MATH2307P – Projet$_2$

À rendre pour le 3 juin 2023

Ce projet consiste à comparer différentes méthodes de résolution numérique pour le calcul de A^{-1} quand $A \in \mathrm{GL}_{10}\left(\llbracket 0,5 \rrbracket\right)$. On comparera les méthodes suivantes

1. Utilisation de la formule
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.{}^t\mathrm{Com}(A)$$
2. Résolution par l'algorithme de Gauss du système d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{10,1}(\mathbb{R})$, où $(a_1, \ldots, a_{10})$ sont quelconques
$$(S) \qquad A \cdot X = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{10} \end{bmatrix}$$
3. Résolution du système (S) en trigonalisant A.
4. Résolution du système (S) en utilisant la forme QR du cours sur les espaces euclidiens (on l'a vue et programmée en td-tp).

Dans chacun des cas, on *n'utilisera pas les fonctions de résolution de systèmes toutes faites dans* **`Python`***, ni les fonctions de réduction bien sûr* ! On autorisera toutefois la fonction de calcul du déterminant.

Les études pourront être faites

1. *mathématiquement*, en évaluant le nombre des opérations à effectuer pour obtenir le résultat.
2. *informatiquement*, en estimant statistiquement le nombre d'opérations à effectuer. Pour cela on pourra utiliser la *loi des grands nombres* qui nous affirme que si on effectue n mesures du nombre d'opérations sur n matrices tirées au hasard, la moyenne des mesures sera une estimation du nombre d'opérations, quand n est assez grand (on pourra prendre $n = 10000$).

L'idéal serait de faire les deux types de calculs (mathématiques et informatiques) !

1 Petite aide à la simulation

1.1 Un exemple d'utilisation de la loi des grands nombres

In [1]

```python
from numpy.random import randint
```

In [2]

```python
n = 10000
sum(randint(1, 11, size=n))/n    # Calcul de la moyenne des tirages
```

Out [2]

```
5.504
```

Comme le tirage est uniforme, on devrait obtenir, où $X \sim \mathcal{U}\left(\{1, \ldots, 10\}\right)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{10} k\,\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{11}{2}$$

1.2 Un exemple de tirage d'une matrice aléatoire

In [3]

```python
# Tirage d'une matrice aléatoire
randint(1, 11, size=(10, 10))
```

Out [3]

```
array([[ 1,  4, 10,  7,  7,  9,  1,  9,  3, 10],
       [ 8,  3,  6,  8,  4,  8,  5, 10,  3,  4],
       [ 6,  3,  5,  8,  6, 10,  5,  3,  4,  6],
       [10,  5,  4,  7,  6,  2,  8,  7,  2,  3],
       [10,  8,  7,  6,  7,  8,  7,  8, 10,  7],
       [ 8,  6,  6,  5,  8,  6,  7,  9,  8,  9],
       [ 1,  6,  9,  8,  7,  9,  9, 10,  4,  8],
       [ 5,  2,  9,  2,  4,  7,  6,  5,  6, 10],
       [ 9,  5,  9,  8,  1,  8,  8,  3,  9,  6],
       [ 9,  7,  8,  6, 10,  1,  3,  5,  8,  1]])
```

2 Les questions

1. Évaluer statistiquement la probabilité pour qu'une matrice de $\mathrm{M}_{10}\left(\llbracket 0,5 \rrbracket\right)$ soit inversible dans $\mathrm{GL}_{10}\left(\mathbb{R}\right)$.
2. Comparer les 4 méthodes décrites ci-dessus.

3 Bilan

Date limite : 3 juin 2023 à 23h55.
Fournir une archive `.zip` contenant dans le même répertoire deux fichiers :
un rapport écrit en `.pdf` et des codes `Python` écrits en `.ipynb` (`Jupyter`).