MATH2307P – QCM$_1$

15 février 2023

1. $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

   Réponse – Faux

   Il possède des familles libres infinies, par exemple
   $$\left(x \longmapsto x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. L'ensemble
   $$\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\,y=0\Big\}$$
   est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   Réponse – Faux

   Il n'est pas stable par addition. $(1,0)+(0,1)=(1,1)$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par
   $$\big\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant 0\big\}$$
   est $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   Réponse – Vrai

   Soit F le sous-espace vectoriel cherché.
   (a) Si $f\geqslant 0$, $f\in F$ et donc $-f\in F$.
   (b) Si $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on écrit
   $$f=f^+-f^-$$
   et f^+ est continue dans F et f^- est continue dans F, donc $f\in F$.

4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (espace vectoriel des suites réelles), on rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire vers 0 si elle vérifie
   $$\exists\, n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N},\ [k\geqslant n]\implies[u_k=0]$$
   Le sous-espace vectoriel engendré par les suites stationnaires vers 0 est l'espace vectoriel des suites qui convergent vers 0.

   Réponse – Faux

   Les suites stationnaires sont déjà un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5. On a
   $$\operatorname{Vect}\left(\left\{x\longmapsto x^k,\ k\in\mathbb{N}\right\}\right)=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{Vect}\left(\left\{x\longmapsto x^k\right\}\right)$$

   Réponse – Vrai

   Car la famille
   $$\left(x\longmapsto x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$$
   est une famille libre.

6. Dans $\mathbb{R}^5$, deux sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 3 ont une intersection de dimension $\geqslant 1$.

Réponse – Vrai

C'est une conséquence de la formule de Grassman. Notons E_1 et E_2 ces deux sous-espaces vectoriels, on a alors
$$\dim(E_1 \cap E_2) = \underbrace{\dim(E_1)}_{=3} + \underbrace{\dim(E_2)}_{=3} - \underbrace{\dim(E_1 + E_2)}_{\leqslant 5} \geqslant 1$$

7. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors
$$\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = u\left(\operatorname{Ker}(u \circ u)\right)$$

Réponse – Vrai

On procède par double inclusion.

(a) $\left(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) \subset u\left(\operatorname{Ker}(u \circ u)\right)\right)$. En effet, si $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, on a $u(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$, tel que $x = u(y)$. Mais comme $u(x) = u^2(y) = 0_E$, $y \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.

(b) $\left(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) \supset u\left(\operatorname{Ker}(u \circ u)\right)\right)$. Soit $x \in u\left(\operatorname{Ker}(u \circ u)\right)$, il existe $y \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ tel que $x = f(y)$, donc $u(x) = 0_E$ et $u \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$.

8. Soit E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et F_1 un sous-espace vectoriel de F, alors
$$\operatorname{Im}\left(u\Big|^{F_1}\right) = \operatorname{Im}(u) \cap F_1$$

Réponse – Faux

En général $u\Big|^{F_1}$ n'a pas de sens sauf quand $\operatorname{Im}(u) \subset F_1$.

9. Soit E et F deux espaces vectoriels $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que
$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$$
alors
$$\mathscr{L}(E, F) \text{ est isomorphe à } \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{L}(E_n, F)$$

Réponse – Vrai

Cela résume le fait que pour connaître une application linéaire, il faut et il suffit d'en connaître la restriction à tous les sous-espaces composant la décomposition en somme directe de E.

10. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors
$$[u \text{ injective}] \iff \left[\exists v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v = \mathrm{id}_E\right]$$

Réponse – Faux

C'est la caractérisation des endomorphismes surjectifs. Voir le livre, page 69.

11. Si E_1, E_2 et F sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E qui vérifient
$$E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$$
alors E_1 et E_2 sont isomorphes.

Réponse – Vrai

C'est l'exercice à faire pour aujourd'hui !