Algèbre linéaire et bilinéaire I
TD$_{11}$: Révision chap. 1 et 2

29 Novembre 2022

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ et H un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E. On considère $h : H \to E$ la restriction de $g \circ f$ à H.

1. Montrer, par double inclusion, que

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(h) + \operatorname{Ker}(f)$$

2. Montrer que

$$\operatorname{rang}(h) \geq \operatorname{rang}(f) - \dim \operatorname{Ker}(g)$$

3. En déduire que

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker}(g) + \dim \operatorname{Ker}(f)$$

Exercice 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, on pose $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$x^2 \times y'' + (1 - a - b) \times x \times y' + a \times b \times y = 0. \tag{1}$$

On admet que les solutions de l'équation différentielle (1) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Pour $f \in E$, on définit :

$$\Phi(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \times f'(x) \end{array} \right. .$$

2. Montrer que $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.

On pose également :

$$\Phi_a = \Phi - a \operatorname{id}_E \quad \text{et} \quad \Phi_b = \Phi - b \operatorname{id}_E.$$

3. Montrer que $\Phi_a \in \mathcal{L}(E)$, que $\Phi_b \in \mathcal{L}(E)$ et que :

$$\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_b \circ \Phi_a.$$

On pose donc $\Psi = \Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_b \circ \Phi_a$.

4. Montrer que $\mathcal{S} = \operatorname{Ker} \Psi$ et retrouver le résultat de la question 1.
5. Montrer que $\mathcal{S} = \operatorname{Ker}(\Phi_a) \oplus \operatorname{Ker}(\Phi_b)$.
6. En déduire la forme générale des solutions de (1).

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, on note $r = \dim F$ et :

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in \mathscr{L}(E),\ u(F) \subset F \text{ et } u|_G = 0 \right\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

   (b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que :

$$u \in \mathcal{A} \iff \exists M_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right] \text{ (matrice par blocs).}$$

   (c) En déduire $\dim \mathcal{A}$.

2. Soit $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$ tels que :

$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \text{ et, pour tout } (u_1, u_2) \in \mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2,\ u_1 \circ u_2 + u_2 \circ u_1 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

   (a) Montrer l'existence de $p_1 \in \mathscr{L}_1$ et $p_2 \in \mathscr{L}_2$ deux projecteurs de E tels que $\mathrm{id}_E = p_1 + p_2$. On note $F = \mathrm{Im}\, p_1$, $G = \mathrm{Ker}\, p_1$ et $r = \dim F$.

   (b) Démontrer que $\dim \mathscr{L}_1 \leq r^2$ et $\dim \mathscr{L}_2 \leq (n-r)^2$.

   (c) Conclure que $\mathscr{L}_1 = \{0\}$ ou $\mathscr{L}_2 = \{0\}$.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D, où

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{E}$. Calculer $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}\right)^{-1}$.

3. Quelle relation a-t-on entre les matrices A, D, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}$ et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}\right)^{-1}$?

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.