TOPOLOGIE

Projet 2

Auteurs
Simon Brenton Edward

June 4, 2023

Contents

1 Exercice 1

1. Non, il n'est pas toujours vrai.

   Si on prend $E = R$, muni de la norme $|| \cdot ||_1$, et $X =]-1, 1]$, et $Y = [2, +\infty[$, alors $d_H(X, Y)$ tend vers l'infini.

   On le montre par l'absurde:

   Supposons que $\underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y) = d_1$, alors on prend $x_1 = 2 + d_1$, alors $d(x_1, Y)$ sera plus grand que d_1, absurde !

   On peut donc conclure que la Disance de Hausdorff, qui est égale à

   $$max\{\underset{y \in Y}{sup}\, d(y, X), \underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)\}$$

   est encore plus grande que $\underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)$, donc tend vers $+\infty$.

2. Non.

   Si on prend le même espace E muni de la même distance qu'avant, et prenons $X = Q$, $Y = R \backslash Q$, donc:

   $$\forall x \in X, \forall y \in Y, d(x, Y) = d(y, X) = 0$$

   On en déduit:

   $$d_H(X, Y) = max\{\underset{y \in Y}{sup}\, d(y, X), \underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)\} = 0$$

   mais $X \neq Y$.

3. Oui.

   Si la distance bien existe. C'est parce que:

   $$\begin{aligned} d_H(Y, X) &= max\{\underset{y \in Y}{sup}\, d(y, X), \underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)\} \\ &= max\{\underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y), \underset{y \in Y}{sup}\, d(y, X)\} \\ &= d_H(X, Y) \end{aligned} \tag{1}$$

4. On procède par l'étapes suivantes :

   Première propriété:

   $$\forall (X, Y) \in E^2, X, Y compacts, d_H(X, Y) \geq 0$$

   Démonstration:

   Car $d_H(X, Y) = max\{\underset{y \in Y}{sup}\, d(y, X), \underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)\}$, on peut déduire que $d_H(X, Y) \geq \underset{x \in X}{sup}\, d(x, Y)$, qui est bien supérieure ou égale à 0, comme d est une distance bien définie dans E.

Deuxième propriété:

$$d_H(X,Y) = 0 \iff X = Y$$

Démonstration:

- *Sens direct:*

Supposons que $d_H(X,Y) = 0$, alors $max\{\underset{y\in Y}{sup}\, d(y,X), \underset{x\in X}{sup}\, d(x,Y)\} = 0$, et car les distance sont toujours supérieures ou égale à 0, on peut dire que:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, d(x,Y) = d(y,X) = 0$$

Par l'absurde, supposons que $X \neq Y$, alors il existe x_0 tel que $x_0 \in X$, mais $x_0 \notin Y$, tel que $d(x_0, Y) = 0$.

Car X, Y sont tous compacts, on aura qu'il existe bien $y_0 \in Y$ tel que $d(x_0, y_0 = 0$, et d'après la propriété de distance, on a $x_0 = y_0$, donc $x_0 \in Y$, absurde!

- *Sens indirect:* Supposons que $X = Y$, alors

$$\forall x \in X, d(x,Y) = d(x,X) = 0$$

on peut déduire que $d_H(X,Y) = 0$

Troisième propriété:

$$\forall (X,Y) \in E^2, X, Y \text{ compacts}, d_H(X,Y) = d_H(X,Y)$$

Démonstration:

C'est vrai parce que l'on a déjà montré dans la question 3 que, c'est vrai pour tous $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, qui est une situation plus générale.

Quatrième propriété:

$$\forall (X,Y,Z) \in E^3, X, Y, Z \text{ compacts}, d_H(X,Y) + d_H(Y,Z) \geq d_H(X,Z)$$

Démonstration:

On sait que:

$$\begin{aligned}
&d_H(X,Y) + d_H(Y,Z) \\
&= \max\{\underset{y\in Y}{sup}\, d(y,X), \underset{x\in X}{sup}\, d(x,Y)\} + \max\{\underset{y\in Y}{sup}\, d(y,Z), \underset{z\in Z}{sup}\, d(z,Y)\} \\
&\geq \max\{\underset{x\in X}{sup}\, d(x,Y) + \underset{y\in Y}{sup}\, d(y,Z), \underset{y\in Y}{sup}\, d(y,X) + \underset{z\in Z}{sup}\, d(z,Y)\}
\end{aligned}$$

En fait, $\underset{x \in X}{sup}\, d(x,Y) + \underset{y \in Y}{sup}\, d(y,Z)$ est forcément supérieur ou égal à $d_H(X,Z)$

2 Exercice 2

Notations

- $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ une suite de K

$$\underline{x_n} = \left(x_n^{(0)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) \in \prod_{t=0}^{p} K_t^{\mathbb{N}}$$

- $(x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}} \in K_p^{\mathbb{N}}$ une suite de K_p, qui est la projection de $\left(\underline{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur K_p
- $(\underline{x_{\phi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$
- $\underline{\lambda}$ un vecteur dans K :

$$\underline{\lambda} = \left(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)}\right)$$

Solution

Comme $(E_0, d_0), \ldots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques compactes, soit $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ une suite de K

$$\underline{x_n} = \left(x_n^{(0)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) \in \prod_{t=0}^{p} K_t^{\mathbb{N}}$$

On construit une sous-suite $(\underline{x_{\phi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de manière suivant :

- On partir de la suite $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme K_0 est compacte, de la suite $\left(x_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on extrait une sous-suite $\left(x_{\phi_0(n)}^{(0)}\right)$ qui tend vers $\lambda^{(0)} \in K_0$.
- Revient à la suite $\left(\underline{x_{\phi_0(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme K_1 est compacte, de la suite $(x_{\phi_0(n)}^{(1)})$, on extrait une sous-suite $\left(x_{\phi_0\circ\phi_1(n)}^{(1)}\right)$ qui tend vers $\lambda^{(1)} \in K_1$.
- On continue de même façon pour tout $p \in \mathbb{N}$, on extrait une sous-suite $\left(x_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_p(n)}^{(p)}\right)$ qui tend vers $\lambda^{(p)} \in K_p$.
- Finalement, en notant $\phi = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \ldots \phi_p$, on obtient une sous-suite $\left(\underline{x_{\phi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\underline{x_n})_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, qui suffit :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon_p > 0,\ \exists N_p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_p, d_p\left(x_{\phi(n)}^{(p)},\ \lambda^{(p)}\right) < \varepsilon_p$$

- Le premier terme de cette sous-suite va être déterminer.

Pour montrons que K est une espace métrique compacte, il suffit de montrer que la sous-suite $\left(\underline{x_{\phi(n)}}\right)$ que nous avons construit converge vers cette valeur, c'est-à-dire :

$$\underline{x_{\phi(n)}} = \left(x_{\phi(n)}^{(0)}, \ldots, x_{\phi(n)}^{(p)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \left(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(p)}\right) = \underline{\lambda} \in \prod_{t=0}^{p} K_t$$

Soit $\varepsilon > 0$, on prend $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = \varepsilon/2$, donc il existe les valeurs de $N_1,\ N_2, \ldots, N_p$.

On prend $N = \min(N_1, N_2, \ldots, N_p)$, et on constuit une nouvelle sous-suite $\left(\underline{x'_{\phi(n)}}\right)$ qui est une partie de $(\underline{x_{\phi(n)}})$, seulement à partir de N (on peut aisément vérifier il est bien définie, car il a des termes infines), alors :

$$d(\underline{x_{\phi(n)}}, \underline{\lambda}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} . \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Par conséquent, on a bien montré que K est une espace métrique compacte.

3 Exercice 3

Notations

- $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$
- $C = \{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1\}$

On veut montrer que $Conv(A) = C$, donc on peut montrer par double inclusion.

$Conv(A) \subset C$

Tout d'abord, montrons que C est bien convexe. Soit M et N deux points dans l'ensemble C et $\forall t \in [0, 1]$, on considère le point $tM + (1-t)N$.

Soit $M = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i$ et $N = \sum_{i=1}^{d} \lambda'_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = \sum_{i=1}^{d} \lambda'_i = 1$.Donc,

$$\begin{aligned} tM + (1-t)N &= t\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i + (1-t)\sum_{i=1}^{d} \lambda'_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{d} (t\lambda_i + (1-t)\lambda'_i) x_i \end{aligned}$$

et comme on a $\sum_{i=1}^{d}(t\lambda_i + (1-t)\lambda'_i) = t\sum_{i=1}^{d} \lambda_i + (1-t)\sum_{i=1}^{d} \lambda'_i = 1$, le point $tM + (1-t)N$ est bien dans l'ensemble C, donc C est convexe.

De plus, d'après la définition, $Conv(A)$ est le plus petit convexe contenant A. Or C est aussi un convexe contenant A, donc C contient $Conv(A)$.

$C \subset Conv(A)$

C'est-à-dire montrer que s'il y a d points $\{x_1, \ldots, x_d\}$ dans Conv(A), pour tous les systèmes de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ positives ou nulles avec $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1$, le point $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i$ appartient à Conv(A). On le note H_d.

Montrons par récurrence que H_d est vraie pour tout $d \geq 1$.

Initialisation:

Lorsque $d = 1$, on a $\lambda_1 = 1$, le point x_1 est bien dans Conv(A), donc H_1 est vraie.

Hérédité:

Supposons que H_n est vraie jusqu'à l'ordre d-1 et on considère le point $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i$.

Si $\lambda_1 = 1$, il y a rien à montrer, c'est le même avec le premier cas.

Si $\lambda_1 < 1$, alors $\sum_{i=2}^{d} \lambda_i = 1 - \lambda_1 > 0$. On pose $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}$, $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$, alors $\sum_{i=2}^{d} \mu_i = 1$.

Comme on a supposé que H_{d-1} est vraie, donc le point $\sum_{i=2}^{d} \mu_i x_i$ est bien dans $Conv(A)$. On le note y. Or $x_1 \in Conv(A)$, donc :

$$\sum_{i=2}^{d} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) y \in Conv(A)$$

car $x_1 \in Conv(A)$, $y \in Conv(A)$, Conv(A) est convexe et $\lambda_1 \in [0,1[$.

Donc on a montré que $H_n est vraie$. C'est-à-dire, $C \subset Conv(A)$.

Conclusion:

$$C = Conv(A)$$

C'est-à-dire,

$$Conv(A) = \{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i, \forall i \in \{1,2,\ldots,d\}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1\}$$