Suites et Séries – TD$_{16}$

26-27 décembre 2022

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\sqrt{n})^n} z^n$
2. $\displaystyle\sum_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n$
3. $\displaystyle\sum_n n\, z^{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_n \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^{3n}$
5. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{2+(-1)^n}{(3+(-1)^n)}\right)^n z^n$
6. $\displaystyle\sum_n \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$

1. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\sqrt{n})^n} z^n$:
   Soit $r > 0$. On a :
   $$\frac{1}{(\sqrt{n})^n} r^n = \exp\left(n\ln(r) - \frac{1}{2}n\ln n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   Donc :
   $$\boxed{R = +\infty}$$
2. $\displaystyle\sum_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n$:
   On a :
   $$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} &= \exp\left(n^3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \exp\left(n^3\left(\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(n + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(n)\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |\exp(n)| = \exp(n)$$
   On en déduit que R est égal au rayon de convergence de la série $\sum_n e^n z^n$, donc :
   $$\boxed{R = \frac{1}{e}}$$
3. $\displaystyle\sum_n n\, z^{n^2}$:
   Cette série est égale à $\sum_p a_p z^p$ avec pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = n$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = n^2$, et $a_p = 0$ sinon.

Ici nous sommes dans un cas où la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

Soit $r > 0$.

— Si $r < 1$ alors $a_p r^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Si $r > 1$ alors la suite $(a_p r^p)_{p \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En effet, elle admet une sous-suite divergente : en notant $\phi : p \mapsto p^2$ on a $(a_{\phi(p)} r^{\phi(p)})_{p \in \mathbb{N}} = (p\, r^{p^2})_{p \in \mathbb{N}}$, cette sous-suite tend vers $+\infty$.

$$\boxed{R = 1}$$

4. $\displaystyle\sum_n \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^{3n}$:

- **Méthode 1 :**
Soit $r > 0$. Utilisons la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}\frac{n^{3n}}{(3n)!} r^{3n} &\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{3n}}{\sqrt{6\pi n}} \left(\frac{e\, r}{3n}\right)^{3n} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6\pi n}} \left(\frac{e\, r}{3}\right)^{3n}\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{n^{3n}}{(3n)!} r^{3n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $r \leqslant \frac{3}{e}$. On en déduit que $R = \frac{3}{e}$.

- **Méthode 2 :**
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \frac{n^{3n}}{(3n)!}$. Utilisons le critère de d'Alembert pour les *séries numériques* :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1} z^{3(n+1)}}{a_n z^{3n}}\right| &= \frac{(n+1)^{3n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^{3n}} |z|^3 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} |z|^3 \\ &= \exp\left(3n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} |z|^3 \\ &= \exp\left(3n \left(\frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} |z|^3 \\ &= \exp\left(3 + \underset{n \to +\infty}{o}(1)\right) \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} |z|^3 \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e^3}{27} |z|^3\end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{e^3}{27} |z|^3 = 1 \iff |z| = \frac{3}{e}$$

Alors en déduit que la série numérique $\sum_n a_n z^{3n}$ converge si $|z| < \frac{3}{e}$ et diverge si $|z| > \frac{3}{e}$. D'où :

$$\boxed{R = \frac{3}{e}}$$

5. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}\right)^n z^n$:
Pour tout entier n on a :
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}\right)^n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
On conjecture alors que $R = \min\left\{\frac{4}{3}, 2\right\} = \frac{4}{3}$. Montrons-le.
Soit $r > 0$. On pose pour tout entier n : $a_n = \frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}$.
   — Si $r < \frac{4}{3}$ alors pour tout nombre entier n :
$$|a_n| r^n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   Donc la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   — Si $r > \frac{4}{3}$ alors :
$$|a_{2n}| r^{2n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} r^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   Donc la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Conclusion :
$$\boxed{R = \frac{4}{3}}$$

6. $\displaystyle\sum_n \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$: On a pour tout entier n :
$$\begin{aligned}
\tan(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \tan\left(\pi n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right)\\
&= \tan\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \tan\left(\pi n + \frac{\pi}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \tan\left(\frac{\pi}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,n}
\end{aligned}$$
Donc
$$\left|\tan(\pi\sqrt{n^2+1})\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{\pi}{2\,n}\right|$$
Comme le rayon de convergence de la série $\sum_n \frac{\pi}{2\,n}$ est égal à 1 (d'après la règle de d'Alembert par exemple), alors :
$$\boxed{R = 1}$$

Exercice 2

1. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Comparer R avec le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_n a_n^2 z^n$.

Soit $r > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $a_n^2 r^n = (a_n \sqrt{r}^n)^2$.

— Si $\sqrt{r} < R$ (c'est-à-dire $r < R^2$) alors $(a_n \sqrt{r}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $(a_n^2 r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. D'où $R' \geqslant R^2$.

— Si $\sqrt{r} > R$ (c'est-à-dire $r > R^2$) alors $(a_n \sqrt{r}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc $(a_n^2 r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus. D'où $R' \leqslant R^2$.

Conclusion :

$$\boxed{R' = R^2}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Donner en fonction de a le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_n \frac{a^{n^2}}{(2n)!} z^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{a^{n^2}}{(2n)!} > 0$. On applique alors le critère de d'Alembert :

$$\frac{\dfrac{a^{(n+1)^2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{a^{n^2}}{(2n)!}} = \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a \leqslant 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{R = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}}$$

Exercice 3

Soit la série entière $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ de rayon de convergence R. On définit sa fonction somme :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \end{array} \right.$$

1. Trouver le rayon de convergence R.

On a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$. D'où R est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$, qui est égal à 1 (d'après le critère de d'Alembert, par exemple).

$$\boxed{R = 1}$$

2. Étudier la convergence de la série numérique $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ pour $x = R$ et pour $x = -R$.

— **Cas $x = 1$:**
Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ a la même nature que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Cette dernière est une série de Riemann divergence, donc

$$\boxed{\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ diverge.}}$$

— **Cas $x = -1$:**
La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Donc, d'après le critère des séries alternées :

$$\boxed{\sum_n (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ converge.}}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty}$$

4. On considère la série entière $\sum_n \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] z^n$. On note R' son rayon de convergence et g sa fonction somme.
   (a) Montrer que $R' = 1$.

D'après le développement limité du sinus on a :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

De même :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)\\
&= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n^{3/2}}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n^{3/2}}\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&= \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{3n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = -\frac{1}{2n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

C'est-à-dire :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que R' est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{1}{2n^{3/2}} z^n$, qui est égal à 1 (par critère de d'Alembert).

$$\boxed{R' = 1}$$

(b) Montrer que g se prolonge par continuité en $x = 1$.

On applique le théorème de continuité radiale (*théorème 3.5 p.98*), avec $z_0 = 1 \in \mathrm{S}(0, 1)$: $\sum_n \frac{1}{2n^{3/2}} z_0^n$ converge (série de Riemann), donc g se prolonge par continuité lorsque $x \to 1^-$, et on a :

$$g(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] = -\sin(1)$$

$$\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en } 1 \text{ avec } g(1) = -\sin(1)}$$

(c) En déduire que $(1 - x)S(x) \to 0$ quand $x \to 1^-$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \eta, 1[$:

$$|S(x) - \sin(1)| < \epsilon$$

Donc,

$$\begin{aligned}(1 - x)|S(x)| &\leqslant \eta|S(x) - S(1)| + \eta|S(1)| \\ &\leqslant \eta\epsilon + \eta \sin(1) \\ &\underset{(\eta,\epsilon)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} (1 - x)S(x) = 0}$$

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe un unique couple de suites réelles $\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 \\ a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n \end{cases}$$

- **Existence :** par récurrence sur n.
  - Initialisation : pour $n = 0$, $(1 + \sqrt{2})^n = 1$. On peut donc prendre $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 0 \in \mathbb{N}$.
  - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Alors :

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n(1 + \sqrt{2}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

  On pose alors $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Il est évident que $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} \in \mathbb{N}$.

— Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Cela justifie bien l'existence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Unicité :** supposons qu'il existe deux couples de suites de nombres entiers $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{2}$$

Soit n un nombre entier. Si $b_n \neq \beta_n$ on peut écrire :

$$\sqrt{2} = \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n - b_n}$$

Cela voudrait dire que $\sqrt{2}$ est un nombre rationel : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Absurde.
On en déduit alors que $\beta_n = b_n$, et par conséquent $a_n = \alpha_n$. D'où l'unicité.

$$\boxed{\exists!((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la Formule du binôme :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^p + \sqrt{2} \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} 2^p\end{aligned}$$

Par unicité de a_n et b_n démontrée dans la question précédente, on a :

$$a_n = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^p \text{ et } b_n = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

Donc, en utilisant la fomrule du binôme on obtient :

$$\begin{aligned}a_n - b_n\sqrt{2} &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^p - \sqrt{2} \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} 2^p \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (\sqrt{2})^{2p} - \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} (\sqrt{2})^{2p+1} \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (-1)^{2p} (\sqrt{2})^{2p} + \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} (-1)^{2p+1} (\sqrt{2})^{2p+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\sqrt{2})^k \\ &= (1-\sqrt{2})^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n}$$

3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

D'après les questions (1) et (2) on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \\ b_n & = & \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.}$$

4. Déterminer le rayon de convergence des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.

On note R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_n b_n z^n$ respectivement.
On a :

$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2} \text{ et } |b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2}$$

De plus, le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (1+\sqrt{2})^n z^n$ est égal à $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$, donc :

$$\boxed{R_a = R_b = \sqrt{2}-1}$$