# Séries de Fourier
# Td-Tp 15

Decembre 2023

## Exercice 1

Soit les fonctions définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-\pi, \pi] \\ c_n(1+\cos(x))^n & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $c_n$ est choisi pour que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\lambda = 1$$

1. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de Dirac.

Toute suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(a) *Régularité*
Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $(1+\cos(x))^n \geq 0$ est continue et $c_n$ est strictement positive. On a en effect $x = -\pi$ et en $x = \pi$, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$, alors les $\varphi_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

(b) *Support compact*
Comme $\varphi(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash[-\pi, \pi]$, on a le support compact $K_0 = [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$.

(c) *Normalisation*
Selon la définition de la fonction $\varphi_n$, on a évidemment $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\lambda = 1$.

(d) *Convergence*
Soit $\delta \geq \pi$, on a toujours $\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n d\lambda + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n d\lambda = 0$.
Soit $0 < \delta < \pi$, alors nous définissons la fonction

$$I(n, \delta) = \int_{\delta}^{\pi} c_n(1+\cos(x))^n dx$$

De plus, les fonctions $\varphi_n$ sont paire et decroissant sur $[0, \pi]$, et donc elles nous permettent d'avoir

$$\int_{\mathrm{BF}(\underline{0},\delta)^c} \varphi_n d\lambda = 2I(n,\delta) \leq 2(\pi-\delta)c_n(1+\cos(\delta))^n$$

Or, la fonction $(1+\cos(x))^n$ est à valeur positive sur toute l'intervalle $[-\pi, \pi]$

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^n dx \geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+\cos(x))^n dx \geq \delta \left(1+\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^n$$

Donc

$$\int_{\mathrm{BF}(\underline{0},\delta)^c} \varphi_n d\lambda \leq \frac{2(\pi-\delta)}{\delta} \left(\frac{1+\cos(\delta)}{1+\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\frac{1+\cos(\delta)}{1+\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)} < 1$.

Par la définition, on en déduit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de Dirac.

2. Est-ce une suite régularisante ?

Pour quelque soit $0 < \varepsilon < \pi$, $\varphi_n(\pi - \varepsilon) = c_n(1 + \cos(\pi - \varepsilon))^n \neq 0$, alors

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R},\ \varphi_n(\underline{x}) \neq 0\} \subset \mathrm{BF}(\underline{0}, \pi)$$

d'où $\pi$ est constant et ne tends vers pas à 0. On peut donc dire $\varphi_n$ n'est pas une suite régularisante.

*On peut aussi verifier $\varphi_n$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou pas.*

# Exercice 2

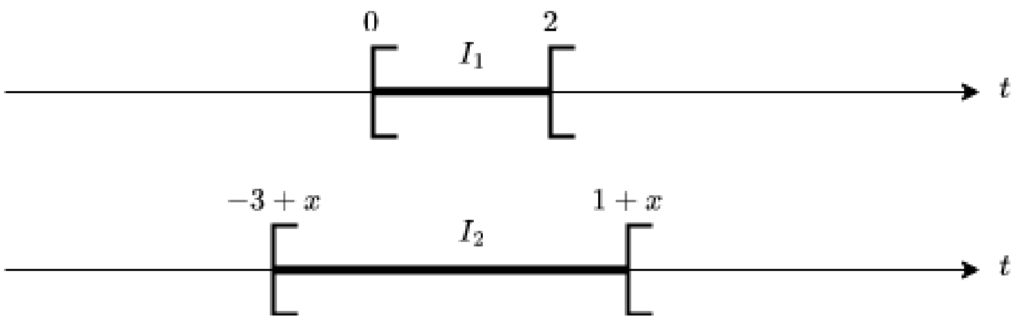
Calculer $f * g$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

*Rappel : définition du produit de convolution, à savoir :*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

1. On s'intéresse aux différents intervalles :
   (a) $g(t) = \frac{t}{2}$ si $0 \leq t \leq 2$, donc $t \in [0, 2] = I_1$.
   (b) $f(x-t) = 1$ si $-1 \leq x - t < 3$, donc $t \in ]-3 + x, 1 + x] = I_2$.



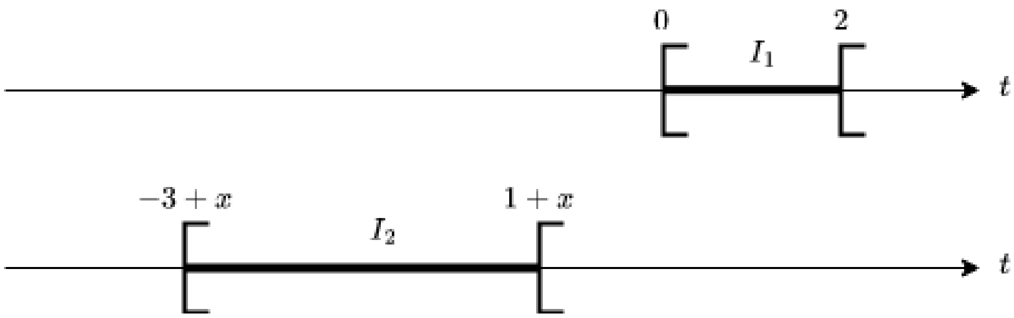

2. **On applique la définition du produit de convolution :**

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{I_1 \bigcap I_2} 1 \times \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Hors, résoudre un tel calcul s'avère assez complexe. Usons de stratégie, et découpons en plusieurs cas, et procédons aux intégrations, au cas par cas :

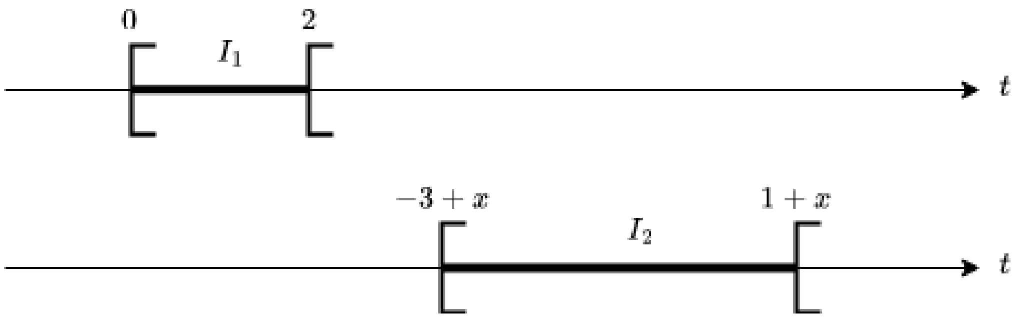
**Cas 1 :** On remarque que les deux intervalles ne se recouvrent pas, donc quand on va multiplier la fonction $f$ par la fonction $g$, on va trouver zéro.

$$\text{Si } 1 + x < 0,\ \text{alors } I_1 \cap I_2 = \emptyset,\ \text{donc } (f * g)(x) = 0$$




**Cas 2 :** Il n'y a pas non plus de recouvrement dans cette situation. Donc :

$$\text{Si } -3+x>2,\ \text{alors } I_1\cap I_2=\emptyset,\ \text{donc } (f*g)(x)=0$$

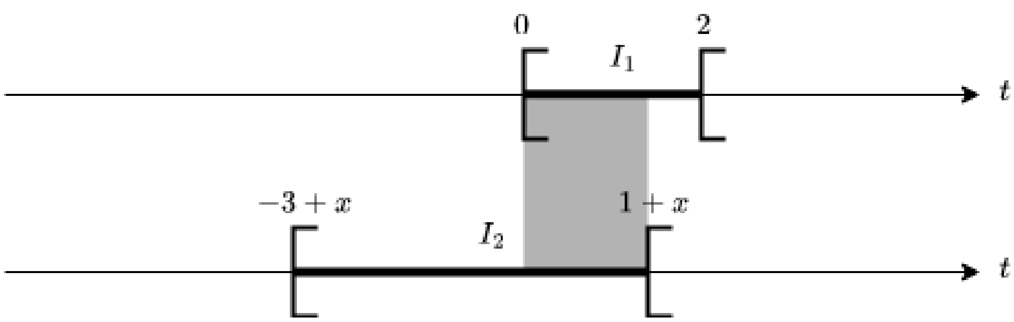



**Cas 3 :** Cette fois-ci il y a recouvrement, sur une partie des deux intervalles.

$$\text{Si } 0<1+x<2,\ \text{alors } I_1\cap I_2=[0,1+x]$$

On peut donc déterminer la valeur du produit de convolution.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{I_1\cap I_2} 1\times\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{1+x}\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{1+x}=\frac{(1+x)^2}{4}\end{aligned}$$

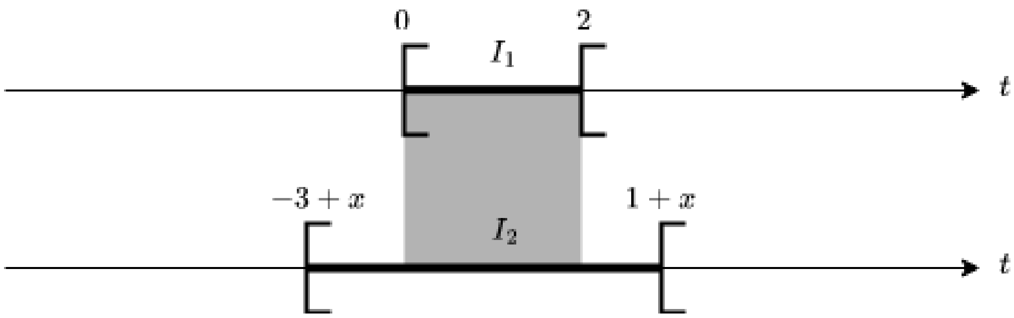



**Cas 4 :** Une fois encore, il y a bien recouvrement, donc nous allons procéder comme au cas précédent.

$$\text{Si } -3+x<0 \text{ et } 1+x>2,\ \text{alors } I_1\cap I_2=[0,2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution.

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2}=1$$

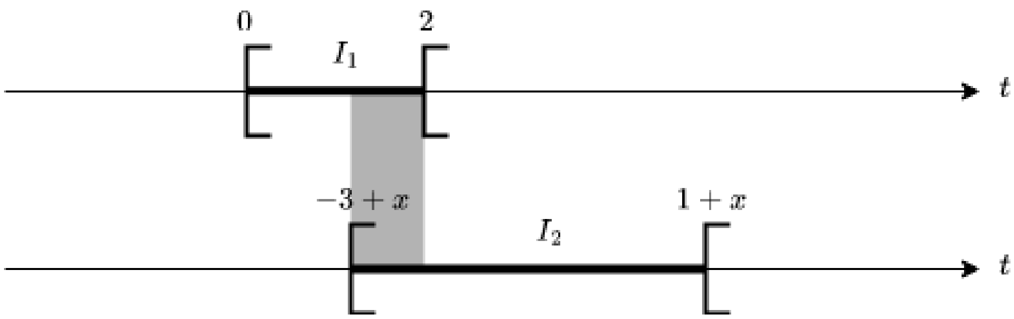



**Cas 5 :** Il y a toujours et encore recouvrement :

$$\text{Si } -3+x \leq 0, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [-3+x, 2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution.

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=-3+x}^{2} = \frac{-x^2+6x-5}{4}$$




3. **Conclusion :** Maintenant que nous avons déterminé les diverses valeurs du produit de convolution, sur les divers intervalles, il est envisageable de tracer (par morceaux), la courbe représentative.

# Exercice 3

Soit $a > 0$ et soit la fonction $q_a(t) = 1 - \frac{|t|}{a}$ pour $|t| \leq a$ et $q_a(t) = 0$ pour $|t| > a$.

1. Calculer $q_a'(t)$ et l'écrire en fonction de $\rho_a$. (Rappelons que $\rho_a$ est la fonction impulsion rectangulaire qui vaut 1 sur $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ et 0 ailleurs.)

2. En déduire l'expression de $\widehat{q_a'}(\omega)$.

1. On a

$$q_a(t) = 1 - \frac{|t|}{a} = \begin{cases} 1+\frac{t}{a}, & \text{si } -a \leq t \leq 0, \\ 1-\frac{t}{a}, & \text{si } 0 \leq t \leq a, \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

et alors

$$q_a'(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{si } -a < t < 0, \\ -\frac{1}{a}, & \text{si } 0 < t < a, \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

De plus, une fonction impulsion rectangulaire $\rho_a$ est définie comme

$$\rho_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0, & \text{si } |t| > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, on a $q_a'(t) = \frac{1}{a}(\rho_a(t+\frac{a}{2}) - \rho_a(t-\frac{a}{2}))$ pour tout $t$ différent de 0 et $\pm a$.

2. Le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction (si elle existe) est une intégrale donc ne dépend pas des points où la fonction est discontinue.

   On peut donc supposer que pour tout $t$,

$$q_a'(t) = \frac{1}{a}(\rho_a(t+\frac{a}{2}) - \rho_a(t-\frac{a}{2}))$$

   On a pour $\omega \neq 0$,

$$\widehat{q_a'}(\omega) = \frac{1}{a}\left(e^{i\omega\frac{a}{2}} - e^{-i\omega\frac{a}{2}}\right)\hat{\rho}_a(\omega) = \frac{4i}{a\omega}\sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)$$

   Pour $\omega = 0$, puisque $\hat{\rho}_a(0) = a$, on a

$$\widehat{q_a'}(0) = \frac{1}{a}\left(e^{i\omega\frac{a}{2}} - e^{-i\omega\frac{a}{2}}\right)\hat{\rho}_a(0) = 2i\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)$$

# Exercice 4

Soit la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

1. Calculer sa transformée de Fourier (sans utiliser le formulaire).
2. En déduire la transformée de Fourier de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer le produit de convolution $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

1. Puisque pour $x, y \in \mathbb{R}$ donnés, on a $\frac{d}{dt}e^{(x+iy)t} = (x+iy)e^{(x+iy)t}$, il en résulte que

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{+\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{+\infty} + \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{t=-\infty}^{0}$$

   Maintenant, $\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-(a+i\omega)R} = \lim\limits_{R\to+\infty} e^{-aR}e^{-i\omega R} = 0$ puisque $|e^{-i\omega R}| = 1$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-aR} = 0$ pour $a > 0$. De façon similaire, $\lim\limits_{R\to-\infty} e^{(a-i\omega)R} = 0$. Ainsi,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

2. Pour $a = 1$, on a $\hat{f}(\omega) = 2g(\omega)$. On en déduit (par le théorème d'inversion) que $\hat{g}(x) = \pi f(-x)$, c'est donc $\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.
3. Calculons le produit de convolution. On a

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(|x-y|+|y|)}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-a(|x-y|+y)}\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0} e^{-a(|y-x|-y)}\,\mathrm{d}y$$

Si $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-2y)}\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{x} e^{-ax}\,\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(2y-x)}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{e^{-ax}}{2a} + xe^{-ax} + e^{ax}\frac{e^{-2ax}}{2a} \\ &= e^{-ax}\left(\frac{1}{2a} + x + \frac{1}{2a}\right) = e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

Or la fonction $f$ est paire. Il en est de même de $f * f$. On en déduit donc que $f * f(x) = e^{-a|x|}\left(|x| + \frac{1}{a}\right)$

La transformée de Fourier de $f*f$ est $\widehat{f * f}(\omega) = \hat{f}\cdot\hat{f}(\omega) = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$. En particulier pour $a = 1$, on a

$$\widehat{f * f}(\omega) = \hat{f}(\omega)^2 = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Fourier, il en résulte que la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est la fonction $\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}(|\omega| + 1)$.

4. Remarquons que la dérivée de $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est

$$x \mapsto g'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$$

Posons $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$. On a donc $h(x) = -\frac{1}{2}g'(x)$. Donc $\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{2}\widehat{g'}(\omega)$. Or $g$ est bien sûr de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. On peut donc appliquer la règle de dérivation dans le domaine temporel et en déduire que

$$\hat{h}(\omega) = -\frac{i}{2}\omega\hat{g}(\omega) = -\frac{i\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}$$

# Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle à l'aide d'une transformée de Fourier

$$-y'' + y = e^{-2|t|}$$

1. Pour le premier terme à gauche $(y''(x))$, avec la transformée de Fourier, on sait que

$$\widehat{y'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(x)e^{-i\omega x}dx \overset{I.P.P.}{=} \left[y(x)e^{-i\omega x}\right]_{x=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)i\omega e^{-i\omega x}dx = i\omega\hat{y}(\omega)$$

De même, on a aussi $\widehat{y''}(\omega) = i\omega\widehat{y'}(\omega)$, et donc $\widehat{y''}(\omega) = -\omega^2\hat{y}(\omega)$.

2. La transformée de Fourier de $f(x) = e^{-2|t|}$ :
On a déjà vu le calcul

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{+\infty}^{0} e^{2t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{4+\omega^2}$$

À l'aide des tranformées de Fourier pour tous les termes, on obtient alors

$$\omega^2\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$$

On sait que la solution pour cette équation différentielle est sous la forme $\hat{y}(\omega) = \frac{4}{(4+\omega^2)(1+\omega^2)}$. Alors, par l'inversion de Fourier, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)e^{ix\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(4+\omega^2)(1+\omega^2)}e^{ix\omega}d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{4}{3}}{4+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{4}{3}}{1+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega \\ &= -\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega + \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega \end{aligned}$$

D'après l'exo 5, si on suppose que $f(x) = e^{-a|x|}$ et $g(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$, alors $2\pi f(-x) = \hat{g}(x)$. Donc,

$$y(-x) = -\frac{1}{6\pi}\hat{g}_2(x) + \frac{1}{3\pi}\hat{g}_1(x) = -\frac{1}{3}f_2(-x) + \frac{2}{3}f_1(-x)$$

Finalement,

$$y(x) = -\frac{1}{3}f_2(x) + \frac{2}{3}f_1(x) = -\frac{1}{3}e^{-2|x|} + \frac{2}{3}e^{-|x|}$$

# Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle à l'aide d'une transformée de Fourier

$$y'' + xy = e^{-x^2}$$

1. Pour le premier terme à gauche ($y''(x)$), avec la transformée de Fourier, on sait que

$$\widehat{y'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(x)e^{-i\omega x}dx \overset{I.P.P.}{=} \left[y(x)e^{-i\omega x}\right]_{x=-infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)i\omega e^{-i\omega x}dx = i\omega\hat{y}(\omega)$$

   De même, on a aussi $\widehat{y''}(\omega) = i\omega\widehat{y'}(\omega)$, et donc $\widehat{y''}(\omega) = -\omega^2\hat{y}(\omega)$.

2. Pour le deuxième terme à gauche ($xy(x)$), avec la dérivée de $\hat{y}$ est $\frac{d\hat{y}}{d\omega}(\omega) = -ix\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-i\omega x}dx$ :

$$\widehat{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} xy(x)e^{-i\omega x}dx = i\frac{d\hat{y}}{d\omega}(\omega)$$

3. La transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx \overset{I.P.P.}{=} \left[e^{-x^2}\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\right]_{x=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{-i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}(-2x)e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx \\ &= -\frac{2}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(-ix)e^{-i\omega x}dx = -\frac{2}{\omega}\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) \end{aligned}$$

   On a alors $\frac{d\hat{f}}{f} = -\frac{\omega}{2}$. Ainsi, $\hat{f}(\omega) = C\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ avec un constant $C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-i0x}dx = \sqrt{\pi}$. Donc, la transformée de Fourier de fonction $f$ est $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

À l'aide des tranformées de Fourier pour tous les termes, on obtient alors

$$-\omega^2\hat{y}(\omega) + i\frac{d\hat{y}}{d\omega}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

On sait que la solution pour cette équation différentielle est sous la forme $\hat{y}(\omega) = g(\omega)e^{-\frac{i\omega^3}{3}}$ d'où $g(\omega)$ est une fonction par rapport à $\omega$. Alors,

$$-\omega^2 g(\omega)e^{-\frac{i\omega^3}{3}} + ig'(\omega)e^{-\frac{i\omega^3}{3}} + \omega^2 g(\omega)e^{-\frac{i\omega^3}{3}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

cela nous donne

$$g'(\omega) = -i\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}+\frac{i\omega^3}{3}}$$

$$g(\omega) = \int_0^\omega -i\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}+\frac{i\omega^3}{3}}d\omega + \hat{y}(0) = \int_0^\omega -i\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}+\frac{i\omega^3}{3}}d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx$$

et donc

$$\hat{y}(\omega) = \int_0^\omega -i\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}+\frac{i\omega^3}{3}}d\omega e^{-\frac{i\omega^3}{3}} + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx e^{-\frac{i\omega^3}{3}}$$

Appliquons l'inversion de Fourier, alors

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$