

1. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

其中 $a_{ii} \neq 0, i=1,2,3$.

(1) 写出用 Jacobi 迭代格式求解方程组的矩阵形式 $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + f_J$;

(2) 证明: 若 Jacobi 迭代矩阵 J 满足 $\|J\|_\infty < 1$, 则求解该方程组的 Gauss-Seidel 迭代格式收敛.

2. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

其中 a 为常数, 试写出求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式, 并分析当 a 取何值时该迭代收敛.

3. 试确定 a ($a \neq 0$) 的取值范围, 使得求解方程组

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

的 Jacobi 迭代格式收敛.

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

其中 a, b, c, d, e, f 为常数, 且 $ad \neq bc$.

(1) 分别写出 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式;

(2) 下面情况哪个会发生?

- (a) Jacobi 迭代格式收敛, 且 Gauss-Seidel 迭代格式收敛;
- (b) Jacobi 迭代格式收敛, 且 Gauss-Seidel 迭代格式发散;
- (c) Jacobi 迭代格式发散, 且 Gauss-Seidel 迭代格式收敛;
- (d) Jacobi 迭代格式发散, 且 Gauss-Seidel 迭代格式发散;