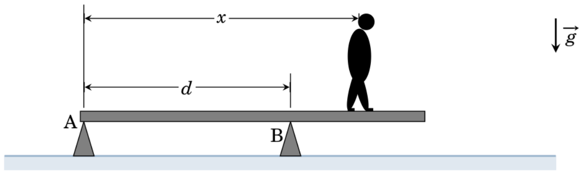
Mécanique 1 Exo

Basiques

1.

Ex. 1 – Équilibre sur une poutre 定义.

Une poutre de masse $M = 100$ kg et de longueur $\ell = 5$ m, repose sur deux supports A et B distants de $d = 3$ m. Un individu de masse $m = 75$ kg se déplace le long de la poutre en partant de l'extrémité A.



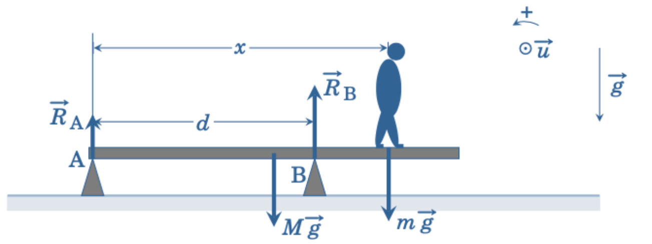
1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la poutre.
2. Exprimer les moments en B de chacune des forces. En déduire la réaction du support A sur la poutre en fonction de x.
   计算力
3. À quelle distance maximale peut s'éloigner l'individu tout en conservant l'équilibre de la poutre ?

共线、点重合 : $\vec{M}_A(\vec{F}_B) = 0$

注意顺序 : $\vec{M}_A(\vec{F}_B) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$

通过 Etat Equilibre 推出等式

1. La poutre subit quatre forces : la pesanteur $\vec{P} = M\vec{g}$ appliquée en son centre (poutre homogène), l'action de l'individu $\vec{R}$, l'action $\vec{R}_A$ du support A et $\vec{R}_B$ celle du support B. En l'absence de frottement, ces deux dernières forces sont perpendiculaires à la poutre. L'individu n'étant pas accéléré verticalement on a $\vec{R} = m\vec{g}$.

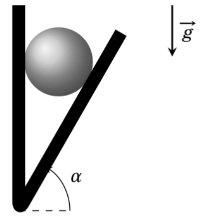


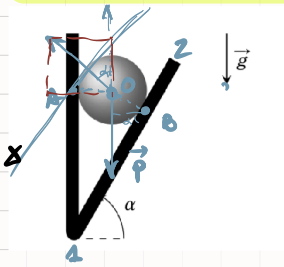
2. Tout d'abord, les moments des forces calculés en B sont tous colinéaires au vecteur $\vec{u}$, perpendiculaire à la feuille (voir figure).
   La réaction $\vec{R}_B$ s'applique en B de sorte que son moment en B est nul.
   La réaction $\vec{R}_A$ présente un bras de levier d et tend à faire tourner la poutre autour de B dans le sens négatif. C'est pourquoi son moment vaut $\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_A) = -R_A d\,\vec{u}$.
   Le bras de levier du poids de la poutre vaut $d - \ell/2$ et son action tend à faire tourner la poutre autour de B dans le sens positif. Son moment vaut donc $\vec{\mathcal{M}}_B(M\vec{g}) = (d - \ell/2)Mg\ell\,\vec{u}$.
   Enfin, le poids de l'individu présente un bras de levier égal à $x - d$ et un moment orienté suivant $-\vec{u}$. Par conséquent, son moment vaut $\vec{\mathcal{M}}_B(m\vec{g}) = -mg(x-d)\,\vec{u}$.
   La poutre étant à l'équilibre, la somme des moments est nulle. On en déduit
   $$R_A = (M+m)g - \frac{Mg\ell}{2d} - \frac{mg}{d}x = 898{,}3 - 245x$$
3. La poutre conserve son équilibre tant qu'il reste en contact avec A, c'est-à-dire tant que $R_A > 0$. Cette condition aboutit à
   $$x < x_{\max} = \frac{M}{m}\left(d - \frac{\ell}{2}\right) + d = 3{,}67\,\text{m}$$

□□ Ex. 2 – Sphère entre deux plans

Une sphère de masse $m = 4$ kg s'appuie entre deux cloisons, l'une verticale, l'autre inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontal. On suppose les forces de frottement négligeables.

Calculer les réactions des cloisons sur la sphère.





$$\sum_i \vec{M}_{\cancel{O}}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow \cancel{\vec{M}_O(\vec{P})} + \cancel{\vec{M}_O(\vec{R}_2)} + \cancel{\vec{M}_O(\vec{R}_1)} = 0$$

✗ 不要对重心进行分析

Bras de Levier : ① 确定投影的轴、过轴点 ② 构建与力的向量直角三角形

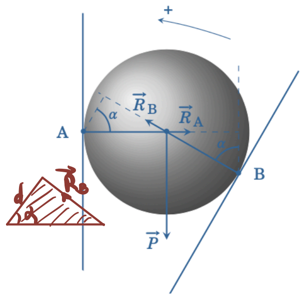
Ex. 2, page 8 — On obtient les réactions en appliquant le théorème du moment cinétique aux points A et B. La sphère étant au repos, la somme des moments des forces est nulle.
Appelons a le rayon de la sphère et exprimons le moment des forces par rapport à un axe (Δ) passant par A et perpendiculaire à la feuille :

- L'action de contact $\vec{R}_A$ étant appliquée en A, son moment est nul.
- La pesanteur présente un bras de levier $d = a$. Par rapport à cet axe, le poids tend à faire tourner la sphère dans le sens négatif d'où

$$\mathcal{M}_A(\vec{P}) = -mga$$

- La réaction $\vec{R}_B$, appliquée en B, présente un bras de levier $d = a\cos\alpha$ (voir schéma). Ainsi, son moment vaut

$$\mathcal{M}_A(\vec{R}_B) = +R_B a\cos\alpha$$



例如确定垂直纸面为轴，
所有纸面上的力均垂直。

À l'équilibre, les moments se compensent de sorte que

$$R_B a\cos\alpha - mga = 0 \implies R_B = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

- L'action de contact $\vec{R}_B$ étant appliquée en B, son moment est nul.
- La pesanteur présente un bras de levier $d = a\sin\alpha$. Par rapport à cet axe, le poids tend à faire tourner la sphère dans le sens positif d'où

$$\mathcal{M}_B(\vec{P}) = +mga\sin\alpha$$

- La réaction $\vec{R}_A$, appliquée en A, présente un bras de levier $d = a\cos\alpha$ et tend à faire tourner le système dans le sens négatif. Ainsi, son moment vaut

$$\mathcal{M}_B(\vec{R}_A) = -R_A a\cos\alpha$$

L'équilibre des moments donne

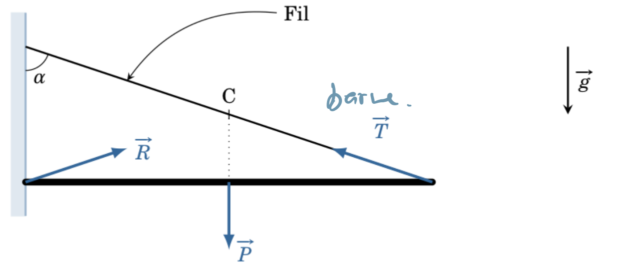
$$mga\sin\alpha - R_A a\cos\alpha = 0 \implies R_A = mg\tan\alpha$$

Numériquement, on obtient

$$R_A = mg\sqrt{3} \simeq 67{,}9\,\mathrm{N} \quad \text{et} \quad R_B = 2mg \simeq 80\,\mathrm{N}$$

□□ Ex. 4 – Équilibre d'une barre

On considère une 杠 barre maintenue horizontalement contre un mur à l'aide d'un fil fixé à son extrémité et à un point du mur (*cf.* figure ci-dessous). La barre a pour masse m et pour longueur ℓ, le fil quant à lui est de masse négligeable et fait un angle $\alpha = 70°$ par rapport au mur. On note $\vec{T}$ l'action du fil sur la barre, $\vec{P}$ le poids de la barre, $\vec{R}$ l'action du mur sur la barre et $\vec{g}$ le champ de pesanteur.



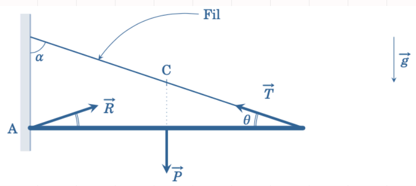
1. La droite d'action du poids coupe le fil au point C. Calculer le moment du poids et de la tension au point C. En déduire que les trois forces $\vec{T}$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ son concourrantes au point C, c'est-à-dire que ces trois forces ont leur droite d'action qui passe par le point C.
2. Exprimer R et T en fonction de m, g et α.
3. Le contact entre le mur et la barre est caractérisé par un coefficient de frottement $\mu = 0{,}4$. Montrer que la barre ne glisse pas.
4. On remplace le fil par un fil plus long de sorte que l'angle α diminue de 20%. La barre restera-t-elle en équilibre ?

Moment 分析单个力时，可以与分析物体无关

1. La droite support du poids passe par C, donc son moment en C est nul. Pour les mêmes raisons, le moment de $\vec{T}$ en C est nul.

La barre est en équilibre, donc, $\vec{M}_C(\vec{F}_{tot}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \cancel{\vec{M}_C(\vec{T})} + \cancel{\vec{M}_C(\vec{P})} + \vec{M}_C(\vec{R}) = 0$$



$\Leftrightarrow M_C(\vec{R}) = 0$.

$\Leftrightarrow \vec{CA} \wedge \vec{R} = 0$

$\vec{CA} \neq \vec{0}$, $\vec{R} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{CA} \,//\, \vec{R}$

2. La barre étant en équilibre, $\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = 0$

$$\begin{cases} R\cos\theta = T\cos\theta \\ R\sin\theta + T\sin\theta = P \end{cases}$$

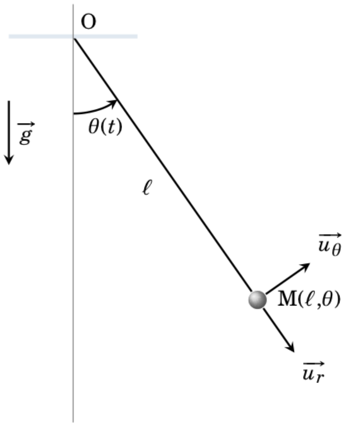
Donc $R = T = \dfrac{mg}{2\cos\alpha}$. $\sin\theta$

3. $f = R\sin\theta < \mu N = \mu \dfrac{f}{\tan\theta}$ assuré.

4. $f = \tan\theta N = 0{,}67N > \mu N$ pas possible.

□□□ Ex. 6 – Le pendule simple

Considérons un pendule simple oscillant dans un plan vertical d'un référentiel terrestre galiléen. On repère la position du point matériel à l'aide de l'angle $\theta(t)$.



$\vec{u_z}$

1. Calculer le moment des forces par rapport à l'axe (Δ) passant par O et perpendiculaire au plan d'oscillation.
2. Exprimer le moment cinétique $L_\Delta(\mathrm{M})$ du point matériel.
3. À l'aide du théorème du moment cinétique, trouver l'équation différentielle que vérifie $\theta(t)$.
4. Que devient l'équation différentielle si l'on modélise les frottements par une force ortho-radiale $f = -\alpha\dot{\theta}$?
5. Comment faut-il choisir les caractéristiques du pendule, si l'on veut que les oscillations durent le plus longtemps possible ?

1. Le point matériel est soumis à deux forces : la tension du fil et le poids. La tension présente un moment en O nul puisque sa droite d'action passe par O. Quant au poids, son bras de levier vaut $\ell\sin\theta$ et son action tend à faire tourner le pendule dans le sens négatif d'où un moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta$. Le moment résultant vaut donc

   注意负号

$$\sum \mathcal{M}_\Delta = -mg\ell\sin\theta$$

2. Le moment cinétique vaut, par définition

$$\vec{L}_\mathrm{O} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v} = (\ell\vec{u_r}) \wedge (\ell\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

   La projection de ce moment sur l'axe Oz donne donc $L_\Delta = m\ell^2\dot{\theta}$.

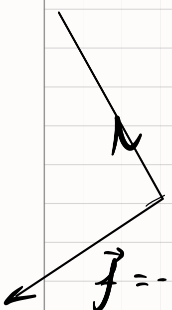
3. Le théorème du moment cinétique s'énonce ainsi : dans un référentiel galiléen, un point matériel soumis à des forces $\vec{f_i}$ voit son moment cinétique évoluer au cours du temps via la relation

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{f_i})$$

   où L_Δ désigne le moment cinétique par rapport à un axe fixe et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$ le moment d'une force par rapport à ce même axe. Ici, cela donne

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

4. Il faut ajouter dans le bilan des moments celui dû à la force de frottement. Celle-ci présente un bras de levier $d = \ell$ par rapport à l'axe Δ passant par O. De plus, son moment est négatif quand θ croît et positif quand ~~θ décroît~~. Ainsi, son moment vaut $\mathcal{M}_\Delta(f) = -\alpha\dot{\theta}\,\ell$. En ajoutant ce terme dans la somme des moments, on trouve l'équation différentielle



$\vec{f} = -\alpha\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m\ell}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

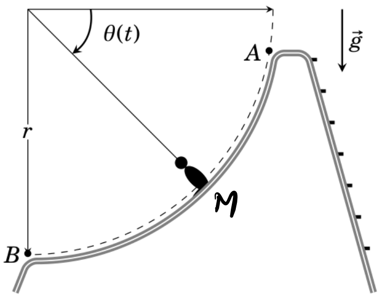
5. Pour les petits angles $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation décrit le comportement d'un oscillateur harmonique amorti. L'amplitude s'amorti de façon exponentielle comme $\exp(-\frac{\alpha}{2m\ell}t)$. Le temps caractéristique vaut donc

$$\tau = \frac{2m\ell}{\alpha}$$

   Si l'on veut que les oscillations durent le plus longtemps possible on choisira un long pendule (ℓ grand) et un objet dense (masse grande et α petit).

□□□ Ex. 7 – Le toboggan

Un enfant - que l'on assimilera à un point matériel M de masse $m = 40$ kg - glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5$ m. L'enfant, initialement en A ($\theta_A = 10°$), se laisse glisser (vitesse initiale nulle) et atteint le point B ($\theta_B = 90°$) avec une vitesse v. On supposera le référentiel terrestre galiléen et les frottements négligeables.



1. À l'aide du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. À partir de cette équation, exprimer la vitesse en fonction de θ. Calculez v en B.

计算速度：$v = r\dot{\theta}$，积分 $\ddot{\theta}$

1. TMC $\Rightarrow$ $$\frac{d\vec{L}_M}{dt} = \sum_i \mathcal{M}(\vec{F}_i) = \cancel{\mathcal{M}(\vec{T})} + \mathcal{M}(\vec{P})$$

$$m \cdot r\vec{e}_r \cdot r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = mg \cdot r\cos\theta \, \vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0$$

2. Intégration $\Rightarrow$ $$\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\cos\theta$$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\cos\theta \;/\; \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{r}\sin\theta + \mathcal{C}$$

(CI) $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = -\frac{g}{r}\sin\theta_A$

Sachant que $v = r\dot{\theta}$, donc

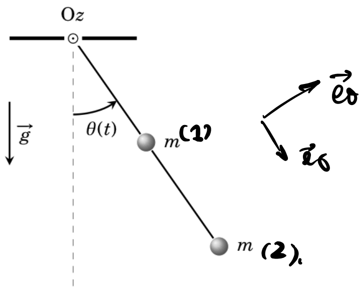
$$\frac{1}{2r^2}v^2 = \frac{g}{r}(\sin\theta - \sin\theta_A)$$

$$v = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_A)}$$

(AN). $\theta = \pi/2$, $v_B = 6{,}36 \ m \cdot s^{-1}$

□□ Ex. 11 – Pendule lesté

Considérons un pendule formé d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur ℓ sur laquelle on sont fixées deux masses m identiques, l'un au centre de la tige, l'autre à son extrémité. À $t = 0$ on lâche le pendule à partir d'un angle θ_0, et l'on étudie le mouvement d'oscillation du pendule décrit par l'angle $\theta(t)$ dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.
Le référentiel terrestre est supposé galiléen et tout frottement est négligé.



1. Faire un bilan des forces extérieures agissant sur la tige. Exprimer le moment de ces forces en O.
2. Exprimer le moment cinétique du système par rapport à O.
3. En déduire que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5\ell}\sin\theta = 0$$

4. Quelle équation trouve-t-on si l'on remplace les deux masses par une masse ponctuelle $2m$ située au centre de masse du pendule ? Commenter.

1. Les poids de deux masses $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$

action de contact $\vec{R}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{1,2}) = \vec{OM_1} \wedge \vec{P}_{1,2} = \vec{OM_1} \wedge m_1\vec{g} + \vec{OM_2} \wedge m_2\vec{g}$

$= -\frac{3}{2} mg\ell\sin\theta\,\vec{u}_z$

2. $\vec{L}_O = \vec{OM_1} \wedge m\vec{v}_1 + \vec{OM_2} \wedge m\vec{v}_2$

$= (\frac{\ell}{2}\vec{e}_r) \wedge m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$= \frac{5}{4} m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$

3. TMC $\Rightarrow$ $\frac{5}{4} m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} mg\ell\sin\theta$

$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5l}\sin\theta = 0$

4. On peut reprendre l'analyse avec une tige formée d'un point de masse $2m$ placé à la distance $3\ell/4$. Le moment des forces vaut alors

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = -\frac{3}{4}\ell \times 2mg \times \sin\theta\,\vec{u_z} = -\frac{3}{2}mg\ell\sin\theta\,\vec{u_z}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.
Quant au moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}\ell \times (2m)(\frac{3}{4}\ell\ddot{\theta})\vec{u_z} = \frac{9}{8}m\ell^2\ddot{\theta}\,\vec{u_z}$$

Le résultat est différent. L'équation différentielle est également différente puisque l'on trouve

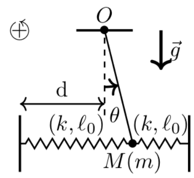
$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3\ell}\sin\theta = 0$$

En conclusion, on ne peut pas assimiler le pendule lesté à un point de masse $2m$ situé au centre de masse. En général, la dynamique d'un solide en rotation n'est pas la même que celle d'un point matériel situé au centre de masse.

Moyenne

1.2. *Pendule à ressorts*

Un pendule est constitué d'une masse m attaché à un fil de longueur ℓ. La masse est de plus fixée à deux ressorts identiques placés symétriquement par rapport à la verticale. L'angle θ repère la position de la masse par rapport à la verticale. On se place dans la limite des petits angles, de telle sorte que le mouvement de la masse soit quasi-horizontal.



1. On note $\vec{u}_z$ le vecteur normal au plan du système. Calculer les moments scalaires par rapport à Oz des différentes forces s'exerçant sur la masse.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver l'équation régissant les petites oscillations de la masse. Retrouvez-la avec un théorème énergétique.
3. Quelle est la période de ces oscillations ?

注意弹簧力的方向，右手定则方向

1. Référentiel : supposé galiléen, terreste

Système : M

Bilan des forces : Poids $P = mg\vec{u_y}$

Force de tension du fil : $\vec{T}$

Tension de ressort à gauche : $\vec{T_g} = -k(AM - l_0)\vec{u_x}$

— — — — — droite : $\vec{T_d} = k(BM - l_0)\vec{u_x}$

$\vec{OM} = l(\sin\theta\,\vec{u_x} - \cos\theta\,\vec{u_y})$

$$\frac{dL}{dt} = M_{\vec{e_z}}(\vec{P}) + M_{\vec{e_z}}(\vec{F_g}) + M_{\vec{e_z}}(\vec{F_d})$$ des calculer respectivement

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - 2kl^2\sin\theta\cos\theta$$

2. θ est petit, donc $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

3. Alors, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta + \frac{2k}{m}\theta = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$