Mathématiques II – TD$_1$

10-11 avril 2022

Exercice 1

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante est de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} x^2\, y^2 \ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour montrer qu'une fonction f de plusieurs variables est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut montrer qu'elle est continue, que ses dérivées partielles existent et qu'elles sont continues.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc il faut étudier ce qui se passe en $(0,0)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$. On a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}| &\leqslant x^2\, y^2 |\ln(x^2+y^2)| \\ &\leqslant (x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)| \\ &\leqslant (x^2+y^2)|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| \end{aligned}$$

  car $x^2 \leqslant x^2+y^2$ et $y^2 \leqslant x^2+y^2$.
  D'après le cours, on a $t\,\ln(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$. De plus, $x^2+y^2 \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$. Par composition et opération sur les limites, on en déduit que

$$(x^2+y^2)|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  donc, par encadrement, $f(x,y) \to f(0,0)$ quand $(x,y) \to (0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$.
- $\partial_1 f(0,0)$ existe car pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  ce qui montre que f est dérivable par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et que $\partial_1 f(0,0) = 0$. On en déduit que $\partial_1 f$ existe sur $\mathbb{R}^2$.
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\partial_1 f(x,y) = 2x\, y^2 \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3\, y^2}{x^2+y^2}$$

  Montrons que $\partial_1 f$ est continue en $(0,0)$. On a :

$$0 \leqslant |\partial_1 f(x,y) - \underbrace{\partial_1 f(0,0)}_{=0}| \leqslant 2|x|\, y^2 |\ln(x^2+y^2)| + \frac{2|x|^3\, y^2}{x^2+y^2}$$

  D'une part, comme $y^2 \leqslant x^2+y^2$, on a

$$0 \leqslant \frac{2|x|^3\, y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{2|x|^3\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2|x|^3 \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, comme $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $y^2 \leqslant x^2+y^2$, on a

$$0 \leqslant 2|x|\, y^2 |\ln(x^2+y^2)| \leqslant 2(x^2+y^2)^{3/2} |\ln(x^2+y^2)| \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $t^{3/2}\ln t \to 0$ quand $t \to 0^+$ (même démonstration que précédemment).
Finalement, on obtient $\partial_1 f(x,y) - \partial_1 f(0,0) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$. On en déduit que $\partial_1 f$ est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

- On remarque que f est symétrique :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

ce qui montre que f est dérivable par rapport à sa seconde variable en $(0,0)$ et que $\partial_2 f = \partial_1 f$ est continue.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1.}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$ existent mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.

- Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h-0} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h-0} = 1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

donc f est dérivable par rapport à ses deux variables en $(0,0)$ (on a $\partial_1 f(0,0) = 0$ et $\partial_2 f(0,0) = 1$).

Pour montrer qu'une fonction de deux variables n'est pas continue en $(0,0)$, une méthode classique consiste à se placer sur une courbe $\phi \colon t \in \mathbb{R} \mapsto (\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(t) \to (0,0)$ quand $t \to 0$ mais telle que $f(\phi(t))$ ne tend pas vers $f(0,0)$ quand $t \to 0$. Ici, on peut considérer $\phi \colon t \mapsto (t, \sqrt{t})$.

- La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car, pour $t > 0$, on a :

$$f\big(t, \sqrt{t}\big) = 1 \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \neq f(0,0) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\partial_1 f(0,0) \text{ et } \partial_2 f(0,0) \text{ existent mais que } f \text{ n'est pas continue en } (0,\,0).}$$

Exercice 3

Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer les dérivées de la fonction g en fonction de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ dans les cas suivants :

1. $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$
2. $g : x \mapsto f(x, x)$
3. $g : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$
4. $g : x \mapsto f(x, f(x, x))$

Pour être sûr de ne pas faire d'erreur, on peut utiliser les formules de dérivation des fonctions composées :

— *Avec plusieurs variables :* $\partial_k(f \circ g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_k g_i \, \partial_i f(g)$

— *Avec une seule variable :* $(f \circ \phi)' = \sum_{i=1}^{n} \phi_i' \, \partial_i f(\phi)$

1. Posons

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) = \big(h_1(x, y), h_2(x, y)\big) \end{array} \right.$$

On a alors $g = f \circ h$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ car f et h le sont). On a donc :

$$\partial_1 g = \partial_1(f \circ h) = \partial_1 h_1 \partial_1 f(h) + \partial_1 h_2 \partial_2 f(h)$$

d'où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 g(x, y) = \underbrace{\partial_1 h_1(x, y)}_{=0} \partial_1 f(h(x, y)) + \underbrace{\partial_1 h_2(x, y)}_{=1} \partial_2 f(h(x, y)) = \partial_2 f(y, x)$$

Attention, $\partial_1 g \neq \partial_2 f$ *car cela voudrait dire que* $\partial_1 g(x, y) = \partial_2 f(x, y)$ *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Par exemple, si $f : (x, y) \mapsto x^2 y$ *on a*

$$\partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x\, y \quad \text{et} \quad \partial_2 f : (x, y) \mapsto x^2$$

On a alors $g : (x, y) \mapsto f(y, x) = y^2 x$ *donc*

$$\partial_1 g : (x, y) \mapsto y^2 \quad \text{et} \quad \partial_2 g : (x, y) \mapsto 2x\, y$$

On a $\partial_1 g \neq \partial_2 f$ *mais on a bien* $\partial_1 g(x, y) = \partial_2 f(y, x)$ *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De même, on montre que $\partial_2 g(x, y) = \partial_1 f(y, x)$. Conclusion :

$$\boxed{\partial_1 g : (x, y) \longmapsto \partial_2 f(y, x) \text{ et } \partial_2 g : (x, y) \longmapsto \partial_1 f(y, x)}$$

2. Posons

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x) = \big(\phi_1(x), \phi_2(x)\big) \end{array} \right.$$

On a alors $g = f \circ \phi$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ car f et ϕ le sont). On a donc :

$$g' = (f \circ \phi)' = \phi_1' \partial_1 f(\phi) + \phi_2' \partial_2 f(\phi)$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \underbrace{\phi_1'(x)}_{=1} \partial_1 f(\phi(x)) + \underbrace{\phi_2'(x)}_{=1} \partial_2 f(\phi(x))$$

et donc

$$\boxed{g' : x \longmapsto \partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x).}$$

3. Posons
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, f(x,x)) = \big(h_1(x,y), h_2(x,y)\big) \end{array} \right.$$
On a alors $g = f \circ h$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ car f et h le sont). On a donc :
$$\partial_1 g = \partial_1 (f \circ h) = \partial_1 h_1 \partial_1 f(h) + \partial_1 h_2 \partial_2 f(h)$$
d'où
$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 g(x,y) &= \underbrace{\partial_1 h_1(x,y)}_{=0} \partial_1 f(h(x,y)) + \underbrace{\partial_1 h_2(x,y)}_{=\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)} \partial_2 f(h(x,y)) \\ &= \big(\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)\big) \partial_2 f\big(y, f(x,x)\big) \end{aligned}$$
en remarquant que h_2 est la fonction g de la question 2. On montre de même que $\partial_2 g(x,y) = \partial_1 f\big(y, f(x,x)\big)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Conclusion :
$$\boxed{\partial_1 g : (x,y) \longmapsto \big(\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)\big) \partial_2 f\big(y, f(x,x)\big) \text{ et } \partial_2 g : (x,y) \longmapsto \partial_1 f\big(y, f(x,x)\big)}$$

4. Posons
$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \big(x, f(x,x)\big) = \big(\phi_1(x), \phi_2(x)\big) \end{array} \right.$$
On a alors $g = f \circ \phi$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ car f et ϕ le sont). On a donc :
$$g' = (f \circ \phi)' = \phi_1' \partial_1 f(\phi) + \phi_2' \partial_2 f(\phi)$$
d'où
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \underbrace{\phi_1'(x)}_{=1} \partial_1 f(\phi(x)) + \underbrace{\phi_2'(x)}_{=\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)} \partial_2 f(\phi(x))$$
en remarquant que ϕ_2 est la fonction g de la question 2. Conclusion :
$$\boxed{g' : x \longmapsto \partial_1 f\big(x, f(x,x)\big) + \big(\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)\big) \partial_2 f\big(x, f(x,x)\big).}$$

Exercice 4

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit le *laplacien* Δf de f par :
$$\Delta f = \partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} f$$
On pose $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ à l'aide des dérivées partielles de g.

La fonction g est la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$\begin{aligned} \partial_1 g(r,\theta) &= \partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin)\cos(\theta) + \partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin)\sin(\theta) \\ \partial_2 g(r,\theta) &= -r\sin(\theta)\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin) + \partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin) r\cos(\theta) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}g(r,\theta) &= \partial^2_{1,1}f(r\cos(\theta), r\sin)\cos(\theta)^2\\ &\quad + 2\partial^2_{1,2}f(r\cos(\theta), r\sin)\cos(\theta)\sin(\theta)\\ &\quad + \partial^2_{2,2}f(r\cos(\theta), r\sin)\sin(\theta)^2\\ &= \cos(\theta)^2\partial^2_{1,1}f(x,y) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\partial^2_{1,2}f(x,y) + \sin(\theta)^2\partial^2_{2,2}f(x,y)\end{aligned}$$

en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On a également

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,2}g(r,\theta) &= \partial^2_{1,1}f(r\cos(\theta), r\sin)r^2\sin(\theta)^2\\ &\quad + \partial^2_{2,1}f(r\cos(\theta), r\sin)\, r^2(-\sin(\theta)\cos(\theta))\\ &\quad - r\,\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin)\cos(\theta)\\ &\quad + \partial^2_{1,2}f(r\cos(\theta), r\sin)\, r^2\ \cos(\theta)(-\sin(\theta))\\ &\quad + \partial^2_{2,2}f(\cos(\theta), r\cos)r\cos(\theta) - r\,\partial_2 f(\cos(\theta), r\cos)\sin(\theta)\\ &= -r\cos(\theta)\partial_1 f(x,y) - r\sin(\theta)\partial_2 f(x,y)(x,y) + r^2\sin(\theta)^2\partial^2_{1,1}f(x,y)(x,y)\\ &\quad + r^2\cos(\theta)^2\partial^2_{2,2}f(x,y) - 2\,r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\partial^2_{1,2}f(x,y)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\Delta f(x,y) = \partial^2_{1,1}f(x,y) + \partial^2_{2,2}f(x,y) = \partial^2_{1,1}g(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{2,2}g(r,\theta)(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_1 g(r,\theta)(r,\theta)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\Delta f(x,y) = \partial^2_{1,1}g(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\partial^2_{2,2}g(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\partial_1 g(r,\theta)}$$

Exercice 5

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* r si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0, \quad f(t\,x, t\,y) = t^r\, f(x,y)$$

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si f est homogène de degré r, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $r-1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r si, et seulement si, f vérifie l'*équation d'Euler* :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\,\partial_1 f(x,y) + y\,\partial_2 f(x,y) = r\,f(x,y)$$

Soit $t > 0$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. On pose $g(x,y) = f(t\,x, t\,y)$. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées (avec $g = f \circ h$ et $h(x,y) = (t\,x, t\,y)$, voir l'exercice 3), on obtient

$$\partial_1 g(x,y) = t\,\partial_1 f(t\,x, t\,y)$$

Mais $g(x,y) = t^r\, f(x,y)$ donc en dérivant cette relation par rapport à x on obtient

$$\partial_1 g(x,y) = t^r \partial_1 f(x,y)$$

On en déduit que :

$$\partial_1 f(t\,x, t\,y) = t^{r-1}\,\partial_1 f(x,y)$$

On montre que même que $\partial_2 f(t\,x, t\,y) = t^{r-1}\,\partial_2 f(x,y)$. Conclusion :

$$\boxed{\partial_1 f \text{ et } \partial_2 f \text{ sont homogènes de degré } r-1.}$$

2. — Supposons que f est homogène de degré r : $f(t\,x, t\,y) = t^r f(x,y)$. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées (sur $f\circ\phi : t \mapsto f(\phi(t)) = f(t\,x, t\,y)$ avec $\phi(t) = (t\,x, t\,y)$, voir l'exercice 3) : on obtient en dérivant $f(t\,x, t\,y) = t^r f(x,y)$ par rapport à t :

$$x\,\partial_1 f(t\,x, t\,y) + y\,\partial_2 f(t\,x, t\,y) = r\,t^{r-1}\,f(x,y)$$

Puisque $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont homogènes de degré $r-1$ (question 1), on a

$$x\,t^{r-1}\,\partial_1 f(x,y) + y\,t^{r-1}\,\partial_2 f(x,ty) = r\,t^{r-1}\,f(x,y)$$

donc en divisant par $t^{r-1} > 0$, on en déduit que f vérifie l'équation d'Euler.

— On suppose maintenant que f vérifie l'équation d'Euler. Posons $\phi : t \mapsto t^{-r}\,f(t\,x, t\,y)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées (voir l'exercice 3), on a :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= -r\,t^{-r-1}\,f(t\,x, t\,y) + t^{-r}\big(x\,\partial_1 f(t\,x, t\,y) + y\,\partial_2 f(t\,x, t\,y)\big)\\
&= -t^{-r-1}\Big((t\,x)\partial_1 f(t\,x, t\,y) + (t\,y)\partial_2 f(t\,x, t\,y) - r\,f(t\,x, t\,y)\Big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

car f est solution de l'équation d'Euler. La fonction ϕ est donc constante : $\phi(t) = \phi(1) = f(x,y)$ pour tout $t > 0$, c'est-à-dire $f(t\,x, t\,y) = t^r\,f(x,y)$.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est homogène de degré } r \text{ si, et seulement si, } f \text{ vérifie l'équation d'Euler.}}$$

Exercice 6

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

$$\partial_1 g - \partial_2 g = a$$

où a est un nombre réel.

1. On suppose que g vérifie $\partial_1 g - \partial_2 g = a$. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

Montrer que $\partial_1 f = \dfrac{a}{2}$.

2. En déduire l'expression de f.

3. Conclure.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition. En utilisant la formule de dérivation des

fonctions composées (voir l'exercice 3), on obtient pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u,v) &= \frac{1}{2}\partial_1 g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) - \frac{1}{2}\partial_2 g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

en utilisant $\partial_1 g - \partial_2 g = a$. Conclusion :

$$\boxed{\text{si } g \text{ vérifie } \partial_1 g - \partial_2 g = a, \text{ alors } \partial_1 f = \frac{a}{2}.}$$

2. Fixons $v \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la fonction $\phi : u \mapsto f(u,v)$ vérifie $\phi' = a/2$. On en déduit qu'il existe une constante $C(v) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f(u,v) = \frac{a\,u}{2} + C(v)$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $v \mapsto C(v) = f(u,v) - \dfrac{a\,u}{2}$ aussi.

3. On procède par analyse-synthèse.
   — Analyse : les questions précédentes montrent que si g vérifie $\partial_1 g - \partial_2 g = a$ alors il existe une fonction $C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{au}{2} + h(v)$$

   Pour revenir à x et y, il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{v-u}{2}$. On obtient alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + C(x+y)$$

   — Synthèse : soit $C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit g définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + X(x+y)$$

   On vérifie alors que $\partial_1 g - \partial_2 g = a$ (calcul de dérivée d'une fonction composée).

   Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$\left\{(x,y) \longmapsto \frac{a(x-y)}{2} + C(x+y) : h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$$

Exercice 7

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

3. Calculer $\partial^2_{1,2} f(0,0)$ et $\partial^2_{2,1}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. On a, par inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant |f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}| \leqslant \frac{|x\,y|(x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x\,y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $f(x,y) \to f(0,0)$ quand $(x,y) \to (0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$. Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue.}}$$

2. $\partial_1 f(0,0)$ existe et vaut 0 car pour $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h-0} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\partial_1 f$ existe sur $\mathbb{R}^2$. On a également

$$\partial_1 f(x,y) = y\,\frac{x^4+4x^2\,y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

donc

$$0 \leqslant |\partial_1 f(x,y) - \partial_1 f(0,0)| \leqslant |y|\,\frac{|x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\,\frac{4(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 4|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $\partial_1 f$ est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque que f est antisymétrique : $f(x,y) = -f(y,x)$ ce qui montre que $\partial_2 f$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

3. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\frac{\partial_1 f(0,h) - \partial_1 f(0,0)}{h-0} = -1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -1$$

et

$$\frac{\partial_2 f(h,0) - \partial_2 f(0,0)}{h-0} = 1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit que $\partial^2_{1,2} f(0,0) \neq \partial^2_{2,1}(0,0)$. D'après la contraposée du théorème de Schwarz, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ n'est pas de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 8

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On dit que f est *harmonique* sur Ω si le *laplacien* de f est nul, c'est-à-dire :

$$\partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} f = 0$$

1. Vérifier que $(x,y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^*\,\mathbb{R}$.

(Coming soon...)

2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^3$ et harmonique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.

(Coming soon...)