Intégration, séries de fonctions et analyse de Fourier
Td-Tp 4

Octobre 2023

Exercice 1 : Espace de Banach

1. Soient X et Y des des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit $Z = X \times Y$ le produit cartésien de X et Y. Si $\| \ \|_1$ est une norme sur X et $\| \ \|_2$ est une norme sur Y, alors

$$\|(x, y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

définit une norme sur Z.

Soit $(x, y), (u, v) \in Z$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On vérifie alors

(a) (Positivité) $\|(x, y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0$.

(b) (Caractère défini) Si $(x, y) = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$. D'où $\|x\|_1 = \|y\|_2 = 0$ et ainsi $\|(x, y)\|_Z = 0$. Inversement, si $\|(x, y)\|_Z = 0$ alors $\|x\|_1 = \|y\|_2 = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 0$, et donc $(x, y) = 0$.

(c) (Homogénéité) $\|\lambda(x, y)\|_Z = \|(\lambda x, \lambda y)\|_Z = \|\lambda x\|_1 + \|\lambda y\|_2 = |\lambda|\|x\|_1 + |\lambda|\|y\|_2 = |\lambda|\|(x, y)\|_Z$

(d) (Inégalité triangulaire) $\|(x, y) + (u, v)\|_Z = \|(x + u, y + v)\|_Z = \|x + u\|_1 + \|y + v\|_2 \leq \|x\|_1 + \|u\|_1 + \|y\|_2 + \|v\|_2 = \|(x, y)\|_1 + \|(u, v)\|_Z$

2. Soit X un espace vectoriel de norme $\| \ \|_1$ et Y un espace vectoriel de norme $\| \ \|_2$. Soit $Z = X \times Y$ muni de la norme indiquée la question 1. Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite dans Z.

   (a) Montrer que $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) dans Z si et seulement si $\{x_n\}$ converge vers x dans X et $\{y_n\}$ converge vers y dans Y.

Soit $\varepsilon > 0$, supposons que $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) dans Z. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|(x_n - x, y_n - y)\|_Z = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_Z \leq \varepsilon, \text{ quand } n \geq N$$

Alors

$$\|x_n - x\|_1 \leq \|(x_n - x, y_n - y)\|_Z \leq \varepsilon$$

et

$$\|y_n - y\|_1 \leq \|(x_n - x, y_n - y)\|_Z \leq \varepsilon$$

quand $n \geq N$. Donc $\{x_n\}$ converge vers x dans X et $\{y_n\}$ converge vers y dans Y.
Inversement, supposons que $\{x_n\}$ converge vers x dans X et $\{y_n\}$ converge vers y dans Y, alors il existent N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|x_n - x\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quand } n \geq N_1$$

et

$$\|y_n - y\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quand } n \geq N_2$$

Soit $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_Z = \|(x_n - x, y_n - y)\|_Z = \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 \leq \varepsilon, \text{ quand } n \geq N_0$$

Donc $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) dans Z.

(b) Montrer que $\{(x_n, y_n)\}$ est de Cauchy dans Z si et seulement si $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est de Cauchy dans Y.

> Soit $\varepsilon > 0$, supposons que $\{(x_n, y_n)\}$ est de Cauchy dans Z. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
>
> $$\|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_Z = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_Z \leq \varepsilon, \text{ quand } m, n \geq N$$
>
> Alors
> $$\|x_n - x_m\|_1 \leq \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_Z \leq \varepsilon$$
> et
> $$\|y_n - y_m\|_1 \leq \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_Z \leq \varepsilon$$
> quand $m, n \geq N$. Donc $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est de Cauchy dans Y.
> Inversement, supposons que $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est de Cauchy dans Y, alors il existent N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que
>
> $$\|x_n - x_m\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quand } m, n \geq N_1$$
>
> et
> $$\|y_n - y_m\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quand } m, n \geq N_2$$
> Soit $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, alors
>
> $$\|(x_n, y_n)-(x_m, y_m)\|_Z = \|(x_n-x_m, y_n-y_m)\|_Z = \|x_n-x_m\|_1+\|y_n-y_m\|_2 \leq \varepsilon, \text{ quand } n \geq N_0$$
>
> Donc $\{(x_n, y_n)\}$ est de Cauchy dans Z.

3. Soit X un espace de Banach de norme $\| \ \|_1$ et Y un espace de Banach de norme $\| \ \|_2$. Considérons $Z = X \times Y$, muni de la norme définie dans la question 1. Montrez que Z est un espace de Banach.

> Soit $\{(x_n, y_n)\}$ est une suite de Cauchy dans Z. Alors $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est de Cauchy dans Y d'après la question 2.b.
> Comme X et Y sont des espaces de Banach, $\{x_n\}$ converge vers x dans X et $\{y_n\}$ converge vers y dans Y. Donc $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) dans Z d'après la question 2.a.
> Donc Z est un espace de Banach.

Exercice 2 : Espace préhilbertien/ Espace de Hilbert

1. Soit X et Y des espaces préhilbertiens avec des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivement, et soit $Z = X \times Y$ l'espace de produit cartésien. Alors, montrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_Z : Z \times Z \to \mathbb{K} \text{ définie par } \langle (u, v), (x, y) \rangle_Z = \langle u, x \rangle_1 + \langle v, y \rangle_2$$

est un produit scalaire sur Z.

> symétrie, bilinéarité, caratère défini, positivité
>
> (a) (Positivité) Pour tout $(u, v) \in Z$,
>
> $$\langle (u, v), (u, v) \rangle_Z = \langle u, u \rangle_1 + \langle v, v \rangle_2 \geq 0$$
>
> car $\langle u, u \rangle_1 \geq 0$ et $\langle v, v \rangle_2 \geq 0$.
>
> (b) (Caratère défini) Pour tout $(u, v) \in Z$, nous avons
>
> $$\langle (u, v), (u, v) \rangle_Z = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle_1 + \langle v, v \rangle_2 = 0$$

Et comme $\langle u,u\rangle_1 \geq 0$ et $\langle v,v\rangle_2 \geq 0$ alors $\langle u,u\rangle_1 = 0$ et $\langle v,v\rangle_2 = 0$ Donc $u=0$ et $v=0$, c'est-à-dire $(u,v)=(0,0)$.
Inversement, si $(u,v)=(0,0)$ alors $u=0$ et $v=0$ donc $\langle u,u\rangle_1 = 0$ et $\langle v,v\rangle_2 = 0$. D'où

$$\langle (u,v),(u,v)\rangle_Z = \langle u,u\rangle_1 + \langle v,v\rangle_2 = 0$$

(c) (Bilinéairité) Pour tout $(u,v),(x,y),(l,k) \in Z$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(u,v)+\beta(x,y),(l,k)\rangle_Z &= \langle (\alpha u+\beta x, \alpha v+\beta y),(l,k)\rangle_Z \\
&= \langle \alpha u+\beta x, l\rangle_1 + \langle \alpha v+\beta y, k\rangle_2 \\
&= \alpha\langle u,l\rangle_1 + \beta\langle x,l\rangle_1 + \alpha\langle v,k\rangle_2 + \beta\langle y,k\rangle_2 \\
&= \alpha\left(\langle u,l\rangle_1 + \langle v,k\rangle_2\right) + \beta\left(\langle x,l\rangle_1 + \langle y,k\rangle_2\right) \\
&= \alpha\langle (u,v),(l,k)\rangle_Z + \beta\langle (x,y),(l,k)\rangle_Z
\end{aligned}$$

(d) (Symétrie) Pour tout $(u,v),(x,y) \in Z$

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle_Z = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2 = \overline{\langle x,u\rangle_1} + \overline{\langle y,v\rangle_1} = \overline{\langle x,u\rangle_1 + \langle y,v\rangle_1} = \overline{\langle (x,y),(u,v)\rangle_Z}$$

Remarque : Il convient de noter que, bien que les définitions ci-dessus et celle de l'exercice précédent soient naturelles, la norme induite sur Z par le produit scalaire ci-dessus a la forme $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2}$ (où $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ sont les normes induites par les produits scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$), alors que la norme définie sur Z dans l'exercice précédent a la forme $\|x\|_1 + \|y\|_2$.
Ces deux normes ne sont pas égales, mais elles sont équivalentes.

2. Supposons que X et Y soient des espaces de Hilbert avec des produits scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivement, et $Z = X \times Y$ l'espace de produit cartésien, le produit scalaire étant celui défini ci-dessus. Montrer que Z est un espace de Hilbert.

D'après l'exercice précèdent, Z est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|(x,y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Et comme la norme induite par le produit scalaire

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle_Z = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2$$

qui est définie par $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2}$ est équivalente à la norme

$$\|(x,y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Alors Z doit également être complet par rapport à la norme induite. Et par suite Z est un espace de Hilbert.

Remarque : Espace de Hilbert $\Leftrightarrow$ Espace de Banach + Produit scalaire.

Exercice 3 : Intégration (Révision)

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite I_n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.

Un calcul évident permet de montrer que :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1.$$

2. Montrer que la suite $\{I_n\}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin \geq 0$. Ainsi en passant à la puissance n-ième et en intégrant, la suite I_n est positive :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin^n(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \geq 0$$

De plus comme $\sin \leq 1$, on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad I_{n+1} \leq I_n$$

Finalement, la suite $\{I_n\}$ est décroissante minorée donc elle est convergente.

3. *Indication : On fera attention à la parité de n.*

   (a) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.

Soit $n \geq 2$. On écrit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)dt$. On pose :

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(t), & u(t) = -\cos(t), \\ v(t) = \sin^{n-1}(t), & v't) = (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t). \end{cases}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$. On effectue une I.P.P. :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)dt \\ &= \left[-\cos(t)(\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)dt, \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)dt - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^{n-2}(t)dt, \end{aligned}$$

car $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Finalement on a $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. Soit $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$.

   (b) Exprimer I_n en fonction de n.

On doit différencier le cas paire et impaire. On montre par récurrence (je vous laisse le faire) que :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3 \times 1}{2p(2p-2)\ldots \times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3 \times 1}{2^p p(p-1)\ldots \times 1} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2p(2p-2)\ldots \times 2} \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 3 \times \times 2 \times 1}{2^p p(p-1)\ldots \times 1} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!^2)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3\times 1} I_1 \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

4. Montrer par récurrence que nI_nI_{n-1} est une constante à déterminer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de récurrence, on en déduit que

$$nI_nI_{n-1} = n\frac{n-1}{n}I_{n-2}I_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}.$$

Ainsi, la suite $\{nI_nI_{n-1}\}$ est constante. Calculons sa valeur en 1. Elle vaut $I_0 \times I_1 = \frac{\pi}{2}$.

5. (a) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Notons l la limite de u_n. Alors :

$$u_nu_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $l^2 = 0$. Donc $l = 0$. Ainsi la suite I_n tend vers 0.

(b) On pose $u_n = \frac{I_n}{I_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $\{u_n\}$. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

Comme la suite est décroissante, on a $u_n \geq 1$. Ensuite en utilisant la formule de récurrence, on obtient :

$$\frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}.$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Par définition, on en déduit que $u_n \sim u_{n-1}$.

(c) Montrer que :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On peut multiplier des équivalents. Ainsi :

$$I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 4 : Completude/ Compacité

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on le munit du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que c'est bien un produit scalaire. Notons :

$$\forall f \in E,\ \|f\| \overset{Not}{=} \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la fonction $x \mapsto 1-x$.

1. Montrer que E n'est pas complet pour la norme $\|\ \|$.

C'est du cours. Le dessin qui représente la non complétude de E pour la norme $\| \ \|$ (usuellement notée $\| \ \|_{1,[0,1]}$) est : **Figure 1.2 dans le poly.**

2. Montrer que F est un sous-ensemble convexe, complet de E.

   (a) F est convexe, car c'est un sous-espace vectoriel.

   (b) F est complet, car il est de dimension finie.

3. Calculer la projection de la fonction $x \mapsto 1$ sur le convexe F.

On a donc

$$E = F \oplus F^{\perp}. \text{ et } \forall x \in E,\ p_F(x) = \langle e, x\rangle.e$$

où e est un vecteur unitaire formant une base de F. Donc :

$$p_F(1) = \frac{\langle u, 1\rangle}{\|u\|^2}.u \text{ où } u\ :\ x \mapsto 1 - x.$$

Soit

$$p_F(1) = \frac{3}{2}.\left(x \mapsto 1 - x\right).$$

On considère le sous-ensemble de E défini par :

$$C = F \cap BF\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

4. Montrer que C est un convexe, complet de E.

   (a) C est convexe, comme intersection de deux convexes.

   (b) C est complet, car il est fermé dans l'espace complet F (c'est l'intersection d'une boule fermée avec F). On peut aussi dire que, comme F est de dimension finie, C est fermé, borné dans F donc compact, donc complet.

5. Calculer la projection de la fonction $x \mapsto 1$ sur le convexe C.

C est un segment de droite, et la projection $p_F(1)$ sur cette droite n'est pas sur ce segment, car

$$\|p_F(1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}.$$

La projection sera donc l'extrémité du segment la plus proche de la projection soit :

$$p_C(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(x \mapsto 1 - x\right).$$

Exercice 5 : Completude/ Compacité

On considère l'ensemble E des matrices $n \times n$ à coefficients réels, muni d'une norme quelconque et

$$A = \{M \in E,\ \det(M) = 0\}.$$

1. Pourquoi ne s'intéresse-t-on pas à la norme ?

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La topologie ne changera pas lorsque l'on changera de norme.

2. Montrer que A est fermé dans E.

L'application det est n-linéaire sur E de dimension finie, elle est donc continue et

$$A = \det{}^{-1}(\{0\}),$$

est image réciproque du singleton $\{0\}$ qui est fermé dans $\mathbb{R}$.

3. Que vaut l'intérieur de A ? Justifier.

Le complémentaire de A est $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans E, donc :

$$\mathring{A} = \overbrace{(GL_n(\mathbb{R})^c)}^{\circ} = \left(\overline{GL_n(\mathbb{R})}\right)^c = \emptyset.$$

Soit $M \in E$ et $r > 0$.

4. Montrer que :

$$A \cap BF(M, r) \text{ est compact.}$$

$A \cap BF(M, r)$ est intersection de deux fermés de E, il est donc fermé dans E. Comme il est borné et que nous sommes en dimension finie, c'est bien un compact.

Soit f une application continue de $A \cap BF(M, r)$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. On pose alors :

$$B = \bigcup_{X \in A \cap BF(M,r)} BF(X, f(X)).$$

5. B est-il encore compact ? Justifier.

On peut procéder de deux manières.

(a) *Directement.* Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$, chaque b_p étant dans une boule $BF(X_p, f(X_p))$ où $X_p \in A \cap BF(M, r)$. Cela nous fournit une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \left(A \cap BF(M, r)\right)^{\mathbb{N}}$ qui est compact. On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers une limite $\Lambda \in A \cap BF(M, r)$. Soit :

$$X_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \Lambda.$$

Comme f est continue, on obtient alors :

$$f\left(X_{\varphi(p)}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(\Lambda).$$

Donc, pour p assez grand, on a :

$$b_{\varphi(p)} \in BF(\Lambda, 2f(\Lambda)) \text{ qui est compacte.}$$

Car c'est une boule fermée d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On en déduit qu'il existe une sous-suite de $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite β, qui vérifie immédiatement :

$$\beta \in A \cap BF(\Lambda, f(\Lambda)) \subset B,$$

en passant à la limite... B est bien compact.

(b) On peut aussi utiliser qu'en dimension finie, les compacts sont les fermés, bornés.

— *B est bornée.* Car la fonction f continue sur un compact est bornée. Notons S sa borne supérieure (qui est d'ailleurs un maximum), alors :

$$B \subset BF(M, r + S).$$

— *B est fermée dans E.* Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite $\beta \in E$. Montrons que $\beta \in B$. On procède comme avant, chaque b_p est dans une boule $BF(X_p, f(X_p))$, on extrait une sous-suite de $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Λ et, par continuité de f, on obtient que :

$$\beta \in BF\left(\Lambda, f(\Lambda)\right).$$

Ce qui montre le résultat.