Suites et Séries – DM1

À rendre le mardi 25 octobre 2022

Numéro étudiant : . . . . Nom chinois : . . . . Nom français : . . . .

1 Valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors elle admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.
2. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}\Big(u_{n+1}-u_n\Big)=0$ alors $\mathrm{Adh}(u)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2 Suite implicite

Soit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n est l'unique solution de $\tan(x)=x$ dans l'intervalle $\Big]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\Big[$.

1. Pourquoi cette suite est-elle bien définie ?
2. Donner la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n au voisinage de $+\infty$.

3 Suite récurrente

Soit $f : x\mapsto \frac{x^3+1}{3}$, et soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=f(a_n)$.

Étudier, en fonction de a_0, le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.