Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_4$

11 Octobre 2022

Partie 1 : Familles libres

Exercice 1 :

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

1. $(u,\, v)$ avec $u = (1,\, 2,\, 3)$ et $v = (-1,\, 4,\, 6)$;
2. $(u,\, v,\, w)$ avec $u = (1,\, 2,\, -1)$, $v = (1,\, 0,\, 1)$ et $w = (0,\, 0,\, 1)$;
3. $(u,\, v,\, w)$ avec $u = (1,\, 2,\, -1)$, $v = (1,\, 0,\, 1)$ et $w = (-1,\, 2,\, -3)$.

1. Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires. Ici, u et v ne sont pas colinéaires donc la famille $(u,\, v)$ n'est pas liée, elle est donc libre.
2. Soit $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$a.(1,\, 2,\, -1) + b.(1,\, 0,\, 1) + c.(0,\, 0,\, 1) = (0,\, 0,\, 0).$$
Cela donne le système
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases}$$
La deuxième ligne donne $a = 0$, la première ligne donne donc $b = 0$ et enfin la troisième ligne donne $c = 0$. La famille $(u,\, v,\, w)$ est donc libre.
3. Soit $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$a.(1,\, 2,\, -1) + b.(1,\, 0,\, 1) + c.(-1,\, 2,\, -3) = (0,\, 0,\, 0).$$
Cela donne le système
$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ -a + b - 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 & \\ -2b + 4c = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 2b - 4c = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$
On constate que L_2 et L_3 sont équivalentes. On obtient $b = 2c$ et la première ligne donne $a = -c$. En prenant $c = 1$, on a donc une solution non nulle $(-1, 2, 1)$ au système. On a donc
$$-(1,\, 2,\, -1) + 2.(1,\, 0,\, 1) + (-1,\, 2,\, -3) = (0,\, 0,\, 0)$$
ce qui montre que la famille $(u,\, v,\, w)$ est liée, elle n'est donc pas libre.

Exercice 2 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,\, 1,\, 0)$, $v_2 = (4,\, 1,\, 4)$ et $v_3 = (2, -1,\, 4)$.

1. Montrer que la famille $(v_1,\, v_2)$ est libre. Faire de même pour $(v_1,\, v_3)$, puis pour $(v_2,\, v_3)$.
2. La famille $(v_1,\, v_2,\, v_3)$ est-elle libre ?

Il faut donc faire attention au fait que si toutes les sous-familles d'une famille finie sont libres, cela n'implique pas que la famille est libre.

1. Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc la famille (v_1, v_2) est libre. De même, les vecteurs v_1 et v_3 ne sont pas colinéaires donc la famille (v_1, v_3) est libre. Enfin, les vecteurs v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires donc la famille (v_2, v_3) est libre.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 = (0, 0, 0).$$
Cela donne le système
$$\begin{cases} a + 4b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ 4b + 4c = 0 \end{cases}$$
La troisième ligne donne $b = -c$ et la deuxième donne alors $a = 2c$. En prenant $c = 1$, on obtient une solution non nulle du système, c'est-à-dire :
$$2.v_1 - v_2 + v_3 = (0, 0, 0).$$
$$\boxed{\text{La famille } (v_1, v_2, v_3) \text{ n'est pas libre.}}$$

Exercice 3 :

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ de E est libre.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x^2})$ de E est libre (on pourra faire une étude asymptotique en $+\infty$).
3. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$ de E est libre.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a\cos + b\sin$ soit égale à la fonction nulle, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = 0.$$
En prenant $x = 0$, on obtient $0 = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ donc $a = 0$. Puis en prenant $x = \pi/2$ on obtient $0 = b\sin(\pi/2) = b$ donc $b = 0$. On a donc $a = b = 0$, la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ae^x + be^{2x} + ce^{x^2} = 0.$$
La méthode dans ce genre de situation est de factoriser par le terme qui tend le plus vite vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Ici, c'est $x \mapsto e^{x^2}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{x^2}\left(ae^{x-x^2} + be^{2x-x^2} + c\right) = 0$$
et comme l'exponentielle ne s'annule pas on obtient
$$0 = ae^{x-x^2} + be^{2x-x^2} + c \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a \times 0 + b \times 0 + c = c$$
donc $c = 0$. On recommence : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$e^{2x}\left(ae^{x-2x} + b\right) = 0$$

d'où

$$0 = ae^{-x} + b \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} a \times 0 + b = b$$

d'où $b = 0$. On a donc $ae^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui donne $a = 0$ en prenant $x = 0$. On a donc $a = b = c = 0$, la famille $(x \mapsto e^x,\ x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto e^{x^2})$ est libre.

3. Considérons donc une sous-famille finie de $p \geq 1$ vecteurs $(x \mapsto |x - a_i|)_{i \in \{1, \ldots, p\}}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ deux-à-deux distincts ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$).

Ici la famille est infinie. Pour montrer qu'elle est libre, il faut montrer que toutes ses sous-familles finies sont libres.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 |x - a_1| + \cdots + \lambda_p |x - a_p| = 0.$$

L'idée ici est d'exploiter le fait que $x \mapsto |x|$ est dérivable partout sauf en 0.

Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_k |x - a_k| = \underbrace{-\sum_{i \neq k} \lambda_i |x - a_i|}_{=g(x)}.$$

La fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a_k puisque $a_i \neq a_k$ pour $i \neq k$. Or la fonction $x \mapsto \lambda_k |x - a_k|$ est dérivable en a_k si et seulement si $\lambda_k = 0$. On a donc $\lambda_k = 0$.
En recommençant le raisonnement, on obtient en un nombre fini d'étapes que tous les λ_i sont nuls. Finalement, la sous-famille finie $(x \mapsto |x - a_i|)_{i \in \{1, \ldots, p\}}$ est libre.

$$\boxed{\text{Conclusion : } (x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}} \text{ est libre.}}$$

Partie 2 : Bases et dimension

Exercice 4 :

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \quad \text{et} \quad x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose $G = \mathrm{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

1. On a

$$u=(x,y,z,t)\in F \Longrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x=-y \\ y=y \\ z=y \\ t=t \end{cases} \Longleftarrow u=yv_1+tv_2$$

avec $v_1=(1,\,-1,\,-1,\,0)$ et $v_2=(0,\,0,\,0,\,1)$. On a donc $F=\mathrm{Vect}(\{v_1,\,v_2\})$, c'est-à-dire que la famille $(v_1,\,v_2)$ est une famille génératrice de F. De plus, elle est libre car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{(v_1,\,v_2) \text{ est une base de } F.}$$

2. Soit $(e_1,\,e_2,\,e_3,\,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On sait que la famille $(v_1,\,v_2)$ est libre et que la famille $(e_1,\,e_2,\,e_3,\,e_4)$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille $(v_1,\,v_2)$ par deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
Montrons que $(v_1,\,v_2,\,e_1,\,e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Puisqu'il y a 4 vecteurs dans cette famille et que $\dim\mathbb{R}^4=4$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $av_1+bv_2+ce_1+de_2=(0,\,0,\,0,\,0)$. On a

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -a+d=0 \\ -a=0 \\ b=0 \end{cases} \Longrightarrow \quad a=b=c=d=0$$

donc $(v_1,\,v_2,\,e_1,\,e_2)$ est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Soient a, b et c des nombres réels tels que $au_1+bu_2+cu_3=(0,\,0,\,0,\,0)$. On a

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+2b=0 \\ a+3b-c=0 \\ a+4b=0 \end{cases}$$

ce qui donne $b=0$ (faire L_4-L_2), puis $a=0$ d'après L_2 donc $c=0$ d'après L_1. La famille $(u_1,\,u_2,\,u_3)$ est libre.

4. La famille $(u_1,\,u_2,\,u_3)$ est une famille génératrice de G par définition de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G, d'où $\dim G=3$.

5. Soit $x\in F\cap G$. Puisque $x\in G$, il existe des nombres réels a, b et c tels que $x=au_1+bu_2+cu_3$. Puisque $x\in F$, cela donne

$$\begin{cases} 2a+3b-c=0 \\ 2a+4b-2c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a=-3b+c \\ b=c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=c \\ c=c \end{cases} \Longrightarrow x=-cu_1+cu_2+cu_3=c(-1,\,1,\,1,\,3)$$

en ayant fait $L_2\leftarrow L2-2L_1$ à la deuxième étape. On a donc $F\cap G=\mathrm{Vect}(\{(-1,\,1,\,1,\,3)\})$. La famille $((-1,\,1,\,1,\,3))$ est donc génératrice de $F\cap G$. De plus c'est une famille libre (une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul). Une base de $F\cap G$ est donc $((-1,\,1,\,1,\,3))$. En particulier, $\dim(F\cap G)=1$.

6. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=2+3-1=4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathbb{R}^4$ qui est aussi de dimension 4, d'où $F+G=\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Les sous-espaces vectoriels F et G étant de dimension finie, on peut appliquer la formule de Grassman :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 6 - \dim(F + G).$$

Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ d'où $\dim(F + G) \leq \dim \mathbb{R}^5 = 5$. On a alors

$$\dim(F \cap G) \geq 6 - 5 = 1$$

ce qui montre que $F \cap G \neq \{0\}$ (car $\dim\{0_E\} = 0$).

Exercice 6 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Grassmann (Proposition du cours).

1. Justifier l'existence d'un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F. En déduire que
$$\dim H = \dim F - \dim(F \cap G).$$
2. Montrer que $F + G = H \oplus G$.
3. Conclure.

1. Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F, d'après la propriété (page 20) il existe un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F. On a donc $(F \cap G) \oplus H = F$ donc d'après la propriété 1.20, $\dim(F \cap G) + \dim H = \dim F$ d'où le résultat.
2. On procède en deux étapes.
   - ▷ Montrons que $H \cap G = \{0_E\}$. On a $\{0_E\} \subset H \cap G$, montrons $H \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $x \in H \cap G$. On a $x \in H$ et comme $H \subset F$ on a $x \in F$. Comme de plus $x \in G$, on a finalement $x \in H \cap (F \cap G)$. Or H et $F \cap G$ sont en somme directe donc $x = 0_E$. On a donc $H \cap G \subset \{0_E\}$ d'où par double inclusion $H \cap G = \{0_E\}$.
     Autre méthode :
     $$\{0_E\} = H \cap (F \cap G) = (H \cap F) \cap G = H \cap G$$
     car $H \cap F = H$ puisque $H \subset F$.
   - ▷ Montrons que $H + G = F + G$.
     - On a $H + G \subset F + G$ car si $x = h + g \in H + G$ avec $h \in H$ et $g \in G$, alors comme $h \in F$ car $H \subset F$, on a $x \in F + G$.
     - Montrons que $F + G \subset H + G$. Soit $x = f + g \in F + G$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Comme $F = (F \cap G) \oplus H$, on peut écrire $f = f' + h$ avec $f' \in F \cap G$ et $h \in H$. On a donc $x = h + (f' + g) \in H + G$. On a donc $F + G \subset H + G$.

     Par double inclusion, on a bien $H + G = F + G$.
3. Puisque $F + G = H \oplus G$, d'après la propriété 1.20 (page 36) on a
$$\dim(F + G) = \dim H + \dim G.$$

Or $\dim H = \dim F - \dim(F \cap G)$ d'après la question 1, d'où

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
montrer que $\dim F = \dim G$ si, et seulement si, F et G ont un supplémentaire commun dans E, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = F \oplus H = G \oplus H$.

1. Montrer le sens indirect.
2. Montrer que le sens direct est vrai dans le cas où $\dim F = \dim G = n$.
3. On suppose que le sens direct est vrai pour un $p \leq n$ donné (si $\dim F = \dim G = p$, alors F et G ont un supplémentaire commun dans E) et on veut montrer que le sens direct est vrai pour $p-1$.
   (a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $p-1 < n$. Montrer par l'absurde que $F \cup G \neq E$.
   (b) Soit $x \in E \setminus (F \cup G)$. Calculer $\dim(F + \mathrm{Vect}(\{x\}))$ et $\dim(G + \mathrm{Vect}(\{x\}))$.
   (c) Montrer que F et G ont un supplémentaire commun dans E.
4. Conclure.

1. Supposons que F et G ont un supplémentaire commun H dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus H = G \oplus H$. On a alors $\dim E = \dim F + \dim H = \dim G + \dim H$ d'où $\dim F = \dim G$.
2. Si $\dim F = \dim G = n$, alors $F = G = E$ et $\{0_E\}$ est un supplémentaire commun à F et à G dans E :
$$E = F \oplus \{0_E\} = G \oplus \{0_E\}.$$
3. (a) Supposons par l'absurde que $F \cup G = E$. En particulier, $F \cup G$ est un espace vectoriel. D'après la propriété 1.5 (page 8), cela n'est possible que si $F \subset G$ ou si $G \subset F$.
   ▷ Si $F \subset G$, alors comme $\dim F = \dim G$ on a $F = G$ et donc $G = F \cup G = E$ ce qui contredit $p - 1 < n$, c'est absurde.
   ▷ De même, $G \subset F$ est absurde.
   Finalement, $F \cup G \neq E$.
   (b) D'après la formule de Grassmann, on a
$$\dim(F + \mathrm{Vect}(\{x\})) = \dim F + \dim \mathrm{Vect}(\{x\}) - \dim(F \cap \mathrm{Vect}(\{x\})).$$
   ▷ On a $\dim F = p - 1$.
   ▷ Comme $x \neq 0_E$ (car $0_E \in F \cup G$), on a $\dim \mathrm{Vect}(\{x\}) = 1$.
   ▷ On a $\dim(F \cap \mathrm{Vect}(\{x\})) = 0_E$. En effet, si $y \in F \cap \mathrm{Vect}(\{x\})$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Si $\lambda \neq 0$, alors $x = \lambda^{-1} y \in F$ car $y \in F$, absurde. On a donc $\lambda = 0$ d'où $y = 0_E$. On a donc $F \cap \mathrm{Vect}(\{x\}) \subset \{0_E\}$ d'où le résultat. En particulier, $F + \mathrm{Vect}(\{x\}) = F \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$.
   On obtient donc $\dim(F + \mathrm{Vect}(\{x\})) = p$. De même, on obtient $\dim(G + \mathrm{Vect}(\{x\})) = p$ et $G + \mathrm{Vect}(\{x\}) = G \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$.
   (c) Par hypothèse, puisque $p = \dim(F + \mathrm{Vect}(\{x\})) = \dim(G + \mathrm{Vect}(\{x\}))$, ils ont un supplémentaire commun S dans E :
$$E = S \oplus (F \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})) = S \oplus (G \oplus \mathrm{Vect}(\{x\}))$$

donc en posant $S' = S \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$, on obtient

$$E = F \oplus S' = G \oplus S',$$

c'est-à-dire que S' est un supplémentaire commun à F et à G dans E.

4. On a montré que le sens direct est vrai pour $p = n$ et que s'il est vrai pour $p \leq n$ alors il est vrai pour $p - 1$. Par récurrence descendante, il est vrai pour tout p.

Partie 3 : Applications linéaires

Exercice 8 :

Considérons l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + z,\, y - x,\, z + y,\, x + y + 2z).$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\, \mathbb{R}^4)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. L'application f est-t-elle injective ? Est-elle surjective ?

1. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x',\, y',\, z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda(x,\, y,\, z) + (x',\, y',\, z')\Big) &= f(\lambda x + x',\, \lambda y + y',\, \lambda z + z') \\ &= \Big((\lambda x + x') + (\lambda z + z'),\, (\lambda y + y) - (\lambda x + x'),\, (\lambda z + z') + (\lambda y + y'), \\ &\qquad (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z')\Big) \\ &= \lambda(x + z,\, y - x,\, z + y,\, x + y + 2z) \\ &\qquad + (x' + z',\, y' - x',\, z' + y',\, x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. On a

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, f \quad \iff \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - x = 0 \\ z + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

ce qui montre que $(-1,\, -1,\, 1)$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$. Comme ce vecteur est non nul, la famille $\big((-1,\, -1,\, 1)\big)$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

3. Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0,\, 0,\, 0)\}$, ce qui montre que f n'est pas injective (proposition 1.4). Puisque $\mathrm{rg}\, u = \dim(\mathrm{Im}(f)) \neq 4$, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$ donc f n'est pas surjective (proposition 1.4).

Exercice 9 :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E,\, F)$ et soit $g \in \mathscr{L}(F,\, G)$. Montrer que

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \quad \iff \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

On procède par double implications.

- $\Longrightarrow$ Supposons $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ et montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \subset G$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a

$$g(y) = g\big(f(y)\big) = (g \circ f)(x) = 0_G$$

  ce qui montrer que $y \in \mathrm{Ker}(g)$. On a donc bien $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
- $\Longleftarrow$ Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et montrons que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$. Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ par hypothèse, c'est-à-dire que $g\big(f(x)\big) = 0_G$. On a donc pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = 0_G$, d'où $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$.

Conclusion : $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.