学院________专业________班级________学号________姓名________任课教师________

装……订……线

扬 州 大 学 试 题 纸

(2020－2021 学年第一学期)

数学学院数学 1805 班(年)级课程 《近世代数》(A)卷

考试形式：开卷（　　）闭卷（ √ ）

题目	一	二	三	四	五	六	八	总分
得分								

一、单项选择题（$3' \times 5 = 15'$）

1. 剩余类加群$\mathbb{Z}_{15}$的子群有（　）个。 [　]

A. 4　　B. 6　　C. 3　　D. 4

2. 剩余类环$\mathbb{Z}_6$的零因子的个数有(　)个。 [　]

A. 3　　B. 2　　C.1　　D. 4

3. 二次多项式x^2-4在剩余类环$\mathbb{Z}_5$中共有(　)个根。 [　]

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.下列环不是唯一因子分解整环是 [　]

A. $\mathbb{Z}[i]$　　B. $\mathbb{Q}[x]$　　C. $\mathbb{Z}_8[x]$　　D. $\mathbb{C}[x]$

5. 在 7 次对称群S_7的子群中，元素的最大阶是 [　]

A. 14　　B. 9　　C. 10　　D. 12

二、判断题：下述是否正确，并简单说明理由（$5' \times 5 = 25'$）

6. 设 A 是全矩阵环$M_3[\mathbb{R}]$中的非零矩阵。如果 A 是零因子，则 A 的秩小于 3.

7. 设F是一个有限域并 F 所含元素的个数$|F|=9$.则 F 的特征等于 6.

8. 群的两个子群的并一定是子群.

9. 在整环$\mathbb{R}[x]$中，由 3 和 x 生成的理想（3，x）不是主理想.

10. 整数环$\mathbb{Z}$的任一子环是理想.

三、计算和证明题($12' \times 5 = 60'$)

11. 设 G 是一个群，$a \in G$ 且 a 的阶 $o(a) = n \neq 0$.

(1). 设 m 是任一正整数。证明：$o(a^m) = o(a^{(n,m)})$；

(2). 设 a 的阶为 $o(a) = 2021$. 求 a^{47} 的阶 $o(a^{47})$.

12. (1). 叙述有限群的 Lagrange 定理；

(2). 设 H, K 是有限群 G 的子群，且 K 是 H 的子群，证明:

$$[G:K] = [G:H][H:K].$$

装 订 线

13. (1). 叙述环同态基本定理;

(2). 证明存在环同构: $\mathbb{Z}[x]/(3,x)\cong\mathbb{Z}_3$.

14. 设$\mathbb{Z}_n$是模 n 的剩余类环.

(1). 设$a\in\mathbb{Z}$. 证明：$[a]$在$\mathbb{Z}_n$中乘法可逆当且仅当$(a,n)=1$；

(2). 设$a\in\mathbb{Z}$且$(a,n)=1$ 证明：$n\,|\,(a^{\phi(n)}-1)$，其中$\phi(n)$是 n 的欧拉数，即在 1 到 n 之间与 n 互素的自然数的个数.

线

订

装

15． 设$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$是高斯整数环.

(1)．设$\alpha=a+bi\in\mathbb{Z}[i]$且$|\alpha|^2=p$，p 是素数. 证明：$\alpha$是不可约元;

(2). 证明：5 是$\mathbb{Z}[i]$中的可约元;

(3)．将$3+4i$分解成不可约元的乘积;

(4). 求$3+4i$和 5 的最公因子.