Topologie et Calcul différentiel – TD 4: Topologie : distance, norme, fermé, adhérence

07 avril 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manier les outils de topologie qui nous serviront plus tard.

Distances et normes

Exercice 1 : Des distances en vrac

Démontrer que chacune des applications suivantes est une distance.

1. Sur $\mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

2. Sur $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d_2(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

3. Sur $\mathbb{R}^n$ l'application suivante :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ d_3(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|y\| \text{ sinon} \end{cases}$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : Une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que :

$$f \mapsto \|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur E.

Exercice 3 : Les normes ont des boules convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ et
$$N(x) = 0 \iff x = 0.$$
2. et
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x).$$

On note $B = \{x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$.

1. Montrer que B est convexe si, et seulement si, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice 4 : Une distance sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $E =]0, +\infty[$. On définit :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Soit $A =]0, 1]$, A est-elle bornée pour d ?
3. Calculer le diamètre de l'ensemble $B =]2, +\infty[$.
4. On définit, pour tout $x \in E$ et pour tout $r > 0$ l'ensemble $BO_d(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) < r\}$. Donner $BO_d(x,r)$ sous forme d'un intervalle.
5. Pour $x \in E$ et $r > 0$ comparer $BO_d(x,r)$ à $BO(x,r) = \{y \in E,\ |x - y| < r\}$.

Exercice 5 : La norme p "tend" vers la norme infinie

Dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

On rappelle que ces deux applications sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$$

Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on note :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

2. Montrer que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$$

Exercice 6 : La "norme p" n'est PAS une norme si $p < 1$

Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$).

1. Montrer que l'application $||\cdot||_p : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\sum_{l=1}^n |x_l|^p)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme.
2. Dessiner l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2,\ ||x||_p = 1\}$ lorsque $p = 1/2$ et $p = 1/4$.
3. Vers quel ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2,\ ||x||_p = 1\}$ converge-t-il lorsque p tend vers 0 ?

Exercice 7 : Une norme bizarre

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x,y) = \int_0^1 |x + t \times y| \ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Tracer la sphère unité.
3. Chercher les constantes α maximale et β minimale telles que

$$BF_2(0, 1/\beta) \subseteq BF_N(0,1) \subseteq BF_2(0, 1/\alpha)$$

Fermés et adhérence

Exercice 8 :

Soit E l'ensemble des suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |a_n|$ converge. On définit une norme sur E par :

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Montrer que c'est une norme.
2. Soit
$$F = \left\{ a \in E,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$
   F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 9 :

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

1. Montrer que $\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$.
2. Dans cette question nous allons montrer que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général. On considère ici que E est l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$.
   (a) Soit $A = \{u \in E,\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$. Montrer que A est fermé.
   (b) Soit $B = \{u \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n = 0\}$. Quelle est l'adhérence de B ?
   (c) Conclure.

Exercice 10 :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit A un ouvert de E et B une partie de E.

1. Montrer que : $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Montrer que $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exercice 11 :

$\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fermé ou non.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y \leqslant 2\}$;
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y < 2\}$;
3. $F_3 = \{x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant 1 - x\}$.

Exercice 12 :

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_{\infty,[0,1]}$. Soit

$$A = \left\{ f \in E,\ f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}.$$

1. Montrer que A est fermé dans E.
2. Montrer que : $\forall f \in A,\ \|f\|_{\infty,[0,1]} > 1$.
3. Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A. Cette distance est définie par :

$$d(0_E, A) = \inf\{d(0_E, f),\ f \in A\} = \inf\{\|f - 0_E\|_{\infty,[0,1]},\ f \in A\}.$$

Exercice 13 :

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit F un fermé non vide de E. Montrer que :

$$x \in F \quad \Longleftrightarrow \quad d(x, F) \overset{\text{Déf}}{=} \inf\{d(x,y),\, y \in F\} = 0.$$

2. On considère F et G deux fermés, non vides et disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que :

$$F \subset U, \quad G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$