Topologie et Calcul différentiel – TD 8: Topologie : Espaces vectoriels normés

02 juin 2023

Le but de ce TD est de savoir calcler des normes subordonnées, de savoir montrer si des applications linéaires sont continues, et de savoir utiliser l'argument de la dimension pour savoir si un ensemble est compact.

Exercices sur la continuité

Exercice 1 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels ; on le munit de la norme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\|_\infty = \max\left(\{a_k,\ k \in [\![0, n]\!]\}\right)$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur a l'application $\varphi_a : P \longrightarrow P(a)$ est-elle continue sur E ?
2. Quand elle est continue, calculer
$$|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |}$$
3. Même question quand E est muni de la norme $||\cdot||_1$ définie par $||P||_1 = \sum_k |a_k|$?

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

$$E = \left\{ P \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists (a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times x^k \right\}.$$

La base canonique de E est $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = x^k.$$

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k . P_k \in E$, on définit

$$N_\infty(P) = \sup_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que N_∞ et N_2 sont des normes sur E.
2. Pour tout $P \in E$, on pose
$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ \mathrm{d}t.$$
Montrer que $L \in E^*$.

3. $L : (E, N_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est-elle continue ?
4. Montrer que $L : (E, N_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue.
5. Existe-t-il une fonction $Q \in E$ telle que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||_{N_2}$?
6. Soit
$$F = \{P \in E,\ L(P) = 0\}.$$
Quel est l'adhérence de F dans (E, N_∞) ? dans (E, N_2) ?

Exercice 3 :

Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $f \in \mathscr{L}$, on pose :

$$m(f) = \sup_{0\leqslant x<y\leqslant 1} \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \right\} \quad \text{et} \quad M(f) = m(f) + |f(0)|.$$

1. Montrer que M est une norme sur $\mathscr{L}$
2. Comparer M et la norme infinie de $\mathscr{L}$.

Exercice 4 :

On considère l'espace vectoriel E muni de la norme N, où

$$E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \text{ et } \forall f \in E,\ N(f) = \|f\|_{\infty,[0,1/2]} + \|f\|_{1,[1/2,1]}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour quelles valeurs de $a \in [0,1]$, la fonction :

$$\varphi_a \ : \begin{cases} (E, N) \to (\mathbb{R}, |\ |) \\ f \mapsto f(a) \end{cases} \quad \text{est-elle continue ? Justifier.}$$

Exercice 5 :

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit les normes suivantes sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1. Déterminer la norme triple $|||\ |||_{1,\infty}$ sur $M_n(\mathbb{K})$:
2. On sait que toutes les normes sont équivalentes sur $M_n(\mathbb{K})$. On note $N_1 = |||\ |||_{1,\infty}$, et on pose $N_2(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$ et on définit, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$,

$$\alpha_{i,j} = \max_{M\in M_n(\mathbb{K})\setminus\{0\}} \frac{N_j(M)}{N_i(M)}$$

Déterminer $\alpha_{1,2}$ et $\alpha_{2,1}$.

Exercice 6

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se place dans $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme de votre choix. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de :

$$A = \{M \in M_n(\mathbb{K})\ ,\ \mathrm{rang}(M) = p\}\ ,\ \text{où } 0 \leqslant p \leqslant n.$$

Exercice 7

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, soit $g \in E$ et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

On munit $\mathbb{R}$ de la norme usuelle $|\cdot|$.

1. φ est-elle continue pour les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $Vert \cdot \|_2$?
2. Calculer la norme $|||\varphi|||$ dans les cas où φ est continue.

Exercice 8 :

Soit $E = \mathscr{C}^0\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ muni de la norme infinie. Calculer la norme subordonnée de l'application

$$\theta : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 :

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup sur $[0,1]$ notée $\|.\|_\infty$ et on définit, pour $f \in E$:

$$T(f) = \int_0^1 \sin(2\pi x) \cdot f(x)\ dx$$

1. Montrer que T est une forme linéaire continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.
2. Calculer une valeur approchée et/ou exacte de $|||T|||_{\|\cdot\|_\infty, |\cdot|}$.

Exercices sur les compacts

Exercice 10 :

On considère la situation où (E, d) est un espace métrique ou bien (E, N) est un espace vectoriel normé, et A une partie de E. Il faut répondre aux questions :

— A est-il ouvert dans E (pour d ou N) ?

— A est-il fermé dans E (pour d ou N) ?

— A est-il compact (pour d ou N) ?

1. $E = \mathbb{R}$, $N = |\ |$ et $A = [0, +\infty[$. Justifier les réponses.

2. $E=\mathbb{C}^2$, $N(z_1,z_2)=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$ et
$$A=\{(z_1,z_2)\in E,\ N(z_1,z_2)\leq 1\}.$$
Justifier les réponses.
3. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $N=\|\ \|_{\infty,[0,1]}$ et
$$A=\{f\in E,\ \forall x\in[0,1],\ |f(x)-x|\leq 1\}.$$
Justifier les réponses.
4. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, où on choisit la norme N par :
$$\forall f\in E,\ N(f)=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } A=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}).$$
Justifier les réponses.
5. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme :
$$\forall f\in E,\ N(f)=\int_0^{1/2}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\sup_{x\in[1/2,1]}|f(x)|.$$
On considère alors pour $a\in[0,1]$
$$A=\{f\in E,\ f(a)=0\}.$$
Justifier les réponses.

Exercice 11 :

On considère l'ensemble E des matrices $n\times n$ à coefficients réels, muni d'une norme quelconque et
$$A=\{M\in E,\ \det(M)=0\}.$$

1. Pourquoi ne s'intéresse-t-on pas à la norme ?
2. Montrer que A est fermé dans E.
3. Que vaut l'intérieur de A ? Justifier.

   Soit $M\in E$ et $r>0$.
4. Montrer que :
$$A\cap BF(M,r) \text{ est compact.}$$
Soit f une application continue de $A\cap BF(M,r)$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. On pose alors :
$$B=\bigcup_{X\in A\cap BF(M,r)} BF(X,f(X)).$$
5. B est-il encore compact ? Justifier.

Exercice 12 :

Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel normé de dimension finie. Soit K un compact d'intérieur non vide de E. On pose :

$$C = \{u \in \mathscr{L}(E),\ u(K) \subset K\}.$$

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u^n = u \circ u^{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que C est compact.
2. Soit $u \in C$. Montrer que la suite $(\det(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puis en déduire que $|\det(u)| \leqslant 1$.

Dans la suite, on suppose également que K est convexe.

1. Soit $u \in C$.
   (a) Soit $a \in K$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k(a).$$
   Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K et que $u(a_n) - a_n$ tend vers 0_E.
   (b) En déduire que :
   $$\exists b \in K,\ u(b) = b.$$

Exercice 13 :

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé **de dimension finie. On fixe** $g \in \mathscr{GL}(E)$, et on note

$$L_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

$$R_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\varphi_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & g \circ f \circ g^{-1} \end{array}$$

On fera attention au fait que **les variables des fonctions L_g, R_g et φ_g sont des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$.** On munit $\mathscr{L}(E)$ de la norme triple $|||.|||_{E,E}$. On note alors $|||.|||_L = |||.|||_{\mathscr{L}(E),\mathscr{L}(E)}$ la norme triple sur $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$, c'est-à-dire la norme triple pour les applications linéaires de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $L_g \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$. On admet dans la suite que les applications R_g et φ_g sont aussi linéaires.
2. Sans calcul, montrer que ces applications sont continues.
3. Déterminer $|||L_g|||_L$ et $|||R_g|||_L$.
4. Montrer que $1 \leqslant |||\varphi_g|||_L \leqslant |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.
5. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|g(x_0)\| = |||g|||_{E,E}$.
6. Montrer qu'il existe $y_0 \in E$ tel que $\|y_0\| = 1$ et $\|g(y_0)\| = \dfrac{1}{|||g^{-1}|||_{E,E}}$.
7. On admet qu'il existe un $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f(y_0) = x_0$ et $|||f|||_{E,E} = 1$. Montrer que $|||\varphi_g|||_L = |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.

Exercice 14 :

1. On considère l'espace vectoriel $E = (\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) On considère la fonction
   $$\begin{aligned} N :&E \to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 |f(t) - 2f(0)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
   Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction
   $$\begin{aligned} f_n :&[0,1] \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} n \times x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans (E, N), et donner sa limite.
2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé admettant un hyperplan dense H. Montrer que pour tout $y \in E\backslash H$, il existe une norme N' sur E telle que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tendant vers y dans (E, N), $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-y$ dans (E, N').
3. Donner une explication au résultat contre-intuitif de la question 1.

Exercice 15 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k$$

1. Montrer que u est continue et majorer $|||u|||$.
2. Montrer que :
   $$\forall a \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a)\| \leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\|$$
3. Montrer que
   $$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0_E\}$$
4. On suppose que
   $$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_n(x))$ converge. On note $v(x)$ sa limite. Montrer que l'application v est la projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$.
   (b) Montrer que v est continue.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est un fermé de E.
5. Montrer que, réciproquement, si pour tout $x \in E$ la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ est un fermé de E, alors
   $$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$