建工　蒋津义

1. $x_{k+1}=\dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$, $k=0,1,2\cdots$

证明：设 $\varphi(x)=\dfrac{x(3a+x^2)}{3x^2+a}$, $\varphi(\sqrt{a})=\dfrac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a}$

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

$$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-(x^3+3ax)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2}=\frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$$

$$\varphi''(x)=\frac{3\cdot 2(x^2-a)\cdot 2x(3x^2+a)^2-3(x^2-a)^2\cdot 2(3x^2+a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^4}=\frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$$

$$\varphi'''(x)=\frac{48a(3x^2-a)(3x^2+a)^3-48ax(x^2-a)\cdot 3(3x^2+a)^2\cdot 6x}{(3x^2+a)^6}$$

$\varphi'(\sqrt{a})=\dfrac{3(a-a)^2}{(3a+a)^2}=0$ 　 $\varphi''(\sqrt{a})=\dfrac{48a\sqrt{a}(a-a)}{(3a+a)^3}=0$

$$\varphi'''(\sqrt{a})=\frac{48a(3a-a)\cdot(3a+a)^3-0}{(3a+a)^6}=\frac{3}{2a}\neq 0$$

∴迭代法是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.

∴ $\dfrac{e_{k+1}}{e_k^3}\to\dfrac{1}{3!}\varphi^{(3)}(x^*)$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{2a}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2a}=\frac{1}{4a}$$

2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$

证明由消元公式得

$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$

又∵ $a_{i1}\cdot a_{1j}=a_{1i}\cdot a_{j1}$

∴A为对称矩阵,

∴ $a_{ij}=a_{ji}$.

∴ $a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}$

∴ $a_{ij}^{(2)}=a_{ji}^{(2)}$

∴ A_2 是对称矩阵.

3. $A \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$，$A_2=(a_{ij}^{(2)})_{n-1}$

证明：(1) ∵A为正定矩阵

∴对于任意$\vec{x}\neq\vec{0}$，有$f=\vec{x}^TA\vec{x}>0$

取$\vec{x}=\vec{e_i}^T=(0,0\cdots,1\cdots,0)$

则$\vec{x}^TA\vec{x}=a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$

(2) 由消元公式得

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$$

∵A为对称正定矩阵、

∴$a_{i1}a_{1j}=a_{1i}a_{j1}$

$a_{ij}=a_{ji}$

∴$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}$，$i,j=2,3,\cdots,n$

故A_2也为对称矩阵.

又由$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}=L_1A$，其中

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

∴L_1非奇异，对于$x\neq 0$，由A的正定性有

$L_1^Tx\neq 0$，$(x,L_1AL_1^Tx)=(L_1^Tx,AL_1^Tx)>0$

∴$L_1AL_1^T$正定~~矩阵~~

由$L_1AL_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}}a_1^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$

而$a_{11}>0$，故可知A_2为正定矩阵

由上可得，A_2为对称正定矩阵.

机械工程　　崔俊楠

机械 崔俊楠

1. 设初始值 x_0 充分靠近 $x^*=\sqrt{a}$ 其中 a 为正常数

证明迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$，$k=0,1,2\cdots$

是计算 x^* 的三阶公式　求极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3}$

证明：若设 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$　$\varphi(\sqrt{a})=\frac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a}$

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

以 $\sqrt{a}$ 为不动点　$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-(x^3+3ax)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2}=\frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$

$$\varphi''(x)=\frac{3(x^2-a)\cdot 2x(3x^2+a)^2-3(x^2-a)^2\cdot 2(3x^2+a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^4}=\frac{6x(x^2-a)(3x^2-7a)}{(3x^2+a)^3}$$

$$\varphi'''(x)=\frac{(90x^4+180ax^2-42a^2)(3x^2+a)^3-(-18x^5+60ax^3-42a^2x)\cdot 3(3x^2+a)^2\cdot 6x}{(3x^2+a)^6}$$

$\varphi'(\sqrt{a})=0$　$\varphi''(\sqrt{a})=0$　$\varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}$　迭代法为 $x^*=\sqrt{a}$ 的三阶公式

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3}=\cancel{\lim_{k\to\infty}\cdots}=\frac{\varphi'''(\sqrt{a})}{3!}=\frac{1}{4a}$$

2. 设A是对称矩阵 $a_{11}\neq 0$，经过一步高斯消去法后

A 约化为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$　证明 A_2 是对称矩阵

消元公式~~具有~~ ~~对称称~~ A的对称性.

证明：$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}$

$i,j=2,3\cdots n$

故 A_2 对称.

3. 设 $A=(a_{ij})_n$ 是对称正定矩阵 经过高斯消元后，A约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$ 其中 $A_2=(a_{ij}^{(2)})_{n-1}$ 证明：

(1) A的对角元素 $a_{ii}>0 \quad i=1,2,\cdots n)$

证明：∵A对称正定，所以

$a_{ii}>0 \quad ,i=1,2,\cdots n)$

(2) 证明 A_2 是对称正定矩阵.

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)} \quad i,j=2,3\ldots n)$$

故 A_2 对称.

$$\because \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}=L_1A$$

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

L_1 非奇异 $\forall x\neq 0$ A的正定性有

$L_1^Tx\neq 0 \quad (x,L_1AL_1^Tx)=(L_1^Tx,AL_1^Tx)>0$

故 $L_1AL_1^T$ 正定

$$L_1AL_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}}a_1^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

而 $a_{11}>0$ 故知 A_2 正定.

水利　徐贵颖

1.解：$\varphi(x_k) = x_{k+1} = \dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$，$k=0,1,2\cdots$

则迭代格式为 $\varphi(x) = \dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ 且 $\varphi(\sqrt{a}) = \dfrac{4a\sqrt{a}}{4a} = \sqrt{a}$

$$\varphi'(x) = \frac{(3x^2+3a)(3x^2+a) - x(x^2+3a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2} = \frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2},\ \varphi'(\sqrt{a}) = 0$$

$$\varphi''(x) = 3\cdot\frac{2(x^2-a)\cdot 2x\cdot(3x^2+a)^2 - (x^2-a)^2\cdot 2\cdot(3x^2+a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^4} = \frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^4},\ \varphi''(\sqrt{a}) = 0$$

$$\varphi'''(x) = 48a\cdot\frac{(3x^2-a)(3x^2+a)^4 - x(x^2-a)\cdot 4\cdot(3x^2+a)^3\cdot 6x}{(3x^2+a)^8}$$

$$= -48a\cdot\frac{15x^4-24ax^2+a^2}{(3x^2+a)^5}$$

$$\varphi'''(\sqrt{a}) = -48a\cdot\frac{15a^2-24a^2+a^2}{(4a)^5} = \frac{3}{8a^2} \neq 0$$

∴ 迭代公式 $x_{k+1} = \dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 x^* 的三阶公式

$k\to\infty \Leftrightarrow x \to x^* = \sqrt{a}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3} = \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\varphi(x)-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})^3} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\varphi'(x)}{3(x-\sqrt{a})^2} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\varphi''(x)}{6(x-\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\varphi''(x)-\varphi''(\sqrt{a})}{6(x-\sqrt{a})} = \frac{1}{6}\varphi'''(\sqrt{a}) = \frac{1}{\cancel{6}_{2}}\times\frac{\cancel{3}}{8a^2} = \frac{1}{16a^2}$$

1.题干：

设初始值 x_0 充分靠近 $x^* = \sqrt{a}$，其中 a 为正常数，证明迭代公式 $x_{k+1} = \dfrac{x_k\cdot(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$，$k=0,1,2,\cdots$

是计算 x^* 的三阶导数，并求极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3}$

水利 徐贵颖

二、设 A 是对称矩阵且 $a_{11}\neq 0$，经过一步高斯消去法后，A 约化为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$

证明 A_2 是对称矩阵.

证明：以3阶为例.

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 且 $a_{12}=a_{21}$，$a_{13}=a_{31}$，$a_{23}=a_{32}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}r_1]{r_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}r_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

由 $a_{12}=a_{21}$，$a_{13}=a_{31}$，$a_{23}=a_{32}$ 则 $a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} = a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}$.

$\therefore A_2^T = A_2$ 即 A_2 是对称矩阵.

若 A 为 n 阶.

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 且 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,3\cdots,n)$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}r_1 \\ \vdots \\ r_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}r_1}]{r_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}r_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ 0 & a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{3n}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}-\frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & a_{n3}-\frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{nn}-\frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

由 $a_{ij}=a_{ji}$ 则 $a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} = a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}$

$\therefore A_2^T = A_2$ 即 A_2 是对称矩阵.

水利 徐贵颖

电能　　蒋丽凤

令 $\varphi(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$

迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

$\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$

$\varphi(x)(3x^2+a)=x(x^2+3a)$

求导：$6x\varphi(x)+\varphi'(x)(3x^2+a)=3x^2+3a$

$6\varphi(x)+12x\varphi'(x)+3(x^2+a)\varphi''(x)=6x$

$18\varphi'(x)+18x\varphi''(x)+(3x^2+a)\varphi'''(x)=6$

代入 $x=\sqrt{a}$

$\varphi'(\sqrt{a})=0$　$\varphi''(\sqrt{a})=0$

$\varphi'''(\sqrt{a})=\dfrac{3}{2a}$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{3}{2a}=\dfrac{1}{4a}$

$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}$

$=a_{ji}^{(2)}$，$i,j=2,3\cdots n$

$\therefore A_2$ 是对称矩阵

(1) $\because A$ 对称正定

$\therefore a_{ii}=(Ae_i,e_i)>0$，$i=1,2\cdots n$

其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots0)^T$ 为第 i 个单位向量

(2) $\because A$ 对称

$\therefore a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}$

$i,j=2,3\cdots n$　$\therefore A_2$ 对称

由 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T\\ 0 & A_2\end{bmatrix}=L_1A$，$L_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

$L_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I_{n-1}\end{bmatrix}$

$\therefore L_1$ 非奇异，对 $\forall x\neq0$ 且 A 正定有 $L_1^Tx\neq0$

$(x,L_1AL_1^Tx)=(L_1^Tx,AL_1^Tx)>0$

故 $L_1AL_1^T$ 正定

由 $L_1AL_1^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{a_{11}}a_1^T\\ 0 & I_{n-1}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$

$\because a_{11}>0$

$\therefore A_2$ 正定

机械学院　肖羿

2. 由消元公式及 A 的对称性可得：

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad i,j = 2,3,\cdots,n.$$

故 A_2 对称

3. (1) 因 A 对称正定，

$a_{ii} = (Ae_i, e_i) > 0$, $i = 1,2,\cdots,n$

e_i 为第 i 个单位向量

(2) 由 $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}$, $i,j = 2,3,\cdots,n$

A_2 对称

又因为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 A$, $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & & & 1 \end{bmatrix}$

显然 L_1 非奇异，故对任何 $x \neq 0$ 有

$$L_1^T x \neq 0, \quad (x, L_1, AL_1^T x) = (L_1^T x, AL_1^T x) > 0$$

故 L_1, AL_1^T 正定

又因为 $L_1 A L_1^T \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，而 $a_{11} > 0$，故 A_2 正定.

电能　　王璐

电能学院. 王璐. 计挑战题.　　　　Date:　　/　　/

1. 证明：若设 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$，则 $\varphi(\sqrt{a})=\frac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a}$

迭代公式以 $\sqrt{a}$ 为不动点.

$$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-(x^3+3ax)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2}=\frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$$

$$\varphi''(x)=\frac{3(x^2-a)\cdot 2x(3x^2+a)^2-3(x^2-a)^2\cdot 2(3x^2+a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^4}=\frac{6x(3x^2-7a)(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$$

$$\varphi''(x)=\frac{(-90x^4+180ax^2-42a^2)(3x^2+a)^3+(18x^5-60ax^3+42a^2x)\cdot 3(3x^2+a)^2\cdot 6x}{(3x^2+a)^6}.$$

代入 $\sqrt{a}$. 得：$\varphi'(\sqrt{a})=0$.　$\varphi''(\sqrt{a})=0$.　$\varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}\neq 0$

∴迭代公式是计算 x^* 的三阶公式.

$$\therefore \frac{e_{k+1}}{e_k^3}\to\frac{\varphi^{(3)}(x^*)}{3!}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

2. 证明：记 $A=(a_{ij})=(a_{ij}^{(1)})$ 经过高斯消元一步后.

A_2 的元素为 $a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1j}^{(1)}$

∵ A是对称的.

$\therefore a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}$，$a_{i1}^{(1)}=a_{j1}^{(1)}$.

$\therefore a_{ij}^{(2)}=a_{ji}^{(1)}-\frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1i}^{(1)}=a_{ji}^{(2)}$

∴ A_2 是对称的.

3. 证明：(1). ∵ A对称正定.

∴ $a_{ii}=(Ae_i,e_i)>0$.　$i=1,2,\cdots,n$. 其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ 为第 i 个单位向量.

(2). 由A的对称性和消元公式.

得 $a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}$.　$i,j=2,3,\cdots,n$

∴ A_2 也对称.

又∵ $\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T\\ 0 & A_2\end{bmatrix}=L_1A$. 其中 $L_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I_{n-1}\end{bmatrix}$.

Date: / /

∵ L_1 非奇异. ∴ 对任意 $x \neq 0$, 由 A 的正定性.

得 $L_1^T x \neq 0$, $(x, L_1 A L_1^T x) = (L_1^T x, A L_1^T x) > 0$.

∴ $L_1 A L_1^T$ 正定.

由 $L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} a_1^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

且 $a_{11} > 0$. ∴ A_2 正定.

∴ A_2 是对称正定矩阵.