扬 州 大 学 试 题 纸

院 ______________________ 课程 ________________________

班级 _________ 姓名 ____________ 学号 ___________ 得分 __________

一、（ 16 分） 下述命题是否正确？（对的用 $+$, 错的用 $-$ ）.

1、交换群的商群是交换群. （ ）

2、任一有限群均同构于一变换群. （ ）

3、设 G 是 n 阶群， m 是 n 的因子，则 G 中存在阶为 m 的元素. （ ）

4、主理想环的子环是主理想环.

5、模 7 的剩余类环 $\mathbb{Z}_7$ 上的多项式环 $\mathbb{Z}_7[x]$ 是主理想环. （ ）

6、整环的同态象是整环. （ ）

7、 $2x+4$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中为不可约多项式. （ ）

8、设 R 是整环， $a \in R$. 如果由 a 生成的理想 (a) 是极大理想，则 a 是素元. （ ）

二、（ 12 分） 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集，$G = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \neq 1\}$, 在 G 中定义 $a*b = a+b-ab$. 验证 G 关于 $*$ 作成群，并求出 2 的阶和 3 的逆元.

三、（ 12 分） G 是交换群， $a, b \in G$. 若 a, b 的阶分别是 n 和 m 且 m 和 n 互素. 证明： $(a) \cap (b) = \{e\}$ 且 ab 的阶是 mn .

四、（ 16 分） 设 R 是模 15 的剩余类环 $\mathbb{Z}_{15}$.

1、写出 R 的所有非平凡理想.

2、求出 R 中的所有零因子.

3、写出 R 中的可逆元.（证明你的结论）

4、证明： R 的环自同构只有恒等影射.

五、（ 12 分）在对称群 S_7 中，设 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1、求 σ 的逆 σ^{-1} 及 σ 的阶.

2、写出由 σ 生成子群的元素.

3、将 $\sigma\tau$ 表示成对换的乘积.

4、 S_7 中元素比 7 大的阶有哪些？每个阶举例说明.

六、（ 12分 ） 设 R 是整环. 证明： R 上的多项式环是主理想环当且仅当 R 是域.

七、（ 10分 ） 设 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是高斯整数环. 对任意 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 定义 $\varphi(f(x))=f(i)$. 证明 φ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 到 $\mathbb{Z}[i]$ 的环同态满射, 且 $ker\varphi$ 是由 x^2+1 生成的理想.

八、(10分) 设 $R=\mathbb{Z}_3$，$R[x]$ 是未定元 x 的 R 上的多项式环. $f(x)=x^2+[2]x+[2]$, $I=(f(x))$ 是由 $f(x)$ 生成的主理想.

1、证明 I 是 $R[x]$ 的极大理想.

2、求出 $x+I$ 在商环中的乘法逆元.

扬 州 大 学 试 题 纸

院 ____________ 课程 ____________

班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________ 得分 ________

一、（ 16 分）下述命题是否正确？（对的用 $+$, 错的用 $-$ ）.

1、循环群的子群是循环群.　（ ）

2、任一有限群均同构于一变换群.　（ ）

3、设 G 是 n 阶群， m 是 n 的因子，则 G 中存在阶为 m 的子群.　（ ）

4、主理想环的理想是主理想环.

5、模 7 的剩余类环 $\mathbb{Z}_7$ 上的多项式环 $\mathbb{Z}_7[x]$ 是主理想环.　（ ）

6、整环的同态象是整环.　（ ）

7、 $2x+4$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中为不可约多项式.　（ ）

8、设 R 是整环， $a \in R$. 如果 a 是素元，则理想 (a) 是极大理想.　（ ）

二、(12 分)设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集，$G=\{a \in \mathbb{Q} \mid a \neq 1\}$, 在 G 中定义 $a*b=a+b-ab$，验证 G 关于 $*$ 作成群，并求出 2 的阶和 3 的逆元.

三、（ 12 分）叙述群的拉格朗日 (Lagrange) 定理，并证明阶为 $2p$ 的交换群是循环群，其中 $p \neq 2$ 是素数.

四、（ 16 分）设 R 是模 15 的剩余类环 $\mathbb{Z}_{12}$.

1、写出 R 的所有非平凡理想.

2、求出 R 中的所有零因子.

3、写出 R 中的可逆元.（证明你的结论）

4、证明: R 的环自同构只有恒等影射.

五、（ 12 分）在对称群 S_7 中，设 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1、求 σ 的逆 σ^{-1} 及 σ 的阶.

2、写出由 σ 生成子群的元素.

3、将 $\sigma\tau$ 表示成对换的乘积.

4、 S_7 中元素比 6 大的阶有哪些？每个阶举例说明.

六、（ 12 分）设 $\mathbb{Z}[x]$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的多项式环，证明： (x,p) 不是主理想环但是极大理想，其中 p 是素数.

七、（ 14 分）设 $R=\mathbb{Z}_3$，$R[x]$ 是未定元 x 的 R 上的多项式环. $f(x)=x^2+[2]x+[2]$，$I=(f(x))$ 是由 $f(x)$ 生成的主理想.

1、证明 I 是 $R[x]$ 的极大理想.

2、求出 $x+I$ 在商环中的乘法逆元.

八、（ 10 分）

设 G 是交换群. 记 $H=\{a\in H \mid o(a)<\infty\}$. 证明：

1、 H 是 G 的不变子群.

2、在商群 G/H 中，每一非单位元的阶是无穷大.

一、（20分） 下述命题是否正确？（请简要说明理由）.

1、群 G 的不变子群的交是不变子群.

2、域是单环.

3、 4阶群在同构意义下是唯一的.

4、理想 (x) 是 $\mathbb{Z}[x]$ 的极大理想.

二、（16分） 设 G 是由 a 生成的阶数为 18 的乘法循环群.

1、写出 G 的所有子群及这些子群的生成元.

2、求出 a^{1996} 的阶.

3、求出 G 的所有群自同构映射.

三、（14分） 试求出 $\mathbb{Z}_{15}$ 的所有理想及极大理想.

四、（12分） 设 R 是模 12 的剩余类环 $\mathbb{Z}_{12}$ 上的多项式环 $\mathbb{Z}_{12}[x]$.

1、计算 $([2]x^3+[5]x-[2])([4]x^2-[6]x+[6])$.

2、在 R 求出满足 $[1]x^2-[4]=[0]$ 的所有 x.

五、（12分）设 R 是主理想整环， $0\neq a\in R$.

1、当 a 是不可约元时， $R/(a)$ 是域;

2、当 a 是可约元时， $R/(a)$ 不是整环;

3、试举例说明上述结论.

六、（10分）设 A 和 B 是群 G 的不变子群. 如果 $A\cap B=\{e\}$ ，其中 e 是 G 的单位元. 证明：对任意 $a\in A,b\in B$ ，有 $ab=ba$.

七、（12分）设 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是高斯整数环. 1、求出 $\mathbb{Z}[i]$ 中的单位.

2、证明模平方为素数的元是素元.

3、分别求出模为 5 和 13 的互不相伴的素因子.

4、试将 $29-2i$ 分解成素元的乘积.

八、（14分）设 R 是有单位元的交换环. 记 $I=\{a\in R\mid A4fTZn\in\mathbb{N},\ \ a^n=0\}$. I 中的元称为幂零元.

1、证明： I 是 R 的理想.

2、证明在环 R/I 中非零元不是幂零元.

近 世 代 数 测 试 题

姓名 ______ 得分 ______

一、（ 20 分） 下述命题是否正确？（请简要说明理由）.

1、群 G 的元素 a 为 n, 则 a^2 的阶为 $\frac{n}{2}$.

2、有限域的特征一定是素数.

3、循环群的子群是循环群.

4、主理想 (x) 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的极大理想.

二、（ 16 分） 设 G 是由 a 生成的阶数为 18 的乘法循环群.

1、写出 G 的所有子群及这些子群的生成元.

2、求出 a^{2006} 的阶.

3、求出 G 的所有群自同构映射.

三、（ 14 分） 试求出 $\mathbb{Z}_{15}$ 的所有理想及极大理想. 由此, 试求出 $\mathbb{Z}_{15}$ 所有理想及极大理想 (证明你的结论).

四、（ 12 分） 设 R 是模 12 的剩余类环 $\mathbb{Z}_{12}$ 上的多项式环 $\mathbb{Z}_{12}[x]$.

1、计算 $([2]x^3+[5]x-[2])([4]x^2-[6]x+[6])$.

2、在 $\mathbb{Z}_{12}$ 中, 求出满足 $x^2-[4]=[0]$ 的所有 x.

五、（ 12 分） 设整环 $R=\{a+b\sqrt{-5}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. 证明: 9 不是素元且不是唯一分解元.

六、（ 10 分） 设 A 和 B 是群 G 的不变子群. 如果 $A\cap B=\{e\}$, 其中 e 是 G 的单位元. 证明: 对任意 $a\in A, b\in B$, 有 $ab=ba$.

七、（ 16 分） 设 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是高斯整数环.

1、求出 $\mathbb{Z}[i]$ 中的单位.

2、证明模平方为素数的元是素元.

3、分别求出模为 5 和 13 的互不相伴的素因子.

4、试将 $29-2i$ 分解成素元的乘积.