MATH2307P – QCM$_5$

15 mai 2023

1. Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique

$$\chi_A = -(X-1)(X-2)(X-3)$$

alors A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Réponse – Vrai

Car A a trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Donc

$$\sum_{k=1}^{3} \dim\big(E_A(k)\big) \geqslant 3$$

Donc, comme $\dim\big(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})\big) = 3$, il y a égalité.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$[u \text{ est bijective}] \iff \big[0 \notin \mathrm{Sp}(u)\big]$$

Réponse – Vrai

Par définition des espaces propres, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{id}_E)$, donc

$$E_u(0) = \mathrm{Ker}(u)$$

Comme nous avons affaire à un *endomorphisme* d'un espace vectoriel de *dimension finie*, le résultat en découle.

3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, alors le coefficient de X^{n-1} dans χ_A vaut $\mathrm{Trace}(A)$.

Réponse – Faux

C'est $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Trace}(A)$.

4. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$$

Réponse – Vrai

C'est le théorème de d'Alembert. Toute fonction polynomiale complexe de degré $\geqslant 1$ a une racine (et donc, par récurrence, toute fonction polynomiale est scindée).

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$[\chi_u \text{ scindé}] \iff [u \text{ diagonalisable}]$$

Réponse – Faux

(a) ($\Leftarrow$) C'est vrai.

(b) ($\Rightarrow$) On obtient seulement que u est trigonalisable. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas diagonalisable, mais son polynôme caractéristique est scindé.

6. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, alors

$$[A \text{ diagonalisable}] \iff \left[\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim\big(E_A(\lambda)\big) = \mathrm{mult}_A(\lambda)\right]$$

Réponse – Vrai

C'est le théorème 3.1.

7. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, alors A est trigonalisable.

Réponse – Vrai

Oui, car son polynôme caractéristique est scindé (théorème 3.2 et remarque 3.12).

8. Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, alors

$$[A \cdot B = B \cdot A] \implies \left[\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ P^{-1} \cdot A \cdot P \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C}) \text{ et } P^{-1} \cdot B \cdot P \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})\right]$$

Réponse – Vrai

C'est le théorème 3.4.

9. Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, alors

$$\left[\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ P^{-1} \cdot A \cdot P \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C}) \text{ et } P^{-1} \cdot B \cdot P \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})\right] \implies [A \cdot B = B \cdot A]$$

Réponse – Faux

Il n'y aucune raison pour que deux matrices triangulaires commutent ! Par exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ne commutent pas.

10. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Réponse – Vrai

(a) La matrice est triangulaire, les valeurs propres et leurs multiplicités sont sur la diagonale (c'est le calcul du polynôme caractéristique). Ici

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\,(\lambda - 1)^2$$

(b) 1 est donc de multiplicité 2, il faut calculer la dimension de son espace propre. Or, il est clair que les deux premiers vecteurs sont dans $E_A(1)$, donc

$$\dim(E_A(1)) \geqslant 2 \quad \text{donc} \quad \dim(E_A(1)) = 2$$

La matrice est diagonalisable.