Topologie et Calcul différentiel – TD 6: Topologie : Fonctions continues, ensembles compacts

05 mai 2023

Le but de ce TD est d'apprendre de savoir manier les fontions continues pour montrer que des ensembles sont ouverts, fermés, compacts, et d'utiliser les propriétés basiques sur les compacts.

Exercices sur les fonctions continues

Exercice 1 :

Soit (E, d) un espace métrique et f une application K-lipschitzienne définie sur une partie non vide A de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour tout $x \in E$

$$g(x) = \inf_{a \in A} \left(f(a) + K\, d(x, a) \right)$$

on définit un prolongement K-lipschitzien de E dans $\mathbb{R}$.

Montrons tout d'abord que g est un prolongement de f, c'est-à-dire que pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$.
Soit $x \in A$. Alors pour tout $a \in A$, comme f est K-lipschitzienne, on a

$$|f(x) - f(a)| \leqslant K \cdot d(x, a)$$

Donc on a $f(x) \leqslant f(a) + K \cdot d(x, a)$ avec égalité si $x = a$. Donc

$$g(x) = \inf_{a \in A} (f(a) + K \cdot d(x, a)) = f(x)$$

Donc g est un prolongement de f.

Montrons à présent que g est une fonction K-lipschitzienne.
Soit $(x, y) \in E^2$. Montrons que $|g(x) - g(y)| \leqslant K \cdot d(x, y)$. Il est ici préférable de différencier les cas selon si x et y sont dans A ou non.

— Si $(x, y) \in A^2$, alors $g(x) = f(x)$ car g prolonge f, donc

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y)| \leqslant K \cdot d(x, y)$$

.

— Supposons que $x \in E \backslash A$ et $y \in A$. Soit $a \in A$. Comme f est K-lipschitzienne, on a

$$f(a) + K \cdot d(x, a) - f(y) \leqslant K \cdot d(x, a) + K \cdot d(a, y)$$

En passant à la borne inférieure sur $a \in A$ à gauche de l'inégalité, il vient

$$g(x) - f(y) \leqslant K \cdot d(x, a) + K \cdot d(a, y)$$

Comme $y \in A$, on a $f(y) = g(y)$. Cette inégalité est vraie pour $a \in A$ quelconque. En particulier, pour $a = y$ on obtient

$$g(x) - g(y) \leqslant K \cdot d(x, y) + K \cdot d(y, y) = K \cdot d(x, y)$$

Montrons à présent que $g(y) - g(x) \leqslant K \cdot d(x, y)$. Comme f est K-lipschitzienne, on a :

$$f(y) - f(a) - K \cdot d(x, a) \leqslant K \cdot d(y, a) - K \cdot d(x, a) \leqslant K \cdot d(x, y)$$

En passant à la borne inférieure à gauche de l'inégalité, il vient que

$$g(y) - g(x) \leqslant K \cdot d(x,y)$$

Comme $|h| = \max\{h, -h\}$, on a bien montré que

$$|g(x) - g(y)| \leqslant K \cdot d(x,y)$$

— En remplaçant les rôles de x et de y dans l'inégalité précédente, l'ingalité $|g(x) - g(y)| \leqslant K \cdot d(x,y)$ est également vraie quand $x \in A$ et $y \in E\backslash A$.

— Supposons enfin que $(x,y) \in (E\backslash A)^2$. Soit $(a,b) \in A^2$.

$$f(a) + K \cdot d(x,a) - f(b) - K \cdot d(y,b) \leqslant |f(a) - f(b)| + K \cdot |d(x,a) - d(y,b)|$$

En prenant la borne inférieure sur les $a \in A$ à gauche de l'inégalité, il vient que

$$g(x) - (f(b) + K \cdot d(y,b)) \leqslant |f(a) - f(b)| + K \cdot |d(x,a) - d(y,b)|$$

C'est inégalité est vraie pour tout $a \in A$. En particulier, pour $a = b$, il vient

$$g(x) - (f(b) + K \cdot d(y,b)) \leqslant K \cdot |d(x,b) - d(y,b)|$$

Comme l'application $x \mapsto d(x,b)$ est 1-lipschitzienne, on a

$$g(x) - (f(b) + K \cdot d(y,b)) \leqslant K \cdot |d(x,y)|$$

et donc

$$g(x) \leqslant K \cdot d(x,y) + f(b) + K \cdot d(y,b)$$

Enfin en prenant la borne inférieure sur $b \in B$ à droite de l'inégalité, on obtient

$$g(x) \leqslant K \cdot d(x,y) + g(y)$$

et donc

$$g(x) - g(y) \leqslant K \cdot |d(x,y)|$$

En inversant les rôles de x et de y et par symétrie de la distance, on obtient que

$$g(y) - g(x) \leqslant K \cdot |d(x,y)|$$

et donc

$$|g(x) - g(y)| \leqslant K \cdot |d(x,y)|$$

Donc g est un prolongement K-lipschitzien de la fonction f.

Exercice 2 :

Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et E le sous-espace affine de $\mathscr{C}$ formé des fonctions f de $\mathscr{C}$ telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

On norme $\mathscr{C}$ par $\| \|_\infty$.

1. Montrer que E est fermé, de codimension finie à déterminer.

Montrons dans un premier temps que E est fermé dans $\mathscr{C}$. On remarque que $E = G_0 \cap G_1 \cap H$, où

$$G_0 = \{f \in \mathscr{C},\ f(0) = 0\},\ G_1 = \{f \in \mathscr{C},\ f(1) = 0\},\quad \text{et } H = \{f \in \mathscr{C},\ \int_0^1 f(x)dx = 1\}$$

Il suffit donc de montrer que les ensembles G_0, G_1 et H sont fermés dans $\mathscr{C}$.

On note

$$\varphi_0 : \mathscr{C} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi_0(f) = f(0) \text{ pour tout } f \in \mathscr{C}$$
$$\varphi_1 : \mathscr{C} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi_1(f) = f(1) \text{ pour tout } f \in \mathscr{C}$$
$$\psi : \mathscr{C} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \psi(f) = \int_0^1 f(x)dx \text{ pour tout } f \in \mathscr{C}$$

Ces trois applications sont 1-lipschitziennes, donc continues. En effet, si $(f, g) \in \mathscr{C}^2$, alors

$$|\varphi_0(f) - \varphi_0(g)| = |f(0) - g(0)| \leqslant ||f - g||_\infty$$

Le même calcul se fait pour φ_1. De même, par inégalité triangulaire de l'intégrale,

$$|\psi(f) - \psi(g)| = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leqslant \int_0^1 ||f - g||_\infty dx = ||f - g||_\infty$$

Alors, $G_0 = \varphi^{-1}(\{0\})$, $G_1 = \varphi^{-1}(\{1\})$ et $H = \psi^{-1}(\{1\})$ sont fermés dans $\mathscr{C}$ comme image réciproque de fermés de $\mathbb{R}$. Donc $E = G_0 \cap G_1 \cap H$ est fermé.

Par définition, trouver la codimension d'un espace affine, c'est trouver la codimension de son espace vectoriel associé. Ici, l'espace vectoriel associé à E est l'ensemble formé par les fonctions f de $\mathscr{C}$ telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Pour déterminer la codimention de V, il faut trouver un supplémentaire, et donc décomposer un élément quelconque de $\mathscr{C}$ en une somme de deux éléments : un dans V et un autre.

Soit $f \in \mathscr{C}$. On voit que la fonction $f - f(0)$ s'annule en 0, et que la fonction $x \mapsto f(x) - f(0) - x \cdot (f(1) - f(0))$ s'annule en 0 et en 1. Enfin on remarque que la fonction $x \mapsto x(1-x)$ s'annule en 0 et en 1 et que son intégrale entre 0 et 1 vaut $1/6$. Ainsi, après calcul de l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) - f(0) - x \cdot (f(1) - f(0))$, en notant $\alpha = \frac{f(0)+f(1)}{2}$, on en déduit que l'on peut décomposer f comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) - x \cdot (f(1) - f(0)) - 6\alpha x(1-x) + f(0) + x \cdot (f(1) - f(0)) + 6\alpha x(1-x) \\ &\in V + \mathrm{Vect}(1, x, x^2) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que V et $\mathrm{Vect}(1, x, x^2)$ sont en somme directe, ce qui est clair puisque si un polynôme de degré 2 s'annule en 0 et en 1 et que son intégrale vaut 0, il s'agit du polynôme nul. Donc la codimension de V est 3.

2. Montrer que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

On va commencer par calculer la distance de 0 à $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{C}$, alors $d(f, 0) = ||f - 0||_\infty = ||f||_\infty$. Donc $d(0, \mathscr{C}) = \inf\{||f||_\infty,\ f \in \mathscr{C}\}$. Ici, on se doute déjà que la distance vaut 1, et on peut même déjà se douter que la distance n'est pas atteinte (en faisant un ou deux dessins). Il ne reste plus qu'à démontrer que notre intuition est exacte, par double inégalité par exemple.

Si $||f||_\infty < 1$, alors $\forall x \in [0,1]$, $-1 < f(x) < 1$ donc $\int_0^1 f(x)dx < 1$ et donc $f \notin \mathscr{C}$. Donc nécessairement $d(0,\mathscr{C}) \geqslant 1$. On va maintenant introduire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de fonctions de E telle que $||f_n||_\infty \to 1$ quand $n \to +\infty$. Un dessin nous montre déjà l'idée, il suffit alors de la formaliser. On va poser (très naturellement après avoir fait un dessin), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n : x \mapsto \begin{cases} \alpha_n x & \text{si } x \in [0, \beta_n[\\ 1 + 1/n & \text{si } x \in [\beta_n, 1-\beta[\\ \alpha_n(1-x) & \text{si } x \in [1-\beta_n, 1] \end{cases}$$

Il faut à présent trouver les valeurs de α_n et β_n telles que $f_n \in E$. Comme il est clair que $f_n(0) = f_n(1) = 0$, il reste donc à s'assurer que f_n est continue en β_n (et en $1-\beta_n$, mais c'est automatique par un arguement de symétrie), et que l'intégrale de f_n soit égale à 1. Après calculs, on trouve $\alpha_n = n + 2 + \frac{1}{n}$ et $\beta_n = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, la fonction obtenue est bien dans E et elle vérifie $||f_n||_\infty = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ quand $n \to \infty$. Donc $d(0,\mathscr{C}) \leqslant d(0, f_n) = ||f_n||_\infty = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, et par conséquent $d(0,\mathscr{C}) \leqslant 1$. Comme on a déjà montré que $d(0,\mathscr{C}) \geqslant 1$, on a bien que $d(0,\mathscr{C}) = 1$.

Montrons enfin que la distance n'est pas atteinte. Soit $f \in \mathscr{C}$ d'intégrale égale à 1 et vérifiant $||f||_\infty = 1$. Comme $||f||_\infty = 1$ alors $\int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 1dx = 1$ avec égalité si et seulement si $f = 1$ car f est continue. Mais dans ce cas, $f(0) = 1 \neq 0$ donc $f \notin E$. Donc la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

Exercice 3 :

$\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fermé ou non.

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y \leqslant 2\}$;

L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y \end{array}$$

est continue (car polynomiale), et $]-\infty, 2]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{F_1 = f^{-1}(]-\infty, 2]) \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^2.}$$

2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y < 2\}$;

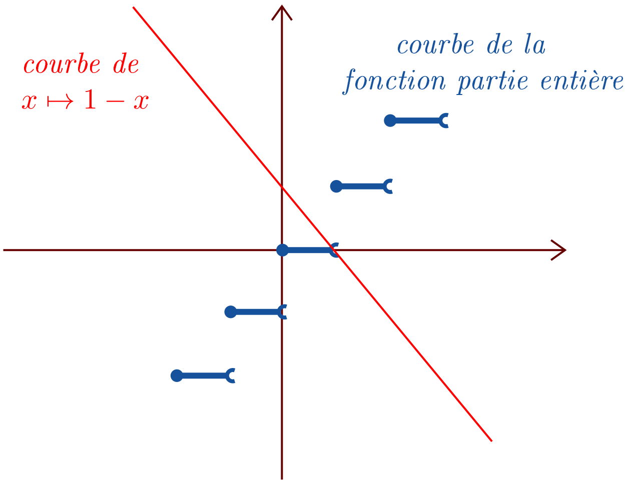
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 0$ et $y_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. On a alors $(x_n, y_n) \in F_2$ et

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,2) \notin F_2.$$

Donc

$$\boxed{F_2 \text{ n'est pas fermé dans } \mathbb{R}^2.}$$

3. $F_3 = \{x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant 1 - x\}$.



Sur le graphique, il semble que $F_3 =]-\infty, 1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. On a

$$\lfloor x_n \rfloor = 0 \ \text{ et } \ 1 - x_n = \frac{1}{n}$$

donc $x_n \in F_3$.
Puisque

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \notin F_3,$$

on en déduit que

$$\boxed{F_3 \text{ n'est pas fermé dans } \mathbb{R}.}$$

Exercices sur les ensembles compacts

Exercice 4 :

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1]^2; \mathbb{R})$. Montrer que

$$m(y) = \max_{x \in [0,1]} f(x, y), \ \text{ existe et est continue.}$$

Soit $y \in [0,1]$. Comme la fonction f est continue sur $[0,1]^2$, alors la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $[0,1]$ compact, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ceci montre que $m(y) = \max_{x \in [0,1]} f(x,y)$ existe.

Montrons à présent que la fonction m est continue. Il est bon de noter ici que m n'est pas toujours lipschitzienne, c'est le cas par exemple si $f(x,y) = \sqrt{||(x,y)||^2}$. On va essayer de le montrer avec la définition de la continuité.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $y \in [0,1]$. On veut montrer que $\exists \eta(y,\varepsilon) > 0$, $\forall y' \in [0,1] \cap]y - \eta(y,\varepsilon), y + \eta(y,\varepsilon)[$, $|m(y) - m(y')| < \varepsilon$. On a vu que pour tout $y' \in [0,1]$, $\exists x_{y'} \in [0,1]$ tel que $f(x_{y'}, y') = m(y')$. Comme f est continue, $\exists \eta(x_y, y, \varepsilon)$, $\forall (x', y') \in [0,1]^2 \cap BO((x_y, y), \eta(x_y, y, \varepsilon))$, $|f(x_y, y) - f(x', y')| < \varepsilon$.

Il est important ici de noter que même si y et y' sont proches l'un de l'autre, il est possible que x_y et $x_{y'}$ soient très éloignés. On ne peut donc pas espérer utiliser la continuité de la fonction $x \mapsto f(x,y)$

pour conclure.

Soit $y' \in [0,1]$. Si $(x_y, y') \in BO((x_y, y), \eta(x_y, y, \varepsilon))$, par continuité de f en (x_y, y) on a que $|f(x_y, y) - f(x_y, y')| < \varepsilon$. Ainsi,
$$m(y) = f(x_y, y) \leqslant f(x_y, y') + \varepsilon \leqslant m(y') + \varepsilon$$
De même, si $(x_{y'}, y) \in BO((x_{y'}, y'), \eta(x_{y'}, y', \varepsilon))$, par continuité de f en $(x_{y'}, y')$ on a que $|f(x_{y'}, y) - f(x_{y'}, y')| < \varepsilon$. Ainsi,
$$m(y') = f(x_{y'}, y') \leqslant f(x_{y'}, y) + \varepsilon \leqslant m(y) + \varepsilon$$
Prenons alors $\eta(y, \varepsilon) = \min(\eta(x_y, y, \varepsilon), \eta(x_{y'}, y', \varepsilon))$. On a alors $|m(y) - m(y')| < \varepsilon$, ce qui montre que m est continue.

Exercice 5 :

1. Soit (E, d) un espace métrique.

   (a) Soit K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrer l'existence de $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2) = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} d(x, y)$.

   L'ensemble $K_1 \times K_2$ muni de la distance
$$\begin{aligned} d' : (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) &\to \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto \max\left(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\right) \end{aligned}$$
   est compact (en tant que produit de compacts).
   De plus, l'application
$$\begin{aligned} f : K_1 \times K_2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto d(x_1, x_2) \end{aligned}$$
   est continue pour d'. En effet, pour tout $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2)$, on a :
$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| &= |d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \\ &\leqslant |d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) - d(y_1, y_2)| \\ &= |d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)| \\ &\leqslant 2d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$
   donc f est 1-lipschitzienne, donc continue.
   On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes.

   Il existe donc $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

   (b) Soit K un compact de E et F un fermé de E. Si $K \cap F = \emptyset$, montrer que $d(K, F) \neq 0$. Donner un contre-exemple dans le cas où K est seulement fermé.

   L'application $x \mapsto d(x, F)$ est continue sur K. En effet, pour tout $(x, y) \in K^2$ avec (par exemple) $d(x,F) \geqslant d(y,F)$, on a :

$$\begin{aligned}
|d(x,F)-d(y,F)| &= d(x,F)-d(y,F)\\
&= \inf_{z\in F}(d(x,z)) - d(y,F)\\
&\leqslant \inf_{z\in F}(d(x,y)+d(y,z)) - d(y,F)\\
&\leqslant d(x,y) + \inf_{z\in F}(d(y,z)) - d(y,F)\\
&= d(x,y) + d(y,F) - d(y,F)\\
&= d(x,y)
\end{aligned}$$

donc $x \mapsto d(x,F)$ est lipschitzienne, donc continue. Elle est donc bornée sur K et atteint ses bornes. Il existe donc $x \in K$ tel que $d(K,F) = d(x,F)$. Si $d(x,F) = 0$, comme F est fermé, $x \in F$. Mais $K \cap F = \emptyset$, donc c'est impossible.

$$\boxed{\text{On a donc } d(K,F) > 0.}$$

Si on suppose juste F fermé, donnons un contre-exemple dans $\left(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty\right)$: On prend $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant e^{-x}\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leqslant -e^{-x}\}$. K et F sont des fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n, e^{-n}) \in K$ et $b_n = (n, -e^{-n}) \in F$, et on a $||a_n - b_n||_\infty = 2e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{On a alors } d(K,F) = 0.}$$

2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $||.||_2$.
   (a) Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty,\, x\in F} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$.

Soit $m = \inf_{y\in F} f(y)$. Soit $M > m$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $z \in E$, $||z||_2 > A \Rightarrow f(z) > M$. On a

$$\inf_{y\in F} f(y) = \min\left(\inf_{y\in F\cap BF(0_E,A)} f(y), \inf_{y\in F\setminus BF(0_E,A)} f(y)\right).$$

Comme $\inf_{y\in F\setminus BF(0_E,A)} f(y) \geqslant M > m$, on a

$$\inf_{y\in F} f(y) = \inf_{y\in F\cap BF(0_E,A)} f(y).$$

Or $F \cap BF(0_E,A)$ est fermé et inclus dans $BF(0_E,A)$ qui est compact, donc $F\cap BF(0_E,A)$ est compact. Comme f est continue,

$$\boxed{\exists x \in F \cap BF(0_E,A),\ f(x) = m.}$$

   (b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Montrer l'existence de $x \in K$ et $y \in F$ tel que $d(x,y) = d(K,F)$.
   Donner un contre-exemple dans le cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Si $d(K,F)=0$, d'après la question 1.a, il existe $x\in K\cap F$, et on a alors $d(x,x)=0=d(K,F)$.
Sinon, on a montré qu'il existe $x_0\in K$ tel que $d(K,F)=f(x_0,F)$. L'application

$$\begin{aligned} F &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x_0,y) \end{aligned}$$

est alors continue, et on a $\lim\limits_{||x||\to+\infty, x\in F} f(x)=+\infty$. D'après la question 2.$a$,

$$\boxed{\exists y_0\in F,\ d(K,F)=d(x_0,y_0).}$$

Dans le cas où $E=\text{Vect}(\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\})$, muni de la norme $||.||_\infty$, si on prend $K=\{0_E\}$ et $F=\{\frac{n+1}{n}.e_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$.
F est fermé, et on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $d(0_E,\frac{n+1}{n}.e_n)=\frac{n+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ mais il n'existe pas de point $x_0\in F$ vérifiant $d(0_E,x_0)=1$.

Exercice 6 :

Dans chacun des cas suivants, dire si la partie A est compacte.

1. Dans $(\mathbb{R}^3,||.||_\infty)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2<1\}$.

   A est bornée, mais n'est pas fermée, donc pas compacte.

2. Dans $(\mathbb{R}^3,||.||_2)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z\in[1,2]\cup\{3\}\}$.

   A est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc A est fermée, mais A n'est pas bornée (car pour tout n, $(n+3,-n,0)\in A$), donc pas compacte.

3. Dans $(M_3(\mathbb{R}),|||.|||_\infty)$, $A=GL_3(\mathbb{R})$.

   A n'est pas bornée, car pour tout n, $n.I_3\in GL_3(\mathbb{R})$.

4. Dans $(M_3(\mathbb{R}),|||.|||_\infty)$, $A=SO_3(\mathbb{R})$.

   $SO_3(R)$ est borné (inclus dans la sphère unité pour la norme $||.||_2$). De plus, pour tout $A\in M_3(\mathbb{R})$, posons $\Psi(A)={}^tA.A$. Ψ est continue (chacun des coefficients de ${}^tA.A$ est une somme de produits de coefficients de A) et

   $$SO_3(\mathbb{R})=\det{}^{-1}(\{1\})\cap\Psi^{-1}(I_3).$$

   C'est donc un fermé borné, en dimension finie : c'est un compact.

5. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$, $A=\text{Vect}(\{x\mapsto x^k,\ k\in[\![0,10]\!]\})$

   A n'est pas bornée, car $x\mapsto n$ est dans A pour tout n.

6. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$, $A=\text{Vect}(\{x\mapsto x^k,\ k\in\mathbb{N}\})\cap S(0_E,1)$

   La sphère unité d'un espace de dimension infinie n'est jamais compacte (cf preuve du théorème de Riesz).

7. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$, $A=\text{Vect}(\{x\mapsto x^k,\ k\in[\![0,10]\!]\})\cap S(0_E,1)$

   A est compacte, car fermée et bornée dans un sous-espace de dimension finie.

Exercice 7 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(A, B) \subset E^2$ et pour tout $x_0 \in E$, on note

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\} \qquad \text{et } x_0 + A = \{x_0 + a,\ a \in A\}$$

1. Montrer que $A + B$ est compact lorsque A et B sont compacts.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A+B$, alors, pour chaque n, x_n s'écrit $a_n + b_n$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme A est compacte, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que :

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in A.$$

Comme B est compact, on peut extraire de la suite $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que :

$$b_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta \in B.$$

On a alors :

$$x_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + \beta \in A + B.$$

2. Montrer que $A + B$ est fermé dans E lorsque A est compact et B fermée dans E.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A + B$, qui converge vers $\lambda \in E$. On écrit, comme précédemment $x_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme A est compact, on extrait de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite :

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in A.$$

En ce cas :

$$b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda - \alpha.$$

Comme B est fermée, $\lambda - \alpha \in B$, donc $\lambda \in A + B$.

3. Montrer que lorsque A et B sont fermés, on ne peut rien dire.

On se place dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}.\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^{n^*} < \varepsilon$. On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2} - 1)^n \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ par récurrence sur n. Comme $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \cdot (\sqrt{2} - 1)^{n^*} \leqslant x \leqslant (m + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)^{n^*}$ et donc $0 \leqslant x - m \cdot (\sqrt{2} - 1)^{n^*} \leqslant (\sqrt{2} - 1)^{n^*} < \varepsilon$. On a montré que l'on pouvait approcher un élément x quelconque par un élément de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ à ε près, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. Donc $\mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Ainsi l'adhérence de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ est $\mathbb{R}$ tout entier. Il ne peut donc être fermé que s'il égale à l'ensemble $\mathbb{R}$. Comme il est dénombrable (car il est en bijection avec $\mathbb{N}^2$), mais que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, ils sont différents. Donc $\mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z}$ n'est pas fermé.

Exercice 8 :

On considère $E = [0, 1]^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]\}$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on définit

$$d_E(u, v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}.$$

1. Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E (c'est donc une suite de suites réelles bornées). Soit $u \in E$.

(a) On suppose que $u^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{d_E} u$. Montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0}^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} u_{n_0}$.

(b) Réciproquement, on suppose que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0}^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} u_{n_0}$. Montrer que $u^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{d_E} u$.

2. Montrer que E est compact.

Exercice 9 :

Soit (K, d_K) un espace métrique. Pour $(x,y) \in K^2$, on définit $\widetilde{d_K}(x,y) = \min(1, d_K(x,y))$.

1. Montrer que $\widetilde{d_K}$ est une distance sur K telle que : $\forall (x,y) \in K^2, \widetilde{d_K}(x,y) \leqslant 1$.

Soit $(x,y,z) \in K^3$.
▷ Positivité : comme d_K est une distance, on a $d_K(x,y) \geqslant 0$. De plus, $1 \geqslant 0$, donc $\widetilde{d_K}(x,y) \geqslant 0$.
▷ Symétrie :

$$\widetilde{d_K}(x,y) = \min(1, d_K(x,y)) = \min(1, d_K(y,x)) = \widetilde{d_K}(y,x).$$

▷ Définition :

$$\widetilde{d_K}(x,x) = \min(1, d_K(x,x)) = \min(1,0) = 0.$$

Réciproquement, si $\widetilde{d_K}(x,y) = 0$, on a $d_K(x,y) = 0$ (car $1 > 0$). Comme d_K est une distance, on en déduit $x = y$.
▷ Inégalité triangulaire :
Comme d_K est une distance, on a

$$\widetilde{d_K}(x,z) \leqslant \min(1, d_K(x,y) + d_K(y,z))$$

(a) Si $d_K(x,y) \geqslant 1$: on a alors

$$\widetilde{d_K}(x,z) \leqslant 1 = \min(1, d_K(x,y)) = \widetilde{d_K}(x,y) \leqslant \widetilde{d_K}(x,y) + \widetilde{d_K}(y,z)$$

(b) Si $d_K(y,z) \geqslant 1$: idem.

(c) Si $d_K(x,y) \leqslant 1$, $d_K(y,z) \leqslant 1$ et $d_K(x,y) + d_K(y,z) \geqslant 1$: on a alors :

$$\widetilde{d_K}(x,z) \leqslant 1 \leqslant d_K(x,y) + d_K(y,z) = \widetilde{d_K}(x,y) + \widetilde{d_K}(y,z)$$

(d) Si $d_K(x,y) + d_K(y,z) < 1$: on a alors

$$\widetilde{d_K}(x,z) \leqslant d_K(x,y) + d_K(y,z) = \widetilde{d_K}(x,y) + \widetilde{d_K}(y,z).$$

▷ Il est immédiat que : $\forall (x,y) \in K^2, \widetilde{d_K}(x,y) \leqslant 1$.

$$\boxed{\widetilde{d_K} \text{ est une distance sur } K \text{ telle que : } \forall (x,y) \in K^2, \widetilde{d_K}(x,y) \leqslant 1.}$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ et $l \in K$. Montrer que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_K} l \iff x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\widetilde{d_K}} l\,.$$

[$\Rightarrow$] On suppose que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_K} l$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$0 \leqslant \widetilde{d_K}(x_n, l) \leqslant \underbrace{d_K(x_n, l)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

Donc

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\widetilde{d_K}} l.}$$

[$\Leftarrow$] On suppose que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\widetilde{d_K}} l$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \widetilde{d_K}(x_n, l) < \varepsilon'.$$

Comme $\varepsilon' \leqslant 1$, on en déduit :

$$\forall n \geqslant N,\ d_K(x_n, l) < \varepsilon' \leqslant \varepsilon.$$

Donc

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_K} l.}$$

3. Montrer que si (K, d_K) est compact, alors $(K, \widetilde{d_K})$ est compact.

On suppose que (K, d_K) est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Comme (K, d_K) est compact, il existe une extraction φ et $l \in K$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d_K} l.$$

D'après la question précédente, on a alors

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\widetilde{d_K}} l.$$

Donc

$$\boxed{(K, \widetilde{d_K}) \text{ est compact.}}$$

Partie 2

Dans cette partie, (K, d_K) un espace métrique **compact**.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il n'existe pas de suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que : pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ distincts, $d_K(y_p, y_q) \geqslant \varepsilon$.

On suppose par l'absurde qu'une telle suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ existe. Comme K est compact, il existe une extraction φ et $l \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ d_K(x_{\varphi(n)}, l) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors

$$d_K(x_{\varphi(N)}, x_{\varphi(N+1)}) \leqslant d_K(x_{\varphi(N)}, l) + d_K(x_{\varphi(N+1)}, l) < \frac{2\varepsilon}{3},$$

ce qui est absurde. Finalement,

$$\boxed{\text{Une telle suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \text{ n'existe pas.}}$$

(b) En déduire qu'il existe un ensemble **fini** $A_\varepsilon \subset K$ tel que $K \subset \bigcup_{a\in A_\varepsilon} BO(a, \varepsilon)$.

Supposons par l'absurde qu'un tel ensemble n'existe pas. En particulier, K est non vide (sinon, $A_\varepsilon = \emptyset$ convient). On va construire par récurrence une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ qui vérifie la propriété :pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ distincts, $d_K(y_p, y_q) \geqslant \varepsilon$.
▷ On choisit $y_0 \in K$ quelconque (possible car $K \neq \emptyset$).
▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$ tels que : pour tous $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ distincts, $d_K(y_p, y_q) \geqslant \varepsilon$.
Comme $\{y_0, \ldots, y_n\}$ est fini, par notre hypothèse, on a $K \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} BO(y_i, \varepsilon)$. Donc il existe $y_{n+1} \in K$ tel que $y_n \notin \bigcup_{i=0}^{n} BO(y_i, \varepsilon)$. Alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $d_K(y_i, y_{n+1}) \geqslant \varepsilon$.
▷ Finalement, on a construit par récurrence une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la propriété :pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ distincts, $d_K(y_p, y_q) \geqslant \varepsilon$. C'est impossible d'après la question précédente. On en déduit donc que

$$\boxed{\text{il existe un ensemble } \textbf{fini } A_\varepsilon \subset K \text{ tel que } K \subset \bigcup_{a\in A_\varepsilon} BO(a, \varepsilon).}$$

2. Montrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ est dense dans K.

Soit $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $A_{1/n}$, il existe $a_n \in A_{1/n}$ tel que $d_K(x, a_n) < \dfrac{1}{n}$. On a donc

$$\underbrace{a_n}_{\in A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

donc

$$\boxed{A \text{ est dense dans } K.}$$

3. Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de K qui est dénombrable et dense dans K.

$A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ est une union dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable.

Partie 3

Dans cette partie, (K, d_K) un espace métrique **compact** tel que $\forall (x, y) \in K^2, d_K(x, y) \leqslant 1$. On considère $E = [0, 1]^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]\}$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on définit

$$d_E(u, v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}.$$

On admet que d_E est une distance sur E.

D'après la partie 2, il existe une partie $A \subset K$ dénombrable et **dense** dans K. Comme A est dénombrable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. On définit alors l'application

$$f : \begin{array}{ccc} (K, d_K) & \to & (E, d_E) \\ x & \mapsto & (d_K(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Soit $(x, y) \in K^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{|d_K(x, a_n) - d_K(y, a_n)|}{2^n} \leqslant |d_K(x, a_n) - d_K(y, a_n)| \leqslant d_K(x, y).$$

Donc $d_E(f(x), f(y)) \leqslant d_K(x, y)$.

$$\boxed{f \text{ est 1-lipschitzienne.}}$$

2. Montrer que f est injective.

Soit $(x, y) \in K^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Comme A est dense dans K, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On a alors

$$d_K(x, b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n \in A$, donc $d_K(x, b_n) = d_K(y, b_n)$. Ainsi $d_K(y, b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

Par unicité de la limite, on a donc $x = y$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

3. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathscr{E}$ tel que : pour toute distance d sur $\mathscr{E}$, l'espace métrique $(\mathscr{E}, d)$ n'est pas compact.

Posons $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$. Supposons qu'il existe une distance d sur $\mathscr{E}$ telle que $(\mathscr{E}, d)$ soit compact.
$\triangleright$ D'après la partie 1, il existe alors une distance $\tilde{d}$ sur $\mathscr{E}$ telle que $(\mathscr{E}, \tilde{d})$ soit compact et telle que $\forall (x, y) \in \mathscr{E}^2, \tilde{d}(x, y) \leqslant 1$.
$\triangleright$ D'après la question 7, il existe une injection $f : \mathscr{P}(E) \to E$: ABSURDE.

$$\boxed{\text{Pour toute distance } d \text{ sur } \mathscr{P}(E), \text{ l'espace métrique } (\mathscr{P}(E), d) \text{ n'est pas compact.}}$$

Exercice 10 :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit K un compact non vide de E.
Soit U un ouvert de E tel que $K \subset U$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, K)$ est continue sur E.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\forall z \in K,\ d(x, K) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

D'où en prenant la borne inférieure :

$$d(x, K) \leqslant d(x, y) + d(y, K),$$

ce qui donne

$$d(x, K) - d(y, K) \leqslant d(x, y).$$

On peut échanger les rôles de x et de y, ce qui permet de démontrer :

$$|d(x, K) - d(y, K)| \leqslant d(x, y).$$

L'application $x \mapsto d(x, K)$ est donc 1-lipschitzienne sur E. Elle est donc continue sur E.

2. Montrer que :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in K,\ BO(x, r) \subset U.$$

La réponse à la question précédente n'utilise pas la compacité de K. On peut donc montrer de la même manière que l'application

$$\begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d(x, E \backslash U) \end{array}$$

est continue. K étant compact, cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons $\delta = \min\{d(x, E\backslash U),\ x \in K\}$. Il existe donc $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, E\backslash U) = \delta$.
Supposons par l'absurde $\delta = 0$. Alors $x_0 \in \overline{E\backslash U}$. Or $E\backslash U$ est fermé. Donc $x_0 \in E\backslash U$. Ceci contredit $K \subset U$. On a donc $\delta > 0$.
Par définition de δ,

$$\forall x \in K,\ d(x, E\backslash U) \geqslant \delta.$$

On en déduit :

$$\forall x \in K,\ BO(x, \delta) \subset U.$$

Exercice 11 :

Soit (K, d) un compact non vide. On pose $E = \mathscr{C}^0(K, \mathbb{R})$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K, on définit $||.||_a : E \to \mathbb{R}$ par :

$$||f||_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n}.$$

1. Justifier que pour tout $f \in E$, $||f||_a$ est bien défini.

La fonction f est continue sur K qui est compact, et est donc bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $|f(x)| \leqslant M$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|f(a_n)|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$, donc la série $\sum \frac{|f(a_n)|}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

$$\boxed{||f||_a \text{ est donc bien défini.}}$$

2. Montrer que $||.||_a$ est une norme sur E si et seulement si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans K.

▷ $||.||_a$ est positive.
▷ $||f+g||_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(a_n)+g(a_n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|g(a_n)|}{2^n} = ||f||_a + ||g||_a$.
▷ $||\lambda.f||_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda \times f(a_n)|}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| \times \frac{|f(a_n)|}{2^n} = |\lambda| \times ||f||_a$.
▷ Il reste à vérifier si $||.||_a$ est définie. On a bien $||0_E||_a = 0$.
$\Longrightarrow$: Par contraposée, si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans K, soit $x \in K \backslash \overline{\{a_n, n \in \mathbb{N}\}}$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $BO(x, \epsilon) \cap \{a_n, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.
Considérons la fonction

$$\begin{aligned} g : &K \to \mathbb{R} \\ &y \mapsto \max(0, \epsilon - d(x,y)) \end{aligned}$$

g est 1-lipschitzienne, donc continue. De plus, g est non nulle, car $g(x) = \epsilon$. Enfin, $||g||_a = 0$. $||.||_a$ n'est donc pas définie, donc n'est pas une norme.
$\Longleftarrow$ Si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans K, soit $f \in E$ tel que $||f||_a = 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = 0$.
Soit $\alpha \in K$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers α. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, donc par continuité de f, $f(x) = 0$.
On a donc bien $f = 0_E$ et $||.||_a$ est une norme.

$$\boxed{\text{On a bien montré que } ||.||_a \text{ est une norme} \Leftrightarrow \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est dense dans } K.}$$

3. On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha \cdot N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta \cdot N_1(x)$. Montrer que si a et b sont deux suites denses dans K telles que
$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$$
alors les normes $||.||_a$ et $||.||_b$ ne sont pas équivalentes

Supposons (quitte à intervertir a et b) qu'il existe $\alpha \in \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\alpha \notin \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = a_{n_0}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Posons $\eta = \min_{n \leqslant N+n_0} d(\alpha, b_n)$.

$$\begin{aligned} f : &K \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \max(0, \eta - d(\alpha, x)). \end{aligned}$$

On a alors $||f||_a \geqslant \frac{\eta}{2^{n_0}}$ et $||g||_a \leqslant \sum_{k=N+n_0+1}^{+\infty} \frac{\eta}{2^k} = \frac{\eta}{2^{N+n_0}}$. On a donc $\frac{||g||_a}{||f||_a} \leqslant \frac{1}{2^N} < \epsilon$.

$$\boxed{\text{Les normes } ||.||_a \text{ et } ||.||_b \text{ ne sont donc pas équivalentes.}}$$

Exercice 12 :

Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \qquad d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que nous noterons α.

L'application

$$\begin{aligned} g :& E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto d(x, f(x)) \end{aligned}$$

est continue (en tant que composée d'application continues), donc est bornée et atteint ses bornes. Soit $\alpha \in \mathscr{E}$ tel que $d(\alpha, f(\alpha)) = \min(\{d(x, f(x)), x \in E\})$.
Si $f(\alpha) \neq \alpha$, on a $d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha))$, ce qui est absurde d'après la définition de α.
α est donc un point fixe de f.
Soit β un point fixe de f, on a $d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta)$, donc $\alpha = \beta$.

$\boxed{\alpha \text{ est donc l'unique point fixe de } f.}$

2. Soit x_0 un point quelconque de E. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d(\alpha, x_n)$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \alpha$, alors $u_n = u_{n_0} = \alpha$ pour tout $n \geqslant n_0$ et donc $\forall n \geqslant n_0$, $x_n = \alpha \to \alpha$. Sinon,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = d(f(\alpha), f(x_n)) < d(\alpha, x_n) = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. Comme elle est minorée en 0, elle converge.
Notons ℓ sa limite. On veut montrer que $\ell = 0$.
Supposons (par l'absurde) que $\ell > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante strictement, on a $u_n > \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact E, donc on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons β sa limite. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\alpha, x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, \beta) = \ell$.
De plus, f étant continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = d(\alpha, f(\beta)) \geqslant \ell.$$

Ceci est absurde, car $d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = \ell$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \beta = \alpha.}$

3. Donner un contre-exemple dans le cas où E est un espace vectoriel normé.

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \\ f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

Exercice 13 :

Pour un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on pose :

$$\phi([a, b]) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[a + 2\,\frac{b-a}{3}, b\right].$$

Et pour une réunion finie de segments disjoints :

$$\phi\left(\cup_{k=1}^{p} I_k\right) = \cup_{k=1}^{p} \phi(I_k).$$

On définit alors la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $[0,1]$ par :

$$K_0 = [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = \phi\left(K_n\right).$$

On a donc :

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \text{ et } K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

1. Montrer que si $n \geq 1$, alors K_n est la réunion des 2^n segments de la forme :

$$\left[a_n, a_n + \frac{1}{3^n}\right] \text{ où } a_n \in \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_k}{3^k},\ \text{où } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \epsilon_k \in \{0, 2\}\right\}.$$

> Petite récurrence simple.

2. On pose :

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k},\ \text{où } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \{0, 2\}\right\}.$$

Montrer que K est un compact non vide.

> Les K_n sont des compacts (réunions finis de segments) emboîtés, et non vides. Le théorème des fermés emboîtés nous assure que K est non vide. C'est de plus, une intersection de fermés de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé dans le compact $K_0 = [0,1]$. C'est donc un compact.

3. Quel est son intérieur ? Dans $\mathbb{R}$, bien sûr !

> Son intérieur est vide, en effet si
>
> $$(x, y) \in K^2,\ x < y \text{ alors } x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ et } y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^k},$$
>
> où
>
> $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (a_k, b_k) \in \{0, 2\}^2.$$
>
> Comme $x \neq y$, on a
>
> $$p = \min\left(\{k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \neq b_k\}\right) \text{ existe et est dans } \mathbb{N}^*.$$
>
> On a alors :
>
> $$x = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}$$
>
> et
>
> $$y = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^k},$$
>
> et donc le réel
>
> $$z = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^{p+1}} \text{ n'est pas dans }]x, y[\cap K.$$
>
> Ce qui montre que
>
> $$\boxed{\overset{\circ}{K} = \emptyset}.$$

4. Quels sont les points isolés de K ?

K ne possède aucun point isolé, car si $x \in K$ et $\epsilon > 0$, alors si

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ et si } \frac{1}{2_0^k} < \frac{\epsilon}{2},$$

alors le point défini par :

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^k}, \text{ où } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = \begin{cases} a_k & \text{si } k \neq k_0 \\ 2 - a_{k_0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

vérifie

$$y \in K \text{ et } |x - y| \leq \epsilon.$$

5. K est-il dénombrable ?

Non ! Car K est en bijection avec :

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \text{ qui n'est pas dénombrable.}$$

Cela se démontre par procédé diagonal...

Exercice 14 :

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni des deux normes :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_{\infty,[0,1]} \overset{\text{Def}}{=} \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_{1,[0,1]} \overset{\text{Def}}{=} \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

1. Existe-t-il α et/ou β dans $\mathbb{R}_+^*$, tels que :

$$\forall f \in E,\ \alpha \times \|f\|_{1,[0,1]} \leq \|f\|_{\infty,[0,1]} \leq \beta \times \|f\|_{1,[0,1]} \ ?$$

(On justifiera les existences ou non existences de α et β).

(a) $\alpha = 1$ convient, car, si $f \in E$, on a :

$$\|f\|_{1,[0,1]} = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_{\infty,[0,1]}\, \mathrm{d}t = \|f\|_{\infty,[0,1]}.$$

(b) β n'existe pas, car si on prend

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ :\ x \mapsto x^n,$$

alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1 \text{ et } \|f_n\|_{1,[0,1]} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer que tout fermé de E pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$ est aussi fermé dans E pour la norme $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$.

Soit F_1 un fermé de E pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_1^{\mathbb{N}}$ qui converge pour la norme $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$ vers un élément $\lambda \in E$. On a alors :

$$\|x_n - \lambda\|_{1,[0,1]} \leq \|x_n - \lambda\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite converge aussi vers λ pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$. Mais, comme F_1 est fermé pour cette norme, on obtient :

$$\lambda \in F_1 \text{ donc } F_1 \text{ est fermé dans } E \text{ pour la norme } \| \ \|_{\infty,[0,1]}.$$

3. Montrer que tout compact de E pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$ est aussi compact pour la norme $\| \ \|_{1,[0,1]}$.

Soit K un compact pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, alors d'après la propriété de compacité de K, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$ vers un élément $\lambda \in K$. Mais alors :

$$\|x_{\varphi(n)} - \lambda\|_{1,[0,1]} \leq \|x_{\varphi(n)} - \lambda\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, on a extrait une sous-suite qui converge dans K pour la norme $\| \ _{1,[0,1]}$, ce qui montre la compacité de K pour cette norme.

4. Donner un exemple de sous-ensemble de E qui est fermé pour $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$ mais pas pour $\| \ \|_{1,[0,1]}$. Justifier.

Prenons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ : \ x \mapsto x^n.$$

Alors

$$F = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

est fermé pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$ mais pas pour $\| \ \|_{1,[0,1]}$. En effet,

(a) Il n'est pas fermé pour $\| \ \|_{1,[0,1]}$ car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour cette norme, et $0 \notin F$.

(b) Il est fermé pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$, car les seules suites de F qui convergent dans E sont les suites stationnaires. Les limites sont alors la valeur pour laquelle la suite stationne.

5. Donner une exemple de sous-ensemble de E qui est compact pour $\| \ \|_{1,[0,1]}$ mais pas pour $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$. Justifier.

Prenons :

$$K = F \cup \{0\}.$$

Alors K est compact pour la norme $\| \ \|_{1,[0,1]}$ mais pas pour $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$. En effet :

(a) K n'est pas compact pour la norme $\| \ \|_{\infty,[0,1]}$, car la suite

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de valeurs d'adhérence.}$$

(b) K est compact pour la norme $\| \ \|_{1,[0,1]}$, car de toute suite on peut extraire soit, une sous-suite stationnaire, soit une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes dans K.