Suites et Séries – TD_{11}

21-22 novembre 2021

Exercice 1

Un jeu de 52 cartes est composé de 13 cartes différentes (as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame et roi) qui existent chacune en 4 couleurs différentes (pique ♠, cœur ♡, carreau ♢ et trèfle ♣).

1. (a) On tire 5 cartes en même temps. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?
2. (a) On tire 5 cartes l'une après l'autre sans remise. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?
3. (a) On tire 5 cartes l'une après l'autre avec remise. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?

Exercice 2

Vous êtes responsable d'une usine qui produit des téléphones portables. Des statistiques ont montré qu'un téléphone fabriqué sur 10000 est défectueux. Une entreprise vient vous voir pour vous vendre son nouveau test pour détecter automatiquement les téléphones défectueux. Si le téléphone est défectueux, le test est positif à 99% et si le téléphone n'est pas défectueux, le test est positif à $0,1\%$. Est-ce une bonne idée d'utiliser ce test dans votre usine ?

Exercice 3

Quelle est la probabilité qu'en lançant 6 dés équilibrés, on obtienne 6 résultats tous différents ?

Exercice 4

On considère une réunion de $n \geqslant 2$ personnes. On considère qu'il y a autant de chance qu'une personne soit un homme ou une femme.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait des personnes des deux sexes (évènement A) ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus une femme (évènement B) ?
3. Donner sans calcul supplémentaire la probabilité de $A \cap B$.

Exercice 5

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire au hasard et sans remise deux boules simultanément, puis deux boules simultanément, etc. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boule dans l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

Exercice 6

Soit $(p_1, p_2) \in]0, 1[^2$. On dispose de deux pièces numérotée 1 et 2. Quand on les lance, la pièce 1 a une probabilité p_1 de tomber sur « pile », la pièce 2 une probabilité p_2. On commence par lancer la pièce 1. Si elle tombe sur « pile », on la relance, sinon on lance la pièce 2. Ensuite on recommence : on lance la pièce 1 après un « pile », la pièce 2 après un « face » et ainsi de suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que le n-ième lancer donne « pile » ?

Exercice 7 : le paradoxe des anniversaires

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement au hasard n jetons **avec remise** et on s'intéresse à la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plusieurs fois.
   (a) Proposer un univers Ω modélisant cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}$ que l'on considère naturellement sur cet univers ?
   (b) Proposer un évènement $A_n \subset \Omega$ qui modélise « aucun jeton n'est tiré plusieurs fois ».
   (c) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. (a) Parmi une classe de n élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour (on suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février) ?
   (b) À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure ou égale à 50% ? Ce résultat vous parait-il surprenant ?