第二章 轨迹与方程

内容提要与典型例题

研制者：吴炳烨

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

本章内容提要

本章内容提要

曲面的方程

本章内容提要

曲面的方程

球坐标系与柱坐标系

本章内容提要

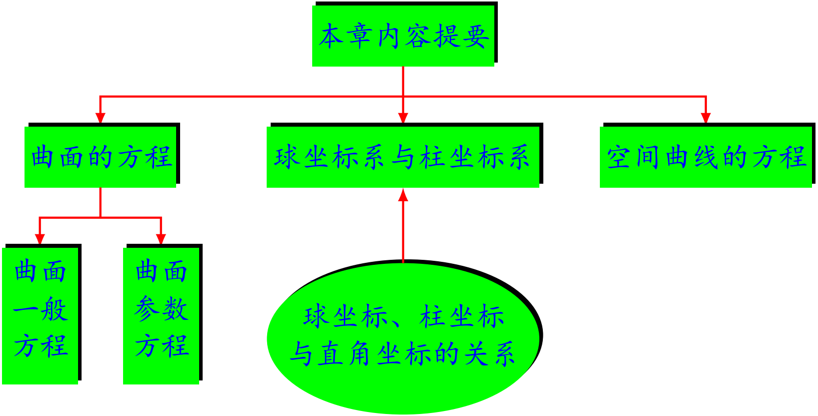
- 曲面的方程
- 球坐标系与柱坐标系
- 空间曲线的方程

本章内容提要

- 曲面的方程
  - 曲面一般方程
- 球坐标系与柱坐标系
- 空间曲线的方程

本章内容提要

- 曲面的方程
  - 曲面一般方程
  - 曲面参数方程
- 球坐标系与柱坐标系
- 空间曲线的方程


本章内容提要
曲面的方程
球坐标系与柱坐标系
空间曲线的方程
曲面一般方程
曲面参数方程
球坐标、柱坐标
与直角坐标的关系

本章内容提要

- 曲面的方程
  - 曲面一般方程
  - 曲面参数方程
- 球坐标系与柱坐标系
- 空间曲线的方程
  - 空间曲线一般方程

本章内容提要

- 曲面的方程
  - 曲面一般方程
  - 曲面参数方程
- 球坐标系与柱坐标系
- 空间曲线的方程
  - 空间曲线一般方程
  - 空间曲线参数方程

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

例 1

在空间, 求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$, 动点到两定点距离之和为 $2a$.

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$，动点到两定点距离之和为 $2a$. 选取空间直角坐标系，使两定点的坐标分别为 $(-c, 0, 0)$ 与 $(c, 0, 0)$，

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$，动点到两定点距离之和为 $2a$. 选取空间直角坐标系，使两定点的坐标分别为 $(-c, 0, 0)$ 与 $(c, 0, 0)$，则动点 $P(x, y, z)$ 在所求轨迹上

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$，动点到两定点距离之和为 $2a$. 选取空间直角坐标系，使两定点的坐标分别为 $(-c,0,0)$ 与 $(c,0,0)$，则动点 $P(x,y,z)$ 在所求轨迹上

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}=2a$$

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$, 动点到两定点距离之和为 $2a$. 选取空间直角坐标系，使两定点的坐标分别为 $(-c,0,0)$ 与 $(c,0,0)$, 则动点 $P(x,y,z)$ 在所求轨迹上

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{[(x+c)^2+y^2+z^2]\,[(x-c)^2+y^2+z^2]}=2a^2-x^2-y^2-z^2-c^2$$

例 1

在空间，求到两定点距离之和等于常数的点的轨迹.

解 设两定点距离为 $2c$，动点到两定点距离之和为 $2a$. 选取空间直角坐标系，使两定点的坐标分别为 $(-c,0,0)$ 与 $(c,0,0)$，则动点 $P(x,y,z)$ 在所求轨迹上

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{[(x+c)^2+y^2+z^2]\,[(x-c)^2+y^2+z^2]}=2a^2-x^2-y^2-z^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2-a^2}=1.$$

例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

例 2

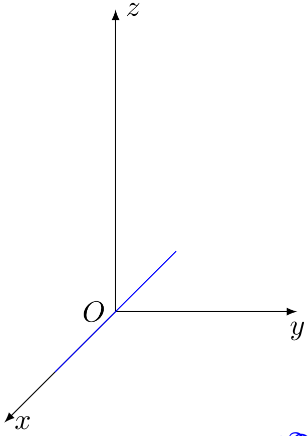
有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合.

例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

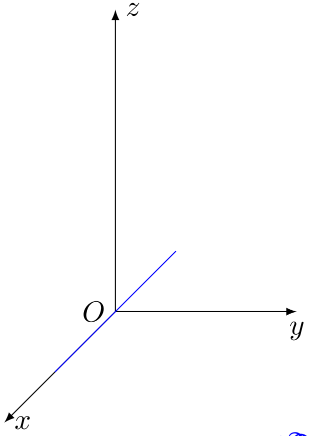
解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合.



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

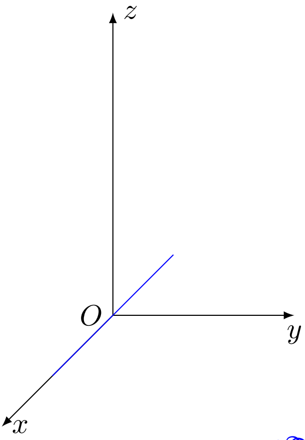
解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'.



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2，将 l_1 绕 l_2 作等速转动，同时沿 l_2 作等速直线运动，在运动中保持 $l_1 \perp l_2$，这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面，试建立螺旋面的方程.

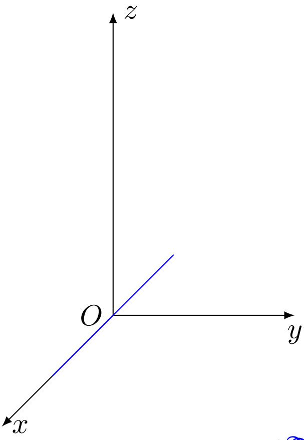
解 取 l_2 为 z 轴，并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω，直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u，



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

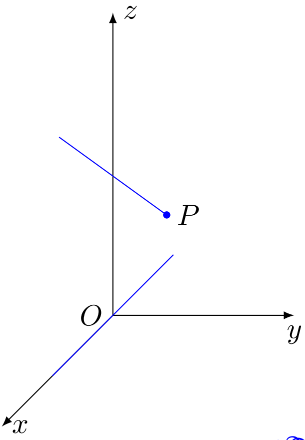
解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q,



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

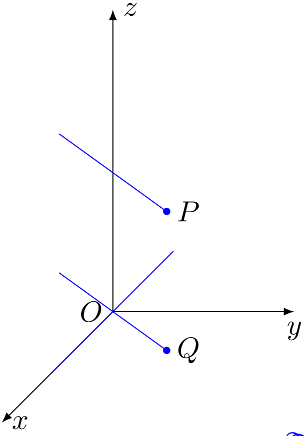
解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q,



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q,

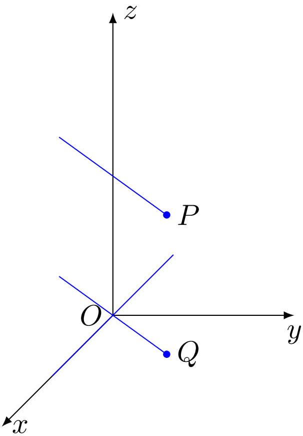


例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

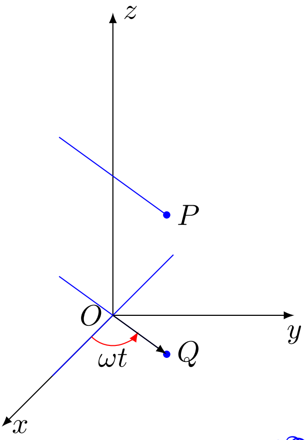


例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$



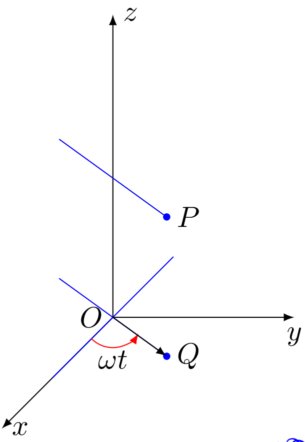
例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$



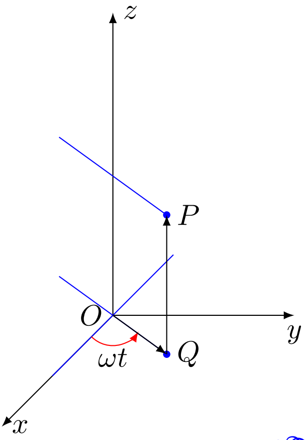
例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$



例 2

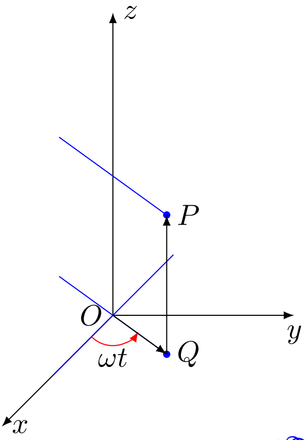
有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{QP} = v' t \boldsymbol{k}$$



例 2

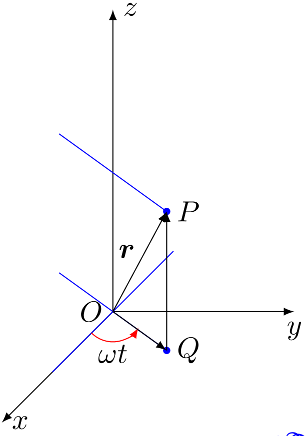
有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{QP} = v' t\boldsymbol{k}$$



例 2

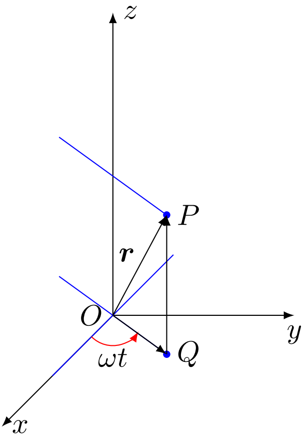
有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影 为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v' t\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$



例 2

有两条相互正交的直线 l_1, l_2, 将 l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中保持 $l_1 \perp l_2$, 这样由 l_1 画出的图形叫做螺旋面, 试建立螺旋面的方程.

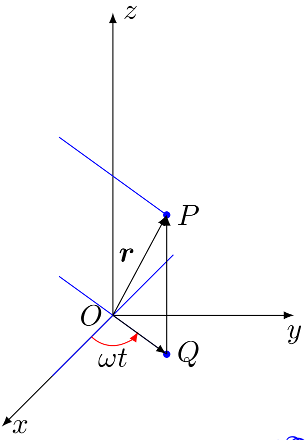
解 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在初始时刻与 x 轴重合. 设角速度为 ω, 直线速度为 v'. 再设直线上任一点 P 与 z 轴的有向距离为 u, 在时刻 t, P 在 xOy 面上投影为Q, 则

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v' t\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v' t\boldsymbol{k}.$$



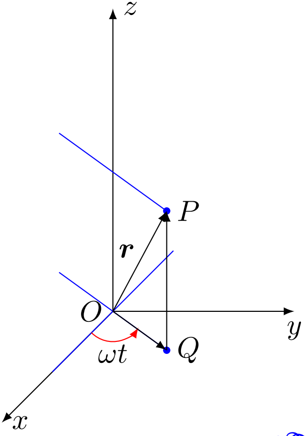
改记 $\omega t = v, v't = av$, 则得螺旋面方程

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v't\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

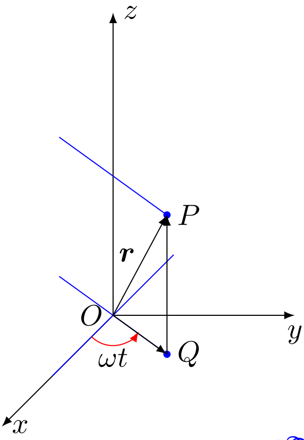
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v't\boldsymbol{k}.$$



改记 $\omega t = v, v't = av$, 则得螺旋面方程

$$\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$$



$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v't\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v't\boldsymbol{k}.$$

改记 $\omega t = v, v't = av$, 则得螺旋面方程

$$\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$$

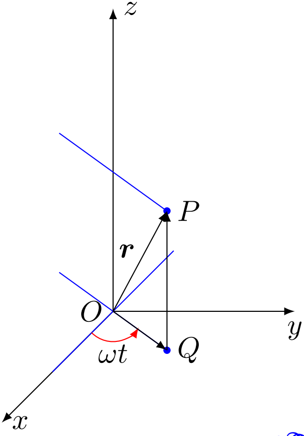
$$\Rightarrow \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = av \end{cases} \qquad (-\infty < u, v < +\infty).$$

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v't\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v't\boldsymbol{k}.$$



改记 $\omega t = v, v't = av$, 则得螺旋面方程

$$\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$$

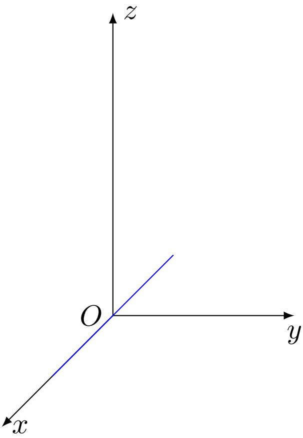
$$\Rightarrow \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = av \end{cases} \qquad (-\infty < u, v < +\infty).$$

$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} &= v't\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

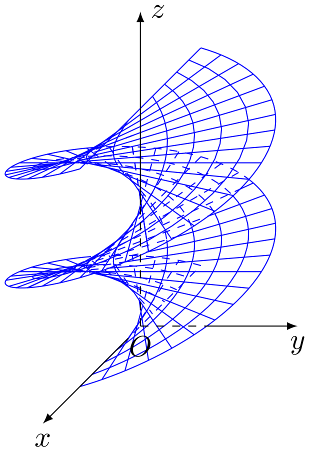
$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v't\boldsymbol{k}.$$



改记 $\omega t = v, v't = av$, 则得螺旋面方程

$$\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = av \end{cases} \quad (-\infty < u, v < +\infty).$$



$$\measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overrightarrow{OQ} = u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{QP} = v't\boldsymbol{k} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= u\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + u\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + v't\boldsymbol{k}.$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2},$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\theta=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arcsin\frac{1}{2}$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\theta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \arcsin\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

例 3

已知点 A 的直角坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的球坐标与柱坐标.

解 (1) 先求球坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\theta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \arcsin\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

故点 A 的球坐标是 $\left(1, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 再求柱坐标.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\theta=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arcsin\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}.$$

故点 A 的球坐标是 $\left(1,-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 再求柱坐标.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\theta=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arcsin\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}.$$

故点 A 的球坐标是 $\left(1,-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 再求柱坐标.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故点 A 的柱坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$.

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\theta=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arcsin\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}.$$

故点 A 的球坐标是 $\left(1,-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

例 4

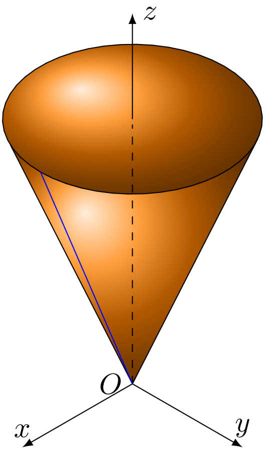
一质点沿圆锥顶点出发, 沿直母线作等速直线运动, 直母线同时绕圆锥的轴作等速转动, 此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内,

例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

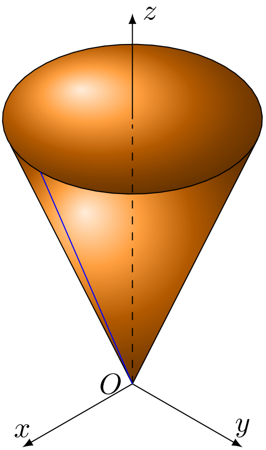
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，



例 4

一质点沿圆锥顶点出发, 沿直母线作等速直线运动, 直母线同时绕圆锥的轴作等速转动, 此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

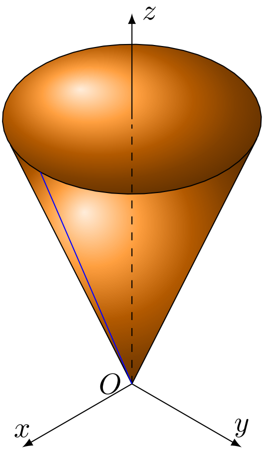
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v.



例 4

一质点沿圆锥顶点出发, 沿直母线作等速直线运动, 直母线同时绕圆锥的轴作等速转动, 此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

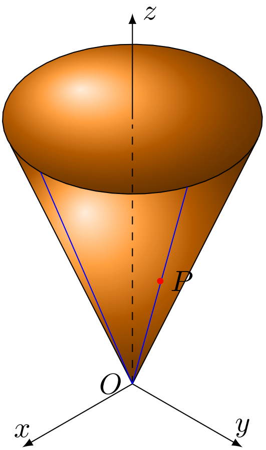
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P,



例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

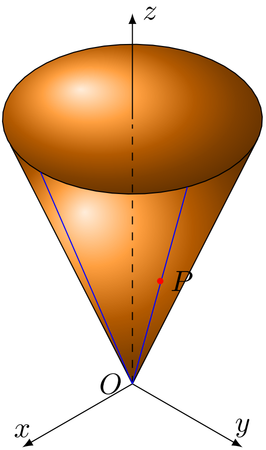
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v. 设 t 秒后，质点从 O 运动至 P,



例 4

一质点沿圆锥顶点出发, 沿直母线作等速直线运动, 直母线同时绕圆锥的轴作等速转动, 此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

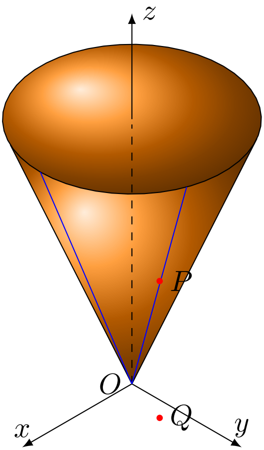
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P, P 在 xOy 平面上的射影为 Q,



例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

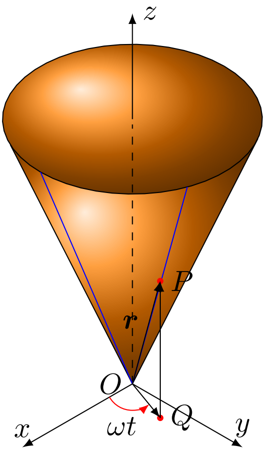
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v. 设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，



例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，

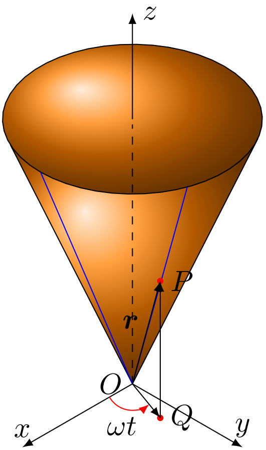


例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v. 设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则

$$|\overrightarrow{OP}| = vt,$$

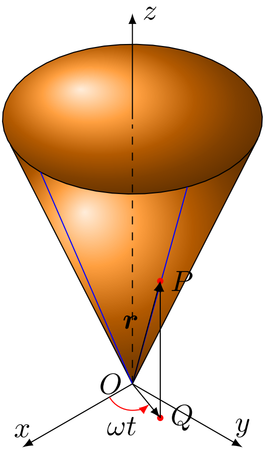


例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则

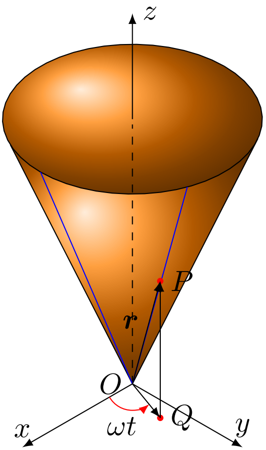
$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$



例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则



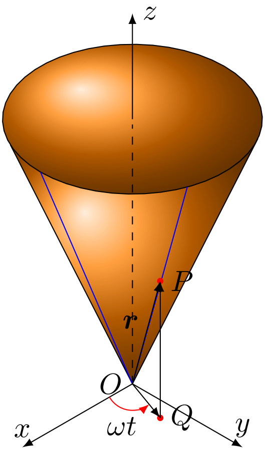
$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha,$$

例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则



$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

例 4

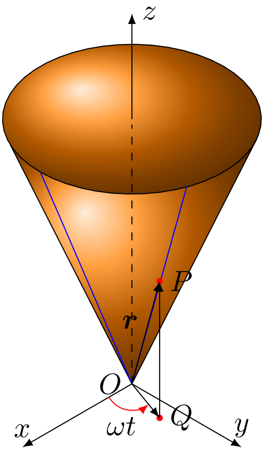
一质点沿圆锥顶点出发, 沿直母线作等速直线运动, 直母线同时绕圆锥的轴作等速转动, 此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P, P 在 xOy 平面上的射影为 Q, 则

$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

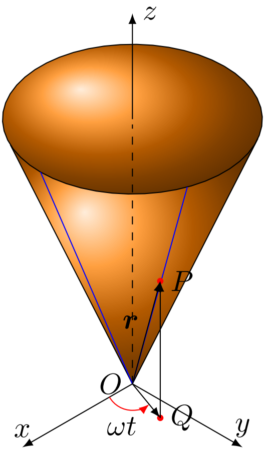
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$



例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则



$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

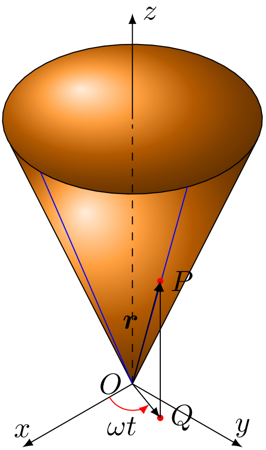
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i}$$

例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线. 试求圆锥螺线的方程.

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v. 设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则



$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i} + vt\sin\alpha\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

例 4

一质点沿圆锥顶点出发，沿直母线作等速直线运动，直母线同时绕圆锥的轴作等速转动，此时质点运动轨迹叫做圆锥螺线．试求圆锥螺线的方程．

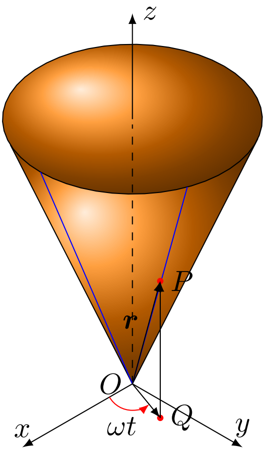
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴，动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内，并设圆锥顶角为 2α，旋转角速度为 ω，直线速度为 v．设 t 秒后，质点从 O 运动至 P，P 在 xOy 平面上的射影为 Q，则

$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

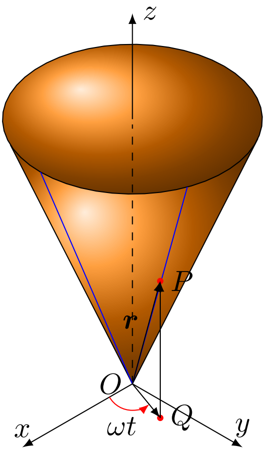
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i} + vt\sin\alpha\sin\omega t\boldsymbol{j} + vt\cos\alpha\boldsymbol{k}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = vt\sin\alpha\cos\omega t, \\ y = vt\sin\alpha\sin\omega t, \\ z = vt\cos\alpha \end{cases} \quad (0 \le t < +\infty).$$

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P, P 在 xOy 平面上的射影为 Q, 则



$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i} + vt\sin\alpha\sin\omega t\boldsymbol{j} + vt\cos\alpha\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = vt\sin\alpha\cos\omega t, \\ y = vt\sin\alpha\sin\omega t, \\ z = vt\cos\alpha \end{cases} \qquad (0 \le t < +\infty).$$

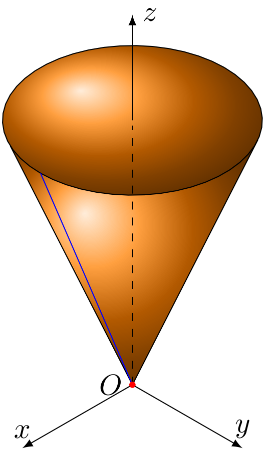
解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P, P 在 xOy 平面上的射影为 Q, 则

$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

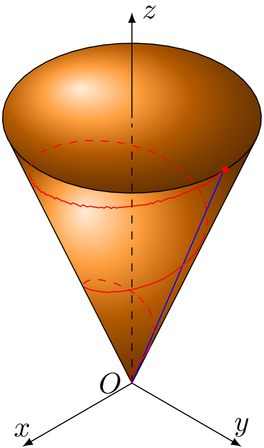
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i} + vt\sin\alpha\sin\omega t\boldsymbol{j} + vt\cos\alpha\boldsymbol{k}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = vt\sin\alpha\cos\omega t, \\ y = vt\sin\alpha\sin\omega t, \\ z = vt\cos\alpha \end{cases} \quad (0 \le t < +\infty).$$

解 取圆锥的顶点为原点,轴为 z 轴, 动点所在直母线的初始位置在 xOz 平面内, 并设圆锥顶角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v. 设 t 秒后, 质点从 O 运动至 P, P 在 xOy 平面上的射影为 Q, 则



$$|\overrightarrow{OP}| = vt, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\alpha = vt\sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha = vt\cos\alpha, \quad \measuredangle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ}) = \omega t$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= vt\sin\alpha\cos\omega t\boldsymbol{i} + vt\sin\alpha\sin\omega t\boldsymbol{j} + vt\cos\alpha\boldsymbol{k}$$