

# Propriétés de la figure de diffraction

## Ex. 22 – Propriétés de la figure de diffraction

Une source monochromatique ponctuelle  $S_0$  est placée au foyer objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ . On dispose ensuite un écran diffractant  $\mathcal{D}$  percé d'une fente fine horizontale de largeur  $a$ . Enfin, on ajoute une lentille convergente  $\mathcal{L}'$  de même focale que  $\mathcal{L}$ . Un écran d'observation  $\mathcal{E}$  est placé dans le plan focal image de  $\mathcal{L}'$ .

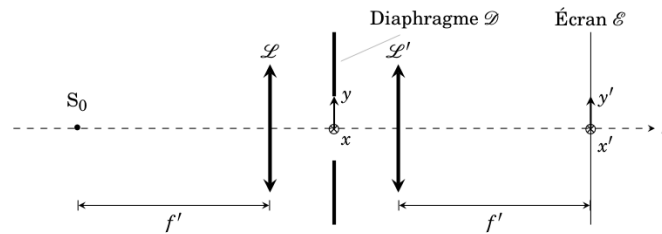


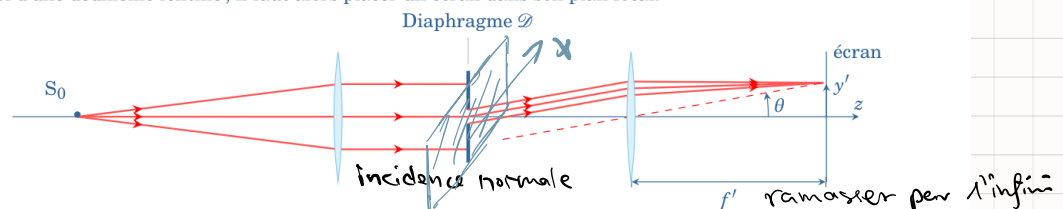
Fig. 4.3 – Dispositif.

On note  $\lambda$  la longueur d'onde de  $S_0$  et  $f'$  la distance focale image des lentilles.

1. Expliquer ce que l'on observe sur  $\mathcal{E}$ . Quel rôle jouent  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$ ?
2. Calculer la répartition de l'intensité  $I(x', y')$  sur l'écran en fonction de  $f'$ ,  $a$ ,  $\lambda$  et  $I_0 = I(0, 0)$ .
3. Que se passe-t-il si on fait subir à  $\mathcal{D}$  :
  - une translation horizontale suivant  $x$ ?
  - une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe optique?
  - un élargissement de la fente d'un facteur deux?
4. La fente ayant retrouvé sa configuration initiale, on déplace la source  $S_0$  verticalement. Que se passe-t-il sur l'écran  $\mathcal{E}$ ?

**Solution :**

1. On observe la figure de diffraction de Fraunhofer par une fente. En effet, la première lentille transforme  $S_0$  en une onde plane arrivant en incidence normale sur la pupille  $\mathcal{D}$ . Celle-ci diffracte la lumière qui interfère à l'infini grâce à l'emploi d'une deuxième lentille ; il faut alors placer un écran dans son plan focal.



2. La fente étant supposée infinie suivant  $x$ , il n'y a pas de diffraction suivant  $x'$  mais uniquement suivant  $y'$ . L'amplitude (complexe) de l'onde diffractée dans la direction définie par l'angle  $\theta$  s'écrit

$$\Psi(\theta) = C^{te} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(P) e^{ik(y \sin \theta)} dy \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

à la surface de la pupille, l'onde s'écrit

$$\Psi(P) = \begin{cases} \Psi_0 & \text{si } |y| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le calcul de l'intégrale donne

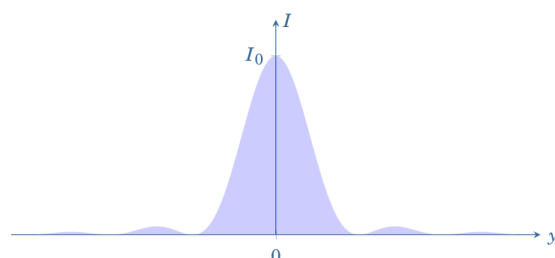
$$\Psi(\theta) = C^{te} a \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$$

La répartition de l'intensité vaut donc

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) \quad \text{avec} \quad I_0 \propto a^2$$

Par ailleurs, dans l'approximation paraxiale, l'angle de diffraction est relié à la position sur l'écran via  $\sin \theta \approx y'/f'$ . Ainsi, on observe une tache de diffraction sur l'axe verticale de l'écran suivant la relation

$$I(0, y') = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a y'}{f' \lambda} \right) \quad \text{avec} \quad I_0 \propto a^2$$



3. • Translater la pupille suivant  $y$  d'une distance  $d$  revient à faire la transformation  $y \rightarrow y - d$ . Si l'on reprend le calcul de l'amplitude, on obtient la transformation suivante :

$$\Psi(\theta) \rightarrow \Psi(\theta) e^{-ikd \sin \theta}$$

Autrement dit cela n'affecte pas le module de  $\Psi$  mais simplement sa phase. L'intensité  $I = |\Psi|^2$  reste donc inchangée.

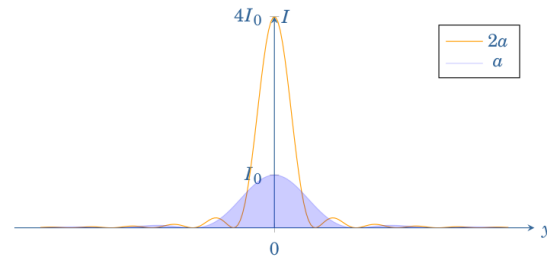
- Tourner la pupille de  $\pi/2$  autour de l'axe  $z$  revient à effectuer l'opération  $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ . Il y a alors diffraction dans le plan horizontal, et la répartition de l'intensité s'écrit

$$I(x', 0) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a x'}{f' \lambda} \right) \quad \text{avec} \quad I_0 \propto a^2$$

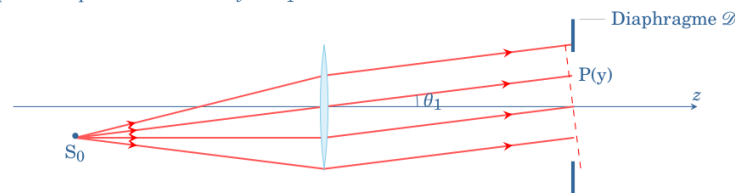
- Dilater la fente d'un facteur deux revient à transformer  $a \rightarrow 2a$ . Dans ce cas, la nouvelle intensité s'écrit

$$I' = 4I(2y')$$

Autrement dit, le phénomène est 4 fois plus lumineux mais la figure de diffraction subit une contraction d'un facteur deux.



4. Supposons que l'on déplace la source vers le bas. Dans ce cas, l'onde qui émerge de la lentille est une onde plane mais oblique, faisant un angle  $\theta_1$  par rapport à l'axe optique. Les points de la pupille diffractante ne vibrent plus en phase. Notamment, le point P d'ordonnée  $y$  est en retard de phase par rapport au centre du diaphragme. La différence de chemin optique correspondante vaut  $\delta = y \sin \theta_1$ .



Aussi a-t-on

$$\Psi(P) = \begin{cases} \Psi_0 e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} y \sin \theta_1} & \text{si } |y| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reprenant le calcul de la question 2, on s'aperçoit très vite qu'il suffit de remplacer  $\sin \theta$  par  $\sin \theta - \sin \theta_1$ . Finalement, la répartition de l'intensité s'écrit

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a (\sin \theta - \sin \theta_1)}{\lambda} \right) \quad \text{avec} \quad I_0 \propto a^2$$

La tache de diffraction s'est donc déplacée vers le haut d'un angle  $\theta = \theta_1$ . En d'autres termes, le centre de la tache de diffraction suit l'image géométrique qui est placée en un angle  $\theta = \theta_1$  (l'image géométrique est renversée).

## Diffraction par un réseau de fentes

### Ex. 23 - Diffraction par un réseau de fentes

Un réseau de  $N$  fentes de largeur  $\ell$  et de pas  $a$  est éclairé en incidence normale, par une onde plane provenant d'une lampe à vapeur de Sodium ( $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ ). On observe la lumière diffractée dans la direction  $\theta$  à l'aide d'un goniomètre (on forme alors un spectro-goniomètre). On considérera les fentes assez longues (longueur  $L \gg \ell$ ) pour que la diffraction verticale soit négligée. La fonction transparence du réseau s'écrit

$$t(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x - ka)$$

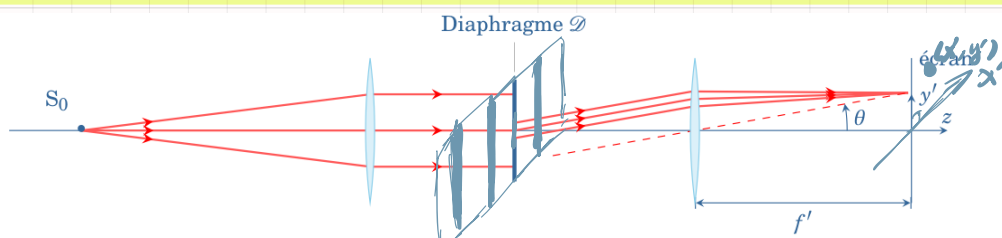
où  $f(x)$  est la transparence d'une fente.

1. Exprimer l'intensité de la lumière diffractée  $I_f(\theta)$  par une seule fente en fonction de  $f(x)$ .
2. En déduire l'intensité de la lumière diffractée par le réseau en fonction de  $I_f(\theta)$ ,  $N$ ,  $\ell$  et  $\lambda$ .
3. La fonction transparence d'une fente s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < \frac{\ell}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer  $\ell$  sachant que la tache principale de diffraction due à une seule fente présente une largeur angulaire de  $90^\circ$ .

4. Le réseau porte l'indication *400 lines per inch* (1 inch = 2,54 cm). Combien de pics d'interférence observera-t-on à l'intérieur de la tache principale de diffraction ?



1. Il s'agit ici de diffraction à l'infini, car on observe la répartition de l'intensité dans le plan focal de l'objectif. Dans l'approximation de Fraunhofer, l'onde diffractée par une fente s'écrit (en notation complexe)

$$\Psi(\theta_x, \theta_y) = C^{\text{te}} \iint f(x) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy$$

Puisque l'on néglige la diffraction verticale ( $\theta_y = 0$ ), le calcul se résume à

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta)} dx$$

L'intensité de l'onde diffractée par une fente dans la direction  $\theta$  est donc proportionnelle à

$$I_f(\theta) \propto L^2 \left| \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta)} dx \right|^2$$

2. Pour le réseau, l'onde diffractée à l'infini s'écrit

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \int_0^{Na} t(x) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta)} dx \quad \text{avec} \quad t(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x - ka)$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale :

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \sum_{k=0}^{N-1} \int f(x - ka) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} dx$$

Posons le changement de variable  $u = x - ka$  :

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} ka \sin \theta} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(u) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta} du$$

l'intégrale ne dépend pas de  $k$  ; on peut la mettre en facteur de la somme :

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \left[ \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(u) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta} du \right] \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} ka \sin \theta}$$

Différents réseaux  $\Rightarrow$  changement de  $f(x)$

On reconnaît dans la somme les termes d'une suite géométrique de raison  $e^{i(2\pi a \sin \theta)/\lambda}$ , d'où

$$\Psi(\theta) = L C^{\text{te}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(u) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta} du \times \frac{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} N a \sin \theta}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta}}$$

**Remarque :** rappelons que  $1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x}$

L'intensité de la lumière diffractée par le réseau est donc proportionnelle à

$$I(\theta) \propto L^2 \left| \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(u) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta} du \right|^2 \left| \frac{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} N a \sin \theta}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta}} \right|^2$$

Le premier terme s'identifie à l'intensité diffractée par une fente. Le dernier terme (terme d'interférence) se simplifie (posons  $x = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$ ) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right|^2 &= \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \times \frac{1 - e^{-iNx}}{1 - e^{-ix}} \\ &= \frac{2 - 2\cos(Nx)}{2 - 2\cos x} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right|^2 = \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Finalement, l'intensité de la lumière diffractée par le réseau s'écrit

$$I(\theta) = I_f(\theta) \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]^2$$

Le terme d'interférence est modulée par le terme de diffraction dû à une fente.

3. Calculons l'intensité diffractée par une seule fente

$$I_f(\theta) \propto L^2 \left| \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta)} dx \right|^2 = (L\ell)^2 \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi \ell \sin \theta}{\lambda}\right) \right|^2$$

La largeur angulaire de la tache principale est donnée par

$$\left| \frac{\pi \ell \sin \theta}{\lambda} \right| < \pi \quad \text{soit} \quad |\sin \theta| < \frac{\lambda}{\ell}$$

Ici, on a  $|\theta| < \pi/4$  d'où

$$\frac{\lambda}{\ell} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ell = 0,83 \mu\text{m}$$

4. À chaque fois que le terme d'interférence atteint un maximum absolu, on observe un pic d'interférence. C'est le cas lorsque

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = p\pi \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Le réseau présente 400 fentes/ inch soit  $a = 2,54 \text{ cm}/400 = 63,5 \mu\text{m}$ . Les pics d'interférences qui se trouvent à l'intérieur de la tache principale de diffraction vérifient :

$$|\sin \theta| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{d'où} \quad |p| < \frac{a\sqrt{2}}{2\lambda} = 76,2$$

Il y a 153 valeurs entières ( $p = -76, \dots, 76$ ) qui vérifient cette condition ; on verra donc 153 pics d'interférence.