Exercice I – Etude d'un conducteur ohmique torique

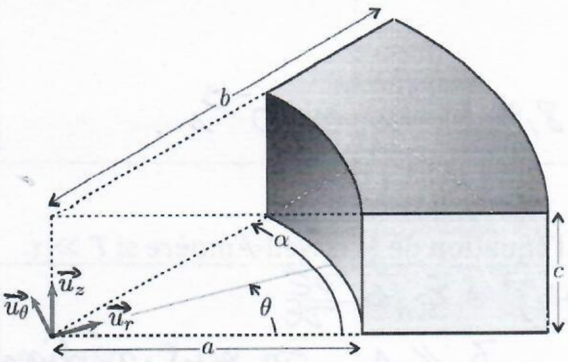


FIGURE 1 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8\ S.m^{-1}$. Il forme un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, d'épaisseur c.

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

1) On rappelle la valeur numérique de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

ε_0 s'appelle la permittivité diélectrique du vide.
ε_0 s'exprime en $F.m^{-1}$.

2) Etablir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ.

(Maxwell-Gauss) : $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

(Maxwell-Ampère) : $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{E}) = 0.$

car $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}) = 0$

$\Rightarrow \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0.$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée $T \gg \tau$ (T est la durée caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques)

Pour un conducteur ohmique $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

$\operatorname{div}(\gamma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\rho(t) = \rho(t=0)\, e^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$

or $\tau = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \times \frac{1}{10^8} = 8{,}9.10^{-20}\ s$

$\rho \simeq 0$ si $T \gg 10^{-19}\ s$.

Donner l'expression de τ en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

$\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$

an $\tau = \dfrac{1 \times 10^{-9}}{36\pi} \times \dfrac{1}{10^8} = 8{,}9 \cdot 10^{-20}$ s $\simeq 10^{-19}$ s.

3) Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.

(Maxwell-Ampère) : $\vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\dfrac{\| \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \|}{\| \mu_0 \vec{j} \|} \simeq \dfrac{\varepsilon_0 \left(\frac{E}{T}\right)}{\gamma E} = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma T} = \dfrac{\tau}{T} \ll 1$. On peut négliger le terme correspondant au courant de déplacement

4) Etablir l'équation vérifiée en régime permanent dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V.

En régime permanent, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$.

$\text{div}\, \vec{E} = \text{div}(-\vec{\text{grad}}\, V) = \Delta V = 0$.

Le potentiel électrique vérifie l'équation $\boxed{\Delta V = 0}$

5) On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\overrightarrow{grad}\, V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \theta}$.

Déterminer l'expression de $V(\theta)$.

$\Delta V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$

$\dfrac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$

On intègre $/\theta \Rightarrow \dfrac{dV}{d\theta} = A = \text{cste}$

On intègre une seconde fois $/\theta$

$V(\theta) = A\theta + B$.

Pour $\theta = 0$, $V(\theta = 0) = U$

Pour $\theta = \alpha$, $V(\theta = \alpha) = 0$

$\Rightarrow B = U$ et $A\alpha + B = 0$.

$\Rightarrow A = -\dfrac{U}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{V(\theta) = \left(-\dfrac{\theta}{\alpha} + 1\right) U}$

Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$.

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{E} = -\dfrac{1}{r}\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right) U \vec{u}_\theta$

$\boxed{\vec{E} = +\dfrac{U}{r\alpha}\vec{u}_\theta}$

Déterminer l'expression de la densité de courant $\vec{j}$.

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$\boxed{\vec{j} = \frac{U}{r\alpha}\gamma \, \vec{u_\theta}}$

6) Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore.

Par définition, $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$ avec $\vec{dS} = dr \times dz \times \vec{u_\theta}$

$I = \iint \frac{U\gamma}{r\alpha} \, dr \, dz$

$I = \frac{U\gamma}{\alpha} \int_{r=a}^{b} \frac{dr}{r} \int_0^c dz$

$\boxed{I = \frac{U\gamma}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times c}$

En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a, b, c, γ et α.

D'après la loi d'Ohm, $U = RI$

$R = \frac{U}{I}$

$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$

7) Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L.

Rappel : $\boxed{R = \frac{L}{\gamma S}}$

Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a.

Si $b \simeq a$ alors $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \simeq \frac{b-a}{a}$

Si a et b sont très proches,

$R \simeq \frac{\alpha}{\gamma c} \times \frac{1}{\frac{(b-a)}{a}} = \frac{\alpha a}{\gamma c (b-a)} = R$

on reconnait $\alpha a = L$ et $c(b-a) = S$ $\Rightarrow$ $\boxed{R \simeq \frac{L}{\gamma S}}$.

Exercice II – Tube métallique dans un solénoïde

Une bobine, d'axe Oz, de longueur l et de section S, assimilée à un solénoïde infiniment long, est alimentée par un courant sinusoïdal de la forme : $i_L(t) = I_0 cos(\omega t)$. Sa résistance est R_0, son inductance est L_0. On introduit dans cette bobine un cylindre conducteur creux, de rayon a, d'épaisseur b petite devant le rayon, de même longueur et de conductivité σ (voir **figure 2**).

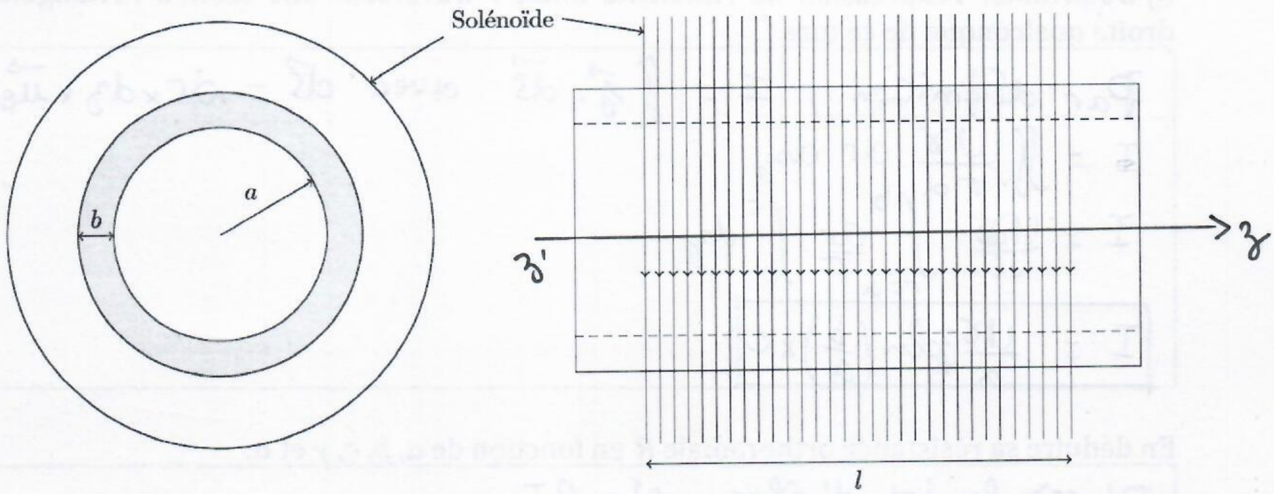


Figure 2

1) On appelle $\vec{B}_0$ le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde créé par le courant $i(t)$. Rappeler l'expression de $\vec{B}_0$.

Pour n spires par unité de longueur, on a :

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 n i_L(t).\vec{u_z}}$$

2) Calculer l'inductance du solénoïde en l'absence du cylindre. On donne N le nombre total de spires et S la section du solénoïde.

$\Phi_{propre} = L_0 i_L(t) = \iint \vec{B}.\vec{dS}$

$\Phi_{propre \, (1 \, spire)} = \iint B_0 \vec{u_z} . dS \vec{u_z} = B_0 \times S$

$\Phi_{propre \, (N \, spires)} = N B_0 S = \frac{N^2}{l} \mu_0 i(t) S$;

$$\boxed{L_0 = \frac{N^2 \mu_0 S}{l}}$$

3) Il apparaît sur le tube un vecteur densité de courant induit $\vec{J}$. Avec des arguments de symétrie, donner la géométrie de $\vec{J}$ et du champ $\vec{B}_1$ qu'il crée.

Dans le conducteur, il apparait un champ électrique induit $\vec{E}_{ind}$ tel que $\vec{rot}\, \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Le champ $\vec{E}_{ind}$ est perpendiculaire au plan d'antisymétrie de la distribution $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z}) \Rightarrow \vec{E}_{ind}$ est selon $\vec{u_\theta}$.

D'après la loi d'Ohm locale, $\vec{J} = \sigma \vec{E}_{ind}$.

Les lignes de courant induit sont des cercles d'axe $z'z$ (analogue à des spires).

Le champ $\vec{B_1}$ créé par ces courants induits est porté par $z'z$.

4) Justifier, en faisant une analogie avec un solénoïde infiniment long, que $\vec{B}_1 = \mu_0 b\vec{j}$ à l'intérieur du cylindre et que $\vec{B}_1$ est nul à l'extérieur.

$I_{ind} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = \iint j\,\vec{u_\theta} \times dr \times dz\,\vec{u_\theta} = jbl.$

Par analogie avec un solénoïde de N spires,

$N I_{ind} = jbl$ donc $\vec{B_1} = \mu_0 \frac{N I_{ind}}{l} = \boxed{\mu_0 b \vec{j} = \vec{B_1}}$

Par analogie avec un solénoïde, $\vec{B_1} = \vec{0}$ à l'extérieur.

5) Exprimer $\vec{j}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et de la conductivité σ.

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

6) Ecrire l'équation de Maxwell Faraday.

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

7) Le champ total $\underline{\vec{B}}$ est égal à $\underline{\vec{B}_0} + \underline{\vec{B}_1}$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale, en déduire l'expression de $\underline{B_1}$ en fonction de $\underline{B_0}$.

$\iint \vec{rot}\,\vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint \vec{E}\cdot\vec{dl}$ d'après le théorème de Stokes.

$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot\vec{dS}$

$\oint_{cercle} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint (\vec{B_0}+\vec{B_1})\cdot\vec{dS} = -\frac{d}{dt}(\Phi_0 + \Phi_1)$

$E \times 2\pi a = -\frac{d}{dt}(B_0 + B_1) \times \pi a^2$

En notation complexe,

$\underline{E} \times 2\pi a = -\frac{d}{dt}(\underline{B_0} + \underline{B_1}) \times \pi a^2$

$\frac{\underline{j}}{\sigma} \times 2 = i\omega(-\underline{B_0} - \underline{B_1}) \times a = \underbrace{\frac{\underline{B_1}}{\mu_0 b}}_{\text{question 4}} \frac{2}{\sigma} \Rightarrow \boxed{\underline{B_1} = \frac{-i\omega a \underline{B_0}}{i\omega a + \frac{2}{\mu_0 b \sigma}}}$ ou $\boxed{\underline{B_1} = \frac{\underline{B_0}}{-1 + \frac{2i}{\mu_0 b \sigma \omega a}}}$

8) On trouve (i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$) : $\underline{\vec{B}_1} = \frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 \omega a b \sigma}} \underline{\vec{B}_0}$

Calculer le flux du champ total en distinguant 2 zones d'application.

A l'intérieur du cylindre conducteur creux, on a $\vec{B_1} + \vec{B_0}$.

A l'extérieur du cylindre creux, on a $\vec{B_0}$ ($\vec{B_1} = \vec{0}$).

$\Phi_{TOT} = \iint_{S(int)} (\vec{B_1} + \vec{B_0})\cdot\vec{dS} + \iint_{S(ext)} \vec{B_0}\cdot\vec{dS}$

$\Phi_{TOT} = N\pi a^2 (B_1 + B_0) + N(S - \pi a^2) B_0$

$$\boxed{\Phi_{TOT} = N\pi a^2 B_1 + NSB_0}$$

Calculer la fem (force électromotrice) d'induction.

D'après la loi de Faraday, $e = -\frac{d\phi}{dt}$

En notation complexe

$$\underline{e} = -\frac{d\Phi_{TOT}}{dt} = -N\pi a^2 \frac{dB_1}{dt} - NS\frac{dB_0}{dt} = -N\left(\pi a^2 \left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right) + S\right) i\omega \underline{B_0}$$

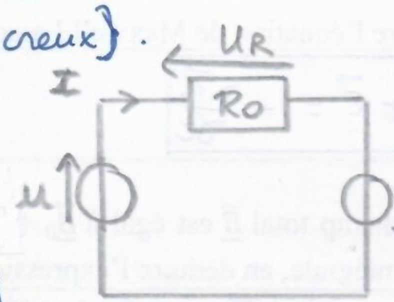
$$\boxed{\underline{e} = -i\omega N \underline{B_0}\left[S + \pi a^2 \left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right)\right]}$$

9) Ecrire alors la loi d'Ohm généralisée pour le solénoïde sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = R(\omega) + j\omega L(\omega) \text{ où}$$

$$R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S}\frac{\frac{2L_0}{\mu_0\sigma ab}}{1+\left(\frac{2}{\mu_0\sigma\omega ab}\right)^2} \quad \text{et} \quad L(\omega) = L_0\left(1 - \frac{\pi a^2}{S}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\mu_0\sigma\omega ab}\right)^2}\right)$$

On peut dessiner un circuit équivalent à l'ensemble {solénoïde ; conducteur cylindrique creux}.



D'après la loi des mailles :

$$\underline{u} = R_0\underline{I} - \underline{e}$$

$$\underline{u} = R_0\underline{I} + i\omega N B_0 S + i\omega N B_0 \pi a^2 \times \left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right)$$

$$\underline{u} = R_0\underline{I} + i\omega N S\mu_0 n\underline{I} + i\omega N\mu_0 n\underline{I}\pi a^2\left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = R_0 + i\omega\,\mu_0\frac{N^2}{l}S + i\omega\mu_0\frac{N^2}{l}\pi a^2\left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right)$$

$$= R_0 + i\omega L_0 + i\omega L_0\frac{\pi a^2}{S}\left(\frac{1}{-1+\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}\right) \times \frac{\left(-1-\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}\right)}{\left(-1-\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}\right)}$$

$$= R_0 + i\omega L_0 + i\omega L_0\left(\frac{-1-\frac{2i}{\mu_0 b\sigma\omega a}}{+1+\left(\frac{2}{\mu_0 b\sigma\omega a}\right)^2}\right)\frac{\pi a^2}{S}$$

$$= \left[R_0 + \cancel{\omega}L_0\frac{2}{\mu_0 b\sigma\omega a\left(1+\left(\frac{2}{\mu_0 b\sigma\omega a}\right)^2\right)}\frac{\pi a^2}{S}\right]$$

$$+ i\omega L_0\left[1 - \frac{\pi a^2}{S}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\mu_0\sigma\omega ab}\right)^2}\right]$$

On retrouve bien les expressions de $R(\omega)$ et $L(\omega)$ proposées dans l'énoncé.

III - Effet de peau.

1) (Maxwell - Ampère) : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu \vec{J}$ (on néglige le courant de déplacement).

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{B}) = \vec{rot}(\mu \vec{J})$$

$$\vec{grad}(\operatorname{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu\,\vec{rot}\,\vec{J}$$

or $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ (Maxwell - Flux).

$$-\Delta\vec{B} = \mu\,\vec{rot}(\sigma\vec{E}) = \sigma\mu\,\vec{rot}\,\vec{E}$$

or $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell - Faraday)

$$+\Delta\vec{B} = \sigma\mu\left(+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\vec{B}(x,t) = \sigma\mu\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}(x,t)\right)$$

Selon $\vec{e_y}$ et en notation complexe, on a :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}(x,t)}{\partial x^2} - \sigma\mu\,(i\omega)\,\underline{B}(x,t) = 0.$$

en simplifiant par $\exp(i\omega t)$ on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2\underline{B}(x)}{\partial x^2} - i\sigma\mu\omega\underline{B}(x) = 0}. \quad (1)$$

2) $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$

$$i\sigma\mu\omega = \frac{1}{2}\sigma\mu\omega(1+i)^2$$

en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\sigma\omega\mu}}$, on a $i\sigma\mu\omega = \dfrac{(1+i)^2}{\delta^2}$

donc l'équation (1) s'écrit $\boxed{\dfrac{\partial^2\underline{B}(x)}{\partial x^2} - \dfrac{(1+i)^2}{\delta^2}\underline{B}(x) = 0}$

3) La solution générale s'écrit

$$\underline{B}(x) = A_1 \exp\left(\left(\frac{1+i}{\delta}\right)x\right) + A_2 \exp\left(-\left(\frac{1+i}{\delta}\right)x\right)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes.

Conditions aux limites

$\underline{B}(x=0) = B_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \underline{B}(x) = 0$ (le champ $\vec{B}$ ne peut pas diverger donc $A_1 = 0$).

$$B_0 = A_2$$

4) $\underline{B}(x) = B_0 \exp\left(-\left(\frac{1+i}{\delta}\right)x\right)$

$$B(x,t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{B}(x)\exp(i\omega t)\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{B_0 \exp\left(-\left(\frac{1+i}{\delta}\right)x\right)\exp(i\omega t)\right\}$$

$$\boxed{B(x,t) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

5) D'après l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{j} = \frac{\vec{rot}\,\vec{B}(x,t)}{\mu} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ B(x,t)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}\vec{e_z}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} B_0\left(-\frac{1}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \frac{1}{\mu} B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left(-\frac{1}{\delta}\right)\left(-\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\mu\delta} B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left[-\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_z}}$$

6) $[\delta] = [x]$, δ s'exprime en m, c'est une longueur appelée "épaisseur de peau". C'est dans cette épaisseur que circule la majorité du courant électique.
Le champ magnétique pénètre dans le métal sur cette épaisseur.

7) $$p(x,t) = \frac{1}{\sigma} j^2(x,t)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\mu^2\delta^2} B_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)\left[\cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - 2\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{B_0^2}{\sigma\mu^2\left(\frac{2}{\sigma\omega\mu}\right)}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)\left[1 - \sin\left(2\omega t - 2\frac{x}{\delta}\right)\right]$$

$$\boxed{p(x,t) = \frac{\omega B_0^2}{2\mu}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)\left[1 - \sin\left(2\omega t - \frac{2x}{\delta}\right)\right]}$$

8) $$Q(x) = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} p(x,t)\,dt$$

$$= \frac{\omega B_0^2}{2\mu T_e}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)\int_0^{T_e}\left(1 - \sin\left(2\omega t - \frac{2x}{\delta}\right)\right)dt$$

$$= \frac{\omega B_0^2}{2\mu T_e}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)\left(T_e + \left[\frac{1}{2\omega}\cos\left(2\omega t - \frac{2x}{\delta}\right)\right]_0^{T_e}\right)$$

$$= \frac{\omega B_0^2}{2\mu T_e}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)\left(T_e + 0\right)$$

$$\boxed{Q(x) = \frac{\omega B_0^2}{2\mu}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)}$$

9) $$Q_{TOT} = \int_{x=0}^{+\infty} Q(x)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\frac{\omega B_0^2}{2\mu}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)dx$$

$$= \frac{\omega B_0^2}{2\mu}\left[\frac{\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)}{\left(-\frac{2}{\delta}\right)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\omega B_0^2}{2\mu}\left(-\frac{\delta}{2}\right)(0-1)\times\frac{\delta}{\delta}$$

$$Q_{TOT} = \frac{\cancel{\omega} B_0^2}{4\mu}\frac{2}{\sigma\omega\mu}\times\frac{1}{\delta}$$

$$\boxed{Q_{TOT} = \frac{B_0^2}{2\sigma\mu^2\delta}}$$