Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD_7

1 Novembre 2022

Exercice 1

On suppose que a, b, c sont trois complexes tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = A^2 + I_3.$$

Montrer que $A \cdot B = B \cdot A = 0_{M_3(\mathbb{C})}$ et $B^2 = B$.

On commence par calculer A^2 et B :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{bmatrix}$$

et

$$B = A^2 + I_3 = \begin{bmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{bmatrix} + I_3 = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{C})}$$

On remarque que :

$$B \cdot A = (A^2 + I_3) \cdot A = A^3 + A = A \cdot (A^2 + I_3) = A \cdot B$$

Et on vérifie que :

$$B^2 = (A^2 + I_3) \cdot B = A \cdot A \cdot B + B = B$$

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = 0_{M_3(\mathbb{C})} \text{ et } B^2 = B.}$$

Exercice 2

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M.

   On a

   $$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.M$$

2. En déduire M^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

On conjecture que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(H_p) \qquad M^p = 2^{p-1}.M$$

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $M^p = 2^{p-1}.M$ On suppose :

(a) Initialisation. Puisque $M^1 = M = 2^0.M$, l'égalité est vraie quand p = 1.

(b) Hérédité. Soit $p \geq 1$. Supposons que $M^p = 2^{p-1}.M$ et montrons que $\mathrm{M}^{p+1} = 2^p.M$

$$\begin{aligned} M^{p+1} &= M^p.M = 2^{p-1}.M \cdot M \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2^{p-1}.M^2 = 2^{p-1} \times 2.M \quad \text{(par question 1)} \\ &= 2^p.M \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout p} \in \mathbb{N}^*,\ M^p = 2^{p-1}.M}$$

Exercice 3

Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$ deux matrices telles que la somme des coefficients sur chaque colonne de A et sur chaque colonne de B vaut 1 (on dit qu'une telle matrice est une matrice stochastique). Montrer que la somme des coefficients sur chaque colonne de $A \cdot B$ vaut 1.

On note $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $B = [b_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $C = A \cdot B = [c_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Alors on a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

On veut montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = 1.$$

On a en fait :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \right). \end{aligned}$$

La somme à l'intérieur est égale à 1 puisque A est stochastique. Il reste

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} = 1$$

où on utilise cette fois que B est stochastique.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $f^{n-1} \neq 0_{(E)}$ alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Raisonnons par analyse-synthèse pour trouver $\mathcal{B}$.

— *Analyse.* Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$, …, $f(e_n) = e_{n-1}$ donc

$$e_1 = f(e_2) = f^2(e_3) = \cdots = f^{n-1}(e_n).$$

Puisqu'on veut $e_1 \neq 0$, posons donc $e_n = x_0$ de sorte que $e_1 = f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. On a alors

$$e_{n-1} = f(x_0), \quad e_{n-2} = f^2(x_0) \quad \text{et} \quad e_1 = f^{n-1}(x_0).$$

— *Synthèse.* Posons

$$\mathcal{B} = \big(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \ldots, f(x_0), x_0\big).$$

Montrons que cette famille de n éléments de E est libre. Soit λ_0, λ_1, …, λ_{n-1} dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, f^k(x_0) = 0_E. \tag{1}$$

On applique f^{n-1} à (1) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, f^{n-1+k}(x_0) = f^{n-1}(0_E) = 0_E.$$

Comme $f^k(x) = 0_E$ pour $k \geq n$, on obtient

$$\lambda_0 \, f^{n-1}(x_0) = 0_E,$$

et comme $f^{n-1}(x) \neq 0_E$, on obtient $\lambda_0 = 0$. On applique alors f^{n-2} à (1) et par le même raisonnement on obtient $\lambda_1 = 0$. On applique alors successivement f^{n-2}, f^{n-3}, etc. jusqu'à f à (1), on obtient alors

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. De plus, $\dim E = n$ et que $\mathcal{B}$ a n éléments, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E.}$

De plus, on a bien

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.}$$

Exercice 5

Soient $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer $B \cdot A$.

On note f et g les applications linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associées à A et B. Alors on

$$f \circ g(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad f \circ g(e_3) = e_3.$$

Il vient donc :

$$g \circ f(g(e_2)) = g(f \circ g(e_2)) = g(e_2) \quad \text{et} \quad g \circ f(g(e_3)) = g(f \circ g(e_2)) = g(e_3).$$

De plus, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0_{\mathbb{R}^2},$$

on compose par f et on trouve que

$$ae_2 + be_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

d'où $a = b = 0$. Ainsi, $(g(e_2), g(e_3))$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^2$, et $g \circ f$ laisse invariant les vecteurs de cette base.
Autrement dit, $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\boxed{B \cdot A = I_2}$$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \{1,\ldots,n+1\}^2} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2, \ a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$$

avec la convention $\binom{j-1}{i-1} = 0$ si $i > j$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on note p_k la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $p_k(x) = x^k$. On rappelle que la famille $\mathcal{B} = \{p_k, k \in \{1, \ldots, n\}\}$ est une base de E_n (appelée base canonique de E_n).

1. Déterminer l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$

Soit $j \in \{1, \dots, n+1\}$. D'après la définition de A, on a

$$\varphi(p_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}\, p_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} p_{i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} p_{i-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} p_i.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\varphi(p_{j-1})(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} p_i(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x^i.1^{(j-1)-i} = (x+1)^{j-1} = p_{j-1}(x+1).$$

Finalement, par linéarité de φ et le fait que $\mathcal{B} = (p_k \colon k \in \{0, \dots, n\})$ est une base de E_n, on a

$$\boxed{\varphi\colon \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E_n \\ p & \longmapsto & (x \mapsto p(x+1)) \end{array}.}$$

2. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in E_n$, on a

$$\varphi^k(p) \colon x \longmapsto p(x+k).$$

Soit $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi^k(p_{j-1})(x) = (x+k)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x^i.k^{(j-1)-i} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} x^{i-1}.k^{j-i}$$

d'où

$$\varphi^k(p_{j-1}) = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} k^{j-i} p_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} k^{j-i} p_{i-1}.$$

On a donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k) = \left[\binom{j-1}{i-1} k^{j-i}\right]_{(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2}.}$$

3. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.
(Soit $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, on dit que M est inversible si : $\exists N \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ M \cdot N = N \cdot M = I_p$, on note $M^{-1} \overset{\text{Not}}{=} N$)

Si on définit $\psi \in (E_n)$ par

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E_n \\ p & \longmapsto & (x \mapsto p(x-1)) \end{array}$$

alors $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{E_n}$ donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$. On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et que

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi).$$

Soit $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\psi(p_{j-1})(x) = (x-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x^i (-1)^{(j-1)-i} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} x^{i-1} (-1)^{j-i}$$

d'où

$$\psi(p_{j-1}) \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} p_{i-1}.$$

On a donc
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \left[\binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i}\right]_{(i,j)\in\{1,\dots,n+1\}^2}}.$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts. On note $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, \dots, a_n$, et on considère l'application :

$$f \ : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto D \cdot M - M \cdot D \end{cases}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$f(M+N) = D\cdot(M+N) - (M+N)\cdot D = (D\cdot M - M\cdot D) + (D\cdot N - N\cdot D) = f(M) + f(N)$$

et
$$f(\lambda . M) = D\cdot(\lambda . M) - (\lambda . M)\cdot D = \lambda .(D\cdot M - M\cdot D) = \lambda . f(M).$$

Alors, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$M \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(M) = 0 \iff D\cdot M - M\cdot D = 0 \iff D\cdot M = M\cdot D$$

On note $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ et $D = [d_{i,j}]_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ (c'est-à-dire par définition de D : $d_{i,i} = a_i$ et $d_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$).
Alors :

$$\begin{aligned} D.M = M.D &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \ \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \ a_i m_{i,j} = m_{i,j} a_j \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \ (a_i - a_j) m_{i,j} = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \ (i \neq j \implies m_{i,j} = 0) \end{aligned}$$

car $a_1, \dots, a_n$ sont deux-à-deux distincts.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ est égal à } \mathrm{D}_n(\mathbb{K}), \text{ l'ensemble des matrices diagonales de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble F des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont nuls.

Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

— Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
Soit $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque. Alors, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ le

i-ème coefficient diagonal de $f(M)$ (c'est-à-dire situé à la ligne i et colonne i) est donné par :

$$\begin{aligned} f(M)_{i,i} &= [D \cdot M - M \cdot D]_{i,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,i} - \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,i} \\ &= a_i m_{i,i} - m_{i,i} a_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$f(M)$ est donc une matrice à diagonale nulle. Ce qui montre que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset F}$.

— D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Or, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est la famille $(E_{i,i})_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, où $E_{i,i}$ est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en i-éme ligne, i-éme colonne, qui vaut 1 (on l'appelle alors *matrice élémentaire* (i,i)).
Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$, ce qui donne :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n^2 - n$$

D'autre part, une base de F est la famille de matrices élémentaires $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$ avec $i \neq j$.
Alors,

$$\dim(F) = n^2 - n = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

— On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = F}$