Suites et Séries – TD$_5$

10-11 octobre 2022

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0.$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Les solutions des cette équations sont :

$$\lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}.$$

On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n.$$

Puisque $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, alors par une récurrence immédiate on a $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\,\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$$

et

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$$

donc on peut déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(A\cos\left(n\frac{2\,\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\frac{2\,\pi}{3}\right)\right)\frac{1}{2^n},$$

avec $A = a + b$ et $B = i(b - a)$. En particulier, $u_0 = A$ et $u_1 = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + \frac{B}{2}\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$.

Exercice 2

Quelle est la nature de la suite de terme général $\left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n$?

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\cos(n)| \leqslant 1$.
- Comme $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{16}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right| \leqslant 2\frac{1}{16} + \frac{3}{4}1 = \frac{7}{8}.$$

Ainsi, on a démontré que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Par le théorème d'encadrement des limites (théorème du gendarme), la suite de terme général $\left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n$ converge vers 0.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$$

Étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de u_0.

Il s'agit d'une suite récurrente associée à la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{2} \end{array}.$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc la suite est bien définie.
f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$

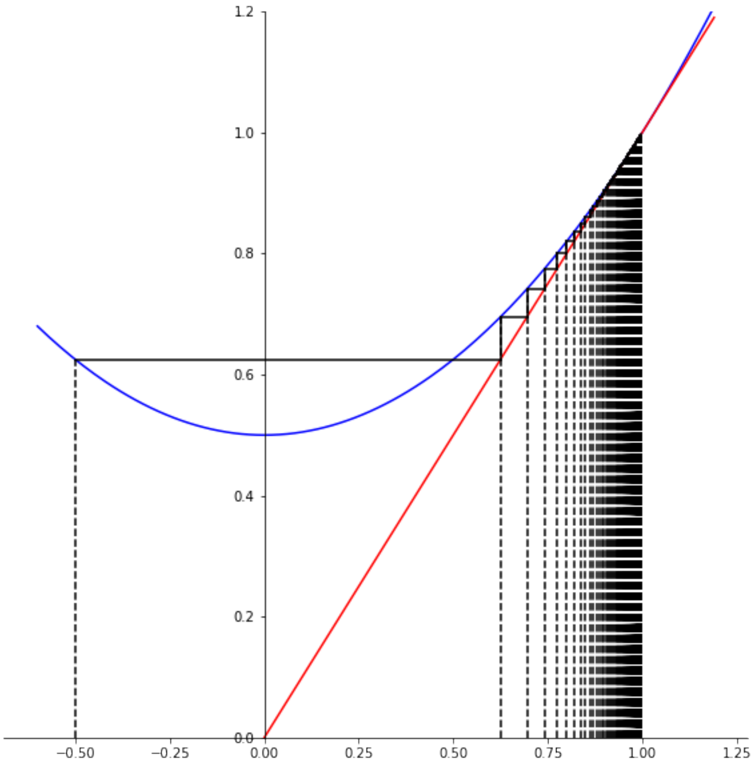
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

f a donc un unique point fixe : 1.
On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
En résumé :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	
$f(x)-x$				$+$			0	$+$	

Au vu de ce tableau, il apparaît que deux intervalles sont stables par f : $[-1, 1]$ et $[1; +\infty]$. On va donc s'intéresser à différents cas :

- Si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- Si $u_0 = -1$, on a $u_1 = 1$ et la suite est constante égale à 1 à partir du rang 1.
- Si $u_0 \in]-1, 1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 1[$.
  Or on sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) - x > 0$. La suite est donc strictement croissante, et majorée (par 1). Elle est donc convergente vers le seul point fixe de f : 1.
  En utilisant Python, on peut tracer les points successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'observer sa convergence. On prend par exemple $u_0 = -\dfrac{1}{2}$:

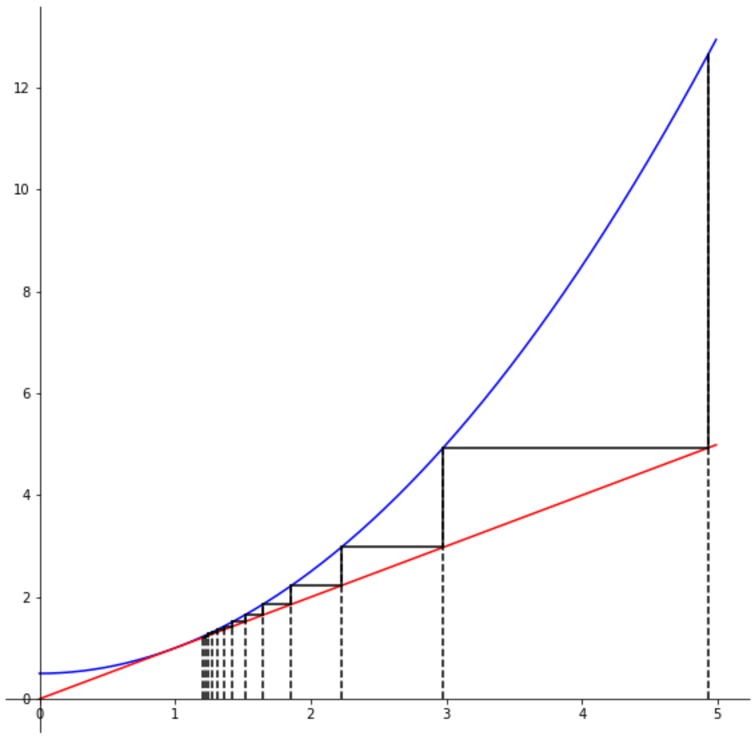


Le code Python utilisé est affiché en annexe en fin de la correction du TD.

▷ Si $u_0 > 1$, la suite est strictement croissante. Elle ne converge donc pas vers 1. Elle n'est donc pas convergente, donc elle n'est pas majorée. On a donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Pour $u_0 = 1.2$ on obtient la figure suivante :



▷ Si $u_0 < 1$, alors $u_1 > 1$ et, comme pour le cas précédent,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 4

Étudier la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

1. $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc la suite u est bien définie.
2. f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) - x = \frac{1}{1+x} - x = \frac{1-x-x^2}{1+x}.$$

   Les solutions de $1 - x - x^2 = 0$ sont données par $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ qui n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f a donc un unique point fixe x_1.
   Résumons notre étude :

x	0		x_1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	x_1	$\searrow$	0
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

   On observe que $f(]0,x_1[) \subset]x_1,+\infty[$ et $f(]x_1,+\infty[) \subset]0,x_1[$, f « échange les intervalles ».
3. Comme la fonction f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Puisque $u_{2n} = f(f(u_n))$ $u_{n+1} = f(f(u_{n+1}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut étudier la fonction $f \circ f$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f\circ f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}.$$

   La fonction $f \circ f$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f\circ f(x) - x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} - x = \frac{1-x-x^2}{2+x}$$

   On en déduit que $f \circ f$ a également un seul point fixe qui est x_1 et que $x \mapsto f\circ f(x) - x$ a le même signe que $x \mapsto f(x) - x$.
   Ceci conduit à la discussion suivante.

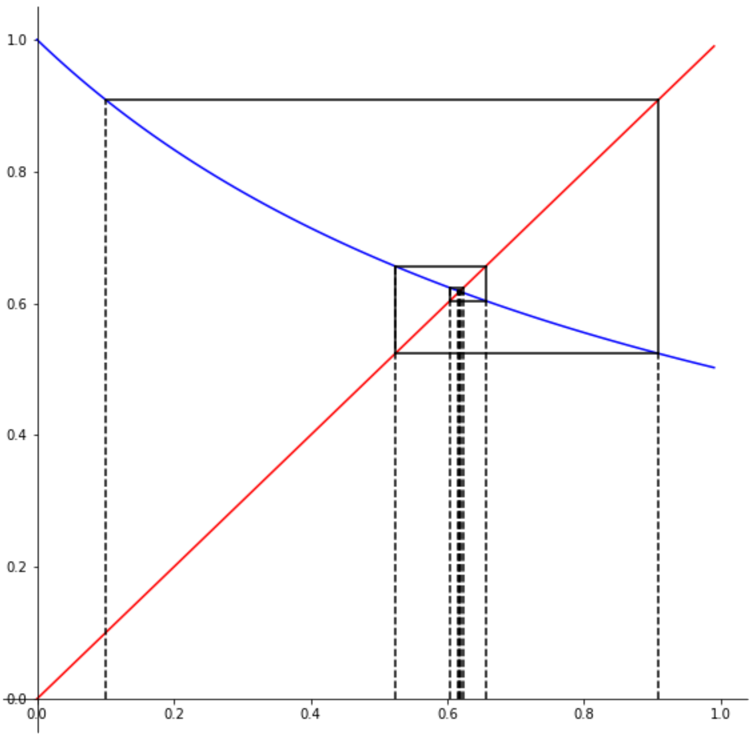
— Supposons $0 < u_0 < x_1$.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, à valeurs dans $]0, x_1[$ donc majorée par x_1, elle est donc convergente et sa limite est nécessairement un point fixe de $f \circ f$, elle converge donc vers x_1.
La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $]x_1, +\infty[$ donc minorée par x_1, elle est donc convergente et sa limite est nécessairement un point fixe de $f \circ f$, elle converge donc vers x_1.
Comme les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x_1, on en déduit que u converge vers x_1.

— Supposons $u_0 = x_1$.
Comme x_1 est un point fixe pour f, la suite u est constante égale à x_1, elle converge donc vers x_1.

— Supposons $u_0 > x_1$.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $]x_1, +\infty[$ donc minorée par x_1, elle est donc convergente et sa limite est nécessairement un point fixe de $f \circ f$, elle converge donc vers x_1.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, à valeurs dans $]0, x_1[$ donc majorée par x_1, elle est donc convergente et sa limite est nécessairement un point fixe de $f \circ f$, elle converge donc vers x_1.

Dans tous les cas, la suite u converge vers x_1.

Voici la figure qu'on obtient pour $u_0 = \dfrac{1}{10}$



Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Attention, on ne sait pas si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Notons l_1 la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, l_2 la limite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et l_3 la limite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
▷ La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2.(3n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge vers l_1. De plus, la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{3.(2n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge vers l_3. Par unicité de la limite, $l_1 = l_3$.
▷ La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2.(3n+1)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge vers l_2. De plus, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{3.(2n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge vers l_3. Par unicité de la limite, $l_2 = l_3$.
▷ Finalement, on a $l_1 = l_2$. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

Exercice 6

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N, \forall n \geqslant N, |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Notons $l \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors on a :

$$\forall m \geqslant N, \forall n \geqslant N, |u_n - u_m| \leqslant |u_n - l| + |l - u_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy.}}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

▷ Par définition de suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geqslant N, \forall n \geqslant N, |u_n - u_m| \leqslant 1.$$

En particulier, on a $|u_n - u_N| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant N$, d'où :

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant |u_N| + 1.$$

En posant $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-2}|, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$, on a alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.
▷ Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $l \in \mathbb{R}$ et φ extraction tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
▷ Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1, |u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geqslant N_2, \forall n \geqslant N_2, |u_n - u_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geqslant N_3$, on a aussi $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_3$ et donc

$$\forall n \geqslant N_3, \quad |u_n - l| \leqslant |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l.}$$

3. La suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, donc d'après la question précédente :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.}}$$

Exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :

$$u_n + \frac{1}{2} u_{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Soit $a \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
▷ Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. D'où,

$$u_{2\,\varphi(n)} = 2\left(u_{\varphi(n)} + \frac{u_{2\,\varphi(n)}}{2}\right) - 2\,u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2\,a.$$

Ainsi, $-2\,a \in \mathrm{Adh}(u)$.
▷ En applicant ce résultat à la valeur d'adhérence $-2a$, on obtient que $4a \in \mathrm{Adh}(u)$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(-2)^k a \in \mathrm{Adh}(u)$.
▷ Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, l'ensemble $\mathrm{Adh}(u)$ est borné. Ainsi l'ensemble $\{(-2)^k a,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est borné, d'où $a = 0$.
▷ Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **bornée** qui a au plus une valeur d'adhérence (qui est 0). D'après le cours,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que : $u_n + \frac{1}{2} u_{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Définissons une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - \frac{2}{3}\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n + \frac{1}{2} v_{2\,n} = u_n + \frac{1}{2} u_{2\,n} - \lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la question précédente, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}\lambda.}$$

Exercice 8

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence par :

$$u_0 \in [-1,1], \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$.

   Soit $x \in [-1,1]$, on a donc $|x| \leqslant 1$.
   Comme $x^2 \geqslant 0$, on obtient que $|x| \leqslant 1 + x^2$ ou encore que $|\frac{x}{x^2+1}| \leqslant 1$ puis que $\frac{x}{x^2+1} \in [-1,1]$.
   On conclut que $[-1,1]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [-1,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$.

   (b) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Soit $x \in]-1,1[$,

   $$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x+1)^2}.$$

   Or

   $$(x^2+1)^2 > 0 \text{ et } 1-x^2 > 0 \iff x \in]-1,1[.$$

   On conclut que, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ et donc f est strictement croissante sur $]-1,1[$.
   De plus, si $f(1) = \frac{1}{2} < 1$ et $f(-1) = -\frac{1}{2} > -1$. On conclut que f est strictement croissante sur $[-1,1]$.

   Pour trouver le sens de variation de$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier le signe de $u_1 - u_0$.
   Or

   $$u_1 - u_0 = \frac{u_0}{u_0^2+1} - u_0 = \frac{-u_0^3}{u_0^2+1}$$

   On conclut que $u_1 - u_0$ strictement négatif si $u_0 > 0$, strictement positif si $u_0 < 0$, et nul si $u_0 = 0$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissant si $u_0 < 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $u_0 = 0$.

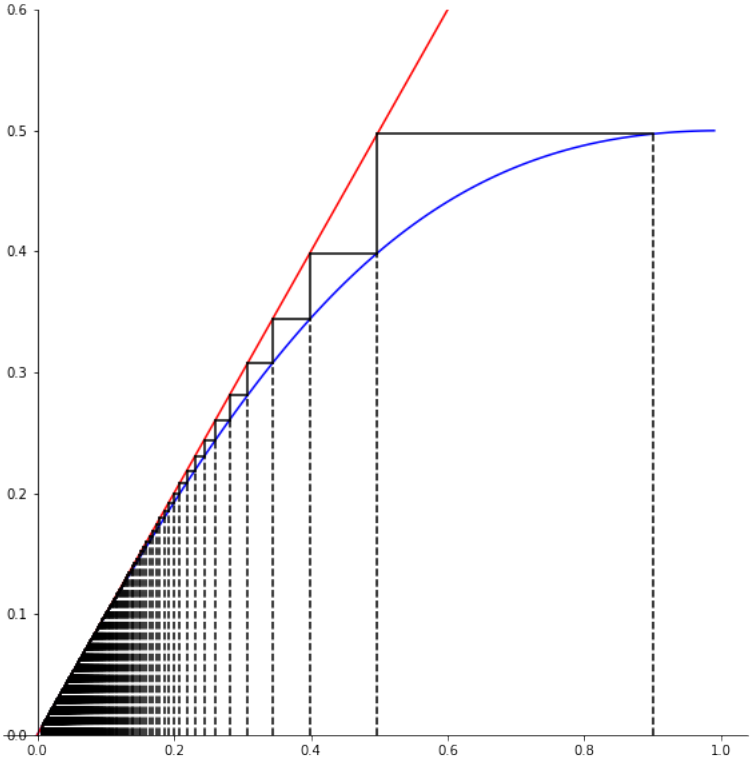
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

   Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente et la limite vaut 0.
   Sinon, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (question précédente), si $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et si $u_0 < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée . Dans ces deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
Par ailleurs, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la limite vérifie $l = f(l)$ et $l \in [-1, 1]$.
Résolvons donc l'équation $l = f(l)$.

$$l = f(l) \iff l^3 + l - l = 0 \iff l = 0$$

En conclusion, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Pour $u_0 = 0.9$, et en choisissant un nombre de points assez élevé ($n = 10000$... 有点多，但不用慌，Python还是很能干的) on obtient la figure suivante :



2. On suppose que $u_0 > 0$ et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{(u_n)^2}$$

(a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2} = u_{n+2}^2 + 2.$$

d'après les questions précédentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Donc $\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+2}^2 + 2) = 2$.

(b) En déduire un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.

D'après la suite des moyennes de Césàro de $v_{n+1} - v_n$ (TD2 exercice 5),
on a $\frac{1}{(u_n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

.

Exercice 9

Soit $A \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto x^2 + A$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Donner le tableau de variations de f, ainsi que le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$ en fonction de A.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	A	$\nearrow$	$+\infty$

Signe de $x \mapsto f(x) - x$:
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - x = x^2 - x + A$$

On pose $\Delta = 1 - 4A$.

— Si $A > \dfrac{1}{4}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x > 0$.

— Si $A \leqslant \dfrac{1}{4}$, alors l'équation $f(x) - x = 0$ admet deux solutions

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4A}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4A}}{2}$$

Dans ce cas on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On suppose dans cette question que $A \geqslant 0$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— Si $A > \dfrac{1}{4}$, alors $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— Si $A \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, alors $x_1 \geqslant 0$. La fonction f est croissante sur $[0, x_1]$, donc :

$$f([0, x_1]) = [f(0), f(x_1)] = [A, x_1] \subset [0, x_1]$$

L'intervalle $[0, x_1]$ est donc stable par la fonction f.
Comme, de plus, on a : $u_0 = 0 \in [0, x_1]$, alors on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, x_1]$$

Or, d'après la question 1, $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, x_1]$, donc on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$\boxed{\text{Pour tout } A \geqslant 0, \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

(b) Montrer que si $A > \frac{1}{4}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Si $A > \frac{1}{4}$, alors d'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, cette limite vérifie nécessairement : $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire :

$$\ell^2 - \ell + A = 0$$

Mais $A > \frac{1}{4}$, l'équation ci-dessus n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. ℓ n'existe donc pas.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite réelle strictement croissante qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$, cela implique :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

(c) Montrer que si $A \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donner sa limite.

Dans le cas $A \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, on a montré dans la question 1 que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, x_1]$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
De plus, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie par la fonction f (qui est continue), alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un point fixe de f dans $[0, x_1]$, il n'y en a qu'un seul, c'est x_1 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-\sqrt{1-4A}}{2}}$$

3. On suppose dans cette question que $A \in]-1, 0[$.
   (a) Montrer que $[A, 0]$ est stable par f.

f est décroissante sur $[A, 0]$, donc :

$$f([A,0]) = [f(0), f(A)] = [A, A(A+1)]$$

Comme $A \in]-1, 0[$ alors $A(A+1) \leqslant 0$, donc $f([A,0]) \subset [A, 0]$.

$$\boxed{\text{L'intervalle } [A,0] \text{ est stable par la fonction } f.}$$

   (b) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers une limite a, et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers une limite b.

f est décroissante. Cela veut dire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux monotones, et de monotonie contraire.
Calculons les premiers termes :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = A \quad ; \quad u_2 = f(A) = A(A+1) \leqslant 0$$

Cela montre que $u_2 - u_0 \leqslant 0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ce qui implique automati-

quement que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante).
$[A,0]$ est stable par f, et $u_0 \in [A,0]$, donc pour tout entier n on a $u_n \in [A,0]$.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par A, elle est donc convergente vers un certain $a \in [A,0]$ tel que $f\circ f(a) = a$.
De même, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0, elle est donc convergente vers $b \in [A,0]$ tel que $f\circ f(b) = b$.

Il existe $(a,b) \in [A,0]^2$ tel que : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$ et $f\circ f(a) = a$ et $f\circ f(b) = b$.

(c) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$f\circ f(x) - x = (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1)$$

这道题不需要老师写吧...

(d) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On est dans le cas où $A \leqslant \frac{1}{4}$. Le polynôme $X^2 - X + A$ admet deux racines $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ présentées dans la question 1.
Le discriminant du polynôme $X^2 + X + A + 1$ est égal à $-3-4A$, qui s'annule en $-\frac{3}{4} \in]-1,0[$. Il faut donc discuter selon la position de A par rapport à $-\frac{3}{4}$.

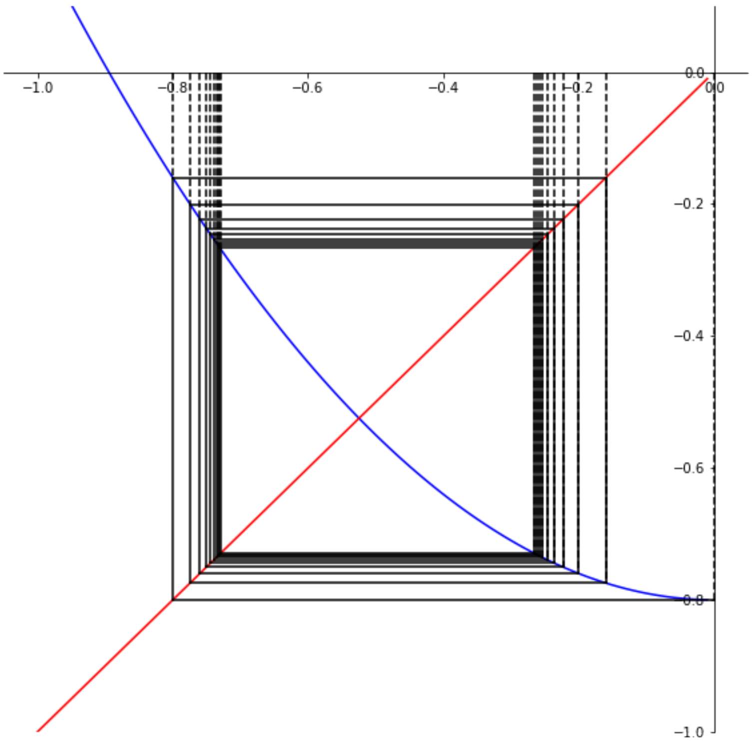
— Si $A \in \left]-\frac{3}{4}, 0\right[$:
Dans ce cas, le polynôme $X^2 + X + A + 1$ n'admet pas de racine réelle三. La seule solution de $f\circ f(x) - x = 0$ est donc x_1. De plus on a $A < x_1$, donc x_1 est le seul point fixe de $f\circ f$ dans l'intervalle $[A,0]$.
On en déduit que $a = b = x_1$, et par conséquent :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4A}}{2} \in [A,0]$

— Si $A \in \left]-1, -\frac{3}{4}\right[$:
Dans l'intervalle $[A,0]$, il y a trois solutions possibles de $f\circ f(x) - x = 0$: la solutions x_1 définie ci-dessus, et deux nouvelles solutions qui proviennent du polynôme $X^2 + X + A + 1$, qu'on note :

$$A \leqslant x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3-4A}}{2} \leqslant x_1 \quad ; \quad x_1 \leqslant x_4 = \frac{-1+\sqrt{-3-4A}}{2} \leqslant 0$$

A partir de ces points fixes, on peut déduire que $f\circ f$ a plusieurs intervalles stables, notamment $[A, x_3]$ et $[x_4, 0]$.
Comme $u_0 = 0$ et $[x_4, 0]$ est stable par $f\circ f$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par x_4. Elle converge donc vers x_4.
De même, $u_1 = A \in [A, x_3]$, l'intervalle $[A, x_3]$ est stable par $f\circ f$, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Cela permet de conclure que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_3.
La figure ci-dessous montre les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la valeur de $A = -0.8$.



$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas convergente.

$$\boxed{\text{Si } A \in \left]-1, -\frac{3}{4}\right[\text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas.}}$$

Ici on reprend la fonction de l'exercice 3. Pour les autres exercices, il suffit de modifier la fonction f ainsi que les données des axes x et y et le nombre de points n.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
# définir la fonction
def f(x):
        return (x**2+1)/2
# construire une liste contenant les termes de la suite
u=[-0.5]          # u_0 = -1/2
n=1000            # la liste contient 1000 points
for i in range(0,n):
        u.append(f(u[i]))
# options d'affichage de la figure
plt.figure(figsize=(10,10))
x=np.arange(-0.6,1.2,0.01)
plt.ylim(0,1.2)
# tracer la fonction f et la droite y=x
plt.plot(x, f(x), 'b-', x, x, 'r-')
# des axes x et y plus jolis
ax = plt.gca()
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['left'].set_position(('data',0))
# tracer les points de la suite
for i in range(0,n-1):
        plt.plot([u[i], u[i+1]], [u[i+1], u[i+1]], 'k-')
        plt.plot([u[i+1], u[i+1]], [u[i+1], u[i+2]], 'k-')
        plt.plot([u[i], u[i]], [0, u[i+1]], 'k--')
        plt.plot([u[n-1], u[n-1]], [0, u[n]], 'k--')
# afficher la figure finale
plt.show()
```