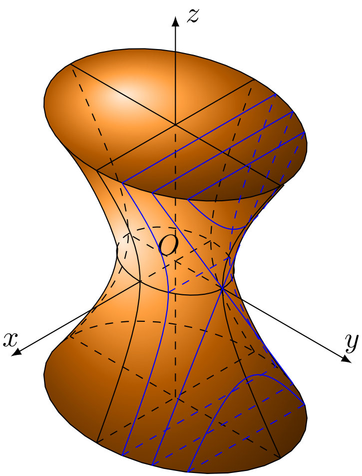
当 $|h|=b$时, 截线方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

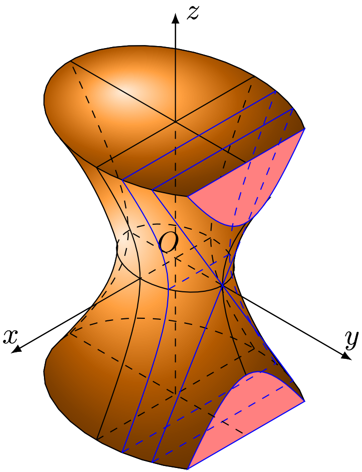
这是两条直线

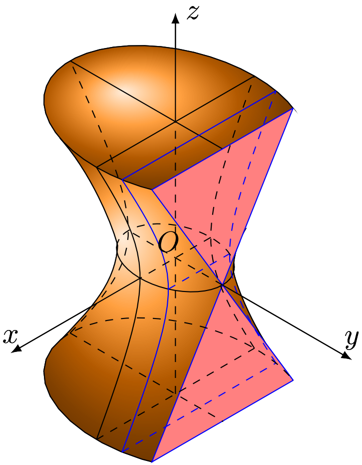
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0, \\ y=-b. \end{cases}$$

交点是 $(0,b,0)$ 或 $(0,-b,0)$.

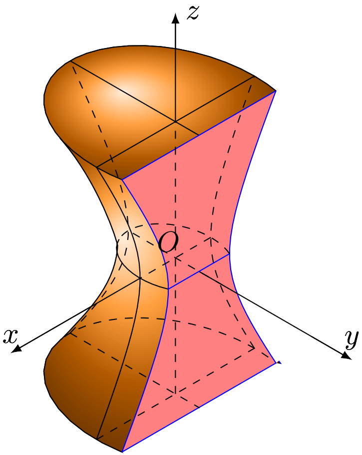


z
O
x
y


z
O
x
y



z
O
x
y


z
O
x
y

若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似.

若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似. 在单叶双曲面的方程中, 如果 $a=b$, 那么它就成为单叶旋转双曲面

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

若用平行于 yOz 的平面截割单叶双曲面 $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$, 那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得的结果完全类似. 在单叶双曲面的方程中, 如果 $a=b$, 那么它就成为单叶旋转双曲面

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

另外, 以下方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \text{ 或 } \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

所表示的图形, 也都是单叶双曲面.

❒ 双叶双曲面

❐ 双叶双曲面

☞ 双叶双曲面的定义

❒ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面，

❒ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面，上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程，其中 a, b, c 是任意的正常数.

❐ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面, 上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程, 其中 a, b, c 是任意的正常数.

☞ **双叶双曲面的简单性质**

❒ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做**双叶双曲面**，上面的方程叫做双叶双曲面的**标准方程**，其中 a, b, c 是任意的正常数.

☞ **双叶双曲面的简单性质** 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项，因此该曲面关于三个坐标平面，三坐标轴以及坐标原点都对称，

❐ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下，由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面，上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程，其中 a, b, c 是任意的正常数.

☞ **双叶双曲面的简单性质** 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项，因此该曲面关于三个坐标平面，三坐标轴以及坐标原点都对称，而且曲面与 x 轴，y 轴都不相交，只与 z 轴交于两点 $(0, 0, \pm c)$,

❐ 双叶双曲面

☞ **双叶双曲面的定义** 在直角坐标系下, 由方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面, 上面的方程叫做双叶双曲面的标准方程, 其中 a, b, c 是任意的正常数.

☞ **双叶双曲面的简单性质** 因为双叶双曲面的方程仅含有坐标的平方项, 因此该曲面关于三个坐标平面, 三坐标轴以及坐标原点都对称, 而且曲面与 x 轴, y 轴都不相交, 只与 z 轴交于两点 $(0, 0, \pm c)$, 这两点叫做双叶双曲面的顶点.

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$.

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

从方程容易知道，曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$，因此曲面分成两叶：$z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z = 0$ 与曲面不相交，其他两个坐标平面 $y = 0$ 与 $x = 0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}}$$

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{array}\right.} \quad \text{与} \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0. \end{array}\right.}$$

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ 双叶双曲面的形状

从方程容易知道，曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$，因此曲面分成两叶：$z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交，其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \geq c)$ 截双叶双曲面，得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}}$$

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \geq c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}}$$

当 $|h| = c$ 时, 截得的图形为一点;

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z = 0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y = 0$ 与 $x = 0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \geq c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}}$$

当 $|h| = c$ 时, 截得的图形为一点; 当 $|h| > c$ 时, 截线为椭圆, 它的两半轴为

从方程容易知道, 曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$, 因此曲面分成两叶: $z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z = 0$ 与曲面不相交, 其他两个坐标平面 $y = 0$ 与 $x = 0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z = h(|h| \geq c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}}$$

当 $|h| = c$ 时, 截得的图形为一点; 当 $|h| > c$ 时, 截线为椭圆, 它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

从方程容易知道，曲面上的点恒有 $z^2 \geq c^2$，因此曲面分成两叶：$z \geq c$ 与 $z \leq -c$. 坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交，其他两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}} \quad 与 \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}}$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h| \geq c)$ 截双叶双曲面，得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}}$$

当 $|h|=c$ 时，截得的图形为一点；当 $|h|>c$ 时，截线为椭圆，它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ 与 } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases}}$$

当 $|h|=c$ 时, 截得的图形为一点; 当 $|h|>c$ 时, 截线为椭圆, 它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ 与 } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, 0, h\right)$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双曲面，得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases}}$$

当 $|h|=c$ 时，截得的图形为一点；当 $|h|>c$ 时，截线为椭圆，它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ 与 } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, 0, h\right) \text{ 与 } \left(0, \pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, h\right)$$

☞ **双叶双曲面的形状** 用平行于 xOy 的平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截双叶双曲面, 得截线方程

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases}}$$

当 $|h|=c$ 时, 截得的图形为一点; 当 $|h|>c$ 时, 截线为椭圆, 它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ 与 } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, 0, h\right) \text{ 与 } \left(0, \pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases}}$$

当 $|h|=c$ 时，截得的图形为一点；当 $|h|>c$ 时，截线为椭圆，它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ 与 } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, 0, h\right) \text{ 与 } \left(0, \pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases}} \text{ 与 } C_3 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$$

上.

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right) \text{ 与 } \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

分别在双曲线

$$C_2: \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases}} \text{ 与 } C_3: \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$$

上. 因此, 双叶双曲面可看成由一族相似的椭圆的变动而产生的,

此时椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$ 的两轴端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, 0, h\right) \text{ 与 } \left(0, \pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, h\right)$$

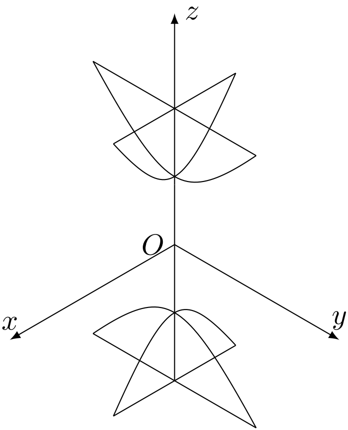
分别在双曲线

$$C_2 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases}} \text{ 与 } C_3 : \boxed{\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}}$$

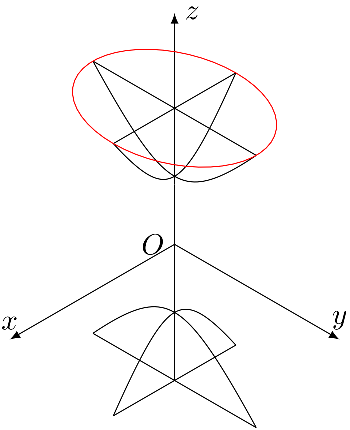
上. 因此, 双叶双曲面可看成由一族相似的椭圆的变动而产生的, 这族椭圆在变动中, 保持所在的平面平行于 xOy 面, 且两轴的端点分别沿着双曲线 C_2, C_3 滑动.

根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.

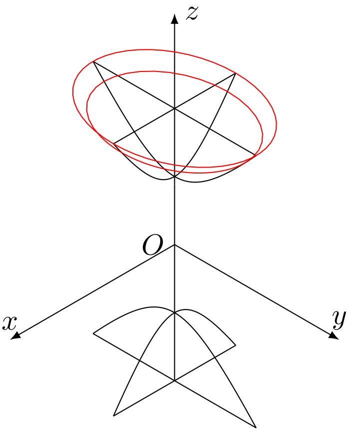
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



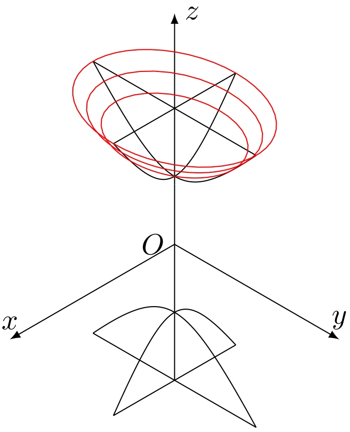
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



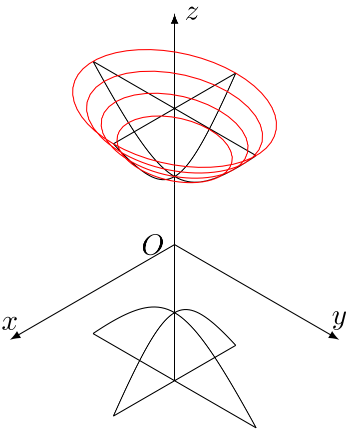
根据以上讨论，容易画出双叶双曲面的图形.



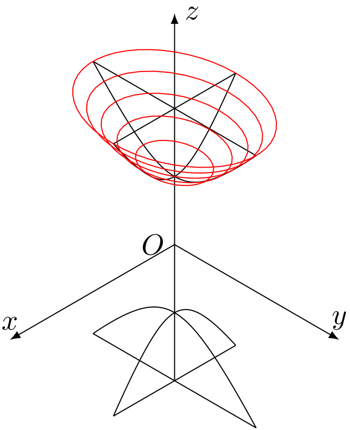
根据以上讨论，容易画出双叶双曲面的图形.



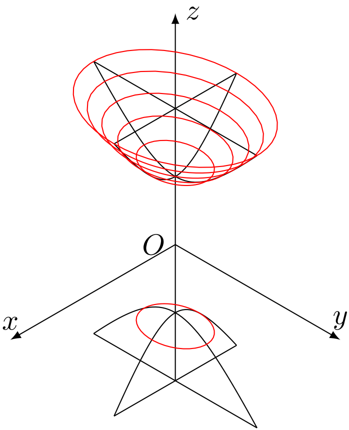
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



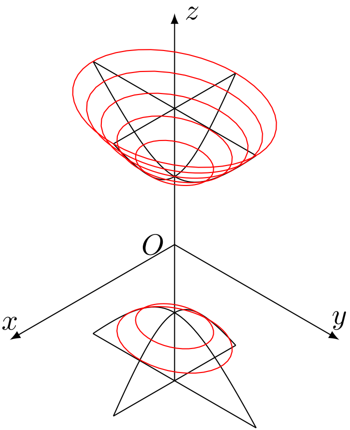
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



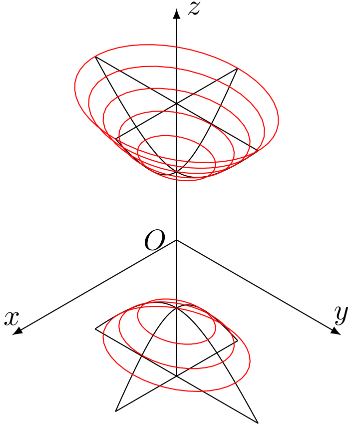
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



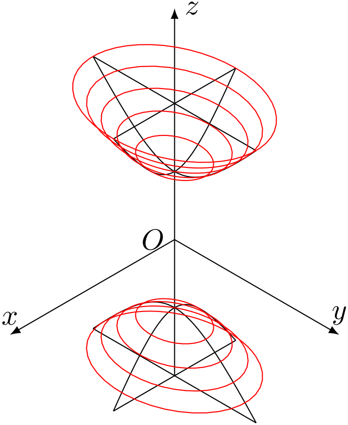
根据以上讨论，容易画出双叶双曲面的图形.



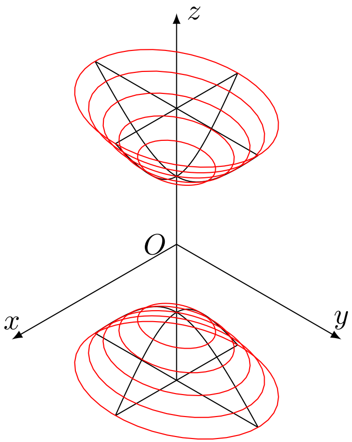
根据以上讨论，容易画出双叶双曲面的图形.



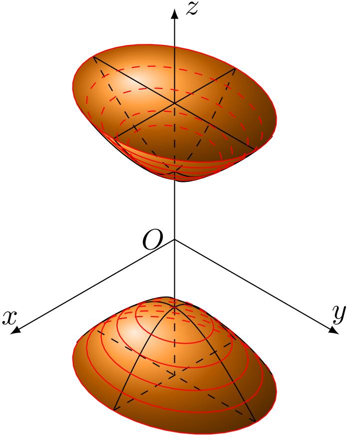
根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



根据以上讨论, 容易画出双叶双曲面的图形.



在方程 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1}$ 中, 如果 $a=b$, 那么这时截线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$$

为一圆,

在方程 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1}$ 中, 如果 $a=b$, 那么这时截线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$$

为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面.

在方程 $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$ 中, 如果 $a=b$, 那么这时截线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$$

为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面. 另外, 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1} \text{ 与 } \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的图形, 也都是双叶双曲面.

在方程 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1}$ 中, 如果 $a=b$, 那么这时截线

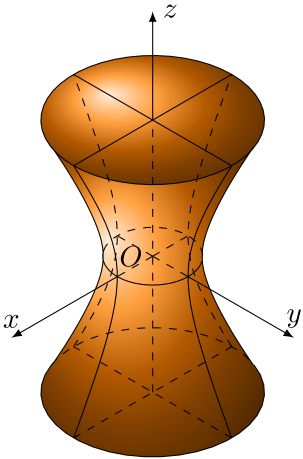
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$$

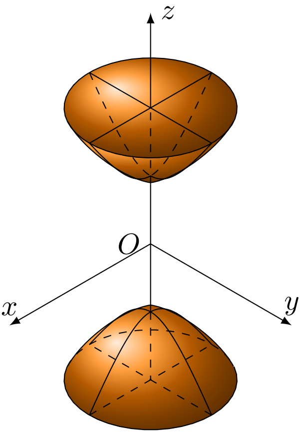
为一圆, 此时该曲面就是一个双叶旋转双曲面. 另外, 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1} \text{ 与 } \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

所表示的图形, 也都是双叶双曲面. 单叶双曲面和双叶双曲面统称为双曲面.

旋转双曲面





☞ 双曲面的参数方程

☞ **双曲面的参数方程** 容易验证, 单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为

$$\boxed{\begin{cases} x = a\sec u\cos v, \\ y = b\sec u\sin v, \\ z = c\tan u \end{cases}}$$

☞ **双曲面的参数方程** 容易验证, 单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为

$$\boxed{\begin{cases} x = a\sec u\cos v, \\ y = b\sec u\sin v, \\ z = c\tan u \end{cases}}$$

与

$$\boxed{\begin{cases} x = a\tan u\cos v, \\ y = b\tan u\sin v, \\ z = c\sec u. \end{cases}}$$

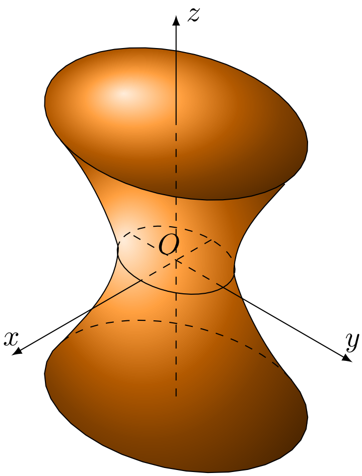
☞ 渐近锥面

☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=$

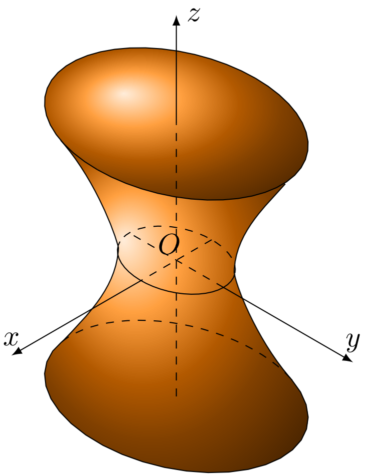
1、

☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=$

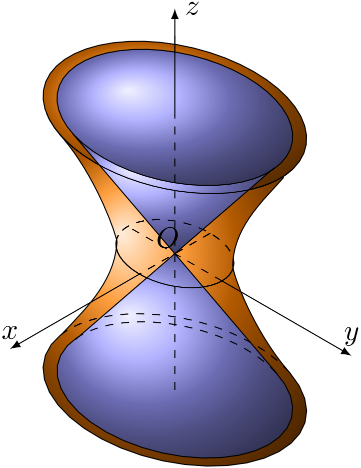
1、



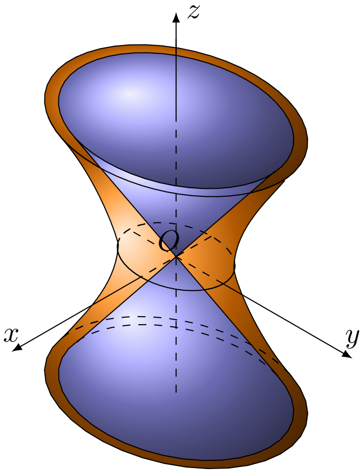
☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$



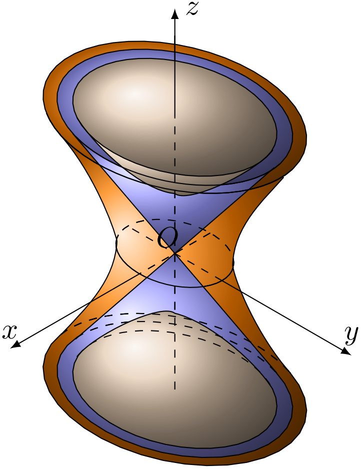
☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$



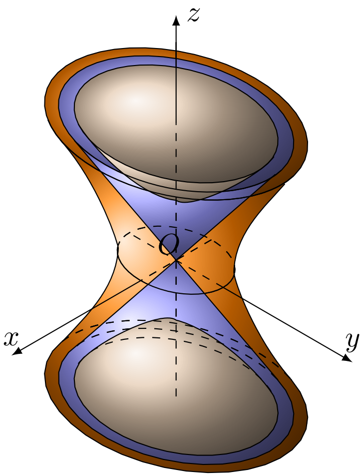
渐近锥面 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$、 $\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 0$ 与 $\Sigma_{-1} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = -1$



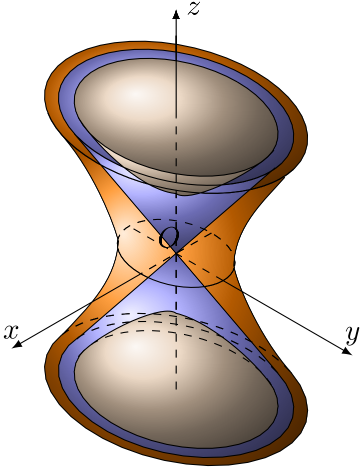
☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$、$\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



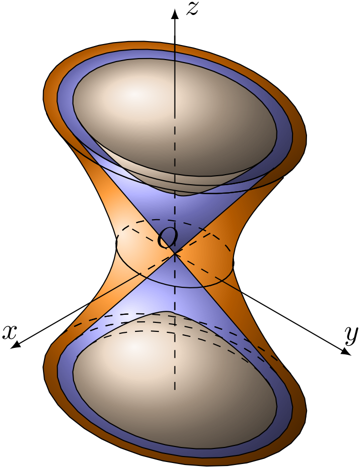
☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 分别是单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面,



☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 分别是单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面，它们与 $z=h(h>c)$ 的截线是相似椭圆

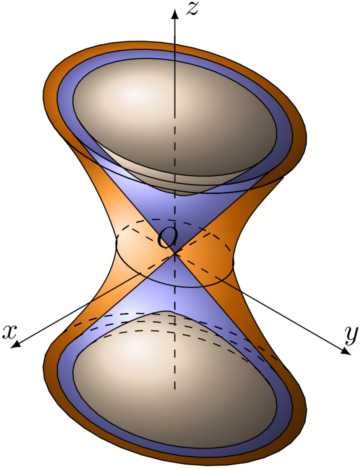


渐近锥面 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 分别是单叶双曲面、 锥面及双叶双曲面，它们与 $z=h(h>c)$ 的截线是相似椭圆 $C_1 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$



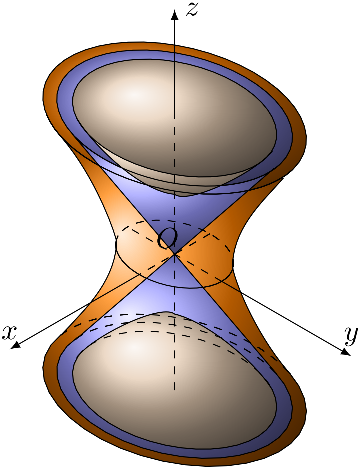
☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 分别是单叶双曲面、锥面及双叶双曲面，它们与 $z=h(h>c)$ 的截线是相似椭圆 $C_1 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$

$$C_0 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$$

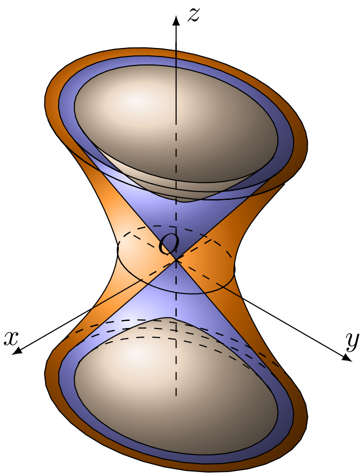


☞ **渐近锥面** 曲面 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$、 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 $\Sigma_{-1}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 分别是单叶双曲面、锥面及双叶双曲面，它们与 $z=h(h>c)$ 的截线是相似椭圆 $C_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$

$C_0: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$ 及 $C_{-1}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases}$



显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间，C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

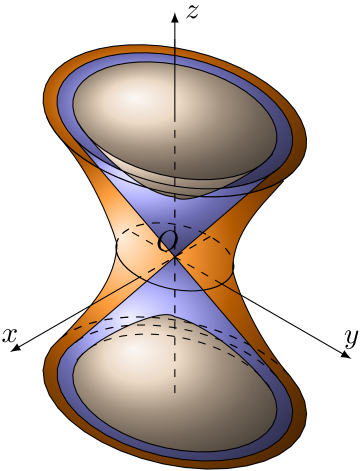


它们与 $z = h(h > c)$ 的截线是相似椭圆 C_1 : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$

C_0 : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$ 及 C_{-1} : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$

显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间, C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$



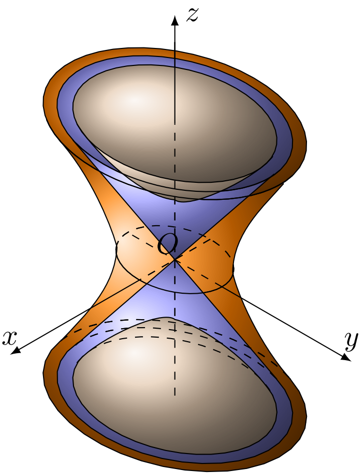
它们与 $z=h(h>c)$ 的截线是相似椭圆 C_1 : $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$

C_0 : $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$ 及 C_{-1} : $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$

显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间, C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

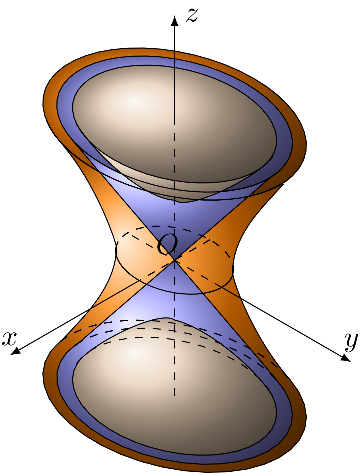
$$=\frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}+\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}}$$



显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间, C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}+\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}}\to 0(h\to\infty).$$

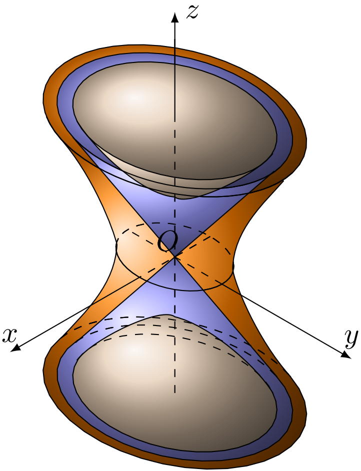


显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间, C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}+\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}}\to 0(h\to\infty).$$

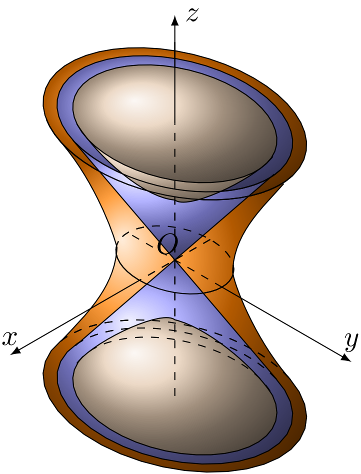
同理当 $h\to\infty$ 时, C_1 与 C_{-1} 的平行于 y 轴的两半轴之差也趋向于零.



显然 C_0 在 C_1 与 C_{-1} 之间, C_1 与 C_{-1} 的平行于 x 轴的两半轴之差

$$a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}-\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}+\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}}\to 0(h\to\infty).$$



同理当 $h\to\infty$ 时, C_1 与 C_{-1} 的平行于 y 轴的两半轴之差也趋向于零. 锥面 Σ_0 称为双曲面 $\Sigma_{\pm 1}$ 的渐近锥面.

例

用一组平行平面$z=h$(h为任意实数)截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a>b)$得到一族椭圆, 求这些椭圆焦点的轨迹.

例

用一组平行平面$z=h$(h为任意实数)截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a>b)$得到一族椭圆，求这些椭圆焦点的轨迹.

解 这一族椭圆的方程为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$

例

用一组平行平面$z=h$(h为任意实数)截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a>b)$得到一族椭圆，求这些椭圆焦点的轨迹.

解 这一族椭圆的方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

因为 $a > b$, 所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$,

解 这一族椭圆的方程为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

因为 $a > b$, 所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 短半轴为 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$,

解 这一族椭圆的方程为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

因为 $a>b$, 所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 短半轴为 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 从而椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y=0, \\ z=h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

因为 $a>b$, 所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 短半轴为 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 从而椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y=0, \\ z=h. \end{cases}$$

消去参数 h 得

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases}}$$

因为 $a > b$, 所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 短半轴为 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, 从而椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

消去参数 h 得

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}}$$

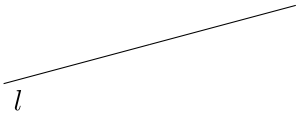
显然这族椭圆焦点的轨迹是一条在坐标面 xOz 上的双曲线, 双曲线的实轴为 x 轴, 虚轴为 z 轴.

✍习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，

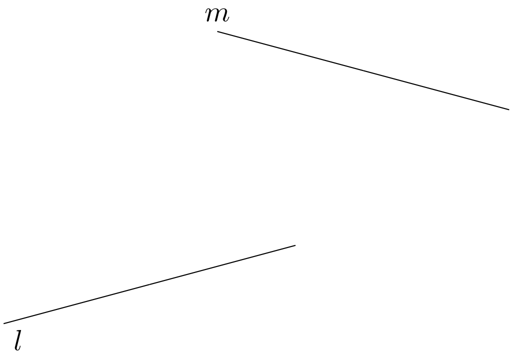
习题讲解：P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点,



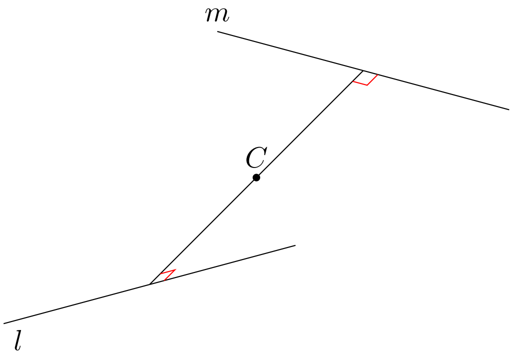
习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，



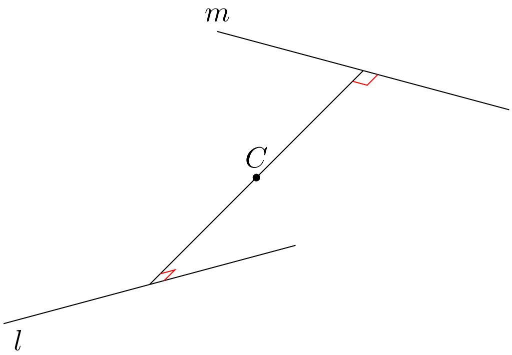
✍习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，



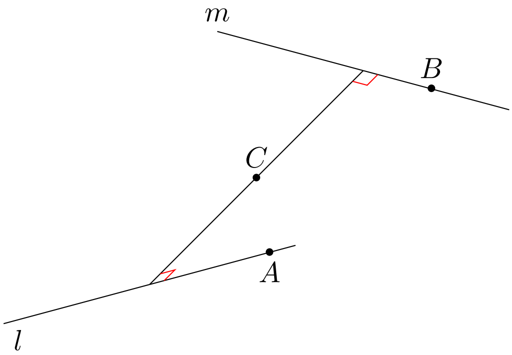
习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$.



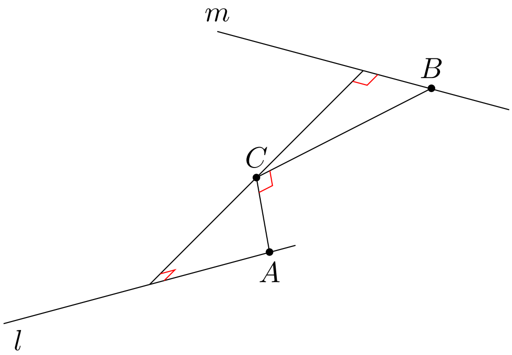
习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$.



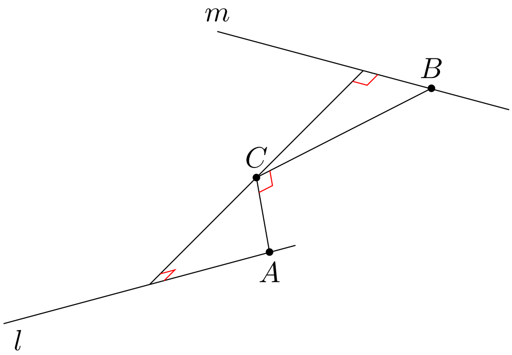
习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$.



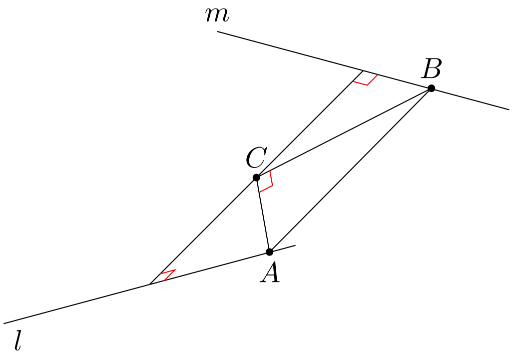
习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB = 90^\circ$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.



习题讲解：P 168，习题 6

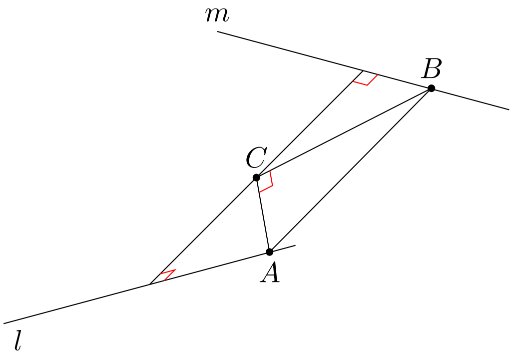
设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.



习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

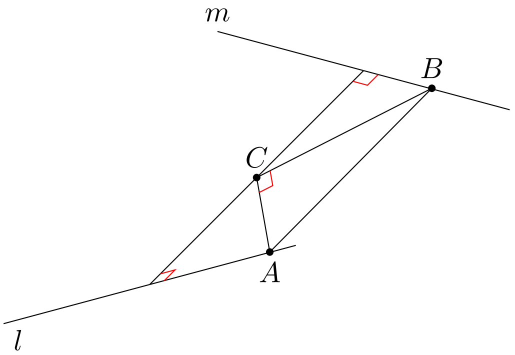


习题讲解：P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点,

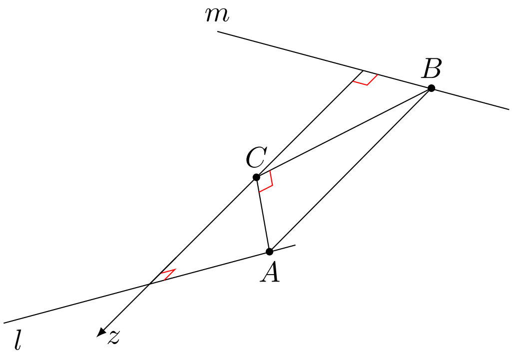


✍习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点,

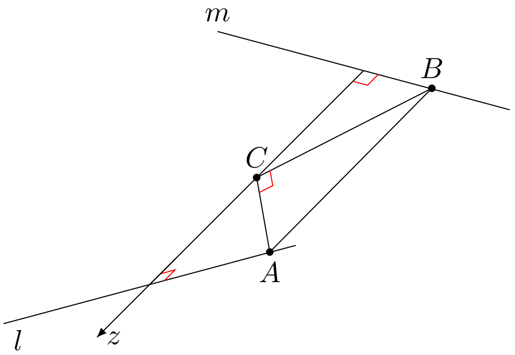


习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角.

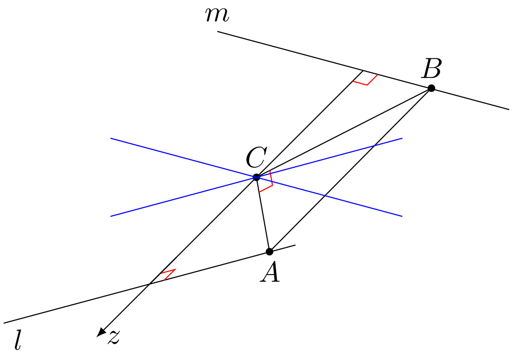


习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程，要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴，公垂线中点 C 为坐标原点，x 轴与两异面直线成相等的角.

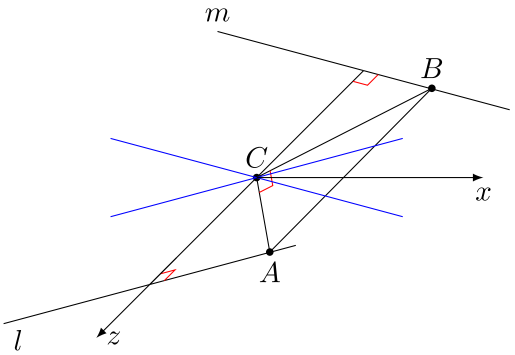


✍习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角.

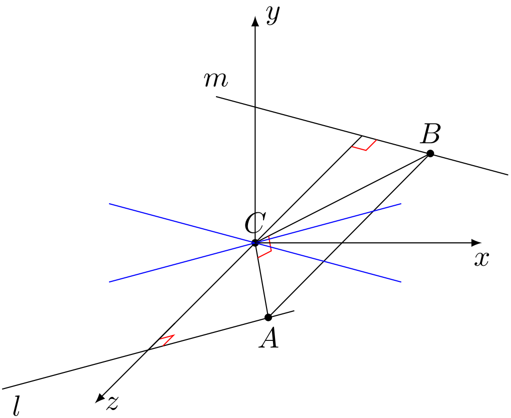


✍习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析：解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程，要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴，公垂线中点 C 为坐标原点，x 轴与两异面直线成相等的角.

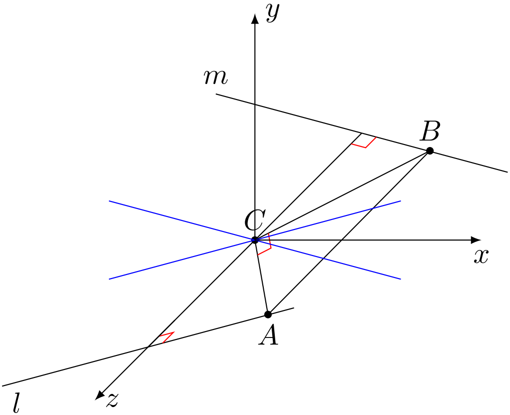


习题讲解：P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

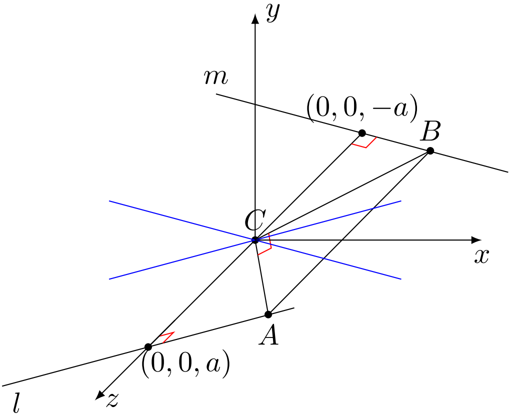
证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha \neq 90°$.



习题讲解：P 168，习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是它们公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析：解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程，要选取坐标系使其具有最大的对称性.



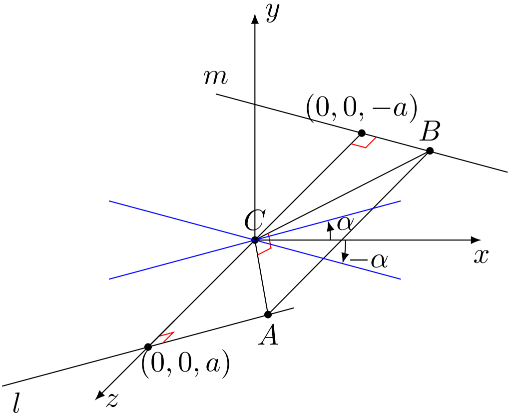
证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴，公垂线中点 C 为坐标原点，x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$，交角 $2\alpha \neq 90°$.

习题讲解：P 168, 习题 6

设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线, C 是它们公垂线的中点, A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动,且 $\angle ACB = 90°$. 试证明直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

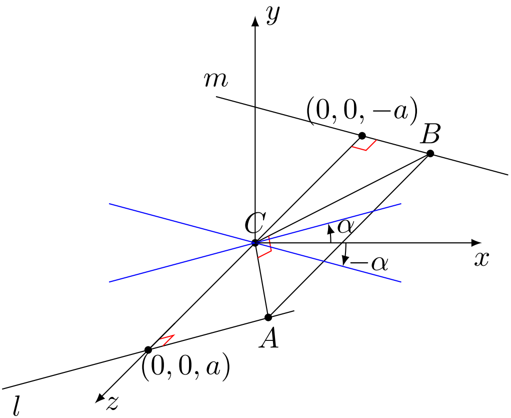
证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha \neq 90°$.



$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases}$$

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

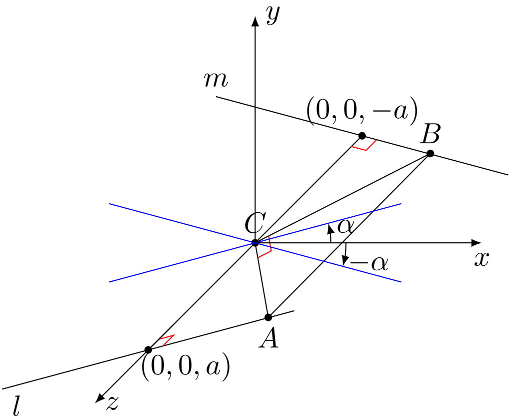
证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha \neq 90°$. 则



$$l:\begin{cases} x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\\ z=a,\end{cases}\qquad m:\begin{cases} x=t\cos\alpha,\\ y=-t\sin\alpha,\\ z=-a.\end{cases}$$

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha\neq 90^\circ$. 则

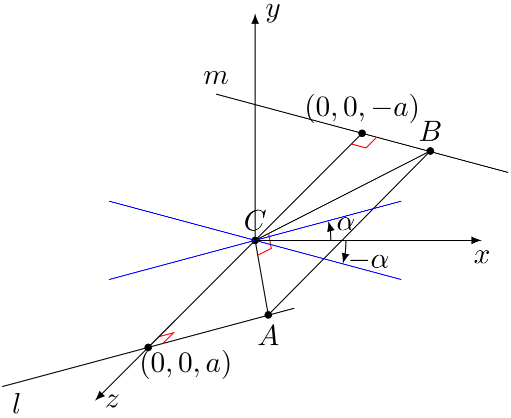


$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$.

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha \neq 90°$. 则

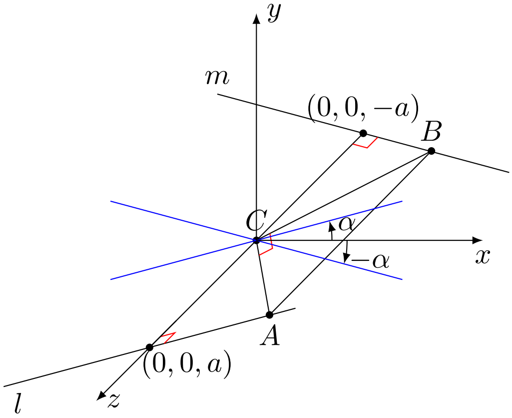


$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

分析: 解本题坐标系选择是关键. 为使得到的轨迹方程是标准方程, 要选取坐标系使其具有最大的对称性.

证 取 l, m 公垂线所在直线为 z 轴, 公垂线中点 C 为坐标原点, x 轴与两异面直线成相等的角. 再设 l, m 间的距离为 $2a$, 交角 $2\alpha \neq 90°$. 则



$$l:\begin{cases} x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\\ z=a,\end{cases}\qquad m:\begin{cases} x=t\cos\alpha,\\ y=-t\sin\alpha,\\ z=-a.\end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha,t_1\sin\alpha,a),B(t_2\cos\alpha,-t_2\sin\alpha,-a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha-t_1t_2\sin^2\alpha-a^2=0.$$

$$l:\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha, \\ z=a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=-t\sin\alpha, \\ z=-a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha\neq 90^\circ$, 所以 $\cos 2\alpha\neq 0$,

$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90°$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90^\circ$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$l:\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha, \\ z=a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=-t\sin\alpha, \\ z=-a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90°$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ \end{cases} \qquad (**)$$

$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90°$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha\cdot u, \end{cases} \qquad (**)$$

$$l:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \\ z = a, \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -t\sin\alpha, \\ z = -a. \end{cases}$$

设 $A(t_1\cos\alpha, t_1\sin\alpha, a), B(t_2\cos\alpha, -t_2\sin\alpha, -a)$. 由 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ 得

$$t_1t_2\cos^2\alpha - t_1t_2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

因为 $2\alpha \neq 90°$, 所以 $\cos 2\alpha \neq 0$, 从而

$$t_1t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha\cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*),(**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u,$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \tag{$**$}$$

由 $(*),(**)$ 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha}=t_1+(t_2-t_1)u,\quad \frac{y}{\sin\alpha}=t_1-(t_1+t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=t_1(2-2u),$$

$$t_1t_2=\frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1\cos\alpha+(t_2-t_1)\cos\alpha\cdot u,\\ y=t_1\sin\alpha-(t_1+t_2)\sin\alpha\cdot u,\\ z=a-2au, \end{cases} \tag{$**$}$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u,$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \tag{$**$}$$

由 $(*),(**)$ 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha}=t_1+(t_2-t_1)u,\quad \frac{y}{\sin\alpha}=t_1-(t_1+t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=t_1(2-2u),\quad \frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}=t_2\cdot 2u,\quad 1-\frac{z}{a}=2u,$$

$$t_1t_2=\frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1\cos\alpha+(t_2-t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y=t_1\sin\alpha-(t_1+t_2)\sin\alpha\cdot u, \\ z=a-2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \tag{$**$}$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \tag{$**$}$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha}$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*),(**)$ 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha}=t_1+(t_2-t_1)u,\quad \frac{y}{\sin\alpha}=t_1-(t_1+t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=t_1(2-2u),\quad \frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}=t_2\cdot 2u,\quad 1-\frac{z}{a}=2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=t_1t_2\cdot 2u\cdot(2-2u)$$

$$=\frac{a^2}{\cos 2\alpha}\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

$$t_1t_2=\frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1\cos\alpha+(t_2-t_1)\cos\alpha\cdot u,\\ y=t_1\sin\alpha-(t_1+t_2)\sin\alpha\cdot u,\\ z=a-2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x}{\cos\alpha} = t_1 + (t_2 - t_1)u, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = t_1 - (t_1 + t_2)u,$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = t_1(2 - 2u), \quad \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = t_2 \cdot 2u, \quad 1 - \frac{z}{a} = 2u,$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha}\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 + \frac{z}{a}\right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1 \sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = t_1 t_2 \cdot 2u \cdot (2 - 2u)$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\alpha}\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 + \frac{z}{a}\right)$$

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*), (**)$ 消去 u, t_1, t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

它是一个单叶双曲面.

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad (*)$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha \cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_1 + t_2)\sin\alpha \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \qquad (**)$$

由 $(*),(**)$ 消去 u,t_1,t_2 得直线 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}}-\frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

它是一个单叶双曲面.

下一节

$$t_1t_2=\frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \tag{$*$}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1\cos\alpha+(t_2-t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y=t_1\sin\alpha-(t_1+t_2)\sin\alpha\cdot u, \\ z=a-2au, \end{cases} \tag{$**$}$$