Suites et Séries – TD$_{12}$

28-29 novembre 2022

Exercice 1

Un sac contient 2 dés à six faces. L'un est parfaitement équilibré ; l'autre donne le chiffre 6 une fois sur deux et est équiprobable sur les autres chiffres. On prend un dé au hasard dans le sac et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On a obtenu un 6. Quelle est la probabilité qu'on ait pris le dé équilibré ?
3. Même question si on obtient un 5.
4. Même question si on obtient 5 ou 6.

Dans un exercice de probabilité comme celui-ci, on commence toujours par :

— *Définir les événements ou les variables aléatoires qui nous intéressent ;*

— *Déterminer les probabilités ou les lois données par l'énoncé.*

1. $\triangleright$ On note E l'événement correspondant à « prendre le dé équilibré ». D'après l'énoncé $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2} > 0$. On note A l'événement correspondant à « obtenir un 6 » ; d'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(A|E) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(A|\overline{E}) = \frac{1}{2}$.
   $\triangleright$ D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(E, \overline{E})$ (on a bien $\mathbb{P}(E) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{E}) > 0$) :
   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(A|E) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}(A|\overline{E}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}.$$
   La probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{3}$.

2. $\triangleright$ On cherche ici la probabilité d'avoir pris le dé équilibré sachant qu'on a obtenu un 6, c'est-à-dire $\mathbb{P}(E|A)$. D'après la formule de Bayes (on a bien $\mathbb{P}(E) > 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$),
   $$\mathbb{P}(E|A) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(A|E)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$
   La probabilité d'avoir pris le dé équilibré sachant qu'on a obtenu un 6 est $\frac{1}{4}$.

3. $\triangleright$ Soit B l'événement correspondant à « obtenir un 5 ». D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(B|E) = \frac{1}{6}$ et comme la probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 sur le deuxième dé est équiprobable :
   $$\mathbb{P}(B|\overline{E}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}.$$
   $\triangleright$ D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(E, \overline{E})$ (on a bien $\mathbb{P}(E) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{E}) > 0$) :
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(B|E) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}(B|\overline{E}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{2}{15}.$$

▷ D'après la formule de Bayes (on a bien $\mathbb{P}(E) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$), on a :

$$\mathbb{P}(E|B) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(B|E)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{15}} = \frac{5}{8}.$$

La probabilité d'avoir pris le dé équilibré sachant qu'on a obtenu un 5 est $\frac{5}{8}$.

4. On cherche $\mathbb{P}(E|A \cup B)$. D'après la formule de Bayes (on a bien $\mathbb{P}(E) > 0$ et $\mathbb{P}(A \cup B) \geqslant \mathbb{P}(A) > 0$),

$$\mathbb{P}(E|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(A \cup B|E)}{\mathbb{P}(A \cup B)}.$$

Comme les événements A et B sont incompatibles (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B|E) = \mathbb{P}(A|E) + \mathbb{P}(B|E)$ d'où

$$\mathbb{P}(E|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(E)[\mathbb{P}(A|E) + \mathbb{P}(B|E)]}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{2}{15}} = \frac{5}{14}.$$

La probabilité d'avoir pris le dé équilibré sachant qu'on a obtenu un 5 ou un 6 est $\frac{5}{14}$.

Exercice 2

Une urne A contient 6 boules blanches et 5 boules noires. Une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A. Déterminer :

1. la probabilité que la boule tirée soit blanche ;
2. la probabilité qu'au moins une des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée est blanche.

On note X la variable aléatoire correspondante au nombre de boules blanches transférée de l'urne B à l'urne A. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Puisque c'est une situation d'équiprobabilité d'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{16}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{14}{33}.$$

Une fois les deux doubles transférés, le tirage dans l'urne A est équiprobable (d'après l'énoncé) donc si on note B l'évènement correspondant à « la boule tirée est blanche », on a

$$\mathbb{P}(B|X = 2) = \frac{8}{13}, \quad \mathbb{P}(B|X = 1) = \frac{7}{13} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B|X = 0) = \frac{6}{13}.$$

1. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((X = 0), (X = 1), (X = 2))$ avec $\mathbb{P}(X = k) > 0$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(B|X = k)\mathbb{P}(X = k) = \frac{220}{429}.$$

La probabilité que la boule tirée soit blanche est $\dfrac{220}{429}$.

2. On veut calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 1|B)$. On écrit une union disjointe

$$(X \geqslant 1) = (X = 1) \cup (X = 2)$$

d'où

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1|B) = \mathbb{P}(X = 1|B) + \mathbb{P}(X = 2|B).$$

Or d'après la formule de Bayes (on a $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(X_1) > 0$)

$$\mathbb{P}(X = 1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|X = 1)\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{28}{55}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X = 2|B) = \frac{\mathbb{P}(B|X = 2)\mathbb{P}(X = 2)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{6}{55}.$$

On a donc $\mathbb{P}(X \geqslant 1|B) = \frac{34}{55}$.

La probabilité recherchée est $\dfrac{34}{55}$.

Exercice 3

Un joueur joue au jeu suivant. Première étape : il lance simultanément deux pièces équilibrées. Deuxième étape : il relance k fois les deux pièces simultanément, où $k \in \{0, 1, 2\}$ est le nombre de « pile(s) » obtenu(s) à la première étape.

1. Le joueur gagne la partie s'il obtient au moins un « pile » à la deuxième étape. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur obtienne deux « piles » à la première étape sachant qu'il a obtenu un seul « pile » à la deuxième étape ?

On note X_1 la variable aléatoire correspondante au nombre de « pile(s) » obtenu(s) à la première étape. D'après l'énoncé les pièces sont équilibrées (et les lancers indépendants) donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}.$$

On note X_2 la variable aléatoire correspondante au nombre de « pile(s) » obtenu(s) à la deuxième étape. On a alors

$$\mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 2) = \frac{1}{16}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1) = \frac{1}{4}.$$

1. Calculons tout d'abord la probabilité de perdre, ce qui correspond à l'évènement

$$\overline{G} = (X_1 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0) \cup (X_2 = 2, X_2 = 0).$$

C'est une union disjointe donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{G}) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\
&= \frac{25}{64}.
\end{aligned}$$

Par passage au complémentaire, $\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(\overline{G})$ donc :

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner est } \frac{39}{64}.}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1)$. On applique le théorème de Bayes avec le système complet d'évènement $((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$ (on a bien $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$) :

$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2)}{\sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j)} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité recherchée est } \frac{1}{5}.}$$

Exercice 4

Soit $a > 0$ et soient U et V deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-a, a\}$ de même loi définie par

$$\mathbb{P}(U = -a) = \mathbb{P}(V = -a) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U = a) = \mathbb{P}(V = a) = \frac{2}{3}.$$

On suppose que U et V sont indépendantes. On pose

$$X = U \quad \text{et} \quad Y = \text{signe}(U)V.$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes mais que les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Il est clair que les variables aléatoires X et Y sont discrètes. On a ici $U(\Omega) = V(\Omega) = \{-a, a\}$ donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-a, a\}$. Il faut vérifier si

$$\forall (x, y) \in \{-a, a\}^2, \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(X = y).$$

▷ On a

$$(X = a, Y = a) = (U = a, \text{signe}(U)V = a) = (U = a, \text{signe}(a)V = a) = (U = a, V = a).$$

Par indépendance des variables aléatoires U et V, on a

$$\mathbb{P}(X = a, Y = a) = \mathbb{P}(U = a, V = a) = \mathbb{P}(U = a)\mathbb{P}(V = a) = \frac{4}{9}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = a, Y = -a) &= \mathbb{P}(U = a)\mathbb{P}(V = -a) = \frac{2}{9} \\
\mathbb{P}(X = -a, Y = a) &= \mathbb{P}(U = -a)\mathbb{P}(V = -a) = \frac{1}{9} \\
\mathbb{P}(X = -a, Y = -a) &= \mathbb{P}(U = -a)\mathbb{P}(V = a) = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

▷ On écrit l'évènement $(X = a)$ comme une union disjointe

$$(X = a) = (X = a, Y = a) \cup (X = a, Y = -a)$$

d'où
$$\mathbb{P}(X=a)=\mathbb{P}(X=a,Y=a)+\mathbb{P}(X=a,Y=-a)=\frac{2}{3}.$$
De même
$$\mathbb{P}(Y=a)=\mathbb{P}(X=a,Y=a)+\mathbb{P}(X=-a,Y=a)=\frac{5}{9}.$$
▷ On a
$$\mathbb{P}(X=a,Y=a)=\frac{4}{9}\neq\frac{10}{27}=\mathbb{P}(X=a)\mathbb{P}(Y=a).$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

▷ On a $X^2=U^2$ et $Y^2=\text{signe}(U)^2V^2=V^2$. Les variables aléatoires U et V sont indépendantes, donc d'après le cours, les variables aléatoires $U^2=X^2$ et $V^2=Y^2$ le sont.

Les variables X^2 et Y^2 sont indépendantes.

On pourrait penser que le fait que X^2 et Y^2 sont indépendantes mais X et Y ne sont pas indépendantes est absurde. Mais on a seulement $\sqrt{X^2}=|X|\neq X$ et $\sqrt{Y^2}=|Y|\neq Y$. On peut vérifier que les variables aléatoires $|X|$ et $|Y|$ sont bien indépendantes.

Exercice 5

On considère une urne contenant r boules avec r_B boules blanches et $r-r_B$ boules noires. On tire au hasard simultanément n boules de l'urne, avec $1\leqslant n<r$, et on s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega,\mathbb{P})$ ainsi qu'une variable aléatoire discrète X modélisant cette expérience aléatoire.
2. Donner la loi de X. *On ne demande pas de vérifier que* $\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)=1$.

1. On note E l'ensemble des boules de l'urne. Il s'agit ici d'un tirage simultané sans tenir compte de l'ordre. On considère donc l'univers Ω de toutes les n-combinaisons de E qui est fini donc muni de la probabilité uniforme (situation d'équiprobabilité). On a $\text{Card}(\Omega)=\binom{r}{n}$.
   Pour tout élément $\omega\in\Omega$ (donc un tirage de n boules), on pose $X(\omega)$ le nombre de boules blanches de ω. L'application $X\colon\Omega\to\{0,\dots,n\}$ qui est bien une variable aléatoire, car $(X=k)\in\mathscr{P}(\Omega)$ pour tout $k\in X(\Omega)=\{0,\dots,n\}$ et elle est clairement discrète.
2. Il suffit de donner les valeurs $\mathbb{P}(X=k)$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$.
   Soit $k\in\{0,\dots,n\}$.
   Remarquons déjà que si $k>n_B$, c'est-à-dire si le nombre k de boules blanches tirées est strictement plus grand que le nombre n_B de boules blanches totales, alors $(X=k)=\emptyset$ d'où $\mathbb{P}(X=k)=0$.
   De même, si $n-k>r-r_B$, c'est-à-dire si le nombre $n-k$ de boules noires tirées est strictement plus grand que le nombre $r-r_B$ de boules noires totales, alors $(X=k)=\emptyset$ d'où $\mathbb{P}(X=k)=0$.
   On suppose donc que
   $$\max(0,n-(n-r_B))\leqslant k\leqslant\min(n,r_B).$$
   Pour choisir un élément de $(X=k)$, on doit choisir k parmi les r_B boules blanches puis choisir $n-k$ boules noires parmi $r-r_B$ boules noires. On a donc $\#(X=k)=\binom{r_B}{k}\binom{r-r_B}{n-k}$ et comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme,
   $$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\text{Card}(X=k)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{\binom{r_B}{k}\binom{r-r_B}{n-k}}{\binom{r}{n}}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{r_B}{k}\binom{r-r_B}{n-k}}{\binom{r}{n}} \text{ si } k\in\{\max(0,n-(n-r_B)),\dots,\min(n,r_B)\},\ 0 \text{ sinon.}}$$

Remarque : cette loi est appelée loi hypergéométrique.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $q\in]0,1[$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n)=q\,\mathbb{P}(X\geqslant n).$$

Déterminer la loi de X. *Indication : chercher une relation entre $\mathbb{P}(X=n)$ et $\mathbb{P}(X=n+1)$.*

Comme la variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est discrète et il suffit de déterminer $\mathbb{P}(X=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ pour connaître la loi de X.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$(X\geqslant n)=(X=n)\cup(X\geqslant n+1)$$

avec une union disjointe (intuitivement : « être supérieur ou égal à n » équivaut à « être égale à n OU BIEN être supérieur ou égale à $n+1$ ») donc

$$\mathbb{P}(X\geqslant n)=\mathbb{P}(X=n)+\mathbb{P}(X\geqslant n+1).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X=n+1)=q\,\mathbb{P}(X\geqslant n+1)=q\big(\mathbb{P}(X\geqslant n)-\mathbb{P}(X=n)\big)=(1-q)\mathbb{P}(X=n).$$

La suite $(\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $1-q$ et de premier terme

$$\mathbb{P}(X=0)=q\,\mathbb{P}(X\geqslant 0)=q\times 1=q$$

puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=q\sum_{k=0}^{+\infty}(1-q)^n=q\times\frac{1}{1-(1-q)}=1$$

en utilisant la formule de la somme d'une série géométrique (ici, $|1-q|<1$).

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n)=q(1-q)^n.}$$

Remarque : l'union disjointe $(X\geqslant n)=(X=n)\cup(X\geqslant n+1)$ est souvent utile et à retenir.
Nous verrons plus tard que cette loi est un cas particulier de loi géométrique.

Exercice 7

Soit $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Soit $n\geqslant 2$ un entier, on pose

$$S_n=X_1+\cdots+X_n.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n (on pourra étudier les cas $n=2$ puis $n=3$ et faire une récurrence sur n). *On ne demande pas de vérifier que $\sum_{k\in S_n(\Omega)}\mathbb{P}(S_n=k)=1$.*

▷ La variable aléatoire X_j est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ donc $S_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k - j).$$

Dans cette somme, tous les termes tels que $k - j \leqslant 0$ (donc $j \geqslant k$) sont nuls (car $\mathbb{P}(X_2 = \ell) = 0$ pour $\ell < 1$) donc $\mathbb{P}(S_2 = 1) = 0$ et si $k \geqslant 2$, en posant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1} pq^{j-1}pq^{k-j+1} = (k-1)p^2q^{k-2}.$$

▷ Comme $S_2 = X_1 + X_2$ et X_3 sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(S_3 = k) = \mathbb{P}(S_2 + X_3 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_2 = j)\mathbb{P}(X_3 = k - j).$$

De même, dans cette somme, tous les termes tels que $j \geqslant k$ sont nuls, et aussi tel que $j = 1$ car $\mathbb{P}(S_2 = 1) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(S_3 = 1) = \mathbb{P}(S_3 = 2) = 0$ et si $k \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(S_3 = k) = \sum_{j=2}^{k-1} (k-1)p^2q^{k-2}pq^{k-j+1} = p^3q^{k-3}\sum_{j=2}^{k-1}(k-1) = p^3q^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

▷ Remarquons que $k - 1 = \binom{k-1}{1}$ et $\frac{(k-1)(k-2)}{2} = \binom{k-1}{2}$. Montrons donc par récurrence sur n que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \dbinom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n} & \text{si } k \geqslant n \end{cases}$$

On a déjà vu le cas $n = 2$. Supposons que l'hypothèse est vraie au rang n. Comme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = j)\mathbb{P}(X_{n_1} = k - j).$$

Dans cette somme, tous les termes tels que $j \geqslant k$ sont nuls, et aussi tels que $k \leqslant n$ par hypothèse de récurrence. On a donc, pour $k \geqslant n + 1$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^nq^{j-n}pq^{k-j+1} = p^{n+1}q^{k-(n+1)}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}.$$

▷ Montrons que $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$ avec $k \geqslant n+1$. On peut le faire par récurrence mais nous allons donner une justification combinatoire. Il y a $\binom{k-1}{n}$ façons de choisir n éléments dans $\{1, \ldots, k-1\}$ éléments. Mais on peut aussi

- choisir le plus grand des n éléments, on le note j (on a nécessairement $j \in \{n, \ldots, k-1\}$) ;
- puis choisir les $n - 1$ éléments restant dans $\{1, \ldots, j-1\}$.

On a donc bien, en sommant sur toutes les possibilités pour j,

$$\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}.$$

▷ On a finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ \dbinom{k-1}{n} p^n q^{k-(n+1)} & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

donc l'hypothèse est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(S_n = k) = 0 \text{ si } k \leqslant n-1 \text{ et } \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} \text{ si } k \geqslant n.}$$