Théorie des graphes et algèbre computationnelle
Algèbre

Brandon LIN

November 5, 2023

Contents

Chapter 1

Définitions Basiques et Exemples

Les graphes font partie des structures abstraites les plus fondamentales en mathématique discrète. Ils modélisent les situations où des objets sont en relation, et ont donc de nombreuses applications en ingénierie : informatique (réseaux, automates, intelligence artificielle, ...), sciences physiques (transport, optimisation, liaisons chimiques, . . .), sciences de l'information (communication, trafic, . . .), biologie (épi- démiologie, . . .), etc.

Le but de cette première section est d'introduire le vocabulaire de base de la théorie des graphes.

1.1 Graphes

1.1.1 Graphes non-orientés

Definition 1.1.1: Graphe, Sommet, Arête

Un **graphe** $G = (S, A)$ est la donnée de deux ensembles :

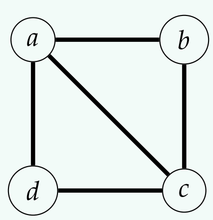
- Un ensemble fini S qu'on appelle l'ensemble des **sommets**.
- $A \subset \{\alpha \in \mathcal{P}(S),\ \mathrm{card}(\alpha) = 2\}$ qu'on appelle l'ensemble des **arêtes**.

  On dit que chaque arête $\{s, s'\}$ **relie** les sommets s et s', ou que les osmmets s et s' sont les **extrémités** de l'arête $\{s, s'\}$

Example 1.1.1 (Graphe)

$$S = \{a, b, c, d\},\ A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$

$G = (S, A)$ est un exemple de graphe qu'on peut représenter à l'aide de schéma suivant :



Ainsi un même graphe peut être représenté par des schémas différents. Un schéma n'est pas une figure géométrique. Les seules informations importantes à lire sur le schéma sont les sommets et les arêtes mais pas leur position.

Note:-

- Dans un graphe, on n'autorise pas les **boucles** (une arête partout reliant un sommet à lui même) ni les **arêtes multiples** (au moins deux arrêtes qu'reliant les mêmes sommets).

- Sinon, on parle de **multigraphe**. Dans ce cours, on étudiera seulement les graphes (on dit aussi **graphes simples**).

Definition 1.1.2: Ordre et taille du graphe

Soit S un ensemble de sommets. On note $n = \text{card}(S)$ l'**ordre du graphe**, et $\text{card}(A)$ d'arêtes la **taille**.

Proposition 1.1.1 Nombre de graphes possibles d'ordre n

On sait que

$$\text{card}\{x \in \mathcal{P}(S), \text{card}(x) = 2\} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

et que

$$A \subset \{\alpha \in \mathcal{P}(S),\ \text{card}(\alpha) = 2\}$$

Il y a donc au total $2^{n(n-1)/2}$ graphes possibles d'ordre n.

Example 1.1.2

Pour $n = 10$ sommets, on obtient $2^{n(n-1)/2} = 2^{45} \approxeq 3,5 \times 10^{10}$ graphes possibles d'ordre 10.

Definition 1.1.3: Graphe Complet, Graphe Linéaire, Graphe Cyclique

- **Graphe complet**, K_n Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le **graphe complet** d'ordre n, noté K_n, est le graphe $G = (S, A)$ donné par :

  $$S = \{1, 2, \ldots, n\},\ A = \{\alpha \in \mathcal{P}(S), \text{card}(\alpha) = 2\}$$

  Autrement dit, $\text{card}(A)$, qui est le nombre d'arêtes qu'on appelle la **taille du graphe**, est égale à $n(n-1)/2$ pour le graphe complet d'ordre n.

- **Graphe Linéaire**, L_n

  Le **graphe linéaire** d'ordre n, noté L_n, est le graphe $G = (S, A)$ donné par :

  $$S = \{1, 2, \ldots, n\},\ A = \{\{k, k+1\},\ k \in [\![1, n]\!]\}$$

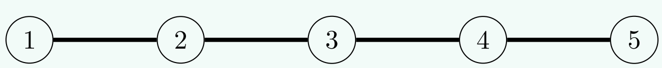
  En particulier la taille de L_n est égale à $n - 1$.

- **Graphe Cyclique**, C_n

  Le **graphe cyclique** d'ordre n, noté C_n, est le graphe $G = (S, A)$ donné par :

  $$S = \{1, 2, \ldots, n\},\ A = \{\{k, k+1\},\ k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{\{1, n\}\}$$

Example 1.1.3 (Graphe Linéaire)



1.1.2 Graphe Orienté

Definition 1.1.4: Graphe Orienté

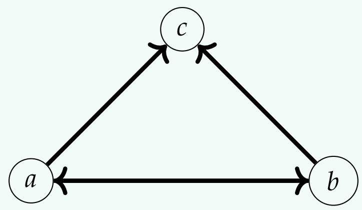
Un **graphe orienté** $G = (S, A)$ est la donné :

- Un ensemble fini S de **sommets**.
- $A \subset \{(s, s'), (s, s') \in S^2, s \neq s'\}$ qu'on appelle l'ensemble des **arcs**.

Attention, ce sont les paranthèses que l'on va utiliser.

Example 1.1.4 (Graphe orienté)

$$S = \{a, b, c\},\ A = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c)\}$$



Rappel :

- Pour les paires, $\{s, s'\} = \{s', s\}$ pas d'ordre, les arêtes ne sont pas orientéses.
- Pour les couples, $(s, s') \neq (s', s)$, il y a un ordre. (les arcs sont orientés)
- Pour un arc (s, s'), s est appelé le **sommet de départ**, s' est appelé **le sommet d'arrivés**.

Note:-

- Pour les graphes qui ne sont pas orientés, on parle aussi de **graphe non-orienté**.

1.1.3 Graphe Pondéré

Definition 1.1.5: Graphe Pondéré

Un **graphe pondéré** est un graphe $G = (S, A)$ qu'on avait d'une **fonction de poids** : $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Autrement dit, à charque arête $\alpha \in A$ on lui attribue un poids $f(\alpha)$.
Schématriquement, on place la valeur de $f(\alpha)$ au-dessus de chaque arête.

Example 1.1.5 (Graphe pondéré)

Supposons S = {Beijing, Wuhan, Nanjing, Changsha, Shanghai}. La carte des trains à grande vitesse reliant les villes forment un graphe.
En utilisant comme fonction de poids la distance entre deux milles reliées par un train, on obtient un graphe pondéré.

On peut aussi définir les graphes orientés et pondérés.

1.2 Adjacance et degré

Definition 1.2.1: Adjacent, Voisin

Deux sommets sont dits **adjacents** ou **voisins** s'ils appartiennent à la même arête.

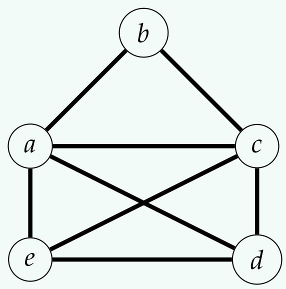
Definition 1.2.2: Degré

Le **degré** d'un sommet s dans un graphe $G = (S, A)$ est :

le nombre d'arêtes qui contiennent s.

Donc, c'est aussi le nombre cd'arêtes dont s est une extrémité.

Example 1.2.1



a et c sont adjacents mais b et d ne le sont pas.
On a :

$$\deg(a) = \deg(c) = 4,\ \deg(b) = 2,\ \deg(e) = \deg(d) = 3$$

Definition 1.2.3: Isolé

Lorsque le degré d'un sommet s est nul, on dit que ce sommet est **isolé**.

Proposition 1.2.1 Somme de degrés

Pour $\forall s \in S$, notant $n = \mathrm{card}(S)$

$$\deg(s) \leq \mathrm{card}(S) - 1 = n - 1 \implies \boxed{\sum_{s \in S} \deg(s) \leq n(n-1)}$$

Puisque chaque arête contient exactement 2 sommets, la somme des degrés est égale au double de la taille.

$$\boxed{\sum_{s \in S} \deg(s) = 2\,\mathrm{card}(A)} \implies \mathrm{card}(A) \leq \binom{n}{2}$$

Corollary 1.2.1 Lemme des poignés de mains

Le nombre de sommets de degré impaire est pair.

1.3 Chemin et connexité

Definition 1.3.1: Chemin

Un **chemin** est de façon équivalente :

- Une suite de sommets telle que deux sommets consécutives dans la suite sont adjacents.
- Une suite d'arêtes telle que deux arêtes consécutives dans la suite ont un sommet commun.

Example 1.3.1 (Chemin)

Dans l'exemple précédent,

- (a, b, c, a, e) est un chemin. (Un chemin peut passer 2 fois par le même sommet)
- $(\{d, c\}, \{c, e\}, \{e, c\}, \{c, b\})$ est un chemin. (Un chemin peut passer 2 fois par le même arête)

Definition 1.3.2: Reliés par un chemin

On dit que deux sommets sont **reliés par un chemin** s'il existe au moins un chemin dont le premier et le dernier sommet sont les sommet reliés.

Example 1.3.2

Dans l'exemple précédent, b et d ne sont pas adjacents mais sont reliés par le chemin (b, c, d)

Proposition 1.3.1 Reliés par un chemin est une relation d'équivalence

Le fait d'être relié par un chemin est *réflexif*, *symétrique* et *transitif*.
On reconnait une **relation d'équivalence**.

Proof: La relation est :

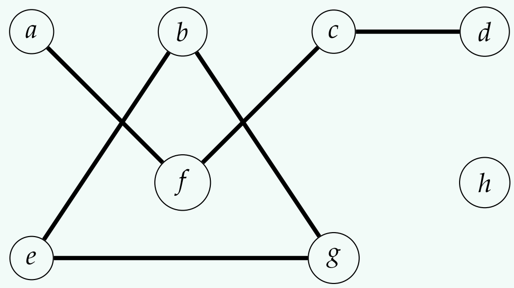
- Réflexivité : Un sommet est toujours relié à lui-même par un chemin de 0 arête.
- Symétrique : Si s est relié à s' par un chemin alors s' est relié à s par le chemin inverse.
- Transitivité : Si s est relié par un chemin à s' et s' est relié par un chemin à s", alors s est relié par un chemin à s" qu'on obtient en seignant les deux chemins.

☺

Definition 1.3.3: Composante Connexe

La **composante connexe** d'un sommet s est l'ensemble des sommets qui sont reliés à s par un chemin. (c'est à dire la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence d'être relié par un chemin)

Example 1.3.3 (Composante Connexe)



- Il y a 3 **composantes connexes** : $\{a, c, d, f\}$, $\{b, e, g\}, \{h\}$
- $\deg(h) = 0$, h est appelé un **sommet isolé**
- La composante connexe d'un sommet isolé contient seulement ce sommet.

Definition 1.3.4: Graphe connexe

Un graphe est dit **connexe** s'il ne contient qu'une seule composante connexe. C'est-à-dire lorsque pour tout couple de sommets, il existe au moins un chemin qui les relie.

Example 1.3.4

L'exemple précédent n'est pas un graphe connexe. Mais il peut le devenir si on ajoute les arêtes $\{a, b\}$ et $\{g, h\}$

Example 1.3.5

Les graphes K_n, L_n et C_n sont connexes.

Proposition 1.3.2

Si un graphe $G = (S, A)$ est connexe, alors :

$$\boxed{\text{card}(A) \geq \text{card}(S) - 1}$$

La réciproque est fausse.

Proof: On raisonne par récurrence sur l'ordre de G, c'est-à-dire sur $n = \text{card}(S)$. La réciproque est fausse.

- Initialisation

  Si $n = 1$, on a 1 seul sommet et 0 arrête. Si $n = 2$, on a 2 sommets, nécessairement 1 arrête pour être connexe.

- Hérédité

  On suppose que la propriété est vraie pour tous les graphes connexes d'ordre n.

  Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe d'ordre $n + 1$, c'est-à-dire $\text{card}(S) = n + 1$

  D'après la connexité de G, on sait qu'il n'y a pas de point isolé, c'est-à-dire, $\forall s \in S, \deg(s) \geq 1$.

  - 1er cas : Il existe au moins un sommet de degré 1, c'est-à-dire, $\exists s \in S, \deg(s) = 1$, on considère le graphe $G' = (S', A')$ qu'on obtient en retirant le sommet s de G et l'unique arrête partant de s.
    Donc $S' = S \backslash \{s\}$, et $\text{card}(A') = \text{card}(A) - 1$
    Par construction, $G' = (S', A')$ est encore un graphe connexe d'ordre $(n + 1) - 1 = n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que

$$\mathrm{card}(A') \geq \mathrm{card}(A) - 1 = n - 1$$

Donc $\mathrm{card}(A) \geq n$

– 2ème cas : Tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à α, c'est-à-dire $\forall s \in S$, $\deg(s) \geq 2$.
On sait que : $\sum_{s\in S} \deg(s) = 2 \times \mathrm{card}(A)$,
Donc :

$$\mathrm{card}(A) = \frac{1}{2}\sum_{s\in S}\deg(s) \geq \frac{1}{2}\sum_{s\in S} 2 = \mathrm{card}(S) = n$$

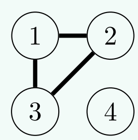
- Conclusion

  Dans les deux cas, $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(S) - 1$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$ lorsqu'elle est vraie au rang n.

  On en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

😄

Example 1.3.6 (Contre-exemple)
On considère le graphe K_3 auquel on rajoute un point isolé.



$\mathrm{card}(S) = 4$, $\mathrm{card}(A) = 3$ mais le graphe n'est pas connexe.

Definition 1.3.5: Chemin élementaire et simple

Un **chemin** est dit :

- **Élémentaire**

  lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet, c'est-à-dire que les sommets du chemin sont deux à deux différents.

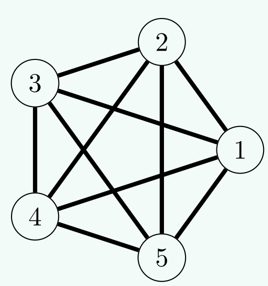
- **Simple**

  lorsqu'il ne passe pas deux fois par la même arrête, c'est-à-dire que les arrêtes du chemin sont deux à deux différentes.

Example 1.3.7 (K_5)
On considère le chemin $(1, 2, 3, 1, 4, 5, 1)$ ou de manière équivalente :

$$(\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,4\},\{4,5\},\{5,1\})$$

(C'est un chemin **simple** mais pas **élémentaire**)

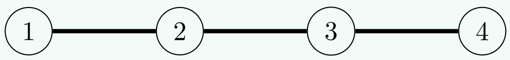


1.4 Cycles et Acyclique

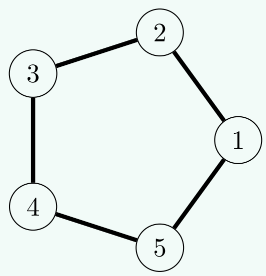
Definition 1.4.1: Cycles, Acyclique

Dans un graphe, un **cycle** est un chemin simple d'au moins 3 arrêtes qui relie un sommet à lui-même, l'ordre d'un **cycle** est son nombre de sommets.
En revanche, un graphe est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle.

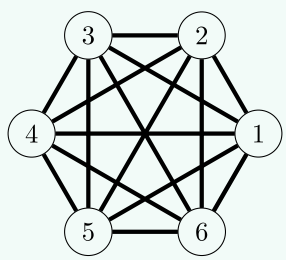
Example 1.4.1 (L_n, C_n)
Le graphe L_n est acyclique.



Le graphe C_n n'est pas acyclique.



Le graphe K_n n'est pas acyclique.



Il contient des cycles d'ordre 3, 4, 5 et 6. ($n \geq 3$)
(K_1 et K_2 sont acycliques)

Proposition 1.4.1
Soit $G = (S, A)$ un graphe, si tous les sommets de G sont de degré supérièur ou égal à 2 (c'est-à-dire $\forall s \in S, \deg(s) \geq 2$), alors G contient au moins un cycle, donc G n'est pas acyclique.

Proof: On va construire un cycle à l'aide d'un algorithme, et on va construire par récurrence une list de sommets $s_0, s_1, \ldots, s_k$.

- On choisit arbitrairement un sommet s_0
- Pour chaque s_{i+1}, on choisit un sommet adjacent à s_i qu'on n'a pas déjà choisi dans la liste avant.
- L'algorithme s'arrête dès que tous les voisins de s_k ont déjà été choisi dans la liste.

Par hypothèse, $\deg(s_k) \geq 2$, donc il existe au moins un autre voisin que s_{k-1} de s_k *dans la liste*. On note cet autre voisin s_j où $j < k - 1$. (Propriété de récurrence)

On considère le chemin

$$(s_k, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{k-1}, s_k)$$

Par construction, c'est un cycle !! Donc G n'est pas acyclique.

Corollary 1.4.1 Propriété d'acyclique

Si u graphe $G = (S, A)$ est **acyclique** alors :

$$\boxed{\text{card}(A) \leq \text{card}(S) - 1}$$

La réciproque est fausse.

Proof: On raisonne par récurrence sur l'ordre de G, qu'on note $n = \text{card}(S)$

- Initialisation : La propriété est évidente pour $n = 1$ ou $n = 2$
- Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour tous les graphes d'ordre n.

  Soit $G = (S, A)$ un graphe acyclique d'ordre $n + 1$, d'après la propriété précédante, on sait qu'il existe au moins un sommet de degré 0 ou 1, c'est-à-dire

  $$\exists s \in S,\ \deg(S) \in \{0, 1\}$$

  On considère le graphe $G' = (S', A')$ qu'on obtient en retirent le sommet s du graphe G et, si $\deg(s) = 1$, l'unique arrête qui part de s.

  Donc $S' = S \backslash \{s\}$, et

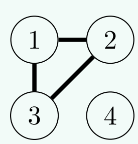
  $$\text{card}(A') = \begin{cases} \text{card}(A) \text{ si } \deg(s) = 0 \\ \text{card}(A) - 1 \text{ si } \deg(s) = 1 \end{cases}$$

  $\text{card}(A') \geq \text{card}(A) - 1$.

  Par construction G' est un graphe acyclique d'ordre n. Par hypothèse de récurrence, $\text{card}(A') \leq n - 1$, par conséquent $\text{card}(A) \leq n$
- Concclusion : La propriété est vraie pour tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la principe de récurrence

Example 1.4.2 (Contre-Exemple)

Si on considère le graphe K_3 auquel on ajouter un point isolé,



$\text{card}(S) = 4,\ \text{card}(A) = 3$ mais le graphe n'est pas acyclique.

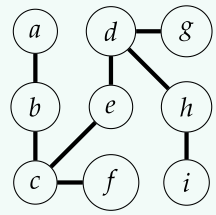
1.5 Arbres

Definition 1.5.1: Arbres

Un **arbre** est un graphe connexe et acyclique.

- Les sommets de degré 1 sont appelés des **feuilles**
- Les arbres sommets (de degré supérieur ou égal à 2) sont appelés des **noeuds**.

Example 1.5.1 (Arbre)



Proposition 1.5.1

Si $T = (S, A)$ est un **arbre** alors

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(S) - 1$$

Proof: Récurrence.

Note : On peut toujours trouver une feuille dans l'arbre car finie. On la note F.

En supprimant F, il reste une arbre que l'on connaît. De plus, il faut ajouter l'arête connectant F et son **parent** (définira au-dessous) 😊

Theorem 1.5.1 Caractérisation des Arbres

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre
2. G est connexe et $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(S) - 1$
3. G est **connexe minimal** : si on la retire une arête, il n'est plus connexe.
4. G est acyclique et $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(S) - 1$
5. G est **acyclique maximal** : si on lui rajoute une arête, il n'est plus acyclique.
6. Pour tout couple de sommets, il existe un unique chemin simple les reliant.

Proof: On montre (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3). On peut montrer aussi que (1) $\implies$ (4) $\implies$ (5).

- (2) $\implies$ (3) car si G reste connexe on lui retirant une arête alors $\mathrm{card}(A) - 1 \geq \mathrm{card}(S) - 1$ donc $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(S) > \mathrm{card}(S) - 1$ ce qui contredit (2). (Voir 1.3)
- De même on montre (4) $\implies$ (5) par l'absurde.
- (3) $\implies$ (1) : On suppose que G est connexe minimal. Par l'absurde, supposons que G n'est pas acyclique, donc qu'il contient un cycle. Donc si on retire une arête de ce cycle, le graphe reste connexe. Ce qui contradit que G est connexe minimal. Donc G est acyclique, c'est un arbre.
- (5) $\implies$ (1) : On suppose que G est acyclique minimal. Par l'absurde, supposons que G n'est pas connexe, donc qu'il admet plusieurs composantes connexes. Donc, si on ajoute une arête reliant un sommet d'une composante connexe à un sommet d'une autre composante connexe, le graphe reste acyclique. Ce qui contradit que G est acyclique maximal. Donc G est connexe, c'est un arbre.
- (1) $\implies$ (6) : Soient s et s' deux sommets de G, puisque G est connexe, il existe au moins un chemin (simple) qui relie s et s'. S'il existe au moins deux chemins qui reliant s et s' alors on pourrait créer un cycle ce qui contrredit que G est acyclique.
- (6) $\implies$ (1) : De même. Si tout couple de sommets peut être relié par un chemin alors G est connexe. Si G n'était pas acyclique, on pourrait relier deux sommets par au moins deux chemins ce qui cest absurde.

😊

Note:-

En pratique, pour montrer qu'un graphe est un arbre, il suffit de montrer qu'il est connexe ou bien acyclique (un seul suffit) puis de vérifier que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(S) - 1$.

Corollary 1.5.1

Tout arbre admet au moins 2 feuilles.

Proof: Soit $G = (S, A)$ un arbre. On note F son nombre de feuilles, c'est-à-dire $F = \mathrm{card}\,\{s \in S,\ \deg(s) = 1\}$
On sait que : $2\mathrm{card}(A) = \sum_{s\in S} \deg(s)$ et $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(S) - 1$
On note $n = \mathrm{card}(S)$ l'ordre du graphe. Donc,

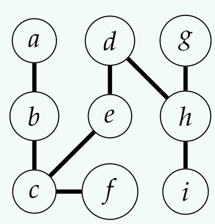
$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{s\in S} \deg(s) \\ &= \sum_{s \text{ feuilles de } G} \deg(s) + \sum_{s \text{ noeuds de } G} \deg(s) \\ &= F + \sum_{\mathrm{card}=n-F} \deg(s) \\ &= F + 2(n-F) \end{aligned}$$

Definition 1.5.2: Arbre enraciné

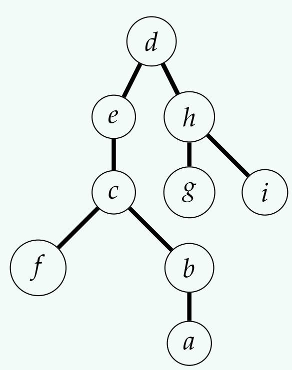
Un **arbre enraciné** est un arbre dans lequel on choisit un sommet particulier qu'on appelle sa **racine**. Un arbre enraciné est muni d'une **fonction hauteur** $h : S \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à chaque sommet s lui associé sa hauteur $h(s)$ égale à la longueur de l'unique chemin simple qui relie s à la racine.

Example 1.5.2 (Arbre enraciné)

De l'arbre,



on a :



Definition 1.5.3: Enfants et descendants

Dans un arbre enraciné, on définit pour chaque sommet s :

- Ses **enfants** : les sommets reliés par une arête à s de hauteur $h(s)+1$
- Ses **descendants** : les composantes connexes de $S\backslash\{s\}$ qui ne contient pas la racine.
- Ses **parents** (sauf pour la racine) : le sommet relié par une arête à s de hauteur $h(s)-1$
- Ses **ancêtres** : les sommets de l'unique chemin qui relie s à la racine (sauf s)

Definition 1.5.4: Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique (pas nécessairement connexe), autrement dit un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

Proposition 1.5.2

Soit $G=(S,A)$ une forêt, alors

$$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(S)-K$$

où K est le nombre de composantes connexes de G.

Proof: On note $(G_i=(S_i,A_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$, les composantes connexes de G. Puisque G_i est un arbre, on a $\mathrm{card}(A_i)=\mathrm{card}(S_i)-1$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{k}\mathrm{card}(A_n)=\sum_{n=1}^{K}(\mathrm{card}(S_i)-1)\implies \mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(S)-K$$

☺

Definition 1.5.5: Sous-graphe

- Soit $G=(S,A)$ un graphe, un **sous-graphe** de G est un graphe $G'=(S',A')$ tel que $S'\subset S$ et $A'\subset A$, autrement dit un sous-graphe est un graphe obtenu en supprimant des sommets ou des arêtes.
- Un **sous-graphe partiel** est un sous-graphe $G'=(S',A')$ tel que $S'=S$, autrement dit un sous-graphe partiel est un graphe obtenu en supprimant seulement des arrêtes.
- Un **sous-graphe induit** est un sous-graphe $G'=(S',A')$ tel que $A'=\{\{s,s'\}\in A,\ (s,s')\in S'^2\}$, autrement dit un sous-graphe induite est un sous-graphe obtenu en supprimant seulement des sommets.

Definition 1.5.6: Arbre couvrant

Soit $G=(S,A)$, un **arbre couvrant** de G est un sous-graphe ppartiel de G qui est un arbre.

Proposition 1.5.3

Soit $G=(S,A)$ un graphe, alors G est connexe si et seulement si G admet un arbre convrant.

Proof: ($\Longleftarrow$) On suppose que G admet un arbre couvrent donc tout couple de sommets de G est relié par un chemin d'arêtes de l'arbre, donc par un chemin d'arêtes de G, donc G est connexe.

($\Longrightarrow$) Soit G un graphe connexe. Si G est acyclique alors G est un arbre et c'est fini. Si G contient des cycles, on supprime une arête de chaque cycle.

On obtient un graphe partiel qui est touours connexe et acyclique, donc un arbre couvrant. ☺

Chapter 2

Parcours de graphe

Voir version Goodnote.

Chapter 3

Algorithmes de plus court chemin

Voir version Goodnote.

Chapter 4

Graphes eulériens et hamitoniens

4.1 Chemin eulériens et graphe eulérien

4.1.1 Rappels

Rappel : Définition d'un **chemin élémentaire** et **chemin simple** :

- **Élémentaire** : s'il passe au plus une fois par chaque sommet.
- **Simple** : s'il passe au plus une fois par chaque arête.

  On a vu : Longueur minimale $\Longrightarrow$ élémentaire $\Longrightarrow$ simple. (Mais les réciproques sont fausses)
  Rappel : Un **cycle** est un chemin simple reliant un sommet à lui même de longueur non nulle (donc $n \geq 3$)

4.1.2 Nombre de chemin reliant 2 sommets

Question : Combien y-a-t'il de chemins reliant 2 sommets ? Si les chemins ne sont pas simples, il y en a une infinité. Donc on cherche le nombre de chemins simples.

Rappel : La **matrice d'adjacence** d'un graphe $G = (S, A)$ dont on numéroté les sommets $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ où n l'ordre de G est définie par :

$$M = \left(m_{i,1} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{s_i, s_j\} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \right) \in \mathrm{M}_n(\{0,1\}) \tag{4.1}$$

On a :

$$M^2 = M \times M = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} \right)_{1 \leq i,s \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \tag{4.2}$$

Or :

$$m_{i,k} m_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{s_i, s_k\} \in A \text{ et } \{s_k, s_j\} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4.3}$$

Donc $m_{i,k} m_{k,j} = 1$ si et seulement si s_i et s_j sont reliés par le chemin (s_i, s_k, s_j) de deux arêtes.
Donc

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} = \text{ nombre de chemins de deux arêtes reliant } s_i \text{ et } s_j \tag{4.4}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si on note

$$M^p = \left(m_{i,j}^p \right)_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \tag{4.5}$$

alors $m_{i,j}^p = \underline{\text{nombre de chemins de } p \text{ arêtes reliant } s_i \text{ et } s_j}$

Problème : Cette méthode premet de dénombrer <u>tous</u> les chemins de p arêtes reliant s_i à s_j, mais pas seulement les chemins simples.

Theorem 4.1.1

Le nombre de cycles de longueur 3 (on les appelle les triangles) est égal

$$\frac{1}{3!}\mathrm{Tr}(\mathrm{M}^3) = \sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}^3 \tag{4.6}$$

Proof: On a vu que $m_{k,k}^3$ = nombre de chemins de 3 arêtes reliant s_k à lui-même.
Ces chemins sont nécessairement simples, donc ce sont des cycles de longueur 3.
Il y en a au total

$$\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}^3 = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^3) \tag{4.7}$$

Or chaque cycle de longueur 3 passe par 3 sommets.
Il est donc compté $3! = 6$ fois dans la somme. (Nombre de permutations des 3 sommets)
Au final, on obtient $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}^3)/6$ triangles. ☺

Definition 4.1.1: Eulèrien

Un chemin est dit **eulèrien** s'il passe exactement une seule fois par chque sommet du graphe.
Un graphe est dit **eulèrien** s'il contient un cycle eulèrien.

Remarque : Un chemin eulèrien est nécessairement simple.
Remarque: Un chemin eulèrien n'est pas nécessairement un cycle.
On peut montrer que ce graphe ne contient pas de cycle eulèrien donc ce graphe n'est pas eulèrien.

Theorem 4.1.2

Un graphe est eulèrien si et seulement s'il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.

Example 4.1.1

Dans notre exemple, $d(c) = 2$ et $d(c) = d(d) = 4$ sont pairs mais $d(a) = d(b) = 3$ sont impairs donc le graphe n'est pas eulèrien.

Proof: $\Longrightarrow$ Si un graphe est eulèrien alors c'est un cycle eulèrien () ☺