第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 §4.6 抛物面

研制者: 吴炳烨

高等教育出版社 高等教育电子音像出版社 §4.6 抛物面



§4.6 抛物面

教学内容: 椭圆抛物面与双曲抛物面的标准方程及其几何性质



§4.6 抛物面

教学内容: 椭圆抛物面与双曲抛物面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论抛物面的几何形状与性质



§4.6 抛物面

教学内容: 椭圆抛物面与双曲抛物面的标准方程及其几何性质

教学目的: 掌握用平行截割法讨论抛物面的几何形状与性质

教学重难点: 空间区域作图



高等學校教學专业基础课程

椭圆抛物面的定义

🖙 椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid),

🖙 椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

🖙 椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

嘟 椭圆抛物面的简单性质

椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

椭圆抛物面的简单性质 显然上述椭圆抛物面对称于 xOz 与 yOz 坐标面, 也对称于 z 轴, 但是它没有对称中心.

) () ()

椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

椭圆抛物面的简单性质 显然上述椭圆抛物面对称于 xOz 与 yOz 坐标面,也对称于 z 轴,但是它没有对称中心.它与对称轴交于点 (0,0,0),这点叫做椭圆抛物面的顶点(vertex).

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🟶 🖇 4.6 抛物面 🖷 3/1.

□ 椭圆抛物面

椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

椭圆抛物面的简单性质 显然上述椭圆抛物面对称于 xOz 与 yOz 坐标面, 也对称于 z 轴, 但是它没有对称中心. 它与对称轴交于点 (0,0,0), 这点叫做椭圆抛物面的顶点(vertex).

从椭圆抛物面的方程知 $z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ge 0$,

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🖲 吴炳烨研制 🌸 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🜒 🖇 4.6 抛物面 📾 3/1.

□ 椭圆抛物面

椭圆抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

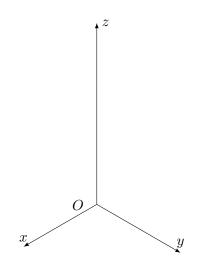
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(elliptic paraboloid), 上面的方程叫做椭圆抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

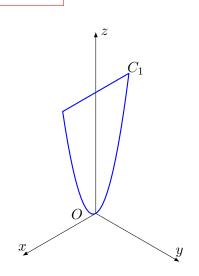
椭圆抛物面的简单性质 显然上述椭圆抛物面对称于 xOz 与 yOz 坐标面, 也对称于 z 轴, 但是它没有对称中心. 它与对称轴交于点 (0,0,0), 这点叫做椭圆抛物面的顶点(vertex).

从椭圆抛物面的方程知 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\geq 0$,所以曲面全部在 xOy 平面的一侧,即在 $z\geq 0$ 的一侧.

覆 椭圆抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ egin{array}{ll} x^2=2a^2z, \\ y=0, \end{array} ight.$

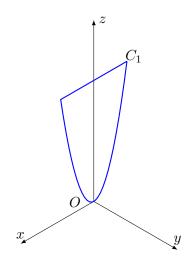


覆 椭圆抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ egin{array}{ll} x^2=2a^2z, \\ y=0, \end{array} ight.$



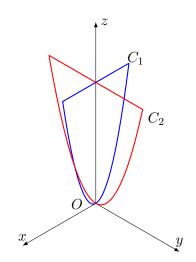
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0, \end{cases} C_2$$

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0, \end{cases} C_2:$$

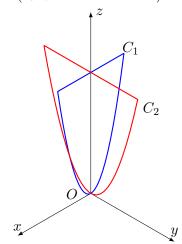




$$: \left| \left\{ \right. \right. \right|$$

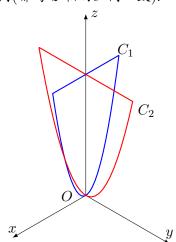
$$\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0, \end{cases}$$

它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与 z 轴的正向一致).



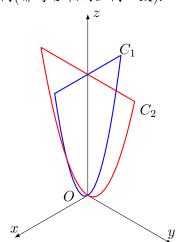
它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z = h 去截, 当 h < 0 时无图形;



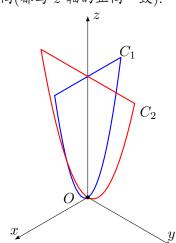
它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点);



它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

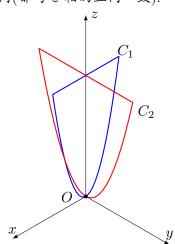
用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点);



它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z = h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

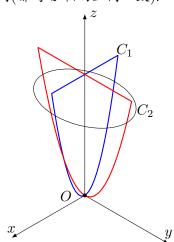
似椭圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$



它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

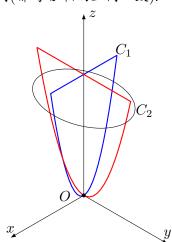


它们有着共同的轴(z 轴)与相同的开口方向(都与 z 轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{array} \right.$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0, \pm b\sqrt{2h}, h),$

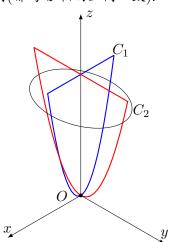


它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{array} \right.$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1

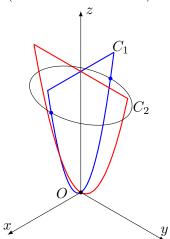


它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{array} \right.$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1

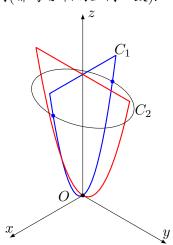


它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C₂ 上.

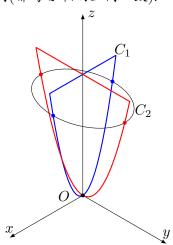


它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C₂ 上.

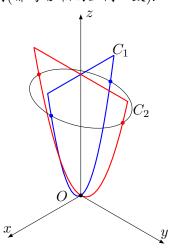


它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C_2 上. 因此, 椭圆抛物面可以看成是 由一族相似的椭圆的变动而产生的. 这族椭圆在变动中, 保持所在平面平 行于 xOu 平面, 且两对顶点分别在主 % 抛物线上滑动.



它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{array} \right.$$
它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C_2 上. 因此, 椭圆抛物面可以看成是 由一族相似的椭圆的变动而产生的. 这族椭圆在变动中, 保持所在平面平 行于 xOu 平面, 且两对顶点分别在主 % 抛物线上滑动.

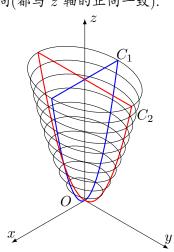
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0, \end{cases}$$

它们有着共同的轴(z轴)与相同的开口方向(都与z轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z=h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$
 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C_2 上. 因此, 椭圆抛物面可以看成是 由一族相似的椭圆的变动而产生的. 这族椭圆在变动中, 保持所在平面平 行于 xOu 平面, 且两对顶点分别在主 8 抛物线上滑动.



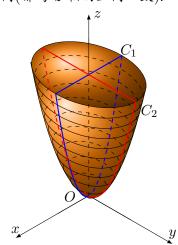
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0, \end{cases} C_2$$

它们有着共同的轴(z 轴)与相同的开口方向(都与z 轴的正向一致).

用平行于 xOy 的平面 z = h 去截, 当 h < 0 时无图形; 当 h = 0 时为 一点(原点); 当 h > 0 时是一族相

似椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ 它们

的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 与 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$, 分别在主抛物线 C_1 与 C_2 上. 因此, 椭圆抛物面可以看成是 由一族相似的椭圆的变动而产生的. 这族椭圆在变动中, 保持所在平面平 行于 xOu 平面, 且两对顶点分别在主 g 抛物线上滑动.



 \mathcal{E} 用平行于 xOz 的平面 y=t 截椭圆抛物面, 得抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

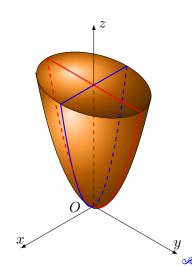
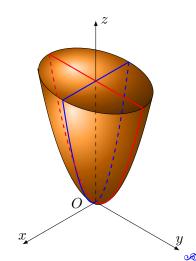


图 用平行于 xOz 的平面 y=t 截椭圆抛物面, 得抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

它与主抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 全 等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同.



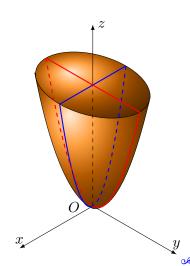
用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2\left(z-\frac{t^2}{2b^2}\right),\\ y=t. \end{array} \right.$$

它与主抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 全

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2b^2}\right)$

在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.

一主抛物线
$$\begin{cases} y^2 = 20^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$$
 上.

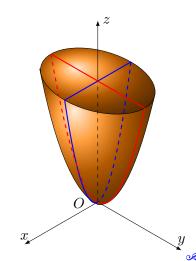


用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2\left(z-\frac{t^2}{2b^2}\right),\\ y=t. \end{array} \right.$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2b^2}\right)$

在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.

因此, 取两个抛物线, 它们所在的平 面互相垂直, 顶点与轴都重合, 开口方 向相同.

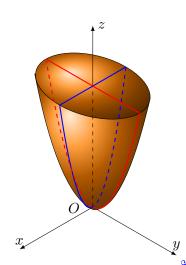


$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

它与主抛物线 $\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0 \end{array} \right.$ 全

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

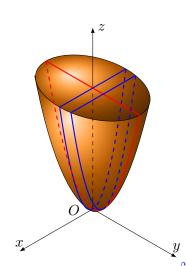
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

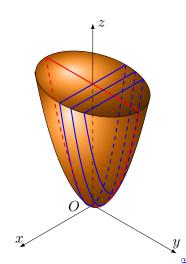
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

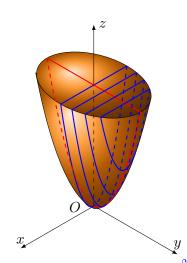
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

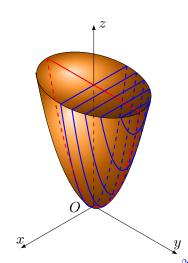
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

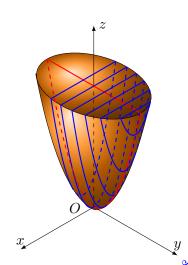
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

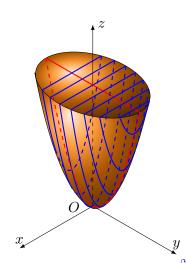
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2h^2}\right)$

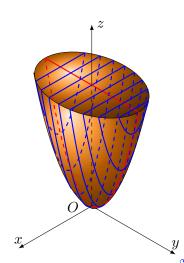
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2k^2}\right)$

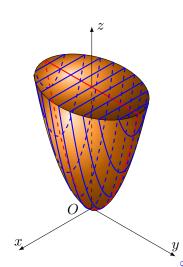
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



用平行于
$$xOz$$
 的平面 $y=t$ 截椭圆抛物面, 得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases}$$

等(焦参数相同)且所在平面相互平行, 开口方向相同. 它的顶点 $\left(0,t,\frac{t^2}{2k^2}\right)$

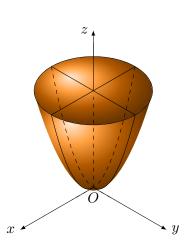
在另一主抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2b^2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上.



$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\right]$$

程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
 中,若 $a = b$,那么方



□ 双曲抛物面

□ 双曲抛物面

双曲抛物面的定义

- □ 双曲抛物面
- 双曲抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面(hyperbolic paraboloid),



□ 双曲抛物面

双曲抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面(hyperbolic paraboloid), 上面的方程叫做双曲抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

□ 双曲抛物面

🖙 双曲抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面(hyperbolic paraboloid), 上面的方程叫做双曲抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

[©] 双曲抛物面的简单性质

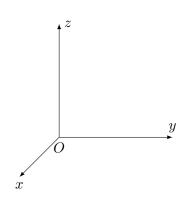
双曲抛物面的定义 在直角坐标系下, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

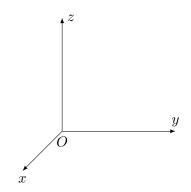
所表示的曲面叫做双曲抛物面(hyperbolic paraboloid), 上面的方程叫做双曲抛物面的标准方程, 其中 a,b 是任意的正常数.

双曲抛物面的简单性质 显然上述双曲抛物面关于 xOz 面、yOz 面与 z 轴对称, 但是它没有对称中心.

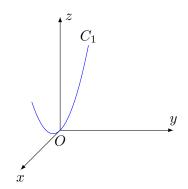
》 ② 双曲抛物面形状



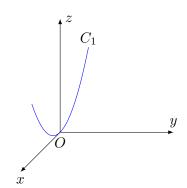
双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ egin{array}{ll} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array}
ight.$

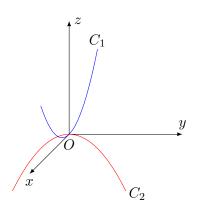


双曲抛物面形状 主抛物线 C_1 : $\left\{ egin{array}{ll} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} ight.$

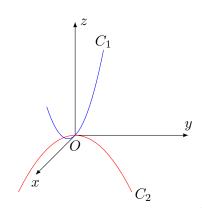


高等學校數學专业基础课程《解析几何》
$$*$$
 吴炳烨研制 $*$ 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 $*$ $§4.6 抱物面 $*$ $*$ $8/18$ $*$ 双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1:$
$$\left\{\begin{array}{c} x^2=2a^2z,\\y=0;\end{array}\right.$$
 $C_2:$ $\left\{\begin{array}{c} y^2=-2b^2z,\\x=0.\end{array}\right.$$





双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1$$
:
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0; \end{cases} C_2 : \begin{cases} y^2 = -2b^2z, \\ x = 0. \end{cases}$$

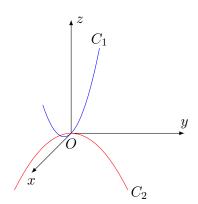


双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right.$ $C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1 沿z轴正向开口, 而 C_2 沿z轴负向开口.

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$



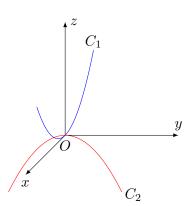
双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right.$ $C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1 沿z轴正向开口, 而 C_2 沿z轴负向开口.

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 *u* 轴平行,



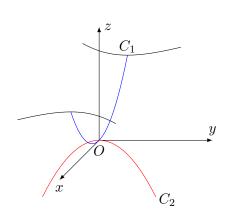
$$C_2:$$

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2z, \\ x = 0. \end{cases}$$

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与x轴平行,虚轴 与 *u* 轴平行,



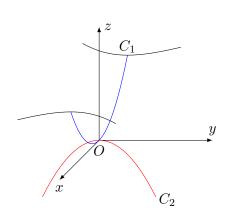
双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left| \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0; \end{array} \right| C_2: \left| \left\{ \begin{array}{l} y^2 = -2b^2z, \\ x = 0. \end{array} \right| \right. \right|$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1 沿z轴正向开口, 而 C_2 沿z轴负向开口.

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上.



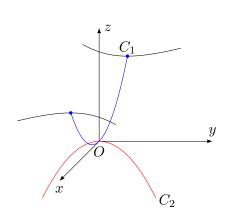
双曲抛物面形状 主抛物线 C_1 : $\left\{ egin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \middle| C_2: \left| \left\{ egin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right. \right| \right.$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1 沿z 轴正向开口,而 C_2 沿z 轴负向开口.

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线, 实轴与 x 轴平行, 虚轴与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$ 在主抛物线 C_1 上.

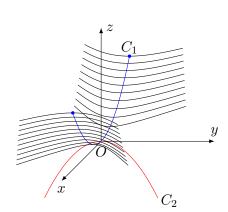


双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$
 1所在的平面互相垂直 有相同的顶点与对称轴 但开口方向相反 C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$ 在 主抛物线 C_1 上.

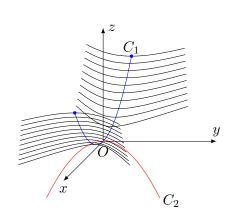


双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$
 1 所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_2

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$

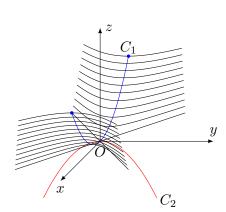


双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$
它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反 C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ x = 0 \end{cases}$



双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$

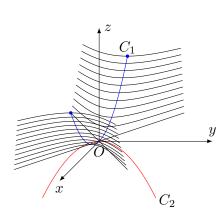
它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

当 h < 0 时也是双曲线, 实轴与 y 轴平行, 虚轴与 x 轴平行,



双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$

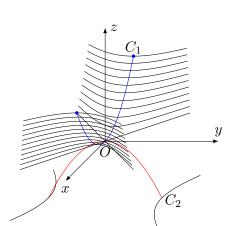
它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{array} \right.$

当 h < 0 时也是双曲线, 实轴与 y 轴平行, 虚轴与 x 轴平行,



双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$

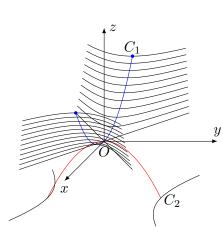
它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

当 h < 0 时也是双曲线, 实轴与 y 轴平行, 虚轴与 x 轴平行, 顶点 $\S(0,\pm b\sqrt{-2h},h)$ 在主抛物线 C_2 上.



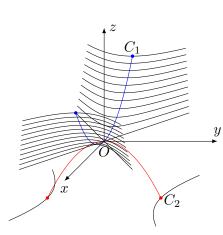
双曲抛物面形状 主抛物线
$$C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right.$$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

时是双曲线,实轴与 x 轴平行,虚轴 与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$



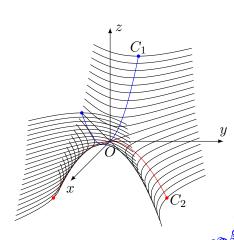
双曲抛物面形状 主抛物线 $C_1: \left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z, \\ y=0; \end{array} \right. C_2: \left\{ \begin{array}{l} y^2=-2b^2z, \\ x=0. \end{array} \right. \right.$

它们所在的平面互相垂直,有相同的顶点与对称轴,但开口方向相反, C_1 沿z轴正向开口,而 C_2 沿z轴负向开口.

用平行平面 z = h 截双曲抛物面, 得

截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

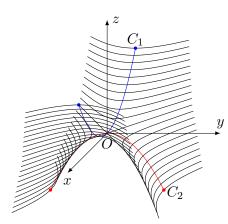
时是双曲线, 实轴与 x 轴平行, 虚轴与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在 主 抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对 相交于原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$



因此, 双曲抛物面 $\left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right| = 2z$ 被 xOy 平面分割成上下两部分, 上半

部分沿x 轴的两个方向上升,下半部分沿y 轴的两个方向下降,大体形状像一只马鞍子,所以双曲抛物面也叫做马鞍曲面.

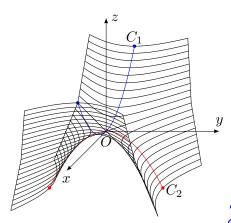
截线 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$ 当 h > 0



因此, 双曲抛物面 $\left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right| = 2z$ 被 xOy 平面分割成上下两部分, 上半

部分沿x 轴的两个方向上升,下半部分沿y 轴的两个方向下降,大体形状像一只马鞍子,所以双曲抛物面也叫做马鞍曲面.

截线 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$ 当 h > 0

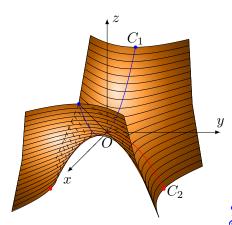


因此, 双曲抛物面 $\left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right| = 2z$ 被 xOy 平面分割成上下两部分, 上半

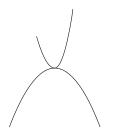
部分沿x 轴的两个方向上升,下半部分沿y 轴的两个方向下降,大体形状像一只马鞍子,所以双曲抛物面也叫做马鞍曲面.

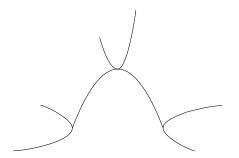
截线
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$
 当 $h > 0$

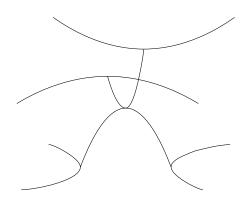
时是双曲线, 实轴与 x 轴平行, 虚轴与 y 轴平行, 顶点 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 在主抛物线 C_1 上. 当 h=0 时为一对相交于原点的直线 $\left\{\begin{array}{c} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{array}\right.$

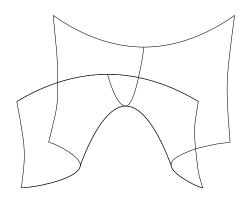


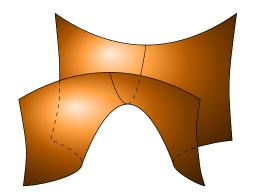


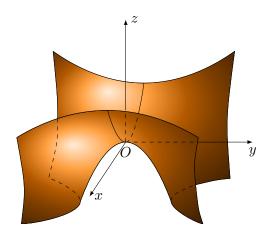












双曲抛物面的形状比较复杂,为进一步明确其结构,我们再来观察用平行于xOz面的一组平行平面y=t来截割双曲抛物面所得的截线.

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏶 §4.6 抛物面 🟶 10/18

双曲抛物面的形状比较复杂, 为进一步明确其结构, 我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 y=t 来截割双曲抛物面所得的截线. 此时截线为抛物线

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2\left(z+\frac{t^2}{2b^2}\right),\\ y=t. \end{array} \right.$$

等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏶 吴炳烨研制 🏶 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏶 §4.6 抛物面 🏶 10/18

双曲抛物面的形状比较复杂, 为进一步明确其结构, 我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 y=t 来截割双曲抛物面所得的截线. 此时截线为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

容易看出,不论 t 取什么样的实数值,所截得的抛物线总与主抛物线

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z,\\ y=0 \end{array} \right.$$

全等,

等学校数学专业基础课程《解析几何》 ● 吴炳烨研制 ● 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ● §4.6 抛物面 ● 10/18

双曲抛物面的形状比较复杂, 为进一步明确其结构, 我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 y=t 来截割双曲抛物面所得的截线. 此时截线为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

容易看出, 不论 t 取什么样的实数值, 所截得的抛物线总与主抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0 \end{cases}$$

全等, 且所在的平面平行于这个主抛物线所在的平面 xOz,

等学校数学专业基础课程《解析几何》 ● 吴炳烨研制 ● 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ● §4.6 地物面 ● 10/18 ◆

双曲抛物面的形状比较复杂, 为进一步明确其结构, 我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 y=t 来截割双曲抛物面所得的截线. 此时截线为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

容易看出, 不论 t 取什么样的实数值, 所截得的抛物线总与主抛物线

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z,\\ y=0 \end{array} \right.$$

全等, 且所在的平面平行于这个主抛物线所在的平面 xOz, 而它的顶点 $\left(0,t,-\frac{t^2}{2b^2}\right)$ 则在另一个主抛物线 $\left\{ \begin{array}{ll} y^2=-2b^2z, \\ x=0 \end{array} \right.$ 上.

等学校数学专业基础课程《解析几何》 ● 吴炳烨研制 ● 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 ● §4.6 批物面 ● 10/18 ◇◇

双曲抛物面的形状比较复杂, 为进一步明确其结构, 我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 y=t 来截割双曲抛物面所得的截线. 此时截线为抛物线

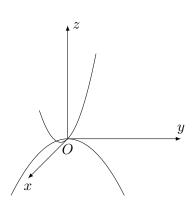
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

容易看出,不论 t 取什么样的实数值,所截得的抛物线总与主抛物线

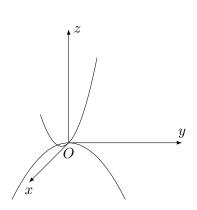
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2=2a^2z,\\ y=0 \end{array} \right.$$

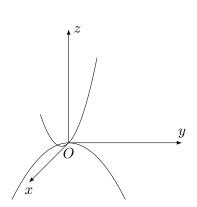
全等, 且所在的平面平行于这个主抛物线所在的平面 xOz, 而它的顶点 $\left(0,t,-\frac{t^2}{2b^2}\right)$ 则在另一个主抛物线 $\left\{\begin{array}{ll}y^2=-2b^2z,\\x=0\end{array}\right.$ 上. 于是得到下面的结论:

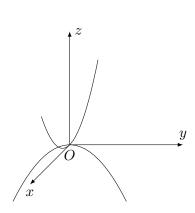
如果取两个这样的抛物线,



如果取两个这样的抛物线, 它们的所在平面互相垂直, 有公共的顶点与轴,而两 抛物线的开口方向相反,

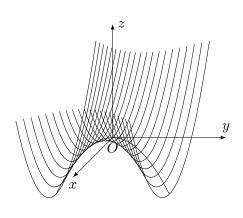






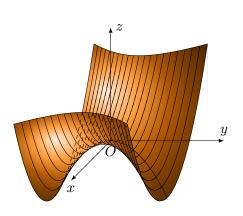
高等学校数学专业基础课程《解析几何》 : 吴炳烨研制 : 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 : §4.6 抛物面 : 11/18

如果取两个这样的抛物线, 它们的所在平面互相,而有公共的所在平面与轴,而有小人的开口方向相反, 一个地物线所在一个地物线所在另一个地物线所在另一个地物线所在的一个地物线所在的一个地物线上滑动,那使是一个地物线的运动轨迹便是一个双曲抛物面.



高等学校数学专业基础课程《解析几何》 🏚 吴炳烨研制 🍓 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面 🏶 🖇 §4.6 抛物面 🕏 11/18

如果取两个这样的抛物线, 可们的所在平面互相,而有的所在平面与轴,而有的所有的顶口方向相后, 一个地物线的开口方向相行的一个地物线所在子的, 一个地物线所在另一个地物线上滑动,那使是一个地物线的运动轨迹便是一个和地物线的运动轨迹便是地物线的运动轨迹便双曲抛物面.



椭圆抛物面与双曲抛物面统称为抛物面,它们都没有对称中心,所以又叫作无心二次曲面.

地物面的参数方程

抛物面的参数方程 容易验证, 椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程 分别为

$$\begin{cases} x = au\cos v, \\ y = bu\sin v, \\ z = \frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = au\cos v, \\ y = bu\sin v, \\ z = \frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = 2uv. \end{cases}$$

解 两曲面的交线为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 2z, \end{cases}$$

解 两曲面的交线为
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8, \\ x^2+y^2=2z, \end{array} \right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$

解 两曲面的交线为
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array} \right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也即 $(z+4)(z-2)=0,$

作出球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array} \right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也即 $(z+4)(z-2)=0,$ 所以 $z=-4$ 或 $z=2,$

作出球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array} \right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也即 $(z+4)(z-2)=0,$ 所以 $z=-4$ 或 $z=2,$ 因此交线方程可改写为

作出球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8, \\ x^2+y^2=2z, \end{array} \right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也

即
$$(z+4)(z-2)=0$$
, 所以 $z=-4$ 或 $z=2$, 因此交线方程可改写为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为
$$\left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array}\right.$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也

即
$$(z+4)(z-2)=0$$
, 所以 $z=-4$ 或 $z=2$, 因此交线方程可改写为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8, \\ x^2+y^2=2z, \end{cases}$$
 于是可得 $z^2+2z-8=0$, 也即 $(z+4)(z-2)=0$, 所以 $z=-4$ 或 $z=2$, 因此交线方程可改写为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

这是平面 z=2 上的一个 以 (0,0,2) 为圆心, 半径为 2的一个圆.

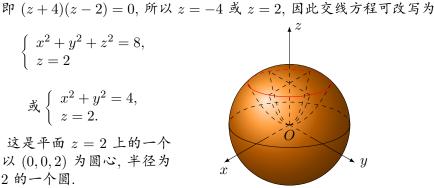
作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array}\right.$ 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

这是平面 z=2 上的一个 以 (0,0,2) 为圆心, 半径为 2的一个圆.



作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.

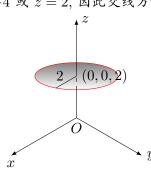
解 两曲面的交线为 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z, \end{array}\right.$ 于是可得 $z^2+2z-8=0,$ 也

即
$$(z+4)(z-2)=0$$
, 所以 $z=-4$ 或 $z=2$, 因此交线方程可改写为

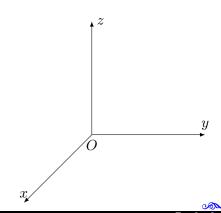
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

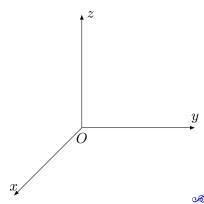
这是平面 z = 2 上的一个 以 (0,0,2) 为圆心, 半径为 2 的一个圆.



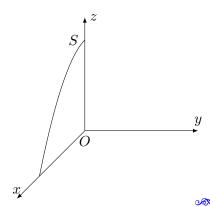
作出曲面 $z = 4 - x^2$ 与平面 2x + y = 4, 三坐标面所围成的立体在第一 卦限部分的立体图形.



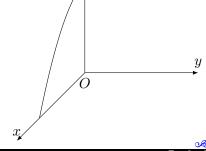
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向;



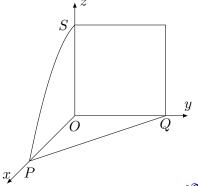
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向;



解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0).

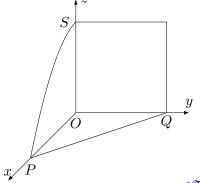


解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0).



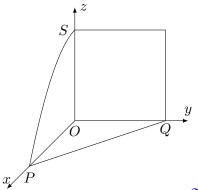
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0). 为画出该立体图,

还须画出已知抛物柱面与平面的交线.



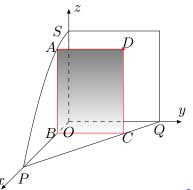
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0). 为画出该立体图,

还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此, 用一平行于 yOz 的平面来截割它们, 得矩形 ABCD, 其中 AD 为抛物柱面的母线, D 为交线上的点.



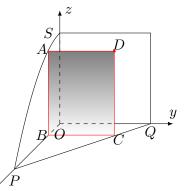
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0). 为画出该立体图,

还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此, 用一平行于 yOz 的平面来截割它们, 得矩形 ABCD, 其中 AD 为抛物柱面的母线. D 为交线上的点.



解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于 P(2,0,0), Q(0,4,0). 为画出该立体图,

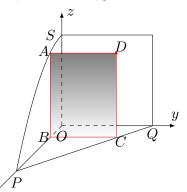
还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此, 用一平行于 yOz 的平面来截割它们, 得矩形 ABCD, 其中 AD 为抛物柱面的母线, D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:



解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

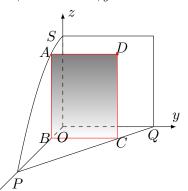
P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线, D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:

在抛物线弧 \widehat{SP} 上任取一点A, 作矩形 ABCD, 则 D 即为交线上的点.



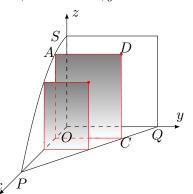
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线, D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法.



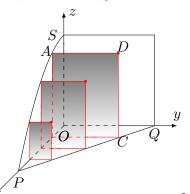
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线,D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:



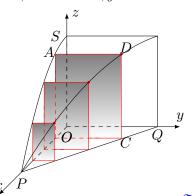
解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线,D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:



解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线,D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:



解 $z=4-x^2$ 是抛物柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 xOz 面上的抛物线, 顶点为 S(0,0,4), 焦参数 p=1/2, 开口方向为 z 轴负方向; 平面 2x+y=4 平行于 z 轴, 与 xOy 面交于直线, 该直线与 x,y 轴分别交于

P(2,0,0),Q(0,4,0). 为画出该立体图,还须画出已知抛物柱面与平面的交线. 为此,用一平行于 yOz 的平面来截割它们,得矩形 ABCD,其中 AD 为抛物柱面的母线,D 为交线上的点. 这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法:

