Suites et Séries – TD$_{13}$

5-6 décembre 2022

Exercice 1

Une personne a n clés et une seule ouvre la porte de son appartement, mais elle ne sait plus laquelle. Elle essaie les clés les unes après les autres au hasard, en éliminant après chaque essai la clé si elle ne marche pas.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'essais pour trouver la bonne clé. Donner la loi de X.

Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, notons A_k l'évènement correspond à « la k-ième clé tirée n'est pas la bonne ».
On a $\mathbb{P}(A_1) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ (on a une chance sur n de tomber sur la bonne clé). S'il y a $j-1$ clés essayées qui ne sont pas les bonnes (ce qui correspond à l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1}$), il reste $n-j+1$ clés à essayer donc

$$\forall j \in \{2, \ldots, n-1\}, \quad \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1}}(A_j) = 1 - \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n-j+1}$$

On a

$$(X > k) = A_1 \cap \cdots \cap A_k$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n-1}\right) \cdots \left(\frac{n-k}{n-k+1}\right) \\
&= \frac{n-k}{n}
\end{aligned}$$

On a l'union disjointe

$$(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$$

donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{n-k+1}{n} - \frac{n-k}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}}$$

Méthode très utile en probabilité : au lieu de calculer directement $\mathbb{P}(X = k)$, on s'intéresse plutôt à $\mathbb{P}(X > k)$ (on retrouve l'idée de la fonction de répartition.

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés. Soit T la somme des valeurs obtenues, soit X le reste de la division euclidienne de T par 2 et soit Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).

X et Y sont définies en fonction de T. Déterminons la loi de T. Les valeurs possibles de T sont :

$$T(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(T=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Y	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2

On en déduit la loi conjointe de (X,Y) :

$\mathbb{P}(X=x,Y=y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$x=0$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$
$x=1$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$

2. En déduire les lois marginales de X et Y.

La loi marginale de X (par exemple) revient à calculer

$$\sum_{y=0}^{4} \mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

c'est-à-dire faire la somme de la ligne x par ligne (ou de la colonne y pour la loi marginale de Y) du tableau de la loi conjointe de (X,Y).

On en déduit la loi marginale de X :

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{y=0}^{4} \mathbb{P}(X=0,Y=y) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

on peut en déduire directement que

$$\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$$

De même on trouve la loi marginale de Y :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(X=x,Y=0) = \frac{7}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(X=x,Y=1) = \frac{7}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(X=x,Y=2) = \frac{8}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(X=x,Y=3) = \frac{7}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y=4) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(X=x,Y=4) = \frac{7}{36}$$

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

On a

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0) = \frac{3}{36} \neq \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}\,\frac{7}{36}$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi sur $[\![1,n]\!]$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{n}$$

X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Donner la fonction de répartition de X et Y.

   Par définition de la fonction de répartition, on a

$$\begin{array}{rccl} F_X & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < n \\ 1 & \text{si } x \geqslant n \end{cases} \end{array}$$

   Y suit la même loi que X, donc ces deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition : $F_Y = F_X$.

2. On note $Z=\max(X,Y)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.

   On a :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ F_Z(z)=\mathbb{P}(Z\leqslant x)=\mathbb{P}\big(\max(X,Y)\leqslant z\big)=\mathbb{P}(X\leqslant z, Y\leqslant z)$$

   Idée à retenir : pour tous nombres réels x, y et z :

$$\max(x,y)\leqslant z \iff \big(x\leqslant z \quad \textit{et} \quad y\leqslant z\big)$$

   Par indépendance de X et Y :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ F_Z(z)=\mathbb{P}(X\leqslant z)\,\mathbb{P}(Y\leqslant z)=F_X(z)\,F_Y(z)=F_X(z)^2$$

   d'où

$$\boxed{\begin{array}{rccl} F_Z & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & z & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } z<1 \\ \dfrac{\lfloor z \rfloor^2}{n^2} & \text{si } 0 \leqslant z < n \\ 1 & \text{si } z \geqslant n \end{cases} \end{array}}$$

   (b) En déduire la loi de Z.

   Soit $k\in\{1,\dots,n\}$. On a l'union disjointe suivante :

$$(Z\leqslant k)=(Z=k)\cup(Z\leqslant k-1)$$

   donc

$$\mathbb{P}(Z\leqslant k)=\mathbb{P}(Z=k)+\mathbb{P}(Z\leqslant k-1)$$

et d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(Z \leqslant k) - \mathbb{P}(Z \leqslant k-1)\\ &= F_Z(k) - F_Z(k-1)\end{aligned}$$

La loi de Z est donc :

$$\boxed{\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \quad \mathbb{P}(Z=k) = \frac{2k-1}{n^2}}$$

Cette méthode est à retenir : comment passer de la fonction de répartition à la loi.

3. Même question pour $T = \min(X,Y)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(T \leqslant t) = (X \leqslant t) \cup (Y \leqslant t)$$

Donc :

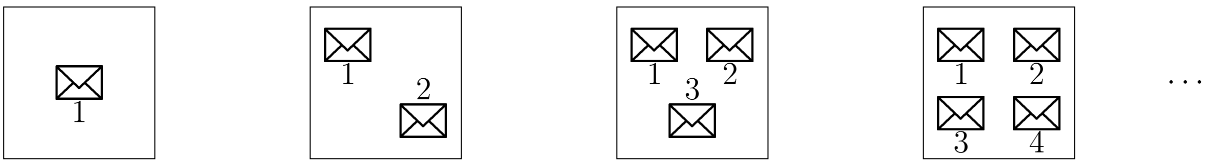
$$\begin{aligned}F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) &= \mathbb{P}(X \leqslant T) + \mathbb{P}(Y \leqslant t) - \mathbb{P}((X \leqslant t) \cap (Y \leqslant t))\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant T) + \mathbb{P}(Y \leqslant t) - \mathbb{P}(X \leqslant t)\,\mathbb{P}(Y \leqslant t)\\ &= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t)\\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))\end{aligned}$$

Cela permet de définir la fonction de répartition de T, et on en déduit la loi de T de la même façon que pour Z :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \mathbb{P}(T=k) = F_T(k) - F_T(k-1)$$

Exercice 4 (DS 2020)

On considère $N \in \mathbb{N}^*$ boîtes aux lettres (邮箱) numérotées de 1 à N. La boîte aux lettres i contient i enveloppes (信封) numérotées de 1 à i :



boîte aux lettres 1 boîte aux lettres 2 boîte aux lettres 3 boîte aux lettres 4

On fait l'expérience aléatoire suivante :

- on choisit au hasard une boîte aux lettres ;
- on choisit au hasard une enveloppe dans cette boîte aux lettres.

On note X le numéro de la boîte aux lettres choisie et Y le numéro de l'enveloppe choisie.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On choisit au hasard une boîte aux lettres parmi N boîtes aux lettres, on est donc dans une situation d'équiprobabilité. On en déduit que X suit la loi suivante :

$$\boxed{\forall k \in \{1,\ldots,N\},\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{N}}$$

Autrement dit, X suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y)

Attention ici, X et Y ne sont pas indépendantes !

Il est clair que X et Y prennent leurs valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$.
Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, N\}^2$.

- Si on a choisi la boîte aux lettres numéro i (c'est-à-dire $X = i$), on ne peut pas tirer des enveloppes strictement supérieures à i car la boîte aux lettres i contient seulement i enveloppes). On a donc $\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j) = 0$ si $j > i$.
- Si $j \leqslant i$, on tire au hasard i enveloppes (équiprobabilité) donc $\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j) = \dfrac{1}{i}$.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall (i, j) \in \{1, \ldots, N\}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j)\,\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \dfrac{1}{N\,i} & \text{si } j \leqslant i \end{cases}}$$

3. En déduire la loi de Y.

La loi de Y est une loi marginale de la loi conjointe du couple (X, Y) donc, d'après le cours :

$$\boxed{\forall j \in \{0, \ldots, N\}, \quad \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{N} \sum_{i=j}^{N} \frac{1}{i}}$$

La question suivante posée au DS de l'année dernière était de montrer que l'espérance de Y est égale à $\dfrac{N+3}{4}$.

Exercice 5 (DS 2020)

Alice et Bob joue au jeu « pierre-feuille-ciseaux (剪刀石头布) ». On note P pour « pierre (石头) », F pour « feuille (布) » et C pour « ciseaux (剪刀) ».
On note le résultat d'une partie sous la forme (a, b) où $a \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{C}\}$ est le choix d'Alice et où $b \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{C}\}$ est le choix de Bob. On suppose qu'Alice et Bob jouent au hasard.

1. Alice et Bob joue une partie. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois « pierre », c'est-à-dire (P,P) ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « pierre », c'est-à-dire (a, b) avec $a = P$ ou $b = P$) ?

On est dans une situation d'équiprobabilité (Alice et Bob jouent au hasard), on modélise donc cette expérience aléatoire par $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{C}\}^2$ muni de la probabilité uniforme.
La probabilité d'obtenir deux fois « pierre » est donnée par

$$\boxed{\frac{\operatorname{Card}(\{(\mathrm{P}, \mathrm{P})\})}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{1}{9}}$$

La probabilité d'obtenir aucune fois « pierre » est donnée par

$$\frac{\operatorname{Card}\left(\{(F, C)\}^2\right)}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{4}{9}$$

donc par passage à l'évènement contraire, la probabilité d'obtenir au moins une fois « pierre » est donnée par

$$\boxed{1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}}$$

2. Alice et Bob font plusieurs parties à la suite de « pierre-feuille-ciseaux » et s'arrêtent quand ils ont joué tous les deux « pierre ». On note :
   - X le numéro de la première partie où il y a « pierre » (au moins une fois) ;
   - Y le numéro de la partie où il y a deux fois « pierre ».

   Par exemple, si les parties sont (C,F), (C,C), (C,P), (F,F) et (P,P) ; on a $X=3$ et $Y=5$. On suppose que les résultats des parties sont indépendants.

   (a) Déterminer, en justifiant, les lois suivies par X et par Y.

   - Les valeurs possibles de X sont $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ (le cas $X=+\infty$ correspond au cas où on obtient jamais pierre). Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On a

   $$(X=k)=\overline{T_1}\cap\dots\overline{T_{k-1}}\cap T_k$$

   où T_k est l'évènement « au moins un joueur joue pierre à la k-ème partie ». D'après la question (1), $\mathbb{P}(T_k)=\frac{5}{9}$ donc, par indépendance des évènements (les parties jouées sont indépendantes),

   $$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k)=\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\frac{5}{9}}$$

   On reconnaît là la loi géométrique de paramètre $4/9$. Le cours montre alors que $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$.

   - On a :

   $$(Y=k)=\overline{Z_1}\cap\dots\overline{Z_{k-1}}\cap Z_k$$

   où Z_k est l'évènement « les deux joueurs jouent pierre à la k-ème partie ». D'après la question (1), $\mathbb{P}(Z_k)=\frac{1}{9}$, par indépendance des évènements (les parties jouées sont indépendantes),

   $$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=k)=\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\frac{1}{9}}$$

   On reconnaît là la loi géométrique de paramètre $8/9$. Le cours montre alors que $\mathbb{P}(Y=+\infty)=0$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(X=n,Y=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En utilisant les notations de la question précédente on a :

   $$(X=n,\ Y=n)=\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{n-1}}\cap Z_n$$

   et comme les évènements ci-dessus sont indépendants (les résultats des parties sont indépendants) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n,\, Y=n) = \big(1-\mathbb{P}(T_1)\big)\cdots\big(1-\mathbb{P}(T_{n-1})\big)\,\mathbb{P}(Z_n) = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}$$

(c) En déduire que $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{1}{5}$.

On a

$$(X=Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X=n,\, Y=n) \cup \big(X=+\infty, Y=+\infty\big)$$

et comme cette union est dénombrable et disjointe, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n,\, Y=n) + \underbrace{\mathbb{P}\big(X=+\infty, Y=+\infty\big)}_{=0} \\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

en reconnaissant une série géométrique convergente (car $|\frac{4}{9}| < 1$).