

Exercice

On dispose de 2 dés à 6 faces. Le premier est équilibré, et le deuxième donne 6 avec probabilité $\frac{1}{2}$, k avec probabilité $\frac{1}{10}$ pour tout $k \in \{1, \dots, 5\}$.

On choisit un dé uniformément au hasard, et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

Modélisation : on peut choisir $\Omega = \left\{ (i, j), i \in \{1, 2\} \text{ et } j \in \{1, \dots, 6\} \right\}$

où :

$$\begin{cases} i = 1 & \text{tirer le dé équilibré} & \Omega_1 = \{1, \dots, 6\}, & p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6} \\ i = 2 & \text{tirer le dé truqué} & \Omega_2 = \{1, \dots, 6\}, & p'_1 = \dots = p'_5 = \frac{1}{10} \text{ et } p'_6 = \frac{1}{2} \\ j \in \{1, \dots, 6\} & \text{résultat du dé} \end{cases}$$

Sur Ω on définit la probabilité donnée par l'énoncé :

$$i = 1, \quad j \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}((1, j)) = p_j$$

$$i = 2, \quad j \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}((2, j)) = p'_j$$

Calcul : Notons A l'événement « obtenir le dé 1 » $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{1}{2}$.

et B l'événement « obtenir 6 ».

(A, \bar{A}) constitue un système complet d'événements,

donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$$

formule des probabilités composées \rightarrow

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

