Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD_3

27 Septembre 2022

Exercice 1 : Sous-espace vectoriel

Vrai ou Faux. Les espaces suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}([-1,1],\mathbb{R})$?

1. F_1 l'ensemble des fonctions bornées sur $[-1,1]$;

   Vrai.

   — F_1 est non vide car il contient la fonction nulle par exemple.

   — Soient f_1 et f_2 deux fonctions de F_1 et λ un scalaire réel. Il existe deux constantes réelles M_1 et M_2 telles que $\forall x \in [-1,1]$, $|f_1(x)| \leq M_1$ et $|f_2(x)| \leq M_2$. Montrons que $f_1 + \lambda.f_2$ est dans F_1 (donc est bornée). Par l'inégalité triangulaire on a pour tout x dans $[-1,1]$:

   $$\begin{aligned} |f_1(x) + \lambda.f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |\lambda| \times |f_2(x)| \\ &\leq M_1 + |\lambda| \times M_2. \end{aligned}$$

   Donc $f_1 + \lambda.f_2$ est bien bornée.

   F_1 est un sous-espace vectoriel de E.

2. F_2 l'ensemble des fonctions bornées par la constante 1 sur $[-1,1]$;

   Faux. Soit f la fonction constante égale à 1 sur $[-1,1]$. Alors $2.f$ n'est pas bornée par 1.

   F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

3. F_3 l'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$;

   Vrai.

   — F_3 est non vide car il contient la fonction nulle par exemple.

   — Soient f et g deux fonctions s'annulant en 1 et λ un scalaire réel. On constate bien que $(f + \lambda.g)(1) = f(1) + \lambda \times g(1) = 0$ donc $f + \lambda.g \in F_3$.

   F_3 est un sous-espace vectoriel de E.

4. F_4 l'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 1$;

   Faux. En effet, la fonction nulle ne prend pas la valeur 1 en 1.

   F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

5. F_5 l'ensemble des fonctions paires ;

   Vrai.

   — La fonction nulle est paire donc F_5 est non vide.

   — Soient f et g deux fonctions paires et λ un scalaire réel. Alors pour tout $x \in [-1,1]$, $(f + \lambda.g)(-x) = f(-x) + \lambda \times g(-x) = f(x) + \lambda \times g(x) = (f + \lambda.g)(x)$, donc la fonction $f + \lambda.g$

est paire.

F_5 est un sous-espace vectoriel de E.

6. F_6 l'ensemble des fonctions impaires ;

Vrai.

— La fonction nulle est impaire donc F_6 est non vide.

— Soient f et g deux fonctions impaires et λ un scalaire réel. Alors pour tout $x \in [-1,1]$, $(f+\lambda.g)(-x) = f(-x) + \lambda \times g(-x) = -f(x) - \lambda \times g(x) = -(f+\lambda.g)(x)$, donc la fonction $f+\lambda.g$ est impaire.

F_6 est un sous-espace vectoriel de E.

7. F_7 l'ensemble des fonctions paires ou impaires ;

Faux. Montrons que F n'est pas stable par addition. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x$. La fonction f est impaire donc $f \in F$. Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = 1$. La fonction g est paire donc $g \in F$. On a $(f+g)(1) = 2$ et $(f+g)(-1) = 0$ donc la fonction $f+g$ n'est ni paire ni impaire. Donc $f+g \notin F$ et F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

F_7 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

8. F_8 l'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1,1]$;

Faux. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x$. Alors $f \in F$ mais $(-1).f \notin F$.

F_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

9. F_9 l'ensemble des fonctions monotones sur $[-1,1]$;

Faux. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $g(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Les fonctions f et g sont monotones, mais $f+g$ n'est pas monotone.

F_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

10. F_{10} l'ensemble des fonctions f qui vérifient $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

Vrai. En effet :

— la fonction nulle a pour limite 0 en 1^-, donc F_{10} est non vide.

— Soient f et g deux fonctions de F_{10} et λ un scalaire réel. Par linéarité de la limite, on sait que la fonction $f+\lambda.g$ a également pour limite 0 en 1^-.

F_{10} est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 : Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient E_1, E_2 et E_3 3 sous-espaces vectoriels de E.

1. Comparer pour l'inclusion

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \text{ et } (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3).$$

Soit $x \in E_1 + (E_2 \cap E_3)$. Il existe $(y, z) \in E_1 \times (E_2 \cap E_3)$ tel que $x = y + z$. Puisque $z \in E_2$ et $z \in E_3$, on en déduit que $x \in E_1 + E_2$ et $x \in E_1 + E_3$. Donc, $x \in (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$. Ainsi,

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \subset (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3).$$

Donnons un exemple qui montre que l'inclusion est stricte. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \text{Vect}(\{(1,0)\})$, $E_2 = \text{Vect}(\{(0,1)\})$ et $E_3 = \text{Vect}(\{(1,1)\})$. On a $E_2 \cap E_3 = \{0_E\}$, donc $E_1 + (E_2 \cap E_3) = E_1$. De plus, puisque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1) \text{ et } (x, y) = (x - y).(1, 0) + y.(1, 1),$$

les familles $\{(1, 0), (0, 1)\}$ et $\{(1, 0), (1, 1)\}$ génèrent $\mathbb{R}^2$. Donc,

$$E_1 + E_2 = \text{Vect}(\{(1,0)\}) + \text{Vect}(\{(0,1)\}) = \text{Vect}(\{(1,0), (0,1)\}) = \mathbb{R}^2,$$

et

$$E_1 + E_3 = \text{Vect}(\{(1,0)\}) + \text{Vect}(\{(1,1)\}) = \text{Vect}(\{(1,1), (0,1)\}) = \mathbb{R}^2.$$

Donc $(E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3) = \mathbb{R}^2$ et $E_1 + (E_2 \cap E_3) = E_1 \neq \mathbb{R}^2$.

2. A quelle condition suffisante a-t-on égalité ?

Montrons que si $E_1 \subset E_2$, alors

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \supset (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3).$$

Soit $x \in (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$ alors, il existe $(y, z) \in E_1 \times E_2$ et $(a, b) \in E_1 \times E_3$ tels que $x = y + z = a + b$. Par hypothèses, $(y, z, a) \in E_1 \times E_2 \times E_1 \subset E_2 \times E_2 \times E_2$, donc

$$b = y + z - a \in E_2.$$

Puisque $b \in E_3$, on déduit que $x = a + b \in E_1 + (E_2 \cap E_3)$.

Exercice 3 : Génératrice

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la famille

$$(x \mapsto (x - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une famille génératrice de l'ensemble des fonctions polynomiales noté E.

Par définition, une fonction f est polynomiale si, et seulement si, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N.$$

Ainsi, on a :

$$E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}).$$

(En particulier, l'ensemble E des fonctions polynomiales est un sous espace-vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que $E = \text{Vect}(\{x \mapsto (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}\})$ par double inclusion.
($\supset$) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ (x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-a)^{k-i} x^i.$$

Donc $\{x \mapsto (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset E$. D'où, puisque E est stable par combinaison linéaire,

$$\text{Vect}(\{x \mapsto (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}\}) \subset E.$$

($\subset$) De la même manière, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{k-i} (x-a)^i.$$

Donc, $\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Vect}(\{x \mapsto (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}\})$. Ainsi,

$$E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}) \subset \text{Vect}(\{x \mapsto (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}\})$$

2. Déterminer dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\text{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \max(0, f(x)),\ \text{et } h(x) = \max(0, -f(x)).$$

Les fonctions g et h sont positives et continues (comme maximum de fonctions continues). De plus, on a $f = g - h$. Donc, $f \in \text{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big)$. On a montré l'inclusion

$$\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \text{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big).$$

L'inclusion $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \text{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big)$ est claire. Donc,

$$\text{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big) = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, que dire de

$$\text{Vect}(E \setminus F)\ ?$$

Montrons que :
- si $F = E$, alors $\text{Vect}(E \setminus F) = \{0_E\}$;
- si $F \neq E$, alors $\text{Vect}(E \setminus F) = E$.

Si $F = E$, alors $\text{Vect}(E \setminus F) = \text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
Supposons maintenant $F \neq E$. Il existe alors $x \in E \setminus F$. Montrons que $E \subset \text{Vect}(E \setminus F)$. Soit $y \in E$ quelconque :

1. Si $y \in E \setminus F$, alors $y \in \text{Vect}(E \setminus F)$.
2. Si $y \in F$, alors $x+y \in E \setminus F$ (sinon, puisque $y \in F$, on aurait $x = x+y-y \in F$, ce qui n'est pas possible car $x \in E \setminus F$). Donc, $y = x+y-x \in \text{Vect}(E \setminus F)$ car $(x+y, x) \in (E \setminus F)^2$.

Exercice 4 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ et $(E'_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-espaces vectoriels de E, tels que :

$$\forall i \in I,\ E'_i \subset E_i.$$

Montrer que :

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E'_i \ \Rightarrow\ \forall i \in I, E_i = E'_i.$$

Soit $i \in I$ quelconque. Montrons que $E_i \subset E'_i$. Soit $x \in E_i$. Puisque $x \in \bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E'_i$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$ et $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in E'_{i_1} \times \cdots \times E'_{i_n}$ tels que

$$x = x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}.$$

Il y a deux cas :

— Cas 1 : Il existe $i_p \in \{i_1, \dots, i_n\}$ tel que $i = i_p$. Alors,

$$0_E = \sum_{l=1, l\neq p}^{n} x_{i_l} + (x_{i_p} - x).$$

De plus, puisque $E'_{i_1} \times \cdots \times E'_{i_n} \subset E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_n}$, on a $x_{i_p} - x \in E_{i_p}$. On a donc une écriture de 0_E dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Or, les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in I}$ sont en somme directe. Donc, en particulier, $x_{i_p} - x = 0_E$. Ainsi $x = x_{i_p} \in E'_{i_p}$.

— Cas 2 : $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$. Alors,

$$0_E = \sum_{l=1}^{n} x_{i_l} - x.$$

On a donc une écriture de 0_E dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Or, les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in I}$ sont en somme directe. Donc, $x = 0_E \in E'_i$.

Dans les deux cas, on a $x \in E'_i$. Donc, $E_i \subset E'_i$. L'autre inclusion est vraie par hypothèse, donc, $E_i = E'_i$.

Exercice 5 : Somme directe et Supplémentaire

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles et :

$$\begin{aligned}
F &= \{y : x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\},\\
G_1 &= \{f \in E,\ f(0) = 0\},\\
G_2 &= \{f \in E,\ f(0) = f(1) = f(-1) = 0\},\\
G_3 &= \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

1. Justifier que F, G_1, G_2, G_3 sont des sous-espaces vectoriels de E.

F : L'ensemble des fonctions affines

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.
Notons $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto 1$. On remarque que $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Les preuves que G_1, G_2 et G_3 sont des sous-espaces vectoriels de E sont très similaires, contentons nous de le faire pour G_1.

- G_1 contient la fonction nulle.
- Soient $(f, g) \in (G_1)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f + \lambda.g)(0) = f(0) + \lambda.g(0) = 0,$$

donc $f + \lambda.g \in G_1$.

$$\boxed{G_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

2. Montrer que $F + G_1 = E$. La somme est-elle directe ?

Montrons d'abord que $F + G_1 = E$.
Soit $u \in E$, on veut montrer qu'il existe $f \in F$ et $g \in G_1$ telles que $u = f + g$.
Si f est la fonction constante égale à $u(0)$ et $g = u - f$, alors on obtient bien la décomposition souhaitée. Donc on a $u \in F + G_1$, d'où $E \subset F + G_1$.
En plus, on a $F \subset E$ et $G_1 \subset E$, donc $F + G_1 \subset E$.

$$\boxed{\text{Ce qui montre que } F + G_1 = E}$$

Cependant, $F + G_1$ n'est pas directe car $u : x \mapsto x$ est dans $F \cap G_1$ et n'est pas la fonction nulle.

$$\boxed{\text{La somme } F + G_1 \text{ n'est pas directe.}}$$

3. Montrer que $F + G_2$ est directe. La somme vaut-elle E ?

Montrons que la somme $F + G_2$ est directe.
Soit $u \in F \cap G_2$. Alors comme $u \in F$, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u : x \mapsto ax + b$.
De plus $u \in G_2$ donc d'une part $u(0) = 0$ ce qui implique que $b = 0$ et d'autre part $u(1) = 0$ ce qui implique que $a = 0$.
Donc u est la fonction nulle : $F \cap G_2 = \{0\}$.

$$\boxed{\text{La somme } F + G_2 \text{ est directe.}}$$

En revanche la somme $F + G_2$ ne vaut pas E. En effet, on peut vérifier que la fonction u définie par :

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

n'est pas dans $F + G_2$. En effet, si $u \in F + G_2$, alors il existe une fonction g dans G_2 et deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = ax + bg(x).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u(0) &= b + g(0) = b = 0 \\ u(-1) &= -a + b + g(-1) = -a + b = 0 \\ u(1) &= a + b + g(1) = a + b = 1 \end{aligned}$$

Et comme le système précédent n'a pas de solution on en conclut que u n'est pas dans $F + G_2$.

$$\boxed{F + G_2 \text{ n'est pas égal à } E.}$$

4. Montrer que F et G_3 sont supplémentaires dans E.

De la même manière qu'à la question précédente, on montre aisément que la somme $F+G_3$ est directe.

$$\boxed{\text{La somme } F + G_3 \text{ est directe.}}$$

Montrons maintenant que $F+G_3 = E$. Pour cela on va essayer de construire une décomposition en raisonnant par condition nécessaire.
<u>Analyse :</u> soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g \in G_2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b + g(x).$$

On évalue alors f en 0 et 1.
D'abord, $f(0) = b + g(0)$, donc $b = f(0)$.
Ensuite, $f(1) = a + b + g(1)$, donc $a = f(1) - f(0)$.
<u>Synthèse :</u> montrons maintenant que toute fonction f de E est dans $F + G_3$. Soit $f \in E$. On pose alors $(a, b) = (f(0), f(1) - f(0))$ et pour tout x réel, $g(x) = f(x) - ax - b$. On a clairement que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = ax + b + g(x).$$

Reste à vérifier que g est dans G_3 ce qui est le cas car en faisant le calcul on a bien $g(0) = g(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } F \oplus G_3 = E.}$$

Exercice 6 : Somme directe et Supplémentaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :

$$E = F + G, \quad H \cap F = \{0_E\} \quad \text{et} \quad G \subset H.$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$.

On sait que $H \cap F = \{0_E\}$ et $G \subset H$ donc $G \cap F \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est également vraie car F et G sont des sous-espaces-vectoriels donc contiennent 0_E. Donc $G \cap F = \{0_E\}$, autrement dit la somme $F + G$ est directe. Comme on sait de plus que $E = F + G$, on a bien $E = F \oplus G$.

2. Montrer que $H = G$.

Soit $x \in H$. Comme $H \subset E = F + G$, il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. On a $G \subset H$ donc $g \in H$. Donc $f = x - g$ est aussi dans H car H est un sous-espace vectoriel. Donc $f \in H \cap F = \{0_E\}$. Donc $f = 0_E$. Donc $x = g \in G$. Nous avons démontré que $H \subset G$. Or on sait aussi que $G \subset H$. Donc $H = G$.

Exercice 7 : Somme directe et Supplémentaire

Soit E l'ensemble des fonctions $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite finie en $+\infty$: $\exists \ell \in \mathbb{R},\quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = \ell$.

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui sont constantes : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$ et soit G le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Dans toute la suite, on notera $0_E\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $0_E(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$).

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
   - ▷ la fonction nulle 0_E appartient à E (elle tend vers 0 en $+\infty$) ;
   - ▷ si $u_1, u_2 \in E$, il existe deux nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\lim_{x\to+\infty} u_1(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to+\infty} u_2(x) = \ell_2$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$ d'où $u_1 + u_2 \in E$;
   - ▷ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell \in \mathbb{R}$ d'où $\lambda u \in E$.

   E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, en particulier c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. L'énoncé nous dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, il n'y a donc pas besoin de le vérifier (mais vous pouvez vous entrainer à le faire !). On procède en deux étapes :

▷ Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

- Puisque $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $\{0_E\} \subset F \cap G$.
- Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $u \in F \cap G$. Puisque $u \in F$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = c$. Mais $u \in G$ donc $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Par unicité de la limite, on a $c = 0$ donc $u = 0_E$. On a bien $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Par double inclusion, on a $F \cap G = \{0_E\}$.

▷ Montrons que $F + G = E$. On a $F + G \subset E$ donc montrons que $E \subset F + G$. Soit $u \in E$. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$

- Analyse : supposons que $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Puisque $f \in F$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\underbrace{g(x)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} = (u - f)(x) = u(x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - c \tag{1}$$

  car $g \in G$, d'où $c = \ell$.
- Synthèse : définissons $f \in F$ par $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et définissons $g \in E$ par $g = u - f$. On a $g \in G$ (reprendre le calcul (**??**) avec $c = \ell$), d'où $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, c'est-à-dire $u \in F + G$. On a montré que $E \subset F + G$ et donc par double inclusion $F + G = E$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } E = F \oplus G}$$

Exercice 8 : Supplémentaire

Dans cet exercice, on se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soit $F = \{f \in E\colon f(0) = f'(0) = 0\}$.
   (a) Trouver une fonction $g \in E$ telle que $g(0) = 0$ mais $g'(0) \neq 0$ puis trouver une fonction $h \in E$ telle que $h(0) \neq 0$ mais $h'(0) = 0$.
   (b) En déduire un supplémentaire de F dans E.
2. Soit $H = \{f \in E\colon f(0) = f(1) = 0\}$. En s'inspirant de la question précédente, donner un supplémentaire de H dans E.

Dans toute la suite, on notera $0_E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $0_E(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On a bien sûr $0_E \in E$.

1. (a) *Remarque : l'idée ici est que F est défini par les deux équations $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. On cherche alors des fonctions qui vérifient une des équations et pas l'autre.*
   On peut penser à $g\colon x \mapsto x$ et à $h\colon x \mapsto 1$.
   (b) Puisque $g \notin F$ et $h \notin F$, la question précédente nous invite à poser $G = \mathrm{Vect}(\{g, h\}) = \{x \mapsto ax + b\colon a, b \in \mathbb{R}\}$. G est un espace vectoriel par construction. Montrons que $E = F \oplus G$.
   ▷ Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.
   - Puisque $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $\{0_E\} \subset F \cap G$.
   - Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $u \in F \cap G$. Puisque $u \in G$, il existe des nombres réels a et b tels que $u(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $u \in F$, on a $0 = u(0) = a \times 0 + b = b$, donc $b = 0$ et $0 = u'(0) = a$ d'où $a = 0$ et donc $u = 0_E$. On a bien $\{0_E\} \subset F \cap G$.

   Par double inclusion, on a $F \cap G = \{0_E\}$.
   ▷ Montrons que $F + G = E$. On a $F + G \subset E$ donc montrons que $E \subset F + G$. Soit $u \in E$.
   - Analyse : supposons que $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Puisque $g \in G$, il existe des nombres réels a et b tels que $g(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f \in F$, on a
   $$0 = f(0) = (u - g)(0) = u(0) - g(0) = u(0) - b \tag{2}$$
   donc $b = u(0)$. On a également
   $$0 = f'(0) = (u - g)'(0) = u'(0) - g'(0) = u'(0) - a \tag{3}$$
   On a donc $a = u'(0)$.
   - Synthèse : définissons $g \in G$ par $g(x) = u'(0)x + u(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et définissons $f \in E$ par $f = u - g$. On a $f \in F$ (reprendre les calculs (**??**) et (**??**) avec $a = u'(0)$ et $b = u(0)$) d'où $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, c'est-à-dire $u \in F + G$. On a donc $E \subset F + G$.

   Finalement par double inclusion $F + G = E$.

   $$\boxed{\text{Conclusion : } G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } E.}$$

2. Cherchons une fonction $g \in E$ telle que $g(0) = 0$ mais $g(1) \neq 0$ et une fonction $h \in E$ telle que $h(0) \neq 0$ mais $h(1) = 0$. On peut penser à $g\colon x \mapsto x$ et $h\colon x \mapsto 1 - x$. On pose alors $K = \mathrm{Vect}(\{g, h\})$. Or $k \in K$ si et seulement si $k(x) = cg(x) + dh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec c et d des nombres réels, mais $\forall x \in \mathbb{R},\ cg(x) + dh(x) = cx + d(1 - x) = (c - d)x + d = ax + b$ en posant $a = c - d$ et $b = d$. On a donc $k \in K$ si et seulement si $k \in G$, donc $K = G$.

Montrons que $E = H \oplus K$. D'après la question précédente, on a $H + K = H + G = E$. Il reste à montrer que $H \cap K = \{0_E\}$.

- Puisque $0_E \in H$ et $0_E \in K$, alors $\{0_E\} \subset H \cap K$.
- Montrons que $H \cap K \subset \{0_E\}$. Soit $u \in H \cap K$. Puisque $u \in K$, il existe des nombres réels a et b tels que $u(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $u \in H$, on a $0 = u(0) = a \times 0 + b = b$, donc $b = 0$ et $0 = u(1) = a + b = a$ d'où $a = 0$ et donc $u = 0_E$. On a bien $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Conclusion : $K = G$ est un supplémentaire de H dans E.