

## Devoir Maison - Mécanique du point matériel

### Consignes :

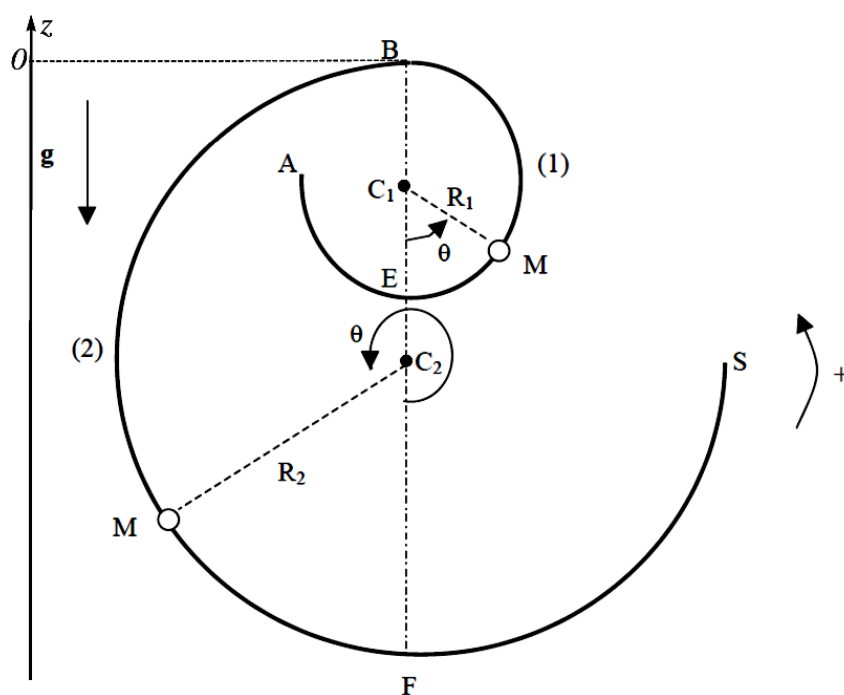
- déposer votre travail numérisé en **PDF** sur moodle avant **le 22 mai 2022 à minuit**.
- chaque réponse doit être précédée du **raisonnement** qui la justifie avec des phrases. Un résultat sans justification ne sera pas corrigé. Penser notamment à préciser les systèmes étudiés et référentiels quand cela est nécessaire.
- les résultats doivent être **encadrés** proprement.
- les résultats doivent être **homogènes**.
- utiliser des **couleurs** (schéma, encadrement des résultats, etc) mais pas le rouge réservé aux professeurs.

### Exercice 1 : Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

On considère le dispositif de la figure ci-après, où un anneau assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplace solidairement à une piste fixe formée de deux parties circulaires (1) et (2) de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 > R_1$  et de centres  $C_1$  et  $C_2$ , dans un plan vertical. La verticale est ascendante, avec pour origine l'altitude du point  $B$ .

On repère la position de l'anneau par un angle  $\theta$  pris à partir de  $C_1$  pour son mouvement sur la partie (1), et à partir de  $C_2$  pour son mouvement sur la partie (2). Sur la partie (1),  $\theta$  varie entre  $-\pi/2$  et  $\pi$ . Sur la partie (2),  $\theta$  varie entre  $\pi$  et  $5\pi/2$ .

On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur terrestre. Dans tout le problème, on suppose que le mouvement de l'anneau s'effectue sans frottement.



On suppose dans un premier temps que le mouvement de l'anneau s'effectue sur la partie (1) du dispositif. Lorsque l'anneau est au point  $E(\theta = 0)$ , il a une vitesse angulaire positive  $\dot{\theta}_E > 0$ .

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer  $\dot{\theta}^2$  à un instant quelconque en fonction de  $\dot{\theta}_E$ ,  $R_1$ ,  $g$  et  $\theta$ .
2. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pg}$  de l'anneau  $M$  en supposant  $E_{pg}(B) = 0$  au point  $B(\theta = \pi)$ . On distinguera les cas  $-\pi/2 < \theta < \pi$  et  $\pi < \theta < 5\pi/2$ .
3. Tracer l'allure de  $E_{pg}$  en fonction de  $\theta$ . Préciser les points correspondants sur le graphe de  $E_{pg}$ .
4. Dédurre graphiquement de la question précédente les positions angulaires d'équilibre de l'anneau en précisant leur stabilité.

5. Vérifier l'existence et la nature de ces trois positions d'équilibre par le calcul.

L'anneau étant initialement en  $A(\theta = -\pi/2)$ , il est lancé avec une vitesse  $v_0$  sur le support fixe.

6. À quelle condition sur la vitesse  $v_0$ ,  $g$  et  $R_1$  l'anneau peut-il atteindre le point  $F$  ?  
 7. Cette condition étant remplie, donner l'expression de sa vitesse  $v_F$  en  $F(\theta = 2\pi)$ , en fonction des données du problème.  
 8. La condition de la question 6) étant toujours remplie, y a-t-il une condition supplémentaire sur  $v_0$  pour que l'anneau sorte de la piste en  $S(\theta = 5\pi/2)$  ? Déterminer  $v_S$ .

On lâche  $M$  sans vitesse initiale en une position proche de  $F$ .

9. En dérivant l'énergie mécanique de  $M$  par rapport au temps, déterminer l'équation du mouvement pour de petits angles autour de la position  $F$ . Donner l'expression de la période des oscillations.  
 10. Que deviennent ces oscillations en prenant en compte des forces de frottement ?

### Exercice 2 : Satellite géostationnaire

On étudie dans le référentiel géocentrique  $R_G$ , supposé galiléen, le mouvement des satellites (artificiels) de la Terre. Ce référentiel  $R_G$  est associé à un repère d'origine  $O$ , le centre de la Terre, et d'axes orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans  $R_G$ , la Terre tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante et une période de révolution notées respectivement  $\Omega$  et  $T$ .

On considère un satellite artificiel réduit à un point matériel  $M$  de masse  $m$  en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la Terre. On admet que tout satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre  $O$  de la Terre. Les frottements dûs à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.  $M_T$  et  $R_T$  désignent respectivement les masse et rayon de la Terre. La constante de gravitation universelle est notée  $\mathcal{G}$ .

#### Données :

$$T = 86164 \text{ s}; M_T = 5,98.10^{24} \text{ kg}; R_T = 6370 \text{ km}; \mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}.$$

1. Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse  $v_0$ . On exprimera d'abord  $v_0$  en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  et  $r$ , puis en fonction de  $g_0$ ,  $R_T$  et  $r$ , où  $g_0$  désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.  
 2. Calculer numériquement la vitesse  $v_0$  de la station spatiale internationale (ISS) en orbite circulaire à l'altitude  $h = 330 \text{ km}$  au-dessus de la Terre.

L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini.

3. Après avoir justifié qu'elle se conserve, exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite autour de la Terre en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$ ,  $r$  et  $m$ .  
 4. Quel est l'effet des forces de frottements de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite ?  
 5. Exprimer l'énergie mécanique  $E_{m0}$  du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude  $\lambda$  en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$ ,  $m$ ,  $R_T$ ,  $\lambda$  et de la période  $T$  de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.  
 6. Expliquer pourquoi les satellites sont préférentiellement lancés depuis les régions de basse latitude, comme Kourou en Guyane française (de latitude  $\lambda = 5^\circ$  Nord). Sont-ils lancés plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Un satellite artificiel de la Terre est **géostationnaire** s'il est immobile dans le référentiel terrestre. Son orbite est alors circulaire et il survole constamment le même point de la surface de la Terre.

7. Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur ?  
 8. Calculer l'altitude  $h_G$  (ou distance au sol), la vitesse  $v_G$  et l'énergie mécanique  $E_{mG}$  du satellite géostationnaire Telecom de masse  $m_s = 1,0 \text{ t}$ . Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ?  
 9. Comparer les termes  $E_{mG}$ ,  $E_{cG}$  et  $E_{pG}$  d'un satellite géostationnaire avec les termes correspondants  $E_{m0}$ ,  $E_{c0}$  et  $E_{p0}$  du satellite immobile à la surface de la Terre dans le plan de l'équateur.