Projet 1 : Calcul différentiel et Convexité – TD 1

à rendre pour le mardi 04 avril 2023

- Le but de de ce projet est de tester les compétences vues en cours et en TD, ainsi que de l'initiative sur les questions délicates que nous n'avons pas traitées ensemble.
- Une attention particulière sera portée sur la rédaction, les explications (aussi bien sur papier que dans les commentaires sur Python).
- Les projets se font par groupe de 2 ou 3.

Exercice 1 :

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$, prolongée par 0 à l'origine, est-elle continue ? différentiable ? de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes, les tracer sur leur ensemble de définition, puis répondre aux questions.

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$.
   (a) Visualiser l'intersection de la courbe représentative de f et du plan d'équation $z = 0$.
   (b) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(1, 0)$?
2. $g(x, y) = y^2 - 1 + \sin(\pi \times x)$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$.
   (a) Visualiser la ligne de niveau $z = 0$.
   (b) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
   (c) Superposer les courbes de φ est de f.
   (d) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(\dfrac{1}{2}, 0)$?
3. $h(x, y) = \operatorname{sinc}(x) - \operatorname{sinc}(y)$ pour $(x, y) \in [-3\pi, 3\pi]$, où $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$
   (a) Visualiser h et la ligne de niveau correspondant à $z = 0$.
   (b) Vérifier que $h(\pi, 2\pi) = 0$.
   (c) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
   (d) Effectuer un développement limité de φ à l'ordre 1 en π.
   (e) Faire apparaître la tangente à φ au point $(\pi, 2\pi)$ sur le dessin.

Exercice 3 : Caractérisation de la convexité.

Soit O un ouvert convexe de E et $f : O \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable sur O. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est convexe, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in O^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(x + t \cdot (y-x)) \leqslant f(x) + t \times (f(y) - f(x)).$$

(b) f vérifie :

$$\forall (x,y) \in O^2,\ f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y-x) \geqslant 0.$$

(c) f vérifie :

$$\forall x \in O,\ \forall h \in E,\ \mathrm{d}^2 f_x(h,h) \geqslant 0.$$