Suites et Séries – TD$_{15}$

19-20 décembre 2022

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \sqrt{n}\, z^n$
2. $\sum_n z^{n!}$
3. $\sum_n \ln(n)\, z^n$
4. $\sum_n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n$
5. $\sum_n n^{\ln(n)}\, z^n$
6. $\sum_n \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\, z^n$
7. $\sum_n \frac{n!}{n^n}\, z^n$
8. $\sum_n (2+(-1)^n)^n\, z^n$

— *Pour appliquer le critère de d'Alembert, il est obligatoire de vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.*

— *On peut aussi utiliser la méthode suivante : pour $r > 0$:*

  — *si $a_n\, r^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (ou si $(a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée), alors $R \geqslant r$*

  — *si $a_n\, r^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ (ou si $(a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée), alors $R \leqslant r$.*

— *Attention à ne pas oublier les valeurs absolues pour le critère d'équivalence ($|a_n| \sim |b_n|$ quand $n \to +\infty$).*

— *Attention, on ne peut rien dire en général de la convergence de $\sum_n a_n\, z^n$ pour $|z| = R$.*

1. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang ($n = 1$) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc d'après le critère de d'Alembert :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n \sqrt{n}\, z^n \text{ est } \frac{1}{1} = 1.}$$

2. On a

$$\sum_n z^{n!} = z^1 + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \cdots = \sum_p a_p\, z^p$$

avec

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_p = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } p = n! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ s'annule toujours à partir de tous les rangs, on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert.

Soit $r > 0$.

— si $r < 1$, on a $a_p\, r^p \to 0$ quand $p \to +\infty$, donc $R \leqslant r$

— si $r < 1$, on a $r^{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $(a_p\, r^p)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc $R \geqslant r$

Puisque c'est vrai pour tout $r > 0$, on en déduit que $R \leqslant 1$ et $R \geqslant 1$ donc :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n z^{n!} \text{ est } 1.}$$

3. On peut appliquer le critère de d'Alembert ici ($\ln n$ n'est pas nul à partir d'un certain rang) ou on peut remarquer que pour tout $r > 0$:
   - si $r < 1$, on a $\ln(n)\, r^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $R \geqslant r$ donc $R \geqslant 1$
   - si $r > 1$, on a $\ln(n)\, r^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, donc $R \leqslant r$ donc $R \leqslant 1$

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_n \ln(n)\, z^n \text{ est } 1.}$$

4. On a

$$\left|\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left|\ln\left(1+\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left|\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

donc R est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{1}{n} z^n$ qui est 1 (on peut le voir par exemple en utilisant le critère de d'Alembert). D'après le critère d'équivalence pour les séries entières :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n \text{ est } 1.}$$

5. Soit $r > 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{\ln(n)}\, r^n = \exp\left(\ln(n)^2 + n\ln(r)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$$

donc $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$ donc

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n n^{\ln(n)}\, z^n \text{ est } 1.}$$

6. Soit $r > 0$. On a, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} r^n = \exp\left(n\ln(r) - \ln(n)\ln(\ln(n))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$$

donc $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$ donc

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\, z^n \text{ est } 1.}$$

7. $\dfrac{n!}{n^n}$ n'est jamais nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

On a déjà étudié la limite de cette suite :

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

On a : $n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-n}{n+1} \to -1$, *donc par continuité de* $\exp$ *en* 1, *on a*

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

D'après le critère de d'Alembert :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n \frac{n!}{n^n} z^n \text{ est } e.}$$

8. On remarque que $(2+(-1)^n)^n = 3^n$ si n est pair et $(2+(-1)^n)^n = 1$ si n est impair.

Le rayon de convergence de $\sum_n 3^n z^n$ *est* $\frac{1}{3}$ *(critère de d'Alembert) et le rayon de convergence de* $\sum_n z^n$. *On conjecture donc que* R *va être la plus petite de ces valeurs, c'est-à-dire* $\frac{1}{3}$.

Soit $r > 0$.

— Si $r < \frac{1}{3}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|(2+(-1)^n)^n r^n| = |2+(-1)^n|^n r^n \leqslant (3r)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $0 < 3r < 1$ donc $R \geqslant \frac{1}{3}$.

— Si $r > \frac{1}{3}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(2+(-1)^{2n}\right)^{2n} r^{2n} = (3r)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car $3r > 1$. On en déduit que la suite $((2+(-1)^n)^n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc $R \leqslant \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_n (2+(-1)^n)^n z^n \text{ est } \frac{1}{3}.}$$

Exercice 2

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$
2. $\sum_n a_n z^{2n}$
3. $\sum_n a_n z^{n^2}$

1. Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$. Soit $r > 0$.

— Puisque $e^{\sqrt{n}} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|a_n\, e^{\sqrt{n}}\, r^n\right| = |a_n|\, e^{\sqrt{n}}\, r^n \geqslant |a_n|\, r^n = |a_n\, r^n|$$

Si $r > R$, on sait que $(a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (car R est le rayon de convergence de $\sum_n a_n\, z^n$), donc on en déduit que $(a_n\, e^{\sqrt{n}}\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus donc $R_1 \leqslant R$.

— Si $r < R$, alors $a_n\, r^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < r < R$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n\, e^{\sqrt{n}}\, \rho^n = a_n\, r^n\, e^{\sqrt{n}}\, \frac{\rho^n}{r^n} = a_n\, r^n\, e^{n\ln(\rho/r)+\sqrt{n}}$$

Comme $\dfrac{\rho}{r} < 1$ alors $e^{n\ln(\rho/r)+\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$, d'où la suite $(a_n\, e^{\sqrt{n}}\, \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $R_1 \geqslant r$.
Cela est vrai pour tout $r < R$. Lorsque r tend vers R on obtient donc $R_1 \geqslant R$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n a_n\, e^{\sqrt{n}}\, z^n \text{ est } R.}$$

2. Soit $r > 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\, r^{2n}| = |a_n\, (r^2)^n|$. On en déduit que la suite $(a_n\, r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(a_n (r^2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Conclusion :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_n a_n\, z^{2n} \text{ est } \sqrt{R}.}$$

3. Supposons $R > 0$ et $R < +\infty$ et notons R_3 le rayon de convergence de $\sum_n a_n\, z^{n^2}$.

— Soit $r \in]0,1[$. Comme r^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $r^n \leqslant \frac{R}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a

$$|a_n|\, r^{n^2} = |a_n|\, (r^n)^n \leqslant \underbrace{|a_n| \left(\frac{R}{2}\right)^n}_{\text{bornée}}$$

Donc $R_3 \geqslant 1$.

— Soit $r > 1$. Comme r^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $r^n \geqslant 2R$ pour tout $n \geqslant N$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a

$$|a_n|\, r^{n^2} = |a_n|\, (r^n)^n \geqslant \underbrace{|a_n|\, (2R)^n}_{\text{non bornée}}$$

donc $R_3 \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } R \neq 0 \text{ et } R \neq +\infty, \text{ le rayon de convergence de } \sum_n a_n\, z^{n^2} \text{ est } 1.}$$

Quand $R = +\infty$, on ne peut pas conclure. Le raisonnement précédent montre que $R_3 \geqslant 1$ et :

— si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, le rayon de convergence est 1.

— si $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

— si $a_n = \dfrac{1}{c^{n^2}}$ avec $c > 1$, le rayon de convergence est c.

Si $R = 0$, on ne peut pas conclure non plus. Le raisonnement précédent montre que $R_3 \leqslant 1$ et

— si $a_n = n!$, le rayon de convergence est 1.

— si $a_n = n^{n^2}$, le rayon de convergence est 0.

— si $a_n = c^{n^2}$ avec $c > 1$, le rayon de convergence est $1/c$.

Si $R = 0$ ou si $R = +\infty$, on ne peut pas conclure.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ est 1 et que la série $\displaystyle\sum_n a_n$ est divergente. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

1. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

*Cela n'a **aucun sens** d'écrire*

$$S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1^n = +\infty \text{ !!!}$$

*On ne peut pas passer à la limite que $x \to 1^-$ dans le série entière, car 1 n'est pas dans **l'intérieur** du disque de convergence (le rayon de convergence est 1).. C'est pour ça qu'on a fait le théorème de continuité radiale ; ici ce théorème ne s'applique pas car $\sum a_n$ est divergente.*

Pour ce genre d'exercice, la méthode est un peu toujours la même : revenir à la définition de limites, et de ramener à l'utilisation des sommes finies.

▷ Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme la série $\displaystyle\sum_n a_n$ est à termes positifs et divergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant M + 1$.

▷ Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $S(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{N} a_n$, alors il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [1-\eta, 1[,\ S(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n - 1.$$

Alors on a :

$$\forall x \in [1-\eta, 1[,\ S(x) \geqslant M.$$

▷ Finalement, on a montré :

$$\boxed{S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty}$$

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$. Montrer que la série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} S(x)$$

▷ Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a $a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n r^n$, donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

> Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence, égal à 1.

Même remarque que la question précédente. On ne dispose pas d'un théorème qui permet d'établir une équivalence entre les sommes de deux séries entières, sur un point non situé à ***l'intérieur*** *du disque de convergence.*
On va donc faire comme précédemment : revenir à la définition de limite, et montrer l'équivalence.

▷ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, on a $b_n - a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, |b_n - a_n| \leqslant \varepsilon |a_n|.$$

Soit $x \in]0,1[$. On a alors (par positivité des termes) :

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (b_n - a_n) x^n \right| \leqslant \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n| x^n \leqslant \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Attention ! Ici, on ne peut pas dire à partir de cette ligne que :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (b_n - a_n) x^n = o_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

car N ***dépend*** *du ε fixé !*

▷ L'entier N étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |b_n - a_n| x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{N-1} |b_n - a_n|$$

D'après la question précédente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$$

donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [1-\eta, 1[, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |b_n - a_n| x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \leqslant \varepsilon$$

▷ Finalement, on en déduit que

$$\forall x \in [1-\eta, 1[, \quad \left| \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \right| \leqslant \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (b_n - a_n) x^n}{\sum_{n=}^{+\infty} a_n x^n} \right| + \left| \frac{\sum_{n=N}^{+\infty} (b_n - a_n) x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \right| \leqslant 2\varepsilon$$

▷ Ainsi, on a montré $\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$,

d'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x \to 1^-}{\sim} S(x).}$$

Exercice 4

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence 1. On pose

$$S : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

et on suppose de plus qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \ell$.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

On ne peut pas utiliser le théorème de continuité radiale, car on ne sait pas que $\sum_n a_n$ converge !

En posant $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Alors

$$S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_n a_n \text{ diverge.}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ n'est pas nécessairement convergente.}}$$

*Lorsque la réponse à une question est **non**, il faut donner un contre-exemple pour justifier.*

2. On suppose que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

▷ Soit $x \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme les coefficients sont positifs, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant S(x)$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant l$$

La série $\sum a_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par l, donc elle converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant l$.

▷ Soit $x \in [0,1[$. Comme $x^n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (car les séries convergent) :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$l \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_n a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l.}$$

Exercice 5

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence 1. On pose

$$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

et on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \ell$. On suppose également que $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on note

$$A(x) = S(x) - \ell, \qquad B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1-x^n) a_n \quad \text{et} \quad C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A(x) + B_N(x) - C_N(x).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. On a

$$\begin{aligned}A(x)+B_N(x)-C_N(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - l + \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - l + \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n - l.\end{aligned}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_0,\ \forall x \in [0,1[,\quad |C_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

▷ Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_0,\ |a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{N}$$

▷ Soit $x \in [0,1[$ et $N \geqslant N_0$. Comme les séries $\sum_n |a_n| x^n$ et $\sum_n x^n$ convergent, on obtient :

$$\boxed{|C_N(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| x^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{N} x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.}$$

3. Montrer que la série $\sum_n a_n$ est convergente et que sa somme vaut ℓ. On pourra, pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$, utiliser le point $x_N = 1 - \frac{1}{N}$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $x_N = 1 - \frac{1}{N}$.
▷ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et que $S(x) \xrightarrow[x\to 1]{} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel :

$$\forall N \geqslant N_1,\ |A(x_N)| \leqslant \varepsilon.$$

▷ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|1 - x_N^n| = (1 - x_N) \sum_{k=0}^{n-1} x_N^k \leqslant n \frac{1}{N}$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$|B_N(x_N)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} n \frac{1}{N} |a_n| = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n |a_n|$$

▷ Comme $n|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par somme de Cesàro, on a $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_2, |B_N(x_N)| \leqslant \varepsilon$$

▷ En posant $N_3 = \max(N_0, N_1, N_2)$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\forall N \geqslant N_3,\ \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - l\right| &\leqslant |A(x_N)| + |B_N(x_N)| + |C_N(x_N)| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{N(1-x_N)} \\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} l.}$$