第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

内容提要与典型例题

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

本章内容提要

本章内容提要

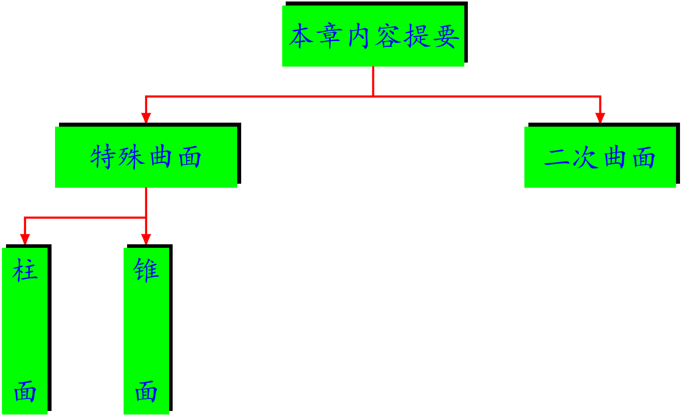
特殊曲面

本章内容提要

- 特殊曲面
- 二次曲面

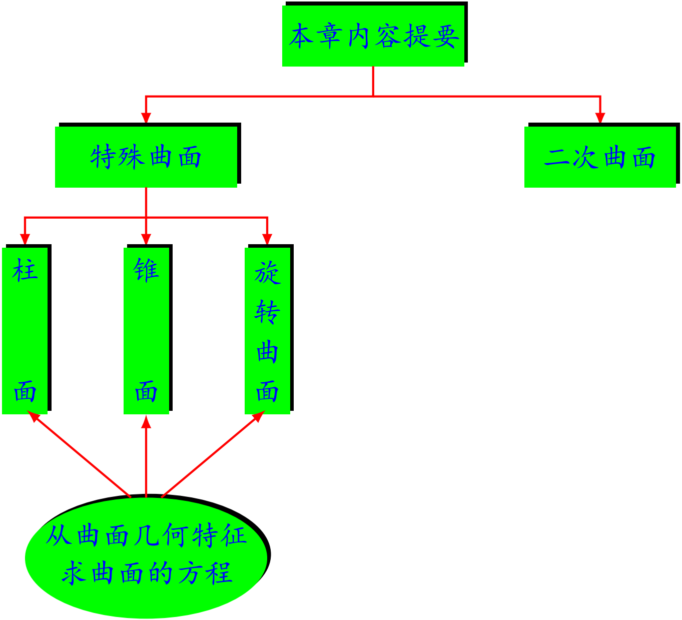
本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
- 二次曲面


本章内容提要
特殊曲面
二次曲面
柱面
锥面

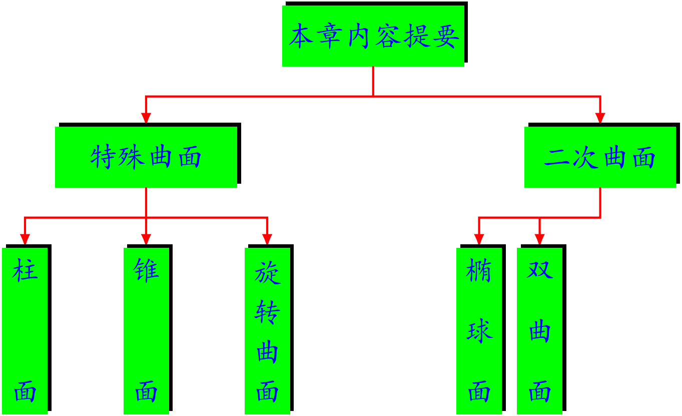
本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面


本章内容提要
特殊曲面
二次曲面
柱面
锥面
旋转曲面
从曲面几何特征求曲面的方程

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面


本章内容提要
特殊曲面
二次曲面
柱面
锥面
旋转曲面
椭球面
双曲面

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 双曲面
  - 抛物面

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 双曲面
  - 抛物面
  - 空间作图

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 双曲面
  - 抛物面
  - 空间作图
  - 直纹曲面

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 双曲面
  - 抛物面
  - 空间作图
  - 直纹曲面

用平行截线法研究曲面的形状

本章内容提要

- 特殊曲面
  - 柱面
  - 锥面
  - 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 双曲面
  - 抛物面
  - 空间作图
  - 直纹曲面

单叶双曲面与双曲抛物面上的直母线

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求柱面上任一点,

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求柱面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求柱面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 得

$$(x_0+t)^2+2(y_0+t)^2+3(z_0-t)^2=4$$

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求柱面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 得

$$(x_0+t)^2 + 2(y_0+t)^2 + 3(z_0-t)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad 6t^2 + 2[x_0+2y_0-3z_0]t + x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 - 4 = 0$$

例 1

已知一柱面母线方向是 $\{1,1,-1\}$, 且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 相切, 求它的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求柱面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t, \\ y=y_0+t, \\ z=z_0-t. \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 得

$$(x_0+t)^2+2(y_0+t)^2+3(z_0-t)^2=4$$

$$\Rightarrow \quad 6t^2+2[x_0+2y_0-3z_0]t+x_0^2+2y_0^2+3z_0^2-4=0$$

$$\Rightarrow \quad \varDelta=(x_0+2y_0-3z_0)^2-6\left(x_0^2+2y_0^2+3z_0^2-4\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 5x_0^2 + 8y_0^2 + 9z_0^2 - 4x_0y_0 + 6x_0z_0 + 12y_0z_0 - 24 = 0.$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ 得

$$(x_0 + t)^2 + 2(y_0 + t)^2 + 3(z_0 - t)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad 6t^2 + 2[x_0 + 2y_0 - 3z_0]t + x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = (x_0 + 2y_0 - 3z_0)^2 - 6\left(x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 - 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x_0^2+8y_0^2+9z_0^2-4x_0y_0+6x_0z_0+12y_0z_0-24=0.$$

所以所求柱面方程是

$$5x^2+8y^2+9z^2-4xy+6xz+12yz-24=0.$$

$$\begin{cases} x=x_0+t, \\ y=y_0+t, \\ z=z_0-t. \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=4$ 得

$$(x_0+t)^2+2(y_0+t)^2+3(z_0-t)^2=4$$

$$\Rightarrow \quad 6t^2+2[x_0+2y_0-3z_0]t+x_0^2+2y_0^2+3z_0^2-4=0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=(x_0+2y_0-3z_0)^2-6\left(x_0^2+2y_0^2+3z_0^2-4\right)=0$$

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$, 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$, 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求圆锥面上任一点,

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$, 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求圆锥面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+(x_0-1)t, \\ y=2+(y_0-2)t, \\ z=-2+(z_0+2)t. \end{cases}$$

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$, 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求圆锥面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+(x_0-1)t, \\ y=2+(y_0-2)t, \\ z=-2+(z_0+2)t. \end{cases}$$

将其代入球面方程得

$$[1+(x_0-1)t]^2+[2+(y_0-2)t]^2+[-2+(z_0+2)t]^2=1$$

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$，且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求圆锥面上任一点，则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+(x_0-1)t, \\ y=2+(y_0-2)t, \\ z=-2+(z_0+2)t. \end{cases}$$

将其代入球面方程得

$$[1+(x_0-1)t]^2+[2+(y_0-2)t]^2+[-2+(z_0+2)t]^2=1$$

$$\Rightarrow [(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]t^2+2[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]t+8=0$$

例 2

求顶点在 $(1,2,-2)$, 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面的方程.

解 令 (x_0,y_0,z_0) 为所求圆锥面上任一点, 则过此点直母线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1+(x_0-1)t, \\ y = 2+(y_0-2)t, \\ z = -2+(z_0+2)t. \end{cases}$$

将其代入球面方程得

$$[1+(x_0-1)t]^2+[2+(y_0-2)t]^2+[-2+(z_0+2)t]^2=1$$

$$\Rightarrow [(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]t^2+2[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]t+8=0$$

$$\Rightarrow \Delta = [(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]^2-8[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]=0$$

$$\Rightarrow \quad 7(x_0-1)^2+4(y_0-2)^2+4(z_0+2)^2$$
$$-4(x_0-1)(y_0-2)+4(x_0-1)(z_0+2)+8(y_0-2)(z_0+2)=0.$$

$$[1+(x_0-1)t]^2+[2+(y_0-2)t]^2+[-2+(z_0+2)t]^2=1$$

$$\Rightarrow [(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]t^2+2[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]t+8=0$$

$$\Rightarrow \Delta=[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]^2-8[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]=0$$

$$\Rightarrow \quad 7(x_0-1)^2+4(y_0-2)^2+4(z_0+2)^2$$

$$-4(x_0-1)(y_0-2)+4(x_0-1)(z_0+2)+8(y_0-2)(z_0+2)=0.$$

所以所求圆锥面方程是

$$7(x-1)^2+4(y-2)^2+4(z+2)^2$$

$$-4(x-1)(y-2)+4(x-1)(z+2)+8(y-2)(z+2)=0.$$

$$[1+(x_0-1)t]^2+[2+(y_0-2)t]^2+[-2+(z_0+2)t]^2=1$$

$$\Rightarrow [(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]t^2+2[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]t+8=0$$

$$\Rightarrow \Delta=[(x_0-1)+2(y_0-2)-2(z_0+2)]^2-8[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2]=0$$

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a,b,c 可能的值，讨论这是什么曲面？

例 3

将直线 $l:\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转, 求旋转曲面的方程, 并求 a,b,c 可能的值, 讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转, 求旋转曲面的方程, 并求 a, b, c 可能的值, 讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则有

$$x_1=a, \quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a, b, c 可能的值，讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则有

$$x_1 = a, \quad cy_1 - bz_1 = 0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ z = z_1. \end{cases} \tag{2}$$

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a, b, c 可能的值，讨论这是什么曲面？

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则有

$$x_1 = a, \quad cy_1 - bz_1 = 0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ z = z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c \neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

例 3

将直线 $l:\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a,b,c 可能的值，讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则有

$$x_1=a,\quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c\neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1,y_1,z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2}z^2=a^2.$$

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转, 求旋转曲面的方程, 并求 a, b, c 可能的值, 讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则有

$$x_1=a, \quad c y_1-b z_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c \neq 0$ 时, 从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2} z^2=a^2.$$

若 $ab \neq 0$, 这是旋转单叶双曲面;

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a, b, c 可能的值，讨论这是什么曲面?

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则有

$$x_1 = a, \quad cy_1 - bz_1 = 0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ z = z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c \neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c^2} z^2 = a^2.$$

若 $ab \neq 0$，这是旋转单叶双曲面；若 $a = 0, b \neq 0$，这是圆锥面;

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a, b, c 可能的值，讨论这是什么曲面？

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则有

$$x_1 = a, \quad cy_1 - bz_1 = 0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ z = z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c \neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c^2} z^2 = a^2.$$

若 $ab \neq 0$，这是旋转单叶双曲面；若 $a = 0, b \neq 0$，这是圆锥面；若 $a \neq 0$, $b = 0$，这是圆柱面；

例 3

将直线 $l: \dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的方程，并求 a, b, c 可能的值，讨论这是什么曲面？

解 直线 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则有

$$x_1=a, \quad c y_1-b z_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1.\end{array}\right. \tag{2}$$

当 $c \neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2} z^2=a^2.$$

若 $ab \neq 0$，这是旋转单叶双曲面；若 $a=0, b \neq 0$，这是圆锥面；若 $a \neq 0$, $b=0$，这是圆柱面；若 $a=b=0$，它是 z 轴.

当 $c=0$ 时，必有 $b\neq 0$，

$$x_1=a,\quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c\neq 0$ 时，从 (1), (2) 两式消去 x_1,y_1,z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2}z^2=a^2.$$

若 $ab\neq 0$，这是旋转单叶双曲面；若 $a=0,b\neq 0$，这是圆锥面；若 $a\neq 0$，$b=0$，这是圆柱面；若 $a=b=0$，它是 z 轴.

当 $c=0$ 时, 必有 $b\neq 0$, 此时从 (1),(2) 两式得

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+y_1^2, \\ z=0. \end{cases}$$

$$x_1=a, \quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c\neq 0$ 时, 从 (1), (2) 两式消去 x_1,y_1,z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2}z^2=a^2.$$

若 $ab\neq 0$, 这是旋转单叶双曲面; 若 $a=0, b\neq 0$, 这是圆锥面; 若 $a\neq 0$, $b=0$, 这是圆柱面; 若 $a=b=0$, 它是 z 轴.

当 $c=0$ 时, 必有 $b\neq 0$, 此时从 (1),(2) 两式得

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+y_1^2, \\ z=0. \end{cases}$$

若 $a=0$, 它是坐标平面 $z=0$;

$$x_1=a, \quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c\neq 0$ 时, 从 (1), (2) 两式消去 x_1,y_1,z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2}z^2=a^2.$$

若 $ab\neq 0$, 这是旋转单叶双曲面; 若 $a=0,b\neq 0$, 这是圆锥面; 若 $a\neq 0$, $b=0$, 这是圆柱面; 若 $a=b=0$, 它是 z 轴.

当 $c=0$ 时, 必有 $b\neq 0$, 此时从 (1),(2) 两式得

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+y_1^2, \\ z=0. \end{cases}$$

若 $a=0$, 它是坐标平面 $z=0$; 若 $a\neq 0$, 它表示坐标平面 $z=0$ 挖去一开圆盘 $x^2+y^2<a^2$.

$$x_1=a, \quad cy_1-bz_1=0. \tag{1}$$

过 M_1 的纬圆是

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \\ z=z_1. \end{cases} \tag{2}$$

当 $c\neq 0$ 时, 从 (1), (2) 两式消去 x_1, y_1, z_1 即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{c^2}z^2=a^2.$$

若 $ab\neq 0$, 这是旋转单叶双曲面; 若 $a=0, b\neq 0$, 这是圆锥面; 若 $a\neq 0$, $b=0$, 这是圆柱面; 若 $a=b=0$, 它是 z 轴.

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面,

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面, 则存在一点 (x_0,y_0,z_0), 使该点处的切平面 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合,

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面, 则存在一点 (x_0,y_0,z_0), 使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合, 即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k}$$

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面, 则存在一点 (x_0,y_0,z_0), 使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合, 即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k} \quad \Rightarrow$$

$$x_0=\frac{a^2l}{k},\quad y_0=\frac{b^2m}{k},\quad z_0=\frac{c^2n}{k}$$

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面, 则存在一点 (x_0,y_0,z_0), 使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合, 即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k} \quad \Rightarrow$$

$$x_0=\frac{a^2l}{k},\quad y_0=\frac{b^2m}{k},\quad z_0=\frac{c^2n}{k}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

例 4

求平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充分必要条件.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面, 则存在一点 (x_0,y_0,z_0), 使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合, 即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{a^2l}{k}, \quad y_0=\dfrac{b^2m}{k}, \quad z_0=\dfrac{c^2n}{k} \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2.$$

反之，若 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2$，

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面，则存在一点 (x_0,y_0,z_0)，使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合，即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\frac{a^2l}{k},\quad y_0=\frac{b^2m}{k},\quad z_0=\frac{c^2n}{k} \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2.$$

反之，若 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2$，则易知平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面上点 $\left(\frac{a^2l}{k},\frac{b^2m}{k},\frac{c^2n}{k}\right)$ 处的切平面.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面，则存在一点 (x_0,y_0,z_0)，使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合，即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k}\quad\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}x_0=\dfrac{a^2l}{k},\quad y_0=\dfrac{b^2m}{k},\quad z_0=\dfrac{c^2n}{k}\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\quad a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2.$$

反之，若 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2$，则易知平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面上点 $\left(\frac{a^2l}{k},\frac{b^2m}{k},\frac{c^2n}{k}\right)$ 处的切平面. 因此所求充分必要条件是 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2$.

解 若平面 $lx+my+nz-k=0$ 是椭球面的切平面，则存在一点 (x_0,y_0,z_0)，使该点处的切平面 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$ 与平面 $lx+my+nz-k=0$ 重合，即

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{-1}{-k}\quad\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x_0=\dfrac{a^2l}{k},\quad y_0=\dfrac{b^2m}{k},\quad z_0=\dfrac{c^2n}{k}\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\quad a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2.$$

例 5

已知椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$, 试求过 x 轴且与曲面交线是圆的平面.

例 5

已知椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$, 试求过 x 轴且与曲面交线是圆的平面.

解 过 x 轴的平面若与椭圆柱面交线是圆, 则由对称性知圆心一定是原点, 且半径是 a.

例 5

已知椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$, 试求过 x 轴且与曲面交线是圆的平面.

解 过 x 轴的平面若与椭圆柱面交线是圆, 则由对称性知圆心一定是原点, 且半径是 a. 故交线圆的方程可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

例 5

已知椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$, 试求过 x 轴且与曲面交线是圆的平面.

解 过 x 轴的平面若与椭圆柱面交线是圆, 则由对称性知圆心一定是原点, 且半径是 a. 故交线圆的方程可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2-b^2}{b^2}y^2-z^2=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

例 5

已知椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$, 试求过 x 轴且与曲面交线是圆的平面.

解 过 x 轴的平面若与椭圆柱面交线是圆, 则由对称性知圆心一定是原点, 且半径是 a. 故交线圆的方程可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2-b^2}{b^2}y^2-z^2=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

所以所求平面是

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\pm z=0.$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases}$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z, \end{cases}$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{u}{3},\frac{u}{2},-1\right\}$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{u}{3},\frac{u}{2},-1\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{u}{3}\right\}\,/\!/\,\{3,2,2u\},$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{u}{3},\frac{u}{2},-1\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{u}{3}\right\}/\!/\{3,2,2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{v}{3},-\frac{v}{2},-1\right\}$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u,\\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z\end{cases}\quad 与 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z,\end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{u}{3},\frac{u}{2},-1\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{u}{3}\right\}/\!/\{3,2,2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{v}{3},-\frac{v}{2},-1\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{v}{3}\right\}/\!/\{-3,2,-2v\}.$$

例 6

求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ 平行于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的直母线的方程.

解 两族直母线方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{u}{3},\frac{u}{2},-1\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{u}{3}\right\}/\!/\{3,2,2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{v}{3},-\frac{v}{2},-1\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{v}{3}\right\}/\!/\{-3,2,-2v\}.$$

平面 $\pi: x+y+z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} /\!/ \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} /\!/ \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi: x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} /\!/ \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} /\!/ \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} \parallel \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} \parallel \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \mathbin{/\!/} \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 \mathbin{/\!/} \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} \mathbin{/\!/} \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} \mathbin{/\!/} \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} /\!/ \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} /\!/ \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \parallel \pi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad\Rightarrow\quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 \parallel \pi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad\Rightarrow\quad v = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} \parallel \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} \parallel \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}.$$

所求直母线为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 2u, \\ u\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \qquad \text{与} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} \parallel \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} \parallel \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi: x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}.$$

所求直母线为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -5, \\ -\dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2v, \\ v\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} /\!/ \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} /\!/ \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi: x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \mathbin{/\mkern-5mu/} \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}.$$

所求直母线为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -5, \\ -\dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = -1, \\ -\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

它们的方向向量依次是

$$\boldsymbol{v}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{u}{3}, \frac{u}{2}, -1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{u}{3}\right\} \mathbin{/\mkern-5mu/} \{3, 2, 2u\},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} \mathbin{/\mkern-5mu/} \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 \parallel \pi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad\Rightarrow\quad \{3,2,2u\}\cdot\{1,1,1\}=0 \quad\Rightarrow\quad u=-\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 \parallel \pi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad\Rightarrow\quad \{-3,2,-2v\}\cdot\{1,1,1\}=0 \quad\Rightarrow\quad v=-\frac{1}{2}.$$

所求直母线为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=-5,\\ -\dfrac{5}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=z\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=-1,\\ -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)=z,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}2x-3y+30=0,\\ 10x+15y+12z=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right\}\times\left\{\frac{v}{3},-\frac{v}{2},-1\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{v}{3}\right\}\parallel\{-3,2,-2v\}.$$

平面 $\pi: x+y+z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$, 有

$$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{3, 2, 2u\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{v}_2 /\!/ \pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3, 2, -2v\} \cdot \{1, 1, 1\} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}.$$

所求直母线为

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -5, \\ -\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1, \\ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) = z, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 3y + 30 = 0, \\ 10x + 15y + 12z = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0, \\ 2x - 3y + 12z = 0. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\} \times \left\{\frac{v}{3}, -\frac{v}{2}, -1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{v}{3}\right\} /\!/ \{-3, 2, -2v\}.$$

平面 $\pi : x + y + z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$, 有

例 7

试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线；举一反例说明这个性质在双曲抛物面的情况下不一定成立.

例 7

试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线; 举一反例说明这个性质在双曲抛物面的情况下不一定成立.

证 单叶双曲面的两族直母线为

$$u\text{族}:\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

例 7

试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线；举一反例说明这个性质在双曲抛物面的情况下不一定成立.

证 单叶双曲面的两族直母线为

$$u\text{族}: \begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad v\text{族}: \begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

例 7

试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线; 举一反例说明这个性质在双曲抛物面的情况下不一定成立.

证 单叶双曲面的两族直母线为

$$u\text{族}:\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad v\text{族}:\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

例 7

试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线; 举一反例说明这个性质在双曲抛物面的情况下不一定成立.

证 单叶双曲面的两族直母线为

$$u\text{族}:\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad v\text{族}:\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线.

$$u\text{族}:\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}\qquad v\text{族}:\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线.

$$u\text{族}:\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}\qquad v\text{族}:\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda$(常数),

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda$(常数), 它通过双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda$(常数), 它通过双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$ 而不通过 v 族直母线 $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v,\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}$ 中的任何直母线.

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda$(常数), 它通过双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$ 而不通过 v 族直母线 $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v,\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}$ 中的任何直母线, 这是因为 v 族直母线的方向向量 $\boldsymbol{v}\parallel\{a,b,2v\}$,

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda$(常数), 它通过双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$ 而不通过 v 族直母线 $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v,\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}$ 中的任何直母线, 这是因为 v 族直母线的方向向量 $\boldsymbol{v}\,/\!/\,\{a,b,2v\}$, 而平面的法向量为 $\boldsymbol{n}\,/\!/\,\{b,a,0\}$,

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

显然它通过某条 v 族直母线. 同理通过 v 族任一直母线的每一平面必定通过某一 u 族直母线. 但该性质对双曲抛物面却不一定成立, 例如平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda$(常数), 它通过双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$ 而不通过 v 族直母线 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}$ 中的任何直母线, 这是因为 v 族直母线的方向向量 $\boldsymbol{v}\,/\!/\,\{a,b,2v\}$, 而平面的法向量为 $\boldsymbol{n}\,/\!/\,\{b,a,0\}$, 但 $\{a,b,2v\}\cdot\{b,a,0\}=2ab\neq 0$, 故论断成立.

故过 u 族任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$