Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

L'objet de ce cours est d'étudier les suites réelles ou complexes, c'est à dire d'étudier, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1.1 Aspects théoriques

1.1.1 Suites monotones

Rappel 1.1

Les ensembles suivants sont naturellement en bijection :

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ et } \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}).$$

Remarque 1.1

Les suites semblent donc des objets mathématiques assez simples. Il n'en est rien ! Par exemple, si ψ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ (qui existe, puisque $\mathbb{Q}$ est infini, dénombrable), alors :

$$u_n = \psi(n) \text{ est un suite qui prend toutes valeurs dans } \mathbb{Q}.$$

Définition 1.1

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite *monotone (resp. croissante, resp. décroissante)*, si la fonction associée :

$$\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{cases} \quad \text{est monotone.}$$

Exemple 1.1

1. La suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{1+n^2} \text{ est décroissante.}$$
2. La suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 \text{ est croissante.}$$
3. La suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \text{ n'est ni croissante, ni décroissante.}$$

Remarque 1.2

De manière plus générale, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est croissante, alors :
$$(f(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et } \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}$$

Définition 1.2

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sera dite *convergente*, si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n - \lambda| \leq \epsilon.$$

On écrit :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

La limite est clairement unique (comme pour les fonctions).
Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Remarque 1.3

En fait, on peut aussi définir des suites convergentes de $\mathbb{R}^p$ par :

$$\left(\overrightarrow{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^p\right)^{\mathbb{N}} \text{ est dite convergente vers } \overrightarrow{\lambda} \text{ si}$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow \ \left\|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\lambda}\right\| \leq \epsilon.$$

Exemple 1.2

1. La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{1+n^2} \text{ converge vers } 0.$$

2. La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 \text{ diverge vers } +\infty.$$

3. La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \text{ diverge.}$$

Remarque 1.4

L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, stable par la multiplication. Et l'application qui, à une suite convergente, associe sa limite est une application linéaire.

Remarque 1.5

Les propriétés sur les fonctions peuvent s'étendre aux suites. Par exemple, soit 3 suites réelles u, v et w, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n,$$

où u et w convergent vers une même limite λ, alors v converge aussi vers λ.

Définition 1.3

On peut aussi définir les relations de comparaisons usuelles entre suites :

$$u_n = o_{+\infty}(v_n),\ u_n = O_{+\infty}(v_n),\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \ldots$$

On écrira souvent :

$$u_n = o(v_n),\ u_n = O(v_n),\ u_n \sim v_n \ldots$$

Les propriétés de ces relations de comparaison sont les mêmes que pour les fonctions.

Proposition 1.1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone. Alors :

$$u \text{ converge} \iff \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné.}$$

Une suite qui vérifie la propriété de droite est dite suite bornée.

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Si u converge vers λ, alors, elle sera toujours bornée dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), sans avoir besoin de la monotonie de la suite. en effet, soit λ la limite, soit $\epsilon > 0$ donné et N associé, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \max\left(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + \epsilon\right).$$

— ($\Leftarrow$) Supposons, par exemple la suite croissante, et posons :

$$\lambda = \sup\left(\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}\right),$$

qui existe, d'après la propriété de la borne supérieure. Il est facile de montrer alors que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

Définition 1.4 – Suites adjacentes

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites *réelles*. On dit que ces suites sont *adjacentes*, si elles vérifient :

1. a est croissante et b décroissante.

2. $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

Proposition 1.2

Si a et b sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

Démonstration

— On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n.$$

En effet, si pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors :

$$\forall n \geq n_0,\ b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0} < 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

— La suite a est donc croissante majorée par b_0, elle converge vers une limite α.
— De même, la suite b est décroissante minorée par a_0, elle converge vers une limite β.
— En passant à la limite, on a :

$$b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta - \alpha = 0.$$

Théorème 1.1 – Segments emboîtés

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un segment $I_n = [a_n, b_n]$ (où $a_n < b_n$), tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \supset I_{n+1} \text{ et } b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Alors :

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R},\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}.$$

Démonstration

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune α. α vérifie la propriété annoncée.

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Montrer que les deux suites suivantes sont adjacentes :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } b_n = \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} \qquad (n \geq 1).$$

En comparant à une intégrale, montrer que la limite commune est $\ln(2)$.

1.1.2 Soit a_0 et b_0 deux réels fixés. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} \text{ et } a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

Montrer que les suites

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}$$

1.1.3 Soit les suites définies par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n\, n!}.$$

(a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

(b) Montrer que la limite commune est $e = \exp(1)$.

(c) Montrer que e est irrationnel.

1.1.4 Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel en s'inspirant de l'exercice précédent.

1.1.5 Soit la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

Montrer que les suites :

$$(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}$$

1.1.6 Soit $a_0 > 0$ et $b_0 > a_0$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\, b_n}.$$

Montrer que les suites :

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}$$

En calculer la limite commune en fonction de a_0 et b_0.

1.1.7 Étudier les suites définies par :

$$a_0 > 0,\ b_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}.$$

En calculer les limites.

1.1.8 Soit u_0, v_0 et w_0 trois réels > 0. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},\ \frac{3}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } w_{n+1} = \sqrt[3]{u_n\, v_n\, w_n}.$$

Montrer que ces trois suites convergent vers une même limite.

1.1.2 Discrétisation

Remarque 1.6

Les suites sont des objets intéressants à manipuler, car elles prennent un nombre *dénombrable* de valeurs. On va donc traduire les propriétés (dites *continues*) des fonctions en termes de suites. Cette traduction s'appelle la *discrétisation*.

Propriété 1.1

Passage à la limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \ \Rightarrow\ f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right].$$

Démonstration

Toujours aller du continu vers le discret !

— ($\Rightarrow$) Directement. On a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \lambda| \leq \epsilon,$$

et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I qui converge vers a, on a donc aussi :

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |x_n - a| \leq \epsilon'.$$

Prenons $\epsilon > 0$ quelconque, η associé, puis, $\epsilon' = \eta$ et N associé, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |f(x_n) - \lambda| \leq \epsilon.$$

Ce qui exprime la convergence de la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers λ.

— ($\Leftarrow$) Pour aller du continu vers le discret, nous allons montrer la contraposée, soit :

$$f(x) \text{ ne tend pas vers } \lambda \text{ quand } x \text{ tend vers } a \;\Rightarrow\; \left[\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\; x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne tend pas vers } \lambda\right].$$

Si f ne tend pas vers λ, on a :

$$\exists\epsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| \leq \eta \text{ et } |f(x)-\lambda| > \epsilon.$$

Cet $\epsilon > 0$ étant trouvé, posons, pour $\eta = 1/(n+1)$, le x associé égal à x_n. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - \lambda| > \epsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } f(x_n) \text{ ne tend pas vers } \lambda.$$

Propriété 1.2

Continuité en un point $a \in I$.

$$f \text{ continue en } a \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \;\Rightarrow\; f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)\right].$$

Propriété 1.3

Uniforme continuité sur I de la fonction f.[a]

$$f \text{ u-continue sur } I \iff \left[\forall \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \left(I^{\mathbb{N}}\right)^2,\ x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right].$$

a. f est u-continue sur I si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Démontrer la discrétisation proposée pour la continuité en a.

1.2.2 Démontrer la discrétisation proposée pour l'uniforme continuité de f (u-continuité).

1.2.3 Discrétiser les propriétés continues suivantes (qui ne sont pas forcément vraies !) :

$$\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to\alpha]{} \int_a^b f(\alpha,t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{1.2}$$

1.1.3 Suites extraites

Définition 1.5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite à valeurs réelles ou complexes, on appelle *suite extraite de u* (on parle aussi de sous-suite de u), toute suite de la forme :

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ où } \varphi \,:\, \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ est } \boxed{\text{strictement croissante}}.$$

Exemple 1.3

1. Les suites extraites fréquentes sont les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On construit souvent l'extraction en fonction des propriétés attendues. Ainsi dans l'exercice

$$\{\sin(\ln(n)),\ n \in \mathbb{N}^*\} \text{ est dense dans } [-1, 1],$$

on a considéré la suite $u_n = \sin(\ln(n))$, $n \geq 1$ et extrait une sous-suite de u, en posant :

$$\varphi(n) = \left\lfloor \exp\left(\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi\right)\right\rfloor \text{ et montré que } u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

3. La construction de la fonction φ se fait souvent par récurrence (où l'on exprime la *capacité* à produire $\varphi(n+1)$ connaissant les valeurs précédentes).

Proposition 1.3

De toute suite de $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Q}$*, on peut extraire une sous-suite* monotone.

Démonstration

On peut voir qu'il y a deux situations :

1. La suite est déjà monotone (ou presque) (figure 1.1, page suivante).
2. La suite est un peu plus compliquée (figure 1.2, page 21).

La démonstration se découpe alors en deux cas :

1. La suite vérifie :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in [x_p, x_q]\} \text{ est fini.}$$
x_0 étant pris comme référence, on peut construire les deux ensembles :
$$\begin{aligned} \delta^+(x_0) &= \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in [x_0, +\infty[\}, \\ \delta^-(x_0) &= \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in]-\infty, x_0]\}. \end{aligned}$$
L'un au moins de ces deux ensembles est infini (la réunion des deux faisant $\mathbb{N}$), supposons que $\delta^+(x_0)$ le soit. On construit l'extraction de la manière suivante : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \min\{n > \varphi(0),\ n \in \delta^+(x_0)\}$ et $x_{\varphi(1)} \geq x_{\varphi(0)}$. Supposons construits $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$, tels que $x_{\varphi(0)} \leq x_{\varphi(1)} \leq \cdots \leq x_{\varphi(k)}$, alors,
$$\begin{aligned} \delta^+(x_{\varphi(k)}) &= \{n,\ x_n \in [x_{\varphi(k)}, +\infty[\} \\ &= \delta^+(x_0) \setminus \{n,\ x_n \in [x_{\varphi(0)}, x_{\varphi(k)}[\} \end{aligned}$$
est infini d'après l'hypothèse initiale faite. Donc $\delta^+(x_{\varphi(k)})$ est infini, on pose $\varphi(k+1) = \min\{n,\ n > \varphi(k),\ x_n \in \delta^+(x_{\varphi(k)})\}$. La suite trouvée (et construite par itération) convient.
2. Si au contraire la suite vérifie :
$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in [x_p, x_q]\} \text{ est infini.}$$

En ce cas, il est difficile de prévoir la monotonie de la suite. Qu'à cela ne tienne, nous allons essayer d'en construire une croissante et une décroissante de la manière suivante (une sorte de dichotomie) : posons $\varphi(0) = p$ et $\psi(0) = q$, et supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et $\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(k')$ tels que :

$$\begin{aligned} x_{\varphi(0)} \leq x_{\varphi(1)} \leq \cdots \leq x_{\varphi(k)}, \\ x_{\psi(0)} \geq x_{\psi(1)} \geq \cdots \geq x_{\psi(k')}, \\ \text{et } \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in [x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}]\} \text{ est infini.} \end{aligned}$$

On va couper l'intervalle $[x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}]$ en deux : soit $r = \min(\{n > \max(\varphi(k), \psi(k')),\ x_n \in [x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}]\})$. Si $\{n,\ x_n \in [x_{\varphi(k)}, x_r]\}$ est infini, on pose $\psi(k'+1) = r$, sinon, on pose $\varphi(k+1) = r$. Dans les deux cas, on peut poursuivre l'itération.

Remarque 1.7

Si φ est construite sur tout $\mathbb{N}$, on a extrait une sous-suite croissante, sinon ψ est construite sur tout $\mathbb{N}$ et on a extrait une sous-suite décroissante.

Figure 1.1 – Cas où la suite est presque monotone

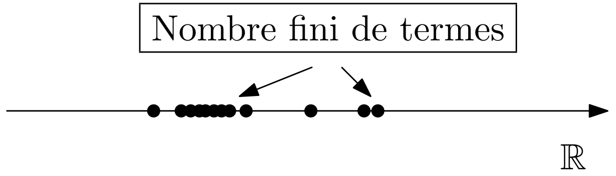
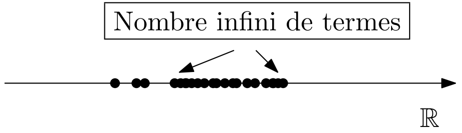


Figure 1.2 – Cas plus compliqué



Propriété 1.4

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers λ et si $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u, alors :

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

Exemple 1.4

On se sert souvent de ce résultat pour montrer qu'une suite diverge !
La suite définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2+\arctan(n)} \text{ diverge.}$$

Propriété 1.5

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, $v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de u et $(u_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de v, alors :

$$\theta(\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathbb{N}),$$

on peut donc écrire [a]

$$\boxed{\theta = \varphi \circ \psi, \text{ où } \psi \text{ est strictement croissante.}}$$

a. Attention à l'ordre des fonctions ! En particulier, $(u_{\psi\circ\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est en général pas une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 1.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},\ u_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \text{ et } u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda,$$

alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

Exemple 1.5

La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ est convergente,}$$

car les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Remarque 1.8

On peut généraliser aux suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$...

Propriété 1.7

On peut exprimer en termes de sous-suites la notion de « ne pas converger vers λ ».

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } \lambda \iff \left[\exists \epsilon > 0,\ \exists (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ extraite de } u,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \lambda| > \epsilon\right].$$

Théorème 1.2 – de Bolzano-Weierstraß

De toute suite réelle ou complexe bornée, *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration

En considérant les parties réelles et les parties imaginaires d'une suite complexe, on peut se ramener au cas où la suite est réelle. Deux démonstrations sont à notre portée.

1. (*Première démonstration*) On extrait de la suite réelle donnée une sous-suite monotone, celle-ci reste bornée, elle est donc convergente.
2. (*Deuxième démonstration*) On peut aussi procéder par dichotomie (on coupe en deux). La suite, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc :
$$\exists (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq x_n \leq b_0.$$
Le principe et de couper l'intervalle en deux, de manière à garder un nombre infini d'indices dont les x_n sont dans l'intervalle gardé. Ainsi, supposons $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n$ construits tels que :
$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \Delta_k = \{p \in \mathbb{N},\ x_p \in [a_k, b_k]\} \text{ est infini et } b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}.$$
Soit $\alpha = (a_n + b_n)/2$, on a deux cas :
   (a) L'ensemble
   $$\Gamma = \{p \in \mathbb{N},\ x_p \in [a_n, \alpha]\} \text{ est infini.}$$
   On pose, en ce cas
   $$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha.$$
   (b) Si Γ est fini, alors $\mathbb{N} \setminus \Gamma$ est infini, et on pose :
   $$a_{n+1} = \alpha \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

   Dans tous les cas, on a :
   $$\Delta_{n+1} \text{ infini.}$$
   Posons $I_n = [a_n, b_n]$, on a alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n \text{ et } b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Le théorème des segments emboîtés nous permet alors de conclure que

$$\exists \beta \in \mathbb{R},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\beta\}\,.$$

Construisons maintenant la suite extraite qui converge vers β de la manière suivante :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k+1) = \min\left(\{n \in \Delta_k,\ n > \varphi(k)\}\right).$$

φ est strictement croissante et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq x_{\varphi(k)} \leq b_k,\ \text{donc } x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \beta.$$

Proposition 1.4

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite bornée, telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ extraite de } u,\ \left[(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge } \Rightarrow u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right],$$

alors, la suite converge vers λ.

Démonstration

Si u ne converge pas vers λ, on peut trouver $\epsilon > 0$ et une sous-suite $v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \lambda| > \epsilon.$$

Mais, la suite v est toujours bornée, en appliquant le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut trouver une suite w extraite de v qui converge vers un réel $\mu \in \mathbb{R}\backslash]\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon[$. Ceci contredit l'hypothèse.

Définition 1.6 – Valeur d'adhérence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ *est une valeur d'adhérence de* u, s'il existe une sous-suite de u qui converge vers λ. Soit

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence de u sera noté :

$$\mathrm{Adh}(u).$$

Remarque 1.9

Si u converge vers λ, alors :

$$\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\}.$$

Remarque importante 1.10

La réciproque est fausse ! La suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

ne converge pas (la sous-suite des pairs tend vers $+\infty$), mais

$$\mathrm{Adh}(u) = \{0\}.$$

Exemple 1.6

1. Si $u_n = (-1)^n$, alors
$$\mathrm{Adh}(u) = \{-1, +1\}.$$
2. Si $u_n = \sin(\ln(n))$, $n \geq 1$, alors :
$$\mathrm{Adh}(u) = [-1, +1].$$

Soit u une suite réelle ou complexe *bornée*. u est convergente si, elle seulement si, elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence (et $\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\}$ où λ est la limite de u).

Proposition 1.5

Soit u une suite réelle bornée, *alors $Adh(u)$ possède un maximum et un minimum.*

Démonstration

— Comme u est bornée, $\mathrm{Adh}(u)$ est non vide (Bolzano-Weierstraß) et il est aussi borné. Il possède donc une borne supérieure et une borne inférieure. Posons :
$$\delta = \sup\left(\mathrm{Adh}(u)\right).$$
— *Montrons que* $\delta \in \mathrm{Adh}(u)$. C'est une application du procédé diagonal de Cantor ! En effet,
  - La discrétisation de la propriété de la borne supérieure nous donne :
$$\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Adh}(u)^{\mathbb{N}},\ \lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta.$$

- Mais, chaque λ_n est dans $\mathrm{Adh}(u)$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (u_{\varphi_n(p)})_{p\in\mathbb{N}},\ u_{\varphi_n(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \lambda_n.$$

- Soit $\epsilon > 0$ fixé, N associé tel que :

$$\forall n \geq N,\ |\lambda_n - \delta| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

n fixé, P_n associé tel que :

$$\forall p \geq P_n,\ |x_{\varphi_n(p)} - \lambda_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Construisons alors les entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N},\ n\geq N}$ tels que :

$$p_N = P_N \text{ et } \forall n \geq N,\ p_n = \min\left(\{p \geq P_n,\ \varphi_n(p) > \varphi_{n-1}(p_{n-1})\}\right).$$

On a alors :

$$\forall n \geq N,\ |x_{\varphi_n(p_n)} - \delta| \leq \epsilon.$$

Rappel 1.2

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et les bornes sont atteintes (il y a donc un maximum et un minimum).

Démonstration

Montrons qu'elle est bornée (la suite de la démonstration ne change pas vraiment).
Supposons, par exemple, que $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, ne soit pas majorée. Cela signifie que l'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Mais, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

qui converge, soit :

$$\exists \alpha \in [a,b],\ \exists (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}},\ x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$

Mais, la fonction f est continue ! Donc :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha),$$

ce qui contredit l'hypothèse :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exemple 1.7

On peut aussi utiliser cette notion dans des cas pratiques. Soit la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \arctan(u_{n+1}) + \arctan(u_n).$$

Cette suite est convergente.

Démonstration

— On a introduit l'unique solution $\alpha > 0$, telle que $\alpha = 2\arctan(\alpha)$.
— *La suite est bornée.* En effet, on a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \in]0,\pi[.$$

On peut démontrer plus précisément que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \min(u_0,u_1,\alpha) \leq u_n \leq \max(u_0,u_1,\alpha).$$

— Posons $\beta_1 = \min(\mathrm{Adh}(u)) > 0$ et $\beta_2 = \max(\mathrm{Adh}(u)) > 0$. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u qui converge vers β_2, on peut extraire une sous-suite de $(u_{-1+\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(u_{-1+\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur $\beta \in [\beta_1,\beta_2]$, et, en ce cas, la suite $(u_{-2+\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur $\beta' \in [\beta_1, \beta_2]$ qui vérifie :

$$\beta_2 = \arctan(\beta) + \arctan(\beta') \leq 2\arctan(\beta_2).$$

Donc $\beta_2 \leq \alpha$. On montre de même que $\beta_1 \geq \alpha$. Finalement :

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha \text{ et } \operatorname{Adh}(u) = \{\alpha\}.$$

La suite u converge vers α.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Montrer que la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \ln(1 + u_{n+1}) + \ln(1 + u_n),$$

est convergente.

1.3.2 Montrer que la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

converge vers 1.

1.3.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on définit la suite u par :

$$u_n = n\,\alpha - \lfloor n\,\alpha \rfloor.$$

Montrer que

$$\operatorname{Adh}(u) = [0, 1].$$

1.3.4 Soit u une suite réelle telle que :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(a) Montrer que $\operatorname{Adh}(u)$ est un intervalle.

(b) Donner des exemples où $\operatorname{Adh}(u)$ vaut $\emptyset$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$.

1.3.5 (a) Soit u et v deux suites *réelles* telles que :

$$u_n^2 + u_n\, v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(b) Soit u et v deux suites complexes telles que :

$$u_n^3 - v_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3.6 Soit u une suite réelle telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Montrer que u possède une valeur d'adhérence (c'est-à-dire une sous-suite bornée).

1.3.7 Soit u une suite complexe, montrer que

$$u \text{ converge} \iff \Big[(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{3\,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent}\Big].$$

1.3.8 Soit u une suite bornée telle que :

$$u_n + \frac{1}{2}\, u_{2\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Montrer que u converge.

1.3.9 Soit $z_1, \ldots, z_p$ des complexes de module 1. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{p} z_k^n.$$

Montrer que $p \in \mathrm{Adh}(u)$.

1.2 Point fixe

Proposition 1.6

Soit $f\ :[a,b] \to [a,b]$, continue, alors :

$$\exists \alpha \in [a,b],\ f(\alpha) = \alpha.$$

On dit que α est un point fixe de f.

Démonstration

On applique le TVI à $x \mapsto f(x) - x$.

Définition 1.7

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, on dit que f *est* k*-lipschitzienne* (où $k \geq 0$), si :

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \Delta^2,\ \left\| f\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{y}\right) \right\| \leq k \left\| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \right\|.$$

Si $k < 1$, on dit que f *est* k*-contractante.*

Propriété 1.8

Toute fonction lipschitzienne est continue, et même uniformément continue.

Propriété 1.9

L'ensemble des fonctions lipschitziennes de Δ dans $\mathbb{R}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}^p)$.

Propriété 1.10

La composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Propriété 1.11

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Démonstration

Utiliser le TAF.

Exemple 1.8

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction :
$$(x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) \text{ est lipschitzienne sur } \mathbb{R}^2.$$
3. La fonction :
$$(x, y) \mapsto (y, \arctan(x) + \arctan(y)) \text{ est aussi lipschitzienne sur } \mathbb{R}^2.$$
4. La fonction :
$$x \mapsto \sqrt{x} \text{ n'est pas lipschitzienne sur } \mathbb{R}_+^*.$$
Elle est cependant u-continue. On a donc, pour I intervalle de $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supsetneq \{f : I \to \mathbb{R}, \text{ u-continue}\} \supsetneq \{f : I \to \mathbb{R}, \text{ lipschitzienne}\} \supsetneq \{f : I \to \mathbb{R}, \text{ contractante}\}.$$

Théorème 1.3 – du point fixe [version élémentaire]

Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$, *où* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *est tel que* $f(\Delta) \subset \Delta$, *telle que :*

$$\{\overrightarrow{x} \in \Delta,\ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\} \neq \emptyset \text{ et } f \text{ contractante sur } \Delta,$$

alors il y a un unique point fixe $\overrightarrow{\alpha}$ *et la suite définie par :*

$$\overrightarrow{x_0} \in \Delta,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \overrightarrow{x_{n+1}} = f\left(\overrightarrow{x_n}\right),$$

converge vers $\overrightarrow{\alpha}$.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{\alpha}$ un point fixe de f. On a immédiatement, d'après les hypothèses :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|\overrightarrow{x_{n+1}} - \overrightarrow{\alpha}\right\| \leq k \left\|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\alpha}\right\|,$$

où $k \in [0,1[$ est le coefficient assurant le fait que f est une fonction contractante. Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\alpha}\right\| \leq k^n \left\|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{\alpha}\right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Remarque 1.11

Lorsque $f : [a,b] \to [a,b]$, l'existence du point fixe est automatique pour les fonctions contractantes, car elles sont continues.

Remarque 1.12

Lorsque $f : [a, b] \to [a, b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$, une condition nécessaire et suffisante pour être contractante est de vérifier :

$$\forall x \in [a, b], \ |f'(x)| < 1.$$

Remarque 1.13

Connaissant le coefficient k, il est facile d'évaluer le nombre d'itérations pour avoir une valeur approchée de $\overrightarrow{\alpha}$ à une précision donnée $\epsilon > 0$. Il suffit de choisir n tel que [a] :

$$k^n \, \|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{\alpha}\| \leq \epsilon.$$

a. C'est un peu plus compliqué que cela, car on ne connaît pas $\overrightarrow{\alpha}$. On majorera donc $\|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{\alpha}\|$.

Exemple 1.9

Prenons la suite définie par :

$$u_0 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

— Il est facile de montrer qu'elle converge vers $\sqrt{2}$; combien faut-il de termes pour calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près ?
— L'intervalle $[1, 2]$ est stable par f (par exemple). Sur cet intervalle on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, \text{ donc } k = \frac{1}{2} \text{ convient.}$$

— En estimant que $|\sqrt{2}-1| \leq 1/2$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

— Il nous faut donc calculer n termes, où

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3},\ \text{soit 9 termes.}$$

Ce n'est pas confirmé par **Wxmaxima** *(session 1.1, de la présente page), qui nous donne la bonne approximation pour* $n = 3$.

Session `Wxmaxima` 1.1 – Estimation numérique d'un point fixe

```
(%i1)  f(x) := 1/2*(x+2/x)$
(%i2)  u(n) := if n=0 then 1.0 else f(u(n-1))$
(%i3)  makelist(delta[k]=ev(u(k)-sqrt(2),numer),k,0,3);
```

(%o3) $[\delta_0 = -0.4142135623731, \delta_1 = 0.085786437626905, \delta_2 = 0.0024531042935714, \delta_3 = 2.1239014145191248\, 10^{-6}]$

Remarque 1.14

Que se passe-t-il ? Plus on se rapproche de $\sqrt{2}$, plus la constante k diminue, et moins on a besoin de calculer de termes.

Ainsi :

$$u_0 = 1 \;\Rightarrow\; u_1 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \geq 2,\; u_n \in \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right].$$

On trouve alors un nouveau k (environ 0.06), il ne faut plus calculer que 2 termes supplémentaires.

Remarque 1.15

La *vitesse de convergence* (liée au nombre de termes à calculer), sera donnée sous la forme :

$$O(k^n) \text{ où } k \text{ est le coefficient de contraction trouvé.}$$

Plus précisément, la vitesse de convergence sera le comportement asymptotique de $\left\|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\lambda}\right\|$.

Exemple 1.10

Reprenons la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

Très exceptionnellement, on peut calculer la vitesse de convergence de cette suite car :

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{u_0 - \sqrt{2}}{u_0 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}}.$$

Ce qui donne finalement :

$$|u_n - \sqrt{2}| \underset{\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

Cette suite converge extrêmement vite !

Remarque 1.16

La plupart du temps, nous n'obtenons pas une information aussi précise. La vitesse est alors de la forme $O(v_n)$ où v_n est une expression en n, mais où ne connaissons pas les constantes en jeu. La vitesse de convergence nous donne cependant un *ordre de grandeur* des calculs à effectuer. Ainsi si la vitesse de convergence est en :

$$\begin{array}{rll} O(a^n),\ a \in]0,1[& \text{alors} & \text{la vitesse est dite } \textit{exponentielle} \\ O(n^p) & \text{alors} & \text{la vitesse est dite } \textit{polynomiale} \end{array}$$

il sera probablement plus agréable d'avoir une vitesse exponentielle.

Proposition 1.7

Si $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ 0 < |f'(x)| < 1,$$

alors, quelque soit $x_0 \in [a,b]$, la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$$

a une vitesse de convergence en :

$$|x_n - \alpha| = O\left(|f'(\alpha)|^n\right), \text{ où } f(\alpha) = \alpha.$$

Démonstration

Nous reviendrons sur cette propriété dans le cours sur les séries numériques...

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Montrer que les suites suivantes sont convergentes et évaluer les vitesses de convergence :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2 \tag{1.3}$$

$$u_0 = 2,\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \tag{1.4}$$

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = 2\arctan(u_n) \tag{1.5}$$

$$u_0 = \pi/4,\ u_{n+1} = \sin(2u_n) \tag{1.6}$$

$$u_0 = 1/2,\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2. \tag{1.7}$$

1.4.2 Soit les suites définies par :

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n},\ v_{n+1} = \sqrt{7 + u_n}.$$

Montrer que :

$$(u_n, v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (2, 3).$$

1.4.3 Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq v_n$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et qu'elles convergent vers la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b).

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(v_n - u_n)^2.$$

(d) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de ces suites ?

On suppose désormais que $a = 1$ et $b = 2$.

(e) Établir alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{8^{2^n - 1}}.$$

(f) En déduire une valeur approchée de la limite commune à 10^{-10} près.

1.4.4 Soit les suites définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n},$$

où $0 < a < b$. Montrer qu'elles convergent et évaluer les vitesses de convergence.

1.4.5 Soit $k \in]0,1[$, soit u une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k\,|u_{n+1} - u_n|.$$

Montrer que la suite u converge.

1.4.6 Soit la suite définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

Montrer que la suite converge vers 1 et évaluer sa vitesse de convergence.

1.4.7 Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln(n))^n}{n!}.$$

(a) Étudier la suite :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) Évaluer la vitesse de convergence de u.

1.3 Suites usuelles

Ce paragraphe explore quelques techniques d'étude pratique de certaines types de suite.

1.3.1 Comparaison de suites

On définit les relations de comparaison $\sim$, o et O entre deux suites de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme pour les fonctions de la variable réelle. En particulier, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, v_n \neq 0,$$

alors :

— $u_n = O(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bornée ;

— $u_n = o(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

— $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Les comparaisons des suites usuelles suivantes sont à connaître ($\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $a > 1$) :

$$\begin{aligned}(\ln n)^\beta &= o(n^\alpha)\\ n^\alpha &= o(a^n)\\ a^n &= o(n!)\\ n! &= o(n^n).\end{aligned}$$

1.3.2 Suites explicites

On appelle ainsi toute suite où le terme général est donné par une formule ne dépendant pas des termes précédents.

Suites de la forme :

$$u_n = f(n), \text{ où } f \text{ est une fonction de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{K}.$$

Exemple 1.11

Étudier la suite définie par :

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}.$$

On trouve à l'aide d'un développement limité :

$$u_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,n},$$

elle converge donc vers 0.

Exemple 1.12

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z.$$

Suites de la forme :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k),\ \text{ où } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Ce type de suite sera étudié à la fin de ce cours lors des méthodes approchées de quadrature. Pour le moment nous comparerons à une intégrale, en utilisant (si elle existe) une monotonie de f, ou nous utiliserons des suites adjacentes.

Exemple 1.13

Soit la suite déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Cette suite est clairement croissante. Est-elle convergente ? divergente ? Quel est son comportement asymptotique ?

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k},$$

ce qui donne :

$$u_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq u_n - \frac{1}{n}.$$

Soit, finalement :

$$u_n \underset{\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exemple 1.14

Soit la suite déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Les deux suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Il est possible de calculer cette limite ($\ln(2)$), en utilisant le développement de Taylor avec reste intégral de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$.

Suites de la forme :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Ce type de suite sera étudiée dans le cours sur les sommes de Riemann. Pour le moment, nous comparerons avec une intégrale, en utilisant (si elle existe) une monotonie de f.

Exemple 1.15

Soit la suite déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2 + 4\,n^2}.$$

On écrit d'abord :

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k/n}{4 + (k/n)^2} \right),$$

En comparant avec l'intégrale sur $[0, 1]$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{x}{4 + x^2}, \text{ qui est croissante,}$$

il vient :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{4 + x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} \ln(4 + x^2) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Étudier les suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}, \quad (n \text{ symboles } \sqrt{}) \tag{1.8}$$

$$u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad (n>0) \tag{1.9}$$

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{a}{1+a^k}, \quad (a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}) \tag{1.10}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad (\text{préciser la vitesse de convergence}) \tag{1.11}$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right), \quad (\text{préciser la vitesse de convergence}) \tag{1.12}$$

$$u_n = \frac{z^n}{(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^n)}, \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}) \tag{1.13}$$

1.5.2 Donner un équivalent des termes u_n définis par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} e^k, \tag{1.14}$$

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (n > 0) \tag{1.15}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tag{1.16}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k! \tag{1.17}$$

1.5.3 Étudier les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5n}{3\,n^2 + 4k^2}, \quad (n > 0) \tag{1.18}$$

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} (n+k)\,\sin\left(\frac{k}{n}\right), \quad (n > 0) \tag{1.19}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\,\sin\left(\frac{k}{n^2}\right), \quad (n > 0) \tag{1.20}$$

1.3.3 Suites implicites

Remarque 1.17

Nous avons déjà étudié les suites implicites et nous avons aussi réussi à en donner des développements limités dans le cours sur les développements asymptotique implicites.

Exemple 1.16

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_n \text{ est } \textit{la} \text{ racine de l'équation } x^n - n\,x + 1 = 0 \text{ telle que } x_n \in [0,1], \quad (n \geq 3).$$

1. *Existence et unicité.* La fonction $f_n : x \mapsto x^n - n\,x + 1$ est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$. Comme $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence de x_n, la stricte monotonie nous assure l'unicité.
2. *Comportement limite.* Soit $k \in]0,1[$, on a :

$$f_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$

donc, lorsque n tend vers $+\infty$, $k > x_n$. En prenant $k = \epsilon > 0$, on trouve que :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3. *Équivalent.* Lorsque n tend vers $+\infty$, x_n^n tend vers 0 (de manière évidente), donc :

$$n\,x_n = 1 + o(1) \text{ donc } x_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

4. *Développement asymptotique.* Si l'on écrit :

$$x_n = \frac{1}{n}\,(1+\delta_n)\,,\ \text{où } \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et que l'on reporte dans l'expression, il vient :

$$\frac{1}{n^n}\,(1+\delta_n)^n = \delta_n,$$

mais, alors, il n'est pas possible d'obtenir directement une information sur δ_n, car nous n'avons pas assez d'informations sur le comportement de $(1+\delta_n)^n$. Mais, cela nous donne que δ_n étant borné par un $a > 0$,

$$\delta_n \leq \frac{(1+a)^n}{n^n},\ \text{en particulier } n\,\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc, on peut développer $(1+\delta_n)^n = 1 + n\,\delta_n + o(n\,\delta_n)$, et finalement :

$$\delta_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Donner les développements asymptotiques à 3 termes des solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
e^x + \sin(x) &= n && (1.21)\\
1 + \ln(n + x) &= x && (1.22)\\
x - e^{-x} &= n && (1.23)\\
\tan(x) &= \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad \left(x \in \left[n\,\pi, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right) && (1.24)\\
x \exp\left(\sqrt{x}\right) &= \sqrt{n} && (1.25)\\
x - \lfloor x \rfloor &= \frac{1}{x^2}, \quad (x \in [n, n+1[) && (1.26)\\
\frac{x \ln(x)}{x + 1} &= n. && (1.27)
\end{aligned}$$

1.6.2 On considère l'équation :

$$1 + \frac{x}{x-1} + \cdots + \frac{x}{x-n+1} = \ln\left(\frac{x\,(x-1)\,\cdots\,(x-n+1)}{n!}\right).$$

(a) Montrer qu'elle admet une unique solution x_n dans $[n, +\infty[$.

(b) Donner un développement asymptotique de x_n à deux termes.

1.3.4 Suites récurrentes linéaires

Définition 1.8

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *suite récurrente linéaire d'ordre* p toute suite définie par :

1. La donnée des p premières valeurs (valeurs initiales) : $u_0, \ldots, u_{p-1}$.
2. La donnée d'une formule de récurrence de la forme :

$$(S) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + a_{1,n}\, u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\, u_n = b_n,$$

   où les suites :

$$(a_{1,n})_{n\in\mathbb{N}},\ \ldots,\ (a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont connues.}$$

Propriété 1.12

Chercher les solutions de (S) revient à résoudre un système linéaire $\phi(u) = b$, où

$$\phi\ :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+p} + a_{1,n}\, u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\, u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On obtient donc :

1. L'ensemble des solutions de (S) est soit vide (système incompatible), soit un espace de la forme :

$$v + \mathrm{Ker}(\phi),\ \text{où } v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } \textit{une} \text{ solution de } (S).$$

   Ici, il est évident qu'il y a des solutions, car une fois connues les valeurs initiales, on peut calculer tous les autres termes.

2. On obtient même que :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(\phi)\right) = p.$$

On connaît la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi)$, ce n'est cependant pas toujours possible d'en calculer une base !

3. Pour trouver une solution de (S), on peut utiliser le principe de superposition des solutions et la méthode de variation des constantes.

Démonstration du point 2

On a l'isomorphisme naturel entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$:

$$(u_0, \ldots, u_{p-1}) \mapsto (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + a_{1,n}\, u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\, u_n = 0.$$

Exemple 1.17

Soit la suite récurrente linéaire définie par :

$$u_0 \text{ donnée, et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2(n+1)\, u_n + (n+2)\,(2\,n+5) \qquad (S).$$

1. L'équation homogène se résout de la manière suivante :

$$u_n = k\,(-2)^n\, n!.$$

2. On essaye ensuite une méthode de variation de la constante, en cherchant u_n sous la forme $u_n = k_n\,(-2)^n\, n!$. En

reportant, il vient :

$$k_{n+1} - k_n = \frac{(n+2)\,(2\,n+5)}{(-2)^{n+1}\,(n+1)!}.$$

Ce qui permet de trouver k_n, en le cherchant sous la forme :

$$k_n = \frac{a\,n+b}{(-2)^n\,n!}, \text{ on trouve } a=1 \text{ et } b=3.$$

Finalement, les solutions de (S) sont :

$$(n+3+k\,(-2)^n\,n!)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ où } k\in\mathbb{K}.$$

Si on nous donne u_0, il est facile de trouver : $k = u_0 - 3$.

Session `Wxmaxima` 1.2 – Suite récurrente linéaire

(%i1) `rec : u[n+1]+2*(n+1)*u[n];`

(%o1) $u_{n+1} + 2\,(n+1)\,u_n$

(%i2) `load(solve_rec)$`

(%i3) `solve_rec(rec=0,u[n]);`

(%o3) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,\Gamma\,(n+1)$

```
(%i4) makefact(%);
```

(%o4) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,n!$

```
(%i5) solve_rec(rec=(n+2)*(2*n+5),u[n]);
```

solve : dependent equations eliminated : (1)
(%o5) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,\Gamma(n+1) + 3\,(-1)^n\,2^n\,n! - n - 3$

```
(%i6) makefact(%);
```

(%o6) $u_n = 3\,(-1)^n\,2^n\,n! + \%k_1\,(-2)^n\,n! - n - 3$

Exemple 1.18

Soit la suite récurrente linéaire définie par :

$$u_0,\ u_1 \text{ données, et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4(n-1)\,u_{n+1} - (4\,n+5)\,u_n = n \qquad (S).$$

En général, il n'est pas possible de trouver facilement des solutions. Ici, « on remarque que $u_n = n^2$ est solution de l'équation homogène » [a]. Il ne semble pas possible de trouver simplement une deuxième solution... Pour trouver une solution particulière, faisons appel à `Wxmaxima` (session 1.3, page suivante).

a. Je le sais, parce que j'ai construit l'exercice pour avoir cette solution !

Session Wxmaxima 1.3 – Autre suite récurrente linéaire

```
(%i1) rec : u[n+2]+4*(n-1)*u[n+1]-(4*n+5)*u[n];
```

(%o1) $u_{n+2} + 4\,(n-1)\,u_{n+1} + (-4\,n-5)\,u_n$

```
(%i2) load(solve_rec)$
(%i3) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

WARNING : found some hypergeometrical solutions !
(%o3) $u_n = \%k_1\,n^2$

```
(%i4) solve_rec(rec=n,u[n]);
```

WARNING : found some rational solutions !
(%o4) $u_n = \%k_3\,n^2 - \dfrac{n}{4} + \dfrac{1}{16}$

Remarque 1.18

Cas important : les suites récurrentes à coefficients constants. C'est le cas où les suites $(a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites constantes. L'équation s'écrit donc :

$$u_{n+p} + a_1\,u_{n+p-1} + \cdots + a_p\,u_n = b_n, \qquad (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Le principe est le suivant :

On cherche des solutions de l'équation homogène sous la forme : $u_n = \lambda^n$.

Exemple 1.19

Équations d'ordre 1

$$(S) \qquad u_{n+1} + a\,u_n = b_n, \qquad (u_0 \text{ donnée, } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ connue, } a \neq 0.$$

1. *Équation homogène.* Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$u_n = k\,(-a)^n.$$

2. *Recherche d'une solution de* (S). Par méthode de variation de la constante, on cherche u_n sous la forme :

$$u_n = k_n\,(-a)^n,$$

alors

$$k_{n+1} - k_n = \frac{b_n}{(-a)^{n+1}}, \text{ donc } k_n = k_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-a)^{j+1}}.$$

Cas particuliers où le second membre b_n est de la forme $P(n)\,\mu^n$, pour une fonction polynomiale P et un scalaire $\mu \in \mathbb{K}$. On cherche alors une solution de la forme $Q(n)\,\mu^n$, où Q est une fonction polynomiale. Voir la session `Wxmaxima` 1.4, page 60

Équations d'ordre 2

$$(S) \qquad u_{n+2} + a_1\, u_{n+1} + a_2\, u_n = b_n.$$

1. *Équation homogène.* On cherche les solutions sous la forme λ^n, ainsi :

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2 = 0,$$

ce qui nous donne deux cas :

— $a_1^2 \neq 4a_2$, on a deux solutions complexes distinctes λ_1 et λ_2, donc :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\{(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}\right).$$

— $a_1^2 = 4a_2$, on a une solution double λ_0, donc :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\left\{(\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\, \lambda_0^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}\right\}\right).$$

2. Pour trouver une solution de (S), on peut :

— Dans le cas général, faire varier *une* constante.

— Dans la cas où le second membre est de la forme $P(n)\, \mu^n$, la chercher sous la forme $Q(n)\, \mu^n$, où Q est une fonction polynomiale. Voir la session `Wxmaxima` 1.5, page 61.

Session Wxmaxima 1.4 – Équation récurrente linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

```
(%i1) load(solve_rec)$
(%i2) rec : u[n+1]+a*u[n];
```

(%o2) $u_{n+1}+a\,u_n$

```
(%i3) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

(%o3) $u_n=\%k_1\,(-a)^n$

```
(%i4) solve_rec(rec=n*b^n,u[n]);
```

(%o4) $u_n=\dfrac{b^n\,(b\,n+a\,n-b)}{(b+a)^2}+\dfrac{(-a)^n\,b}{(b+a)^2}+\%k_1\,(-a)^{n-1}$

```
(%i5) solve_rec(rec=n*(-a)^n,u[n]);
```

(%o5) $u_n=\%k_1\,(-a)^{n-1}-\dfrac{(-a)^n\,(n-1)\,n}{2\,a}$

```
(%i6) solve_rec(rec=sqrt(n),u[n]);
```

$-\dfrac{\sqrt{\%j+1}}{\sqrt{\%j}\,a}$ non-rational term ratio to nusum

(%o6) $u_n=\%k_1\,(-a)^{n-1}+\displaystyle\sum_{\%j=1}^{n-1}\sqrt{\%j}\,(-a)^{n-\%j-1}$

Session `Wxmaxima` 1.5 – Équation récurrente d'ordre 2 à coefficients constants

```
(%i1) load(solve_rec)$
```

Cas où il y a deux racines réelles.

```
(%i2) rec : u[n+2]+3*u[n+1]+2*u[n];
```

(%o2) $u_{n+2}+3\,u_{n+1}+2\,u_n$

```
(%i3) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

(%o3) $u_n=\%k_2\,(-1)^n+\%k_1\,(-2)^n$

```
(%i4) solve_rec(rec=n*3^n,u[n]);
```

(%o4) $u_n=-\frac{3^{n+3}}{400}+\frac{n\,3^n}{20}+\%k_2\,(-1)^n+\%k_1\,(-2)^n$

```
(%i5) solve_rec(rec=n*(-2)^n,u[n]);
```

(%o5) $u_n=\%k_2\,(-1)^n+\%k_1\,(-2)^n+n^2\,(-2)^{n-2}-5\,n\,(-2)^{n-2}$

Cas où il y a une racine double.

```
(%i6) rec : u[n+2]-4*u[n+1]+4*u[n];
```

(%o6) $u_{n+2}-4\,u_{n+1}+4\,u_n$

```
(%i7) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

$$(\%o7)\quad u_n = (\%k_2\, n + \%k_1)\, 2^n$$

```
(%i8) solve_rec(rec=n*3^n,u[n]);
```

$$(\%o8)\quad u_n = -2\, 3^{n+1} + n\, 3^n + (\%k_2\, n + \%k_1)\, 2^n$$

```
(%i9) solve_rec(rec=n*2^n,u[n]);
```

$$(\%o9)\quad u_n = (\%k_2\, n + \%k_1)\, 2^n + \frac{n^3\, 2^{n-3}}{3} - n^2\, 2^{n-3}$$

Cas où il y a deux racines complexes.

```
(%i10) rec : u[n+2]+u[n+1]+u[n];
```

$$(\%o10)\quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$$

```
(%i11) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

$$(\%o11)\quad u_n = \frac{\left(\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_2}{2^n} + \frac{\left(-\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_1}{2^n}$$

```
(%i12) solve_rec(rec=n*2^n,u[n]);
```

$$(\%o12)\quad u_n = -\frac{5\, 2^{n+1}}{49} + \frac{n\, 2^n}{7} + \frac{\left(\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_2}{2^n} + \frac{\left(-\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_1}{2^n}$$

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Soit u la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = -1 \qquad 6\,u_{n+2} + 5\,u_{n+1} - 6\,u_n = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Calculer u_n en fonction de n.

(b) Déterminer un équivalent simple de u_n.

(c) Montrer que u diverge.

1.7.2 Étudier les suites définies par

$$v_{n+1} = 3\,v_n + 1 + n^2.$$

1.7.3 Calculer u_n définie par :

$$u_{n+2} = \frac{7\,u_{n+1} - 2\,u_n}{6}, \quad u_0 = 3,\ u_1 = 2.$$

1.7.4 Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par

$$u_0,\ u_1 > 0 \text{ et } u_{n+2} = \frac{u_n\,u_{n+1}}{3\,u_n + 2\,u_{n+1}}.$$

1.7.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et u_1 strictement positifs et

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \qquad (n \geq 1).$$

(a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ existe et la déterminer.}$$

Que remarquez-vous ?

(b) Soit

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

(c) Montrer que $(a_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Déterminer un rationnel r tel que

$$\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}.$$

1.7.6 Déterminer tous les entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que toutes les suites complexes u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

soient périodiques. Quelles sont alors les périodes possibles ?

1.7.7 Montrer que pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants on a l'alternative suivante :
- soit elle s'annule périodiquement
- soit il y a un rang à partir duquel elle ne s'annule pas

1.7.8 Déterminer les suites vérifiant

$$u_{n+1} = -10\,u_n - 28\,v_n \qquad v_{n+1} = 6\,u_n + 16\,v_n$$

1.7.9 Soit x_n définie par

$$x_0,\ x_1 > 1 \text{ et } x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_{n-1}}.$$

(a) Étudier x_n.

(b) Donner un équivalent de x_n.

1.7.10 Soient a et $b > 0$. Trouver les fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que [a]

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(f(x)) + a\, f(x) = b\,(a+b)\, x.$$

1.7.11 Soient u_0, u_1, $k > 0$. Déterminer dans $\overline{\mathbb{R}}$ la limite de la suite définie par

$$u_{n+2} = k\, \frac{u_{n+1}^2}{u_n}.$$

1.7.12 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(f(x)) = 6\, x - f(x).$$

---

a. On pourra utiliser une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

1.3.5 Suites récurrentes

1.3.5.1 Récurrences simples

Remarque 1.19

Plan d'étude d'une suite récurrente réelle définie par :

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : I \to I$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. *Recherche des limites possibles.* Si f est continue et I un segment ou de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $\mathbb{R}$, les limites possibles vérifient $l = f(l)$. Si I n'est pas un segment, on peut « sortir de l'intervalle », c'est-à-dire, par exemple, si $I =]a, b]$, alors a est une limite possible si :
$$f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} a.$$

   Ne pas oublier le cas très particulier des applications contractantes !

2. *Recherche de sous-intervalles stables J de I où la fonction est monotone.* [a] On a alors :

   Si $u_0 \in J$ et f croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. La monotonie peut se trouver en étudiant la position de u_1 par rapport à u_0, soit la position de $f(x)$ par rapport à x.

Si $u_0 \in J$ et f décroissante sur J, alors les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. On peut trouver leur monotonie en prenant en considération la fonction $f \circ f$. Notons que, lorsque f est continue, on a :

$$u_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \;\Rightarrow\; u_{2\,n+1} = f(u_{2\,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\lambda).$$

Donc, si $f(\lambda) \neq \lambda$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge !

3. *Traitement des autre cas.*

Dans les autres cas, on essaye « d'arriver » dans un intervalle stable. Le raisonnement est souvent basé sur l'absence d'une limite dans l'intervalle où l'on est.

---

a. *Stable* signifie que $f(J) \subset J$.

Exemple 1.20 – Pas de limite possible

Soit la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n}.$$

La fonction exp étant continue, toute limite vérifiera $l = e^l$. Il n'y a pas de limite possible : la suite diverge. Comme la suite est clairement croissante, on a immédiatement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exemple 1.21 – Une limite possible... sans convergence

Soit la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

La fonction $x \mapsto e^x - 1$ étant continue, toute limite vérifiera $l = e^l - 1$. On a une seule limite possible.

Ce n'est pas suffisant pour dire qu'une suite converge ! Ainsi, la suite précédente converge si $u_0 \leq 0$ et diverge si $u_0 > 0$. Voir la figure 1.3, page 77.

Exemple 1.22 – Cas contractant

Soit la suite définie par :

$$u_0 \in [-1, +1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}\, u_n^2.$$

— L'intervalle $[-1, +1]$ est stable par f. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1, +1].$$

— La fonction est contractante sur $[-1, +1]$ car :

$$\forall x \in [-1, +1],\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1.$$

— La suite est donc convergente vers *la seule* limite possible qui vérifie $f(l) = l$, soit :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\sqrt{21} - 3}{2}.$$

Voir la figure 1.4, page 78.

Exemple 1.23 – Cas croissant

1. Soit la suite définie par :
$$u_0 \leq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$
L'intervalle $J =]-\infty, 0]$ est stable par f (où $f : x \mapsto e^x - 1$) et f est croissante sur cet intervalle. La suite u est donc *monotone*. Comme on a :
$$\forall x \in]-\infty, 0],\ f(x) \geq x,$$
on en déduit que la suite est croissante. Elle est donc croissante, majorée par 0, elle converge vers la seule limite possible 0.
2. Soit la suite définie par :
$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$
L'intervalle $J = [0, +\infty[$ est stable par f et f est croissante sur cet intervalle. La suite u est donc *monotone*. Comme on a :
$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geq x,$$
on en déduit que la suite est croissante. Elle reste donc dans l'intervalle $[x_0, +\infty[$, où il n'y a pas de limite possible, puisque $x_0 > 0$. La suite diverge vers $+\infty$.
3. Soit la suite définie par :
$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

- L'intervalle $[0, 2]$ est stable par f (où $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$) et f est croissante sur cet intervalle. La suite est donc *monotone*. Comme on a :

$$\forall x \in [0, 2],\ f(x) \geq x,$$

on en déduit que la suite est croissante. Elle est donc croissante, majorée par 2, elle converge vers la seule limite possible 2. Voir la figure 1.5, page 79.

- L'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f et f est croissante sur cet intervalle. La suite est donc *monotone*. Comme on a :

$$\forall x \in [2, +\infty[,\ f(x) \leq x,$$

on en déduit que la suite est décroissante minorée par 2, elle converge vers 2. Dans tous les cas :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

Voir la figure 1.6, page 80.

Exemple 1.24 – Cas décroissant

Soit la suite définie par :

$$u_0 \in [0, 2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2-x}.$$

- L'intervalle $[0, 2]$ est stable par f (où $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$) et la fonction est décroissante sur cet intervalle. Il faut donc étudier la fonction :

$$g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}},$$

qui est croissante sur $[0,2]$. La suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc *monotone*. De plus, le signe de $g(x)-x$ peut être déterminer de la manière suivante :

$$g(x)-x=\frac{2-\sqrt{2-x}-x^2}{x+\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}=\frac{(2-x^2)^2-(2-x)}{\left(x+\sqrt{2-\sqrt{2-x}}\right)\left(2-x^2+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\frac{(x-1)\,(x+2)\,\left(x^2-x-1\right)}{\left(x+\sqrt{2-\sqrt{2-x}}\right)\left(2-x^2+\sqrt{2-x}\right)}.$$

Donc, si $u_0\in[0,1]$, la suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par l'unique limite possible 1, elle converge vers 1. Et, de même, si $u_0\in[1,2]$, la suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par l'unique limite possible 1, elle converge vers 1.

- Comme f est continue et que $f(1)=1$, on a :

$$u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Voir la figure 1.7, page 81.

Exemple 1.25 – Autre cas

Soit la suite définie par :

$$u_0\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right]\ \text{ et }\ u_{n+1}=\sin(2u_n).$$

L'intervalle $[0,1]$ est stable par f (où $f: x\mapsto\sin(2x)$), montrons que la suite arrive un jour dans l'intervalle stable où f est décroissante $[\pi/4,1]$. [a] Pour cela supposons que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

alors la suite est croissante et elle reste dans l'intervalle $[u_0, \pi/4]$. Croissante, majorée, elle devrait converger, mais il n'y a pas de limite possible. L'hypothèse faite est fausse ! Donc, sa négation est vraie, soit :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ u_p \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \text{mais alors } \forall n \geq p,\ u_n \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right].$$

Voir la figure 1.8, page 82.

a. Cet intervalle est stable, car :

$$\sin(1) \geq \frac{\pi}{4}.$$

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Étudier les suites récurrentes suivantes :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\arctan(u_n) \tag{1.28}$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \tag{1.29}$$

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2\,u_n) \tag{1.30}$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{3}{4}\,u_n^2 \tag{1.31}$$

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,\frac{1+a^2}{1+u_n^2}, \qquad (a > 0) \tag{1.32}$$

$$u_0 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2\,\ln(u_n) \tag{1.33}$$

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} u_n\,\ln(|u_n|) & \text{si } u_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.34}$$

1.8.2 Étudier la suite définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{u_n} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$$

1.8.3 Déterminer les $a \geq 0$ tels que la suite

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = u_n^2 + a \text{ converge.}$$

1.8.4 Soit la suite définie par :

$$u_0 \in [-1,+1] \text{ et } u_{n+1} = 1 - \mu\,u_n^2,\ \text{ où } \mu \in]0,2].$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1, +1].$$

(b) Montrer que la suite converge si, et seulement si,

$$\mu \in \left]0, \frac{3}{4}\right].$$

(c) Montrer que :

$$\forall \mu \in \left]0, \frac{5}{4}\right],\ (u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}$$

1.3.5.2 Récurrences multiples

Remarque 1.20

Les récurrences multiples sont de la forme : $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$, ou, plus généralement de la forme ($p \geq 2$) :

$$u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \ldots, u_n).$$

Nous avons vu plusieurs techniques lorsque nous avons étudié la suite :

$$u_{n+2} = \arctan(u_{n+1}) + \arctan(u_n).$$

1. Avec les valeurs d'adhérence. Mais, en ce cas, nous n'avons aucune idée de la *vitesse de convergence*.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, mais cela ne fonctionne que lorsque u_0 et u_1 sont suffisamment proche de la limite possible λ.

Exemple 1.26

Soit la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+u_{n+1}} + \sqrt{2+u_n}\right).$$

Méthode des valeurs d'adhérence

- La suite est bien définie, car les valeurs de u_n restent > 0.
- Si la suite converge, alors la limite λ vérifie :

$$\lambda = \sqrt{2+\lambda},\ \text{soit } \lambda = 2.$$

- Comme on a :

$$\forall x \geq 2,\ \sqrt{2+x} \leq x \text{ et } \forall x \in [0,2],\ \sqrt{2+x} \geq x,$$

il est facile d'obtenir que la suite est bornée et, plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \min(u_0, u_1, 2) \leq u_n \leq \max(u_0, u_1, 2).$$

On peut donc prendre en considération la plus petite valeur d'adhérence α et la plus grande valeur d'adhérence β. En prenant des suites extraites, il vient l'existence de deux valeurs d'adhérence γ et δ telles que :

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\gamma} + \sqrt{2+\delta}\right) \leq \sqrt{2+\beta}.$$

On en déduit que $\beta \leq 2$. De même, on trouve que $\alpha \geq 2$. Donc $\alpha = \beta = 2$ et la suite converge.

Méthode utilisant le TAF

- La limite possible est 2 et prenons $\lambda \in]1/8, 1/2[$, alors comme on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+2} - 2| \leq \frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{2 + u_{n+1}} - 2\right| + \left|\sqrt{2 + u_n} - 2\right|\right),$$

on peut trouver un $\epsilon > 0$, tel que, si u_n et u_{n+1} sont dans $[2 - \epsilon, 2 + \epsilon]$, alors

$$|u_{n+2} - 2| \leq \lambda\left(|u_{n+1} - 2| + |u_n - 2|\right),$$

par exemple,

$$\epsilon = 4 - \frac{1}{16\lambda^2}.$$

On a alors :
— Si u_0 et u_1 sont dans $[2 - \epsilon, 2 + \epsilon]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [2 - \epsilon, 2 + \epsilon].$$

— Et, de plus, en comparant à la suite récurrente définie par :

$$v_{n+2} = \lambda\left(v_{n+1} + v_n\right),$$

on a

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

- La difficulté est alors de montrer qu'à partir d'un certain rang N, u_N et u_{N+1} sont dans $[2 - \epsilon, 2 + \epsilon]$.

Figure 1.3 – Une limite possible et pas de convergence

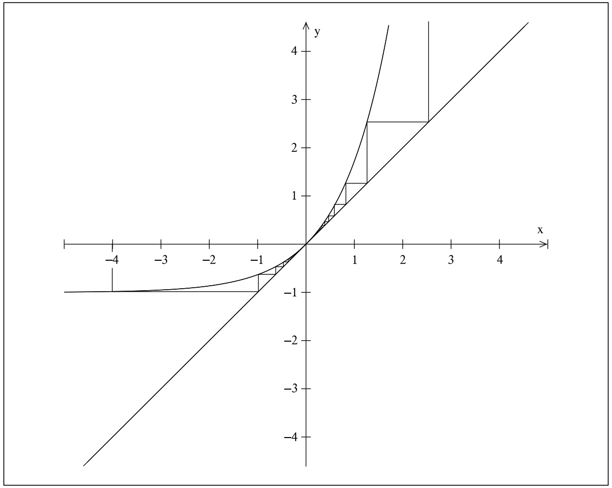


Figure 1.4 – Cas contractant

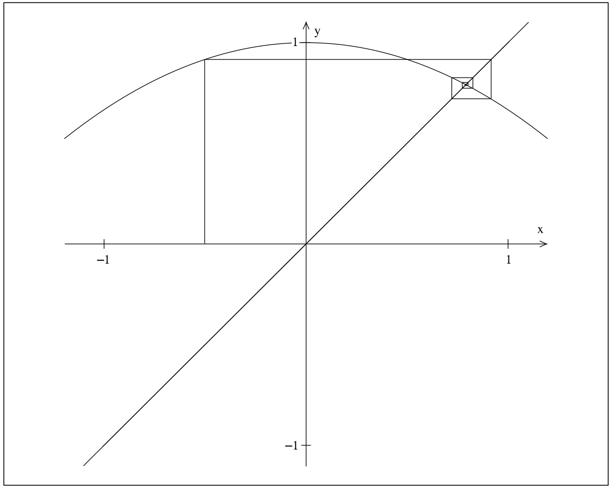


Figure 1.5 – f croissante, suite croissante

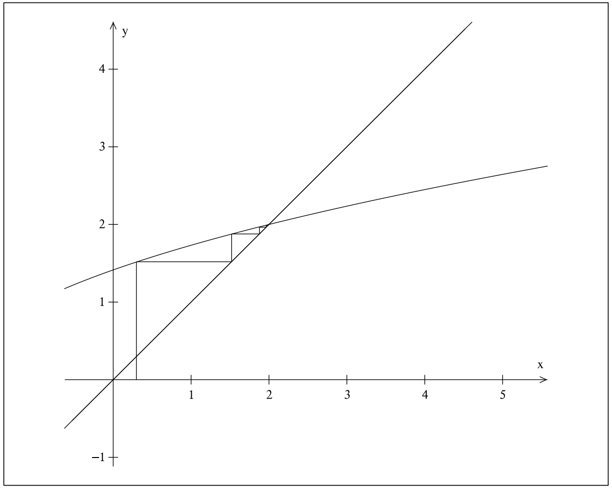


Figure 1.6 – f croissante, suite décroissante

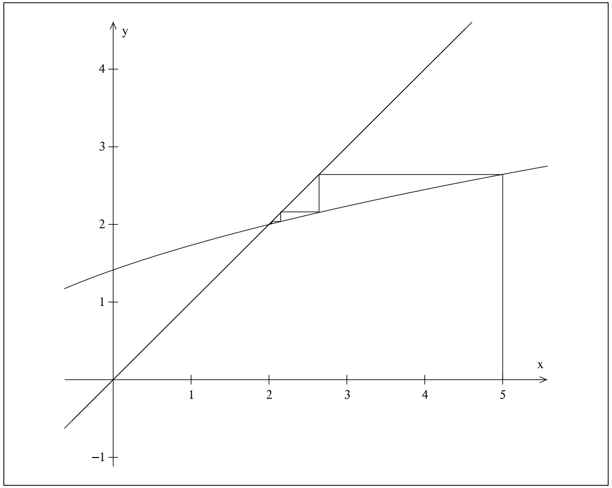


Figure 1.7 – f décroissante

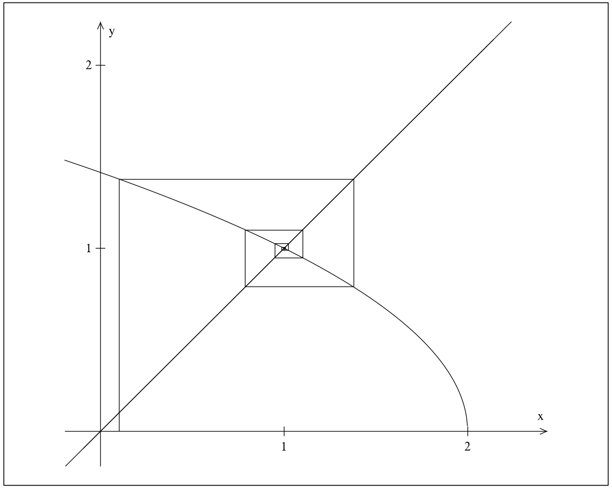
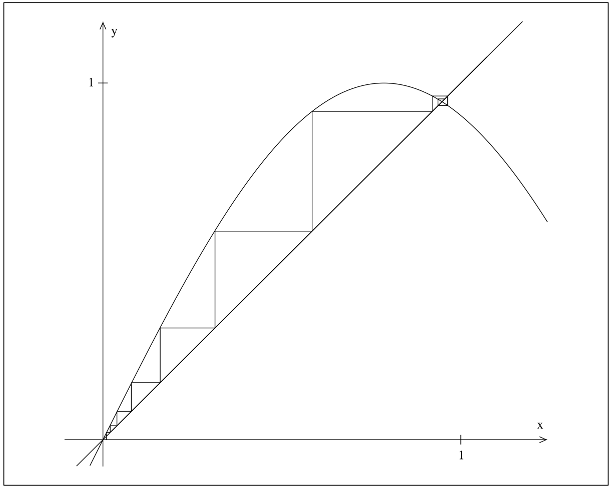


Figure 1.8 – Autre cas



Exercice(s) 1.9

1.9.1 Utiliser les deux méthodes pour montrer que la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \ln(1 + u_{n+1}) + \ln(1 + u_n),$$

converge.

1.9.2 Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n\, u_{n+1}}.$$

1.9.3 Soit la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right).$$

On dit qu'un intervalle I est *stable*, si :

$$u_0 \in I \text{ et } u_1 \in I \ \Rightarrow\ u_2 \in I.$$

(a) Montrer que les intervalles de la forme

$$\left[\alpha, \frac{1}{\alpha}\right],\ \text{où } \alpha \in]0, 1[,$$

sont stables.

On s'intéresse au plus grand α_n tel que :

$$(u_n, u_{n-1}) \in \left[\alpha_n, \frac{1}{\alpha_n}\right]^2.$$

(b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Trouver un minorant et un majorant de u_{n+1} qui s'exprime à l'aide de α_n.

(d) En déduire que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

1.3.5.3 Récurrences perturbées

Remarque 1.21

On appelle ainsi toute suite qui est « presque » récurrente.

Exemple 1.27

Soit la suite définie par :

$$u_1 \in [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n+1}{n}\sin(u_n).$$

Deux méthodes sont encore possibles.

Méthode des valeurs d'adhérence

- La suite est bornée (elle reste dans $[0,1]$), donc elle admet une plus petite valeur d'adhérence α et une plus grande β, on peut alors trouver une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence λ vérifiant :

$$\lambda = \sin(\alpha) \geq \alpha \geq 0, \text{ donc } \alpha = 0.$$

De même, on peut trouver une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence μ vérifiant :

$$\beta = \sin(\mu) \leq \sin(\beta), \text{ donc } \beta = 0.$$

Finalement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Utilisation des perturbations.

- Pour $p \geq 1$, on définit la suite $(v_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_{1,p} = u_1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1,p} = \begin{cases} u_{n+1} & \text{si } n \leq p \\ \frac{p+1}{p}\sin(v_{n,p}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre alors successivement que :
— La suite $(v_{n,p})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite λ_p.
— La suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
— Par encadrement, on en déduit que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice(s) 1.10

1.10.1 Étudier la suite définie par :

$$u_1 \in [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sin\left(\frac{n+1}{n}\,u_n\right),$$

par les deux méthodes.

1.10.2 Étudier la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n}}.$$

1.10.3 Soit la suite définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n\,u_n + 1}.$$

Montrer que :

$$u_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2.$$

1.10.4 Soit la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right).$$

Montrer qu'il existe un unique $u_1 \in]0,1[$ tel que la suite soit bornée, strictement croissante.

1.10.5 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$$

Montrer que :

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1.4 Exemples de schémas numériques

Ce paragraphe fait suite au cours du semestre d'été. Nous utiliserons donc `Python` *pour illustrer les calculs.*

1.4.1 Méthodes de résolution numérique de $f(x) = 0$

Le problème est le suivant : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a)\,f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe un point d'annulation λ qu'il faut calculer à une précision $\epsilon > 0$ donnée. Nous nous intéresserons essentiellement aux *erreurs de méthode*.

1.4.1.1 Dichotomie

1. *Principe* : Même principe que le théorème des segments emboîtés. On coupe en deux de manière à construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n)\,f(b_n) < 0 \text{ et } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

2. *Algorithme* :
   — On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   — Supposons calculés a_n et b_n, on calcule $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $f(\alpha)$.

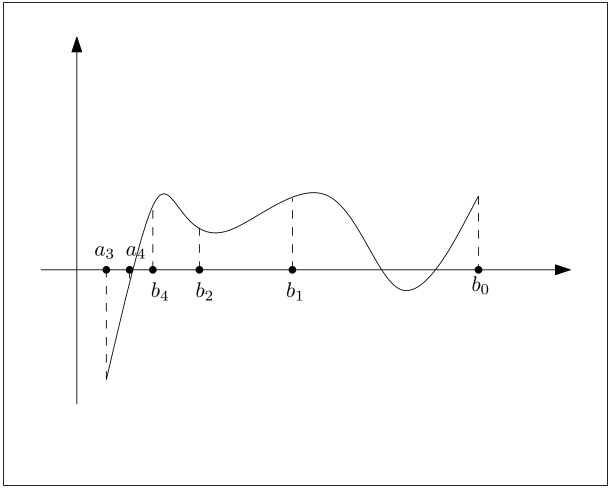
— Si $f(\alpha) = 0$, l'algorithme s'arrête (en pratique cela n'arrive pas).
— Si $f(a_n)\, f(\alpha) < 0$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha.$$

— Si $f(a_n)\, f(\alpha) > 0$, on pose

$$a_{n+1} = \alpha \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

Figure 1.9 – Dichotomie



3. *Erreur de méthode* : Au bout de n itérations, on a une estimation de λ (ou du moins, d'un λ) qui est :

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } \left|\widehat{\lambda}_n - \lambda\right| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

4. *Code* : page ??.

1.4.1.2 Méthode de Lagrange

1. *Principe* : Le principe est d'estimer λ par l'abscisse de l'intersection de l'axe Ox avec la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. La corde a pour équation :

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a),$$

elle coupe donc l'axe Ox au point :

$$\left(a - (b-a)\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}, 0\right).$$

2. *Algorithme* :
   — On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   — Supposons calculés a_n et b_n, on calcule :

$$\alpha = a_n - (b_n - a_n)\frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \text{ et } f(\alpha).$$

   — Si $f(\alpha) = 0$, l'algorithme s'arrête.
   — Si $f(a_n)\, f(\alpha) < 0$, on pose :

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha.$$

— Si $f(a_n)\,f(\alpha) > 0$, on pose :

$$a_{n+1} = \alpha \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

Remarque 1.22

Dans le cas général, la convergence n'est pas assurée. Pour simplifier, nous supposerons que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas. En ce cas, l'une des deux suites est constante et l'autre monotone bornée. Supposons, comme sur le graphique ci-dessous, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée par b_0, elle converge vers une valeur λ. Comme f est continue, on a, en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\lambda = \lambda - (b-\lambda)\,\frac{f(\lambda)}{f(b)-f(\lambda)},$$

comme $\lambda \neq b$, puisque f est continue, il vient $f(\lambda) = 0$. Voir la figure 1.11, page 106.

3. *Erreur de méthode* : On a donc, dans le cas précédent (les autres cas donnant lieu au même type de calculs) :
   — La dérivée f' est bornée sur $[a,b]$, et comme elle ne s'annule pas,

$$\exists (m,M) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall x \in [a,b],\ m \leq |f'(x)| \leq M.$$

En ce cas, on a :

$$\underbrace{f(\lambda)}_{=0} - f(a_n) = \frac{f(b)-f(a_n)}{b-a_n}\,(a_{n+1}-a_n),$$

le TAF nous donne alors :

$$(\lambda - a_n)\,f'(c_n) = (a_{n+1}-a_n)\,f'(d_n),\ \text{ où } c_n \in]a_n,\lambda[,\ d_n \in]a_n,b[.$$

Finalement, on obtient :

$$|\lambda - a_{n+1}| \leq \frac{M-m}{m} \, |a_{n+1} - a_n| \, .$$

Si l'intervalle $[a, b]$ est suffisamment petit [1], on aura $M \leq 2m$, et en ce cas :

$$|\lambda - a_{n+1}| \leq |a_{n+1} - a_n| \, .$$

Ce qui nous autorise à arrêter le calcul quand : $|a_{n+1} - a_n| \leq \epsilon$.

▶ L'avantage de ce type de critère d'arrêt est que l'on n'a pas besoin de calculer vraiment l'erreur de méthode.

4. *Code* : page ??

1.4.1.3 Méthode de Newton

1. *Principe* : À nouveau, on supposera que f' et f'' ne s'annulent pas sur $[a, b]$. L'idée de l'algorithme est de remplacer la courbe par la tangente en b et de calculer le point d'intersection avec l'axe Ox. La tangente a pour équation :

$$y = f(b) + f'(b)\,(x - b).$$

Elle coupe l'axe Ox au point :

$$\left(b - \frac{f(b)}{f'(b)}, 0 \right) .$$

Remarque 1.23

Le défaut majeur de la méthode de Newton est qu'elle nécessite la connaissance de f' !

1. Cela suppose que b n'est pas trop loin de λ.

2. *Algorithme* :
    — On pose $b_0 = b$ (cas où $f' > 0$ et $f'' > 0$).
    — Supposons calculé b_n, on a alors :

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Remarque 1.24

Sous les hypothèses faites, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par a, elle converge donc vers une valeur β, qui vérifie, par continuité de f :

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \text{ donc } f(\beta) = 0.$$

Si les hypothèses sur f ne sont pas satisfaites, il peut arriver que l'on sorte de l'intervalle $[a, b]$. Voir la figure 1.13, page 108.

Remarque 1.25

Il faut faire attention aux signes de f' et f'' pour savoir quelle borne doit bouger. Ci-dessous, c'est a qui doit bouger. Si l'on prend b, on sort de l'intervalle $[a, b]$. Voir la figure 1.14, page 109.

3. *Erreur de méthode* : On écrit :

$$f(b_{n+1}) = f(b_n + (b_{n+1} - b_n)) = \underbrace{f(b_n) + (b_{n+1} - b_n)\, f'(b_n)}_{=0} + \int_{b_n}^{b_{n+1}} (b_{n+1} - t)\, f''(t)\, \mathrm{d}t.$$

Donc, d'après le TAF :

$$\Big|f(b_{n+1}) - \underbrace{f(\lambda)}_{=0}\Big| = |b_{n+1} - \lambda|\ |f'(c_n)|\,,\ \text{où } c_n \in]\lambda, b_{n+1}[.$$

Donc, si l'on pose :

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0 \text{ et } M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| > 0,$$

on obtient :

$$|b_{n+1} - \lambda| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(b_n - b_{n+1})^2 \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(b_n - \lambda)^2\,.$$

Remarque 1.26

— La première inégalité nous donne une condition d'arrêt pratique.

— La deuxième inégalité nous donne, lorsque a et b sont bien choisis et la fonction agréable, une convergence très rapide de la suite. Qu'est-ce qu'une fonction agréable ? Une fonction qui vérifie :

$$\frac{M_2}{2m_1}\,(b-a) < 1,$$

en ce cas :

$$|b_n - \lambda| \leq \frac{2m_1}{M}\left(\frac{M_2}{2m_1}\,(b-a)\right)^{2^n}.$$

⚠ Cela suppose que l'on soit capable d'évaluer m_1 et M_2 !

4. *Code* : page ??

1.4.1.4 Méthode du point fixe

1. *Principe* : On veut utiliser le théorème du point fixe. Pour cela on transforme la recherche du zéro de f en la recherche du point fixe pour l'application g, contractante de la forme :

$$g(x) = x + \mu f(x), \text{ où } \mu \text{ est tel que } g \text{ soit contractante.}$$

Si la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors :

$$\forall x \in [a,b],\ g'(x) = 1 + \mu f'(x) \in [1 + \mu m_1, 1 + \mu m_2],$$

où m_1 et m_2 sont les valeurs extrémales de f' sur $[a,b]$. Il faut donc choisir (si possible !) μ de telle sorte que :

$$\max(|1 + \mu m_1|, |1 + \mu m_2|) = k < 1.$$

► Si, par exemple, f est croissante sur $[a,b]$, alors m_1 et m_2 sont ≥ 0 (supposons $m_1 < m_2$), il faut donc que μ soit < 0, on a alors intérêt à prendre :

$$1 + \mu m_1 = -1 - \mu m_2 \text{ soit } \mu = -\frac{2}{m_1 + m_2}, \text{ alors } k = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} < 1.$$

2. *Algorithme* : Nous nous limiterons aux fonctions croissantes (comme pour Lagrange et Newton).
   — On calcule k et on pose $u_0 = \frac{a+b}{2}$ (par exemple).
   — Si on suppose u_n calculé, on calcule :

   $$u_{n+1} = g(u_n).$$

   Le théorème du point fixe nous assure alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur λ, telle que :

   $$g(\lambda) = \lambda \text{ soit } f(\lambda) = 0 \text{ car } \mu \neq 0.$$

3. *Erreur de méthode* : On a :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leq k \, |u_n - \lambda| \leq k^{n+1} \, |u_0 - \lambda| \leq k^{n+1} \, \frac{b-a}{2}.$$

4. *Code* : page ??

Exercice(s) 1.11

1.11.1 On considère la fonction :

$$f(x) = \tan(x) - x.$$

(a) Montrer qu'elle possède un unique point d'annulation α dans $]\pi/2, 3\pi/2[$.

(b) Calculer α à 10^{-3} près en utilisant les 4 méthodes du cours.

1.11.2 (a) Étudier la convergence de la méthode de Newton permettant de calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ lorsque $a > 0$.

(b) Soit f la fonction que l'on itère. Montrer que $f(x) - f(\sqrt{a})$ s'exprime simplement en fonction de $x - \sqrt{a}$.

(c) En déduire un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude inférieur ou égale à 10^{-10}.

1.11.3 Appliquer la méthode de Newton à la fonction sin autour de π et évaluer la rapidité de la convergence.

1.11.4 Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution et déterminer ses 10 premiers chiffres après la virgule par

(a) dichotomie ;

(b) la méthode du point fixe ;

(c) la méthode de Newton couplée avec la méthode des sécantes (Lagrange).

1.11.5 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f admet trois racines réelles distinctes.

(b) Déterminer les 8 premiers chiffres après la virgule de la plus grande racine.

1.4.2 Méthodes approchées de quadrature

Ce paragraphe traite de la situation suivante : soit $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, on veut calculer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.4.2.1 Sommes de Riemann

1. *Principe* : On découpe l'intervalle en une *subdivision* :

$$a = a_{0,n} < a_{1,n} < \cdots < a_{n,n} = b,$$

telle que :

$$\boxed{\max_{k \in [\![1,n]\!]} (a_{k,n} - a_{k-1,n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

et, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, on choisit une valeur $\xi_{k,n} \in [a_{k-1,n}, a_{k,n}]$, alors :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,n} - a_{k-1,n})\, f(\xi_{k,n})}_{\text{est appelée } \textit{somme de Riemann de } f} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

On calcule
$$\delta_n = \left|\sum_{k=1}^{n}(a_{k,n}-a_{k-1,n})\, f\left(\xi_{k,n}\right) - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} \left[f\left(\xi_{k,n}\right)-f(t)\right]\ \mathrm{d}t\right|.$$

- La fonction s'approxime par une fonction en escalier (voir le cours d'intégration de première année), commençons donc par regarder le résultat pour les fonctions en escalier.
- La propriété demandée est linéaire en f, on peut donc se ramener au cas où f est de la forme :
$$f(x) = 1 \text{ sur }]\alpha,\beta[,\ f(x) = 0 \text{ sur }]a,b[\setminus[\alpha,\beta],\ f(a),\ f(b),\ f(\alpha),\ f(\beta) \text{ quelconques.}$$
Les valeurs $f\left(\xi_{k,n}\right)-f(t)$ sont toujours nulles sur $[a_{k-1,n},a_{k,n}]$ sauf, éventuellement, pour les valeurs de k telles que a, b, α ou β sont dans $[a_{k-1,n},a_{k,n}]$, soit, au plus 6 valeurs, notons Δ l'ensemble de ces valeurs. Il vient alors :
$$\delta_n \leq \sum_{k\in\Delta}\int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} 2\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
- On obtient donc (linéarité) la même propriété pour les fonctions en escalier.
- Si f est continue par morceaux, soit $\epsilon>0$ fixé, on sait alors, qu'il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que :
$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)| \leq \epsilon.$$
En majorant δ_n par :
$$\left|\sum_{k=1}^{n}(a_{k,n}-a_{k-1,n})\ \left(f\left(\xi_{k,n}\right)-\varphi\left(\xi_{k,n}\right)\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}}\left[\varphi\left(\xi_{k,n}\right)-\varphi(t)\right]\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b (\varphi(t)-f(t))\ \mathrm{d}t\right|,$$
on généralise le résultat.
- Finalement :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_{k,n}-a_{k-1,n})\, f\left(\xi_{k,n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Remarque 1.27

On prend souvent :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_{k,n} = a + k\,\frac{b-a}{n},$$

on parle alors de *subdivision régulière*. Pour cette subdivision régulière on prend souvent :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \xi_{k,n} = a_{k-1,n} \text{ ou } a_{k,n}.$$

Le résultat devient :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}),\ \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

On effectue une moyenne des valeurs de f, c'est pourquoi on appelle *valeur moyenne de f sur l'intervalle* $[a,b]$ la valeur :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Algorithme* : Sans difficulté, on calcule les valeurs et on les somme...

3. *Erreur de méthode* : Supposons la fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(a) \neq f(b)$, on a alors [2] :

$$\delta_n = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}} \left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) - f(t) \right) \,\mathrm{d}t \right|,$$

or (intégration par parties) :

$$\int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}} \left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) - f(t) \right) \,\mathrm{d}t =$$

$$\underbrace{\left[\left(t - \left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right) \left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) - f(t) \right) \right]_{t=a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{t=a+k\,\frac{b-a}{n}}}_{=0} +$$

$$\int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}} \left(t - \left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La dernière intégrale peut se mettre sous la forme [3] :

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f'(\xi_{k,n}), \quad \text{où } \xi_{k,n} \in \left[a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}, a+k\,\frac{b-a}{n}\right].$$

Finalement :

$$\delta_n = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f'\left(\xi_{k,n}\right) \right|,$$

2. Si $f(a) = f(b)$; on peut remplacer f par $x \mapsto f(x) + x$.
3. On encadre $f'(t)$ par le minimum et le maximum sur l'intervalle d'intégration, puis on utilise le TVI.

donc

$$n\,\frac{\delta_n}{b-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|f(b)-f(a)\right|.$$

Donc :

$$\delta_n \underset{\infty}{\sim} \frac{b-a}{n}\,|f(b)-f(a)|.$$

On peut aussi obtenir une formule exacte :

$$\delta_n \leq \frac{(b-a)^2}{n}\,M_1,\ \text{où } M_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

4. *Code* : page ??

Exercice(s) 1.12

1.12.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,x)}{k}.$$

Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. Calculer la limite de $f_n(x_n)$.

1.12.2 Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n\,k+n^2}}{2\,n^2+k^2}.$$

1.12.3 Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, trouver un développement asymptotique à 3 termes de

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

1.12.4 On pose pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$u_{n,p} = \frac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\frac{p}{p}}\right)^n.$$

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} \text{ et } \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}.$$

1.12.5 (a) Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2 x \leq x^2.$$

(b) En déduire la limite de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right).$$

1.4.2.2 Méthode des trapèzes

1. *Principe* : On remplace la courbe par des trapèzes (voir M131) et la figure 1.15, page 110. On a donc :

$$\widehat{I}_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

2. *Algorithme* : Sans difficultés, on calcule les valeurs et les sommes.
3. *Erreur de méthode* : Supposons la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On calcule :

$$\delta_n = \left|\widehat{I}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2\,n}\left(f\left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\right|.$$

Les termes qui apparaissent sont de la forme :

$$R(h) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}\,\left(f(x+h)+f(x)\right),\ \text{où } h = \frac{b-a}{n} \text{ et } x = a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}.$$

On a alors :

$$R'(h) = f(x+h) - \frac{1}{2}\,\left(f(x+h)+f(x)\right) - \frac{h}{2}\,f'(h),\ \text{donc } R(0) = R'(0) = 0.$$

Puis

$$R''(h) = -\frac{h}{2}\,f''(h).$$

La formule de Taylor avec reste intégral nous donne alors :

$$R(h) = \int_0^h (h-t)\left(-\frac{t}{2}\,f''(t)\right)\,\mathrm{d}t,\ \text{donc } |R(h)| \leq \frac{h^3}{12}\,M_2,\ \text{où } M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(t)|\,.$$

Finalement :

$$\left|\widehat{I}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,M_2.$$

4. *Code* : page ??

Exercice(s) 1.13

1.13.1 Calculer :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

1.13.2 *Méthode de Simpson.* On approxime, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ par } \frac{b-a}{3}\left(f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

(a) Interpréter géométriquement cette approximation.

(b) En reprenant la démonstration du calcul d'erreur de la formule des trapèzes, montrer que [a] :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\,M_4,\ \text{où } M_4 = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

(c) Soit $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision régulière de $[a,b]$, avec $n \geq 2$, on définit $\widehat{I}_n$ par :

$$\frac{b-a}{3\,n}\left(f(a)+f(b)+2\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor -1} f\left(a+2k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)+4\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} f\left(a+(2k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\right).$$

Évaluer, en fonction de n et de M_4, l'erreur de méthode :

$$\left| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - \widehat{I}_n \right|.$$

a. On pourra considérer le point milieu comme fixé.

Figure 1.10 – Méthode de Lagrange

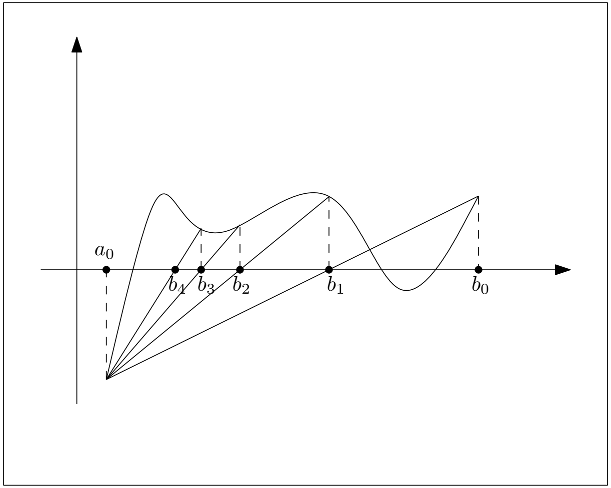


Figure 1.11 – Méthode de Lagrange

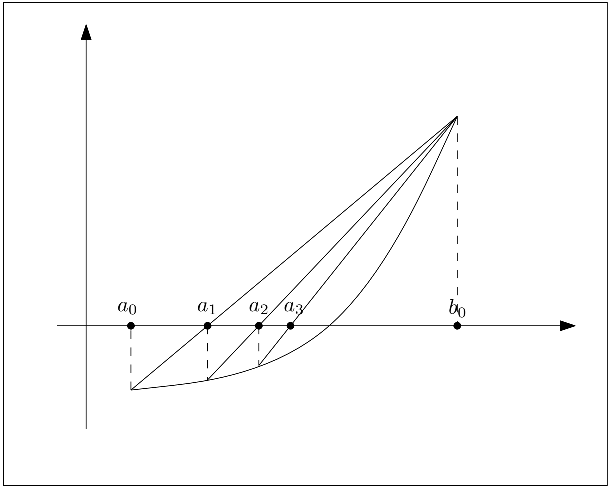


Figure 1.12 – Méthode de Newton

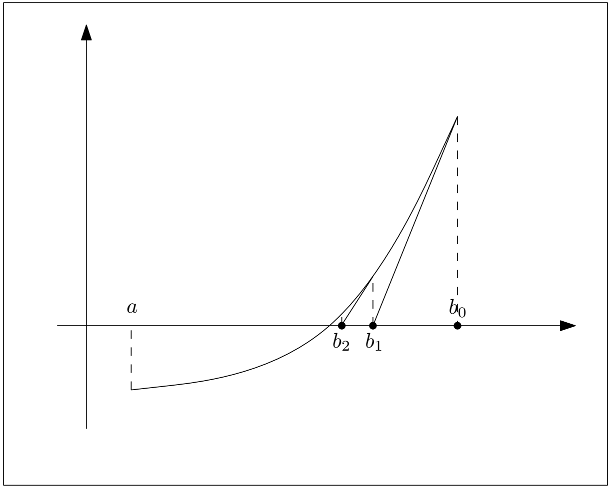


Figure 1.13 – Dysfonctionnement de la méthode de Newton

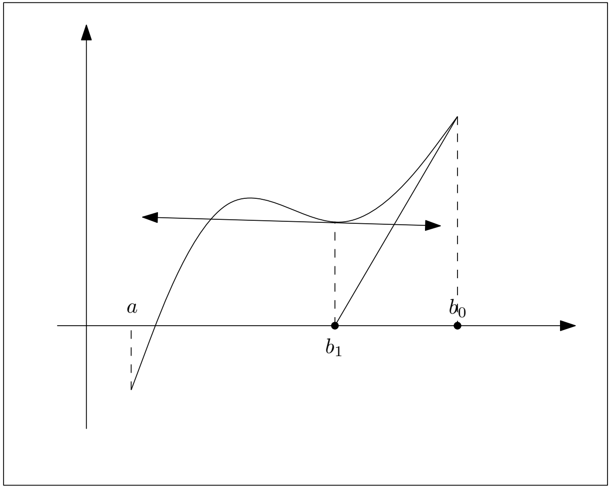


Figure 1.14 – Méthode de Newton – choix du point de départ

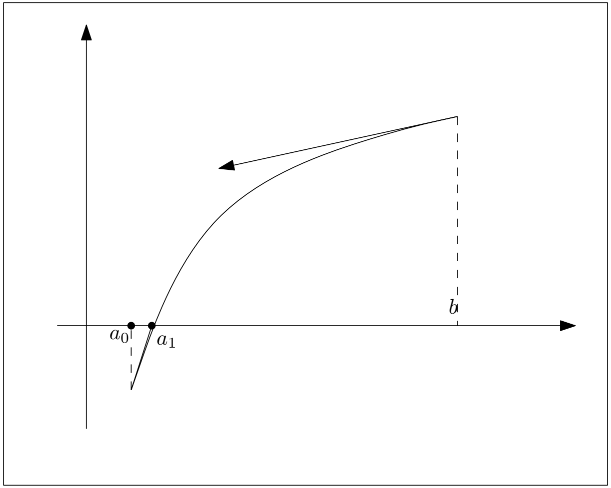
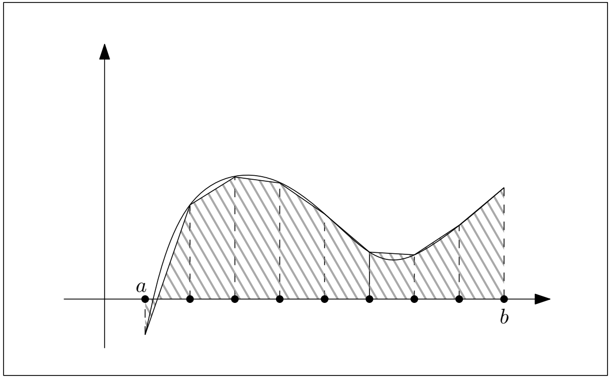


Figure 1.15 – Méthode des trapèzes



Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Toute série est une suite, et *réciproquement*

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ *désigne le corps* $\mathbb{R}$ *ou le corps* $\mathbb{C}$*.*

Définition 2.1 – Série numérique

On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$, la suite définie par :

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k, \text{ où } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Lorsque la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série de terme général u_n converge, on écrit « $\sum u_n$ converge ». L'expression $S_n(u)$ s'appelle la *somme partielle d'ordre n de la série*. Si elle existe, la limite $S(u)$ de la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série de terme général u_n* et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Lorsque la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge, on écrit « $\sum u_n$ diverge ».

Remarque 2.1

Ici, nous commençons systématiquement à l'indice 0, il est bien évidemment possible de commencer à un indice quelconque dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.1

La série $\sum q^n$, $q \in \mathbb{C}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Exemple 2.2

La série $\sum 1/n$ (bien sûr, ici $n \geq 1$) diverge, car

$$S_{2\,n} - S_n \text{ ne tend pas vers } 0.$$

En conséquence : $\sum 1/n^\alpha$ diverge lorsque $\alpha \leq 1$.

Démonstration de l'exemple 2.1, page ci-contre

- Si $q = 1$, alors $S_n = n + 1$, la suite diverge.
- Si $q \neq 1$, alors

  $$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge donc si, et seulement si $|q| < 1$.

Démonstration de l'exemple 2.2, page précédente

- En effet,

  $$S_{2\,n} - S_n \geq n\,\frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}.$$

  Or, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite σ, alors

  $$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma \text{ et } S_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma \text{ donc } S_{2\,n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, divergente, son terme général tend vers $+\infty$.
- De plus, pour $\alpha \leq 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 2.1 – Convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\sum |u_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

La réciproque est en général fausse.

Démonstration

- On pose comme pour les fonctions :
$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$
On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$
Le résultat en découle, en utilisant le fait qu'une suite réelle, croissante majorée est convergente.
- Un contre-exemple à la réciproque est la série de terme général $(-1)^n/n$. Car les suites
$$(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}$$

Remarque importante 2.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\boxed{x_0 = u_0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ x_n = u_n - u_{n-1}.}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum x_n$ sont de même nature (i.e. l'une converge si, et seulement si, l'autre converge). De plus :

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

La série obtenue s'appelle la série dérivée *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.1

On a :

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La réciproque est fausse.

Démonstration

— Le résultat vient du fait que $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$ et donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
— La série $\sum 1/n$ fournit un contre-exemple à la réciproque.

Propriété 2.2

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que :

$$\Delta = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq v_n\} \text{ est de cardinal fini,}$$

posons alors $N = \max \Delta$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N+1 \ \Rightarrow S_n(v) - S_n(u) = \sum_{k \in \Delta} (v_k - u_k) \text{ (terme constant !).}$$

Le résultat en découle immédiatement.

Propriété 2.3

Lorsque $\sum u_n$ est convergente, on définit son *reste d'ordre n* par :

$$\boxed{R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

En ce cas, on a toujours :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(u) = S_n(u) + R_n(u).$$

Remarque importante 2.3

Lorsqu'une série $\sum u_n$ est convergente, on peut faire le lien avec les suites de la manière suivante :

$$u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u) = \boxed{R_{n-1}(u) - R_n(u)}.$$

Lorsque la série est divergente, seule reste la première égalité. On utilisera alors :

$$u_n = \boxed{S_n(u) - S_{n-1}(u)}.$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |a_n|$ converge. Que dire de cette suite si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| ?$$

2.1.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $v_n = 2\,u_{n+1} + u_n$, montrer que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

2.1.3 (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle tendant vers $l \in [-\infty, +\infty]$, que dire de :

i. la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \;;$$

ii. la suite définie par :

$$v_n = \frac{2}{n\,(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n} k\,u_k\right) \;;$$

iii. la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_k\right).$$

(b) On suppose maintenant que $l = 0$, étudier la nature de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ converge pour les cas i., ii. et iii.

2.1.4 En admettant que la série $\sum \ln(n)/n^2$ converge, montrer que la suite de terme général :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2\right] - n\,(\ln(n))^2 + 2\,n\,\ln(n) - 2\,n - \frac{1}{2}\,(\ln(n))^2 \;\text{ converge.}$$

2.2 Séries à termes positifs

2.2.1 Principaux résultats

Définition 2.2 – Série à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n, on dit qu'elle est *à termes positifs* si les u_n sont positifs ou nuls à partir d'un certain rang.

Propriété 2.4

Une série à termes positifs converge, si et seulement si, la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

Car la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang...

Propriété 2.5

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *à termes positifs* vérifiant, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Et par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Soit N un rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n$. On obtient alors :

$$\forall n \geq N,\ S_n(u) \leq S_n(v) - S_{_N}(v) + S_{_N}(u) \leq S(v) - S_{_N}(v) + S_{_N}(u).$$

Proposition 2.2 – Comparaison série/intégrale

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, décroissante, *alors :*

$$\sum f(n) \text{ converge } \iff \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right) \text{ est majorée.}$$

De plus, lorsque la série diverge, on a :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \int_a^n f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration

Prenons $a = 0$. Tout s'explique alors avec le dessin 2.1, page 163
Posons S_n la somme de rang n de la série $\sum f(n)$. L'intégrale de f sur le segment $[0, n]$ (qui est l'aire de la surface sous la courbe) est comprise entre les deux aires hachurées :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k)}_{S_n - f(0)} \leq \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)}_{S_n - f(n)}. \tag{2.1}$$

On obtient :

($\Rightarrow$) Si la série converge, sa somme partielle est majorée et alors, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante (positivité de f) et majorée par la somme S.

($\Leftarrow$) Si la fonction est majorée, alors la somme partielle S_n définit une suite croissante, majorée par $f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, elle est donc majorée...

▶ Lorsque la série diverge, on a alors :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et, de même } \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

L'encadrement :

$$1 - \frac{f(0)}{S_n} \leq \frac{1}{S_n}\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq 1 - \frac{f(n)}{S_n},$$

issue de l'inégalité ci-dessus, permet de conclure que :

$$\frac{1}{S_n}\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Remarque 2.4

On peut retrouver l'inégalité 2.1, page précédente par le calcul en procédant ainsi :

— Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors :

$$\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

— En intégrant sur le segment $[k, k+1]$ et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$

En sommant sur k variant de 0 à $n-1$, on obtient le résultat.

Remarque 2.5

Pour que la proposition s'applique, il suffit d'avoir une fonction décroissante à partir d'un certain rang, car les premiers termes d'une série n'interviennent pas quand on étudie la convergence ou non de cette série.

Exemple 2.3 – Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Démonstration

C'est une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante ($\alpha > 0$)

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

Lorsque $\alpha \leq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0...

Exemple 2.4 – Séries de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff \Big[\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\Big].$$

Démonstration

1. Si $\alpha > 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang) :
$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \leq \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}.$$
2. Si $\alpha < 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang) :
$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \geq \frac{1}{n}.$$
3. Si $\alpha = 1$, on utilise une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante (à partir d'un certain rang) :
$$x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}.$$

Remarque importante 2.6

La comparaison série/intégrale permet aussi d'avoir des évaluations des restes des séries de terme général $f(n)$ lorsqu'elles convergent bien sûr, mais pas toujours immédiatement un équivalent :

Soit $\sum f(n)$ une série convergente, où f est décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La comparaison série/intégrale nous donne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq R_n + f(n).$$

On a donc trois cas :

1. Cas où $\boxed{f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t\right)}$. Alors on a :

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour les séries de Riemann convergentes ($\alpha > 1$), on a bien :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour les séries de type géométrique ou proche du type géométrique, cela ne marche plus. Ainsi :

$$u_n = \frac{1}{3^n}, \quad R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,3^n} \text{ et } \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3^x} = \frac{1}{\ln(3)\,3^n}.$$

Nous verrons plus loin une autre méthode...

3. Cas où $\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = o\big(f(n)\big)}$. Alors on a :

$$R_n = R_{n+1} + f(n+1) = f(n+1) + O\left(\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t\right) \underset{+\infty}{\sim} f(n+1).$$

Si on prend :

$$u_n = \frac{1}{3^{n^2}}, \text{ alors } \int_n^{+\infty} \frac{1}{3^{x^2}}\ \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ \ln(3)\,n\,3^{n^2}} = o\left(\frac{1}{3^{n^2}}\right),$$

donc

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{(n+1)^2}}.$$

▶ On peut généraliser ces résultats lorsque f est croissante.

Proposition 2.3 – Utilisation des relations de comparaison

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* à termes positifs, *alors :*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$*, les deux séries sont de même nature. Bien plus :*

$$\textit{Si elles divergent} \quad S_n(u) \underset{+\infty}{\sim} S_n(v),$$

et

$$\textit{si elles convergent} \quad R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v).$$

Démonstration

Soit $\epsilon \in]0,1[$, à partir d'un certain rang N, on a :

$$0 \leq (1-\epsilon)\, v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon)\, v_n.$$

— L'inégalité de droite nous permet de dire que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* !

— L'inégalité de gauche nous permet de dire que si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge, pour la même raison.

▶ *Les séries sont donc bien de même nature !*

— *Si elles convergent,* alors, en sommant à partir d'un rang $n \geq N$, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ (1-\epsilon)\, R_n(v) \leq R_n(u) \leq (1+\epsilon)\, R_n(v),$$

ce qui nous permet de dire que :

$$R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v).$$

— *Si elles divergent,* alors les sommes partielles tendent vers $+\infty$ (séries à termes positifs) et en sommant jusqu'à $n \geq N$, on obtient :

$$(1-\epsilon)\ (S_n(v) - S_{_N}(v)) \leq S_n(u) - S_{_N}(u) \leq (1+\epsilon)\ (S_n(v) - S_{_N}(v)),$$

ce qui permet de conclure à :

$$S_n(u) \underset{+\infty}{\sim} S_n(v).$$

Propriété 2.6

De même, lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont *à termes positifs*, on a :

1.
$$u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge } \Rightarrow S_n(u) = o\left(S_n(v)\right),$$
et
$$u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = o\left(R_n(v)\right)\right].$$

2.
$$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge } \Rightarrow S_n(u) = O\left(S_n(v)\right),$$
et
$$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)\right].$$

Démonstration

1. On applique la proposition précédente, en notant que :

$$u_n = o(v_n) \text{ peut se traduire par } u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n.$$

2. Il existe $M \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq M\, v_n.$$

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* et, en sommant à partir d'un rang $n \geq N$, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq R_n(u) \leq M\, R_n(v),$$

ce qui nous permet de dire que :

$$R_n(u) = O(R_n(v)).$$

— En sommant jusqu'à $n \geq N$, on obtient :

$$0 \leq S_n(u) - S_N(u) \leq M\ (S_n(v) - S_N(v)) \leq M\, S_n(v).$$

Si $\sum v_n$ diverge alors $S_n(v) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$:

$$0 \leq S_n(u) \leq M\, S_n(v) + S_N(u) \leq (M+1)\, S_n(v),$$

ce qui permet de conclure à :

$$S_n(u) = O(S_n(v)).$$

Exemple 2.5 – Formule d'Euler

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Démonstration

— Le premier terme se trouve à l'aide d'une comparaison série intégrale, notons S_n la somme partielle de rang n de la série à termes positifs divergente $\sum 1/n$, on a alors :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n).$$

— Pour trouver la suite du développement asymptotique, on étudie la différence $u_n = S_n - \ln(n)$ (en tant que suite), à l'aide de sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Voir le code `Wxmaxima` 2.1, page ci-contre.
On en déduit que la série $\sum v_n$ est à termes négatifs, convergente (comparaison avec une série de Riemann), on note γ sa limite. L'équivalent permet même d'avoir un équivalent de $R_n(v)$. On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où en découle la formule d'Euler.

Session `Wxmaxima` 2.1 – Formule d'Euler

```
(%i1) v(n) := 1/n-log(n)+log(n-1);
```

(%o1) $\mathrm{v}(n) := \frac{1}{n} - \log(n) + \log(n-1)$

```
(%i2) taylor(v(n),n,inf,2);
```

(%o2)/T/ $-\frac{1}{2\,n^2} + \ldots$

```
(%i3) %gamma,numer;
```

(%o3) 0.57721566490153

Exemple 2.6 – Formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

Démonstration

- On procède de même, en étudiant la série $\sum \ln(n)$. Comme on veut un équivalent de l'exponentielle, il faut faire un développement asymptotique jusqu'à un $o(1)$...

— Un comparaison série/intégrale (a fonction ln est croissante) nous donne immédiatement :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n\ \ln(n).$$

Nous sommes dans le cas où le terme général de la série est négligeable devant l'intégrale (voir la remarque 2.6, page 123, cas 1).

— On étudie ensuite le terme $u_n = S_n - n\ \ln(n)$ et sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Et on réitère le procédé ! Voir le code `Wxmaxima` 2.2, page 132.

On en déduit immédiatement que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\ \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ \ln(n) + K + \frac{1}{12\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui nous donne, en prenant le logarithme :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^K.$$

▶ *En général, il n'est pas possible de trouver la constante.* Mais pour la formule de Stirling, il est possible de la trouver en utilisant les intégrales de Wallis.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$

On procède alors de la manière suivante :

— La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t).$$

— Elle vérifie :

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2},$$

la relation de récurrence s'obtenant à l'aide d'une intégration par parties (n est ici ≥ 2) :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\, \sin(t)\, \mathrm{d}t,$$

en posant $u = \sin^{n-1}(t)$ et $v' = \sin(t)$, il vient :

$$I_n = \underbrace{\left[-\cos(t)\, \sin^{n-1}(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2}}_{=0 \text{ car } n\geq 2} + (n-1)\, \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\, \cos^2(t)\, \mathrm{d}t\right)}_{=I_{n-2}-I_n}.$$

— Pour trouver e^K, il suffit alors de calculer $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$, et de remarquer que :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-2} \text{ et } I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}.$$

Ce qui nous donne :

$$I_{2\,p} \underset{+\infty}{\sim} I_{2\,p+1}.$$

En reportant l'équivalent trouvé ci-dessus, on obtient :

$$e^K = \sqrt{2\,\pi}.$$

Finalement :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi\, n}.$$

Session Wxmaxima 2.2 – Formule de Stirling

```
(%i1) v(n) := log(n)-n*log(n)+(n-1)*log(n-1);
```

(%o1) $\mathrm{v}(n) := \log(n) - n\log(n) + (n-1)\log(n-1)$

```
(%i2) taylor(v(n),n,inf,0);
```

(%o2)/T/ $-1+\ldots$

```
(%i3) taylor(v(n)+n-(n-1),n,inf,1);
```

(%o3)/T/ $\dfrac{1}{2\,n}+\ldots$

```
(%i4) taylor(v(n)+n-1/2*log(n)-((n-1)-1/2*log(n-1)),n,inf,2);
```

(%o4)/T/ $-\dfrac{1}{12\,n^2}+\ldots$

Remarque 2.7

À quoi sert l'estimation du reste ? ou de la somme partielle ? En dehors, d'une notion de vitesse de convergence ou de divergence, il peut arriver que l'on ait besoin de calculer la somme d'une série : par exemple, calculons à $\varepsilon = 10^{-3}$ près la somme de la série $\sum 1/n^3$.

On a :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2n^2} \leq R_n + \frac{1}{n^3} \text{ et } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = S_n + R_n.$$

Si l'on choisit n tel que $R_n < \varepsilon$, alors S_n est une bonne estimation de la somme à ε près. Ainsi $n = 23$ convient [a]. D'où :

$$S_{23} < S < S_{23} + \varepsilon.$$

On peut même améliorer ce calcul, en remarquant que :

$$\widetilde{S_n} = S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} \text{ vérifie } \left|S - \widetilde{S_n}\right| \leq \frac{1}{4n^3}.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer n pour que $1/2n^3 < \varepsilon$. Soit [b] $n = 8$... Voir le code Wxmaxima 2.3, de la présente page.

a. 22 aurait suffit expérimentalement.
b. 4 aurait suffit expérimentalement.

Session Wxmaxima 2.3 – Estimation numérique

```
(%i1)  S : sum(1/n^3,n,1,inf),simpsum,numer;
(%o1)  1.202056903159594
(%i2)  S23 : sum(1/n^3,n,1,23),numer;
(%o2)  1.20115192553742
```

```
(%i3)  abs(S23-S);
```
(%o3) $9.049776221747851710^{-4}$

```
(%i4)  Stilde8 : sum(1/n^3,n,1,p)+1/(2*p^2)-1/(2*p^3),p=8,numer;
```
(%o4) 1.20199618106171

```
(%i5)  abs(Stilde8-S);
```
(%o5) $6.072209788388072110^{-5}$

Remarque 2.8

Si l'on cherche une approximation de la somme à ϵ près, que l'on possède un encadrement du reste de la forme :

$$a_n \leq R_n \leq b_n,$$

et que a_n et b_n sont équivalents au voisinage de $+\infty$, alors on peut choisir n tel que :

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leq \epsilon, \text{ alors } \widetilde{S_n} = S_n + \frac{a_n + b_n}{2} \text{ vérifie } \left|S - \widetilde{S_n}\right| \leq \epsilon.$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Pour les séries à termes positifs suivantes, préciser la nature, puis donner un équivalent de la somme partielle (lorsque la série diverge), ou du reste (lorsque la série converge).

$$\begin{aligned} u_n &= n^n, && (2.2)\\ u_n &= e^{-(\ln(n))^\alpha}, \qquad \alpha > 0, && (2.3)\\ u_n &= \frac{1}{\ln(\ln(n))}. && (2.4) \end{aligned}$$

2.2.2 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0, on pose $v_n = n\,(u_n - u_{n+1})$. Montrer que les deux séries sont de même nature et que si elles convergent, les deux sommes sont égales. (On pourra en déduire que lorsque $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la série $\sum u_n$ converge, on a $n\,u_n \to 0$. Ce résultat étant faux lorsque l'on n'a plus la décroissance).

2.2.3 Soit $f\,:\,]0,1[\to \mathbb{R}_+$, croissante, continue par morceaux, montrer que :

$$\sum f\left(e^{-n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ sont de même nature.}$$

2.2.4 Soit une série divergente à termes positifs, de terme général x_n, nature des séries suivantes de termes généraux :

$$\frac{x_n}{1+x_n},\ \frac{x_n}{1+x_n^2},\ \frac{x_n}{1+nx_n},\ \frac{x_n}{1+n^2x_n}\ ?$$

2.2.2 Diverses techniques

Remarque importante 2.9

Une technique très efficace pour déterminer la nature d'une série a termes positifs est d'utiliser une comparaison (propositions 2.3, page 125 et 2.6, page 126) avec une des séries de référence :

— les séries de Riemann ;
— les séries de Bertrand ;
— les séries géométriques.

Propriété 2.7 – Comparaison logarithmique

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes *strictement* positifs, telles que :

$$\text{à partir d'un certain rang } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Démonstration

Soit N le rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée et les termes sont > 0. On a donc :

$$\forall n \geq N,\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En multipliant termes à termes, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ 0 < u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n,$$

ce qui nous permet d'obtenir le résultat.

Propriété 2.8 – Critère de d'Alembert

Le même que précédemment, en particularisant une des deux séries en une série géométrique : soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors :

$$\begin{cases} \lambda > 1 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ diverge (grossièrement)} \\ \lambda < 1 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge} \\ \lambda = 1^+ \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ diverge (grossièrement)} \\ \lambda = 1^- \ \Rightarrow\ \text{ euh ? rien !} \end{cases}.$$

Démonstration

C'est une comparaison logarithmique avec une série géométrique $\sum q^n$. En effet,

1. Si $\lambda > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, > 0, donc son terme général ne tend pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente.

   Le cas $\lambda = 1^+$ est identique.

2. Si $\lambda < 1$, prenons
$$q = \frac{\lambda + 1}{2} < 1,$$
une comparaison logarithmique entre les séries $\sum u_n$ et $\sum q^n$ permet de conclure.
3. Si $\lambda = 1^-$, l'exemple des séries de Riemann nous donne des cas convergents et des cas divergents.

> *Ce critère n'est utile que pour les séries comparables à une série géométrique !*

Remarque 2.10

C'est un critère assez pauvre, affaiblissement considérable d'un résultat peu efficace, son utilisation doit se limiter aux situations où le rapport u_{n+1}/u_n se simplifie considérablement...

Exemple 2.7

$$\sum \frac{n!}{n^{k\,n}},\ (k > 0) \text{ oui !} \qquad \sum e^{-\sqrt{n}} \text{ non !}$$

Démonstration

1. Si on pose :
$$u_n = \frac{n!}{n^{k\,n}} > 0 \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(n+1)^k\,(1+1/n)^{k\,n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^k\,n^{k-1}}.$$

On obtient donc :

$$\sum u_n \text{ converge } \iff k \geq 1.$$

2. Clairement :

$$\frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1^-.$$

Remarque 2.11

En revanche, lorsqu'il permet de conclure, on peut aussi s'en servir pour obtenir des équivalents de sommes partielles et de restes.

Proposition 2.4 – Équivalents issus de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. *Si on a :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha > 1,$$

alors

$$S_n(a) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}.$$

2. *Si, au contraire, on a :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in]0, 1[,$$

alors

$$R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{1-\alpha}.$$

Démonstration

1. Supposons $\alpha > 1$ et
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$
La série $\sum a_n$ diverge donc (grossièrement). On a alors :
$$S_{n+1}(a) - S_n(a) = a_{n+1} \underset{\infty}{\sim} \alpha\, a_n,$$
les deux séries $\sum (S_{n+1}(a) - S_n(a))$ et $\sum \alpha\, a_n$ sont à termes positifs, divergentes, donc les sommes partielles sont équivalentes. On obtient :
$$a_{n+1} + S_n(a) = S_{n+1}(a) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\, S_n(a).$$
Ce qui nous donne :
$$S_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}.$$
2. Le cas convergent ($\alpha < 1$) se traite de la même manière en écrivant :
$$a_{n+1} = R_n(a) - R_{n+1}(a) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\, a_n.$$

Remarque 2.12

On voit donc que cette situation correspond à l'une de celle où la comparaison série/intégrale fonctionnait mal. Prenons :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{3^n},$$

on a alors :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{3^t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ln(3)}.$$

La comparaison série/intégrale ne fonctionne pas ! Mais :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3^n}.$$

Propriété 2.9 – Règle « $n^\alpha\, u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, alors :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 1,\ n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge} \\ \exists \alpha \leq 1,\ n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ diverge} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in]0,+\infty[,\ n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \ \Rightarrow\ \text{ on aurait dû le trouver avant !} \end{cases}$$

Uniquement là pour aider ceux qui ont des difficultés à comparer à une série de Riemann...

Démonstration

1. Si on a $\alpha > 1$ et
$$n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ alors } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$
d'où (série à termes positifs) la convergence de $\sum u_n$.
2. Si on a $\alpha < 1$ et
$$n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ alors } \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n),$$
d'où (série à termes positifs) la divergence de $\sum u_n$.
3. Si on a $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, +\infty[$ et
$$n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \text{ alors } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha},$$
ce qui permet de conclure.

Propriété 2.10 – Sommation par paquets

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\psi(0) = 0$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \quad \text{(paquet)}.$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature, et, en cas de convergence, même somme.

Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.

Démonstration

1. On a immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand (de telle sorte que les termes soient positifs) :

$$S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u) \text{ et, si } n \in [\![\psi(p), \psi(p+1)-1]\!],\ S_{p-1}(v) \leq S_n(u) \leq S_p(v).$$

La première relation nous permet de dire que (cette égalité *n'utilise pas* la positivité des u_n) :

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ converge}\right].$$

La deuxième relation nous permet de dire que :

$$\left[\sum u_n \text{ diverge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ diverge}\right].$$

Exemple 2.8

Soit $\alpha > 0$, on considère $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N}, 0 \text{ n'intervient pas dans l'écriture décimale de } n\}$, on renumérote $\mathcal{P}$, sous la forme $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, φ strictement croissante, alors :

$$\sum \frac{1}{\varphi(n)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > \log_{10}(9).$$

Démonstration

On va regrouper suivant le nombre de chiffres en base 10 de $\varphi(n)$, en posant :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 10^{p-1} \leq \varphi(n) < 10^p - 1}} \frac{1}{\varphi(n)^\alpha}.$$

On a alors clairement, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$9^p \frac{1}{\overline{9\cdots9}^\alpha} v_p \leq 9^p \frac{1}{\overline{1\cdots1}^\alpha},$$

où 9^p est le nombre d'entiers à p chiffres ne contenant pas de 0 dans l'écriture décimale et où l'on a minoré et majoré $\varphi(n)$ lorsque $\varphi(n)$ a p chiffres. Finalement :

$$9^p \frac{1}{(10^p - 1)^\alpha} \leq v_p \leq 9^p \frac{9^\alpha}{(10^p - 1)^\alpha}.$$

On en déduit que la série $\sum v_p$ converge si, et seulement si :

$$\frac{9}{10^\alpha} < 1 \text{ soit } \alpha > \frac{\ln(10)}{\ln(9)} = \log_{10}(9).$$

Propriété 2.11 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ (une permutation de $\mathbb{N}$), alors $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et ont même somme.

⚠ *Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.*

Démonstration

Quitte à changer les premiers termes et sans changer la nature de la série, on peut supposer que *tous* les u_n sont positifs.

1. *Supposons que* $\sum u_n$ *converge.* Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, posons $v_n = u_{\sigma(n)}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{N_n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S(u),$$

   où

$$N_n = \max\left(\sigma\left(\llbracket 0, n \rrbracket\right)\right).$$

   Ce qui montre que $\sum v_n$ converge.

2. *Supposons que* $\sum v_n$ *converge.* Comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{\sigma^{-1}(n)},$$

   en inversant les rôles dans le cas précédent, on trouve que $\sum u_n$ converge. D'où le résultat.

   On a d'ailleurs clairement :

$$S(u) = S(v).$$

Théorème 2.1 – Produit de Cauchy de deux séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs, on définit* le produit de Cauchy *des deux séries comme étant la série de terme général :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

On a :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum w_n$ converge et

$$S(w) = S(u)\,S(v).$$

Démonstration

Nous supposerons encore, sans perte de généralité, que tous les termes sont positifs.

1. On utilise les ensembles d'indices définis sur la figure 2.2, page 164. On a alors clairement

$$\phi_n \subset \Gamma_n \subset \phi_{2\,n}.$$

On a alors immédiatement :

$$S_n(w) = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} u_j\, v_{k-j} \right) = \sum_{(j,k)\in\phi_n} u_j\, v_k \leq \sum_{(j,k)\in\Gamma_n} u_j\, v_k = S_n(u)\, S_n(v) \leq S(u)\, S(v).$$

Ce qui montre que $\sum w_n$ converge et $S(w) \leq S(u)\,S(v)$.

2. L'autre inclusion nous donne :

$$S_n(u)\, S_n(v) \leq S_{2\,n}(w) \text{ d'où } S(u)\, S(v) \leq S(w).$$

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Discuter suivant les paramètres la nature des séries de terme généraux suivants :

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right),\ \text{où } x>0, \tag{2.5}$$

$$u_n = \left(1-k\,\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)^{n},\ \text{où } k>0 \text{ et } \alpha>0. \tag{2.6}$$

2.3.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et différents de 1, telle que :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \\ \frac{\ln n}{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -l\in[-\infty,0] \end{cases}.$$

Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de l.

2.3.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* de réels >0. Montrer que les séries de termes généraux : u_n, $n\,u_{n^2}$ et $2^n\,u_{2^n}$ sont de même nature.

2.3.4 Soit α un réel >1, donner un équivalent de la somme partielle de la série de terme général

$$u_n = 3^{\sqrt{n^{\alpha}+n+1}}\,\ln n.$$

2.3.5 Nature de la série de terme général

$$\frac{p_b(n)}{n\,(n+1)},$$

où $b\geq 2$ et où $p_b(n)$ est le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base b.

2.3 Séries à termes quelconques

Définition 2.3 – Série absolument convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors, il peut arriver l'un des cas suivants :

1. Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* (en ce cas, elle est bien sûr convergente) ;
2. si $\sum u_n$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge, on dit que $\sum u_n$ est *semi-convergente* ;
3. $\sum u_n$ diverge.

Proposition 2.5 – des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n\, u_{n+1} < 0$ *(i.e. un changement de signe à chaque indice) et*
2. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit *vers 0,*

alors :

1. *la série est convergente ;*

2. et on a la propriété du reste suivante[a] *:*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \operatorname{sg}(u_{n+1}) R_n(u) \leq |u_{n+1}|.}$$

---

a. Où sg désigne la fonction *signe* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sg}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration

Supposons par exemple que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n\, |u_n|.$$

Les suites $(S_{2\,n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2\,n+1}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2\,n+1}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{2\,k} + u_{2\,k+1}) \text{ et } S_{2\,n}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_{2\,k-1} + u_{2\,k})\,.$$

On en déduit que :

$$(S_{2\,n+1}(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et } (S_{2\,n}(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Comme, de plus :

$$S_{2\,n+1}(u) - S_{2\,n}(u) = u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

on a le résultat.

Exemple 2.9

Un exemple simple de séries semi-convergentes :

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \in]0,1].$$

Remarque importante 2.13

La *décroissance* de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est *indispensable*, comme le montre la série suivante :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \text{ où } n \geq 2.$$

Démonstration

On a bien :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n\, u_{n+1} < 0,$$

mais la série diverge (car on n'a pas la décroissance). En effet :

$$w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}\,\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

$\sum w_n$ est donc divergente et, comme $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ est convergente (il y a la décroissance), on en déduit que :

$$\sum u_n \text{ diverge!}$$

Remarque importante 2.14

Si l'on reprend l'exemple précédent et que l'on pose $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a alors :

$$\sum v_n \text{ converge }, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et pourtant } \sum u_n \text{ diverge !}$$

On ne peut pas raisonner avec des équivalents pour étudier la nature des séries semi-convergentes ! En revanche, cela fonctionne bien pour le séries absolument convergentes.

Remarque 2.15

Il est bien sûr possible, en utilisant les techniques sur les séries à termes positifs d'obtenir des équivalents, voire des développements asymptotiques des restes des séries alternées. Ainsi :

$$\text{si } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \text{ alors } R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}. \qquad (\alpha > 0).$$

Démonstration

Le plus simple est de raisonner sur l'évaluation de :

$$R_{2\,n} = \sum_{k=2\,n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{(u_{2\,k+1} + u_{2\,k+2})}_{=v_k} = R_{n-1}(v).$$

Or,

$$v_k = \frac{1}{(2\,k+1)^\alpha} - \frac{1}{(2\,k+2)^\alpha}.$$

On a donc (voir les calculs `Wxmaxima` 2.4, page suivante) :

$$R_n(v) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,k^{\alpha+1}},$$

nous avons vu que pour une série de Riemann, on pouvait écrire immédiatement :

$$R_n(v) \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{\alpha+1}\,n^\alpha}.$$

Donc :

$$R_{2\,n}(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,(2\,n)^\alpha}.$$

Il est alors facile d'obtenir :

$$R_{2\,n+1}(u) = R_{2\,n}(u) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,(2\,n+1)^\alpha},$$

et, finalement :

$$R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n^\alpha}.$$

Session Wxmaxima 2.4 – Équivalents d'un reste de série alternée

```
(%i1) assume(alpha>0);
```

(%o1) $[\alpha > 0]$

```
(%i2) taylor(1/(2*k+1)^alpha-1/(2*k+2)^alpha,k,inf,1);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{\alpha}{2\,k^{\alpha}\,2^{\alpha}\,k} + \ldots$

Propriété 2.12 – Méthode du développement asymptotique

On développe u_n jusqu'à l'obtention d'un terme du DA qui est

— soit absolument convergent ;

— soit de signe constant.

Exemple 2.10 – Méthode du développement asymptotique

1. Soit la série définie par :

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\,\sin(1/\sqrt{n})}{n + (-1)^n}, \text{ où } n \geq 2.$$

On a alors :

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{alternée}} + \underbrace{-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{absolument convergente}}.$$

2. Soit la série définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}.$$

On a alors :

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}_{\text{alternée}} \underbrace{-\frac{1}{\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)}_{\text{divergente}}.$$

Proposition 2.6 – Sommation par paquets de termes de même signe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n,\ \forall (p,q) \in \{\psi(n), \dots, \psi(n+1)-1\}^2,\ u_p\, u_q > 0,$$

(soit un regroupement de termes de même signe), alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k\right)}_{=v_n} \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration

1. On a toujours la relation :
$$S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u).$$
Donc, et cela reste vrai quel que soient les propriétés de $\sum u_n$, on a :
$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ converge.}\right]$$
2. Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge, soit $n \in \mathbb{N}$, on peut alors définir
$$p_n \in \mathbb{N},\ \psi(p_n) \leq n < \psi(p_n + 1),$$
et on a alors :
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} u_k\right|. \tag{2.7}$$
3. Avec les hypothèses sur $\sum u_n$, la relation ci-dessus devient :
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} |u_k| \leq |v_{p_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
ce qui montre le résultat.

Exemple 2.11

La série de terme général ($\alpha \in \mathbb{R}$)
$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha},$$

est convergente si, et seulement si $\alpha > 1/2$.

Démonstration

1. Si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente.
2. Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente, elle converge donc.
3. Regroupons des termes de même signe (donc $\psi(n) = n^2$). Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k = (-1)^n \left(\sum_{k=n^2}^{n^2+2\,n} \frac{1}{k^\alpha} \right).$$

On peut alors obtenir à l'aide d'une comparaison série/intégrale :

$$|v_n| - \frac{1}{n^{2\,\alpha}} \leq \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq |v_n| - \frac{1}{(n+1)^{2\,\alpha}}.$$

On obtient donc (voir le code `WXmaxima` 2.5, page ci-contre) :

- Pour $\alpha \in]0,1[$:

$$|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{2\,\alpha-1}}.$$

On en déduit donc que

$$\left[\alpha \leq \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ diverge grossièrement}\right].$$

En ce cas, on peut conclure que

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

- Pour $\alpha \in]1/2,1]$:

$$v_n = \underbrace{\frac{2\,(-1)^n}{n^{2\,\alpha-1}}}_{\text{semi-convergente}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{2\,\alpha}}\right)}_{\text{absolument convergente}},$$

$\sum v_n$ est convergente et, comme on a fait un regroupement de termes de signe constant, $\sum u_n$ est convergente.

Session Wxmaxima 2.5 – Sommation par paquets de termes de même signe

Cas $\alpha \in]0, 1[$.

```
(%i1) assume(alpha>0,n>0,alpha<1);
```

(%o1) $[\alpha > 0, n > 0, \alpha < 1]$

```
(%i2) taylor(integrate(1/t^alpha,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^(2*alpha),n,inf,1);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{2\,n}{(n^\alpha)^2} - \dfrac{2\,\alpha}{(n^\alpha)^2} + \dfrac{4\,\alpha^2 - 2\,\alpha}{3\,(n^\alpha)^2\,n} + \ldots$

Cas $\alpha = 1$.

```
(%i3) taylor(integrate(1/t,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^2,n,inf,2);
```

(%o3)/T/ $\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \ldots$

Proposition 2.7 – Sommation par paquets de longueur bornée

$\sum u_n$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$*, vérifiant* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*,* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante, tels que :*

$$\exists P \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n+1) - \psi(n) \leq P,$$

(regroupement d'un nombre limité de termes tendant vers 0), alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \right)}_{=v_n} \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration

On reprend l'équation 2.7, page 155. On obtient maintenant :

$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(u)\right| \leq P \max\left(\{|u_k|,\ k \in [\![n+1, \psi(p_n+1)-1]\!]\}\right) \leq P \max\left(\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n+1\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

Proposition 2.8 – Comparaison à une intégrale (quantitative)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $x \mapsto \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ soit bornée sur $[0,+\infty[$, alors

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right)}_{=w_n} \textit{ converge.}$$

Démonstration

On écrit :

$$w_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} \left(f(t) - f(n)\right)\,\mathrm{d}t,$$

puis, on effectue une intégration par parties, en s'arrangeant pour que le crochet s'annule :

$$w_n = \left[(t-(n+1))\left(f(t)-f(n)\right)\right]_{t=n}^{t=n+1} - \int_n^{n+1} (t-(n+1))\,f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$|w_n| \leq \int_n^{n+1} (n+1-t)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$\sum |w_n|$ est donc convergente car, par hypothèse

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)}_{=x_n} \text{ converge,}$$

puisque :

$$S_n(x) = \int_0^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ par relation de Chasles.}$$

Remarque importante 2.16

On a donc, lorsque la proposition s'applique, c'est-à-dire quand

$$x \mapsto \int_0^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t \text{ est majorée,}$$

le résultat suivant :

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \iff \left[\left(\int_0^n f(t) \, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}\right]$$

On a vu qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que la suite $\left(\int_0^n f(t) \, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est que [a] :

$$x \mapsto \int_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \text{ soit majorée.}$$

---

a. C'est le même type de raisonnement que celui utilisé pour montrer que dans $\mathbb{K}$:

$$\left[\sum |u_n| \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge.}\right]$$

On écrit $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ lorsque f est réelle et on utilise les parties réelles et les parties imaginaires lorsque f est complexe, où :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; f^+(x) = \max(f(x), 0) \; \text{ et } \; f^-(x) = \max(-f(x), 0)\,.$$

Exemple 2.12 – Comparaison quantitative avec une intégrale

Soit $\alpha > 0$, la série définie par :

$$u_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Démonstration

On pose :

$$f(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}.$$

On a donc (voir le code `Wxmaxima` 2.6, page 165) :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} + \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

▶ Pour $\alpha > 1/2$, on a :

$$x \mapsto \int_1^x \left|f'(t)\right| \,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [1, +\infty[.$$

D'après le proposition précédente, $\sum u_n$ est de même nature que la série :

$$\sum \left(\int_n^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t\right),$$

et, comme :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_n^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t,$$

il nous reste à étudier le comportement de cette intégrale. Mais :

$$\int_1^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\,\sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}} \,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\cos(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\right]_{x=1}^{x=\sqrt{n+1}} - \int_1^{\sqrt{n+1}} (2\,\alpha-1)\,\frac{\cos(x)}{x^{2\,\alpha}}\,\mathrm{d}x.$$

Il est facile de conclure puisque $\alpha > 1/2$.

► Lorsque $\alpha \in]0, 1/2]$, on écrit (formule de Taylor avec reste intégral) :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \underbrace{\frac{f'(n)}{2}}_{=v_n} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2}\,f''(t)\,\mathrm{d}t}_{=w_n}.$$

On vérifie successivement que :

- $x \mapsto \displaystyle\int_1^x |f''(t)|\,\mathrm{d}t$ est majorée ;
- on en déduit facilement que $\sum w_n$ est absolument convergente ;
- $\sum v_n$ converge, par application de la proposition, puisque :

$$\left(\int_1^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une limite,}$$

- on conclut en montrant que :

$$\left(\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas,}$$

car

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\,\sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\,\mathrm{d}x}_{=g\left(\sqrt{n+1}\right)} = g(\pi) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(g\big((k+1)\,\pi\big) - g(k\,\pi)\right) + g\left(\sqrt{n+1}\right) - g(p\,\pi),$$

où

$$p = \left\lfloor \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \right\rfloor.$$

On peut alors conclure facilement.

Figure 2.1 – Comparaison série/intégrale

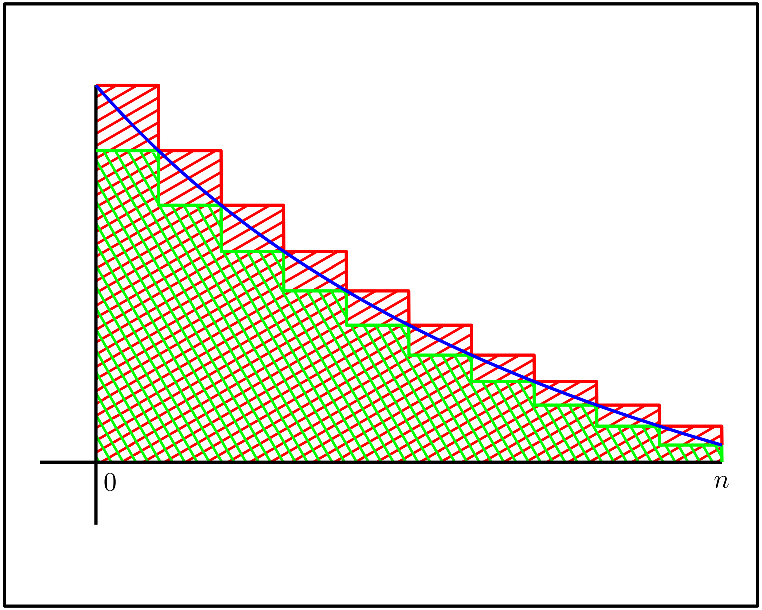
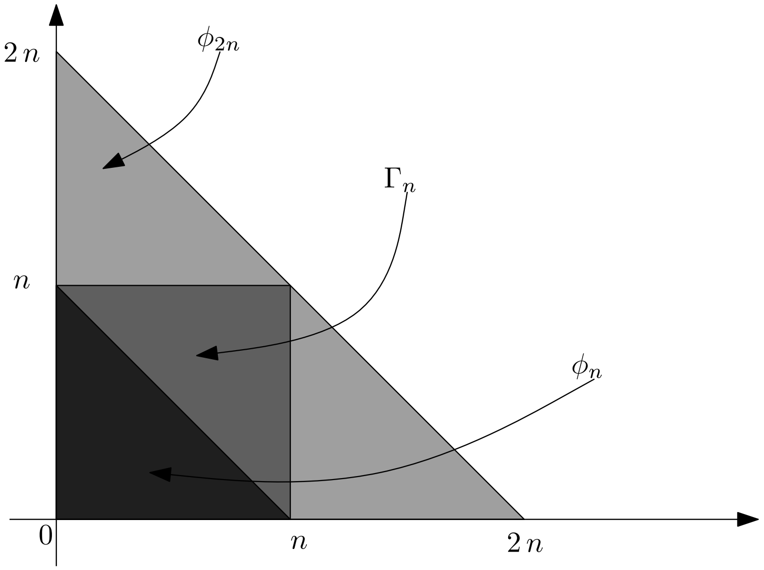


Figure 2.2 – Produit de Cauchy



Session Wxmaxima 2.6 – Comparaison quantitative avec une intégrale

```
(%i1) f(x) := sin(sqrt(x))/x^alpha;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}}$

```
(%i2) diff(f(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)\, x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{2} - \alpha \sin\left(\sqrt{x}\right)\, x^{-\alpha-1}$

Exemple 2.13 – Comparaison qualitative avec une intégrale

La série définie par ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^{\alpha}} \text{ converge } \iff \alpha > 0.$$

Démonstration

- Pour $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.
- Pour $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha \in]0,1]$, on procède par analogie. Pour l'intégrale, on fait une intégration par parties. On écrit donc, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_k - \Gamma_{k-1}\right) \frac{1}{k^{\alpha}},$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k).$$

Proposition 2.9 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ *une série* absolument convergente *réelle, et* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$*, alors :*

$$\sum u_{\sigma(n)} \text{ converge, et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 2.14

La série définie par :

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)^\alpha} + \frac{1}{(3n-1)^\alpha} + \frac{1}{(3n)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}, \text{ où } n \geq 1 \text{ et } \alpha > 0,$$

converge si, et seulement si, $\alpha \geq 1$, sa somme est nulle pour $\alpha > 1$ et non nulle pour $\alpha = 1$.

Exemple 2.15

Soit $\sum u_n$ à valeurs réelles, *semi-convergente*, alors :

$$\forall \lambda \in [-\infty, +\infty],\ \exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}),\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda.$$

Théorème 2.2 – Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente dans le corps $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série absolument convergente dans $\mathbb{K}$, alors la série $\sum w_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k},$$

est absolument convergente, et

$$S(w) = S(u)\, S(w).$$

Remarque 2.17

On peut généraliser à la situation où l'une des séries est semi-convergente, l'autre absolument convergente. En ce cas, la série-produit est encore convergente. En revanche, lorsque les deux séries sont semi-convergentes, on ne peut rien dire.

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Étudier la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \tag{2.8}$$

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right) \tag{2.9}$$

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n - \sqrt{n}\,\sin(n)} \tag{2.10}$$

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.11}$$

2.4.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels tendant vers 0. On suppose qu'il existe $r \in]0,1[$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

2.4.3 Montrer que

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ est irrationnel.}$$

2.4.4 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\alpha \in]0, \pi/2[$. On suppose que chaque z_n a un argument dans $[-\alpha, \alpha]$ et que $\sum z_n$ converge. Montrer que $\sum |z_n|$ converge.

2.4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k \ .$$

On suppose que $u_n = O(1/n)$ et que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge.

2.4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0.

(a) On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a \in [0, 1[.$$

Montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a} \ .$$

(b) On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a > 1.$$

Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a} \ .$$

(c) Donner un énoncé analogue si $u_{n+1}/u_n \to +\infty$.

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0 en décroissant, telle que $(u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, que $u_{n+1} \underset{\infty}{\sim} u_n$. Montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{2} .$$

2.4 Applications des séries aux suites récurrentes

Remarque 2.18

On peut remarquer qu'il y a une certaine *analogie* entre les séries et les fonctions, ainsi :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (S_n(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ressemble à } f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est la primitivation... De même,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ressemble à } f \mapsto f',$$

c'est la dérivation... (On peut même aller plus loin et apparier n avec x, u_n avec $f(x)$, etc.) Cette analogie n'est que très rarement quantitative, mais l'étude du problème continu analogue peut donner de bonnes idées d'approche du problème discret.

Exemple 2.16

Soit la suite récurrente définie par (voir le comportement de la suite sur la figure 2.3, page 186.

$$u_0 \in]0,1[,\ u_{n+1} = \sin u_n.$$

Cette suite converge vers 0, et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Démonstration de l'exemple 2.16, page précédente

On montre que (démonstration laissé comme exercice) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a alors :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right),$$

que l'on peut lire comme :

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{6}.$$

Le problème continu analogue est :

$$\frac{f'(x)}{f(x)^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{6}.$$

On voit donc que la *bonne* fonction pour étudier cette propriété est la fonction $1/f^2$, et qu'en plus, il faut la dériver ! Posons donc :

$$v_n = \frac{1}{u_n^2} \text{ et étudions la série dérivée } w_{n+1} = v_{n+1} - v_n.$$

On a alors :

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{-2} - 1\right).$$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient :

$$w_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } S_{n-1}(w) = v_n = \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

On obtient alors, puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Exemple 2.17

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.4, page 187) :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)/2.$$

Démonstration de l'exemple 2.17, de la présente page

Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_n$, de manière immédiate.
Mais quel est l'équivalent de u_n ?
On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3).$$

La première idée est de résoudre le système sans second membre, et de faire une variation de la constante, soit de chercher une solution sous la forme :

$$u_n = \frac{v_n}{2^n},\ \text{avec } v_{n+1} = v_n - \frac{v_n^3}{3\,4^n} + o\left(\frac{v_n^3}{4^n}\right).$$

On peut continuer le calcul par analogie...

Exemple 2.18

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.5, page 188) :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n).$$

Démonstration de l'exemple 2.18, page précédente

Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_{n+1}$ de manière immédiate.
On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

L'étude de la partie homogène nous incite à poser :

$$u_n = 2v_n^{2^n}, \text{ où } \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

La suite se continue par analogie...

Exercice(s) 2.5

2.5.1 Étude de la suite définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 + u_n^2}$$

et de la série $\sum(u_n - 1)$.

2.5.2 Étudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + u_n^{-5}. \end{cases}$$

Équivalent de u_n ? Terme suivant du développement asymptotique.

2.5.3 Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.6, page 189) :

$$u_0 \in]0,1[,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer qu'elle converge vers 0.

(b) Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

2.5.4 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nature de la série de terme général $u_n/S_n(u)^\alpha$?

2.5.5 Soit $\alpha > 0$, $u_0 > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha\, u_n}.$$

(a) Si $\alpha \leq 1$, montrer que la suite diverge vers l'infini et donner un équivalent de u_n.

(b) Si $\alpha > 1$, montrer que la suite converge (vers une limite notée l) et donner un équivalent de $u_n - l$.

2.5.6 Soit $a > 0$ et $\alpha > 0$ deux réels, étudier la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{S_n(u)^\alpha}.$$

2.5.7 Soit la suite définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}.$$

Déterminer un développement asymptotique de u_n.

2.5.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes ≥ 0, qui converge vers 0 et telle que $(S_n(a) - n\, a_n)$ reste bornée. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

2.5 Familles sommables

Les familles sommables sont une généralisation des séries lorsque l'ensemble des indices n'est pas nécessairement ordonné, par exemple pour des suites doubles $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, ou lorsque l'ordre de sommation n'intervient pas, comme pour les séries absolument convergentes.
Dans cette partie, on note I un ensemble dénombrable.

2.5.1 Généralités

Définition 2.4 – Famille sommable de nombres positifs

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes positifs est *sommable* lorsque :

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J\subset I\right\} \text{ est borné.}$$

On définit alors sa *somme* : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J\subset I\right\}$.

Exemple 2.19

Soit $p\in[0,1[$ alors $\left(p^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et sa somme vaut :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{|n|} = \frac{1+p}{1-p}.$$

Remarque 2.19

1. Lorsque $I=\mathbb{N}$, on retrouve la notion de série à termes positifs convergente :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum u_i \text{ est convergente.}$$

2. Lorsque la famille à termes positifs $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, il est cohérent de poser :

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty.$$

Proposition 2.10 – Comparaison de famille sommable à termes positifs

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels avec :

$$\forall i \in I,\ 0 \leq u_i \leq v_i.$$

1. *Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et :*

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

2. *Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.*

Démonstration

1. Puisque la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $J \subset I$ fini :

$$\left\{ \sum_{i\in J} v_i \mid J \text{ fini et } J \subset I \right\} \subset [0, M].$$

Soit J fini et $J \subset I$ alors $0 \leq \sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J} v_i$ et :

$$\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \text{ fini et } J \subset I \right\} \subset [0, M],$$

donc la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. De plus :

$$\text{pour tout } J \text{ fini et } J \subset I, \quad \sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J} v_i \leq \sup \left\{ \sum_{i \in J} v_i \mid J \text{ fini et } J \subset I \right\} = \sum_{i \in I} v_i,$$

et, en prenant la borne supérieure :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \text{ fini et } J \subset I \right\} \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

2. Il s'agit juste de la contraposée du premier point.

Exemple 2.20

Déterminer la nature de la famille $\left(\dfrac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$.

Remarque 2.20

La proposition 2.10, page précédente permet d'étendre la définition d'une famille sommable à une famille à termes quelconques.

Définition 2.5 – Famille sommable

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes quelconques est *sommable* lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ à termes positifs est *sommable*. De plus, on définit sa somme par :

1. si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes réels :
$$\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-;$$
2. si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes complexes :
$$\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Remarque importante 2.21

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes réels est sommable alors
$$0 \leq u_i^+ = \max(u_i, 0) \leq |u_i| \text{ et } 0 \leq u_i^- = \max(-u_i, 0) \leq |u_i|,$$
donc, par la proposition 2.10, page 178, les familles à termes positifs $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Les sommes qui apparaissent dans la définition 2.5, de la présente page sont donc bien définies.

Remarque 2.22

Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notion de série absolument convergente :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum u_i \text{ est absolument convergente.}$$

Proposition 2.11 – Combinaison linéaire de familles sommables

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\Big(u_i + \lambda.v_i\Big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} \Big(u_i + \lambda.v_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda.\sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration

A faire.

Remarque importante 2.23

L'ensemble des familles sommables indicées par I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et :

$$(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i \text{ est une forme linéaire linéaire.}$$

2.5.2 Sommation par paquets

Proposition 2.12 – Critère de sommabilité

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une partition de* I*, alors :*

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable } \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (|u_i|)_{i\in I_n} \text{ est sommable,} \\ \displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ est convergente.} \end{cases}$$

Remarque 2.24

1. Si I_n est vide alors, par convention, $\sum_{i\in I_n} u_i = 0$.
2. L'étude de la sommabilité se ramène souvent à l'étude de convergence de séries.
3. Attention : il ne faut jamais oublier les valeurs absolues lorsqu'on applique ce critère.

Démonstration de la proposition 2.12, de la présente page

▷ *Montrons le sens indirect.*
Soit J fini, non vide et $J \subset I$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $J_n = J \bigcap I_n$. Puisque J est fini et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset\}$ est fini et non vide donc admet un maximum noté N. On a donc :

$$\sum_{i\in J} |u_i| = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i\in J_n} |u_i|\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) = M,$$

et, d'après les hypothèses, $M \in \mathbb{R}$. Puisque $\left\{\sum_{i\in J}|u_i| \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\}$ est borné, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
▷ *Montrons le sens direct par contraposée.*

- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ n'est pas sommable alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable mais que $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)$ est divergente. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \geq 2M.$$

Puisque $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, il existe J_n fini et $J_n \subset I_n$ tel que :

$$\sum_{i\in J_n}|u_i| \geq \sum_{i\in I_n}|u_i| - \frac{M}{N+1}.$$

Posons $J = \displaystyle\bigcup_{n\in[\![0,N]\!]} J_n$ alors J est fini, $J \subset I$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J}|u_i| &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n}|u_i|\right) \text{ car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une partition de } I,\\ &\geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i| - \frac{M}{N+1}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) - M \geq 2M - M = M.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\{\sum_{i\in J}|u_i| \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\}$ n'est pas borné et $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Exemple 2.21

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Proposition 2.13 – Sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I, alors :

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $(|u_i|)_{i\in I_n}$ *est sommable,*
2. $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ *est convergente,*
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$.

Démonstration

Les points 1. et 2. sont le sens direct de la proposition 2.12, page 182.
3. ▷ En utilisant les décompositions en parties positives et négatives et en parties réelles et imaginaires, il suffit de montrer le troisième point lorsque $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes positifs.
▷ On suppose donc $u_i\in\mathbb{R}_+$ pour tout $i\in I$ et soit J fini, non vide et $J\subset I$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$: $J_n = J\bigcap I_n$. Puisque J est fini

et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset\}$ est fini et non vide donc admet un maximum noté N. On a donc :

$$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, il existe J_n fini et $J_n \subset I_n$ tel que :

$$\sum_{i\in I_n} u_i - \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \leq \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I_n} u_i.$$

Posons $J = \bigcup_{n\in[\![0,N]\!]} J_n$ alors J est fini, $J \subset I$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in J} u_i &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right) \text{ car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une partition de } I,\\
&\geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i - \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) - \frac{\varepsilon}{2}\\
&\geq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par caractérisation de la borne supérieure :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Figure 2.3 – $u_{n+1} = \sin(u_n)$

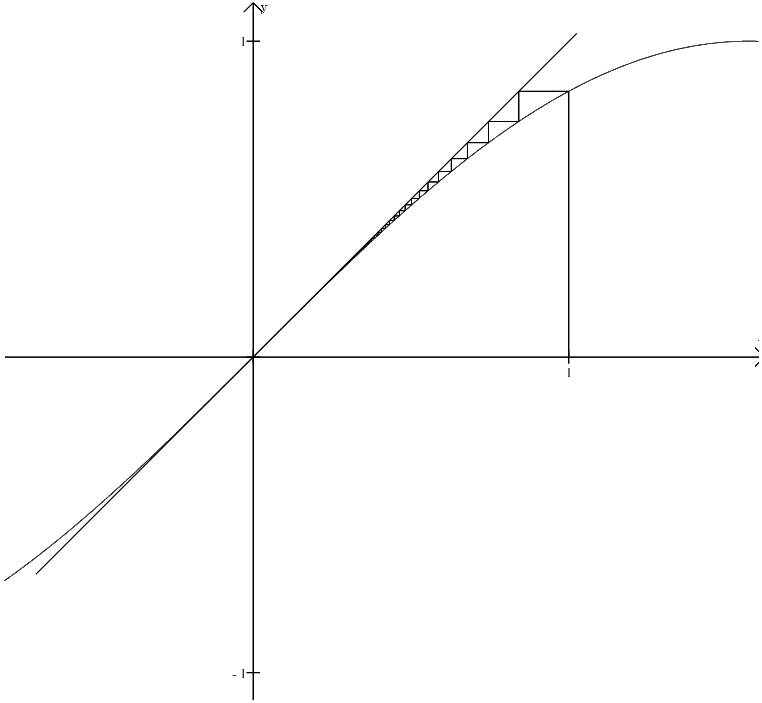


Figure 2.4 – $u_{n+1} = \arctan(u_n)/2$

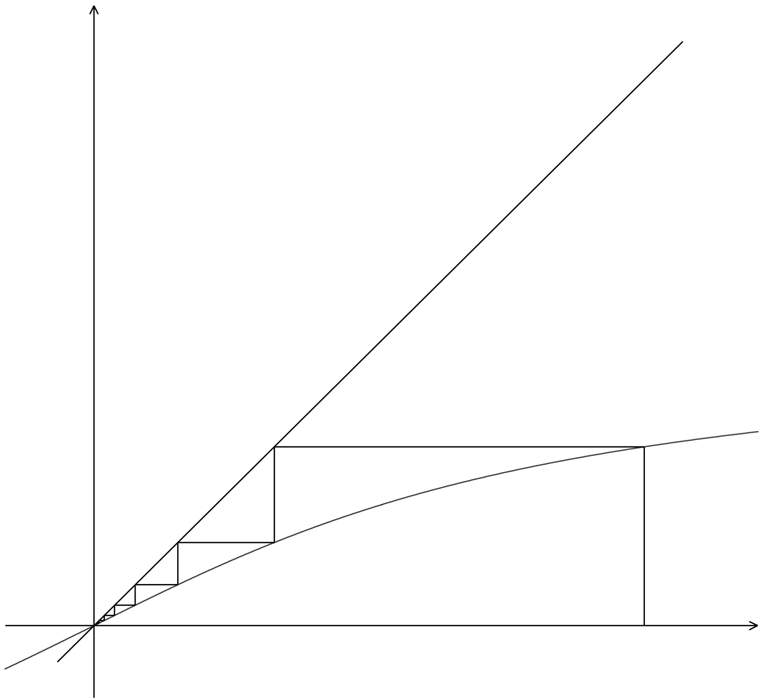


Figure 2.5 – $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$

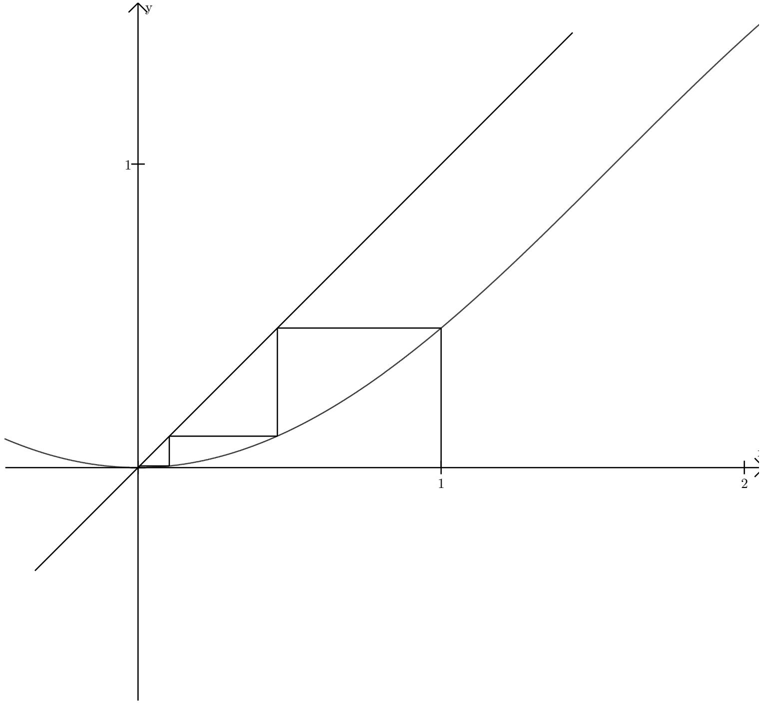
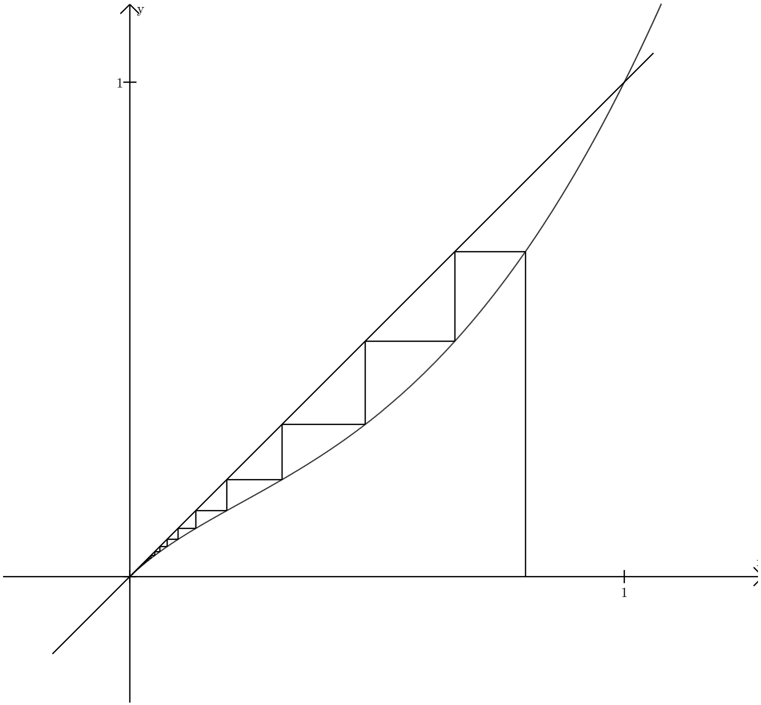


Figure 2.6 – Exercice 2.5.3, page 175



Exemple 2.22

1. Soit $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq k\}$, montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.
2. On définit, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$a_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2 - p^2} & \text{si } n \neq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la sommabilité de la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

Remarque importante 2.25

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes alors :

1. si pour tout $i \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_j |u_{i,j}|$ convergent et si la série $\sum_i \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|$ converge alors la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (proposition 2.12, page 182).
2. Dans ce cas, on a (proposition 2.13, page 184) :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n}^{+\infty} u_{i,j} = \dots$$

Remarque 2.26

La proposition 2.13, page 184 permet de démontrer la proposition 2.9, page 166 sur le changement d'ordre des termes d'une série absolument convergente et le théorème 2.2, page 167 sur la convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $u_{p,q}=e^{-ap-bq}$ pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

2.6.2 Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{a^p\,b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

2.6.3 Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$, montrer que, après avoir justifier l'existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}.$$

2.6.4 Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une énumération des rationnelles, $I_n=\left]r_n-\dfrac{1}{n^2},r_n-\dfrac{1}{n^2}\right[$ et $I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$. Montrer que $I\neq\mathbb{R}$.

2.6.5 La fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_s(-1)^s\left(\zeta(s)-1\right)$.

Chapitre 3

Séries entières

3.1 Généralités

3.1.1 Définition

Définition 3.1 – Série entière

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$:

1. la série $\sum a_n\, z^n$ s'appelle la *série entière* de terme général $a_n\, z^n$;
2. les complexes a_n sont les *coefficients* de la série entière, a_0 est le *terme constant* ;

3. le *domaine de convergence* de la série entière est l'ensemble des z tels que $\sum a_n z^n$ soit convergente ;
4. la *fonction somme* de la série entière est

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et est définie sur le domaine de convergence, elle sera notée S_a.

Remarque 3.1

1. Quand les a_n sont réels, on peut considérer la série entière $\sum a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ et les quantités considérées restent réelles.
2. Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières (les coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang).
3. La somme partielle d'une série entière est une fonction polynomiale mais sa somme est une fonction de z, pas nécessairement polynomiale.

Exemple 3.1 – La série géométrique

La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière :

1. de coefficients $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. de domaine de convergence

$$BO(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

3. de fonction somme :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Exemple 3.2

1. $\sum \frac{(3\,z)^n}{n^2+1}$ est une série entière de domaine de convergence $BF(0, 1/3)$.
2. $\sum_{p \geq 0} \frac{z^{2\,p}}{p+1}$ est aussi une série entière de coefficients

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2\,p+1 \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{p+1} & \text{si } n = 2\,p \text{ est pair} \end{cases}$$

3. $\sum e^{-n\,z}$ est une série de paramètre z mais n'est pas une série entière.

3.1.2 Rayon de convergence

Théorème 3.1 – Lemme d'Abel

Si $r_0 \geq 0$ *et* $(|a_n|\, r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée alors :*

$$\sum a_n\, z^n \text{ est absolument convergente sur } BO(0, r_0)$$

Théorème 3.2

Soit $\sum a_n\, z^n$ *une série entière, il existe* $R_a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *tel que* [a] *:*

1. *si* $|z| < R_a$ *alors* $\sum a_n\, z^n$ *est absolument convergente ;*
2. *si* $|z| > R_a$ *alors* $\sum a_n\, z^n$ *est grossièrement divergente.*

---

a. Voir la figure 3.1, page 255

Définition 3.2

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière, le nombre $R_a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la proposition précédente est le *rayon de convergence*.

Remarque importante 3.2

On a les différentes caractérisations :

$$\begin{aligned} R_a &= \boxed{\sup\left\{r \geq 0,\ \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}} \\ &= \boxed{\sup\left\{r \geq 0,\ \sum |a_n|\, r^n \text{ est convergente}\right\}} \\ &= \boxed{\sup\left\{r \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} a_n\, r^n = 0\right\}} \end{aligned}$$

Définition 3.3

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière et R_a son rayon de convergence :

1. le disque ouvert de centre O et de rayon R_a s'appelle le *disque ouvert de convergence* ;
2. le cercle de centre O et de rayon R_a s'appelle parfois le *cercle d'incertitude*, parce qu'on n'est pas sûr de ce qui s'y passe !

Exemple 3.3 – Domaines de convergence

1. Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est $R = 1$ et le disque ouvert de convergence est $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.
   Il n'y a pas convergence sur le cercle d'incertitude.
2. Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(3\,z)^n}{n^2+1}$ est $R = \dfrac{1}{3}$, le disque ouvert de convergence est $\left\{z \in \mathbb{C},\ |z| < \dfrac{1}{3}\right\}$. Il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.
3. Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{1}{n}\, z^n$ est $R = 1$ et le disque ouvert de convergence est $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude sauf en 1.
4. Cela peut être plus compliqué, ainsi pour :

$$a_n = \begin{cases} 1/p, & \text{si } n = 3^p \\ -1/p, & \text{si } n = 2\,3^p \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

   $\sum a_n\, z^n$ converge en $z = \exp(2\,i\,k\,\pi/3^p)$ et diverge en $z = \exp((2k+1)\,i\,\pi/3^p)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

Propriété 3.1 – Comparaison de séries entières

1. En reprenant la définition, on remarque que :

$$\sum a_n\, z^n, \quad \sum |a_n|\, z^n \quad \text{et} \quad \sum \lambda\, a_n\, z^n \quad (\lambda \neq 0) \text{ ont même rayon de convergence}$$

2. Plus généralement, soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b :
   — si : $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$;
   — si : $|a_n| \overset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Propriété 3.2 – Utilisation de la règle de d'Alembert

Si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose (pour $z \neq 0$) $u_n(z) = a_n\, z^n \neq 0$ et on peut former

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|}$$

Si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \lambda(z)$$

existe alors :

— si $\lambda(z) < 1$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente ;
— si $\lambda(z) > 1$, la série $\sum a_n\, z^n$ est grossièrement divergente ;

ce qui fournit, après simplifications, le rayon de convergence R_a.

▶ Le cas $\lambda(z) = 1$ correspond à z sur le cercle d'incertitude (et *on ne peut pas conclure par cette méthode*).

Remarque importante 3.3

Bien sûr, il n'y aucune raison en générale que $\lambda(z)$ existe ! Auquel cas, la règle de d'Alembert est totalement inutile...

Propriété 3.3 – Utilisation des caractérisations du rayon de convergence

Soit R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

1. On a une caractérisation avec les limites :
   — si $a_n\, z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $|z| \leq R$;
   — sinon $|z| \geq R$.
2. On a une caractérisation avec les bornes :
   — si $(a_n\, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $|z| \leq R$;
   — si $(a_n\, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée alors $|z| \geq R$.

Remarque 3.4

1. Les inégalités sur le rayon de convergence sont larges.
2. Les méthodes précédentes sont encore valable en changeant $z \in \mathbb{C}$ par $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.4

Rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ lorsque :

1. $a_n = 3 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $a_n = \cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.5

Il est parfois plus difficile de s'y retrouver, ainsi, si l'on note R_{ab} le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$, la seule chose que l'on puisse dire est (lorsque cela a un sens)

$$R_{ab} \geq R_a R_b$$

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

$$\sum \frac{(2\,n)!}{n!\,n^n}\,x^n \tag{3.1}$$

$$\sum \arctan(n^\alpha)\,x^n \qquad \alpha\in\mathbb{R} \tag{3.2}$$

$$\sum a^{\sqrt{n}}\,x^n \qquad a\in]0,+\infty[\tag{3.3}$$

$$\sum a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\,x^n \qquad a\in]0,+\infty[\tag{3.4}$$

$$\sum \sin(n\,\theta)\,z^n \qquad \theta\in\mathbb{R} \tag{3.5}$$

$$\sum n!\,z^{n^2} \tag{3.6}$$

$$\sum n!\,z^{n!} \tag{3.7}$$

$$\sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n \tag{3.8}$$

$$\sum a_n\,z^n \qquad \text{où } \begin{cases} a_{3\,p}=2^p \\ a_{3\,p+1}=5^p \\ a_{3\,p+2}=\ln(p+1) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\sum \frac{1}{\sin(n\,\pi\,\sqrt{5})}\,x^n \tag{3.10}$$

$$\sum \exp(n\,\sin(n\,\theta))\,x^n \qquad \theta\in\mathbb{R} \tag{3.11}$$

3.1.2 Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \neq 0$, que peut-on dire du rayon de convergence de la série $\sum S_n(a)\, z^n$? (Où $S_n(a) = \sum_{k=0}^n a_k$.)

3.1.3 Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 ; on suppose :

$$\frac{a_{n+1}\, a_{n-1}}{{a_n}^2} \longrightarrow l \in [0, +\infty[\setminus \{1\}$$

Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$?

3.1.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 3.1 – Somme et produit de Cauchy de séries entières

Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b.

1. *La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R_s \geq \min(R_a, R_b)$ et, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n \quad \textit{(somme)}$$

2. *La série entière* $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n$ *a pour rayon de convergence* $R_p \geq \min(R_a, R_b)$ *et, pour tout* $|z| < \min(R_a, R_b)$ *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right) \quad \textit{(produit de Cauchy)}$$

Remarque 3.5

1. Si les coefficients de la série entière sont définies pour $n \geq 1$, le produit de Cauchy est la série entière :

$$\sum \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k}\right) z^n$$

   (ce que l'on obtient aussi en posant $a_0 = b_0 = 0$).
2. Si $R_a \neq R_b$ alors $R_s = \min(R_a, R_b)$.
3. Si $R_a = R_b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n\, b_n = 0$$

   alors $R_s = R_a = R_b$.

Exemple 3.6

La série entière
$$\sum (n+1)\, z^n$$
peut être vue comme un produit de Cauchy.

3.2 Fonction somme d'une série entière

3.2.1 Cas général

Dans cette partie, on note :
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ;
- R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ et on suppose que $R_a > 0$;
- S_a la fonction somme définie sur
$$D = \{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n\, z^n \text{ converge}\}$$

Théorème 3.3 – Continuité dans la boule ouverte de convergence

S_a est continue sur $BO(0, R_a)$.

Théorème 3.4 – Continuité sur le fermé

Si $R_a \neq +\infty$ *et* $\sum |a_n| R_a^n$ *est convergente alors* S_a *est continue sur* $BF(O, R_a)$.

Théorème 3.5 – Continuité radiale

Si $R_a \neq +\infty$ *et* $z_0 \in S(0, R_a)$ *est tel que* $\sum a_n z_0^n$ *converge alors :*

$$\begin{array}{ccc} [0,1[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & S_a(t\, z_0) \end{array} \quad \textit{admet pour limite } S_a(z_0) \textit{ en } 1^-$$

Remarque 3.6

La fonction $\begin{array}{ccc} [0,1[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & S_a(t\, z_0) \end{array}$ peut avoir une limite en 1^- sans que la série $\sum a_n z_0^n$ converge (par exemple la série géométrique).

Définition 3.4

On appelle *série dérivée* de la série entière $\sum a_n z^n$ la série :

$$\sum n\, a_n\, z^{n-1} = \sum (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

Théorème 3.6

La série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence :

$$\text{Rayon}\left(\sum a_n\, z^n\right) = \text{Rayon}\left(\sum n\, a_n\, z^{n-1}\right) = R_a$$

De plus, comme $R_a > 0$ *(hypothèse de tout le chapitre), pour tout* $z \in BO(0, R_a)$ *:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z+h)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

Remarque 3.7

Les sommes de séries entières se dérivent comme si la variable était réelle et qu'on pouvait intervertir sommation et dérivation ! *Ce qui est faux en général ! Voir le cours sur les séries de fonctions.*

Exercice(s) 3.2

3.2.1 En posant $z = x\, e^{i\,\theta}$, calculer les sommes des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{z^{n+1}}{n+1} \tag{3.12}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{z^{2\,n+1}}{2\,n+1} \tag{3.13}$$

3.2.2 Soit E l'ensemble des fonctions de $BO(0,1)$ dans $\mathbb{C}$, somme d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ telle que :

$$\sum |a_n|^2 \text{ converge}$$

On munit alors E de la norme :

$$\|S_a\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}$$

(a) Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé (préhilbertien).

(b) Montrer que E ainsi normé est complet (espace de Hilbert).

3.2.3 Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2\,n)\, x^n$$

(a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle de premier ordre.

(b) En déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2\,n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2\,p)\,\zeta(2\,n - 2\,p)$$

3.2.2 Cas réel

Dans cette partie, on note :

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes ;

— R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\,x^n$ et on suppose que $R_a > 0$;

— S_a la fonction de la variable réelle définie sur

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ \sum a_n\,x^n \text{ converge}\}$$

Si $R_a \neq +\infty$, on a : $D =]-R_a, R_a[$ ou $]-R_a, R_a]$ ou $[-R_a, R_a[$ ou $[-R_a, R_a]$.

Théorème 3.7 – Continuité

S_a est continue sur D.

Exemple 3.7

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est continue sur $]-1,1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1,1[$. Remarquons que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est continue sur $]-\infty,1[$.

Théorème 3.8 – Dérivation terme à terme

S_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ et, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R_a, R_a[$:

$$S_a^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n\cdots(n-p+1)\, a_n x^{n-p} \quad \textit{(série de rayon de convergence } R_a\textit{)}$$

Notamment

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!}$$

Remarque 3.8

En particulier, $S_a(0) = a_0$ et $S_a'(0) = a_1$.

Exemple 3.8

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 donc $\sum n\, x^{n-1}$ aussi et la fonction $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n \cdots (n-p+1)\, x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\, x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}\, x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p}\, x^n$$

Comme tous les coefficients de la série entière $\sum x^n$ valent 1, on a $S^{(p)}(0) = p!$.

Théorème 3.9 – Intégration terme à terme

1. *Les séries entières* $\sum \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ *et* $\sum \frac{a_n}{n}\, x^n$ *ont pour rayon de convergence* R_a.
2. *Les primitives de* S_a *sur* $]-R,R[$ *sont données par :*

$$\Phi(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n \qquad \textit{avec } C = \Phi(0)$$

Exemple 3.9

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 donc la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ aussi et la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est définie sur $]-1,1[$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Théorème 3.10 – Intégration

1. *Pour* $x \in]-R_a, R_a[$:

$$\int_0^x S_a(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

2. *Pour* $[\alpha, \beta] \subset]-R_a, R_a[$:

$$\int_\alpha^\beta S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$$

Remarque 3.9

On a donc

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta x^n \,\mathrm{d}x$$

et on a intervertit les signes $\sum$ et $\int$.

Remarque importante 3.10

Les bornes d'intégration doivent appartenir à l'intervalle ouvert $]-R_a, R_a[$ et *non au domaine de convergence* !

Exemple 3.10

Montrons que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1}$$

en utilisant la série géométrique :

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \frac{1}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n} \qquad\qquad R = 1$$

▶ <u>Mauvaise démonstration</u>.
Par intégration sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n\, t^{4\,n}\, \mathrm{d}t\right) \text{ intervertion non justifiée !}$$

▶ <u>Démonstration correcte</u>.
Pour $x \in [0,1[$, par intégration terme à terme sur $[0,x] \subset [0,1[$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n\, t^{4\,n}\, \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1}\, x^{4\,n+1}$$

La série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{4\,n+1} x^{4\,n+1}$ a pour rayon de convergence 1 et converge pour $x = 1$. Par continuité radiale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1} x^{4\,n+1} = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

▶ <u>Meilleure démonstration</u>.
La démonstration précédente fait appel au théorème de continuité radiale, qui est un peu compliqué à démontrer et qui n'est pas indispensable ici. Il suffit de connaître les sommes géométriques. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1}$$

puisque la série est convergente. Or

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4\,n+1} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, t^{4\,n}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\left(-t^4\right)^{N+1}}{1+t^4}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} + \underbrace{(-1)^N \int_0^1 \frac{t^{4\,N+1}}{1+t^4}\, \mathrm{d}t}_{=R_N}$$

et l'inégalité

$$|R_N| \leq \int_0^1 t^{4\,N+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\,N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

permet, en passant à la limite, de conclure la démonstration.

Ne passez pas à côté des démonstrations élémentaires ! La somme géométrique se retrouve très souvent ! Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{N} q^n + \frac{q^{N+1}}{1-q}}$$

3.3 Développement en séries entières

3.3.1 Généralités

Définition 3.5

Soit f une fonction définie sur D et $z_0 \in \overset{\circ}{D}$. On dit que f est *développable en série entière* (DSE) au voisinage de z_0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n\, z^n$ vérifiant :

1. $R_a = \text{Rayon}\left(\sum a_n\, z^n\right) > 0$;
2. $\exists R \in]0, R_a[,\ B(z_0, R) \subset \overset{\circ}{D}$ et

$$\forall z \in BO(z_0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

Exemple 3.11

$f\ :\ z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est défini sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et est DSE au voisinage de 0. En fait, f est DSE au voisinage de tout point de D.

Proposition 3.2

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et S_a sa fonction somme. S_a est DSE au voisinage de tout point $z_0 \in BO(0, R_a)$.

Remarque 3.11

Dans ce cas, le rayon de convergence R_a du DSE en z_0 vérifie $R \geq R_a - |z_0|$ mais l'inégalité peut-être stricte.

Remarque 3.12

f est DSE au voisinage de z_0 si et seulement si $z \mapsto f(z_0+z)$ est DSE au voisinage de 0, c'est pourquoi on se restreindra à ces DSE.

Propriété 3.4 – Conséquences

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et de fonction somme S_a.

1. *Principe des zéros isolés.* S'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in BO(0, R_a)^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ S_a(z_p) = 0 \text{ et } (z_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ a un point d'accumulation dans } BO(0, R_a)$$

   alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et S_a est la fonction nulle.

2. *Unicité du DSE.* S'il existe une série entière $\sum b_n\, z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

   alors $b_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.12

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas DSE au voisinage de 0.

3.3.2 Cas réel – série de Taylor

Dans le reste de cette partie, on considère des séries et des fonctions de la variable réelle x.

Remarque importante 3.13

Soit $f : D \to \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière au voisinage de 0 avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors :

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

2. En particulier, les coefficients du développement en série entière sont uniques.
3. Si f est paire alors les coefficients d'ordre impair sont tous nuls et si f est impaire alors les coefficients d'ordre pair sont tous nuls.

Exemple 3.13

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 : on sait que $\dfrac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$ pour $-1 < X < 1$ et, en posant $X = x^2$, il vient :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n}$$

pour $-1 < x < 1$.

Propriété 3.5 – Condition pour que f soit DSE

Pour que f soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut et il suffit que :

1. f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $]-R_0, R_0[$, avec $R_0 > 0$;
2. sa **série de Taylor**

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

   ait un rayon de convergence $R_1 > 0$;
3. la somme de cette série soit égale à f sur un intervalle de la forme $]-R_2, R_2[$.

Propriété 3.6 – Développement en série entière usuel

Les DSE suivants sont à connaître par cœur *avec* le rayon de convergence.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ pour } z \in BO(0,1), \quad (R=1)$$

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n \text{ pour } z \in BO(0,1), \quad (R=1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour } x \in]-1,1], \quad (R=1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1} x^{2\,n+1} \text{ pour } x \in]-1,1], \quad (R=1)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2\,n}}{(2\,n)!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n \text{ pour } x \in \begin{cases}]-1,1[, \quad (R=1) & \text{si } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}, \quad (R=+\infty) & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Remarque importante 3.14

Si on veut développer en série entière une fonction f de la variable complexe au voisinage de z_0, on se ramène à une fonction de la variable réelle, en posant pour z au voisinage de z_0 et x au voisinage de 0

$$g(x) = f(z_0 + x(z - z_0))$$

3.3.3 Autres développements en séries entières

Remarque importante 3.15

Pour les DSE, il y a trois domaines importants : le domaine de définition de f, celui de sa série de Taylor et celui où les quantités coïncident :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la série de Taylor converge sur $]-1,1[$ et ils coïncident sur $]-1,1[$;
2. $f : x \mapsto \arctan \dfrac{1}{1+x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la série de Taylor converge sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et ils

coïncident sur $]-1,\sqrt{2}[$;

3. $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$, la série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ et ils coïncident sur $\{0\}$.

Remarque 3.16

On peut déduire des DSE usuels les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$\arcsin,\ \arccos,\ x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})...$$

Exemple 3.14 – Fonction absolument monotone

La fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration

On remarquera que, pour $0 < x < \pi/2$ toutes les dérivées de tan sont ≥ 0 (on dit que la fonction est *absolument monotone*)...

Théorème 3.11 – Développement en série entière des fonctions rationnelles

Soit F une fonction rationnelle à coefficients complexes n'ayant pas le pôle 0, alors F est développable en série entière au voisinage de 0, si $\Lambda = \{\text{pôles de } F\}$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de F en 0 est :

$$\boxed{R = \min_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|}$$

De plus, F coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $BO(0, R)$.

Démonstration

1. L'existence vient de la décomposition en éléments simples de F.
2. Le rayon vient du fait que

$$|F(t\,\lambda)| \xrightarrow[t \to 1^-]{} +\infty.$$

Exemple 3.15 – Utilisation de l'unicité du développement

On peut souvent s'appuyer sur un théorème d'existence *et d'unicité* d'une solution à un problème de Cauchy (voir le théorème 3.12, page ci-contre), pour trouver un développement en série entière d'une fonction donnée. Le schéma de la recherche est le suivant :

1. On cherche une équation différentielle si possible linéaire, si possible à coefficients polynomiaux que satisfait f.
2. (Analyse) On suppose que cette équation différentielle possède une solution développable en série entière, on la cherche

des dérivées de f en 0).

donc, ce qui nous donne une relation de récurrence sur les coefficients (les valeurs initiales sont données par les valeurs des dérivées de f en 0).

3. (Synthèse) On prend la série entière trouvée, on montre que son rayon de convergence est non nul. Soit S_a sa somme.
4. S_a et f vérifient la même équation différentielle et les mêmes conditions initiales, elles coïncident donc au voisinage de 0. On a (si on a su calculer a_n) même trouvé le développement de Taylor de f.

Théorème 3.12 – de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y^{(p)} + a_1(x)\, y^{(p-1)} + \cdots + a_p(x)\, y = b(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(p-1)}(x_0) = y_{p-1} \end{cases},$$

où les fonctions a_k et b, sont définies, continues sur un intervalle I contenant x_0, alors il existe une unique *fonction φ définie sur I de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, qui vérifie à la fois l'équation différentielle et les conditions initiales imposées.*

Démonstration

Voir le cours sur les équations différentielles.

Exemple 3.16 – Utilisation du théorème de Cauchy Lipschitz linéaire

Exemple simple

On peut retrouver le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide de cette méthode.

Exemple plus compliqué

Il arrive parfois que l'on ne sache pas résoudre l'équation récurrente trouvée, on peut cependant souvent en déduire que la fonction est développable en série entière. Ainsi :

$$x \mapsto \sqrt{1+2\,x+3\,x^2},\ \text{est développable au voisinage de } 0.$$

On peut même calculer son rayon de convergence : $R = 1/\sqrt{3}$.

Remarque 3.17

La méthode *a priori* d'écriture d'une équation récurrente vérifiée par la suite des coefficients de la série entière cherchée se généralise facilement aux équations fonctionnelles.

Exemple 3.17 – Utilisation d'une équation fonctionnelle

Soit $S_a(z)$ la somme d'une série entière $\sum a_n\,z^n$ de rayon de convergence $R_a \neq 0$, telle que $a_0 \neq 0$, alors la fonction :

$$z \mapsto \frac{1}{S_a(z)} \text{ est développable en série entière en } 0.$$

Démonstration

On résout l'équation fonctionnelle $S_a(z)\, g(z) = 1$...

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Soit la fonction :

$$f\ :\ x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(a) Calculer son développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

(b) Comparer au développement obtenu en effectuant le produit de $x \mapsto \arcsin(x)$ et de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$.

(c) Retrouver le résultat ci-dessus par des moyens directs.

3.3.2 Développer en série entière :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \alpha \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \tag{3.14}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5\,x + 6) \tag{3.15}$$

$$f(x) = e^{-x}\ \sin x \tag{3.16}$$

$$f(x) = (\arcsin(x))^2 \tag{3.17}$$

$$f(x) = \sin(\alpha\ \arcsin(x)) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.18}$$

$$f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^m \qquad m \in \mathbb{R}_+ \tag{3.19}$$

3.3.3 Montrer que la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sinh(x)} \text{ est développable en série entière en 0.}$$

Préciser son rayon de convergence.

3.3.4 Montrer que pour $|u|$ suffisamment petit,

$$f\ :\ u \mapsto \frac{e^{u\,x} - e^u}{e^u - 1}$$

est développable en série entière et que les coefficients du développement sont des fonctions polynomiales en x : $Q_n(x)\,n!$.
Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$Q_n(p) = 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$$

3.3.5 Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n,\ \text{de rayon de convergence } R_a \neq 0$$

Montrer que l'équation différentielle

$$y' + f(x)\,y = 0$$

a toutes ses solutions développables en série entière.

3.3.6 Trouver f $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de zéro sous forme d'une intégrale telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = (n!)^2$.

3.3.7 Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière de rayon infini telle que :

$$\forall x > 0,\ f(x) > g(x)$$

3.3.8 Si $n \geq 1$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = 1$.

(a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} B_{n-i}$$

(b) Montrer que

$$\sum \frac{B_n}{n!}\, z^n$$

a un rayon de convergence infini et que, si $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum \frac{B_n}{n!}\, z^n = \exp\left(e^z - 1\right)$$

(c) Montrer :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$$

3.3.9 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel q vérifiant $|q| < 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1 - q\,x)\, f(q\,x)$$

Montrer que f se développe en une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

3.4 Sommation de séries entières

Remarque 3.18

Naturellement, il n'est pas possible de sommer toutes les séries entières, seules quelques-unes sont accessibles.

Exemple 3.18 – Méthodes de sommation des séries entières

Reconnaître des développements connus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1},\ R=1$$

Coefficients polynomiaux

On fait apparaître les développements des $(1-z)^{-p}$ en décomposant la fonction polynomiale P (où $a_n = P(n)$ dans la base $(x \mapsto 1, x \mapsto x+1, x \mapsto (x+1)\,(x+2), \ldots, x \mapsto (x+1)\,\cdots\,(x+p))$ où p est le degré de P.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 3\,i\,n + 2)\,z^n,\ R=1$$

Coefficients fonctions rationnelles en n

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,(2\,n+1)},\ R = 1$$

Exponentielles modifiées

Sous la forme $\sum (F(n)/n!) z^n$, où F est une fonction rationnelle à pôles simples, entiers, strictement négatifs : on comble les trous au dénominateur pour se ramener à une forme en factorielle en $(n+p)!$; puis, on décompose le numérateur obtenu (fonction polynomiale) dans la base $(x \mapsto 1, x \mapsto x+p, x \mapsto (x+p)\,(x+p-1), \ldots, x \mapsto (x+p)\,\cdots\,(x+p-q+1))$ où q est le degré du numérateur.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{(n+2)\,(n+4)}\,\frac{z^n}{n!},\ R = +\infty$$

Séries entières à trous réguliers

Soit une série de la forme $\sum a_{k\,n+p}\, z^{k\,n+p}$, où l'on connaît la somme $f(z)$ de $\sum a_n\, z^n$: on comble les trous en faisant intervenir les $f(\omega^q\, z)$, où ω est une racine k-ième primitive de l'unité.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n+2)!},\ R = +\infty$$

Utilisation d'une équation différentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n,\ \text{où } a_0 = 1 \text{ et } \forall n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2\,n+k)}{n+1},\ k \in \mathbb{R}^*,\ R = \frac{1}{2}$$

Démonstration où l'on reconnaît des développements connus

1. Si $x \in]0,1[$, on pose $x = t^2$, où $t \in]0,1[$, et on calcule la dérivée de $t \mapsto t\,S(t^2)$, où $S(x)$ désigne la somme à calculer. Le code `Wxmaxima` 3.1, de la présente page nous donne alors :

$$t\,S(t^2) = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{t+1}{1-t}\right)\ \text{ d'où } \forall x \in]0,1[,\ S(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\ \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

2. Si $x \in]-1,0[$, on pose $x = -t^2$, où $t \in]0,1[$, et on calcule la dérivée de $t \mapsto t\,S(-t^2)$. Le même code nous donne :

$$t\,S(-t^2) = \arctan(t) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\ \arctan\left(\sqrt{-x}\right)$$

Session `Wxmaxima` 3.1 – Somme de série entière : développements connus

(%i1) `assume(t>0,t<1);`

(%o1) $[t > 0, t < 1]$

(%i2) `sum(t^(2*n+1)/(2*n+1),n,0,inf);`

(%o2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2\,n+1}}{2\,n+1}$

(%i3) `diff(%,t);`

(%o3) $$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2\,n}$$

(%i4) `%,simpsum;`

(%o4) $$\frac{1}{1-t^2}$$

(%i5) `partfrac(%,t);`

(%o5) $$\frac{1}{2\,(t+1)}-\frac{1}{2\,(t-1)}$$

(%i6) `sum((-1)^n*t^(2*n+1)/(2*n+1),n,0,inf);`

(%o6) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,t^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

(%i7) `diff(%,t);`

(%o7) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,t^{2\,n}$$

(%i8) `%,simpsum;`

(%o8) $$\frac{1}{t^2+1}$$

(%i10)
```
assume(x>0)$
taylor(1/(2*sqrt(x))*log((1+sqrt(x))/(1-sqrt(x))),x,0,5);
```

(%o10)/T/ $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}+\frac{x^4}{9}+\frac{x^5}{11}+\ \ldots$

```
(%i13) kill(x)$
       assume(x<0)$
       taylor(atan(sqrt(-x))/sqrt(-x),x,0,5);
```

(%o13)/T/ $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}+\frac{x^4}{9}+\frac{x^5}{11}+\ \ldots$

Démonstration où les coefficients sont polynomiaux

Tout simplement car on sait calculer les sommes du type :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)\,\cdots\,(n+1)\,z^n,\ \text{pour } [z|<1$$

Les calculs sont détaillés dans le code `Wxmaxima` 3.2, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.2 – Somme de série entière : coefficients polynomiaux

```
(%i1) assume(abs(z)<1);
```

(%o1) $[|z|<1]$

```
(%i2) P(n) := n^2-3*%i*n+2;
```

(%o2) $\mathrm{P}(n) := n^2-3\,i\,n+2$

(%i3) `ratsimp(P(n)-(n+1)*(n+2));`

(%o3) $(-3\,i-3)\;n$

(%i4) `ratsimp(%+(3+3*%i)*(n+1));`

(%o4) $3\,i+3$

(%i5) `sum((n+1)*(n+2)*z^n,n,0,inf);`

(%o5) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\;(n+2)\;z^n$$

(%i6) `integrate(%,z);`

(%o6) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\;z^{n+1}$$

(%i7) `integrate(%,z);`

(%o7) $$\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+2}$$

(%i8) `%,simpsum;`

(%o8) $$\frac{z^2}{1-z}$$

(%i9) `a:diff(%,z,2);`

(%o9) $$\frac{2\,z^2}{(1-z)^3}+\frac{4\,z}{(1-z)^2}+\frac{2}{1-z}$$

```
(%i10) b:diff(ev(integrate(sum((n+1)*z^n,n,0,inf),z),simpsum),z);
```

(%o10) $\dfrac{z}{(1-z)^2}+\dfrac{1}{1-z}$

```
(%i11) c:sum(z^n,n,0,inf),simpsum;
```

(%o11) $\dfrac{1}{1-z}$

```
(%i12) partfrac(a-(3+3*%i)*b+(3+3*%i)*c,z);
```

(%o12) $\dfrac{-3\,i-3}{z-1}+\dfrac{-3\,i-3}{(z-1)^2}-\dfrac{2}{(z-1)^3}$

```
(%i13) taylor(%,z,0,5);
```

(%o13)/T/ $2+(-3\,i+3)\;z+(-6\,i+6)\;z^2+(-9\,i+11)\;z^3+(-12\,i+18)\;z^4+(-15\,i+27)\;z^5+\;\ldots$

```
(%i14) trunc(sum(P(n)*z^n,n,0,5));
```

(%o14) $2+(3-3\,i)\;z+(6-6\,i)\;z^2+(11-9\,i)\;z^3+(18-12\,i)\;z^4+(27-15\,i)\;z^5+\;\ldots$

Démonstration où les coefficients sont des fonctions rationnelles

On écrit, pour $x\in]-1,+1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\,(2\,n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2\,n+1}$$

Le dernier terme a été calculé dans le premier cas (voir le code `Wxmaxima` 3.1, page 232). Le reste du calcul est résumé dans le code `Wxmaxima` 3.3, page ci-contre.

Session `Wxmaxima` 3.3 – Somme de série entière : coefficients rationnels

```
(%i1) partfrac(1/(n*(2*n+1)),n);
```

(%o1) $\frac{1}{n} - \frac{2}{2\,n+1}$

```
(%i2) assume(abs(x)<1);
```

(%o2) $[|x| < 1]$

```
(%i3) sum(x^n/n,n,1,inf);
```

(%o3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

```
(%i4) diff(%,x),simpsum;
```

(%o4) $\frac{1}{1-x}$

```
(%i5) integrate(%,x);
```

(%o5) $-\log(1-x)$

Démonstration où on a des exponentielles modifiées

Il suffit de remarquer que, si $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+p)!} = \frac{1}{z^p}\left(e^z - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{z^k}{k!}\right) \quad \text{si } z \in \mathbb{C}^*$$

Les calculs sont détaillés dans le code `Wxmaxima` 3.4, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.4 – Somme de série entière : exponentielles modifiées

(%i1) `sum(x^n/n!,n,0,inf);`

(%o1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(%i2) `%,simpsum;`

(%o2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(%i4)
```
P(n) := (n+%i)*(n+3)*(n+1)$
ratsimp(P(n)-(n+4)*(n+3)*(n+2));
```

(%o4) $$(i-5)\,n^2+(4\,i-23)\,n+3\,i-24$$

(%i5) `ratsimp(%-(%i-5)*(n+4)*(n+3));`

(%o5) $$(12-3\,i)\,n-9\,i+36$$

(%i6) `ratsimp(%-(12-3*%i)*(n+4));`

(%o6) $$3\,i-12$$

(%i7)
```
f(z) := (1/z)*(%e^z-1)+(%i-5)/z^2*(%e^z-1-z)
+(12-3*%i)/z^3*(%e^z-1-z-z^2/2)+
(3*%i-24)/z^4*(%e^z-1-z-z^2/2-z^3/6);
```

(%o7) $$\mathrm{f}(z) := \frac{1}{z}\left(e^z-1\right)+\frac{i-5}{z^2}\left(e^z-1-z\right)+\frac{12-3\,i}{z^3}\left(e^z-1-z+\frac{-z^2}{2}\right)+\frac{3\,i-12}{z^4}\left(e^z-1-z+\frac{-z^2}{2}+\frac{-z^3}{6}\right)$$

```
(%i8) ratsimp(f(z));
```

(%o8) $$\frac{\left(2\,z^3+(2\,i-10)\;z^2+(24-6\,i)\;z+6\,i-24\right)\,e^z+(i-2)\;z^2-6\,i+24}{2\,z^4}$$

```
(%i9) taylor(%,z,0,5);
```

(%o9)/T/ $$\frac{i}{8}+\frac{(i+1)\;z}{15}+\frac{(i+2)\;z^2}{48}+\frac{(i+3)\;z^3}{210}+\frac{(i+4)\;z^4}{1152}+\frac{(i+5)\;z^5}{7560}+\;\ldots$$

```
(%i10) trunc(sum((n+%i)/((n+2)*(n+4))*z^n/n!,n,0,5));
```

(%o10) $$\frac{i}{8}+\frac{(i+1)\;z}{15}+\frac{(i+2)\;z^2}{48}+\frac{(i+3)\;z^3}{210}+\frac{(i+4)\;z^4}{1152}+\frac{(i+5)\;z^5}{7560}+\;\ldots$$

Remarque 3.19

`Wxmaxima` ne sait pas sommer la série entière de l'exponentielle. On peut lui apprendre, mais cela fait intervenir des fonctions bizarres (voir le code `Wxmaxima` 3.5, de la présente page).

Session `Wxmaxima` 3.5 – La librairie `simplify_sum`

```
(%i1) load(simplify_sum)$
(%i2) simplify_sum(sum(x^n/n!,n,0,inf));
```

(%o2) $$e^x$$

```
(%i3) simplify_sum(sum(x^(n+1)/(n+1)!,n,0,inf));
```

(%o3) $\sqrt{\pi}\,\mathrm{bessel\_i}\left(\frac{1}{2},\frac{x}{2}\right)\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$

Démonstration où on a des séries entières à trous réguliers

Dans l'exemple donné, on pose :

$$\omega = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{5}\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
e^{z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}\\
e^{\omega\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!}+\omega\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!}+\omega^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!}+\omega^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!}+\omega^{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}\\
e^{\omega^{2}\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!}+\omega^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!}+\omega^{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!}+\omega\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!}+\omega^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}\\
e^{\omega^{3}\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!}+\omega^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!}+\omega\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!}+\omega^{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!}+\omega^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}\\
e^{\omega^{4}\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!}+\omega^{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!}+\omega^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!}+\omega^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!}+\omega\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}
\end{aligned}$$

Finalement, pour $z \neq 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n+2)!} = \frac{1}{5\,z^2}\,\left(e^z + \omega^3\,e^{\omega\,z} + \omega\,e^{\omega^2\,z} + \omega^4\,e^{\omega^3\,z} + \omega^2\,e^{\omega^4\,z}\right)$$

Vérifions le calcul avec le code **Wxmaxima** 3.6, de la présente page

Session **Wxmaxima** 3.6 – Somme de série entière : séries à trous réguliers

```
(%i1) omega : exp(2*%i*%pi/5);
```

(%o1) $e^{\frac{2\,i\,\pi}{5}}$

```
(%i2) f(z) := 1/(5*z^2)*(%e^z+omega^3*%e^(omega*z)+
          omega*%e^(omega^2*z)+omega^4*%e^(omega^3*z)+
          omega^2*%e^(omega^4*z));
```

(%o2) $\mathrm{f}\,(z) := \frac{1}{5\,z^2}\,\left(e^z + \omega^3\,e^{\omega\,z} + \omega\,e^{\omega^2\,z} + \omega^4\,e^{\omega^3\,z} + \omega^2\,e^{\omega^4\,z}\right)$

```
(%i3) taylor(f(z),z,0,20);
```

(%o3)/T/ $\frac{1}{2} + \frac{z^5}{5040} + \frac{z^{10}}{479001600} + \frac{z^{15}}{355687428096000} + \frac{z^{20}}{1124000727777607680000} + \ldots$

```
(%i4) trunc(sum(z^(5*n)/(5*n+2)!,n,0,4));
```

(%o4) $\frac{1}{2} + \frac{z^5}{5040} + \frac{z^{10}}{479001600} + \frac{z^{15}}{355687428096000} + \frac{z^{20}}{1124000727777607680000} + \ldots$

Démonstration où l'on résout une équation différentielle

On va utiliser que si

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n, \text{ avec } R_a \neq 0$$

alors

$$S_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n, \text{ avec } R = R_a$$

L'équation donnée nous donne, d'une part que le rayon est 1/2 (critère de d'Alembert) et d'autre part la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} = 2\, n\, a_n + k\, a_n$$

Si l'on multiplie la relation par x^n (où $|x| < 1/2$) et que l'on somme de 0 à $+\infty$, on obtient :

$$S_a'(x) = 2\, x\, S_a'(x) + k\, S_a(x)$$

La fonction cherchée est donc *la* solution du problème de Cauchy :

$$y' - \frac{k}{1 - 2\, x}\, y = 0 \text{ et } y(0) = 1.$$

La résolution est alors facile, les calculs sont présentés dans le code `Wxmaxima` 3.7, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.7 – Somme de série entière : résolution d'une équation différentielle

```
(%i1) assume(abs(x)<1/2);
```

(%o1) $[|x| < \frac{1}{2}]$

(%i2) `eq : 'diff(y,x)-k/(1-2*x)*y=0;`

(%o2) $$\frac{d}{d\,x}\,y-\frac{k\,y}{1-2\,x}=0$$

(%i3) `ode2(eq,y,x);`

(%o3) $$y=\%c\,e^{-\frac{k\,\log(2\,x-1)}{2}}$$

(%i4) `ic1(%,y=1,x=0);`

(%o4) $$y=e^{\frac{\log(-1)\,k}{2}-\frac{k\,\log(2\,x-1)}{2}}$$

(%i5) `ratsimp(%);`

(%o5) $$y=e^{\frac{\log(-1)\,k}{2}-\frac{k\,\log(2\,x-1)}{2}}$$

(%i6) `logcontract(rhs(%));`

(%o6) $$e^{-\frac{k\,\log(1-2\,x)}{2}}$$

(%i7) `radcan(%);`

(%o7) $$\frac{1}{(1-2\,x)^{\frac{k}{2}}}$$

Remarque 3.20

La vérification est pénible (voir code `Wxmaxima` 3.8, page suivante).

Session Wxmaxima 3.8 – Vérification pénible

```
(%i8) taylor(%,x,0,5);
```

(%o8)/T/ $$1+k\,x+\frac{\left(k^2+2\,k\right)\,x^2}{2}+\frac{\left(k^3+6\,k^2+8\,k\right)\,x^3}{6}+\frac{\left(k^4+12\,k^3+44\,k^2+48\,k\right)\,x^4}{24}+\frac{\left(k^5+20\,k^4+140\,k^3+400\,k^2+384\,k\right)\,x^5}{120}+\ldots$$

```
(%i9) load(solve_rec);
```

(%o9) /usr/share/maxima/5.35.1/share/solve_rec/solve_rec.mac

```
(%i10) solve_rec((n+1)*a[n+1]=(2*n+k)*a[n],a[n],a[0]=1);
```

(%o10) $$a_n=\frac{2^n\,\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\,n!}$$

```
(%i11) makefact(rhs(%));
```

(%o11) $$\frac{2^n\,\left(n+\frac{k}{2}-1\right)!}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!\,n!}$$

```
(%i12) trunc(sum(%*x^n,n,0,5));
```

(%o12) $$1+\frac{2\,\left(\frac{k}{2}\right)!\,x}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+\frac{2\,\left(\frac{k}{2}+1\right)!\,x^2}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+\frac{4\,\left(\frac{k}{2}+2\right)!\,x^3}{3\,\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+\frac{2\,\left(\frac{k}{2}+3\right)!\,x^4}{3\,\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+\frac{4\,\left(\frac{k}{2}+4\right)!\,x^5}{15\,\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+\ldots$$

```
(%i13) trunc(minfactorial(%));
```

(%o13) $$1+k\,x+\left(\frac{k}{2}+1\right)\,k\,x^2+\frac{2\,\left(\frac{k}{2}+1\right)\,\left(\frac{k}{2}+2\right)\,k\,x^3}{3}+\frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\,\left(\frac{k}{2}+2\right)\,\left(\frac{k}{2}+3\right)\,k\,x^4}{3}+$$

$$\frac{2\,\left(\frac{k}{2}+1\right)\,\left(\frac{k}{2}+2\right)\,\left(\frac{k}{2}+3\right)\,\left(\frac{k}{2}+4\right)\,k\,x^5}{15}+\ ...$$

```
(%i14) taylor(%,x,0,5);
```

(%o14)/T/ $$1 + k\,x + \frac{\left(k^2+2\,k\right)\,x^2}{2} + \frac{\left(k^3+6\,k^2+8\,k\right)\,x^3}{6} + \frac{\left(k^4+12\,k^3+44\,k^2+48\,k\right)\,x^4}{24} + \frac{\left(k^5+20\,k^4+140\,k^3+400\,k^2+384\,k\right)\,x^5}{120}+\ ...$$

Exemple 3.19 – Calculs de sommes de séries numériques

On peut donc maintenant préciser les cas de calculs de sommes de séries :

Utilisation d'une série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i\,n\,\theta}}{n},\ \theta\notin\mathbb{R}\setminus 2\,\pi.\mathbb{Z}$$

Séries dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right)$$

Fonctions rationnelles à pôles simples dont la différence deux à deux est toujours entière

Décomposer en éléments simples et calculer la somme partielle.

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n}$$

Démonstration où on utilise une série entière

La fonction

$$\theta \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\theta}}{n}$$

est définie, continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\,\pi.\mathbb{Z}$, elle est $2\,\pi$-périodique et, pour passer de θ à $-\theta$, il suffit de conjuguer. Nous allons donc supposer que $0 < \theta \leq \pi$. Pour calculer la somme, nous allons utiliser la continuité radiale sur la fonction (ici θ est fixé dans $]0,\pi[$) :

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\,\theta}}{n}\,x^n \quad R=1$$

Les calculs correspondant sont donnés dans le code `Wxmaxima` 3.9, de la présente page. Finalement :

$$\forall \theta \in \,]0,\pi[\,, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\theta}}{n} = -\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

Session `Wxmaxima` 3.9 – Somme de série : utilisation d'une série entière

```
(%i1) assume(abs(x)<1);
```

(%o1) $[|x|<1]$

```
(%i2) assume(theta>0,theta<=%pi);
```

(%o2) $[\theta > 0, \theta <= \pi]$

```
(%i3) sum(exp(%i*n*theta)*x^n/n,n,1,inf);
```

(%o3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\,n\,\theta}\,x^n}{n}$$

```
(%i4) diff(%,x);
```

(%o4) $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\,n\,\theta}\,x^{n-1}$$

```
(%i5) %,simpsum;
```

(%o5) $$\frac{e^{i\,\theta}}{1 - e^{i\,\theta}\,x}$$

```
(%i6) rectform(%);
```

(%o6) $$\frac{i\,\left(\sin(\theta)\,\left(1-\cos(\theta)\,x\right)+\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,x\right)}{\left(1-\cos(\theta)\,x\right)^2+\sin(\theta)^2\,x^2}+\frac{\cos(\theta)\,\left(1-\cos(\theta)\,x\right)-\sin(\theta)^2\,x}{\left(1-\cos(\theta)\,x\right)^2+\sin(\theta)^2\,x^2}$$

```
(%i7) map(trigsimp,%);
```

(%o7) $$\frac{i\sin(\theta)}{x^2-2\cos(\theta)\,x+1}-\frac{x-\cos(\theta)}{x^2-2\cos(\theta)\,x+1}$$

```
(%i8) realpart(%o6);
```

(%o8) $$\frac{\cos(\theta)\,\left(1-\cos(\theta)\,x\right)-\sin(\theta)^2\,x}{\left(1-\cos(\theta)\,x\right)^2+\sin(\theta)^2\,x^2}$$

```
(%i9) integrate(%,x,0,1);
```

$$(\%o9)\quad -\frac{\log\left(\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2-2\cos(\theta)+1\right)}{2}$$

```
(%i10) trigsimp(%o9);
```

$$(\%o10)\quad -\frac{\log(2-2\cos(\theta))}{2}$$

```
(%i11) imagpart(%o6);
```

$$(\%o11)\quad \frac{\sin(\theta)\ (1-\cos(\theta)\ x)+\cos(\theta)\ \sin(\theta)\ x}{(1-\cos(\theta)\ x)^2+\sin(\theta)^2\ x^2}$$

```
(%i12) integrate(%,x,0,1);
```

$$(\%o12)\quad \operatorname{atan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{\cos(\theta)-1}{\sin(\theta)}\right)$$

Démonstration où l'on utilise une série dérivée

Il suffit de remarquer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)=\arctan(2\,n+1)-\arctan(2\,n-1)$$

En effet, on a la relation bien connue :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a\,b \neq 1 \;\Rightarrow\; \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-a\,b}\right) + \begin{cases} 0 & \text{si } a\,b < 1 \\ \pi & \text{si } a\,b > 1 \text{ et } a > 0 \\ -\pi & \text{si } a\,b > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

On rappelle aussi que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc, ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\arctan(2\,n+1) - \arctan(2\,n-1) = \arctan\left(\frac{(2\,n+1)-(2\,n-1)}{1+(2\,n+1)\,(2\,n-1)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right)$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right) = \sum_{n=1}^{N} \big(\arctan(2\,n+1) - \arctan(2\,n-1)\big) = \arctan(2\,N+1) - \arctan(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Démonstration où on a une fonction rationnelle dont les pôles sont simples et écartés d'entiers

On décompose la fonction rationnelle de la manière suivante :

$$\forall n \geq 3,\ \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\,\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{n-2}$$

Donc, pour un $N \geq 3$, on obtient :

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}$$

Ceci donne après ré-indexation :

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n}$$

Le calcul est explicité dans le code **Wxmaxima** 3.10, de la présente page.

Session **Wxmaxima** 3.10 – Somme de série : fonction rationnelle à pôles simples de différences entières

```
(%i1) F(n) := (2*n-1)/(n^3-4*n);
```

(%o1) $F(n) := \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n}$

```
(%i2) partfrac(F(n),n);
```

(%o2) $-\frac{5}{8\,(n+2)} + \frac{1}{4\,n} + \frac{3}{8\,(n-2)}$

```
(%i3) load(simplify_sum);
```

(%o3) /usr/share/maxima/5.35.1/share/solve_rec/simplify_sum.mac

```
(%i4) sum(F(n),n,3,inf);
```

(%o4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n}$

```
(%i5) simplify_sum(%);
```

(%o5) $$\frac{89}{96}$$

```
(%i6) simplify_sum(sum(F(n),n,3,N));
```

(%o6) $$-\frac{(2-N)\,\left(89\,N^3+164\,N^2-N-36\right)}{96\,(N-1)\,N\,(N+1)\,(N+2)}$$

```
(%i7) partfrac(%,N);
```

(%o7) $$-\frac{5}{8\,(N+2)}-\frac{5}{8\,(N+1)}-\frac{3}{8\,N}-\frac{3}{8\,(N-1)}+\frac{89}{96}$$

Remarque 3.21

`Wxmaxima` semble savoir calculer ce genre de somme !

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,(x^2+1)\,y''-2\,(x^2+1)\,y'+2\,x\,y=0$$

trouver les solutions développables en série entière, rayon de convergence de la série obtenue, résoudre.

3.4.2 Résoudre :

$$4\,x\,y''+2\,y'+y=0$$

3.4.3 On désigne par $d_k(n)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui ont exactement k points fixes. Établir les formules :

$$\begin{aligned} d_k(n) &= \binom{n}{k} d_0(n-k) \\ n! &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_0(k) \end{aligned}$$

En utilisant la série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_0(n)}{n!} x^n$$

calculer explicitement $d_0(n)$ puis $d_k(n)$.

3.4.4 Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \tag{3.20}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{3\,n+2} \tag{3.21}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3\, x^n \tag{3.22}$$

$$\tag{3.23}$$

3.4.5 Convergence et somme de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{2\,n+1}} \tag{3.24}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+2} \tag{3.25}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+2)\,2^n} \tag{3.26}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2\,n}{n}} \tag{3.27}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\,\sin^2(n\,\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{3.28}$$

3.4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2\,v_n \end{cases}$$

Déterminer les rayons de convergence et les sommes de $\sum u_n\,x^n$ et $\sum v_n\,x^n$.

3.4.7 On admet que pour $z \in \mathbb{C}$, $\Phi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière et on pose

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

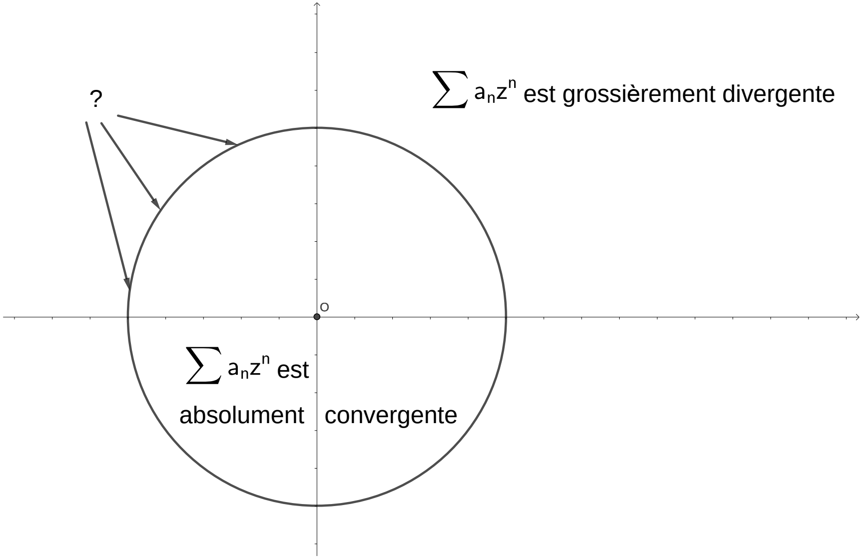
(a) Montrer que $B_n = 0$ si $n \geq 3$ et impair.

(b) Donner une relation de récurrence entre les B_n.

(c) Faire le développement en série entière de $\tanh(z)$.

(d) En déduire celui de $\tan(x)$.

Figure 3.1 – Conséquences du lemme d'Abel



Chapitre 4

Probabilités discrètes

4.1 Formalisation

4.1.1 Définitions

Définition 4.1 – Tribu

Soit Ω un ensemble (appelé *univers*), on appelle *tribu sur* Ω toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$

2. *stabilité par passage au complémentaire* [a]

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \Omega \setminus A \overset{\text{Not}}{=} \overline{A} \in \mathcal{A}$$

3. *stabilité par réunion au plus dénombrable* Soit I un ensemble au plus dénombrable, alors

$$\forall (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I,\ \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *événements*. L'ensemble Ω muni de la tribu $\mathcal{A}$ est dit *espace probabilisable* et est alors noté $(\Omega, \mathcal{A})$.

---

a. Attention à ne pas confondre les notations :
— en topologie, $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A
— en probabilités, $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A

Remarque importante 4.1

On en déduit facilement que

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. *stabilité par intersection au plus dénombrable* Soit I un ensemble au plus dénombrable, alors

$$\forall (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I,\ \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Définition 4.2 – Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, A et B deux événements de $\mathcal{A}$, on dit que

$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \overset{\text{Def}}{\iff} A \cap B = \emptyset$$

On écrit alors

$$\boxed{A \sqcup B \text{ pour signifier } A \cup B, \text{ lorsque } A \cap B = \emptyset}$$

Exemple 4.1 – Tribus

Soit Ω un ensemble non vide, on a alors deux tribus évidentes

1. $\{\emptyset, \Omega\}$ (sans intérêt réel)
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ (utilisée souvent lorsque Ω est au plus dénombrable)
3. lorsque Ω est infini, non dénombrable, cela peut devenir très compliqué (mais c'est hors-programme !)

Remarque 4.2

Si F est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors l'ensemble des tribus sur Ω contenant F est non vide et stable par intersection quelconque. On peut donc définir la *plus petite tribu contenant* F, on l'appelle *tribu engendrée par* F.

Définition 4.3 – Probalilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction

$$\mathbb{P} \ : \ \mathcal{A} \to [0,1]$$

qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. pour tout I ensemble au plus dénombrable, pour toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ d'*événements deux à deux incompatibles* [a]

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Un espace probabilisable muni d'une probabilité est dit *espace probabilisé* et est noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

---

a. On pourrait écrire

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i$$

Exemple 4.2

1. *Lancer de dé à six faces*

$$\Omega = [\![1,6]\!]\,,\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \text{ et } \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{6}$$

2. *Probabilité uniforme sur un ensemble fini* Soit Ω un ensemble fini non vide, la probabilité uniforme est définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

3. *Probabilité sur* $\mathbb{N}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Proposition 4.1 – Probabilité sur un ensemble au plus dénombrable

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in [0,1]^\Omega$ telle que

$$\boxed{\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1}$$

alors il existe une unique probabilité sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

elle est définie par

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \overset{Def}{=} \sum_{\omega \in A} p_\omega}$$

Exemple 4.3 – Premier succès

On joue à Pile ou Face avec une pièce éventuellement déséquilibrée qui a une probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur Pile. On arrête le jeu dès que l'on a obtenu Pile. Comment créer $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?

1. L'univers Ω est dénombrable, de la forme

$$\left\{P, FP, FFP, \ldots, \underbrace{F\cdots F}_{k\text{ fois}}P, \ldots\right\} \cup \left\{\underbrace{F\ldots}_{\text{infiniment}}\right\}$$

2. La tribu sur Ω est

$$\mathcal{P}(\Omega)$$

3. La probabilité sur $\mathcal{A}$ peut être définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(F^k P\right) = (1-p)^k\, p$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k\, p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{F\ldots}_{\text{infiniment}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Pour les ensembles infinis, non dénombrables, il est souvent plus délicat de montrer que l'on définit bien un probabilité, car il est souvent difficile de décrire *tous* les événements de la tribu concernée.

Exemple 4.4 – Jeu de Pile ou Face

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce éventuellement déséquilibrée qui a une probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur Pile. On s'intéresse dans le cas général à des événements plus compliqués, par exemple :

1. « on a obtenu un nombre infini de Pile »
2. « on a obtenu n Pile consécutifs » ($n \in \mathbb{N}$)
3. « on a obtenu en alternance Pile et Face »

   ou aussi
4. « on s'arrête dès que l'on obtient une séquence déterminée »
5. « à tout moment, on a obtenu plus de Pile que de Face »

Comment modéliser cette situation ?

1. L'univers Ω est de la forme
$$\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$$
2. La tribu sur Ω est engendrée par les
$$C_A = \{(\omega_p)_{p\in\mathbb{N}},\ (\omega_0, \ldots, \omega_n) \in A\} \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } A \in \mathcal{P}\left(\{P, F\}^n\right)$$
3. La probabilité sur cette tribu (lorsque $p = 1/2$) peut être définie sur les événements qui engendrent la tribu par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{P}\left(\{P, F\}^n\right),\ \mathbb{P}(C_A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{2^n}$$

L'existence et l'unicité de la probabilité sera *admise* !

(On pourra regarder l'exercice 4.2.5, page 272).

Remarque culturelle Sur $\mathbb{R}$ (par exemple), les seules probabilités que l'on peut construire sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont les probabilités « discrètes », c'est à dire qu'il existe une partie $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$, au plus dénombrable, telle que $\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_0}\right) = 0$.
Cela justifie a posteriori l'intérêt de la notion de tribu. Sur $\mathbb{R}$, on prend souvent la tribu engendrée par les segments $[a, b]$.

Exercice(s) 4.1

Tribus

4.1.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, on considère l'ensemble suivant

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R},\ A \text{ au plus dénombrable, ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Soit $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espace probabilisable, soit Ω_1 un ensemble quelconque et $f \in \mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$. Montrer que

$$\mathcal{A}_1 = \left\{f^{-1}(A_2),\ A_2 \in \mathcal{A}_2\right\} \text{ est une tribu sur } \Omega_1$$

4.1.3 Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espace probabilisable, soit Ω_2 un ensemble quelconque et $f \in \mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$. Montrer que

$$\mathcal{A}_2 = \left\{A_2 \subset \Omega_2,\ f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1\right\} \text{ est une tribu sur } \Omega_2$$

Probabilités

4.1.4 *Probabilité de Dirac* Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $a \in \Omega$, montrer que la fonction définie par

$$\delta_a \ : \begin{cases} \mathcal{A} \to [0,1] \\ A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est une probabilité sur $\mathcal{A}$.

4.1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\mathbb{P}'$ une probabilité définie sur $\mathcal{A}$ et telle que $\mathbb{P} \leq \mathbb{P}'$. Que dire de $\mathbb{P}'$?

4.1.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Plus généralement, si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont n événements, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - n + 1$$

4.1.7 On reprend l'exercice 4.1.2, page précédente et on suppose que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Et on définit sur $\mathcal{A}_1$ la fonction P par

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1,\ P(A_1) = \mathbb{P}\big(f(A_1)\big)$$

Donner une CNS pour que P soit une probabilité sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$?

4.1.8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de cette tribu. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

4.1.9 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une partie $B \subset \Omega$ est dite $\mathbb{P}$-négligeable si

$$\exists A \in \mathcal{A},\ B \subset A \text{ et } \mathbb{P}(A) = 0$$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties $\mathbb{P}$-négligeable de Ω.

(a) Montrer que

$$\mathcal{A}' = \{A \cup N,\ A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}\}$$

est une tribu sur Ω.

(b) Montrer que la fonction $\mathbb{P}'$ définie sur $\mathcal{A}'$ par

$$\forall A' \in \mathcal{A}',\ \mathbb{P}'(A') = \mathbb{P}(A) \text{ où } A' = A \cup N,\ A \in \mathcal{A} \text{ et } N \in \mathcal{N}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}')$.

Modélisation

4.1.10 Préciser les univers, les tribus et les probabilités appropriés aux expériences aléatoires suivantes. Puis, répondre aux questions posées.

(a) On tire p boules avec remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. Quelle est la probabilité que les p numéros tirés soient distincts ? Quelle est la probabilité qu'ils aient été tirés en ordre strictement croissant ? En ordre croissant au sens large ?

(b) On tire p boules successivement et sans remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. Quelle est la probabilité que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant ?

(c) On tire n boules simultanément dans un sac contenant r boules rouges et b boules bleues. Quelle est la probabilité que l'échantillon tiré contienne k boules rouges ?

(d) Deux joueurs A et B jouent avec une pièce non truquée. Le joueur A lance deux fois la pièce, B trois fois. Si un des deux joueurs a obtenu strictement plus de Faces que l'autre, il gagne. Sinon, ils rejouent. La partie se poursuit tant que l'un des deux joueurs n'a pas gagné. Quelle est la probabilité que A gagne ?

(e) Un joueur répète une expérience constituant à lancer deux dés non pipés. Il la répète tant qu'il n'a pas obtenu un des deux totaux 5 et 7. Quelle est la probabilité que 5 apparaisse avant 7 ?

(f) Soit $A_1, \ldots, A_n$, n points du cercle unité. Quelle est la probabilité pour que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de $A_1, \ldots, A_n$?

4.1.2 Propriétés diverses

Propriété 4.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a clairement

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

4. Plus généralement

$$\boxed{\forall (A,B)\in\mathcal{A}^2,\ \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 4.2 – Continuité croissante

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors

$$\boxed{\left[\forall n\in\mathbb{N},\ A_n\subset A_{n+1}\right]\ \Rightarrow\ \left[\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\uparrow\mathbb{P}(A_n)\right]}$$

Propriété 4.2 – σ-additivité

Sans la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$$

Proposition 4.3 – Continuité décroissante

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. Alors*

$$\boxed{\left[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supset A_{n+1}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\downarrow \mathbb{P}(A_n)\right]}$$

Définition 4.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Tout événement $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$ est dit *événement négligeable*
2. Tout événement $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\mathbb{P}(A) = 1$ est dit *événement presque sûr*
3. Toute propriété P définie sur Ω est dite *presque sûre* si

   $$\Delta = \{\omega \in \Omega,\ P(\omega) \text{ vraie}\} \text{ vérifie } \Delta \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{P}(\Delta) = 1$$

   on écrit alors

   $$\boxed{P \text{ est vraie} \quad \textbf{p.s.}}$$

Exemple 4.5 – Propriété presque sûre

Au jeu de Pile ou Face, avec une pièce équilibrée, on joue jusqu'à l'obtention d'un premier Pile, alors

« Le jeu s'arrête presque sûrement »

Si on note X le nombre de lancers qu'il faut faire pour obtenir un premier Pile, on a alors

$$X < +\infty \quad \textbf{p.s.}$$

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que

(a) si tous les A_n sont négligeables, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est négligeable}$$

(b) si tous les A_n sont presque sûrs, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est presque sûr}$$

(c) si tous les A_n vérifient $\mathbb{P}(A_n) \geq \alpha$ ($\alpha \in [0, 1]$), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \alpha$$

(d) *Borel-Cantelli* Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega,\ \{n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n\} \text{ est infini}\right\}\right) = 0$$

4.2.2 Répondre aux questions soulevées dans l'exemple 4.4, page 263.

4.2.3 *Formule du crible* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{\operatorname{card}(I)-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right)$$

Applications

(a) On tire au hasard une permutation de $\mathfrak{S}_n$, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas de point fixe (*dérangement*) ?

(b) *Collectionneur de coupons* On vend un produit accompagné d'un coupon pris au hasard parmi n, le collectionneur cherche à avoir tous les coupons au moins une fois. Calculer la probabilité qu'après p achats ($p \geq n$) il ait ses n coupons.

(c) n personnes ont chacune un T-shirt marqué à son nom, qui sont rangés dans un tiroir. Chaque personne prend au hasard un T-shirt. Quelle est la probabilité qu'aucune personne n'obtienne le T-shirt à son nom ?

(d) n couples s'assoient aléatoirement autour d'une table ronde (il y a donc $2\,n$ personnes autour de la table). Quelle est la probabilité qu'aucune personne n'ait son conjoint ou sa conjointe à côté d'elle ?

4.2.4 On munit $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les segments. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur cette tribu.

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ]-\infty, x] \in \mathcal{A}$$

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) \qquad (*)$$

(b) Montrer que F vérifie les propriétés suivantes :
— $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$
— $F(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$
— F est croissante sur $\mathbb{R}$
— F est continue à droite en tous points
— F admet une limite à gauche en tous points

(c) Montrer que, réciproquement, toute fonction F vérifiant les propriétés de la question précédente nous permet de définir une probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

4.2.5 Soit Ω un ensemble non vide. Un π-système est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection (finie). Une classe monotone est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω et :

P.1 *stable par différence* si A et B sont dans $\mathcal{C}$ avec $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{C}$

P.2 *stable par réunion dénombrable croissante* si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{C}$, alors
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

(a) Vérifier qu'une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si et seulement si c'est un π-système et une classe monotone.

(b) Vérifier également qu'une intersection quelconque de classes monotones est une classe monotone, ce qui permet de définir la classe monotone engendrée par une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit $\mathcal{I}$ un π-système. Soit $\mathcal{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{I}$.

(c) Soit

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{C},\ \forall I \in \mathcal{I}, B \cap I \in \mathcal{C}\}$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{I}$, donc $\mathcal{C}$.

(d) Montrer par un argument analogue que $\mathcal{C}$ est stable par intersection et conclure que $\mathcal{C}$ est une tribu, donc la tribu engendrée par $\mathcal{I}$.

(e) *Application* : Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{I}$ un π-système, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ deux probabilités définies sur des tribus contenant toutes deux $\mathcal{I}$. Démontrer que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ coïncident sur $\mathcal{I}$, elle coïncident sur la tribu engendrée par $\mathcal{I}$.

4.1.3 Conditionnement

Définition 4.5 – Conditionnement

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit A un événement de Ω (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$)) tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle sachant* A, la probabilité définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \boxed{\mathbb{P}_A(B) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{P}(B|A)}$$

Remarque importante 4.3

On a donc immédiatement

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}(A)}$$

ce qui nous autorisera à donner un sens à l'expression $\mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}(A)$ (valeur 0) même lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$. Il est en effet difficile parfois de prévoir *avant les calculs* si une probabilité est nulle ou non...
Ainsi, lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sont des événements, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} A_n\right)\ \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k\right)}$$

ceci permet donc de calculer par récurrence les probabilités des intersections d'événements...

Proposition 4.4 – Probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *des événements, on a alors*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_0) \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \middle| \bigcap_{j=0}^{k-1} A_j\right)}$$

Remarque importante 4.4

Cette formule permet de gérer les situations où on utilise un *arbre* de décision pour décrire la situation.

Exemple 4.6 – Probabilités composées

On distribue 3 cartes d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité que les niveaux des cartes obtenus soient consécutifs (le Roi est suivi de l'As qui est suivi du 2) ? On peut décrire la situation par l'arbre de la figure 4.1, page 352. Bien sûr, il est plus simple de dénombrer calmement en « Top-down ». Mais cette manière de calculer les probabilités est parfois utile.

Exemple 4.7 – Probabilités composées

Au jeu de Pile ou Face, avec $p \neq 0$, l'événement « il sort une infinité de Pile » est presque sûr.

Définition 4.6 – Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on appelle *système complet d'événements* toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que

1. les événements sont deux à deux incompatibles

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j\ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

2. ils recouvrent Ω

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Remarque 4.5

C'est donc une partition constituée d'événements, où on autorise de plus à certains événements d'être vides...

Théorème 4.1 – Probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit I un ensemble au plus dénombrable, soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, alors

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

Remarque importante 4.6

Ce théorème est à la base du calcul des probabilités dans les situations issues de la modélisation. Il est souvent *indispensable* de préciser un « bon » système complet d'événements adapté à la situation.

Proposition 4.5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit I un ensemble au plus dénombrable, soit $(A_i)_{i\in I}$, tels que

1. *négligeabilité des intersections*
$$\forall (i,j) \in I^2,\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$$
2. *réunion presque sûre*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

alors, on a encore

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple 4.8 – Probabilités totales

On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir un Pile). On s'arrête de jouer quand on obtient 3 Pile consécutifs, quelle est la probabilité que l'on s'arrête au n-ième coup ? En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
Modélisons :

1. On reprend la situation développée à l'exemple 4.4, page 263. On obtient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Considérons l'événement (c'est bien un élément de $\mathcal{A}$, car il dépend des n premiers lancers)
$$A_n = \text{« le jeu continue après le } n\text{-ième lancer »}$$
3. On a alors clairement
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(A_3) = 1 - p^3$$
4. Notons F_k le résultat du k-ième lancer, on a alors un système complet d'événements basé sur les derniers lancers FPP, FP, F ou B (autre), la formule des probabilités totales nous donne alors
$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = F)\right) \mathbb{P}\left((F_n = F)\right) + \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = P) \cap (F_{n-1} = F)\right) \mathbb{P}\left((F_n = P) \cap (F_{n-1} = F)\right) + \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = P) \cap (F_{n-1} = P) \cap (F_{n-2} = F)\right) \mathbb{P}\left((F_n = P) \cap (F_{n-1} = P) \cap (F_{n-2} = F)\right) + \mathbb{P}(A_n|B)\ \mathbb{P}(B)$$
5. Chaque probabilité conditionnelle se calcule facilement, et en anticipant sur la notion d'indépendance (prochain paragraphe), on obtient
$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p)\ \mathbb{P}(A_{n-1}) + p\,(1-p)\ \mathbb{P}(A_{n-2}) + p^2\,(1-p)\ \mathbb{P}(A_{n-3}) + 0$$
Donc, $u_n = \mathbb{P}(A_n)$ est solution de l'équation récurrente
$$u_1 = u_2 = 1,\ u_3 = 1 - p^3 \text{ et } \forall n \geq 4,\ u_n = (1-p)\,u_{n-1} + p\,(1-p)\,u_{n-2} + p^2\,(1-p)\,u_{n-3}$$

La valeur cherchée est

$$\mathbb{P}(A_{n-1}) - \mathbb{P}(A_n)$$

6. On a donc (le montrer) l'existence de 3 complexes λ, μ et ν tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n + \nu\,\gamma^n$$

où (α, β, γ) sont les racines complexes de $X^3 - (1-p)\,X^2 - p\,(1-p)\,X - p^2\,(1-p)$. Pour obtenir que le jeu s'arrête, il suffit de montrer que les racines de ce polynôme sont toutes de module < 1 (le montrer).

Proposition 4.6 – Formule de Bayes

Sous les mêmes hypothèses que pour les probabilités totales, où, de plus $\mathbb{P}(B) \neq 0$, *on a*

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

Exercice(s) 4.3

4.3.1 On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée. Le jeu s'arrête dès que sortent deux résultats consécutifs identiques. Le joueur gagne lorsque cela s'arrête sur 2 Pile et perd sinon.

(a) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a obtenu Face au premier lancer.

4.3.2 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges, on tire successivement *sans remise*. Soit $k \leq b + r$, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k-ième tirage ?

4.3.3 (a) Un ami a deux enfants dont une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

(b) Un autre ami a deux enfants, le plus jeune est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

(c) Plus généralement, pour un couple ayant n enfants dont les m premiers sont des filles, quelle est la probabilité que les $n - m$ suivants soient des filles ?

(d) Quelle est la probabilité pour un couple ayant n enfants dont au moins m garçons qu'il n'ait que des garçons ?

4.3.4 On a 10 boules (5 rouges et 5 blanches), on a deux urnes indiscernables dans lesquelles on répartit les 10 boules. On choisit une urne au hasard et on y tire une boule. Quelle répartition des boules doit-on faire pour maximiser la probabilité de tirer une boule rouge ?

4.3.5 Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement les boules deux par deux *sans remise*. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage on ait une boule blanche et une boule rouge ?

4.3.6 *Ruine du joueur* Un joueur joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée. Il possède une somme initiale de c euros. À chaque coup, s'il tire un Pile, il gagne 1 euro, s'il tire un Face il perd un euro. Calculer sa probabilité d'être ruiné.

4.3.7 S'il pleut, l'étudiant X a une probabilité $1/5$ d'être en retard en cours, s'il neige, cette probabilité devient $3/5$. Or il neige avec une probabilité $2/5$ et il pleut avec une probabilité $3/5$. Quelle est la probabilité que X soit en retard ?

4.3.8 *Urne de Pólya* On a une urne qui contient au départ b boules blanches et n boules noires. On tire une boule, puis on la remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage.

4.3.9 Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées ; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat ?

4.3.10 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on effectue des tirages *avec* remise. Quelle est la probabilité que sur n tirages consécutifs, il existe au moins un tirage numéroté k où l'on a tiré la boule numérotée k ?

4.3.11 Une usine possède 4 chaînes de production, les deux premières produisent des pièces défectueuses à raison de 1%, la troisième 2% et la quatrième 3%. On tire au hasard deux pièces provenant d'une même chaîne de production, elles sont toutes les deux défectueuses, calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'une des deux premières chaînes de production.

4.3.12 n convives se placent au hasard autour d'une table ronde, Alice et Bernard, deux des convives regardent le nombre minimum de personnes assises entre eux deux. Quelle est la probabilité que ce nombre vaille k ?

4.3.13 Un candidat à un jeu télévisé doit répondre à une question dont il connaît la réponse avec une probabilité p. S'il ignore la réponse il la choisit au hasard de façon équiprobable dans une liste de n suggestions. Sachant qu'il a bien répondu quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse.

4.3.14 Lors du dépouillement d'une élection le candidat N obtient r suffrages et le candidat R obtient r suffrages avec $n > r \geq 0$. Quelle est la probabilité $p(n, r)$ pour qu'au cours du dépouillement le candidat N ait toujours la majorité ?

4.3.15 *Urnes de Laplace* On considère $m+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_m$ et supposons que, pour chaque k, U_k contienne k boules bleues et $m-k$ boules rouges. On choisit de manière équiprobable l'une des urnes et on y effectue $n+1$ tirages avec remise.

(a) Sachant que les n premiers tirages ont donnés des boules bleues, quelle est la probabilité qu'il en soit de même du $(n+1)$-ème ?

(b) Déterminer la limite de la probabilité précédente quand $n \to \infty$.

4.3.16 $\Omega = (\mathbb{N}^*)^2$. Construire une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $(p, q) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(p,q)\}) = \frac{1}{2^{p+q}}$$

On tire au hasard un couple $(a, b) \in \Omega$. Exprimer sous forme de somme de série la probabilité pour que $\{a\}|\{b\}$.

4.3.17 On tire une entier naturel non nul pair : $2\,n$ avec la probabilité p_n $(n \geq 1)$. Puis l'on tire deux boules dans une urne contenant n boules blanches et n noires. Calculer, dans chaque cas :

$$p_n = \frac{1}{n\,(n+1)} \text{ puis } p_n = a\,p^n,\ (p \in]0,1[\text{ donné, } a > 0 \text{ à calculer})$$

(a) La probabilité d'avoir tiré dans une urne ne contenant que quatre boules sachant que les deux boules tirées ont la même couleur.

(b) La probabilité d'avoir tiré une boule blanche sachant que l'autre est noire.

4.3.18 Soit $a \in]0, 1[$. La probabilité qu'une famille ait k enfants est p_k avec

$$p_0 = p_1 \text{ et } p_k = \frac{1 - 2\,a}{2^{k-1}} \text{ pour } k \geq 2$$

On suppose que les garçons et les filles sont équiprobables.

(a) Calculer p_0 et p_1.

(b) Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux filles ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une famille ayant deux filles ait deux enfants seulement.

(d) Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles.

4.1.4 Indépendance

Définition 4.7 – Indépendance d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ deux événements, on dit que *A et B sont indépendants* s'ils vérifient :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)}$$

Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ une famille *au plus dénombrable* d'événements, on dit que ces événements sont *mutuellement indépendants* si

$$\boxed{\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)}$$

Remarque 4.7

Toute sous-famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque importante 4.8

Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux-à-deux. La réciproque est fausse !

Exemple 4.9 – Réciproque fausse

Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme. Prenons

$$A_i = \{(i, j) \in \Omega,\ i \text{ pair}\},\ A_2 = \{(i, j) \in \Omega,\ j \text{ pair}\} \text{ et } A_3 = \{(i, j) \in \Omega,\ i + j \text{ pair}\}$$

On a immédiatement

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

mais

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$$

Propriété 4.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ deux événements, alors

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ &\iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \text{ lorsque } \mathbb{P}(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Propriété 4.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ une famille au plus dénombrable d'événements, pour $I' \subset I$, on pose

$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } i \in I' \\ \overline{A_i} & \text{si } i \in I \setminus I' \end{cases}$$

on a alors

$$\Big[(A_i)_{i\in I} \text{ mutuellement indépendants}\Big] \iff \Big[(B_i)_{i\in I} \text{ mutuellement indépendants}\Big]$$

Proposition 4.7 – Borel-Cantelli (HP)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

1. *On a*

$$\Big[\sum \mathbb{P}(A_n) \textit{ converge}\Big] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)\right) = 0\right]$$

2. *Si, de plus, les événements sont* mutuellement indépendants, *on a*

$$\Big[\sum \mathbb{P}(A_n) \textit{ diverge}\Big] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)\right) = 1\right]$$

Remarque 4.9

Que représente cet ensemble

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)\ ?$$

Il représente l'événement constitué des $\omega \in \Omega$ qui vérifient

« l'ensemble des n tels que $\omega \in A_n$ est infini »

Exemple 4.10 – Borel-Cantelli

On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée ($p \in]0,1[$), on a le motif $X = PPPFPPPPF$, pour quelle(s) valeur(s) de p est-on presque sûr qu'il se produise au moins une fois ? une infinité de fois ?

Exercice(s) 4.4

4.4.1 Une population contient une proportion p de malades. Un test est positif avec une probabilité p_1 (proche de 1) si le patient est malade et avec une probabilité p_0 (proche de 0) si le patient est sain.

(a) Sachant que le test est positif, probabilité que le patient soit malade ?

(b) Si le test est positif on en effectue un autre « indépendant du premier ». Quelle est la probabilité que le patient soit malade sachant que le test est deux fois positif.

4.4.2 Un objet se trouve dans un meuble de n tiroirs avec la probabilité p. On fouille dans les $n-1$ premiers tiroirs et on ne le trouve pas. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le dernier tiroir ?

4.4.3 Soit p_1 et p_2 deux entiers naturels premiers tels que $p_1 < p_2$. $q \in [\![1, n]\!]$, on note pour $i \in \{1, 2\}$, E_i l'évènement : « q est divisible par p_i ». Montrer que s'il existe k et $k_1 \in \mathbb{N}$ tels que $n = k\, p_1\, p_2 + k_1\, p_1$ avec $k_1\, p_1 < p_2$ alors E_1 et E_2 sont indépendants.

4.4.4 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements d'un espace probabilisé soient indépendants est :

$$\mathbb{P}(A \cap B)\ \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\ \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

4.4.5 Les événements A_1, …, A_k sont mutuellement indépendants et de probabilités respectives p_1, …, p_k. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se produise est majorée par

$$\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} p_i}$$

4.4.6 On lance n pièces équilibrées. Pour $1 \leq k \leq n$, on note A_k l'événement : « le k-ième lancer tombe sur pile ». On note A_{n+1} l'événement : « le nombre total de piles est pair ». Montrer que n quelconques des événements A_k, $1 \leq k \leq n+1$ sont mutuellement indépendants alors que A_1, …, A_{n+1} ne sont pas mutuellement indépendants.

4.4.7 *Loi* ζ Soit $s \in]1, +\infty[$.

(a) Montrer qu'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s\, \zeta(s)}$$

(b) Si $d \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}_s\left(d.\mathbb{N}^*\right)$$

(c) Soit $(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, à quelle(s) condition(s) les événements $d_1.\mathbb{N}^*$ et $d_2.\mathbb{N}^*$ sont-ils indépendants ?

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_N = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{P},\ [p|n] \ \Rightarrow\ [p > N]\}$$

Montrer que

$$\prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \left(\sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^s}\right)$$

(e) Une partie A de $\mathbb{N}^*$ a une *densité naturelle* si

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{card}\,(A \cap [\![1, n]\!]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(A)$$

Montrer qu'en ce cas, on a

$$\mathbb{P}_s(A) \xrightarrow[s\to 1^+]{} d(A)$$

4.2 Variables aléatoires

4.2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 4.8 – Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, soit X une application de Ω dans E.

1. On dit que X est une *variable aléatoire* si
$$\forall B \in \mathcal{T},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$
2. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* si
   (a) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable
   (b) Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a
$$\{x\} \in \mathcal{T} \text{ et } X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$$
3. On dit que X est une *variable aléatoire discrète réelle* si $E = \mathbb{R}$.

Remarque 4.10

Au programme, E n'est pas muni d'une tribu. Comme on ne considère que les variables aléatoires discrètes, il suffit de prendre la tribu
$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$$

Définition 4.9 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, alors la fonction

$$\mathbb{P}_X \ : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to [0,1] \\ B \mapsto \sum_{x\in B} \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{x\}\right)\right) \end{cases}$$

est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée *loi de* X.

Remarque 4.11

Dans le cas général, on définit la loi de X par

$$\forall B \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{B\}\right)\right)$$

Notation 4.1

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans E qui définissent la même loi, on écrit

$$X \sim Y$$

2. Si $\mathcal{L}$ est une loi sur E (une probabilité donc) et si X est une variable aléatoire sur E telle que $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}$, on écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{L} \text{ (au programme, il y a } X \sim \mathcal{L})$$

Notation 4.2

Soit X une variable aléatoire de Ω dans E et $x \in E$, on note

les événements

$$(X = x) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}(\{x\})$$

et

$$\forall B \in \mathcal{T},\ (X \in B) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}(B)$$

Et lorsque la variable aléatoire est réelle :

les événements

$$(X \leq x) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}(]-\infty, x])$$

et, de même

$$(X < x),\ (X \geq x) \text{ et } (X > x)$$

Exemple 4.11

Revenons au jeu du Pile ou Face. On lance une infinité de fois la pièce (déséquilibrée ou non) et on s'intéresse aux résultats obtenus sur les n premiers lancers, on a donc l'application

$$X\ :\begin{cases} \{P, F\}^{\mathbb{N}} \to \{P, F\}^n \\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Il est naturel de vouloir que cette fonction soit une variable aléatoire. Pour cela, il faut que la tribu sur $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, satisfasse

$$\forall (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{P, F\}^n,\ X^{-1}\big(\{(x_0, \ldots, x_{n-1})\}\big) \in \mathcal{A}$$

on retrouve la tribu engendrée par les « cylindres ».

Définition 4.10 – Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle de Ω dans $\mathbb{R}$, on appelle *fonction de répartition de X* et on note

$$F_X \ : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, 1] \\ x \mapsto \mathbb{P}\left((X \leq x)\right) \end{cases}$$

(Voir l'exercice 4.2.4, page 271).

Remarque 4.12

Lorsque la variable aléatoire est discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, la fonction de répartition est une fonction en escalier.

Remarque importante 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, alors, pour $A \in \mathcal{A}$, on appelle *indicatrice de* A et on note

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

on a alors

$$\mathbb{1}_A \text{ variable aléatoire}$$

Remarque importante 4.14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, alors

$$\boxed{\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements}}$$

Proposition 4.8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, soit f une application de E dans un ensemble F, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire de Ω dans F. On la note souvent et abusivement $f(X)$.

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Déterminer les lois des variables aléatoires suivantes :

(a) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne $\sigma(1)$.

(b) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne $\sigma(A)$, où A est une partie fixée de $[\![1, n]\!]$.

(c) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne le nombre de points fixes de σ.

(d) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne la longueur de l'orbite de 1 par σ, soit le cardinal de $\{\sigma^k(1),\ k \in \mathbb{N}\}$.

4.5.2 Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X, calculer les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes (en fonction de F_X) :

(a) X^2

(b) $|X|$

(c) $\arctan(X)$

(d) $\min(X, 1)$

4.5.3 Trouver un espace probabilisé Ω et X une variable aléatoire définie dessus telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_X(\{n\}) = \frac{1}{n\,(n+1)}$$

4.2.2 n-uplets de variables aléatoires

Définition 4.11 – Vecteurs aléatoires

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs respectives dans des ensembles E_k ($X_k(\Omega) \subset E_k$), alors l'application

$$\underline{X} : \begin{cases} \Omega \to E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega \mapsto \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) \end{cases}$$

est une variable aléatoire discrète. La loi de $\underline{X}$ est dite *loi conjointe de* $(X_1, \ldots, X_n)$. Les lois des X_k sont dites *lois marginales de* $(X_1, \ldots, X_n)$. Lorsque tous les E_k sont égaux à (ou inclus dans) $\mathbb{R}$, on parle de *vecteur aléatoire*.

Notation 4.3

Comme les variables aléatoires sont toutes discrètes, connaître la loi conjointe revient à connaître les probabilités des événements

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)$$

cet événement se note aussi

$$\big(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \ldots,\ X_n = x_n\big)$$

Remarque importante 4.15

Il est facile, connaissant la loi conjointe de déterminer les lois marginales, en effet

$$\forall x_k \in E_k,\ \mathbb{P}_{X_k}(\{x_k\}) = \mathbb{P}_{\underline{X}}\left(E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times \{x_k\} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n\right)$$

En revanche, connaissant les lois marginales, il est en général impossible de connaître les lois conjointes !

Exemple 4.12

Soit $\underline{X}_1$ de loi sur $\{0,1\}^2$ définie par

$$\mathbb{P}_{\underline{X}_1}(\{(i,j)\}) = \begin{cases} p^2 & \text{si } (i,j) = (1,1) \\ p\,(1-p) & \text{si } i \neq j \\ (1-p)^2 & \text{si } (i,j) = (0,0) \end{cases}$$

a pour lois marginales identiques

$$\mathbb{P}_1(\{1\}) = p \text{ et } \mathbb{P}_1(\{0\}) = 1-p$$

mais $\underline{X}_2$ de loi sur $\{0,1\}^2$ définie par

$$\mathbb{P}_{\underline{X}_2}(\{(i,j)\}) = \begin{cases} p & \text{si } (i,j) = (1,1) \\ 0 & \text{si } i \neq j \\ 1-p & \text{si } (i,j) = (0,0) \end{cases}$$

a les mêmes lois marginales...

Proposition 4.9

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ *des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs respectives dans des ensembles* E_k $(X_k(\Omega) \subset E_k)$*, soit* f *une application de* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *dans un ensemble* F*, alors*

$$f(X_1, \dots, X_n) \text{ est une variable aléatoire discrète}$$

Exemple 4.13

Il est facile de trouver certaines lois de fonctions de variables aléatoires :

1. *lois marginales d'un couple*

$$\boxed{\forall x_1 \in E_1,\ \mathbb{P}\left((X_1 = x_1)\right) = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_1,\ X_2 = x_2)\right)}$$

2. *somme de deux variables aléatoires réelles discrètes*

$$\boxed{\mathbb{P}\left((X_1 + X_2 = z)\right) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_1,\ X_2 = z - x_1)\right)}$$

Exercice(s) 4.6

4.6.1 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée de k jetons. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu. Quelle est la loi de X ?

4.6.2 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire 2 jetons successivement sans remise. On note X et Y les tirages successifs. Lois de (X, Y) ? de $Y - X$? de $|Y - X|$?

4.6.3 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue $n + 1$ tirages avec remise. On note X_i le résultat du i-ème tirage. On note T le plus petit i tel que $X_i \leq X_{i+1}$. Déterminer

$$\mathbb{P}\left((T > k)\right), \text{ pour } k \leq n$$

En déduire la loi de T.

4.6.4 Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On tire une boule et on rajoute une boule de la même couleur. On note T le numéro du tirage où l'on obtient une première fois une boule blanche. Dans quel ensemble T prend-elle ses valeurs ? Calculer $\mathbb{P}\left((T = 1)\right)$, $\mathbb{P}\left((T = +\infty)\right)$; donner la loi de T.

4.6.5 Deux joueurs jouent à pile ou face. Le premier est déclaré gagnant si et seulement si le motif PPF apparaît avant le motif FPP ; le deuxième gagne si FPP apparaît avant PPF. Pour chaque entier $n \geq 2$, on note A_n l'évènement :

$$\text{« } (X_k, X_{k+1}, X_{k+2}) \notin \{(P, P, F), (F, P, P)\}, \ \forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ »}$$

A_1 est un évènement certain ; et, pour $n \geq 1$, on note PF_n l'évènement :

$$PF_n = \text{« } (X_n = P, X_{n+1} = F) \text{ »} \cap A_n$$

On définit également les trois autres évènements PP_n, FF_n, FP_n

(a) Calculer PP_n.

(b) Montrer que l'un des deux gagne presque sûrement.

(c) Montrer que le deuxième joueur a plus de chance de gagner que le premier.

4.6.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la relation $<$ par :

$$X < Y \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left((Y < X)\right) \leq \frac{1}{2}$$

Est-ce une relation d'équivalence ?

4.6.7 Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega) \text{ si } X(\omega) \text{ est pair},\ Y(\omega) = \frac{1 - X(\omega)}{2} \text{ sinon}$$

(a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$, montrer que Y est une variable aléatoire et calculer

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}\left((Y = k)\right)$$

(b) Calculer la loi de Y lorsque la loi de X est déterminée par ($p \in]0, 1[$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left((X = n)\right) = (1 - p)^n\, p$$

4.2.3 Indépendance de variables aléatoires

Définition 4.12 – Loi conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectives dans E et F, soit $x \in E$ tel que $\mathbb{P}\left((X = x)\right) \neq 0$, on appelle alors *loi conditionnelle de Y sachant $X = x$* la probabilité définie sur $Y(\Omega)$ par

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{X=x}\left((Y = y)\right) = \frac{\mathbb{P}\left((X = x,\ Y = y)\right)}{\mathbb{P}\left((X = x)\right)} \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{P}\left((Y = y | X = x)\right)$$

Remarque 4.16

On peut bien sûr conditionner par n'importe quel événement du type $(X \in A)$ du moment que $\mathbb{P}\left((X \in A)\right) \neq 0$.

Définition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_1 et E_2. On dit que *X_1 et X_2 sont indépendantes* si

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \mathbb{P}\left((X_1 = x_1,\ X_2 = x_2)\right) = \mathbb{P}\left((X_1 = x_1)\right)\ \mathbb{P}\left((X_2 = x_2)\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_k $(k \in [\![1, n]\!])$,

on dit qu'elles sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \mathbb{P}\left((X_1 = x_1,\ \dots,\ X_n = x_n)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left((X_k = x_k)\right)$$

3. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_k $(k \in I)$, on dit qu'elles sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ (X_i)_{i\in J}$$

est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Remarque 4.17

Si X et Y sont indépendantes, alors Y et Y sachant $X = x$ ont même loi !

Notation 4.4

Lorsqu'on aura à faire à une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes *et de même loi*, on dira que la famille est **i.i.d.**

Proposition 4.10

Soit I un ensemble au plus dénombrable, soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles respectifs E_k $(k \in I)$, alors les variables aléatoires sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ \forall (A_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathscr{P}(E_i),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}\left((X_i \in A_i)\right)$$

Remarque 4.18

Dans le cas général des variables aléatoires, il faudrait prendre les A_i dans les tribus $\mathcal{T}_i$ de E_i...

Remarque 4.19

Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires (discrètes) indépendantes est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Remarque importante 4.20

Lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on peut construire la loi conjointe à partir des lois marginales.

Exemple 4.14

Soit $(A_i)_{i\in I}$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a équivalence entre dire

1. les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants
2. les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_i})_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes

Proposition 4.11 – Lemme des coalitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. *Soit X_1 à valeurs dans E_1 et X_2 à valeurs dans E_2, deux variables aléatoires indépendantes discrètes sur Ω, soit $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ deux applications quelconques, alors*

$$f_1 \circ X_1 \text{ et } f_2 \circ X_2 \text{ sont indépendantes}$$

2. *Soit X_1, …, X_n des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans des ensembles E_k ($k \in [\![1, n]\!]$),* indépendantes, *soit $m \in [\![1, n-1]\!]$ et $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to F_1$ et $g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to F_2$ deux applications, alors*

$$f \circ (X_1, \ldots, X_m) \text{ et } g \circ (X_{m+1}, \ldots, X_n) \text{ sont indépendantes}$$

Dans la pratique, les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisé... On peut cependant se ramener au cas énoncé ci-dessus grâce au théorème admis suivant :

Théorème 4.2

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, soit $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$ une famille de probabilités telles que

$$\forall i\in I,\ (E_i,\mathcal{P}(E_i),\mathbb{P}_i)\ \textit{est un espace probabilisé}$$

alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et une famille $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_i $(i\in I)$ tels que

1. *$(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes*
2. *et*

$$\forall i\in I,\ \mathbb{P}_{X_i}=\mathbb{P}_i$$

Remarque 4.21

Si, au départ, on a des variables aléatoires discrètes Y_i indépendantes définies sur des espaces probabilisés $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,\mathbb{P}_{\Omega_i})$, le théorème permet de se ramener au cas où tous les Ω_i sont égaux, car on prend $X_i\sim Y_i$.

Exemple 4.15

On a modélisé un jeu infini de Pile ou Face avec indépendance des lancers. Chaque lancer k $(\in\mathbb{N}^*)$ peut-être modélisé par

$$\Omega_k=\{P,F\},\ \mathcal{A}_k=\mathcal{P}(\Omega_k),\ \mathbb{P}_{\Omega_k}(\{P\})=p,\ \mathbb{P}_{\Omega_k}(\{F\})=1-p$$

L'espace probabilisé du théorème est celui que nous avons déjà utilisé...

Exercice(s) 4.7

4.7.1 Déterminer pour quels $a > 0$ il existe deux variables aléatoires discrètes X et Y et un espace probabilisé sur lequel elles sont définies telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2},\ \mathbb{P}\left((X = i,\ Y = j)\right) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

4.7.2 Soit X une variable aléatoire discrète, montrer que sont équivalentes les propriétés suivantes

(a) X est presque sûrement constante

(b) X est indépendante d'elle même

(c) X est indépendante de toute autre variable aléatoire

4.7.3 On munit $\Omega = \mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire

$$X_i\ :\ \omega \mapsto \omega(i)$$

On définit aussi la variable aléatoire Y_i par

$$Y_1 = 1,\ \text{et } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > \max(X_1, \dots, X_{i-1}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Donner la loi des X_i

(b) Donner la loi conditionnelle de Y_i sachant $X_i = k$

(c) Donner la loi des Y_i

4.7.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U_0, …, U_n des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit uniformément une urne au hasard et on y pioche une boule. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne et Y celle donnant le numéro de la boule.

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(b) X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Calculer $\mathbb{P}\big((X = Y)\big)$.

4.7.5 Un étang contient n brochets et $N - n$ carpes $1 \leq n < N$. Un pêcheur prend un poisson puis le rejette à l'eau. Donner la loi de la variable aléatoire T_i égale au nombre de prises nécessaires à l'obtention de i brochets.

4.7.6 Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $Y = (X_Z, X_{3-Z})$?

4.7.7 Trois joueurs lancent chacun un dé à 6 faces. On note pour chacun d'eux T_i $(1 \leq i \leq 3)$ le temps d'attente d'un 6. Donner la loi du vecteur (T_1, T_2, T_3) et déterminer $\mathbb{P}\big((T_1 < T_2 < T_3)\big)$.

4.7.8 Soit X_1, …, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes de fonctions de répartitions F_{X_1}, …, F_{X_n}. Calculer la fonction de répartition des variables aléatoires suivantes

(a) $Y_1 = \max(X_1, \ldots, X_n)$

(b) $Y_2 = \min(X_1, \ldots, X_n)$

(c) Z_k où Z_k désigne la k-ième valeur la plus petite quand on ordonne les X_1, …, X_n. Ainsi $Z_1 = Y_n$ et $Z_n = Y_1$.

4.7.9 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On procède à une suite de tirage indépendants avec remise et on note T_n le premier tirage où l'on obtient un numéro déjà tiré auparavant.

(a) Quelles valeurs peut prendre T_n ?

(b) Déterminer la loi de T_n (On pourra s'intéresser à l'évènement $T_n > k$).

(c) Étudier la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions de répartition des variables aléatoires $T_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

4.7.10 On considère une suite de pièces qui sortent d'une chaîne de fabrication. Une pièce donnée a une probabilité p d'être défectueuse et p' d'être contrôlée. On note D_i *resp.* C_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si la pièce numéro i est défectueuse *resp.* contrôlée. Toutes ces variables sont mutuellement indépendantes. On note T le numéro de la première pièce à être défectueuse et contrôlée.

(a) Déterminer la loi de T.

(b) On note N le nombre de pièces défectueuses d'indice inférieur ou égal à T. Déterminer la loi conjointe du couple (T, N) puis les lois de T et de N. Sont-elles indépendantes ?

4.7.11 Soit $s \in]1, +\infty[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\zeta(s)$ [a]. Calculer

$$\mathbb{P}\left((X \wedge Y = 1)\right)$$

4.7.12 Soit $s \in]1, +\infty[$, X une variable aléatoire suivant une loi $\zeta(s)$, soit Y une variable aléatoire suivant, conditionnellement à $(X = x)$ une loi uniforme sur $[\![1, x]\!]$. Calculer la loi de Y/X.

---

a. Voir l'exercice 4.4.7, page 287.

4.2.4 Espérance

Définition 4.14 – Espérance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète *réelle* définie sur Ω

1. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on appelle *espérance de* X et on note

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{Not}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}\left((X = x)\right) \in [0, +\infty]}$$

2. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on dit que X est *d'espérance finie* si la famille

$$\left(x \, \mathbb{P}\left((X = x)\right)\right)_{x \in X(\Omega)} \text{ est sommable}$$

on écrit alors

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{Not}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}\left((X = x)\right) \in \mathbb{R}}$$

Une variable aléatoire réelle X d'espérance finie est dite *centrée* si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Remarque 4.22

Si X est une variable aléatoire réelle d'espérance finie, alors

$$X - \mathbb{E}(X) \text{ est une variable aléatoire centrée}$$

Remarque importante 4.23

Il arrive souvent que la variable aléatoire X soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (par exemple, le temps d'attente d'un motif au jeu de Pile ou Face), en ce cas

1. Si $\mathbb{P}\left((X = +\infty)\right) = 0$, on convient que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{+\infty\}} x\, \mathbb{P}\left((X = x)\right)$$

2. Si $\mathbb{P}\left((X = +\infty)\right) \neq 0$, on convient que $\mathbb{E}(X) = +\infty$

   En probabilités, on pose souvent « $0 \times \infty = 0$ ».

Exemple 4.16

On lance n fois un dé à six faces (les lancers étant supposés indépendants), on note S la somme ses résultats trouvés, alors $\mathbb{E}(S)$ représente la moyenne des sommes possibles.

Théorème 4.3 – Formule de transfert

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors

1. *$f \circ X$ est d'espérance finie si, et seulement si*

$$\big(f(x)\ \mathbb{P}\left((X = x)\right)\big)_{x \in X(\Omega)} \text{ est sommable}$$

2. *et en ce cas, on a*

$$\boxed{\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\ \mathbb{P}\left((X = x)\right)}$$

Propriété 4.5

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé Ω

1. Si Y est d'espérance finie et

$$|X| \leq Y \quad \textbf{p.s.} \text{ alors } X \text{ est d'espérance finie}$$

2. L'espérance est une fonction *croissante* : si X et Y sont d'espérances finies telles que

$$X \leq Y \quad \textbf{p.s.} \text{ alors } \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

En particulier, si $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(Y) \geq 0$.

3. L'espérance est *linéaire* : sous les hypothèses précédentes, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\lambda.X + \mu.Y \text{ est d'espérance finie, et } \mathbb{E}(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda\ \mathbb{E}(X) + \mu\ \mathbb{E}(Y)$$

Remarque 4.24

L'utilité de ce théorème est de montrer qu'il est inutile de calculer la loi de $f \circ X$ pour en évaluer son espérance.

Proposition 4.12

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, *alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n\ \mathbb{P}\left((X = n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left((X > n)\right)$$

Théorème 4.4 – Inégalité de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* X *une variable aléatoire discrète réelle définie sur* Ω, *d'espérance finie, alors*

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left((|X| \geq a)\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}}$$

Remarque 4.25

On a utilisé la remarque évidente (mais intéressante) suivante :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right)}$$

Proposition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit X et Y des variables aléatoires discrètes réelles définies sur Ω, d'espérances finies, indépendantes *alors*

1. *$X\,Y$ est d'espérance finie*
2. *et*

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

la réciproque étant fausse.

Exercice(s) 4.8

4.8.1 Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left((X \geq n)\right) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left((X \geq n)\right)$$

4.8.2 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles de même loi et d'espérances finies, montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, la réciproque étant fausse.

4.8.3 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles, montrer que

$$\Big[X \sim Y\Big] \iff \Big[\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+),\ \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \mathbb{E}\big(f(Y)\big)\Big]$$

4.8.4 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant leurs valeurs dans $[0, 1]$. On suppose que, pour tout entier naturel n, on a $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$. En commençant par le cas où X et Y prennent un nombre fini de valeurs, démontrer que X et Y ont même loi.

4.8.5 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles, montrer que

$$\Big[X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\Big] \iff \left[\forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)^2, \begin{cases} \mathbb{E}\big(f(X)\, g(Y)\big) = \\ \mathbb{E}\big(f(X)\big)\ \mathbb{E}\big(g(Y)\big) \end{cases}\right]$$

4.8.6 Calculer l'espérance du temps d'attente (première réalisation de l'événement)

Au jeu de Pile ou Face (pièce déséquilibrée, avec $p \in]0, 1[$)

(a) de la première réalisation du motif « PF »

(b) de la première réalisation d'avoir autant de Pile que de Face

(c) de la première réalisation d'un motif fini quelconque.

4.8.7 Un joueur lance un dé non pipé. Ensuite, trois dés non pipés sont lancés simultanément. Le joueur perd sa mise m si le numéro qu'il a obtenu n'apparaît pas. Sinon, il récupère sa mise, doublée si son numéro est apparu une fois, triplée s'il est apparu deux fois, quadruplée s'il est apparu trois fois. Quelle est son espérance de gain ?

4.8.8 On se donne m et n dans $\mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble des applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ de l'équiprobabilité. Soit $X(f)$ le cardinal de l'image de f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Application : un ascenseur amène m personnes à n étages. Espérance du nombre d'arrêts ?

4.8.9 On munit $\mathbb{N}$ de la distribution de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On écrit

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n\, 2^n$$

le développement en base 2 de X ; les X_n valent 0 ou 1 et sont donc des variables de Bernoulli. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de $(X_n = 1)$.

4.8.10 Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme. Trouver l'espérance du nombre de X_k où $1 \leq k \leq n$ et X_k est la variable aléatoire donnant le nombre de k-cycles.

4.8.11 Soit E un ensemble fini de cardinal n, $X_1, \ldots, X_{n+1}$ des variables indépendantes à valeurs dans E, T la variable aléatoire définie par :

$$T = \min\{j \in [\![2, n+1]\!],\ X_j \in \{X_1, \ldots, X_{j-1}\}\}$$

(a) Montrer

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!}$$

(b) Montrer

$$\mathbb{E}(T) = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

où la fonction f_n est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}\,t}$$

(c) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4.8.12 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$$

4.8.13 Le jeu du "not seven" se joue de la manière suivante. On lance deux dés ; si le total diffère de 7, le gain du joueur s'accroît dudit total. Sinon il perd tout et le jeu s'arrête. Le joueur peut décider d'arrêter la partie quand il veut et empoche alors son gain.

(a) Quelle est la loi de la somme S des deux faces des dés lors d'un lancer aléatoire. Calculer son espérance.

(b) Définir la stratégie de quelqu'un qui connaît le résultat du prochain lancer et calculer l'espérance de son gain.

(c) On suppose que les n premiers coups n'ont pas amené la somme 7 et on note G_n le gain obtenu. Soit X le gain du joueur au coup suivant donc, si S_{n+1} est le total amené au $n+1$-e coup :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } S_{n+1} = 7 \\ G_n + S_{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(X|G_n = i)$. En déduire une stratégie d'arrêt en fonction du score obtenu.

4.8.14 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}+$ et $r > 0$. On suppose que X^r est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{P}\left((X > x)\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$

4.8.15 Si X admet une espérance montrer que

$$n\ \mathbb{P}\left((X > n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4.8.16 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies telles que

Hyp. 1 $\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Hyp. 2 Il existe deux fonctions croissantes f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une variable aléatoire discrète Z telles que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.

Soit $\widehat{Z}$ une variable aléatoire de même loi que Z et indépendante de Z.

(a) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\left(f(\widehat{Z}) - f(Z)\right)\left(g(\widehat{Z}) - g(Z)\right)\right)$$

(b) Montrer que X ou Y est presque sûrement constante.

4.2.5 Lois usuelles

Loi de Bernoulli

Définition 4.15 – Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli intervient pour modéliser une expérience aléatoire à deux résultats (représentés par 0 et 1). La probabilité d'obtenir 1 est notée $p \in [0,1]$. Si X est une `v.a.r.` de loi de Bernoulli de paramètre p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(p), \text{ et on a } \mathbb{P}\left((X=1)\right) = p \text{ et } \mathbb{P}\left((X=0)\right) = 1-p$$

Propriété 4.6

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Exemple 4.17

On jette deux dés à 6 faces, et on s'intéresse au fait que la somme des résultats soit divisible par 3. On a donc X qui vaut 1 si la somme est divisible par 3 et 0 sinon. Clairement, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Mais que vaut p ?

Exercice(s) 4.9

4.9.1 Dans un gratte-ciel, un ascenseur n'assure que la descente. Il part du sommet à l'étage n, et à chaque fermeture de porte, il descend pour s'arrêter aléatoirement à un étage strictement inférieur jusqu'à ce qu'il parvienne au rez-de-chaussée (étage 0). On suppose qu'à chaque fois le numéro de l'étage d'arrêt suit une loi uniforme sur l'ensemble des numéros des étages encore accessibles.

On note $A(p,n)$ la probabilité que lors de sa descente l'ascenseur s'arrête à l'étage p avec $0 \leq p < n$.

(a) Calculer $A(0,n)$, $A(n-1,n)$, $A(n-2,n)$.

(b) Démontrer la relation $\mathcal{R}(n)$:

$$\forall p \in [\![0, n-2]\!]\,,\ A(p,n) = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{j=p+1}^{n-1} A(p,j)\right)$$

(c) En utilisant $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{R}(n-1)$, montrer que

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!]\,,\ A(p,n) = A(p,n-1)$$

(d) Déterminer $A(p,n)$ pour $0 \leq p < n$.

(e) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts lors de la descente. Déterminer l'espérance et la variance de X.

4.9.2 L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1, si k est fixe par la permutation et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de la permutation. Exprimer X en fonction des X_k et en déduire l'espérance de X.

4.9.3 On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages successifs sans remise. On appelle *record* tout tirage amenant un nombre plus grand que tous les tirages précédents. Déterminer l'espérance du nombre de records.

4.9.4 On considère un ascenseur qui dessert k étages d'un immeuble, avec n personnes qui rentrent dans cet ascenseur au rez-de-chaussée. On suppose que chacune de ces personnes, indépendamment les unes des autres, a une probabilité uniforme $\frac{1}{k}$ de sortir à l'un ou l'autre des étages. Et on suppose enfin que personne ne rentre dans l'ascenseur au-dessus du rez-de-chaussée.

(a) Soit j un entier entre 1 et k. Quelle est la probabilité que l'ascenseur s'arrête à l'étage j ?

(b) Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ?

4.9.5 On lance N fois une pièce donnant « Pile » avec la probabilité $p \in]0,1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants. Pour tout entier naturel $2 \leq k \leq N$, on dit que le k-ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $k-1$-ième lancer. Pour tout entier naturel $2 \leq n \leq N$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

(a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

(b) Faire de même avec X_3.

(c) On suppose $p \neq q$.

i. Déterminer $\mathbb{P}\big((X_n = 0)\big)$, $\mathbb{P}\big((X_n = 1)\big)$ et $\mathbb{P}\big((X_n = n - 1)\big)$.

ii. Déterminer la loi de X_4 et son espérance.

iii. Pour tout $2 \leq k \leq N$ on note Y_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième lancer est un changement et 0 sinon. Exprimer X_n à l'aide des Z_k et en déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

(d) On suppose $p = q$.

i. Calculer les lois de X_2, X_3 et X_4.

ii. Calculer la loi de X_n.

iii. Pourquoi ce résultat n'est-il plus valable dans le cas $p \neq q$?

4.9.6 Un chat se fait chaque jour les griffes, soit sur le canapé soit sur les rideaux. Il ne se fait jamais les griffes deux jours de suite sur le canapé ; s'il se fait les griffes sur les rideaux un jour donné, alors il choisira le lendemain le canapé avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Le premier jour, il attaque les rideaux. On définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de jours où le chat a fait ses griffes sur les rideaux parmi les n premiers jours. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

4.9.7 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω où $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ $(0 < p < 1)$. Montrer que Ω n'est pas dénombrable.

Loi binomiale

Définition 4.16 – Loi binomiale

La loi binomiale intervient pour modéliser une expérience aléatoire de n tirages *avec remises* dans une population où p représente la probabilité de succès. Si X est une `v.a.r.` de loi binomiale de paramètres n et p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(n,p), \text{ et on a } \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}\left((X=k)\right) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Remarque 4.26

Les tirages sont supposés *indépendants* les uns des autres. La formule donnée représente donc la probabilité d'avoir k succès (p^k) parmi n tirages. On a donc $n-k$ échecs $((1-p)^{n-k})$. La combinaison $\binom{n}{k}$ correspond au choix des k tirages parmi n pour lesquels nous aurons un succès.

Proposition 4.14

Soit $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p, alors

$$X_1+\cdots+X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$$

Et si $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\sim\mathcal{B}(m,p)$ sont indépendantes, alors $X+Y\sim\mathcal{B}(n+m,p)$.

Propriété 4.7

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X)=n\,p$$

Exemple 4.18

1. La cas académique est le suivant : on a une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On tire *avec remise* n fois une boule et il y a succès du tirage lorsque cette boule tirée est blanche.
2. On jette n fois un dé à 6 faces et on s'intéresse au nombre de fois où l'on tire un 5. C'est une loi binomiale de paramètres n et $1/6$.

Proposition 4.15 – Comportement asymptotique discret

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales* $\mathcal{B}(n, p_n)$*, où* $n\,p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$*, alors*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left((X_n = k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice(s) 4.10

4.10.1 On transmet un message en binaire sous forme d'une suite de n bits. Lors de la transmission, chaque bit a une probabilité p d'être modifié. Quelle est la probabilité que le message reçu comporte au plus une erreur ?

4.10.2 On lance 5 dés. À l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas amené l'as. On procède alors à un second jet et ainsi de suite avec les dés restant jusqu'à obtenir 5 as.

(a) Quelle est la probabilité que l'on obtienne les 5 as en un lancer ? En au plus deux lancers ? En au plus n lancers ?

(b) En déduire la probabilité que l'on obtienne les 5 as en exactement n lancers.

(c) Quelle est la probabilité que le nombre total de dés jetés soit égal à n ?

4.10.3 Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.

4.10.4 Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

i. Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

ii. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche.

i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?

ii. Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

iii. Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\mathbb{P}\big((Y_n = k)\big) = p\ \mathbb{P}\big((Y_{n-1} = k-1)\big) + q\ \mathbb{P}\big((Y_{n-2} = k-1)\big)$$

iv. En déduire que pour $n \geq 3$:

$$\mathbb{E}(Y_n) = p\ \mathbb{E}(Y_{n-1}) + q\ \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

v. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

4.10.5 Un vendeur de cycles vend des pédales de bicyclette qu'il se procure chez son grossiste par boîtes de deux. Toutes les boîtes sont supposées identiques et dans chaque boîte il y a une pédale droite et une pédale gauche. Lorsqu'un client demande le remplacement de ses deux pédales de vélo, le commerçant lui vend une boîte complète et lui fait payer la somme de $2\,r$ euros. Lorsqu'un client demande le remplacement d'une seule des deux pédales, le commerçant décide de ne pas obliger le client à acheter une boîte complète, mais majore le prix de la pédale dans une proportion α, c'est-à-dire lui fait payer la somme de $(1+\alpha)\,r$ euros. Pour la simplicité de l'étude, on suppose que chaque client demande le remplacement d'une seule pédale et que l'on sait que le nombre de pédales à poser séparément pendant la durée de l'étude vaut $2\,n$, où n est un entier naturel non nul. On suppose que le vendeur ne dispose au départ que de boîtes complètes et en nombre suffisant. Soit p la probabilité qu'un client demande une pédale droite et X le nombre de boîtes nécessaires à la satisfaction de ces $2\,n$ demandes (le commerçant n'ouvre une boîte que s'il ne dispose pas d'une boîte entamée lui permettant d'accéder à la demande du client).

(a) Quelle est la loi de X ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par X.

(b) Montrer que X peut s'écrire $a + |Y - b|$ où a et b sont des constantes qu'on précisera et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

(c) Donner l'expression l'espérance de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n et p.

Dans la suite, on prendra la valeur $p = \frac{1}{2}$.

(d) Simplifier l'expression de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Quelle majoration α le marchand de cycles doit-il appliquer au prix de chaque pédale vendue séparément pour qu'en moyenne le prix de vente des $2\,n$ pédales vendues séparément soit égal au prix de vente des X boîtes nécessaires vendues $2\,r$ euros chacune.

La valeur α trouvée dépend de n et on la note dorénavant α_n.

(f) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donner un équivalent simple de α_n.

4.10.6 On considère une population de 2^n vaches susceptibles, avec la probabilité p, d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches. On fixe $0 \leq k \leq n$. On sépare les vaches en 2^{n-k} groupes de 2^k vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note Y le nombre de groupes malades et X le nombre total de tests effectués.

(a) Exprimer X en fonction de Y, k et n.

(b) Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.

(c) Donner la loi de Y et son espérance.

(d) En déduire l'espérance de X.

(e) On suppose $n = 10$ et $p = 0.01$. Déterminer la meilleure valeur de k.

4.10.7 Soit p et p' deux réels tel que $0 < p \leq p' < 1$.

(a) Montrer qu'il existe un couple (X, X') de variables aléatoires discrètes telles que :

$$X \sim \mathcal{B}(p),\ X' \sim \mathcal{B}(p'),\ X' \geq X \ \textbf{p.s.}$$

(b) En déduire que, si X_n et Y_n sont deux variables aléatoires suivant respectivement des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(n,p')$, alors, pour tout $k \in [|0,n|]$

$$\mathbb{P}\left((Y_n \geq k)\right) \geq \mathbb{P}\left((X_n \geq k)\right)$$

Loi de Poisson

Définition 4.17 – Loi de Poisson

La loi de Poisson intervient pour modéliser une file d'attente, plus précisément le nombre d'individus arrivant dans une file d'attente avant un temps donné. Si X est une `v.a.r.` est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda),\ \text{et on a } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left((X = k)\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriété 4.8

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Proposition 4.16

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Exercice(s) 4.11

4.11.1 Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, la loi conditionnelle de Y sachant $N = n$ est une loi binomiale de paramètres (n, p) où $p \in]0,1[$. On pose $Z = N - Y$. Étudier la loi conditionnelle de Z sachant $Y = k$.

4.11.2 Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec une probabilité $p \in]0,1[$ et une morille avec une probabilité $q = 1 - p$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés et Y la loi du nombre de morilles.

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (N, X). En déduire la loi de X.

(b) X et Y sont elles indépendantes ?

4.11.3 Soit M une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de

Bernoulli indépendantes de paramètre p. Posons :

$$X = X_1 + \cdots + X_M$$

Montrer que c'est une variable aléatoire et étudier sa loi.

4.11.4 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$.

4.11.5 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, calculer pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(X\left(X-1\right)\cdots\left(X-k\right)\right)$$

4.11.6 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathbb{E}(N\,g(N)) = \lambda\;\mathbb{E}(g(N+1))$$

(b) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

(c) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$\mathbb{E}(T\,g(T)) = \lambda\;\mathbb{E}(g(T+1))$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

4.11.7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $\mathbb{P}\left((X = j)\right)$?

(b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $\mathbb{P}\left((X = j)\right)$?

(c) Calculer pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left(|X - \lambda|\right)$$

4.11.8 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X_i le résultat du i e tirage. On note T le plus petit entier tel que $X_i \leq X_{i+1}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}\left((T > k)\right)$

(b) Loi de T ?

(c) $\mathbb{E}(T)$?

(d) Mêmes questions si l'urne est infinie et si les jetons sont tirés suivant une loi de Poisson.

4.11.9 Calculer $\mathbb{E}(\cos(\pi X))$ où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

4.11.10 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Montrer que, pour tout $\theta \geq 0$ et tout $K \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left((X \geq K\,\lambda)\right) \leq \exp\left(-K\,\theta\,\lambda\right)\,\mathbb{E}\left(\exp(\theta\,X)\right)$$

(b) Calculer $\mathbb{E}(\theta\,X)$.

(c) Trouver le « meilleur θ possible ».

(d) Trouver K tel que $\mathbb{P}\left((X \geq K\,\lambda)\right) \leq 10^{-3}$.

4.11.11 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, S la somme aléatoire

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$

Déterminer la loi de S. Expliciter le cas où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Loi géométrique

Définition 4.18 – Loi géométrique

La loi géométrique intervient pour modéliser un premier succès lors d'une succession d'expériences de type Bernoulli. Si X est une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{G}(p),\ \text{et on a } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left((X = k)\right) = p\,(1-p)^{k-1}$$

Remarque 4.27

Il faut échouer $k-1$ fois ($(1-p)^{k-1}$) avant de réussir une fois (p). Les expériences sont, bien sûr, supposées indépendantes.

Propriété 4.9

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Proposition 4.17

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors

$$\Big[X \textit{ géométrique}\Big] \iff \Big[\forall (n,k) \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left((X > n+k)\right) = \mathbb{P}\left((X > n)\right)\, \mathbb{P}\left((X > k)\right)\Big]$$

Exercice(s) 4.12

4.12.1 Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$, on suppose que les événements $(X = k)$ et $(Y = l)$ sont toujours indépendants pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^{*2}$.

(a) Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

(b) Retrouver le résultat sans calcul.

4.12.2 (a) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Montrer que, quel que soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de $X - n_0$ sachant $X > n_0$, ne dépend pas de n_0.

(b) Comment interpréter cette propriété ?

(c) Étudier la réciproque : si la loi conditionnelle de $X - n_0$ sachant $X > n_0$ est indépendante de n_0, X `v.a.r.` à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est-elle une loi géométrique ?

4.12.3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer $\mathbb{E}(1/X)$.

4.12.4 Soit X_1, …, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1, …, p_n. Quelle est la loi de

$$\min(X_1, \ldots, X_n) \text{ ?}$$

4.2.6 Moments

Définition 4.19 – Moments

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète, réelle définie sur Ω. Soit, de plus, $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X *possède un moment d'ordre* p si X^p est d'espérance finie, on pose alors

$$m_p = \mathbb{E}\left(X^p\right)$$

Remarque 4.28

Si X possède un moment d'ordre p, alors

$$\forall q \in [\![1, p]\!]\,,\ X \text{ possède un moment d'ordre } q$$

Définition 4.20 – Variance et écart-type

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète, réelle définie sur Ω, ayant un moment d'ordre 2, on appelle *variance* de X et on note

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)^2\right)}$$

Si X est de variance égale à 1, on dit que X est une variable aléatoire *réduite*.
On appelle *écart-type de X* et on note

$$\sigma(X) \overset{\text{Not}}{=} \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$$

Remarque importante 4.29

On a aussi

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriété 4.10

1. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geq 0$ et
$$\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0\right] \iff \left[X = Cste \ \textbf{p.s.}\right]$$
2. Si X a un moment d'ordre 2, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(a.X + b) = a^2 \ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = p\,(1-p)$.
4. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = n\,p\,(1-p)$.
5. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda$.
6. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (1-p)/p^2$.

Remarque 4.30

Si X est une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2 non nul, alors

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \text{ est centrée et réduite}$$

Définition 4.21 – Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, on appelle *covariance de X et Y* et on note

$$\boxed{\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y))\big) = \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}$$

Proposition 4.18

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre* 2*, alors* $X+Y$ *admet un moment d'ordre* 2 *et*

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 2\ \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}$$

En particulier, l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *(ou* $\mathcal{L}^2(\Omega)$*) des variables aléatoires (discrètes) réelles ayant un moment d'ordre* 2 *est un espace vectoriel et l'application*

$$(X,Y) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y)$$

est bilinéaire, symétrique, positive (elle n'est pas définie, car les variables aléatoires presque sûrement constantes ont une variance nulle).

Remarque importante 4.31

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, alors

$$\left[X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y) = 0\right]$$

la réciproque étant fausse.
Si X et Y sont indépendantes, on a donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$$

Proposition 4.19 – Cauchy-Schwarz

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, non presque sûrement constantes, alors*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}} \in [-1,1]$$

s'appelle le coefficient de corrélation de X et Y.
On a de plus (cas d'égalité)

$$\Big[|\rho(X,Y)| = 1\Big] \iff \Big[\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \alpha.X + \beta.Y = Cste\ \textbf{p.s.}\Big]$$

On peut en déduire que

$$\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$$

Remarque 4.32

Plus généralement, on peut définir les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ou $\mathcal{L}^p(\Omega)$), où $p \in]1,+\infty[$ par

$$X \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ lorsque } \mathbb{E}\left(|X|^p\right) < +\infty$$

et utiliser les inégalités de Hölder pour trouver l'inégalité triangulaire sur

$$\sqrt[p]{\mathbb{E}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^p\right)}$$

On a de plus,

$$\forall (p_1,p_2) \in]1,+\infty[^2,\ p_1 \leq p_2\ \Rightarrow\ \mathcal{L}^{p_1}(\Omega) \supset \mathcal{L}^{p_2}(\Omega)$$

Remarque 4.33

On peut de même avoir des inégalités de type Jensen. Si X a une espérance finie, si φ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(X)$ soit d'espérance finie, alors

$$\varphi\left(\mathbb{E}(X)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi(X)\right)$$

Proposition 4.20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, alors $X_1 + \cdots + X_n$ a un moment d'ordre 2 et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X_i, X_j)$$

En particulier, si les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes (ou simplement indépendantes deux-à-deux), on a

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$$

Remarque 4.34

Dans la situation de la proposition ci-dessus, on peut introduire la *matrice de covariance* de $(X_1, \ldots, X_n)$ par

$$\Big[\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X_i, X_j)\Big]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

elle est symétrique, positive...

Théorème 4.5 – Bienaymé-Tchebychev

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* X *une variable aléatoire discrète, réelle définie sur* Ω *et ayant un moment d'ordre* 2*, alors*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}\left((|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon)\right) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{\epsilon^2}}$$

Exercice(s) 4.13

4.13.1 On a une population constituée de k catégories de proportions p_1, ..., p_k, on tire au hasard n individus, *avec* remise. On note X_j le nombre d'individus de la catégorie j obtenu. Calculer

(a) les espérances et les variances des variables aléatoires X_1, ..., X_k ;

(b) les covariances des (X_i, X_j).

4.13.2 On a une population constituée de k catégories d'effectifs n_1, ..., n_k, on tire au hasard n individus, *sans* remise. On note X_j le nombre d'individus de la catégorie j obtenu. Calculer

(a) les espérances et les variances des variables aléatoires X_1, ..., X_k ;

(b) les covariances des (X_i, X_j).

4.13.3 Soit X et Y deux lois de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$. Montrer que :

$$(X, Y) \text{ indépendantes } \iff \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X, Y) = 0$$

4.13.4 Soit $X_1, \ldots, X_n$ de variance σ^2 et telles que pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$ on ait $\mathbb{C}\text{ovar}(X_i, X_j) = \rho$. Montrer que

$$\rho \geq -\frac{\sigma^2}{n-1}$$

Étudier le cas d'égalité.

4.13.5 Soit $X_1, \ldots, X_{n+1}$ indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_i = X_i\, X_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $S = Y_1 + \cdots + Y_n$. Loi de Y_i ? Espérance et variance de S ?

4.13.6 On considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des **v.a.r.i.i.d.** suivant la loi d'une variable aléatoire X prenant équiprobablement les deux valeurs ± 1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$\det\left([X_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]} \right)$$

4.13.7 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout réel t, $\mathbb{P}\big((X \geq t)\big) \leq \mathbb{P}\big((Y \geq t)\big)$.

(a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée on a $\mathbb{E}\big(h(X)\big) \leq \mathbb{E}\big(h(Y)\big)$.

(b) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si $\lambda \leq \mu$.

(c) On suppose X et Y indépendantes et $X \prec Y$. Montrer que $\mathbb{P}\big((X \leq Y)\big) \geq 1/2$.

4.13.8 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de X, N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des $(X_n)_{n \geq 1}$,

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On suppose que toutes les X_n et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S a un moment d'ordre 2 et le calculer.

4.13.9 Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements [a] dont chacun est de probabilité au moins c, avec $c > 1/n$. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \geq \frac{c\,(n\,c-1)}{n-1}$$

4.13.10 Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, si m est un nombre réel.

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \leq \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$$

a. On pourra prendre en considération les indicatrices de ces événements.

4.2.7 Fonctions génératrices

Dans ce paragraphe, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a donc

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

On convient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus X(\Omega),\ \mathbb{P}\left((X=n)\right) = 0$$

Définition 4.22 – Fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice de X* et on note

$$\boxed{\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=n)\right) t^n}$$

Cette série entière a un rayon ≥ 1 et sa somme est définie, continue sur $[-1,1]$.

Proposition 4.21

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, *alors*

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t)$$

De même, si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, *alors*

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$$

*En particulier, si les X_k sont **i.i.d.**, on a*

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = \left(G_{X_1}\right)^n$$

Propriété 4.11

1. Toute fonction génératrice est convexe sur $[0,1]$. Elle est aussi croissante et absolument monotone sur $[0,1]$.
2. La fonction génératrice caractérise la loi de X, ainsi
$$\Big[X \sim Y\Big] \iff \Big[G_X = G_Y\Big]$$
3. *Loi de Bernoulli* si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors
$$G_X(t) = 1 - p + p\,t$$
4. *Loi binomiale* si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors
$$G_X(t) = (1 - p + p\,t)^n$$
5. *Loi de Poisson* si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$G_X(t) = \exp\big(\lambda\,(t-1)\big) = e^{-\lambda}\,e^{\lambda\,t}$$
6. *Loi géométrique* si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors
$$G_X(t) = \frac{p\,t}{1-(1-p)\,t}$$

Proposition 4.22 – Calculs des moments

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a

1. Espérance

$$\left[\mathbb{E}(X) < +\infty\right] \iff \left[G_X \textit{ est dérivable à gauche en 1}\right]$$

et, en ce cas, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)}$$

2. Variance

$$\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) < +\infty\right] \iff \left[G_X \textit{ est dérivable deux fois à gauche en 1}\right]$$

et, en ce cas, on a

$$\boxed{G''_X(1^-) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X) \textit{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = G''_X(1^-) + G'_X(1^-) - G'_X(1^-)^2}$$

3. Moment d'ordre p *soit* $p \in \mathbb{N}^*$

$$\left[\mathbb{E}\left(|X|^p\right) < +\infty\right] \iff \left[G_X \textit{ est dérivable } p \textit{ fois à gauche en 1}\right]$$

et, en ce cas

$$\boxed{G_X^{(p)}(1^-) = \mathbb{E}\left(X\left(X-1\right)\cdots\left(X-p+1\right)\right)}$$

Proposition 4.23 – Somme aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille de variables aléatoires* ***i.i.d.*** *définies sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et* N *une variable aléatoire définie sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, indépendante des* X_n*, on pose*

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

N est une variable aléatoire !

alors

$$\boxed{G_S = G_N \circ G_{X_1}}$$

Exercice(s) 4.14

4.14.1 Soit X le nombre de garçons d'une famille et Y le nombre total d'enfants. On suppose qu'à chaque naissance, il y a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon.

(a) Montrer que :

$$\forall t \in [-1, +1],\ G_{_X}(t) = G_{_Y}\left(\frac{1+t}{2}\right)$$

(b) On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, quelle est la loi de X ?

(c) On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p, quelle est la loi de X ?

(d) Quel modèle choisiriez-vous ? (Poisson ou géométrique).

4.14.2 On veut démontrer qu'il n'est pas possible de construire un dé truqué de telle sorte que la somme de 2 lancers consécutifs suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(a) Calculer la fonction génératrice d'une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(b) Calculer la fonction génératrice de la loi d'une somme de deux lancers indépendants d'un même dé truqué.

(c) En déduire, en considérant les zéros des deux fonctions génératrices, le résultat annoncé.

Reprendre le problème avec deux dés pipés (différemment), peut-on faire ne sorte que la somme des deux dés suivent une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

4.14.3 On lance trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. On considère le jeu suivant :

— si le troisième lancer est un « 1 », le joueur gagne le nombre de nombres pairs obtenus dans les deux premiers lancers ;

— sinon, le joueur gagne le nombre de « 6 » obtenus dans les deux premiers lancers.

Calculer (à l'aide de fonctions génératrices) la loi du gain du joueur.

4.14.4 Trouver une loi telle que toute `v.a.r.` X suivant cette loi vérifie :

$$G_X^2 = G_{2\,X}$$

Conclusion ?

4.14.5 On reprend les notations de la proposition 4.23, page précédente.

(a) Montrer que si N et X_1 ont des espérances, alors :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\ \mathbb{E}(X_1)$$

(b) Si, de plus, N et X_1 ont des moments d'ordre 2, montrer que :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \mathbb{E}(X_1^2)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) + \mathbb{E}(N)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$$

4.14.6 On s'intéresse à la transmission entre générations d'une propriété. Chaque individu i peut transmettre cette propriété à un nombre de descendants X `v.a.r.` à valeurs entières, indépendantes, suivant une même loi de probabilité définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big((X = k)\big) = p_k$$

Le nombre total d'individus ayant la propriété est alors :

$$N_0 = 1,\ N_1 = \sum_{i=1}^{N_0} X_{1,i}, \ldots, N_n = \sum_{i=1}^{N_{n-1}} X_{n,i}$$

où les $X_{i,j}$ sont des `v.a.r.` indépendantes de même distribution que X.

(a) Calculer la fonction génératrice de N_n.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big((N_{n+1} = 0)\big) = G_X\Big(\mathbb{P}\big((N_n = 0)\big)\Big)$$

(c) Montrer que :

$$\exists \xi \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big((N_n = 0)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \xi$$

(d) Discuter la valeur de ξ en fonction de la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Que signifie ce résultat ?

4.14.7 Soit T_i le temps d'attente du i-ème succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

(a) Déterminer directement la loi de T_i.

(b) Retrouver le résultat à l'aide de fonctions génératrices en identifiant la loi de $T_i - T_{i-1}$ et en remarquant que T_{i-1} et $T_i - T_{i-1}$ sont indépendantes.

(c) Un artisan réalise r appels téléphoniques vers r débiteurs. La probabilité que le destinataire décroche est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels nécessaires pour contacter les r destinataires. Calculer G_X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(d) L'artisan ayant fait de bonnes affaires, il est désormais à la tête d'une entreprise qui compte r secrétaires travaillant simultanément. À chaque série d'appels chaque secrétaire contacte un débiteur jusqu'à ce qu'il ait répondu.

i. Quelle est la loi du nombre de séries d'appels nécessaire pour contacter tous le monde ? A-t-elle une espérance finie ?

ii. Quelle est la loi du nombre de personnes N_k ayant répondu avant la k-ème série incluse ?

Un appel, fructueux ou non, dure en moyenne une minute. Quel est en minutes la loi et l'espérance du temps nécessaire à l'entreprise pour contacter les r mauvais payeurs ?

(e) Même question si l'artisan ne dispose plus que de trois secrétaires travaillant simultanément.

4.14.8 Pour $r \geq 1$, on note T_r le temps d'attente de la première série de r « 1 » consécutifs dans une succession d'épreuves de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

(a) Loi de T_1 ?

(b) Déterminer $\mathbb{P}\left((T_r = n)\right)$ pour $1 \leq n \leq r$.

(c) On note F_1 le temps d'apparition du premier 0. Pour $n > r$ que vaut $\mathbb{P}\left((T_r = n | F_1 = k)\right)$?

(d) Déterminer G_{T_2} puis $\mathbb{E}(T_2)$.

(e) Déterminer une fraction rationnelle f_r de la variable t telle que $G_{T_r}(t) = f_r(t)$ pour tout réel t tel que $|t| \leq 1$.

(f) Donner l'espérance et la variance de T_r.

4.14.9 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{P}\big((X = i,\ Y = j)\big) = a_{i+j}$$

déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que X et Y soient indépendantes.

4.14.10 Un QCM comporte n questions. Il y a $k \geq 1$ réponses possibles pour chaque question et une seule réponse exacte qui amène un point. On répond au hasard et on note X le total de points obtenus à l'issue de cette première série. On rend le QCM dans lequel les réponses fausses ont été barrées. On procède à une deuxième série de tests à l'issue de laquelle chaque réponse juste est créditée d'un demi point. On note Y la note obtenue pour cette seconde série.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

(c) Retrouver la loi de Y et identifier la loi de $2Y$ en introduisant des variables de Bernoulli convenables.

(d) On note $Z = X + Y$ la note totale obtenue par le candidat à l'issue de cette série des deux tests. Quelle est la fonction génératrice de $2Z$? En déduire l'espérance et la variance de Z.

4.14.11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, q dans $\mathbb{N}^*$. Exprimer, $\mathbb{P}\big((q \text{ divise } X)\big)$ en fonction des valeurs de G_X.

4.14.12 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X et Y sont mutuellement indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ \mathbb{E}\left(s^X\, t^Y\right) = G_X(s)\, G_Y(t)$$

4.14.13 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est muni de la loi uniforme. On note X_n le nombre de cycles d'une permutation.

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(t^{X_n}\right) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t + k)$$

(b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

4.14.14 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_n. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On suppose que S et $N - S$ sont indépendantes.

(a) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1],\ G(p\,x + (1-p))\,G((1-p)\,x + p) = G(x)$$

(b) En considérant la dérivée logarithmique de G, montrer que, soit N est presque sûrement nulle, soit N suit une loi de Poisson.

On revient au cas général.

(c) On suppose que N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Trouver la loi de $(S, N-S)$ et en déduire la réciproque du résultat précédent.

Figure 4.2 – Une fougère synthétique

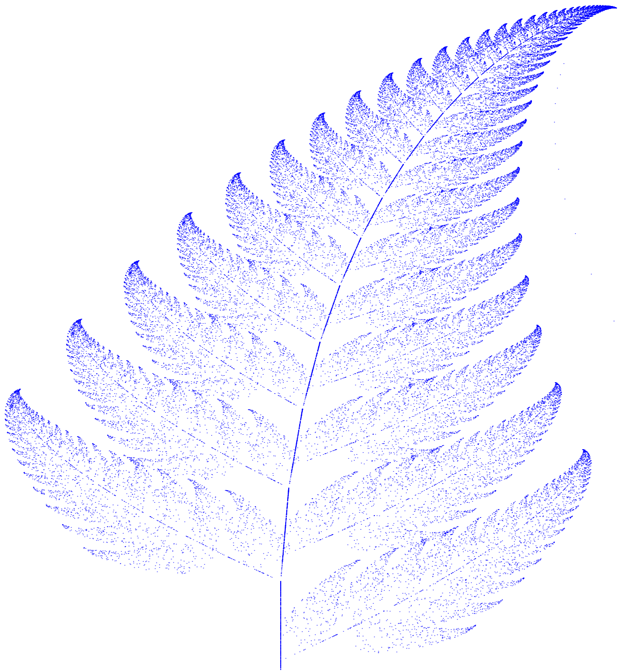


Figure 4.1 – Probabilités composées