Electomagnétisme Y3

Ex 1.1 - Charges émises à partir d'un point

1. Choix d'un système de coordonnés sphériques $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$.

Pour un point M extérieur à la sphère de rayon R, les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charge.

Le champ $\vec{E}(M)$ appartient à ces 2 plans de symétrie, ce qui justifie que $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{u_r}$: $\vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u_r}$.

2. L'émission des charges dans l'espace se fait de manière isotope. Le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique : $\vec{j} = j_r(r)\,\vec{u_r}$.

Tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de courant.

Or le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à chacun de ces plans de symétrie, il est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M) = \vec{0}.$$

3. D'après le théorème de Gauss : $\oint\!\!\oint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}_{ext,M} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

ici, $\oint\!\!\oint_S E(M,t)\,\vec{u_r} \cdot dS\,\vec{u_r} = \frac{Q(r,t)}{\varepsilon_0}$ pour $r > R$.

$$E(M,t) \times 4\pi r^2 = \frac{Q(r,t)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \frac{Q(r,t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\,\vec{u_r}}$$

4. D'après l'équation de Maxwell-Ampère (M.A):

$$\vec{rot}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} = \mu_0\left[\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t)\right]$$

$$= \mu_0\left[\vec{j}(M,t) + \vec{j}_D(M,t)\right]$$

↳ courant de déplacement
↳ courant lié au mouvement des charges

$$\vec{j}_D(M,t) = \varepsilon_0 \cdot \frac{\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}\,\vec{u_r}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} \Rightarrow \vec{j}(M,t) = \frac{-\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}}{4\pi r^2}\,\vec{u_r}$$

avec $\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} < 0$ car les charges sortent de la sphère.

Or $\vec{B}(M,t) = \vec{0} \Rightarrow (M.A)\ \vec{0} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \right]$

$$\boxed{\vec{j}_D(M,t) = -\vec{j}(M,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q(M,t)}{\partial t} \vec{u_r}}.$$

Cohérent avec l'équation de Maxwell-Ampère (M.A).

Ex 1.2 - Emission isotope de charge dépendant du temps

TD

1. Initialement neutre, aucun électron n'a dépassé à l'instant t, la sphère de rayon $r = v_0 t$. On a donc :

$$q(r > v_0 t, t) = 0.$$

Pour $r < v_0 t$, la charge comprise à l'instant t entre les sphères de centre O et de rayons r et $(r+dr)$ a été émise en O entre les dates $(t - \frac{r}{v_0})$ et $(t - \frac{(r+dr)}{v_0})$ soit pendant une durée $dt = \frac{dr}{v_0}$. Elle vaut :

$$dq = \alpha(-e) \times dt = -\alpha e \left(\frac{dr}{v_0}\right)$$

avec α le nombre d'électrons émis par unité de temps.

Par définition de la densité volumique de charges, on a :

$$dq = \rho \times 4\pi r^2 dr \Rightarrow \rho(r,t) = \frac{-\alpha e \left(\frac{dr}{v_0}\right)}{4\pi r^2 dr} = \boxed{\frac{-\alpha e}{4\pi r^2 v_0} = \rho(r,t)}$$

Par définition, la densité de courant volumique vaut

$$\vec{j}(r,t) = \rho(r,t)\vec{v_0} = \rho(r,t) v_0 \vec{e_r}$$

- Pour $r > v_0 t$, $q(r > v_0 t, t) = 0$ et $\boxed{\vec{j}(r > v_0 t, t) = \vec{0}}$
- Pour $r < v_0 t$, $\rho(r < v_0 t, t) = \dfrac{-\alpha e}{4\pi r^2 v_0}$ et $\boxed{\vec{j}(r < v_0 t, t) = \dfrac{-\alpha e}{4\pi r^2} \vec{e_r}}$

2. Pour un problème à symétrie sphérique, $\vec{E}$ est radial $\Rightarrow E(r,t)\vec{e_r}$ et ne dépend que de la variable r.

D'après le théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{q(r,t)}{\varepsilon_0} = E(r,t) \times 4\pi r^2$

Pour $r > v_0 t$, la charge intérieure à la surface de Gauss est nulle car aucun électron n'a franchi la sphère qui reste neutre $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

~~Pour $r < v_0 t$, $q(r < v_0, t) = \alpha e t + \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r,t) dr = \alpha e (t - \frac{r}{v_0})$~~

~~$\vec{E}(r < v_0 t, t) = \alpha e \ldots (t - \frac{r}{v_0}) \vec{u_r}$~~

Pour $r < v_0 t$, $q(r<v_0t,t) = \underbrace{\alpha t \times e}_{\text{charge prise par la bille de cuivre}} + \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r,t)\, dr$

$$q(r < v_0t,t) = \alpha t e + \int_0^r 4\pi r^2 \left(\frac{-\alpha e}{4\pi r^2 v_0}\right) dr$$

$$q(r<v_0t,t) = \alpha t e - \frac{\alpha e}{v_0} r = \alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r<v_0t,t) = \frac{\alpha e}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\left(t - \frac{r}{v_0}\right)\vec{e_r}}$$

Ce champ dérive d'un potentiel scalaire $V(r,t)$ tel que :

$$E(r,t) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$dV(r,t) = -E(r,t)\, dr$$

$$= \frac{-\alpha e t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} + \frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 v_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(r,t) = \frac{-\alpha e t}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right] + \frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 v_0}\ln r + cste$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r,t) = \frac{\alpha e t}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\alpha e \ln r}{4\pi\varepsilon_0 v_0} + cste}$$

Calcul du courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Pour $r < v_0 t$, $\boxed{\vec{j}_D = \cancel{\varepsilon_0}\frac{\alpha e}{4\pi\cancel{\varepsilon_0} r^2}\vec{e_r}}$

Pour un champ magnétique nul, les équations de Maxwell se réduisent à :

(M.G) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; (M.F) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$; (M.φ) $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 = 0$; (M.A) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

- Si $r > v_0 t$ alors $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ ⇒ équations satisfaites.
- Si $r < v_0 t$, alors $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ satisfaite car forme locale du théorème de Gauss utilisée pour calculer $\vec{E}$.

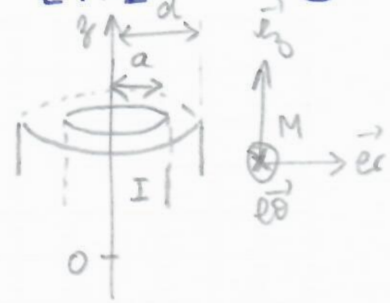
(MF) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ satisfaite car $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V$ et $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\,V) = \vec{0}$.

(M.A) $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} = +\frac{\vec{j}_D}{\varepsilon_0} = -\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ vérifiée

Ex-EM1 ⑦

Ex 1.5 - Onde de courant dans 1 câble coaxial

TD



1. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant $I(z,t)$.

Le problème est à symétrie cylindrique (r, θ, z).

Pour tout point M de l'espace, le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie Π pour la distribution de courant, et le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un plan d'antisymétrie Π^*

Or $\vec{B} \perp \Pi$ et $\vec{B} \in \Pi^*$. donc $\vec{B}$ <u>est selon $\vec{e_\theta}$</u>, orthoradial.
$\Downarrow$
$\perp$ au rayon r

Dans le cas général, le champ <u>$\vec{E}$ est radial</u>, il appartient aux plans de symétrie de la distribution des charges.

2. D'après le théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlacés}$.

Pour $a \leq r \leq d$, on choisit pour contour d'Ampère un cercle centré sur l'axe Oz et de rayon r.

$$\oint B(r,z,t)\,\vec{e_\theta} \cdot dl\,\vec{e_\theta} = \mu_0 I(z,t) \qquad \text{avec } \vec{dl} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$B(r,z,t)\, 2\pi r = \mu_0 I(z,t)$$

En notation complexe, on a : $\underline{b}(r,z)\exp(j\omega t)\, 2\pi r = \mu_0 \underline{i}(z)\exp(j\omega t)$

$$\boxed{\underline{b}(r,z) = \frac{\mu_0\, \underline{i}(z)}{2\pi r}}$$

3. Pour $a \leq r \leq d$, dans cette zone vide de charge et de courant, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit ; avec $\vec{B} = B\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B}{\partial z}\vec{e_r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial (rB)}{\partial r}}_{=0 \text{ car } rB \text{ est indépendant de } r}\vec{e_z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}\vec{e_r}$$

Selon $\vec{e_r}$, on a : $-\frac{\partial \underline{b}(r,z)}{\partial z}\cancel{\exp(j\omega t)} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega\, \underline{e}(r,z)\cancel{\exp(j\omega t)}$

$$\underline{e}(r,z) = \frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{\mu_0} j\omega}\left(-\frac{\cancel{\mu_0}}{2\pi r}\right)\frac{\partial \underline{i}(z)}{\partial z} = \boxed{j\,\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \omega r}\frac{d\underline{i}(z)}{dz} = \underline{e}(r,z)}$$

complexe $j^2 = -1$

4. D'ap l'équation de Maxwell - Faraday / avec $\vec{E} = E\vec{e_r}$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}\vec{e_\theta} - \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}}_{=0 \text{ car } \vec{E} \text{ ne dépend pas de } \theta}\vec{e_z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}\vec{e_\theta}$$

Selon e_θ:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\underline{E}(r,z)\exp(j\omega t)\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{b}(r,z)\exp(j\omega t)\right]$$

$$j\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\omega r}\frac{d^2\underline{i}(z)}{dz^2}\exp(j\omega t) = -\underline{b}(r,z)\,j\omega.\exp(j\omega t)$$

$$\cancel{j}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\omega r}\cancel{\exp(j\omega t)}\frac{d^2\underline{i}(z)}{dz^2} = -\mu_0\frac{\underline{i}(z)}{2\pi r}\cancel{j}\omega\,\cancel{\exp(j\omega t)}$$

$$\frac{d^2\underline{i}(z)}{dz^2} + \frac{\mu_0\cancel{2\pi}\varepsilon_0\omega^2\cancel{r}}{\cancel{2\pi r}}\underline{i}(z) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\underline{i}(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\underline{i}(z) = 0} \quad \text{car } \varepsilon_0\mu_0c^2 = 1.$$

équation différentielle du 2° ordre à coefs constants sans second membre. Les solutions sont de la forme :

$$\underline{i}(z) = A\exp\left(j\frac{\omega}{c}z\right) + B\exp\left(-j\frac{\omega}{c}z\right)$$

$$= A\exp(jkz) + B\exp(-jkz)$$

avec $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

On retrouve la même relation de dispersion que pour une OPPM dans le vide.

5. On choisit $\underline{i}(z) = i_0\exp(-jkz)$.

Par définition, le vecteur de Poynting s'écrit : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

avec <u>$\vec{E}$ et $\vec{B}$ réels</u>. ⚠

$$\vec{E}(r,z,t) = Re\{\underline{\vec{E}}(r,z,t)\}$$

$$= Re\left\{j\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\omega r}i_0(-jk)\exp(-jkz)\exp(j\omega t)\vec{e_r}\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{i_0k}{2\pi\varepsilon_0\omega r}\exp(-jkz)\exp(j\omega t)\vec{e_r}\right\}$$

$$= \frac{i_0k}{2\pi\varepsilon_0\omega r}\cos(\omega t - kz)\vec{e_r}$$

$$\vec{B}(r,z,t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{B}}(r,z,t)\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \mu_0 \frac{i_0 \exp(-jkz)}{2\pi r} \exp(j\omega t)\, \vec{e_\theta} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \cos(\omega t - kz)\, \vec{e_\theta}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \left[\frac{i_0 k}{2\pi \varepsilon_0 \omega r} \cos(\omega t - kz)\, \frac{\cancel{\mu_0} i_0}{2\pi r} \cos(\omega t - kz) \right] \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{k}{\varepsilon_0 \omega} \left[\frac{i_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right]^2 \vec{e_z} \qquad \text{or } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \mu_0 c \left[\frac{i_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right]^2 \vec{e_z}}$$

Par définition, $\mathcal{P} = \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \iint \Pi\, \vec{e_z} \cdot dr\, r d\theta\, \vec{e_z}$

$$\mathcal{P} = \int_{r=a}^{d} \Pi\, r\, dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_a^d \mu_0 c \frac{i_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{4\pi^2} \frac{dr}{r} \times 2\pi$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \mu_0 c \frac{i_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{4\pi^2} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \times 2\pi}$$

Calculons la moyenne temporelle de cette puissance transportée par le câble.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 c\, i_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle \quad \text{avec } \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 c\, i_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)} \Rightarrow i_0 = \left(\frac{4\pi \langle \mathcal{P} \rangle}{\mu_0 c \ln\left(\frac{d}{a}\right)} \right)^{1/2}$$

AN $\quad i_0 = \left(\dfrac{4\pi \times 100}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \ln 5} \right)^{1/2} = \underline{\underline{1{,}44 \text{ A}}}.$