Mathématiques I – TD_4

7-8 mars 2022

Dérivabilité

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \sin(x^2)$
2. $x \longmapsto \ln(\ln x)$
3. $x \longmapsto \exp(2x)(x^3 - 4x + 7)$
4. $x \longmapsto \ln(\cos x)^2$
5. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x + \exp(x)}$
6. $x \longmapsto x^x$

Les solutions sont données avec l'aide de Sympy, mais il faut savoir aussi faire les calculs sans ordinateur et justifier que ces fonctions sont dérivables sur un ensemble à savoir donner.

```
from sympy import *
x = symbols('x')
```

- *Fonction 1*

```
diff(sin(x**2),x)
```

Résultat : $2x\cos\left(x^2\right)$

- *Fonction 2*

```
diff(ln(ln(x)),x)
```

Résultat : $\dfrac{1}{x\log(x)}$

Attention, Sympy note aussi $\log$ *pour le logarithme* $\ln$.

- *Fonction 3*

```
diff(exp(2*x)*(x**3-4*x+7),x)
```

Résultat : $\left(3x^2 - 4\right)e^{2x} + 2\left(x^3 - 4x + 7\right)e^{2x}$

```
simplify(_)
```

Résultat : $\left(2x^3 + 3x^2 - 8x + 10\right)e^{2x}$

- *Fonction 4*

```
diff(ln(cos(x))**2,x)
```

Résultat : $-\dfrac{2\log(\cos(x))\sin(x)}{\cos(x)}$

```
simplify(_)
```

Résultat : $-2\log(\cos(x))\tan(x)$

- *Fonction 5*

```
diff(sqrt(x)/(x+exp(x)),x)
```

Résultat : $\dfrac{\sqrt{x}\,(-e^x-1)}{(x+e^x)^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+e^x)}$

```
simplify(_)
```

Résultat : $\dfrac{-2x\,(e^x+1)+x+e^x}{2\sqrt{x}\,(x+e^x)^2}$

- *Fonction 6*

```
diff(x**x,x)
```

Résultat : $x^x\,(\log(x)+1)$

Exercice 2

Soit $\alpha\in]0,1[$. Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=x^\alpha-\alpha\,x$.

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Montrer, sans faire de calculs, qu'il existe un unique $c>0$ tel que $f(c)=0$.
3. Montrer que
$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\quad u^\alpha\,v^{1-\alpha}\leqslant\alpha\,u+(1-\alpha)\,v$$

Pour faire le tableau de variations de f, il faut déterminer les intervalles où f est croissante et les intervalles où elle est décroissante (on utilise la dérivation) ainsi que les limites (on utilise les méthodes vues dans les TD précédents).

1. On a :
$$\forall x>0,\quad f(x)=e^{\alpha\ln(x)}-\alpha\,x$$
donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (par composée, somme et produit de fonctions dérivables) et :
$$\forall x>0,\quad f'(x)=\alpha\,(x^{\alpha-1}-1)$$
   - Pour $x\in]0,1[$, on a $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0,1[$.

- Pour $x > 1$, on a $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

On a

$$\alpha \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{donc} \quad e^{\alpha \ln(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad f(x) = e^{\alpha \ln(x)} - \alpha\, x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 - 0 = 0$$

et, pour tout $x > 0$, puisque $1 - \alpha > 0$ et en factorisant par le terme dominant x :

$$f(x) = x^\alpha - \alpha\, x = x \Bigg(\underbrace{\frac{1}{x^{1-\alpha}} - \alpha}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\alpha} \Bigg) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1) = 1 - \alpha$	$\searrow$	$-\infty$

Vérifions avec Sympy.

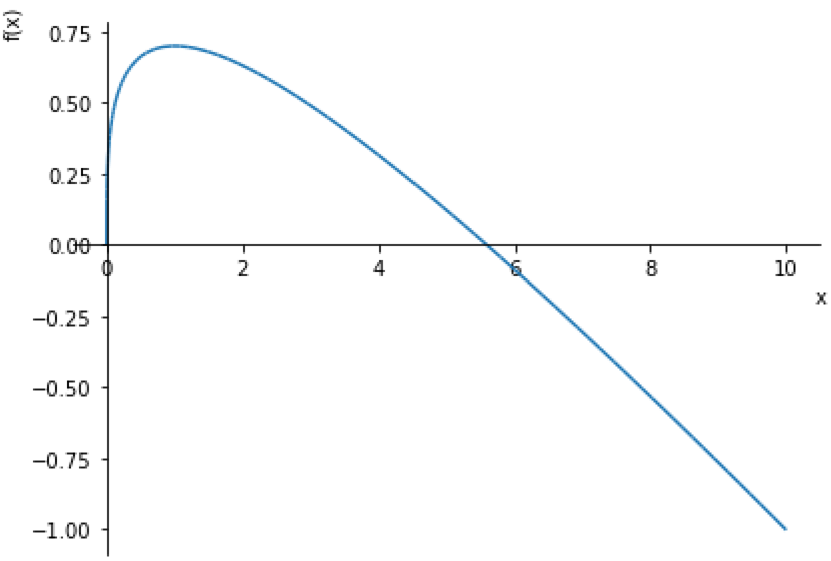
```python
alpha = symbols('alpha')
diff(x**alpha-alpha*x, x)
```

Résultat : $-\alpha + \dfrac{\alpha x^\alpha}{x}$

```python
powsimp(_)
```

Résultat : $\alpha x^{\alpha - 1} - \alpha$

```python
plot((x**alpha-alpha*x).subs(alpha,0.3),(x,0,10))
```



On peut remarquer que

$$f'(x) = \alpha\,(x^{\alpha-1} - 1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

donc f admet une tangente verticale en 0, ce qui se voit sur la courbe ci-dessus.

2. Puisque f a pour limite 0 en 0^+ et que f est strictement croissante sur $]0,1[$, on en déduit que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.
   On a $f(1) = 1 - \alpha > 0$ et f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaire assure, puisque f est continue sur $[1+\infty[$, qu'il existe $c > 1$ tel que $f(c) = 0$.
   De plus, f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc c est unique.
   Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un unique } c > 0 \text{ tel que } f(c) = 0.}$$

3. *Pour trouver l'idée, on peut faire une étape d'analyse au brouillon. Si*

$$u^\alpha\, v^{1-\alpha} \leqslant \alpha\, u + (1-\alpha)\, v$$

alors en divisant par $v > 0$ on obtient

$$u^\alpha\, v^{-\alpha} \leqslant \alpha\,\frac{u}{v} + (1-\alpha)$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{u}{v}\right)^\alpha - \alpha\,\frac{u}{v} \leqslant 1 - \alpha$$

donc

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \leqslant 1 - \alpha = f(1)$$

On retrouve le maximum de la fonction f.

   D'après la question précédente,

$$\forall x > 0, \quad f(x) \leqslant f(1) = 1 - \alpha.$$

   donc

$$\forall x > 0, \quad x^\alpha \leqslant \alpha\, x + 1 - \alpha$$

   Soit $u > 0$ et $v > 0$. On applique cette inégalité à $x = \dfrac{u}{v} > 0$:

$$\frac{u^\alpha}{v^\alpha} \leqslant \alpha\,\frac{u}{v} + 1 - \alpha$$

   En multipliant par $v > 0$, on obtent :

$$\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad u^\alpha\, v^{1-\alpha} \leqslant \alpha\, u + (1-\alpha)\, v}$$

Exercice 3

Faire l'étude des fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto x^{-\ln x}$

- $g\colon x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\,\exp\big(\arcsin(x)\big)$
- $h\colon x \longmapsto x\sinh\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Faire l'étude d'une fonction, c'est déterminer son ensemble de définition, préciser ses propriétés (paire, impaire, périodicité, symétrie, etc.), donner son tableau de variation et ses limites et ses tangentes aux bornes de son ensemble de définition. Enfin, on trace l'allure de la courbe.

- La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0,\quad f(x)=\exp\big(-(\ln x)^2\big)$$

On a

$$\forall x>0,\quad f'(x)=-\frac{2}{x}(\ln x)\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$$

On en déduit que $f'>0$ sur $]0,1[$ (donc f est strictement croissante sur $]0,1]$) et $f'<0$ sur $]1,+\infty[$ (donc f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$).
Quand $x\to 0^+$, on a $\ln(x)\to-\infty$ d'où $-(\ln x)^2\to-\infty$ donc par composition

$$f(x)=\exp\big(-(\ln x)^2\big)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$$

Quand $x\to+\infty$, on a $\ln(x)\to+\infty$ d'où $-(\ln x)^2\to-\infty$ donc par composition

$$f(x)=\exp\big(-(\ln x)^2\big)\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow}0$$

Le tableau de variation de f est donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1)=1$	$\searrow$	0

De plus, par croissance comparées, on a

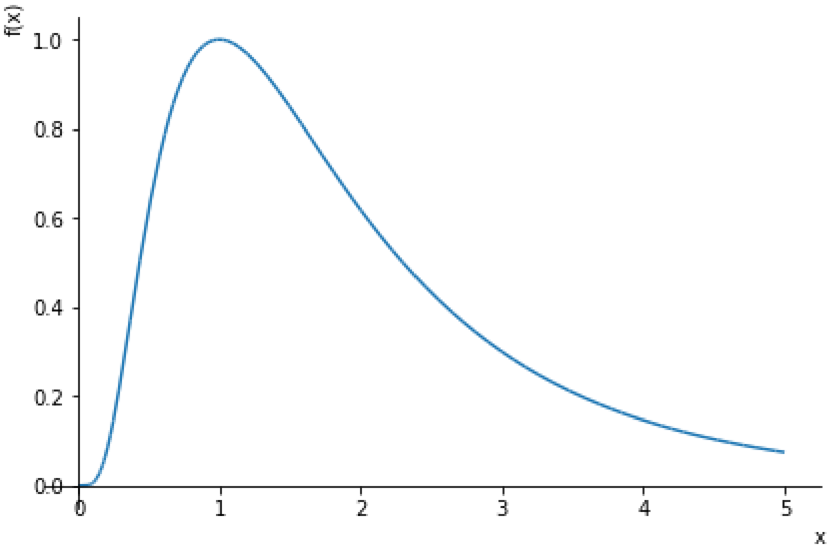
$$f'(x)=\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$$

donc f a une tangente horizontale en 0.
Vérifions avec Sympy.

```
diff(x**(-ln(x)),x)
```

Résultat : $-\dfrac{2x^{-\log(x)}\log(x)}{x}$

```
plot(x**(-ln(x)),(x,0.001,5))
```



On rappelle que la fonction arc sinus ($\arcsin$) *est définie sur* $[-1,1]$ *telle que, pour tout* $x \in [-1,1]$,

$$\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$$

La fonction $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et $1-x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in [-1,1]$ donc l'ensemble de définition de g est $[-1,1]$. De plus, g est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \exp(\arcsin x) + \sqrt{1-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\arcsin x) \\ &= \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) \exp(\arcsin x) \\ &= \frac{-x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\arcsin x) \end{aligned}$$

Si $x \in \,]-1,0[$, on a $x < \sqrt{1-x^2}$. Si $x \in [0,1[$, on a

$$x > \sqrt{1-x^2} \iff x^2 > 1-x^2 \iff 2x^2 > 1 \iff x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit que $g' > 0$ sur $\left]-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $g' < 0$ sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.
La fonction g est continue en -1 et 1 et

$$g(-1) = g(1) = 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

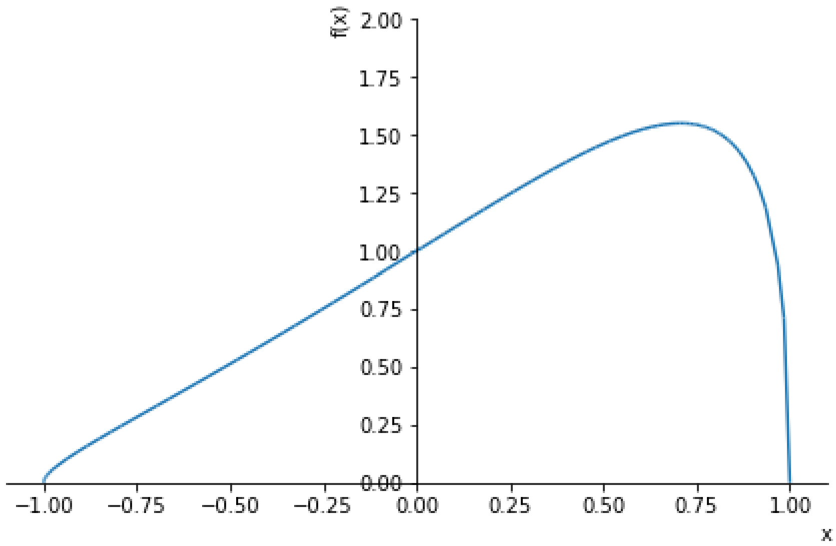
x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	0

On a également
$$\lim_{x\to 1^-} g'(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(-1)^+} g'(t) = +\infty$$
donc g a des tangentes verticales en -1 et 1.
Vérifions avec Sympy.

```
diff(sqrt(1-x**2)*exp(asin(x)),x)
```

Résultat : $-\dfrac{xe^{\operatorname{asin}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} + e^{\operatorname{asin}(x)}$

```
plot(sqrt(1-x**2)*exp(asin(x)),(x,-1,1),ylim=(0,2))
```



•

On rappelle que les fonctions cosinus hyperbolique (cosh)*, sinus hyperbolique* (sinh) *et tangente hyperbolique* (tanh) *sont définies pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La fonction cosh *est paire et les fonctions* sinh *et* tanh *sont impaires.*
Ces fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$*, avec*

$$\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh \quad \text{et} \quad \tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h(-x) = (-x)\sinh\left(\frac{-1}{x}\right) = -(-x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right) = x\sinh\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$$
donc h est paire.

Puisque h est paire, on étudie seulement sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

On a
$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \sinh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\left[\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]$$

Pour étudier le signe de la dérivée, on a parfois besoin d'étudier une autre fonction.

Posons $\phi\colon y \mapsto \tanh(y) - y$. C'est une fonction définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall y > 0, \quad \phi'(y) = 1 - \tanh(y)^2 - 1 = -\tanh(y)^2 \leqslant 0$$

La fonction ϕ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $\phi(0) = 0$, on en déduit que $\phi(y) \leqslant 0$ pour tout $y \geqslant 0$.
Puisque $\cosh(y) \geqslant 0$ pour tout $y \geqslant 0$, on en déduit que h' est négative sur $]0, +\infty[$ donc que h est décroissante sur cet intervalle.
Pour étudier les limites de h, posons $y = \frac{1}{x} > 0$ avec $x > 0$. On a alors

$$h(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{\sinh(y) - \sinh(0)}{y - 0}$$

Par définition de la dérivée :

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{\sinh(y) - \sinh(0)}{y - 0} = \sinh'(0) = \cosh(0) = 1$$

Puisque $x = \frac{1}{y} \to +\infty$ quand $y \to 0^+$, on en déduit que

$$h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^y}{y} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} = 0$$

donc

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{e}^y}{y} - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} \right) = +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Finalement, on obtient le tableau de variation de h (complété en utilisant la parité de h) :

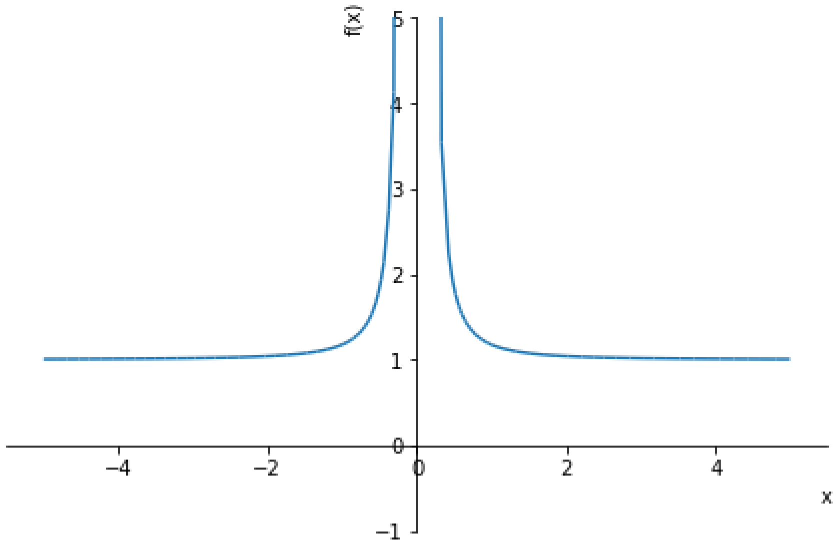
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$	1 ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 1

Vérifions avec Sympy.

```
diff(x*sinh(1/x),x)
```

Résultat : $\sinh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

```
plot(x*sinh(1/x),(x,-5,5),ylim=(-1,5))
```



Exercice 4

Soit $a \geqslant 0$, on pose $I =]a, +\infty[$ (un voisinage de $+\infty$). Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Supposons que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Existe-t-il $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c$?
2. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c \in \mathbb{R}$. A-t-on $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$?

Dans ce genre de questions, on attend souvent un contre-exemple. On peut commencer par tester avec les fonctions usuelles (fonctions rationnelles, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, etc.).

1. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (ici $a = 0$). Pour tout $x > 0$:
$$f'(x) = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
On en déduit que :
$$\boxed{\text{si } f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ il n'existe pas en général } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c.}$$

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$:
$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{|x|} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
et
$$f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$
La fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$ (voir l'exercice 3 du TD3) et
$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc f' n'a pas de limite en $+\infty$.
$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c \in \mathbb{R} \text{ n'implique pas en général que } f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Retour sur la continuité

Exercice 5

Soient $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) = \sup_{t\in[0,1]} g(t)$$

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Comme f et g sont continues sur le segment $[0,1]$, on sait que f et g sont bornées et atteignent leurs bornes : il existe donc $x_1 \in [0,1]$ et $x_2 \in [0,1]$ tels que

$$f(x_1) = g(x_2) = M, \quad \text{avec } M = \sup_{t\in[0,1]} f(t) = \sup_{t\in[0,1]} g(t)$$

Posons alors $h = f - g$. La fonction h est continue (c'est la différence de deux fonctions continues) et on a

$$h(x_1) = (f-g)(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) = \Big(\sup_{t\in[0,1]} g(t)\Big) - g(x_1) \geqslant 0$$

et

$$h(x_2) = (f-g)(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M = f(x_2) - \Big(\sup_{t\in[0,1]} f(t)\Big) \leqslant 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (h est continue sur $[0,1]$), il existe $c \in [0,1]$ tel que $h(c) = f(c) - g(c) = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe } c \in [0,1] \text{ tel que } f(c) = g(c).}$$

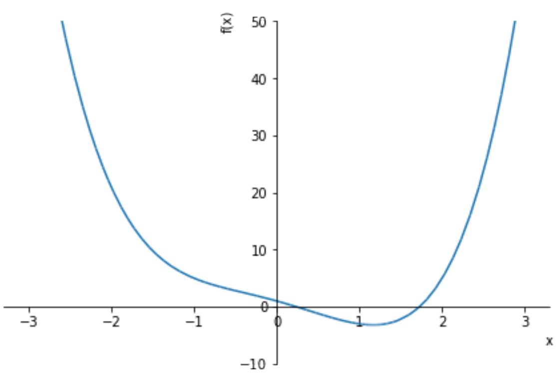
Exercice 6

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Commençons par faire un dessin :



Sur n'importe quel segment, f admet un minimum, et comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$, on espère que $f(x)$ soit plus grande que ce minimum pour x assez grand ou x assez petit.

Par hypothèse :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M > 0, \quad \forall x > M, \quad f(x) > A$$

et

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists m < 0, \quad \forall x < m, \quad f(x) > A$$

La fonction f admet un minimum sur le segment $[m, M]$. Il faut donc choisir une valeur de A telle que le minimum de f soit atteint dans $[m, M]$, par exemple $A = f(0)$.

Pour $A = f(0)$, il existe $M > 0$ et $m < 0$ tels que

$$\forall x > M, \quad f(x) > f(0)$$

et

$$\forall x < m, \quad f(x) > f(0)$$

La fonction f est continue sur $[m, M]$ donc elle est bornée sur ce segment et atteint son minimum : il existe $x_0 \in [m, M]$ tel que

$$\forall x \in [m, M], \quad f(x) \geqslant f(x_0) = \inf_{t \in [m,M]} f(t)$$

Comme $m < 0 < M$, alors $0 \in [m, M]$ donc $f(0) \geqslant f(x_0)$. On a donc

$$\forall x > M, \quad f(x) > f(0) \geqslant f(x_0)$$

et

$$\forall x < m, \quad f(x) > f(0) \geqslant f(x_0)$$

On a donc montré que $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Conclusion :

$$\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On pose

$$\forall x \geqslant 0, \quad \phi(x) = \sup_{t \in [0,x]} f(t)$$

Montrer que ϕ est continue.

On peut déjà remarquer que ϕ est bien définie : pour tout $x \geqslant 0$, f est continue sur le segment $[0, x]$ donc f est majorée et atteint sa borne supérieure (c'est un maximum), ce qui montre que

$$\phi(x) = \sup_{t \in [0,x]} f(t)$$

est bien définie.

Soit $x_0 > 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Distinguons deux cas :

- Si $\phi(x_0) = f(x_0)$ (c'est-à-dire que f atteint son maximum sur $[0, x_0]$ en x_0). Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

  $$\forall x \geqslant 0, \quad |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

  Soit $x \geqslant 0$ tel que$|x - x_0| < \eta$. Alors :

* si $x < x_0$, alors on a $\phi(x) \leqslant \phi(x_0)$ et

$$\phi(x) \geqslant f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \geqslant F(x_0) - \varepsilon$$

* si $x \geqslant x_0$, alors on a $\phi(x) \geqslant \phi(x_0)$. Si $y \in [0, x_0]$, on a $f(y) \leqslant \phi(x_0)$. Si $y \in [x_0, x] \subset [x_0, x_0 + \eta]$, on a

$$f(y) \leqslant f(x_0) + \varepsilon = F(x_0) + \varepsilon$$

On en déduit que

$$\phi(x) = \sup_{y \in [0,x]} f(y) \leqslant \phi(x_0) + \varepsilon$$

Dans les deux cas, on a démontré que

$$\phi(x_0) - \varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(x_0) + \varepsilon$$

ce qui montre que ϕ est continue en x_0.

- Si $f(x_0) < \phi(x_0)$, posons $\delta = \phi(x_0) - f(x_0)$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \delta$$

Pour tout $y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, on a

$$f(y) \leqslant f(x_0) + \delta \leqslant \phi(x_0)$$

En particulier, on a $\phi(x_0) = f(x_1)$ pour $x_1 \in [0, x_0 - \eta]$ donc, pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $\phi(x) = \phi(x_0)$ donc ϕ est continue en x_0.

On a donc montré que ϕ est continue en tout $x_0 > 0$. On montre de manière identique que ϕ est continue en 0.
Conclusion :

$$\boxed{\phi \text{ est continue.}}$$

Exercice 8

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche et une limite à droite en a.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme f est croissante :

$$\forall x \in I, \quad x < a \implies f(x) \leqslant f(a)$$

donc l'ensemble

$$E = \{f(x)\colon x \in \mathbb{R} \text{ et } x < a\}$$

est non vide et majoré par $f(a)$. Il admet donc une borne supérieure. Posons $\ell = \sup(E) \in \mathbb{R}$.

On a trouvé un candidat pour la limite à gauche de f.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $y_0 \in E$ tel que $\ell - \varepsilon < y_0 \leqslant \ell$ donc il existe $f(x_0) \in E$ avec $x_0 < a$ et $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant \ell$. Posons $\eta = a - x_0 > 0$. Alors pour tout $x \in]a - \eta, a[$, on a :

- $f(x_0) \leqslant f(x)$ car f est croissante ;
- $f(x) \leqslant \ell$ car ℓ est un majorant de E.

On a donc $\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant \ell$ d'où $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad x \in]a - \eta, a[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui montre que f admet une limite à gauche en a, égale à ℓ.
On montre de même que f a une limite à droite en a.
Conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R},\ f \text{ admet une limite à gauche et une limite à droite en } a.}$$