上海交通大学巴黎卓越工程师学院
Ecole d'Ingénieurs Paris SJTU

Topologie et calcul différentiel

Alain Chillès (祁冲), Valentin Vinoles

Cours assuré par le professeur Benoît Duvocelle
2022 – 2023

Table des matières

Liste des figures

Chapitre 1

Calcul différentiel

Ce chapitre a deux objectifs.

1. Rappeler les notions de calcul différentiel et généraliser à l'espace $\mathbb{R}^n$, en mettant l'accent sur la notion de différentielle.
   On souhaite clarifier les calculs sur les fonctions de plusieurs variables que l'on peut retrouver en physique, par exemple en thermodynamique.
2. Introduire le théorème des fonctions implicites et quelques-unes de ses applications, ce résultat nous servira régulièrement dans la suite du cours.

1.1 Introduction

Considérons [1] une résistance qui suit la loi d'Ohm

$$U = r\,I \tag{1.1}$$

où U est la tension, r la valeur de la résistance et I l'intensité. La puissance dissipée par effet Joule P est alors donnée par

$$P = U\,I \tag{1.2}$$

On veut savoir comment varie la puissance P en fonction de l'intensité I. Si on procède de manière « naïve » :

— d'une part, on peut calculer la dérivée de P par rapport à I à partir de (1.2) :

$$\frac{\partial P}{\partial I} = U \tag{1.3}$$

— d'autre part, $P = r\,I^2$ d'après (1.1) et (1.2), donc :

$$\frac{\partial P}{\partial I} = 2\,r\,I = 2\,U \tag{1.4}$$

On obtient alors $1 = 2$ à partir de (1.3) et (1.4), ce qui est franchement gênant...

On pourrait penser que, dans (1.3), on calcule en fait $\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)_U$ (à U fixé). Mais alors, si U est fixé, $I = U/r$ aussi donc $P = U\,I$ aussi, ce qui donne $\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)_U = 0$...

Le problème est que, dans le calcul (1.3), on considère P comme une *fonction* de deux *variables indépendantes* U et I alors qu'elles ne le sont pas : elles sont liées par la loi d'Ohm (1.1). Il faut donc faire attention à la manipulation des *grandeurs physiques* qui sont manipulées à la fois comme des fonctions et comme des variables...

Ici, la solution est simple : on peut décrire entièrement le système à l'aide de la variable I, on a alors

$$U(I) = r\,I \qquad \text{et} \qquad P(I) = U(I)\,I = r\,I^2$$

Autrement dit, U et P sont des *fonctions* de la *variable* I. On peut alors calculer la dérivée de P par rapport à I de deux façons :

1. Cet exemple est tiré de [?].

— on a $P(I) = r\, I^2$ donc $P'(I) = 2\, r\, I$;
— on a $P(I) = U(I)\, I$ donc $P'(I) = U'(I)\, I + U(I) \times 1 = 2\, r\, I$.

On aurait aussi pu choisir de travailler avec la variable U, on aurait alors obtenu

$$I(U) = \frac{U}{r} \qquad \text{et} \qquad P(U) = U\, I(U) = \frac{U^2}{r}$$

Ce chapitre a pour but, entre autre, de clarifier ce genre de situations. En effet, dans énormément de situations, on travaille avec une *équation d'état* de la forme

$$f(A, B, C, \ldots) = 0$$

qui lie des grandeurs A, B, C, … On peut par exemple penser à la loi des gaz parfaits

$$P\, V = n\, R\, T$$

qui lie la pression P, le volume V et la température T. On se demande alors à quelle(s) condition(s) on peut exprimer une des grandeurs (la *fonction*) à partir d'autres grandeurs **indépendantes** (les *variables*), par exemple

$$A = A(B,\, C,\, \ldots)$$

1.2 Dérivée partielle et différentielle

1.2.1 Notations et rappels de topologie pour les fonctions de plusieurs variables

Notation 1.1 – Vecteur, norme et produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, on note :
— les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous la forme
$$x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$$
— la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ par
$$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$
— le produit scalaire canonique de deux vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ par
$$\langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n$$

La norme euclidienne est la norme issue du produit scalaire canonique ($\langle x, x\rangle = \|x\|^2$). L'espace $\mathbb{R}^n$ peut donc être vu comme un espace euclidien ou comme un espace vectoriel normé (de dimension finie n).

Notation 1.2 – Fonction composante

Si f est une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (fonction vectorielle), on note f_1, f_2, …, f_p ses *fonctions composantes* :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\big)$$

Chaque fonction composante f_j est donc une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

Rappel 1.1 – Boule ouverte et ouvert de $\mathbb{R}^n$

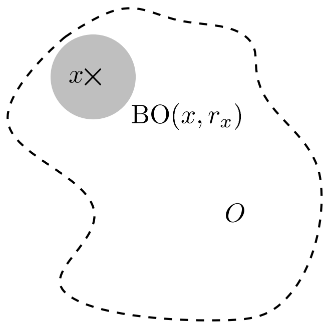
— Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$. La *boule ouverte centrée en x de rayon r* est définie par :

$$\mathrm{BO}(x, r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r \right\}$$

— Un sous-ensemble O de $\mathbb{R}^n$ est un *ouvert de $\mathbb{R}^n$* si :

$$\forall x \in O,\ \exists r_x > 0, \quad \mathrm{BO}(x, r_x) \subset O$$

On dit aussi que O est *ouvert dans $\mathbb{R}^n$*.



Rappel 1.2 – Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$.

— La fonction f est dite *continue en $x \in O$* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \underbrace{y \in \mathrm{BO}(x, \eta)}_{\iff \|x-y\|<\eta}, \quad \underbrace{f(y) \in \mathrm{BO}\left(f(x), \varepsilon\right)}_{\iff \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon}$$

La fonction f est continue en $x \in O$ si et seulement si f_j est continue en $x \in O$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

— La fonction f est dite *continue sur O* si elle est continue en tout $x \in O$.
La fonction f est continue sur O, et seulement si, f_j est continue sur O pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

On note $\mathscr{C}^0(O, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues sur O à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. En particulier, il est stable par combinaison linéaire. Si $p = 1$, il est aussi stable par produit et par quotient (si le dénominateur ne s'annule pas). On rappelle également que la composition de deux fonctions continues est continue.

Exemple 1.1 – Continuité des fonctions polynomiales

Une *fonction polynomiale*, c'est-à-dire de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant N} \underbrace{a_{i_1, \ldots, i_n}}_{\in \mathbb{R}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$ (par exemple $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 x + 3\, x\, y\, z - 3z + 2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$).

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Construire une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas continue en $(0, 0)$ mais dont la restriction à n'importe quelle droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ est continue.

1.2.2 Dérivées partielles

La dérivation partielle d'une fonction de plusieurs variables par rapport à une variable x_j consiste simplement à fixer toutes les variables sauf x_j et à dériver par rapport à x_j.

Définition 1.1 – Dérivée partielle

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$.

— On dit que f est *admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable en $x \in O$* si la fonction

$$t \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

est dérivable en x_j.

— Si c'est le cas, le vecteur dérivée de $\mathbb{R}^p$ obtenu (ou nombre dérivé si $p = 1$) est noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \qquad \text{ou} \qquad \partial_j f(x)$$

— Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable en tout $x \in O$, on définit la *j-ième dérivée partielle de f* par

$$\partial_j f : \left\{ \begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \partial_j f(x) \end{array} \right.$$

Dans la suite du cours, nous utiliserons la notation

$$\partial_j f$$

plutôt que $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ car elle est beaucoup plus claire et ne dépend pas du choix des noms de variable (et l'un des buts de ce chapitre est justement de clarifier le calcul à plusieurs variables). En effet, si $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$, que désigne $\frac{\partial g}{\partial x}$? On pourrait l'interpréter comme la dérivée de g par rapport à sa première variable mais aussi comme la dérivée de $x \mapsto f(y, x)$ à y fixée... La notation $\partial_1 g$ est par contre sans ambiguïté (on dérive g par rapport à sa première variable). Voir l'exercice 1.4.1 pour plus de détails.

Remarque 1.1 – Dérivée directionnelle

Pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non nul, on peut définir plus généralement (sous réserve d'existence) la *dérivée directionnelle de f dans la direction v en x*, notée $\partial_v f(x)$, par [a]

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,v) - f(x)}{t}$$

En particulier, $\partial_j f(x)$ est la dérivée directionnelle de f dans la direction e_j (le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) en x :

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,e_j) - f(x)}{t}$$

Toujours sous réserve d'existence, la *dérivée directionnelle de f dans la direction v* est alors définie par

$$\partial_v f : \left\{ \begin{array}{ccc} O & \longmapsto & \mathbb{R}^p \\ v & \longmapsto & \partial_v f(x) \end{array} \right.$$

[a]. Pour t assez petit, $f(x + t\,v) \in O$ car O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans y être continue (voir l'exercice 1.2.1).

Plus généralement, une fonction peut admettre des dérivées directionnelle dans toutes les directions en un point sans y être continue (voir l'exercice 1.2.2).

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{si } (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

1.2.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

1.2.3 Développement limité et différentielle

Notation 1.3 – Petit o

La notation

$$\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

désigne une fonction ϕ définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|\phi(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Exemple 1.2

Soit $\alpha > 1$ et soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|^\alpha \end{array} \right.$$

Alors

$$f(h) = \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

Définition 1.2 – Fonction différentiable et différentielle en un point

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in O$. Une fonction $f : O \to \mathbb{R}^p$ est *différentiable en* $x_0 \in O$ s'il existe une application linéaire $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que [a] $x + h \in O$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

Si c'est le cas, $\mathrm{d}f_{x_0}$ s'appelle la *différentielle de* f *en* x_0.

a. C'est toujours le cas si h est assez petit car O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, dire que f est différentiable en x_0, c'est dire qu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0. Cela nous décrit comment f se comporte au voisinage de x_0 :

$$f(x_0 + h) = \underbrace{\text{terme constant}}_{f(x_0)} + \underbrace{\text{terme linéaire en } h}_{\mathrm{d}f_{x_0}(h)} + \underbrace{\text{terme négligeable}}_{\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)}$$

Le terme $f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h)$ est donc l'*approximation affine locale* de f en x_0. On retrouve le concept de *linéarisation* en physique.

Remarque 1.2

Nous avons ici fait le choix de définir la différentielle du point de vue « développement limité » car c'est celui qui nous servira le plus dans la suite du cours (par exemple, on approximera localement une courbe par sa tangente ou une surface par son plan tangent dans le cours de "Courbes et surfaces").

Le fait de parler de « la » différentielle de f en x_0 (si elle existe) est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 1.1 – Caractérisation de la différentielle

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en x_0. L'application linéaire $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in O$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

vérifie, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,h) - f(x_0)}{t}$$

En particulier, cette application linéaire est unique.

Autrement dit, $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$ n'est rien d'autre que $\partial_h f(x_0)$, la dérivée directionnelle de f dans la direction h en x_0 :

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \partial_h f(x_0)$$

Démonstration

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ fixé. Si $h = 0_{\mathbb{R}^n}$, il n'a rien à démontrer (on a $\mathrm{d}f_{x_0}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ par linéarité). Supposons donc $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + t\,h \in O$ (possible car O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Puisque f est différentiable en x_0,

$$f(x_0 + t\,h) - f(x_0) = \mathrm{d}f_{x_0}(t\,h) + \underset{t \to 0}{o}(\|t\,h\|) = t\,\mathrm{d}f_{x_0}(h) + \underset{t \to 0}{o}(t)$$

puisque $\mathrm{d}f_{x_0}$ est linéaire. On obtient donc le résultat en divisant l'égalité ci-dessus par $t \neq 0$ et en faisant tendre t vers 0.

Exemple 1.3 – Lien entre différentielle et dérivée (dimension 1)

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0. Si c'est le cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

On en déduit que $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0)\, h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. En particulier, $f'(x_0) = \mathrm{d}f_{x_0}(1)$.

Exemple 1.4 – Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en x_0, alors elle admet des dérivées partielles en x_0 et

$$\mathrm{d}f_{x_0} : h \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x_0)\, h_j$$

Si c'est le cas, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x_0)\, h_j + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue et admettre des dérivées partielles en un point mais ne pas être différentiable en ce point (voir l'exercice 1.3.1).

Plus généralement, f peut être continue et admettre des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point mais ne pas être différentiable en ce point (voir l'exercice 1.3.2) et ce même si l'application $h \mapsto \partial_h f(x_0)$ est linéaire (voir l'exercice 1.3.3).

Remarque importante 1.3 – Utilité de la notion de différentielle

Pourquoi introduire la notion de différentielle plutôt que de travailler seulement avec les dérivées partielles ?

— L'idée centrale du calcul différentiel est de *linéariser* : au voisinage d'un point x_0, on approxime $f(x) - f(x_0)$ par un terme linéaire, ce qui donne exactement la notion de différentielle. Le texte encadré ci-dessus montre que les dérivées partielles ne sont pas adaptées à cette idée (une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point mais ne pas être différentiable en ce point).

— Les dérivées partielles sont, par définition, liées à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La différentielle est une notion indépendante du choix de la base, ce qui est un avantage indéniable (on peut avoir envie de travailler dans une autre base, ou même sans aucune base, voir la remarque importante 1.14).

— La notion de différentielle se généralise à des espaces plus généraux que $\mathbb{R}^n$, on peut par exemple parler de différentielle sur des espaces de matrices, ou même sur des espaces de dimension infinie (voir le cours de troisième année).

Définition 1.3 – Matrice jacobienne

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ différentiable en x_0. La matrice de la différentielle $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de f en x_0 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est appelée la *matrice jacobienne de f en x_0*, notée $\mathrm{J}f_{x_0}$.

On a donc

$$\mathrm{J}f_{x_0} = \left[\partial_j f_i(x_0)\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \cdots & \partial_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \cdots & \partial_n f_p(x_0) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Remarque 1.4 – Lien entre différentielle et gradient

Si $p = 1$ (donc $f : O \to \mathbb{R}$), on peut représenter la forme linéaire $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à l'aide du produit scalaire (théorème de représentation, voir le cours « algèbre linéaire avancé ») : il existe un unique vecteur $\operatorname{grad} f(x_0) \in \mathbb{R}^n$, appelé *gradient de f en x_0*, tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f_{x_0}(h) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle$$

De plus, si $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (par exemple la base canonique), alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\left(\operatorname{grad} f(x_0)\right) = \begin{bmatrix} \partial_{e_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{e_n} f(x_0) \end{bmatrix}$$

Définition 1.4 – Fonction différentiable et différentielle sur un ouvert

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : O \to \mathbb{R}^p$ est *différentiable sur O* si f est différentiable en tout $x \in O$. L'application

$$\mathrm{d}f : \left\{ \begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}f_x \end{array} \right.$$

est appelée *différentielle de f*.

La différentielle $\mathrm{d}f$ n'est pas linéaire (par rapport à x) en général. Par contre, si $x \in O$ est fixé, $\mathrm{d}f_x : h \mapsto \mathrm{d}f_x(h)$ est linéaire (par rapport à h).

Proposition 1.2 – Propriétés de la différentielle

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. *Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.*
   Si f est différentiable sur O, alors f est continue sur O.
2. *Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ est constante sur O, alors f est différentiable sur O et $\mathrm{d}f_{x_0} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)}$ pour tout $x_0 \in O$.*
3. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}f_{x_0} = f$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

4. *Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ et $g : O \to \mathbb{R}^p$ sont différentiables en x_0 et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\, f + \mu\, g$ est différentiable en x_0 et $\mathrm{d}(\lambda\, f + \mu\, g)_{x_0} = \lambda\, \mathrm{d}f_{x_0} + \mu\, \mathrm{d}g_{x_0}$.*
Si f et g sont différentiables sur O, alors $\lambda\, f + \mu\, g$ est différentiable sur O.

Démonstration

1. La fonction $\mathrm{d}f_{x_0}$ est continue car c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui sont de dimension finie [a] d'où
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|) \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} f(x_0) + \underbrace{\mathrm{d}_{x_0}f(0_{\mathbb{R}^n})}_{=0_{\mathbb{R}^p}} = f(x_0)$$
ce qui montre que f est continue en x_0.
2. Pour tout $x_0 \in O$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$,
$$f(x_0+h) = f(x_0) = f(x_0) + 0_{\mathbb{R}^p} + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$
Puisque $h \mapsto 0_{\mathbb{R}^p}$ est linéaire (c'est la fonction nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$), on en déduit que f est différentiable en x_0 et que $\mathrm{d}f_{x_0} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}$.
3. Pour tout $x_0 \in O$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$,
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(h) = f(x_0) + f(h) + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$
Puisque $h \mapsto f(h)$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en x_0 et que $\mathrm{d}f_{x_0} = f$.
4. Pour tout $x_0 \in O$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$,
$$\begin{aligned}(\lambda\, f + \mu\, g)(x_0+h) &= \lambda\, f(x_0+h) + \mu\, g(x_0+h)\\ &= \lambda\Big(f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)\Big) + \mu\Big(g(x_0) + \mathrm{d}g_{x_0}(h) + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)\Big)\\ &= \underbrace{\lambda\, f(x_0) + \mu\, g(x_0)}_{=(\lambda\, f + \mu\, g)(x_0)} + \lambda\, \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \mu\, \mathrm{d}g_{x_0}(h) + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)\end{aligned}$$
Puisque $h \to \lambda\, \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \mu\, \mathrm{d}g_{x_0}(h)$ est linéaire, on en déduit que $\lambda\, f + \mu\, g$ est différentiable en x_0 et $\mathrm{d}(\lambda\, f + \mu\, g)_{x_0} = \lambda\, \mathrm{d}f_{x_0} + \mu\, \mathrm{d}g_{x_0}$.

a. On verra que si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $(E, \|\,\|_E)$ et $(F, \|\,\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, alors u est continue si et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$. Voir la proposition **??** dans la partie Topologie.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par
$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,\, y) \neq (0,\, 0)\\ 0 & \text{si } (x,\, y) = (0,\, 0)\end{cases}$$
Montrer que f est continue en $(0, 0)$, qu'elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais qu'elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

1.3.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par
$$f(x,\, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0\\ 0 & \text{si } y \neq 0\end{cases}$$
Montrer que f est continue en $(0, 0)$, qu'elle admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais qu'elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

1.3.3 Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : 0 \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est *différentiable au sens de Gateaux* si f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en x_0 et si $v \mapsto \partial_v f(x_0)$ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (on pose $\partial_{0_{\mathbb{R}^n}} f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^p}$).

(a) Montrer que si f est différentiable en x_0, alors elle est différentiable au sens de Gateaux en x_0.

(b) Construire une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est différentiable au sens de Gateaux en $(0,0)$ mais qui n'est pas différentiable en $(0,0)$.

1.2.4 Le cas des fonctions composées

Proposition 1.3 – Différentielle d'une fonction composée

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Soit également O' un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(O)$ et soit $g : O' \to \mathbb{R}^q$. On peut alors considérer

$$g \circ f : O \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} f(O) \subset O' \subset \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$$

Si f est différentiable en x_0 et si g est différentiable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et

$$\mathrm{d}(g \circ f)_{x_0} = \left(\mathrm{d}g_{f(x_0)}\right) \circ \mathrm{d}f_{x_0} \tag{1.5}$$

Démonstration

On va remplacer les petits o par des « vraies » fonctions afin d'éviter des manipulations hasardeuses de composées de petits o.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$. On a

$$(g \circ f)(x_0 + h) = g(f(x_0 + h)) = g\Big(f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\Big) \quad \text{avec} \quad \phi(h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^p}$$

Quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$, on a $\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h) \to 0_{\mathbb{R}^p}$ par continuité de $\mathrm{d}f_{x_0}$ (c'est une application linéaire) d'où

$$(g \circ f)(x_0 + h) = \underbrace{g\big(f(x_0)\big)}_{=(g\circ f)(x_0)} + \underbrace{\mathrm{d}g_{f(x_0)}\Big(\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\Big)}_{=A} + \underbrace{\Big(\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\Big)\psi\Big(\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\Big)}_{=B}$$

avec $\psi(k) \to 0_{\mathbb{R}^q}$ quand $k \to 0_{\mathbb{R}^p}$.

— D'une part, par linéarité de $\mathrm{d}g_{x_0}$,

$$A = \mathrm{d}g_{f(x_0)}\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h)\big) + h\,\mathrm{d}g_{f(x_0)}\big(\phi(h)\big)$$

Puisque $\mathrm{d}g_{f(x_0)}$ est continue (c'est une application linéaire) et $\phi(h) \to 0_{\mathbb{R}^p}$ quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$, on a $\mathrm{d}g_{f(x_0)}\big(\phi(h)\big) \to 0_{\mathbb{R}^q}$ quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$ d'où

$$A = \Big(\big(\mathrm{d}_{f(x_0)}g\big) \circ \mathrm{d}f_{x_0}\Big)(h) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

— D'autre part, pour $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,

$$\frac{B}{\|h\|} = \left[\mathrm{d}f_{x_0}\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \frac{h}{\|h\|}\,\phi(h)\right]\psi\Big(\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\Big)$$

Mais $h/\|h\|$ reste borné quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$, $\mathrm{d}f_{x_0}$ est continue et $\phi(h) \to 0_{\mathbb{R}^p}$ quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$ donc le terme de gauche dans le produit ci-dessus reste borné quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$. De plus, $\psi\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h) + h\,\phi(h)\big) \to 0_{\mathbb{R}^p}$ quand $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui montre que

$$B = \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

On a donc montré que

$$(g \circ f)(x_0 + h) = (g \circ f)(x_0) + \Big(\big(\mathrm{d}g_{f(x_0)}\big) \circ \mathrm{d}f_{x_0}\Big)(h) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)$$

Comme $\big(\mathrm{d}g_{f(x_0)}\big) \circ \mathrm{d}f_{x_0}$ est linéaire, cela montre que $g \circ f$ est différentiable en x_0 et que c'est sa différentielle en x_0.

Remarque importante 1.5

La formule (1.5), qui est une égalité d'applications linéaires, se traduit de deux façons :

1. en une égalité matricielle (la composition devient un produit matriciel) :

$$\mathrm{J}(g \circ f)_{x_0} = \big(\mathrm{J}_{f(x_0)} g\big)\, \mathrm{J} f_{x_0}$$

2. en une égalité vectorielle (scalaire si $p = 1$) : pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\partial_k (g \circ f)(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j g\big(f(x_0)\big)\, \partial_k\, f_j(x_0)$$

Remarque 1.6

Dans le cas où $n = p = q = 1$, on retrouve la formule bien connue de dérivation des fonctions composées car (voir l'exemple 1.3) :

$$(g \circ f)(x_0) = \mathrm{d}(g \circ f)_{x_0}(1) = \mathrm{d}g_{f(x_0)}\big(\mathrm{d}f_{x_0}(1)\big) = \mathrm{d}g_{f(x_0)}\big(f'(x_0)\big) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)$$

Exemple 1.5 – Coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et soit

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

Comme les deux composantes de P sont différentiables, alors $f \circ P$ aussi. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \partial_1 (f \circ P)(r, \theta) &= \partial_1 f\big(P(r, \theta)\big)\partial_1 P_1(r, \theta) + \partial_2 f\big(P(r, \theta)\big)\partial_1 P_2(r, \theta) \\ &= \partial_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \partial_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ \partial_2 (f \circ P)(r, \theta) &= \partial_1 f\big(P(r, \theta)\big)\partial_2 P_1(r, \theta) + \partial_2 f\big(P(r, \theta)\big)\partial_2 P_2(r, \theta) \\ &= -\partial_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta + \partial_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta \end{aligned}$$

On retrouve les formules bien connues des physiciens. En effet, en notant (abusivement) toujours f pour la fonction $f \circ P$, $e_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, les formules ci-dessus peuvent s'écrire

$$\operatorname{grad} f(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta)\, e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta)\, e_\theta$$

Exemple 1.6 – Différentielle le long d'une courbe

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ différentiable, où O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\gamma(I)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable et, pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}(f \circ \gamma)_t(1) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\big(\mathrm{d}\gamma_t(1)\big) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$$

Proposition 1.4 – Différentielle d'une application bilinéaire

Soit $B : \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \to \mathbb{R}^q$ *une application bilinéaire*[a]*, soit* O *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$*, soit* $x_0 \in O$ *et soient* $f : O \to \mathbb{R}^{p_1}$*,* $g : O \to \mathbb{R}^{p_2}$ *deux fonctions différentiables en* x_0*. Alors* $B(f,g) : O \to \mathbb{R}^q$ *est différentiable en* x_0 *et*

$$\mathrm{d}\big(B(f,g)\big)_{x_0} : h \longmapsto B\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), \mathrm{d}g_{x_0}(h)\big) \tag{1.6}$$

a. C'est-à-dire que $B(\times, y_0) : (x, y_0) \mapsto B(x_0, y_0)$ (avec $y_0 \in \mathbb{R}^{p_2}$ fixé) et $B(x_0, \times) : (x_0, y) \mapsto B(x_0, y)$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}^{p_1}$ fixé) sont linéaires.

Démonstration

Commençons par montrer que B est différentiable en tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$. Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$. On a [a]

$$B(y_1 + h_2, y_2 + h_2) = B(y_1, y_2) + B(y_1, h_2) + B(h_1, y_2) + B(h_1, h_2)$$

D'une part $(h_1, h_2) \mapsto B(y_1, h_2) + B(h_1, y_2)$ est linéaire, d'autre part, comme B est continue (c'est une application bilinéaire en dimension finie), il existe $C \geqslant 0$ tel que [b]

$$\|B(h_1, h_2)\| \leqslant C\, \|h_1\|\, \|h_2\| \leqslant C\, \|(h_1, h_2)\|^2$$

On a donc

$$B(y_1 + h_2, x_2 + y_2) = B(y_1, y_2) + B(y_1, h_2) + B(h_1, y_2) + \underset{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{p_2}}}{o}\big(\|(h_1, h_2)\|\big)$$

ce qui montre que B est différentiable en (y_1, y_2) et que

$$\mathrm{d}B_{(y_1,y_2)} : (h_1, h_2) \longmapsto B(y_1, h_2) + B(h_1, y_2)$$

Remarquons maintenant que $B(f,g) = B \circ F$ avec $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \big(f(x), g(x)\big) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$. La fonction F est différentiable en x_0 car f et g le sont et $\mathrm{d}F_{x_0} = (\mathrm{d}f_{x_0}, \mathrm{d}g_{x_0})$ (le développement limité à l'ordre 1 de F est immédiat), ce qui montre que $B(f,g) = B \circ F$ est différentiable en x_0 par composition et, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(B(f,g)\big)_{x_0}(h) &= \mathrm{d}B(F)_{x_0}(h) = \mathrm{d}B_{F(x_0)}\big(\mathrm{d}F_{x_0}(h)\big) \\
&= \mathrm{d}B_{(f(x_0),g(x_0))}\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h), \mathrm{d}g_{x_0}(h)\big) \\
&= B\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), \mathrm{d}g_{x_0}(h)\big)
\end{aligned}$$

a. Attention, B n'est pas supposée commutative : $B(h_1, h_2) \neq B(h_2, h_1)$ en général

b. Ce sera démontré dans la partie Topologie à la proposition 3.23

Remarque importante 1.7 – Différentiation d'un produit et d'un produit scalaire

Il y a deux cas particuliers importants de la formule de la proposition **??**.

1. Le cas où $p_1 = p_2 = q = 1$ et où B est simplement la multiplication dans $\mathbb{R}$: $B(f,g) = f\,g$. On a alors

$$\mathrm{d}(f\,g)_{x_0} : h \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0}(h)\, g(x_0) + f(x_0)\, \mathrm{d}g_{x_0}(h)$$

   On retrouve alors la formule, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\partial_k(f\,g) = (\partial_k f)\, g + f\, (\partial_k g)$$

2. Le cas où $p_1 = p_2$ et où $B = \langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire : $B(f,g) = \langle f, g\rangle$ (pas nécessairement le produit scalaire canonique). On a alors

$$\mathrm{d}\langle f, g\rangle_{x_0} : h \longmapsto \langle \mathrm{d}f_{x_0}(h), g(x_0)\rangle + \langle f(x_0), \mathrm{d}g_{x_0}(h)\rangle$$

   On retrouve alors la formule, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\partial_k\langle f, g\rangle = \langle \partial_k f, g\rangle + \langle f, \partial_k g\rangle$$

Exemple 1.7 – Différentielle de la norme

Soit $\langle\,,\,\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (qui peut être différent du produit scalaire canonique). Étudions la différentiabilité de la norme $\|\;\| : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ associée. On a $\|\;\| = f \circ B \circ F$ avec :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array} \right. , \quad B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

— F est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ donc est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}F_x = F$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

— B est bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donc est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}B_{(x,y)}(h, k) = \langle h, y\rangle + \langle x, k\rangle$ pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ d'après la proposition 1.4.

— f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}f_t(h) = h\, f'(t) = \frac{h}{2\sqrt{t}}$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

On a $(B \circ f)(\mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, $\|\;\| = f \circ B \circ F$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{d}(B \circ F)_x(h) = \mathrm{d}B_{F(x)}\big(\mathrm{d}F_x(h)\big) = \mathrm{d}_{F(x)}\big(F(h)\big) = \mathrm{d}_{F(x)}(h, h) = \langle x, h\rangle + \langle x, h\rangle = 2\langle x, h\rangle$$

donc la différentielle de $\|\;\|$ en $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ est donnée par

$$\mathrm{d}f_{B\circ F(x)}\big(\mathrm{d}(B \circ F)_x(h)\big) = \mathrm{d}f_{B\circ F(x)}\big(2\langle x, h\rangle\big) = 2\, \mathrm{d}f_{B\circ F(x)}\big(\langle x, h\rangle\big) = 2\, \frac{\langle x, h\rangle}{2\sqrt{B \circ F(x)}} = \frac{\langle x, h\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}$$

On conclut donc que $\|\;\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, sa différentielle en x est donnée par $h \mapsto \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}$.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet des dérivées partielles.
  (a) Calculer la dérivée de $u : x \mapsto f(x, -x)$ en fonction des dérivées partielles de f.
  (b) Calculer les dérivées partielles de $v : (x, y) \mapsto f(y, x)$ en fonction des dérivées partielles de f.

1.4.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *α-homogène* si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ \forall t > 0, \quad f(t\, x) = t^\alpha\, f(x)$$

Montrer que f est α-homogène si et seulement si f vérifie la *formule d'Euler* :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\, \partial_j f(x) = \alpha\, f(x)$$

1.4.3 Soit $\langle\,,\,\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (qui peut être différent du produit scalaire canonique) et soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \langle u(x), x\rangle$$

est différentiable et calculer sa différentielle de deux façons :
  (a) en utilisant les propositions 1.3 et 1.4 ;
  (b) par un développement limité.

1.4.4 Démontrer le résultat de l'exemple 1.7 en utilisant des développements limités.

1.4.5 Soit $\langle\,,\,\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (qui peut être différent du produit scalaire canonique). On note $\|\;\|$ la norme associée.
  (a) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme et soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une solution de $x'(t) = (u \circ x)(t)$. Montrer que $\psi : t \mapsto \|x(t)\|^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = \big\langle \big((u + u^*) \circ x\big)(t), x(t)\big\rangle$$

  où u^* est l'adjoint de u.

(b) On suppose dans cette question que u est antisymétrique, c'est-à-dire que $u^* = -u$. Montrer que toutes les solutions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de $x'(t) = (u \circ x)(t)$ vérifient $\|x(t)\| = \|x(0)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire que $v^* = v$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle v(x), x \rangle = 0$$

Montrer que $v = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.

(d) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si toutes les solutions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de $x'(t) = (u \circ x)(t)$ vérifient $\|x(t)\| = \|x(0)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.2.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Rappel 1.3 – Inégalité des accroissements finis à une variable

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}^p$ dérivable. Pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$ tel que $a \leqslant b$,

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \left(\sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\| \right) |b - a|$$

Remarque 1.8

L'inégalité des accroissements finis se généralise pour les fonctions de plusieurs variables, mais pas le théorème des accroissements finis (voir l'exercice 1.5.4).

Proposition 1.5 – Équivalence de la continuité de la différentielle et des dérivées partielles

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f admet des dérivées partielles sur O et ces dérivées partielles sont continues sur O ;*
2. *f est différentiable sur O et $\mathrm{d}f$ est continue sur O.*

Remarque 1.9

La continuité de $\mathrm{d}f$ doit se comprendre comme la continuité d'une application de O muni de $\| \; \|$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ muni de $||| \; |||$. On verra que (voir le chapitre de topologie) que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension $n \times p$) que l'on munit de la norme

$$|||u||| = \sup_{h \in \mathrm{S}(0,1)} \|u(h)\|$$

où $\mathrm{S}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : | \; x - y| = r\}$ la sphère centrée en $x \in \mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$.

Démonstration

Soit $x \in O$, soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de O qui converge vers x.
Il suffit de montrer le résultat pour chaque composante de f. Afin de simplifier les notations, on peut donc supposer que $p = 1$. Pour simplifier les notations, on suppose que $n = 2$ (exercice : le faire pour n fini quelconque).

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $x_0 \in O$. Quitte à considérer la fonction $g : x \mapsto f(x - x_0)$ on peut supposer que $0 = x_0 \in O$. On a, pour $(h, k) \in O^2$:

$$f(h,k) - f(0,0) = \big(f(h,k) - f(h,0)\big) + \big(f(h,0) - f(0,0)\big).$$

La preuve consiste à estimer les deux termes ci-dessus. On considère l'application $f_x : t \mapsto f(t, 0)$. Si $h > 0$ (la preuve est similaire pour $h < 0$), la fonction f_x est continue sur $[0, h]$, et dérivable sur $]0, h[$ de dérivée $f_x'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$ en point de $]0, h[$. On peut lui appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $t_x \in]0, 1[$ tel que :

$$f_x(h) - f_x(0) = h f_x'(t_x)$$

c'est-à-dire

$$f(h,0) - f(0,0) = h f_x'(t_x) = h \frac{\partial f}{\partial x}(t_x, 0)$$

De même, il existe $t_y \in]0, 1[$ tel que

$$\big(f(h,k) - f(h,0)\big) = k \frac{\partial f}{\partial y}(h, t_y)$$

Comme on suppose que les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$ et que (t_x, t_y) tend vers $(0, 0)$ quand (h, k) tend vers $(0, 0)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t_x, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \varepsilon_x(h,k) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(h, t_y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \varepsilon_y(h,k) \end{aligned}$$

où ε_x et ε_y désignent deux fonctions continues de limite nulle à l'origine. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + h\varepsilon_x(h,k) + k\varepsilon_y(h,k) \\ &= f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + o(|(h,k)|) \end{aligned}$$

Donc f est différentiable en $(0, 0)$ et sa matrice jacobienne en $(0, 0)$ est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

.

2. $\Rightarrow$ 1. On sait déjà (voir l'exemple 1.4) que f admet des dérivées partielles en x et que

$$\partial_j f(x) = \mathrm{d}f_x(e_j)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (en remarquant que $e_j \in \mathrm{S}(0,1)$) :

$$\|\partial_j f(x_n) - \partial_j f(x)\| = \|\mathrm{d}f_{x_n}(e_j) - \mathrm{d}f_x(e_j)\| \leqslant \underbrace{\sup_{h \in \mathrm{S}(0,1)} \|\mathrm{d}f_{x_n}(h) - \mathrm{d}f_x(h)\|}_{= |||\mathrm{d}f_{x_n} - \mathrm{d}f_x|||} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par continuité de $\mathrm{d}f_x$ en x. On conclut que $\partial_j f$ est continue en x, donc que les dérivées partielles de f existent et sont continues sur O.

Définition 1.5 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est de *classe $\mathscr{C}^1$ sur O* si elle vérifie les conditions équivalentes de la proposition 1.5. On note $\mathscr{C}^1(O, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de O à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Il existe des fonctions différentiables (donc admettant des dérivées partielles) qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ (voir l'exercice 1.5.1).

Exemple 1.8 – Caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sur O (voir l'exemple 1.1) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur O.

En utilisant la proposition 1.2, il est immédiat que $\mathscr{C}^1(O,\mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie d'après l'exemple 1.8). En particulier, il est stable par combinaison linéaire. Si $p = 1$, il est aussi stable par produit et par quotient (si le dénominateur ne s'annule pas). De plus, $\mathscr{C}^1(O,\mathbb{R}^p) \subset \mathscr{C}^0(O,\mathbb{R}^p)$ d'après le point 1 de la proposition 1.2. Enfin, la composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 1.10 – Et aux ordres supérieurs ?

Il est bien sûr possible de définir les espaces $\mathscr{C}^k(O,\mathbb{R}^p)$ pour $k \geqslant 1$ et $k = +\infty$.

— Du point de vue des dérivées partielles, c'est assez clair. L'espace $\mathscr{C}^k(0,\mathbb{R}^p)$ est simplement l'espace des fonctions qui admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k et telles que toutes les dérivées partielles d'ordre k

$$\partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f$$

soient continues sur O. L'espace $\mathscr{C}^\infty(0,\mathbb{R}^p)$ est la réunion des $\mathscr{C}^k(0,\mathbb{R}^p)$ pour $k \geqslant 1$.

— Du point de vue des différentielles, la situation est plus compliquée. On a envie de « différentier la différentielle », qui est une application $O \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. La différentielle seconde serait alors une application $O \to \mathscr{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\big)$ qu'on peut heureusement identifier comme une application de O dans les applications bilinéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Le cours de calcul différentiel de troisième année reviendra en détails sur cette notion et ses applications, notamment la recherche d'extremums.

— Rappelons le *théorème de Schwarz* qui nous dit que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors

$$\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et tout $j \in \{1,\ldots,n\}$. L'ordre de dérivation n'a donc pas d'importance.

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,\,y) \neq (0,\,0) \\ 0 & \text{si } (x,\,y) = (0,\,0) \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

1.5.2 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \max(x^2,y^2)$$

(a) Montrer que f est continue.

(b) En quel(s) point(s) f est-elle différentiable ?

(c) Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathscr{C}^1$.

1.5.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que F est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit deux fois dérivable en a. Montrer que F est différentiable en (a, a).

1.5.4 Le but de cet exercice est de démontrer l'*inégalité des accroissements finis*.
Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}$ différentiable. On considère un segment [a] $[a, b] \subset O$.

(a) Soit $g(t) = f\big((1-t)\,a + t\,b\big)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée en fonction de la différentielle de f.

(b) En déduire l'inégalité des accroissements finis

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \Big(\sup_{x \in [a,b]} |||\mathrm{d}f_x|||\Big)\,\|b - a\|$$

(c) Dans cette question, on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = \exp(\mathrm{i}\,t)$. Montrer qu'il n'existe pas $c \in [0, 2\pi]$ tel que $f(2\pi) - f(0) = f'(c)\,(2\pi - 0)$.
Il n'y a donc pas d'équivalent du théorème des accroissements finis avec les fonctions de plusieurs variables.

1.5.5 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis, exercice 1.5.4) :

(1) f est constante sur $\mathbb{R}^n$;

(2) $\mathrm{d}f_x = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\mathrm{J}f_x = 0_{p,n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;

(4) $\partial_k f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^p}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Si on ne suppose plus que f est différentiable, est-ce que (4) implique (1) ?

1.5.6 Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On dit que f est *harmonique* si $\partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} f = 0$.
On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est *radiale* s'il existe $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $u(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer toutes les fonctions radiales de classe $\mathscr{C}^2$ qui sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

a. Le segment $[a, b]$ est défini par $[a, b] = \{(1 - t)\,a + t\,b : t \in [0, 1]\}$.

1.3 Le théorème des fonctions implicites

On reprend la problématique de l'introduction de ce chapitre où on souhaite étudier les solutions d'une *équation d'état* de la forme

$$f(A, B, C, \ldots) = 0$$

Citons quelques exemples d'équations d'état, qui sont omniprésentes en mathématiques et dans toutes les sciences en général :

- équation d'un cercle : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- équation d'état en thermodynamique : $f(P, V, T) = 0$ (loi des gaz parfaits, de van der Waals, etc.) ;
- équation des valeurs propres [2] d'une matrice carrée A : $f(x, A) = \det(A - x\,I_n) = 0$;
- relation de dispersion $f(k, \omega) = k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} = 0$ (optique/électromagnétisme) ;
- équation du second degré $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c = 0$.

On se donne donc une fonction f définie sur un ouvert non vide O de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et on étudie l'équation

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

Plus généralement, on aimerait comprendre l'ensemble

$$\Gamma_f = \big\{x \in O : f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}\big\}$$

2. Voir le cours *algèbre linéaire avancé* ou le livre [?, chapitre 4].

On voudrait par exemple savoir s'il est possible d'exprimer certaines variables en fonction des autres, par exemple $(x_{j+1}, \ldots, x_n)$ en fonction de $(x_1, \ldots, x_j)$ avec $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

1.3.1 Exemple introductif : le cas linéaire

Supposons pour l'instant que f soit une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. En notant $A \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, l'équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^p}$ s'écrit comme un système linéaire de p équations à n inconnues

$$A\,X = 0_{p,1}$$

avec $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

D'après le cours d'algèbre linéaire du premier semestre (voir aussi [?]), puisqu'on souhaite obtenir une infinité de solutions, on impose la condition

$$n > p$$

On voit donc que la dimension de Γ_f va dépendre du rang de f.

On écrit le système sous la forme

$$\left[\, B \,\middle|\, C \,\right] \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right] = 0_{p,1}$$

avec

$$X_1 = (x_1, \ldots, x_j)^\top, \quad X_2 = (x_{j+1}, \ldots, x_n)^\top, \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,j} \end{bmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{p,j}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad C = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,j+11} & \cdots & A_{p,n} \end{bmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{p,n-j}(\mathbb{R})}$$

Autrement dit, le système est alors $B\,X_1 + C\,X_2 = 0_{p,1}$, c'est-à-dire

$$C\,X_2 = -B\,X_1$$

On voit donc apparaître naturellement la condition que C soit inversible (en particulier $j = n - p$). Si c'est le cas, on a

$$X_2 = -C^{-1}\,B\,X_1$$

ce qui montre que $(x_{j+1}, \ldots, x_n)$ s'exprime en fonction de $(x_1, \ldots, x_j)$.

1.3.2 Énoncé et exemples

Dans le cas général où f n'est pas linéaire, que faire ? La situation est beaucoup plus compliquée. Par exemple, dans le cadre des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

— si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, Γ_f est le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon 1 ;

— si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, Γ_f est réduit au singleton $\{(0, 0)\}$;

— si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$, Γ_f est l'ensemble vide $\varnothing$.

On va utiliser l'idée centrale du calcul différentiel : on linéarise ! La géométrie de Γ_f va donc dépendre du rang de la différentielle de f.

Notation 1.4 – Différentielle partielle

Si f est une fonction définie sur un ouvert non vide O de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ qui est différentiable en un point $(a, b) \in O$, on note

$$\mathrm{d}[f(a, \times)]_b$$

la différentielle de la fonction $y \in \mathbb{R}^{n_2} \mapsto f(a, y)$ en b. On parle alors de *différentielle partielle de f*. De même, on note

$$\mathrm{d}[f(\times, b)]_a$$

la différentielle de la fonction $x \in \mathbb{R}^{n_1} \mapsto f(x,b)$ en a.

Remarque 1.11

Les matrices de $\mathrm{d}[f(a,\times)]_b$ et $\mathrm{d}[f(\times,b)]_a$ dans les bases canoniques correspondent respectivement aux n_1 premières colonnes et aux n_2 dernières colonnes de la matrice jacobienne $\mathrm{J}f_{(a,b)}$ de f :

— matrice de $\mathrm{d}[f(a,\times)]_b$: $\begin{bmatrix} \partial_{n_1+1}f_1(x_0) & \partial_{n_1+2}f_1(x_0) & \cdots & \partial_{n_1+n_2}f_1(x_0) \\ \partial_{n_1+1}f_2(x_0) & \partial_{n_1+2}f_2(x_0) & \cdots & \partial_{n_1+n_2}f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n_1+1}f_p(x_0) & \partial_{n_1+2}f_p(x_0) & \cdots & \partial_{n_1+n_2}f_p(x_0) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,n_2}(\mathbb{R})$;

— matrice de $\mathrm{d}[f(\times,b)]_a$: $\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \cdots & \partial_{n_1} f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \cdots & \partial_{n_1} f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \cdots & \partial_{n_1} f_p(x_0) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,n_1}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.1 – fonctions implicites

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, soit $(a,b) \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou $k = +\infty$. On suppose que :

$$f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^p} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{d}[f(a,\times)]_b \textit{ est inversible.}$$

Alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui contient a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ qui contient b avec $U \times V \subset O$ et une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^k$ tels que

$$\forall x \in U,\ \forall y \in V, \quad f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff y = \phi(x)$$

Démonstration

Admis, voir l'exercice 1.6.5 pour une démonstration dans le cas $\mathbb{R}^2$.

La relation $y = \phi(x)$, c'est-à-dire

$$(y_1,\dots,y_p) = \big(\phi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\phi_p(x_1,\dots,x_n)\big)$$

traduit le fait que les variables $y_1,\dots,y_p$ s'écrivent comme des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ des variables $x_1,\dots,x_n$ au voisinage de (a,b). On peut écrire, un peu abusivement, $y_1 = y_1(x_1,\dots,x_n)$, $y_2 = y_2(x_1,\dots,x_n)$, etc.

En général, on ne connaît pas explicitement ϕ, c'est pourquoi on parle de *fonction implicite*. L'équation $f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^p}$ s'appelle *équation implicite*.

Remarque 1.12

— On a $\phi(a) = b$.

— La condition « $\mathrm{d}[f(a, \times)]_b$ est inversible » se traduit matriciellement par le fait que la matrice

$$\begin{bmatrix} \partial_{n+1} f_1(x_0) & \partial_{n+2} f_1(x_0) & \cdots & \partial_{n+p} f_1(x_0) \\ \partial_{n+1} f_2(x_0) & \partial_{n+2} f_2(x_0) & \cdots & \partial_{n+p} f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n+1} f_p(x_0) & \partial_{n+2} f_p(x_0) & \cdots & \partial_{n+p} f_p(x_0) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$$

est inversible. On peut par exemple le vérifier en calculant son déterminant.

— Puisque $\mathrm{d}[f(a, \times)]_b$ est inversible et que $\mathrm{d}f$ est continue, on en déduit que $\mathrm{d}[f(x, \times)]_y$ est inversible sur un voisinage de $U \times V$. De plus, différentier la relation $f\big(x, \phi(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^p}$ dans ce voisinage donne

$$\mathrm{d}\phi_x = -\big(\mathrm{d}f[(x, \times)]_{\phi(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}f[(\times, \phi(x), \times)]_x \tag{1.7}$$

Ce n'est pas nécessaire d'apprendre par cœur la formule (1.7) donnant $\mathrm{d}\phi_x$, on doit savoir la retrouver rapidement par le calcul.

Dans la suite du cours, on se servira souvent de trois cas particuliers :

1. *Cas des courbes du plan.* C'est le cas $n = p = 1$. La condition d'inversibilité est simplement
$$\partial_2 f(a, b) \neq 0$$
avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si c'est le cas, au voisinage de (a, b), si $f(x, y) = 0$ alors $y = y(x)$.
2. *Cas des surfaces de l'espace.* C'est le cas $n = 2$ et $p = 1$. La condition d'inversibilité est simplement
$$\partial_3 f(a, b) \neq 0$$
avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}$. Si c'est le cas, au voisinage de (a, b), si $f(x, y, z) = 0$ alors $z = z(x, y)$.
3. *Cas des courbes de l'espace.* C'est le cas $n = 1$ et $p = 2$. La condition d'inversibilité est simplement
$$\det \begin{bmatrix} \partial_2 f_1(a, b) & \partial_3 f_1(a, b) \\ \partial_2 f_2(a, b) & \partial_3 f_2(a, b) \end{bmatrix} \neq 0$$
avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^2$. Au voisinage de (a, b), si $f(x, y, z) = 0$ alors $y = y(x)$ et $z = z(x)$.

Exemple 1.9 – Cercle unité de $\mathbb{R}^2$

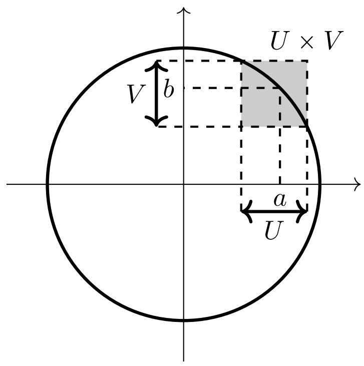
Considérons le cercle unité C dans $\mathbb{R}^2$:

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\}$$

On veut savoir si on peut exprimer y en fonction de x. Géométriquement, c'est assez clair :

— au voisinage d'un point $(a, b) \in C$ tel que $a \neq 1$ ou $a \neq -1$, c'est possible et on a $y = \sqrt{1 - x^2}$ (si $b > 0$) ou $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (si $b < 0$) ;

— aux voisinages de $(1, 0)$ et de $(-1, 0)$, y ne peut pas s'écrire comme une fonction de x.



En posant $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a

$$\partial_2 f : (x, y) \longmapsto 2y$$

Les solutions de $f(x, y) = \partial_2 f(x, y) = 0$ sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, on retrouve exactement la condition géométrique :

— si $a \neq 1$ ou $a \neq -1$, dans un voisinage $U \times V$ de $(a, b) \in C$ avec $a \in U$ et $b \in V$, le théorème des fonctions implicites s'applique (car $\partial_2 f(a, b) \neq 0$) et nous dit que y est une fonction de x de classe $\mathscr{C}^\infty$

sur U ;

— aux voisinages de $(1,0)$ et de $(-1,0)$, le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas car $\partial_2 f(1,0) = \partial_2 f(-1,0) = 0$.

Par contre, au voisinage de $(1,0)$ et $(-1,0)$, on peut exprimer x en fonction de y (le théorème des fonctions implicites s'applique car $\partial_1 f(1,0) \neq 0$ et $\partial_1 f(-1,0) \neq 0$).

Remarque 1.13

Que faire si $\mathrm{d}[f(a,\times)]_b$ n'est pas inversible (par exemple sur $\mathbb{R}^2$ si $\partial_2 f(a,b) = 0$) ?

— Si $\mathrm{d}[f(\times,b)]_a$ est inversible (par exemple sur $\mathbb{R}^2$ si $\partial_1 f(a,b) \neq 0$), on peut (en échangeant les rôles de a et b) montrer que x est une fonction de y dans un voisinage de (a,b) ;

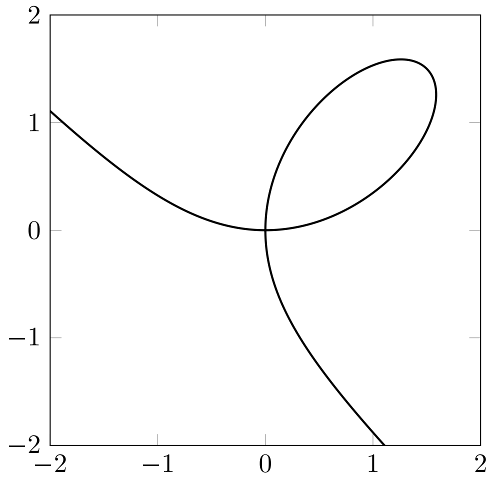
— sinon, on dit que (a,b) est un *point singulier* ($\mathrm{d}[f(a,\times)]_b$ et $\mathrm{d}[f(\times,b)]_a$ ne sont pas inversibles), on ne peut pas conclure directement et plusieurs situations peuvent arriver. La notion de point singulier dans le cadre des courbes et des surfaces définies par des équations implicites sera étudiée plus en détail dans le cours de Courbes et Surfaces.

Exemple 1.10 – Folium de Descartes

Considérons le *folium de Descartes* donné par

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0\right\}$$

On cherche à écrire localement y comme une fonction de x. Posons donc $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (f est de classe $\mathscr{C}^\infty$).



Soit $(a,b) \in C$. On a $\partial_2 f(a,b) = 3\,(b^2 - a)$ donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites en (a,b) si et seulement si $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ si et seulement si $b^2 \neq a$. Les équations

$$\begin{cases} a^3 + b^3 - 3a\,b = 0 \\ b^2 - a = 0 \end{cases}$$

ont pour solution $(0,0)$ et $(2^{2/3}, 2^{1/3})$. Si (a,b) est différent de ces deux points, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $a \in U$, un ouvert V de $\mathbb{R}$ tel que $b \in V$ et une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tels que

$$\forall (x,y) \in U \times V, \quad f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x)$$

Autrement dit, au voisinage de $(a,b) \in C$ avec $(a,b) \notin \{(0,0), (2^{2/3}, 2^{1/3})\}$, y s'écrit comme une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de x.

On peut calculer la dérivée de y en a (on refait le calcul menant à (1.7)). Pour tout $x \in U$, on a $f(x, y(x)) = 0$ c'est-à-dire

$$x^3 + y(x)^3 - 3\,x\,y(x) = 0$$

donc, en dérivant,

$$3x^2 + 3\,y'(x)\,y(x)^2 - 3\,y(x) - 3\,x\,y'(x) = 0$$

En $(x, y) = (a, b)$, puisque $y(a) = b$, on obtient

$$y'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$$

Si on veut les dérivées d'ordre supérieur, on dérive une nouvelle fois $f(x, y(x)) = 0$. Plus généralement, puisque y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de a, elle admet un développement limité à tout ordre en a. En injectant ce développement limité dans $f(x, y(x)) = 0$, par identification on peut obtenir les coefficients de ce développement limité, ce qui se fait très bien à l'aide d'un ordinateur.

In[1]

```
from sympy import *

x, y, h = symbols('x y h', real=True)
a, b = Rational(3, 2), Rational(3, 2)
n = 3                                                    # ordre du DL

def f(x, y):
    return x**3 + y**3 - 3*x*y

# DL de y en a à l'ordre n avec y(a) = b
c = IndexedBase('c')                          # créer automatiquement les c[i]
DL_y = b + sum([c[i]*h**i for i in range(1, n+1)]) + O(h**(n+1))

DL = series(f(a+h, DL_y), h, 0, n+1)          # on injecte le DL dans f(x,y)=0
S = solve([DL.coeff(h, k) for k in range(n+1)])  # on identifie les coefficients
DL_y.subs(S[0]).subs(h,x-a)
```

Out[1]

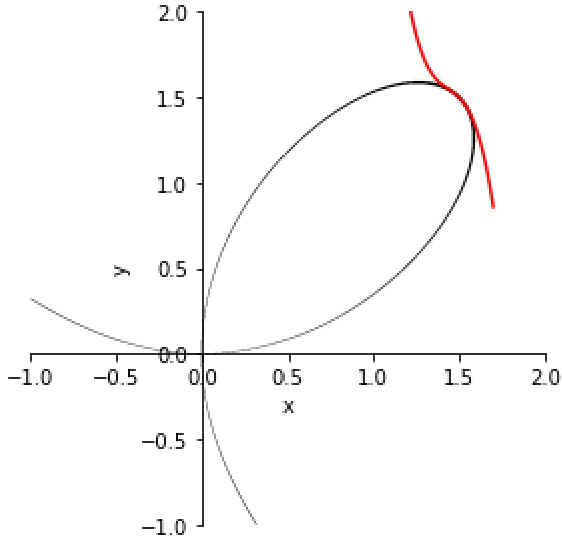
$$3 - \frac{16\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{3} - \frac{256\left(x - \frac{3}{2}\right)^3}{9} - x + O\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^4; x \to \frac{3}{2}\right)$$

Traçons la courbe et la partie polynomiale de ce développement limité.

In[2]

```
p1 = plot_implicit(f(x,y), (x,-1, 2), (y,-1,2), aspect_ratio=(1,1),
                   show=False, line_color='k')
p2 = plot(DL_y.subs(S[0]).subs(h,x-a).removeO(), (x, 1, 1.7),
          show=False, line_color='r')
p1.extend(p2)
p1.show()
```

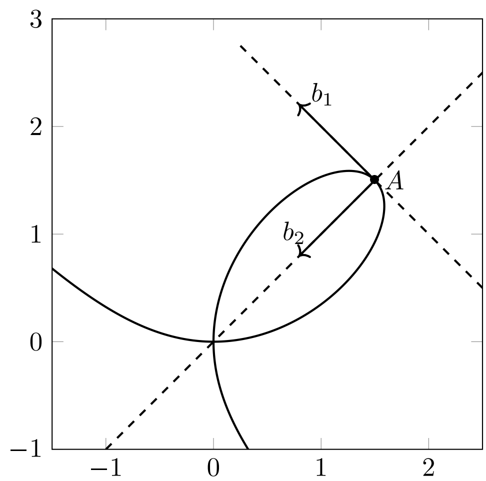
Out [2]



Que se passe-t-il pour les points $(0,0)$ et $(2^{2/3}, 2^{1/3})$? On a $\partial_1 f(2^{2/3}, 2^{1/3}) \neq 0$ donc au voisinage de ce point, on peut exprimer x en fonction de y (on pouvait s'y attendre, la courbe C est symétrique par rapport à la bissectrice $y = x$). Par contre, $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$, on dit que le point $(0,0)$ est un *point singulier* et le théorème des fonctions implicites ne nous dit rien. On reviendra sur ce problème dans le cours de Courbes et Surfaces.

Remarque importante 1.14 – Choix de paramètres et retour sur le folium de Descartes

Le théorème des fonctions implicites, dans la version qui a été donnée (théorème 1.1), permet de paramétriser certaines variables par rapport à d'autres. Par exemple, dans le cas d'une courbe $f(x,y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, on paramétrise (localement) y avec x (ou le contraire). Dans le cas d'une surface $f(x,y,z) = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple paramétriser z avec x et y. Mais on peut avoir envie de choisir un autre système de coordonnées que (x,y) ou (x,y,z) !



Par exemple, pour le folium de Descartes (exemple 1.10) au voisinage de $A = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, on avait travaillé dans le repère canonique et paramétré y par x. Un choix plus naturel est de paramétriser par la tangente[a] en ce point qui est la droite $y = 3 - x$. Cette droite passe par A et a pour vecteur directeur $b_1 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, cela nous donne[b] un système de coordonnées (A, b_1, b_2) avec $b_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ afin d'avoir une base orthonormée directe et on travaille dans le repère (A, b_1, b_2).

En notant (X,Y) les coordonnées dans ce nouveau repère, la fonction (on identifie ici $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) :

$$\phi : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{=U} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

qui correspond à ce changement de coordonnées (on a $(x,y) = \phi(X,Y)$) est de classe $\mathscr{C}^\infty$, inversible et d'inverse également [c] de classe $\mathscr{C}^\infty$. En considérant

$$f \circ \phi : (X,Y) \longmapsto f\big(\phi(X,Y)\big)$$

on peut étudier le folium de Descartes dans les nouvelles coordonnées, ce qui va donner une bien meilleure approximation (sans changer l'ordre du développement limité).

In[1]

```python
from sympy import *

X, Y = symbols('X Y', real=True)

A = Matrix([Rational(3, 2), Rational(3, 2)])  # Point A
U = Matrix([[-1, -1], [1, -1]])/sqrt(2)       # Matrice U

def f(x, y):
    return x**3 + y**3 - 3*x*y

def phi(X, Y):
    resultat = B + U*Matrix([X, Y])
    return resultat[0], resultat[1]
```

In[2]

```python
# Calcul du DL (voir l'exemple du folium de Descartes)
n = 3
c = IndexedBase('c')
DL_Y = sum([c[i]*X**i for i in range(1, n+1)]) + O(X**(n+1))

DL = series(f(*phi(X, DL_Y)), X, 0, n+1)
S = solve([DL.coeff(X, k) for k in range(0, n+1)])
DL_Y.subs(S[0])
```

Out[2]

$$\frac{4\sqrt{2}X^2}{3} + O\left(X^4\right)$$

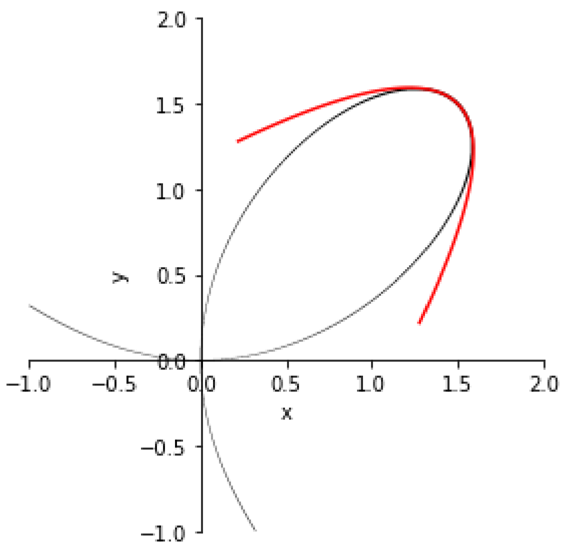
In[3]

```
p1 = plot_implicit(f(x, y), (x, -1, 2), (y, -1, 2), aspect_ratio=(1, 1),
                   show=False, line_color='k')

p2 = plot_parametric(*phi(X, DL_Y.subs(S[0]).removeO()), (X, -0.75, 0.75),
                     line_color='r', show=False)

p1.extend(p2)
p1.show()
```

Out[3]



Plus généralement, on peut faire un changement de coordonnées qui correspond à la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_{x_0} \oplus \big(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f_{x_0}\big)^{\perp}$$

Le théorème des fonctions implicites correspond à la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \oplus \operatorname{Vect}(e_{n+1}, \ldots, e_{n+p})$$

où $(e_1, \ldots, e_{n+p})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+p}$.

a. Voir le chapitre sur les courbes dans le cours de Courbes et Surfaces pour une définition précise.
b. Voir le cours « mathématiques I » ou le livre [?].
c. On dit que ϕ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféormorphisme, notion qui sera étudiée en troisième année.

Exercice(s) 1.6

1.6.1 *On pourra utiliser Python pour faire les calculs.*

(a) Soit $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x, y) = (1 + x + x^2)\, y + (1 + y + y^2)\, x$. Montrer qu'au voisinage de $(0, 0)$, y peut s'écrire comme une fonction de x de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de y.

(b) Soit $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x, y) = x^3 - 2\, x\, y + 2\, y^2 - 1$. Montrer qu'au voisinage de $(1, 1)$, x peut s'écrire comme une fonction de y de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis déterminer le $\mathrm{DL}_5(1)$ de x.

(c) Soit $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_3(x, y) = x^4 - y^4 - 2\, x^2 + y^2$.

i. Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites à f_3 en $(0,0)$?

ii. En $(0,0)$, deux branches se croisent. On suppose qu'on peut écrire chaque branche au voisinage de $(0,0)$ comme la courbe représentative d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer alors les tangentes à chacune de ces courbes en $(0,0)$.

1.6.2 On considère la surface

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy^3 - y^2z + z^3 = 0\}$$

(a) Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(1,1,1)$.

(b) Montrer qu'au voisinage de $(1,1,1)$, z s'écrit comme une fonction de x et y de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(c) Donner le développement limité de cette fonction à l'ordre 1 au point $(1,1)$.

1.6.3 En étudiant l'équation $x^7 + px + q = 0$ avec $p > 0$ et $q \in \mathbb{R}$, trouver une valeur approchée de la solution réelle de

$$x^7 + 0{,}99\,x - 2{,}03 = 0$$

sans utiliser d'outil numérique.

1.6.4 On admet que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le système d'équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}\cos(x-y) - t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

admet une unique solution $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

(a) En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que x et y sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de x et de y en 1. En déduire l'allure de la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ au voisinage de $(0,0)$.

1.6.5 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des fonctions implicites (théorème 1.1) dans le cas où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier, supposons $a = b = 0$ et $\partial f_2(0,0) \neq 0$.

(a) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe deux segments $C = [c_-, c^+]$ et $D = [d_-, d_+]$ de $\mathbb{R}$ contenant 0 et une fonction $\phi : C \to D$ tels que

$$\forall x \in [c_-, c^+],\ \forall y \in [d_-, d_+], \quad f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x)$$

Que vaut $\phi(0)$?

(b) Montrer que ϕ est continue en 0, puis sur C.

(c) Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$.

1.6.6 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère la fonction

$$f(x,\varepsilon) = (x-a)(b-x) + \varepsilon\, x^3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x,\varepsilon) = 0$ a trois solutions distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ et donner un développement limité de ces trois racines à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ quand $\varepsilon \to 0$.

(b) En déduire un développement limité à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ quand $\varepsilon \to 0^+$ de [a]

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{f(x,\varepsilon)}}\,\mathrm{d}x$$

a. L'intégrale $I(\varepsilon)$ a joué un rôle capital dans la Physique du XXème siècle. Le terme en ε de son développement rend compte d'un déplacement du périhélie de Mercure de 43 secondes d'arc par siècle (un ballon de football vu à un kilomètre...) prévu par la théorie de la relativité générale. Ce phénomène, constaté depuis longtemps par l'observation, restait inexpliqué par la théorie classique de la gravitation de Newton (qui correspond à $\varepsilon = 0$). Il a constitué un test décisif en faveur de la relativité générale et « de loin la plus forte expérience émotionnelle de la vie scientifique d'Einstein, peut-être de toute sa vie », selon son biographe Abraham Pais (source : l'excellent « *petit guide de calcul différentiel* » de François Rouvière [?]).

1.3.3 Applications aux racines d'une équation polynomiale

Considérons une équation du second degré

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

avec p et q des nombres réels, où x est l'inconnue (un nombre réel). On voudrait comprendre comment les racines dépendent des paramètres p et q. Ici, on connaît les solutions ! Si $p^2 - 4q > 0$, il n'y a deux racines simples (voir la définition 1.6) :

$$x_+(p,q) = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_-(p,q) = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

On voit donc que, sur l'ouvert $\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p^2 - 4q > 0\}$, x_+ et x_- sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de p et de q. Par contre, dès que $p^2 - 4q = 0$, il n'y a plus qu'une seule solution $-p/2$ (racine double, voir la définition 1.6). Autrement dit, les surfaces $(p,q) \mapsto x_+(p,q)$ et $(p,q) \mapsto x_-(p,q)$ se rencontrent sur $\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p^2 - 4q = 0\}$.

On peut retrouver ces résultats à l'aide du théorème des fonctions implicites. Fixons $p_0 \in \mathbb{R}$ et $q_0 \in \mathbb{R}$ et considérons une racine x_0 correspondante, c'est-à-dire $f(x_0, p_0, q_0) = x_0^2 + p_0\,x_0 + q_0 = 0$. On a

$$\partial_1 f(x_0, p_0, q_0) = 2\,x_0 + p_0$$

On voit donc que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas si $x_0 = -p_0/2$ (on retrouve la racine double). En injectant cela dans $f(x_0, p_0, q_0) = 0$, on obtient

$$\left(\frac{-p_0}{2}\right)^2 + p_0\left(\frac{-p_0}{2}\right) + q_0 = 0$$

On retrouve donc la condition $p_0^2 - 4q_0 = 0$.

Si on a $p_0^2 - 4q_0 > 0$, le théorème des fonctions implicites s'applique : il existe un voisinage V de (x_0, p_0, q_0) et une fonction $x : (p,q) \mapsto x(p,q)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tels que

$$\forall (x,p,q) \in V, \quad f(x,p,q) = 0 \iff x = x(p,q)$$

On en déduit deux choses importantes :
- dans un voisinage de (x_0, p_0, q_0), la racine $x(p,q)$ reste simple ;
- la dépendance $\mathscr{C}^\infty$ de cette racine par rapport à p et à q.

On peut généraliser ces résultats à des équations polynomiales de degré arbitraire.

Définition 1.6 – Racines simples, doubles, multiples d'une fonction polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels, soit

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

une fonction polynomiale de degré n ($a_n \neq 0$) et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Si $P(x_0) = 0$, on dit que x_0 est une *racine* de P.
- Le plus petit entier $\ell \geqslant 1$ tel que $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ mais $P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ est appelé l'*ordre de la racine* x_0.
- Si $\ell = 1$, on dit que x_0 est une *racine simple* de P, sinon on dit que c'est une *racine multiple*. Si $\ell = 2$, on parle de *racine double* (*racine triple* si $\ell = 3$).

Remarque 1.15

Si x_0 est une racine d'ordre ℓ de P, alors il existe une fonction polynomiale Q telle que

$$Q(x_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad P(x) = (x - x_0)^{\ell}\, Q(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'on a *factorisé* P par $(x - x_0)^{\ell}$.

Considérons maintenant l'équation polynomiale $P(x) = 0$ que l'on écrit sous la forme

$$\underbrace{f(x, a_0, a_1, \dots, a_n)}_{= P(x)} = 0$$

où la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que P est de degré n, c'est-à-dire $a_n \neq 0$. Considérons également une racine simple x_0 de P qui vérifie donc $P(x_0) = 0$ et $P'(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire

$$f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1 f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, $\partial_1 f$ est continue donc on en déduit qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_n)$ où $\partial_1 f$ ne s'annule pas. En particulier, dans cet ouvert V, les racines de P sont nécessairement simples.

Le théorème des fonctions implicites va nous donner des informations plus précises.

Proposition 1.6

On reprend les notations de la définition 1.6 et de la discussion ci-dessus. Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ tels que

$$f(x, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0 \iff x = \phi(b_0, b_1, \dots, b_n)$$

pour tout $x \in V$ et tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in U$.

Démonstration

Puisque x_0 est une racine simple de P, on a $P(x_0) = 0$ et $P'(x_0) \neq 0$, ce qui est équivalent à

$$f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1 f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

On applique le théorème des fonctions implicites à f en $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Que veut dire ce résultat ? Cela veut dire que toutes les fonctions polynomiales Q de coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ qui sont « proches » de P (c'est-à-dire que $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in U$) ont une unique racine $y_0 = \phi(b_0, b_1, \dots, b_n)$ qui est « proche » de x_0 (c'est-à-dire $y_0 \in V$) et que ϕ varie de manière $\mathscr{C}^{\infty}$ en fonction des coefficients b_j. On peut résumer la situation :

« les racines simples dépendent de manière $\mathscr{C}^{\infty}$ des coefficients. »

Remarque 1.16

C'est un résultat très important d'un point de vue numérique ! En effet, le calcul numérique va nous amener à faire des petites erreurs (d'arrondi, de méthode, etc.) sur les coefficients de P. La proposition précédente montre que l'erreur sur la racine simple restera petite elle aussi. C'est par contre plus délicat pour des racines multiples.

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Justifier la phrase suivante : « les valeurs propres simples [a] d'une matrice carrée dépendent de manière $\mathscr{C}^\infty$ des coefficients » (on pourra identifier $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$). Que se passe-t-il en cas d'une valeur propre multiple ?

a. Voir le cours *algèbre linéaire avancé* ou le livre [?, chapitre 4].

1.3.4 Application à la thermodynamique

Considérons un système thermodynamique décrit par sa pression P, son volume V et sa température T. Dans la plupart des modèles, ces quantités sont décrites par une *équation d'état* de la forme

$$f(P,V,T) = 0$$

Citons-en quelques unes :

— *équation des gaz parfait :*

$$P\,V = n\,R\,T$$

où n est la quantité de matière et R la constante universelle des gaz parfaits ;

— *équation de van der Waals :*

$$\Big(P + \frac{an^2}{V^2}\Big)\,(V - n\,b) = n\,R\,T$$

où a est le terme de cohésion, b le covolume molaire (n et R comme ci-dessus) ;

— *équation de Dieterici :*

$$P\,(V - n\,b) = n\,R\,T\,\exp\Big(-\frac{n\,a}{V\,R\,T}\Big)$$

où les constantes sont comme ci-dessus ;

— la liste est encore longue : équation de Redlich-Kwong, équation du viriel, la grande famille des équations d'état cubiques, etc.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, il faut manipuler avec précaution ces grandeurs P, V et T. Par exemple, elles ne sont pas indépendantes (elles sont liées par l'équation d'état). Ainsi, l'introduction d'une quantité u que l'on manipulerait comme si c'était une fonction des trois variables P, V et T indépendantes conduirait à des contradictions, comme nous l'avons vu lors de l'introduction.

On peut essayer d'appliquer le théorème des fonctions implicites sur l'équation d'état pour y voir plus clair. On va supposer, puisqu'on est en présence de quantités physiques, qu'on travaille dans l'ouvert

$$O = \big\{(P,V,T) : P > 0,\ V > 0,\ T > 0\big\} = (\mathbb{R}_+^*)^3 \subset \mathbb{R}^3$$

et que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons maintenant qu'on se place en un point $(P_0, V_0, T_0) \in O$ tel que

$$f(P_0,V_0,T_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1 f(P_0,V_0,T_0) \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites assure alors, que dans un voisinage de (P_0,V_0,T_0), P peut s'écrire comme une fonction régulière (f est régulière dans la plupart des modèles) de V et de T. Pour être sûr de ce qu'on écrit, notons-la $\overline{P}$. Dériver sur ce voisinage la relation

$$f\big(\overline{P}(V,T),V,T\big) = 0$$

par rapport à V conduit à

$$\partial_1\overline{P}(V,T)\,\partial_1 f\big(\overline{P}(V,T),V,T\big)) + \partial_2 f\big(\overline{P}(V,T),V,T\big)) = 0$$

d'où, toujours dans un voisinage de (P_0,V_0,T_0),

$$\partial_1\overline{P}(V,T) = -\frac{\partial_2 f\big(\overline{P}(V,T),V,T\big)}{\partial_1 f\big(\overline{P}(V,T),V,T\big))}$$

Au lieu de $\partial_1\overline{P}(V,T)$, les physiciens parlent plutôt de « dérivée partielle de P par rapport à V à T fixé », ce qu'ils notent

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

En refaisant la même chose avec les V et T, on obtient (en supposant que $\partial_2 f(P_0,V_0,T_0)\neq 0$ et $\partial_3 f(P_0,V_0,T_0)\neq 0$), dans le même voisinage de (P_0,V_0,T_0), V peut s'écrire comme une fonction $\overline{V}$ de P et de T, T peut s'écrire comme une fonction $\overline{T}$ de P et V et de plus

$$\partial_2\overline{V}(P,T) = -\frac{\partial_3 f\big(P,\overline{V}(P,T),T\big)}{\partial_2 f\big(P,\overline{V}(P,T),T\big)} \qquad \text{et} \qquad \partial_1\overline{T}(P,V) = -\frac{\partial_1 f\big(P,V,\overline{T}(P,V)\big)}{\partial_3 f\big(P,V,\overline{T}(P,V)\big)}$$

Mais, dans ce voisinage,

$$\big(\overline{P}(V,T),V,T)\big) = \big(P,\overline{V}(P,T),T\big) = \big(P,V,\overline{T}(P,V)\big) = (P,V,T)$$

d'où

$$\partial_1\overline{P}(V,T)\,\partial_2\overline{V}(P,T)\,\partial_1\overline{T}(P,V) = \left(-\frac{\partial_2 f(P,V,T)}{\partial_1 f(P,V,T)}\right)\left(-\frac{\partial_3 f(P,V,T)}{\partial_2 f(P,V,T)}\right)\left(-\frac{\partial_1 f(P,V,T)}{\partial_3 f(P,V,T)}\right) = -1$$

On retrouve donc la formule

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Soit u un paramètre du système (par exemple l'énergie interne, l'entropie, etc.) qui peut être considéré comme une fonction de deux parmi les trois variables P, V et T. Justifier mathématiquement la formule

$$\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial f/\partial P}{\partial f/\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P = -\frac{\partial f/\partial P}{\partial f/\partial V}\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_P$$

Chapitre 2

Convexité

2.1 Fonctions convexes

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 – Fonction convexe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dite *convexe* si elle vérifie

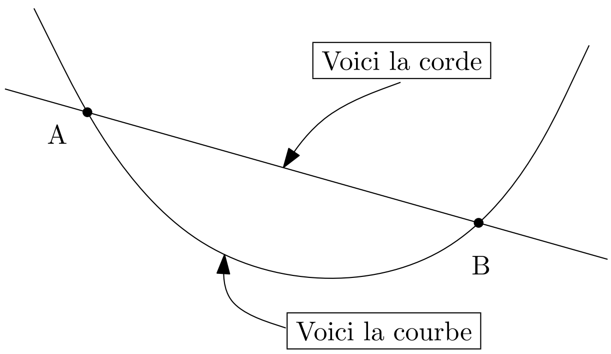
$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)\,a + t\,b) \leqslant (1-t)\,f(a) + t\,f(b)}$$

Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est *concave*.

Remarque 2.1

Cela signifie qu'entre deux points A et B (d'abscisses respectives a et b), la courbe est *en-dessous* de la corde (voir la figure 2.1, de la présente page).

Figure 2.1 – Fonction convexe, courbe et corde



Remarque 2.2

Notons que sur le dessin, la courbe est *au-dessus* de la corde en-dehors de l'intervalle entre a et b. Montrons-le.

Démonstration

Prenons, $c \in I$, tel que $c \notin [a,b]$. Supposons par exemple que $c < a < b$ (l'autre cas est identique), alors, on a

$$a \in [c,b], \text{ donc, il existe } t \in]0,1[, \ a = (1-t)\, c + t\, b$$

Pour cette valeur de t, on a

$$c = \frac{1}{1-t}\, a - \frac{t}{1-t}\, b$$

L'équation de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est :

$$y = f(a) + (x-a) \times \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Comme la fonction f est convexe, on a $f(a) \leqslant (1-t)f(c) + tf(b)$. Donc

$$f(c) \geqslant \frac{1}{1-t} f(a) - \frac{t}{1-t} f(b) = f(a) - \frac{t}{1-t} \times (f(b) - f(a)) = f(a) + (c-a) \times \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ce qui montre bien que le point C de coordonnées $(c, f(c))$ est au-dessus de la corde passant par A et B.

Définition 2.2

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, on appelle *épigraphe* de f, l'ensemble

$$\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, \ y \geqslant f(x)\}$$

De plus, on a

Partie convexe

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{C}$ est *convexe* si [a]

$$\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2, \ \forall t \in [0,1], \ \mathrm{Bar}\left((A, 1-t), (B,t)\right) \in \mathcal{C}$$

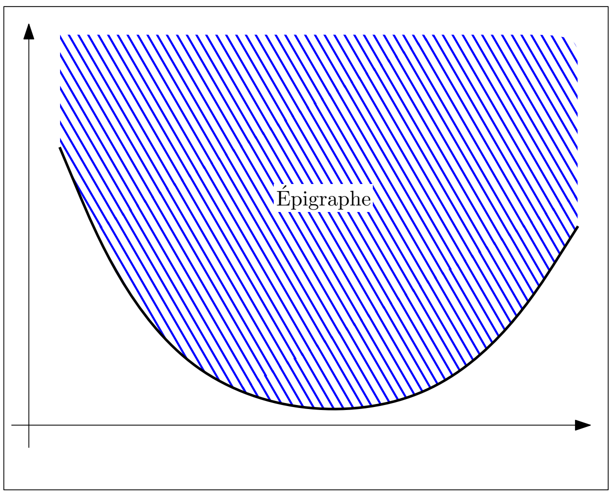
a. La notion de barycentre a été définie au chapitre 2.4 de [?], définition 2.13.

Propriété 2.1

On a alors (voir la figure 2.2, de la présente page)

$$[f \text{ convexe}] \iff [\mathcal{E}_f \text{ convexe dans } \mathbb{R}^2]$$

Figure 2.2 – Épigraphe



Démonstration de la propriété 2.1

— ($\Rightarrow$) Soit $A_1 = (x_1, y_1)$ et $A_2 = (x_2, y_2)$ deux points de $\mathcal{E}_f$ et soit $t \in [0,1]$, alors comme f est convexe

$$(1-t)\,y_1 + t\,y_2 \geqslant (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \geqslant f((1-t)\,x_1 + t\,x_2)$$

ce qui montre que $\operatorname{Bar}((A_1, 1-t), (A_2, t)) \in \mathcal{E}_f$.

— ($\Leftarrow$) Soit $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0,1]$, alors $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ sont deux points de $\mathcal{E}_f$ et donc $\operatorname{Bar}((A, 1-t), (B, t))$ aussi. Ce qui se traduit par

$$(1-t)\,f(x) + t\,f(y) \geqslant f((1-t)\,x + t\,y)$$

d'où la convexité de f.

Propriété 2.2 – Midconvexité

Soit f une fonction **continue** sur I. Alors

$$[f \text{ convexe}] \iff \left[\forall (x,y) \in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}\right]$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Il suffit de prendre $t = 1/2$.

— ($\Leftarrow$) Soit x et y dans I fixés. On montre facilement par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, 2^n]\!],\ f\left(\left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\,x + \frac{k}{2^n}\,y\right) \leqslant \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\,f(x) + \frac{k}{2^n}\,f(y)$$

En remarquant que, si $t \in [0,1]$, alors

$$\frac{\lfloor t\,2^n \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

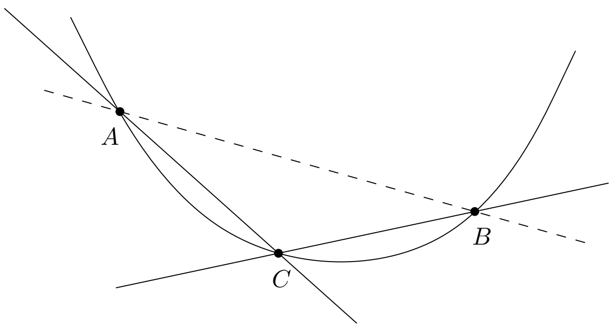
on peut, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus pour $k = \lfloor t\,2^n \rfloor$ et en utilisant la continuité de f obtenir la convexité de f.

Propriété 2.3 – Inégalité des pentes

On a (voir la figure 2.3, de la présente page) que f est convexe si, et seulement si

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ [x < z < y] \implies \left[\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\right]$$

Figure 2.3 – Fonction convexe, croissance des taux



Démonstration de la propriété 2.3

— ($\Rightarrow$) Soit $x < z < y$ trois valeurs de I quelconques, alors, il existe un $t \in]0,1[$ tel que $z = (1-t)\,x + t\,y$ et
$$f(z) \leqslant (1-t)\,f(x) + t\,f(y),\ \text{donc}\ \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{t\,(f(y)-f(x))}{t\,(y-x)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
et, de même
$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geqslant \frac{(1-t)\,(f(y)-f(x))}{(1-t)\,(y-x)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
— ($\Leftarrow$) Soit $(x,y) \in I^2$ et $t \in]0,1[$, posons alors $z = (1-t)\,x + t\,y$, on a alors
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ \text{soit en utilisant}\ z-x = t\,(y-x)$$
$$f((1-t)\,x + t\,y) \leqslant f(x) + t\,(f(y)-f(x)) = (1-t)\,f(x) + t\,f(y)$$

Remarque 2.3

La démonstration montre même que f est convexe si, et seulement si
$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ [x < z < y] \implies \left[\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\right]$$

Propriété 2.4 – Taux d'accroissement d'une fonction convexe

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, l'application
$$\tau_x : \left\{ \begin{array}{ccc} I\backslash\{x\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

Démonstration

C'est une conséquence de la propriété précédente.

Proposition 2.1 – Continuité d'une fonction convexe

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est continue sur $\mathring{I}$.

Démonstration

On s'inspire du dessin 2.4, page suivante pour démontrer le résultat.

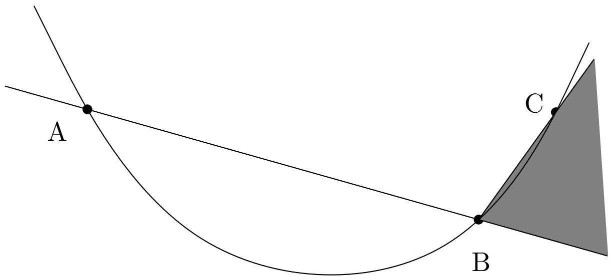
1. Soit $z \in \mathring{I}$, on peut alors trouver x et y dans I tels que $x < z < y$. On a alors pour tout $h \in [z,y]$ [a]
$$f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,(h-z) \leqslant f(h) \leqslant f(z) + \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\,(h-z)$$
2. Le lemme des gendarmes nous permet de déduire que
$$f(h) \xrightarrow[h \to z^+]{} f(z)$$
ce qui est la continuité à droite de f en z. La continuité à gauche s'obtient de la même manière.

a. Par rapport au dessin, x est l'abscisse de A, z l'abscisse de B et y l'abscisse de C.

Remarque 2.4

Pour montrer la continuité en z, nous avons besoin d'avoir $z \in \mathring{I}$, pour pouvoir prendre x et y. D'ailleurs, la

Figure 2.4 – Continuité d'une fonction convexe



continuité aux bornes de l'intervalle n'est pas garantie. La fonction

$$f \ : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \end{cases} \end{cases}$$

est convexe sur $[0,1]$, mais n'est pas continue en 0 à droite et en 1 à gauche.

Propriété 2.5 – Dérivée d'une fonction convexe

Si la fonction est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ [a]

$$[f \text{ convexe sur } I] \iff \left[f' \text{ croissante sur } \mathring{I}\right]$$

a. On rappelle que si $I = [a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a,+\infty]$, alors

$$\mathring{I} =]a,b[$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) On a vu que si $x < z < y$, alors

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

En faisant tendre z vers x^+, il vient

$$\forall y > x,\ f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

En faisant tendre z vers y^-, il vient

$$\forall y > x,\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$$

— ($\Leftarrow$) Soit x, y et z dans I, tels que $x < z < y$. D'après le théorème des accroissements finis, on a l'existence de $c \in]x,z[$ et de $d \in]z,y[$ tels que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c) \text{ et } \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(d)$$

Or $f'(c) \leqslant f'(d)$, donc on a

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Ce qui nous donne la convexité de f d'après la Remarque 2.3.

Propriété 2.6 – Dérivée seconde d'une fonction convexe

Si la fonction f est continue sur I et deux fois dérivable sur $\mathring{I}$.

$$[f \text{ convexe}] \iff [f'' \geqslant 0]$$

Démonstration

On utilise

$$[f' \text{ croissante}] \iff [f'' \geqslant 0]$$

Exemple 2.1

Fonctions convexes

exp, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^4$, $x \longmapsto x^{2n}$, $x \longmapsto x^{2n+1}$ sur $[0, \infty[$, $x \longmapsto \sin(x)$ sur $[-\pi, 0]$, $x \longmapsto \cos(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[0, 1]$, $x \longmapsto \arccos(x)$ sur $[-1, 0]$, $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $]-\infty, 0]$.

Fonctions concaves

$x \longmapsto \sqrt{x}$, ln, $x \longmapsto x^{2n+1}$ sur $]-\infty, 0]$, $x \longmapsto \sin(x)$ sur $[0, \pi]$, $x \longmapsto \cos(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1, 0]$, $x \longmapsto \arccos(x)$ sur $[0, 1]$, $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Propriété 2.7

Si f est convexe sur I, alors f possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche [a] en tout point de $\mathring{I}$.

a. Ces notions ont été définies page 42 de [?].

Démonstration

Soit $z \in \mathring{I}$, alors prenons $x < z < y$ dans I, on a alors

$$\tau_x(z) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = \tau_z(y)$$

Lorsque y décroît, $\tau_z(y)$ décroît et est minoré par $\tau_x(z)$. Elle admet donc une limite, c'est la définition de la dérivabilité à droite. On obtient de même la dérivabilité à gauche.

Propriété 2.8

Si f est convexe sur I, les fonctions f'_d et f'_g sont croissantes et vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathring{I}^2,\ [x \leqslant y] \implies [f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)]$$

Remarque 2.5

Si f est convexe sur I, alors il existe un ensemble dénombrable $\Delta \subset I$, tel que f soit dérivable sur $\mathring{I} \backslash \Delta$.

Démonstration

Si f n'est pas dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$, on a $f'_g(x_0) < f'_d(x_0)$, soit Δ l'ensemble des points de non-dérivabilité de f sur $\mathring{I}$, à chaque $x_0 \in \Delta$, on peut associer un rationnel $\psi(x_0)$ vérifiant

$$f'_g(x_0) < \psi(x_0) < f'_d(x_0)$$

On montre alors que la fonction ψ ainsi construite est une injection de Δ dans $\mathbb{Q}$, ce qui prouve que Δ est dénombrable.

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'une des propriétés suivantes est satisfaite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x) = b \in \mathbb{R}$$

2.1.2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, a-t-on

$$[f \text{ convexe}] \iff \big[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda\,x + (1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda\,f(x) + (1-\lambda)\,f(y)\big]\ ?$$

2.1.3 Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, convexe, dérivable. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2.1.4 Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Montrer que f est convexe si, et seulement si

$$\forall x \in]a,b[,\ \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists h \in \mathbb{R},\ 0 < h < \eta \text{ et } f(x) \leqslant \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

2.1.5 Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que

$$f(x) \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{(b-x)^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Montrer que

$$f'(x) \underset{b^-}{\sim} \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}}$$

Trouver un contre-exemple lorsque f n'est plus convexe.

2.1.6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $h \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$x \longmapsto \frac{1}{2\,h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convexe}$$

2.1.7 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ [x \neq y] \implies \left[\exists ! c \in]x,y[,\ \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(c)\right]$$

Montrer que f est convexe ou concave.

2.1.8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bijective. Montrer que sa réciproque est concave.

2.1.9 On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ est log-convexe si, et seulement si $\ln \circ f$ est convexe.

(a) Montrer que lorsque f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ et log-convexes alors $f+g$ est log-convexe.

(b) Montrer que c'est encore vrai en général.

2.1.10 Soit $f : I \longrightarrow]0,+\infty[$. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe si, et seulement si

$$\forall \alpha > 0,\ f^\alpha \text{ est convexe}$$

2.1.11 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(x) = \int_0^1 |f(t) - x|\ \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que Δ est convexe.

(b) Montrer que Δ est 1-lipschitzienne.

(c) Que vaut $\Delta(x)$ lorsque $|x|$ est grand ?

2.1.2 Inégalités de convexité

Proposition 2.2 – Inégalité de convexité discrète

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe, *soit* $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ *et* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ *tel que* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$. *Alors*

$$f\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f(x_k)\right)$$

L'image d'un barycentre à coefficients positifs est inférieure ou égale au barycentre des images.

- *Ce type d'inégalité s'appelle* inégalité de convexité discrète.

Démonstration

Par récurrence sur n et associativité du barycentre.

Initialisation. Pour $n = 2$, c'est la définition de la convexité de f où $t = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Hérédité. Supposons la proposition vraie au rang n et prenons $n+1$ valeurs $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ dans I et $n+1$ réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k > 0$. Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$, alors tous les λ_k sont nuls sauf λ_{n+1}, et le résultat est immédiat. Sinon, on a

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\, x_k\right) = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k}\right) \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)\right) + \frac{\lambda_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k}\, x_{n+1}$$

La convexité de f nous donne alors

$$f\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\, x_k\right)\right) \leqslant \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k}\right) f\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)\right) + \frac{\lambda_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k}\, f(x_{n+1})$$

Il reste à utiliser l'hypothèse de récurrence pour majorer le terme

$$f\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)\right) \text{ par } \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f(x_k)\right)$$

Exemple 2.2 – Inégalités de convexité discrètes

On a, par exemple

$$\forall (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in [0, \pi]^n,\ \sin\left(\frac{\theta_1 + \cdots + \theta_n}{n}\right) \geqslant \frac{\sin(\theta_1) + \cdots + \sin(\theta_n)}{n}$$

car la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$.

Exemple 2.3

Toute inégalité avec des symétries évidentes peut être considérée comme une éventuelle inégalité de convexité.

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2\,n}, \ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

que nous avons démontré directement (discriminant d'une équation du second degré), peut être démontrée comme ceci

1. La fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe, on a donc, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ (où $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$)
$$\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2\right)$$
soit
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2\right)$$
2. Il nous suffit alors de trouver les λ_k et x_k (si c'est possible), tels que
$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_k\, x_k = a_k\, b_k,\ \lambda_k = a_k^2 \text{ et } \lambda_k\, x_k^2 = b_k^2$$
Donc, si $a_k \neq 0$, on trouve
$$\lambda_k = a_k^2 \text{ et } x_k = \frac{b_k}{a_k}$$
Si $a_k = 0$, on supprime le k concerné.

Remarque 2.6

Ce raisonnement peut sembler compliqué, mais il permet de généraliser le résultat.

Proposition 2.3 – Inégalité de Hölder

Soit p et q deux nombres réels de $]1, +\infty[$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+)^{2\,n}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Démonstration

C'est la même démonstration, en utilisant la convexité de la fonction $x \longmapsto x^p$ et en prenant
$$\lambda_k\, x_k = a_k\, b_k,\ \lambda_k = b_k^q \text{ et } \lambda_k\, x_k^p = a_k^p$$
ce qui nous donne, lorsque $b_k \neq 0$
$$\lambda_k = b_k^q \text{ et } x_k = \frac{a_k\, b_k}{b_k^q}$$
on vérifie facilement la troisième relation
$$\lambda_k\, x_k^p = b_k^q \left(\frac{a_k\, b_k}{b_k^q}\right)^p = b_k^{q+p-p\,q}\, a_k^p = a_k^p$$

Proposition 2.4 – Inégalité de Jensen

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Soit f et h, définies, continues par morceaux sur I telle que $h \geqslant 0$, [a]

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{existent et } \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Soit ϕ une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(I)$ et telle que

$$\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,h(t)\,\mathrm{d}t \textit{ existe}$$

Alors

$$\boxed{\phi\left(\frac{1}{\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,h(t)\,\mathrm{d}t}$$

- *On appelle cette inégalité,* inégalité de Jensen *ou* inégalité de convexité continue.

a. Nous verrons dans le cours de probabilité, que c'est le cas quand h est une densité de probabilité.

Démonstration

Posons

$$m = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t$$

on a clairement $m \in J$. La fonction ϕ étant convexe, on peut trouver une droite d'équation $y = \alpha\,x + \beta$ telle que

$$\alpha\,m + \beta = \phi(m) \text{ et } \forall x \in I,\ \phi(x) \geqslant \alpha\,x + \beta$$

(par exemple, la droite passant par le point $(m, \phi(m))$ de pente $\phi'_d(m)$) On a alors

$$\frac{1}{\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b \left(\alpha\,f(t) + \beta\right)\,h(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\,m + \beta = \phi(m)$$

Exemple 2.4 – Inégalité de Jensen

Si on prend $h = 1$ dans l'inégalité précédente (avec les mêmes hypothèses sur f et ϕ), on obtient

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2.5

On peut démontrer des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder continues

Cauchy-Schwarz

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a = \inf I$ et b$=\sup I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues par morceaux sur I telles que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \text{ existent}$$

alors

1. la fonction $f\,g$ vérifie
$$\int_a^b |f(t)\,g(t)|\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{existent}$$
2. et on a
$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)\,g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

Hölder

Si p et q sont deux nombres réels de $]1,+\infty[$, tels que
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a=\inf I$ et $b=\sup I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues par morceaux, telles que
$$\int_a^b |f|^p(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b |g|^q(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{existent}$$
alors
1. la fonction $f\,g$ vérifie
$$\int_a^b |f(t)\,g(t)|\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{existent}$$
2. et on a
$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)\,g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration de Cauchy-Schwarz

On peut bien sûr utiliser le fait que
$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \int_I (f(x)+\lambda.g(x))^2\ \mathrm{d}x \geqslant 0$$
Et conclure que le discriminant doit être $\leqslant 0$.
On peut aussi utiliser la convexité de $x \longmapsto x^2$

1. De l'inégalité
$$|f\,g| \leqslant \frac{1}{2}\ (f^2+g^2)$$
on en déduit que
$$\int_a^b |f(t)\,g(t)|\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{existent}$$
2. Si l'intégrale de f^2 est nulle sur I, alors f est nulle sur I, sauf, peut-être sur un sous-ensemble dénombrable de I et donc l'intégrale de $f\,g$ sera aussi nulle sur I. L'inégalité est alors évidente (et sans intérêt).
3. Supposons donc que l'intégrale de f^2 sur I soit >0, et posons alors
$$h=\frac{1}{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t}.f^2$$
Son intégrale sur I vaut 1.
Puis, définissons la fonction k par
$$\forall x\in I,\ k(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| & \text{si } f(x)\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
L'inégalité de Jensen appliquée à k et $x\mapsto x^2$ donne alors
$$\left(\int_a^b k(t)\,h(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b k(t)^2\,h(t)\ \mathrm{d}t$$

Or

$$k\,h = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.|f\,g| \text{ et } k^2\,h = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.g^2$$

D'où le résultat.

Cela paraît beaucoup plus compliqué que la première méthode proposée ! Mais, cette méthode nous permet d'obtenir facilement l'inégalité de Hölder, c'est donc une méthode beaucoup plus générale.

Démonstration de Hölder

1. Remarquons d'abord que [a]

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x\,y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. On en déduit l'inégalité

$$|f\,g| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

qui permet d'obtenir la première propriété.

3. On procède ensuite comme pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec la convexité $x \longmapsto x^q$,

$$h\ :\ x \longmapsto \frac{|f|^p(x)}{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t} \text{ et } k\ :\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|g(x)|}{|f(x)|^{p-1}} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\left(\int_a^b k(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t\right)^q \leqslant \int_a^b |k(t)|^q\,h(t)\,\mathrm{d}t$$

Le résultat en découle.

---

a. En effet, comme $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et la fonction exp est convexe, on a

$$x\,y = \exp\left(\frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)\right) \leqslant \frac{1}{p}\exp\left(\ln(x^p)\right) + \frac{1}{q}\exp\left(\ln(y^q)\right)$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit f convexe de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Montrer que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}\,\big(f'(n) - f'(1)\big)$$

2.2.2 Soit

$$E = \left\{f\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est concave},\ f(0) = f(1) = 0,\ \sup_{x\in[0,1]} f(x) = 1\right\}$$

Déterminer

$$\inf_{f\in E} \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

2.2.3 Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ des nombres réels > 0, comparer les moyennes [a]

$$m_1 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ m_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},\ m_p = \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}}\ (p > 1),\ g = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

et h telle que

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

2.2.4 Soit a, b et c trois nombres réels > 0, montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

2.2.5 Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ des nombres réels > 0, montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

2.2.6 Soit $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ des nombres réels $\geqslant 0$, montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leqslant \sqrt[n]{(x_1 + y_1) \cdots (x_n + y_n)}$$

2.2.7 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée. Montrer que

$$[f \text{ convexe}] \iff \left[\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}\right]$$

---

a. m_1 s'appelle la *moyenne arithmétique*, m_2 la *moyenne quadratique*, g la *moyenne géométrique* et h la *moyenne harmonique*.

Chapitre 3

Topologie

Motivation

Les espaces utilisés par les scientifiques (et les ingénieurs) sont de plus en plus complexes. Pourtant, beaucoup de démarches et de raisonnements sont semblables. La topologie (dans ce cours, l'étude des espaces métriques, sous-ensembles d'espaces vectoriels réels ou complexes) est l'étude du vocabulaire commun, des propriétés communes à la plupart des espaces rencontrés.

Elle sera étudiée en deux temps, ce cours en deuxième année sur les notions de base, permettant de travailler en dimension finie et un deuxième cours en troisième année, abordant les espaces de dimension infinie.

3.1 Outils de la topologie

3.1.1 Distances et Normes

Définition 3.1 – Distance

Soit E un ensemble non vide, on dit qu'une application d définit *une distance sur* E, si elle vérifie

0. *positivité et bonne définition*
$$d \,:\, E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
1. *séparation*
$$\forall (x,y) \in E^2,\ [d(x,y)=0] \iff [x=y]$$
2. *symétrie*
$$\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$$
3. *inégalité triangulaire*
$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

Un ensemble E muni d'une distance d est appelé *espace métrique* et est noté (E,d).

Proposition 3.1 – Seconde version de l'inégalité triangulaire

Soit (E,d) un espace métrique. Alors

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ |d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$$

Démonstration

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \text{ et } d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z)$$

Par symétrie, ceci est équivalent à

$$d(x,y) - d(y,z) \leqslant d(x,z) \text{ et } d(y,z) - d(x,y) \leqslant d(x,z)$$

et ainsi,

$$|d(x,y) - d(y,z)| = \max\Big(d(x,y) - d(y,z), d(y,z) - d(x,y)\Big) \leqslant d(x,z)$$

d'où le résultat.

Définition 3.2 – Distance induite

Soit (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Alors $(A, d_{|A\times A})$ est un espace métrique. On dit que la distance sur A est *induite par la distance sur E*.

Définition 3.3 – Distance produit

Soit $(E_1,d_1),\ldots,(E_n,d_n)$ des espaces métriques. On définit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'application

$$d \;:\; \begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \longmapsto \max\left(d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\right) \end{cases}$$

Alors d est une distance sur E, appelée *distance produit* de $d_1,\ldots,d_n$.

Démonstration

Il suffit de l'écrire.

Définition 3.4 – Diamètre

Soit (E,d) un espace métrique et A une partie *non vide* de E. On appelle diamètre de A la quantité

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\left(\left\{d(x,y)\,,\;(x,y)\in A^2\right\}\right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Définition 3.5 – Distance à une partie

Soit $x \in E$ et A une partie *non vide* de E. On appelle *distance de x à A* le nombre réel positif

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a)\,,\; a\in A\}$$

Remarque 3.1

— La distance est bien définie, car comme A est non vide, l'ensemble $\{d(x,a)\,,\; a\in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré par 0.

— La distance de x à A n'est pas toujours atteinte, il peut ne pas exister de point $a \in A$ tel que $d(x,a) = d(x,A)$. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $d(0,\mathbb{R}_+^*) = 0$ alors que $d(0,a) > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Quand on parle de norme et d'espace vectoriel normé, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.6 – Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on dit que l'application N définit une *norme sur E*, si elle vérifie

0. *positivité et bonne définition*

$$N \;:\; E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

1. *caractère défini*
$$\forall x \in E,\ [N(x) = 0] \iff [x = 0_E]$$
2. *homogénéité*
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$$
3. *inégalité triangulaire*
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$$

Lorsque E est muni de la norme N, on le note (E, N) et on l'appelle *espace vectoriel normé*. On notera très souvent $N(x)$ sous la forme $\|x\|$.

Remarque 3.2

Il arrive parfois que le caractère défini de N manque, on parle alors de *semi-norme*. Il arrive aussi que N soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on parle alors de *pseudo-norme*.

En revanche, si N est homogène alors
$$N(0_E) = N(0.0_E) = |0|\, N(0_E) = 0$$

Définition 3.7 – Norme induite

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F, N_{|_F})$ est un espace vectoriel normé. On dit que la norme sur F *induite par la norme sur E*.

Définition 3.8 – Distance sous-jacente à une norme

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, alors l'application $d_{_N}$ définie par
$$\forall (x, y) \in E^2,\ d_{_N}(x, y) = N(x - y)$$
définit une distance sur E. Cette distance est dite *sous-jacente* à la norme. Elle est clairement invariante par translation (i.e. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d_N(x + z, y + z) = d_{_N}(x, y)$).

Remarque 3.3

Bien sûr, toute distance n'est pas sous-jacente à une norme, ainsi sur $\mathbb{K}$, la distance $d(x, y) = \min(1, |x - y|)$ ne l'est pas. Elle est cependant invariante par translation.

Démonstration

En effet, d est bornée, alors qu'une norme n'est *jamais* bornée, à cause de la propriété d'homogénéité.

Exemple 3.1 – Normes

Sur $\mathbb{K}^n$ (ou tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie rapporté à une base fixée), on rencontre souvent les normes suivantes (où $\underline{x}$ désigne le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$)
$$\begin{aligned} N_{_\infty}(\underline{x}) &= \max_k |x_k| \text{ (se note aussi } \|\underline{x}\|_\infty) \\ N_{_1}(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \text{ (se note aussi } \|\underline{x}\|_1) \\ \forall p \in]1, +\infty[,\ N_{_p}(\underline{x}) &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{(se note aussi } \|\underline{x}\|_p) \end{aligned}$$

Démonstration

Vérifions que l'application N_p est une norme.

1. Elle est bien définie.
2. Elle est clairement définie.
3. Elle vérifie l'axiome d'homogénéité.
4. Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Posons $q > 1$ tel que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
on a alors, pour $\underline{x}$ et $\underline{y}$ donnés,
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \, |x_k + y_k|^{p-1}$$
On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)\,q)} \right)^{1/q}$$
Or, $(p-1)\,q = p$ et donc
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

Exemple 3.2 – Normes matricielles

Sur $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (ou sur tout $\mathscr{L}(E, E')$, avec E et E' de dimensions finies, rapportés à des bases fixes) – qui rappelons-le est isomorphe à $\mathbb{K}^{n\,m}$ –, on peut, bien sûr, mettre les normes précédentes, nous serons amenés à travailler avec d'autres normes, par exemple (où A désigne la matrice $[a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$)
$$\begin{aligned} |\!|\!|A|\!|\!|_\infty &= \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}| \\ |\!|\!|A|\!|\!|_1 &= \max_{j\in[\![1,m]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \end{aligned}$$
Elles vérifient une propriété particulière qui sera précisée dans la définition 3.30, page 92.

Exemple 3.3 – Norme sur les espaces de fonctions bornées

Soit A un ensemble non vide et (E, N) est un espace vectoriel normé. On note
$$\mathscr{F}_b(A, E) \stackrel{\text{Not}}{=} \{f \in \mathscr{F}(A, E),\ \exists C > 0,\ \forall x \in A, N\,(f(x)) \leqslant C\}$$
l'ensemble des fonctions bornées de A dans E.
On peut alors définir la *norme infinie* sur $\mathscr{F}_b(A, E)$ par
$$\|f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} N\,(f(x))$$

Exemple 3.4 – Normes sur les espaces de fonctions continues

Sur l'ensemble des fonctions continues $\mathscr{C}^0([a, b], E)$, où (E, N) est un espace vectoriel normé. On rencontrera les normes suivantes (où f désigne une fonction continue de $[a,b] \longrightarrow E$) [a]

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty,[a,b]} &= \sup_{x\in[a,b]} N\left(f(x)\right) \\
\|f\|_{1,[a,b]} &= \int_a^b N\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
\forall p \in]1,+\infty[,\ \|f\|_{p,[a,b]} &= \sqrt[p]{\int_a^b N\left(f(x)\right)^p\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

a. La continuité des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé peut être naturellement définie par

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in [a,b],\ [|x-y| < \eta] \implies [N\left(f(x)-f(y)\right) < \varepsilon]$$

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur E.

3.1.2 Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $g \in \mathscr{C}$. On pose, si $f \in \mathscr{C}$, $N(f) = \|f\,g\|_{\infty,[0,1]}$. À quelle condition sur g l'application N est-elle une norme ?

3.1.3 Pour les normes suivantes sur $E = \mathbb{R}^2$

(a) Montrer que ce sont des normes.

(b) Tracer la sphère unité (c'est-à-dire $\{x \in E,\ \|x\| = 1\}$).

(c) Trouver les meilleures constantes α et β telles que [a]

$$\alpha\,\|(x,y)\|_2 \leqslant N(x,y) \leqslant \beta\,\|(x,y)\|_2,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{x+t\,y}{1+t^2}\right| \\
N(x,y) &= \int_0^1 |x+t\,y|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

a. « les meilleures » signifie que α doit être le plus grand possible et β le plus petit possible.

3.1.2 Parties fermées

Définition 3.9 – Boules

Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$BF(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{x \in E,\ d(a,x) \leqslant r\}$$

On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$BO(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{x \in E,\ d(a,x) < r\}$$

On appelle *sphère de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$S(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{x \in E,\ d(a,x) = r\}$$

Remarque 3.4

Ces définitions dépendent de la distance d, on devrait noter $BF_d(a,r)$, $BO_d(a,r)$, $S_d(a,r)$. Lorsqu'on utilise plusieurs distances, cette précision est importante.

Définition 3.10 – Partie bornée

Soit A une partie d'un espace métrique (E,d),

1. on dit que A est *bornée* si
$$\exists x \in E,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \subset BO(x,r)$$
2. on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble
$$\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné}$$
3. on dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow E$ est bornée si
$$f(\Omega) \text{ est borné}$$

Propriété 3.1

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). Il y a équivalence entre les 3 assertions suivantes

(1) A est bornée

(2) $\forall x \in E,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \subset BO(x,r)$

(3) $\mathrm{diam}(A) < +\infty$

Démonstration

— $((2) \Rightarrow (1))$ C'est immédiat.

— $((1) \Rightarrow (3))$ Supposons (1), il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $A \subset BO(x_0, r_0)$. Alors pour tout $(x,y) \in A^2$, on a
$$d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) \leqslant 2\,r_0$$
D'où $\mathrm{diam}(A) \leqslant 2\,r_0$.

— $((3) \Rightarrow (2))$ Supposons que $\mathrm{diam}(A) < +\infty$. Soit $x_0 \in A$ (A est supposé non vide). Alors pour tout $y \in A$, $d(x_0,y) \leqslant \mathrm{diam}(A)$, donc
$$A \subset BO\left(x_0, \mathrm{diam}(A) + 1\right)$$

Définition 3.11 – Suite convergente

Soit (E,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\lambda \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ si $d(x_n,\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui s'écrit encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ d(x_n,\lambda) < \varepsilon$$

Dans ce cas, on note $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \lambda$.
λ est appelée *limite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.12 – Fermé

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$. On dit que F est *fermé* dans E si

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}},\ \forall \lambda \in E,\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \lambda\right] \implies [\lambda \in F]$$

c'est-à-dire, toute suite d'éléments de F qui converge dans E a sa limite dans F.

Remarque 3.5

On dit aussi que F est un fermé de E (au lieu de « fermé dans E »).

Comment montre-t-on qu'une partie F d'un espace métrique (E, d) est fermée dans E ?

1. On part d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ qui *converge dans* E vers un élément $\lambda \in E$.
2. Puis, on montre que $\lambda \in F$.

C'est donc λ qui nous intéresse et non la suite !

On utilisera souvent la proposition 3.13, page 73.

Exemple 3.5 – Fermés

— Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$.
— Une boule fermée de E est un fermé de E.

Remarque importante 3.6

⚠ l'ensemble E est important pour dire si F est fermé ou non. Par exemple, $]0, 1]$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$, mais il est fermé dans $]0, +\infty[$.

Proposition 3.2 – Opérations sur les fermés

Soit (E, d) un espace métrique.

1. *$\varnothing$ et E sont toujours fermés dans E.*
2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés de E, alors leur intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermée dans E.*
3. *Si $(F_1, \ldots, F_p)$ est une famille **finie** de fermés, alors leur union $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$ est fermée dans E.*

Démonstration

1. $\varnothing$ et E sont fermés de manière évidente.
2. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés de E, soit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^{\mathbb{N}}$$

une suite qui converge vers une limite $\lambda \in E$, alors, pour tout $i \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {F_i}^{\mathbb{N}}$, et comme F_i est fermé dans E, $\lambda \in F_i$. Par conséquent, $\lambda \in \bigcap_{i\in I} F_i$, ce qui montre que

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est fermé dans } E$$

3. Soit $(F_1, \dots, F_p)$ des fermés de E et
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)^{\mathbb{N}}$$
qui converge vers une limite $\lambda \in E$. Alors, pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pose
$$\Delta_i = \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_i\}$$
Clairement,
$$\bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i = \mathbb{N}$$
donc, il existe un indice $i_0 \in [\![1,p]\!]$, tel que Δ_{i_0} soit infini. Construisons une fonction φ de la manière suivante [a]
$$\varphi(0) = \min(\Delta_{i_0}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\left(\Delta_{i_0} \cap]\!]\varphi(n), +\infty[\![\right)$$
alors la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in {F_{i_0}}^{\mathbb{N}}$ converge toujours vers λ. Donc, $\lambda \in F_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, car F_{i_0} est fermé. Finalement
$$\bigcup_{i=1}^{p} F_i \text{ est fermé dans } E$$

a. La fonction φ est bien définie car Δ_{i_0} est infini.

Exemple 3.6 – Union dénombrable de fermés de $\mathbb{R}$

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n =]-1, 1[$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Propriété 3.2 – Fermés et distance nulle

Soit (E,d) un espace métrique et F une partie de E. Alors F est fermé dans E si, et seulement si
$$\forall x \in E,\ [x \in F] \iff [d(x,F) = 0]$$

Démonstration

1. Supposons que F est fermé. Soit $x \in E$. Si $x \in F$, alors $d(x,F) = 0$. Réciproquement, si $d(x,F) = 0$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x,F) = 0$. Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x$, et comme F est fermé, $x \in F$.
2. Supposons que pour tout $x \in E$, $x \in F$ si, et seulement si $d(x,F) = 0$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite d'éléments de F qui converge vers un $x \in E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x,F) \leqslant d(x,x_n)$, donc $d(x,F) = 0$. Par conséquent, $x \in F$, donc F est un fermé de E.

Définition 3.13 – Adhérence

Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$. On appelle *adhérence de A dans E* le plus petit fermé de E contenant A (plus petit pour l'inclusion), et on le note $\overline{A}$.

Propriété 3.3

Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Pour tout fermé F de E tel que $A \subset F$, on a $\overline{A} \subset F$.

Démonstration

C'est une conséquence de la définition de « plus petit ».

Propriété 3.4 – Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Alors :

$$\overline{A} = \left\{x \in E,\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} x\right\}$$

L'ensemble $\overline{A}$ est donc l'ensemble des limites des suites d'éléments de A. Un point de l'adhérence de A est dit *adhérent* à A.

Remarque 3.7

La notion de *point adhérent* et d'*adhérence* dépend de la distance d bien sûr, mais aussi de E. On devrait dire « adhérence de A dans E pour la distance d ».

Démonstration de la caractérisation

Le plus petit fermé mérite une explication. On considère

$$\mathcal{F} = \{F \subset E,\ F \supset A \text{ et } F \text{ fermé dans } E\}$$

Alors

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

$\overline{A}$ intersection de fermés est clairement fermé dans E.

Posons

$$\Omega = \left\{x \in E,\ \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} x\right\}$$

Il faut démontrer les inclusions $\overline{A} \subset \Omega$ et $\Omega \subset \overline{A}$.

1. Pour montrer que $\overline{A} \subset \Omega$, il suffit de montrer que $A \subset \Omega$ et que Ω est fermé. Il est clair que $A \subset \Omega$ (prendre la suite constante égale à a). Pour montrer que Ω est fermé, on prend une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$, qui converge vers une limite $\lambda \in E$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(a_p^{(n)})_{p \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ω_n. Par un *procédé diagonal* (qui relie n et p), on construit une suite d'éléments de A qui converge vers λ de la manière suivante.

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N,\ d(\omega_n, \lambda) \leqslant \varepsilon$$

   Pour chaque $n \geqslant N$, il existe un $p_n \in \mathbb{N}$ tel que

   $$d\left(\omega_n, a_{p_n}^{(n)}\right) \leqslant \varepsilon$$

   Finalement, on a

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ d\left(\omega_n, a_{p_n}^{(n)}\right) \leqslant 2\varepsilon$$

   ce qui montre que

   $$a_{p_n}^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{d} \lambda$$

   et comme les $a_{p_n}^{(n)}$ sont dans A, on obtient que $\lambda \in \Omega$, ce qui termine la preuve.

2. Montrons que $\Omega \subset \overline{A}$. Soit $\omega \in \Omega$, il existe alors une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \subset \overline{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ω. Comme $\overline{A}$ est fermé dans E, on a $\omega \in \overline{A}$.

Proposition 3.3

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Pour tout $x \in E$,

$$\left[x \in \overline{A}\right] \iff \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a \in BO(x, \varepsilon)\right]$$

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Soit $x \in \overline{A}$, et $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Pour n assez

grand, on a

$$d(a_n, x) < \varepsilon \text{ donc } a_n \in A \cap BO(x, \varepsilon)$$

2. ($\Leftarrow$) C'est une discrétisation ! Prenons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/(n+1)$, alors il existe

$$a_n \in A \cap BO\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$$

la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue vérifie

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x$$

ce qui traduit $x \in \overline{A}$ (caractérisation des fermés de E).

Proposition 3.4 – Adhérence d'une boule ouverte

Soit (E, d) un espace métrique. Alors pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$\overline{BO(a, r)} \subset BF(a, r)$$

L'égalité n'est pas vérifiée en général. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors $\overline{BO(a, r)} = BF(a, r)$.

Démonstration

1. L'inclusion est évidente, car $BO(a, r) \subset BF(a, r)$ et $BF(a, r)$ est fermé dans E.
2. Il n'y a pas toujours égalité, comme le montre l'exemple suivant

$$E = \mathbb{R} \text{ et } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, y) = \min(1, |x - y|)$$

On a alors

$$BO(0, 1) =]-1, 1[,\ \overline{BO(0, 1)} = [-1, 1] \text{ et } BF(0, 1) = \mathbb{R}$$

3. Dans le cas d'un espace vectoriel normé, montrons que $BF(a, r) \subset \overline{BO(a, r)}$. Soit $x \in BF(a, r)$, alors la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right).(x - a)$$

vérifie, par homogénéité de la norme,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|x_n - a\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - a\| < r, \text{ donc } x_n \in BO(a, r)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|x_n - x\| = \frac{1}{n} \|x - a\|, \text{ donc } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} x$$

Définition 3.14 – Partie dense

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 3.7 – Parties denses

Dans $\mathbb{R}$

— Dans $\mathbb{R}$, on a

$$\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

— On a aussi des cas classiques

$$\overline{\{\sin(\sqrt{n}),\ n \in \mathbb{N}\}} = [-1, +1]$$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la (pseudo)-norme infinie ($\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$), on a

$$\overline{\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\}} = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$$

Démonstration des exemples 3.7, page ci-contre dans $\mathbb{R}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\underbrace{\frac{\lfloor 2^n\, x\rfloor}{2^n}}_{\in\mathbb{Q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ et } \underbrace{\frac{\lfloor 2^n\, x\,\sqrt{2}\rfloor}{2^n\,\sqrt{2}}}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$
2. On a
$$\overline{\{\sin(\sqrt{n}),\ n \in \mathbb{N}\}} = [-1,+1]$$
En effet, prenons $\alpha \in]-1,1[$ et $\theta = \arcsin(\alpha)$, à chaque tour $(2\,k\,\pi)$, on prend n_k tel que
$$\sqrt{n_k} \leqslant \theta + 2\,k\,\pi < \sqrt{n_k+1}$$
Il est alors facile de montrer que
$$\sin\left(\sqrt{n_k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$$
Donc
$$]-1,1[\subset \overline{\{\sin(\sqrt{n}),\ n \in \mathbb{N}\}}$$
On en déduit facilement que
$$\overline{\{\sin(\sqrt{n}),\ n \in \mathbb{N}\}} = [-1,1]$$

Démonstration de l'exemple 3.7, page précédente dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Posons
$$A = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\} \text{ et } B = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$$
Il nous faut montrer que $\overline{A} = B$. Nous procédons en deux étapes

1. Pour montrer que $\overline{A} \subset B$, il suffit de montrer que $A \subset B$ (ce qui est évident) et que B est fermé dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Prenons donc une suite $\left(b^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ qui converge vers une suite $\beta = (\beta_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $b^{(n)} = \left(b_p^{(n)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. On a alors
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \overset{\text{Convergence de la suite}}{\Longrightarrow} \left\|b^{(n)} - \beta\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \tag{3.1}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant P \overset{\text{Les suites sont dans } B}{\Longrightarrow} \left|b_p^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon. \tag{3.2}$$
Prenons un $\varepsilon > 0$ et un N associé de manière à vérifier l'équation (3.1), de la présente page. Ce N étant fixé, on peut lui associer un P de manière à vérifier l'équation (3.2), de la présente page. On a alors,
$$\forall p \geqslant P,\ |\beta_p| \leqslant \underbrace{\left|\beta_p - b_p^{(N)}\right|}_{\leqslant\left\|\beta - b^{(N)}\right\|_\infty} + \left|b_p^{(N)}\right| \leqslant 2\,\varepsilon$$
2. Montrons que $B \subset \overline{A}$. Soit $b = (b_p)_{p\in\mathbb{N}} \in B$. On pose, $a^{(n)} = (a_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{(n)} = \left(a_p^{(n)}\right)_{p\in\mathbb{N}},\ \text{où } \forall p \in \mathbb{N},\ a_p^{(n)} = \begin{cases} b_p & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
Il est clair que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{(n)} \in A \text{ et que } \left\|a^{(n)} - b\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Propriété 3.5 – Adhérence

Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$. On a
1. $A \subset \overline{A}$
2. $\left[A = \overline{A}\right] \iff [A \text{ est fermé dans } E]$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Démonstration

1. Par définition, $A \subset \overline{A}$.
2. Si A est fermé dans E, alors c'est clairement le plus petit fermé de E contenant A. Donc $A = \overline{A}$. Réciproquement, si $A = \overline{A}$, comme $\overline{A}$ est fermé dans E, A est fermé dans E.
3. On a immédiatement $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ et $\overline{A}$ est fermé dans E.

Propriété 3.6

Soit (E, d) un espace métrique et soit A et B deux parties de E.
1. $[A \subset B] \implies [\overline{A} \subset \overline{B}]$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, l'inclusion réciproque est fausse

Démonstration

1. $A \subset B \subset \overline{B}$ et $\overline{B}$ est fermé dans E, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. On a les inclusions suivantes
$$A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B, \text{ donc } \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$
Mais on a aussi
$$A \subset \overline{A} \text{ et } B \subset \overline{B} \text{ donc } A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$
qui est fermé dans E, donc
$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$
3. On a de même les inclusions
$$A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B \text{ donc } \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$
L'inclusion réciproque n'est pas toujours valide, comme le montre l'exemple suivant
$$A = \mathbb{Q} \text{ et } B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{R}$$

3.1.3 Parties ouvertes

Définition 3.15 – Ouvert

Soit $O \subset (E, d)$, on dit que O est ouvert dans E si
$$E \backslash O \text{ est fermé dans } E$$

Remarque importante 3.8

Soit $A \subset E$. Si A n'est pas fermé dans E, il est **faux de dire que A est ouvert dans E**. Par exemple, $]0, 1]$ n'est ni fermé ni ouvert dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5 – Opérations sur les ouverts

Soit (E, d) un espace métrique.
1. *$\varnothing$ et E sont toujours ouverts dans (E, d).*
2. *Si $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E, alors leur union $\bigcup_{i \in I} O_i$ est ouverte.*
3. *Si $(O_1, \ldots, O_p)$ est une famille **finie** d'ouverts de E, alors leur intersection $\bigcap_{i=1}^{p} O_i$ est ouverte.*

Démonstration

Il suffit de passer aux complémentaires dans la proposition sur les fermés (proposition 3.2, page 57).

Exemple 3.8 – Ouverts

— Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$ pour la distance induite par la norme $|\ |$ (la valeur absolue).
— Une boule ouverte dans E est un ensemble ouvert dans E.
— $\bigcup_{0<a<b}[a,b] = \mathbb{R}_+^*$.
— pour la distance $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$, tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}$.

Démonstration du caractère ouvert d'une boule ouverte

Soit $x \in E$ et $r > 0$, alors, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (BO(x,r)^c)^{\mathbb{N}}$, qui converge dans E vers une limite α. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, x_n) \geqslant r$$

À la limite

$$d(x,\alpha) \geqslant r, \text{ car la distance induite par la norme est continue. Donc } \alpha \in BO(x,r)^c$$

Proposition 3.6 – Caractérisation des ouverts

Soit (E,d) un espace métrique, soit $O \subset E$, alors

$$[O \text{ ouvert dans } E] \iff [\forall x \in O,\ \exists \varepsilon > 0,\ BO(x,\varepsilon) \subset O]$$

(Voir la figure 3.1, page suivante).

Démonstration

($\Leftarrow$) On a vu que les boules ouvertes étaient ouvertes, à chaque $x \in O$, on peut associer un $\varepsilon_x > 0$, tel que

$$BO(x,\varepsilon_x) \subset O \text{ alors } O = \bigcup_{x\in O} BO(x,\varepsilon_x)$$

Une réunion d'ouverts étant ouverts, on obtient que O est ouvert.

($\Rightarrow$) On procède par contraposée. Supposons qu'il existe un $x \in O$, tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ BO(x,\varepsilon) \not\subset O$$

En prenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = 1/n$, on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (O^c)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in BO\left(x, \frac{1}{n}\right) \backslash O$$

La suite converge donc vers $x \in O$, ce qui implique que O^c n'est pas fermé dasn E. Donc, par définition, O n'est pas ouvert dans E.

Comment montre-t-on qu'une partie O d'un espace métrique (E,d) est ouverte dans E ?

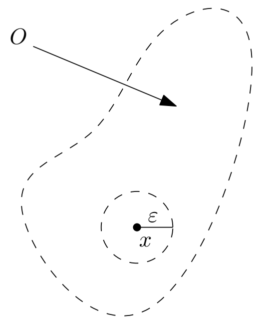
1. On part d'un élément $x \in O$.
2. Puis, on trouve un réel $\varepsilon > 0$ (qui dépend de x) tel que $BO(x,\varepsilon) \subset O$.

On utilisera souvent la proposition 3.13, page 73.

Remarque 3.9

Le ε dépend du point x.

Figure 3.1 – Ouvert



Remarque 3.10

C'est la propriété fondamentale des ouverts qui nous permet de travailler directement dessus, sans passer aux complémentaires. De plus, elle a la vertu de se dessiner.

Remarque 3.11

1. L'exercice 3.2.7, page 69 montre que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.
2. En conséquence, dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$, les ouverts sont dans la tribu borélienne [a] (et donc, par complémentarité, les fermés aussi).

a. Voir le cours d'Intégration.

Définition 3.16 – Intérieur

Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$. On appelle *intérieur de* A le plus grand ouvert de E contenu dans A (plus grand, pour l'inclusion). On le note $\mathring{A}$ ou $\text{Int}(A)$. Un point de l'intérieur de A est dit *intérieur* à A.

Proposition 3.7 – Caractérisation de l'intérieur d'un ensemble

oit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Alors :

$$\mathring{A} = \{x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ BO(x,\varepsilon) \subset A\}$$

Démonstration

1. C'est le même principe que pour l'adhérence. On pose

$$\mathcal{F} = \{O \text{ ouvert dans } E,\ O \subset A\}$$

On a alors
— $\mathcal{F} \neq \varnothing$, car $\varnothing \in \mathcal{F}$.
— $\mathcal{F}$ est stable par réunion quelconque. Si $(O_i)_{i\in I}$ sont des ouverts de $\mathcal{F}$, alors

$$\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{F}$$

Donc

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{F}} O$$

2. Posons $\Omega = \{x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ BO(x,\varepsilon) \subset A\}$ et montrons par double inclusion que $\Omega = \mathring{A}$.
   — Montrons que Ω est ouvert. Soit $y \in \Omega$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $BO(y,\varepsilon) \subset A$. Pour tout $x \in BO(y,\varepsilon)$, on a $BO\left(x, \varepsilon - d(x,y)\right) \subset A$, donc $x \in \Omega$. Par conséquent, $BO(y,\varepsilon) \subset \Omega$, ce qui prouve que Ω est ouvert. Ainsi Ω est un ouvert inclus dans A, donc $\Omega \subset \mathring{A}$.
   — Soit $x \in \mathring{A}$. Il existe un ouvert O inclus dans A tel que $x \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $BO(x,\varepsilon) \subset O \subset A$. Donc $x \in \Omega$.

Exemple 3.9 – Intérieurs

On a toujours

$$\mathrm{Int}(BF(a,r)) \supset BO(a,r)$$

L'égalité n'est pas toujours vérifiée, cependant *dans le cas des espaces vectoriels normés, il y a toujours égalité !*

Démonstration

1. *Cas métrique.* $BO(a,r)$ est un ouvert inclus dans $BF(a,r)$, donc, par définition de $\mathring{A}$, on a

$$BO(a,r) \subset \mathrm{Int}(BF(a,r))$$

2. *Cas normé.* Lorsque nous sommes dans un espace vectoriel normé, la réciproque est vraie. En effet, soit $x \in \mathrm{Int}(BF(a,r))$, alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$BO(x,\varepsilon) \subset BF(a,r), \text{ car } \mathrm{Int}(BF(a,r)) \text{ est un ouvert de } E$$

En particulier,

$$\|x - a\| \leqslant r - \varepsilon < r, \text{ donc } x \in BO(a,r)$$

3. *Contre-exemple dans le cas métrique.* Prenons $E = \mathbb{R}$ muni de la distance d telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = \min\left(1, |x-y|\right)$$

Alors

$$BO(0,1) =]-1,1[,\ BF(0,1) = \mathbb{R} \text{ donc } \mathrm{Int}(BF(0,1)) = \mathbb{R}$$

Propriété 3.7 – Intérieurs

1. $\mathring{A} \subset A$
2. $\left[A = \mathring{A}\right] \iff [A \text{ ouvert de } E]$
3. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

Proposition 3.8

1. $\overline{(E \backslash A)} = E \backslash \left(\mathring{A}\right)$
2. $[A \subset B] \implies \left[\mathring{A} \subset \mathring{B}\right]$
3. *Int*$(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
4. *Int*$(A \cup B) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$*, l'inclusion réciproque est en général fausse.*

Démonstration

Seule la première propriété est à démontrer. Les autres s'obtiennent par passage au complémentaire dans la propriété 3.6, page 62. On a que $E \backslash \mathring{A}$ est un fermé de E (complémentaire de l'ouvert $\mathring{A}$ dans E) qui contient $E \backslash A$. Donc, par définition de l'adhérence de $E \backslash A$, on a

$$\overline{E \backslash A} \subset E \backslash \left(\mathring{A}\right)$$

Exemple 3.10 – Intérieurs

Dans $\mathbb{R}$, on a
$$\mathring{\mathbb{Q}} = \mathrm{Int}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \varnothing$$

Remarque 3.12

Soit $A \subset (E, d)$. On a
$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$$

Définition 3.17 – Frontière

Soit $A \subset (E, d)$. On appelle *frontière* de A dans E l'ensemble
$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A}\backslash\mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A}$$

Remarque 3.13

1. $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé de E.
2. La frontière de A est aussi celle de $E\backslash A$.

3.1.4 Points isolés, voisinages,...

Définition 3.18

Si A est une partie quelconque de (E, d), on peut distinguer parmi les éléments de $\overline{A}$ deux types de points

Points isolés de A

Ils sont tels que
$$[a \text{ isolé de } A] \overset{\text{Def}}{\iff} \left[\exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \cap BO(a, r) = \{a\}\right]$$
Ils sont donc dans A. On note $\mathrm{Isol}(A)$ l'ensemble des points isolés de A.

Points d'accumulation de A

Ils sont tels que
$$[a \text{ point d'accumulation de } A] \overset{\text{Def}}{\iff} \left[\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \cap BO(a, r) \text{ est infini}\right]$$
Il ne sont pas nécessairement dans A. On note $\mathrm{Accu}(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de A.

Démonstration du fait qu'il n'y a que ces deux cas

1. On rappelle que $\left[a \in \overline{A}\right] \iff [\forall r > 0,\ A \cap BO(a, r) \neq \varnothing]$. Voir la proposition 3.3, page 59.
2. Soit $a \in \overline{A}$, qui ne soit pas point d'accumulation. Alors, il existe un $r > 0$, tel que
$$A \cap BO(a, r) \text{ est fini.}$$
Posons
$$A \cap BO(a, r) = \{x_1, \ldots, x_p\} \text{ et } \delta = \min\left(\{d(a, x_k),\ k \in [\![1, n]\!],\ x_k \neq a\}\right)$$
Alors
$$[\varnothing \neq A \cap BO(a, \delta)] \implies [A \cap BO(a, \delta) = \{a\}]$$

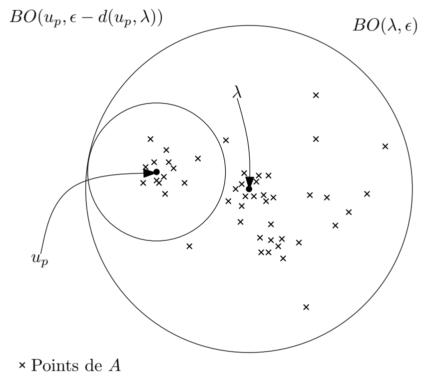
Proposition 3.9

Soir (E,d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. Alors $\mathrm{Accu}(A)$ est fermé.

Démonstration

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Accu}(A)$ qui converge vers λ. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\mathrm{Accu}(A) \cap BO(\lambda, \varepsilon)$ contient un élément u_p de la suite u.
Comme $u_p \in \mathrm{Accu}(A)$, l'ensemble $BO\left(u_p, \varepsilon - d(u_p, \lambda)\right) \cap A$ est infini. Donc l'ensemble $A \cap BO(\lambda, \varepsilon)$ est aussi infini. C'est la définition de $\lambda \in \mathrm{Accu}(A)$.
Cela peut se traduire par le dessin 3.2, de la présente page.

Figure 3.2 – Points d'accumulation



Le raisonnement en termes de suites est souvent lourd. On préférera le raisonnement en termes de boules ouvertes, comme dans la proposition précédente.

Démonstration de la proposition 3.9, de la présente page (avec les boules)

On a, par définition
$$\mathrm{Accu}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Isol}(A) = \overline{A} \cap (\mathrm{Isol}(A))^c$$
Mais, pour tout $a \in \mathrm{Isol}(A)$, il existe par définition un $r_a > 0$, tel que
$$A \cap BO(a, r_a) = \{a\}, \text{ donc } \mathrm{Accu}(A) = \overline{A} \cap \left(\bigcup_{a \in \mathrm{Isol}(A)} BO(a, r_a)\right)^c$$
qui est clairement fermé de E, comme intersection de fermés de E.

Propriété 3.8 – Densité avec les boules

Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$, on a
$$\left[\overline{A} = E\right] \iff \left[\forall x \in E,\ \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \cap BO(x,r) \neq \varnothing\right]$$

Définition 3.19 – Voisinage

Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $V \subset E$ un ensemble. On dit que V est un *voisinage de a dans E* si
$$\exists \varepsilon > 0,\ BO(a, \varepsilon) \subset V$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans E.
On dit qu'une propriété est vraie *au voisinage de a* s'il existe un voisinage V de a sur lequel cette propriété est vraie.

Propriété 3.9

1. $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersections finies. Autrement dit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (V_1, V_2, \ldots, V_n) \in \mathcal{V}(x)^n,\ V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$$
2. Il est de plus stable par croissance. Autrement dit :
$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ [W \supset V] \implies [W \in \mathcal{V}(x)]$$

Remarque 3.14

Soit $A \subset E$, une partie d'un espace métrique E . Alors
$$[A \text{ ouvert de } E] \iff [\forall x \in A,\ A \in \mathcal{V}(x)]$$

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints de (E, d), alors
$$\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \varnothing$$

3.2.2 Quel est l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble
$$\left\{ \frac{p^2 + q^2}{2p^3 + q},\ (p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \right\} \ ?$$
dans $(\mathbb{R}, d)$ où d est la métrique induite par la valeur absolue.

3.2.3 Soit O un ouvert de (E, d) et A une partie quelconque de E. Montrer que
$$\overline{O \cap A} = \overline{O \cap \overline{A}}$$
Donner un contre-exemple lorsque O n'est plus ouverte dns E.

3.2.4 Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E, $x_0 \in E$, $B \subset E$. Montrer que $x_0 + A$ et $B + A$ sont ouverts. Que peut-on dire de $A + B$ lorsque A et B sont fermés ? [a]

3.2.5 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). *On pourra choisir la norme avec laquelle raisonner.*

(a) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de
$$\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}(M) = p\},\ \text{ où } 0 \leqslant p \leqslant n$$
dans $M_n(\mathbb{K})$ pour la norme $|||.|||_\infty$.

(b) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de
$$\{M \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}(M) = p\},\ \text{ où } 0 \leqslant p \leqslant \min(n, m)$$
dans $M_n(\mathbb{K})$ pour la norme $|||.|||_\infty$.

(c) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de
$$\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Ker}(M) \oplus \mathrm{Im}(M) = E\}$$
dans $M_n(\mathbb{K})$ pour la norme $|||.|||_\infty$.

3.2.6 Montrer que tout fermé d'un espace métrique (E, d) est intersection dénombrable d'ouverts.

3.2.7 Montrer que les ouverts de $(\mathbb{R}, |\ |)$ sont les réunions dénombrables d'intervalles ouverts disjoints.

3.2.8 Quels sont les points isolés de
$$\left\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A^2 = I_n\right\} \ ?$$

a. Bien sûr
$$x_0 + A = \{x_0 + a,\ a \in A\}$$
et
$$A + B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

3.1.5 Suites et fonctions

Définition 3.20 – Suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$, soit φ une fonction *strictement croissante* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On dit que φ est une *extraction* et que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est *extraite* de (u_n).

Exemple 3.11 – Suite extraite

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, les suites suivantes sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, où p_n est le n-ième nombre premier.
2. Si $u_n = \sin\left(\sqrt{n}\right)$, et si $\alpha \in [-1, +1]$, alors, en posant $\theta = \arcsin(\alpha)$, on a (voir l'exemple 3.7, page 60).
$$\sin\left(\sqrt{\left\lfloor(\theta + 2\,n\,\pi)^2\right\rfloor}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Proposition 3.10 – Double extraction

Soit (E, d) un espace métrique, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, φ et ψ deux extractions, alors
$$\begin{aligned}\left[(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est extraite de } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}\right] &\iff [\psi(\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathbb{N})]\\ &\iff [\exists\theta,\ \text{une extraction},\ \psi = \varphi\circ\theta]\end{aligned}$$

Démonstration

1. (*Première équivalence*) Évident.
2. (*Deuxième équivalence*)
   — si $\psi = \varphi\circ\theta$, on obtient
   $$\psi(\mathbb{N}) = \varphi\circ\theta(\mathbb{N}) = \varphi\left(\theta(\mathbb{N})\right) \subset \varphi(\mathbb{N})$$
   car $\theta(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$;
   — si $\psi(\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathbb{N})$, on peut alors restreindre l'ensemble d'arrivée de φ pour la rendre bijective (on sait déjà qu'elle est injective, car strictement croissante) et, d'après l'hypothèse, on peut procéder à la même restriction au but pour ψ. On obtient alors
   $$\theta = \left(\varphi\Big|^{\varphi(\mathbb{N})}\right)^{-1}\circ\psi\Big|^{\varphi(\mathbb{N})}$$

Définition 3.21 – Valeur d'adhérence d'une suite

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite, on dit que $\alpha \in E$ est *une valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α. On note
$$\mathrm{Adh}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \overset{\text{Not}}{=} \{\ell \in E,\ \ell \text{ est une valeur d'adhérence de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Proposition 3.11

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, *et* $a \in E$, *alors*

$$[a \in \mathrm{Adh}(u)] \iff [\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in BO(a,\varepsilon)\}\ \textit{ est infini}]$$

Démonstration

1. ($\Rightarrow$) Comme $a \in \mathrm{Adh}(u)$, il existe une extraction φ telle que
$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} a$$
donc, pour un $\varepsilon > 0$, il existe un N_ε tel que
$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ d(u_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon$$
donc
$$\varphi\left([N_\varepsilon, +\infty[\right) \subset \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in BO(a,\varepsilon)\}$$
2. ($\Leftarrow$) C'est de la discrétisation. On construit l'extraction φ de la manière suivante (c'est un exemple, il y a beaucoup d'autres possibilités)
$$\varphi(0) = \min\left(\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in BO(a,1)\}\right) \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \varphi(p+1) = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N},\ n > \varphi(p),\ u_n \in BO\left(a, \frac{1}{p+2}\right)\right\}\right)$$
les ensembles dont on prend les minimums étant non vides (et même de cardinaux infinis). On a alors
$$\forall p \in \mathbb{N},\ d\left(a, u_{\varphi(p)}\right) < \frac{1}{p+1} \text{ et donc } u_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{d} a$$

Remarque importante 3.15

⚠⚠ Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, où (E,d) est un espace métrique, on peut toujours considérer *le support de la suite*
$$\Delta(x) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
Il faut bien différencier $\lambda \in \mathrm{Adh}(x)$ (λ valeur d'adhérence de la suite) qui signifie
$$\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in BO(\lambda,\varepsilon)\} \text{ est infini}$$
de $\lambda \in \mathrm{Accu}\left(\Delta(x)\right)$ (point d'accumulation de $\Delta(x)$) qui signifie
$$\forall \varepsilon > 0,\ \{x_n \in BO(\lambda,\varepsilon)\} \text{ est infini}$$
Dans le premier cas, on considère les *indices des* x_n. Dans le deuxième cas, on considère les *valeurs des* x_n. On a clairement
$$\mathrm{Accu}\left(\Delta(x)\right) \subset \mathrm{Adh}(x)$$
Mais, par exemple, une suite constante définie par
$$\exists a \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = a$$
vérifie
$$\mathrm{Adh}(x) = \{a\} \text{ alors que } \mathrm{Accu}\left(\Delta(x)\right) = \varnothing$$

Proposition 3.12

$\forall u \in E^{\mathbb{N}}$, $\mathrm{Adh}(u)$ *est fermé dans* E.

Démonstration

Soit $a \in \overline{\mathrm{Adh}(u)}$, et soit $\varepsilon > 0$, alors, il existe un $\beta \in \mathrm{Adh}(u) \cap BO(a,\varepsilon)$, mais en ce cas

$$\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in BO\left(\beta, \varepsilon - d(a,\beta)\right)\} \text{ est infini}$$

donc

$$\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in BO(a,\varepsilon)\} \text{ est infini}$$

et par conséquent $u \in \overline{\mathrm{Adh}(u)}$.

Exemple 3.12 – Valeurs d'adhérence

Intervalle

- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors $\mathrm{Adh}(u)$ est un intervalle.

- On a

$$\mathrm{Adh}\left(\{\sin(\ln n),\ n \in \mathbb{N}^*\}\right) = [-1,1]$$

Démonstration du premier résultat

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Adh}(u)^2$, $\alpha < \beta$ et soit $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Montrons que $\gamma \in \mathrm{Adh}(u)$.

On sait qu'il existe deux extractions φ et ψ telles que

$$u_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \alpha \text{ et } u_{\psi(q)} \xrightarrow[q\to+\infty]{} \beta$$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer que $\varepsilon < \min(\gamma-\alpha, \beta-\gamma)$, alors il existe un $(N,P,Q) \in \mathbb{N}^3$, tel que

$\forall n \geqslant N,\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall p \geqslant P,\ \varphi(p) \geqslant N$ et $|u_{\varphi(p)} - \alpha| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall q \geqslant Q,\ \psi(q) \geqslant N$ et $|u_{\psi(q)} - \beta| \leqslant \varepsilon$

On commence par construire deux nouvelles extractions φ_1 et ψ_1 qui vérifient [a]

$$\varphi_1(\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathbb{N}),\ \psi_1(\mathbb{N}) \subset \psi(\mathbb{N}) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ N \leqslant \varphi_1(k) < \psi_1(k) < \varphi_1(k+1)$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère alors

$$n_k = \min\left(\{n \in [\![\varphi_1(k), \psi_1(k)]\!],\ u_n \geqslant \gamma\}\right)$$

Il est facile de vérifier alors que

$$u_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \gamma$$

a. On les construit comme des minimums...

Démonstration du deuxième résultat

On procède comme pour l'exemple 3.11, page 69. Et on obtient pour $x \in [0,1]$, en posant $\alpha = \arcsin(x)$

$$\sin\left(\ln\left(\left\lfloor e^{\alpha+2n\pi}\right\rfloor\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Définition 3.22 – Limite d'une fonction

Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$. Soit $a \in \overline{A}$ et $\ell' \in E'$. On dit que $f(x)$ *tend vers ℓ' quand x tend vers a*, et on note $f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{d} a]{d'} \ell'$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A,\ [d(x,a) \leqslant \eta] \implies \left[d'\left(f(x),\ell'\right) \leqslant \varepsilon\right]$$

On dit alors que ℓ' est la limite de f en a.

Théorème 3.1 – Caractérisation séquentielle des limites

Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$. Soit $a \in \overline{A}$ et $\ell' \in E'$. Alors

$$\left[f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{d} a]{d'} \ell' \right] \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} a \right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} \ell' \right] \right]$$

Démonstration

C'est encore une propriété de discrétisation

1. ($\Rightarrow$) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a et soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in A, \ [d(x,a) \leqslant \eta] \implies [d'(f(x), \ell') \leqslant \varepsilon]$$
Mais, comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, on sait aussi qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \ d(x_n, a) \leqslant \eta$$
On a donc montré que
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ d'(f(x_n), \ell') \leqslant \varepsilon$$
c'est la définition de
$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} \ell'$$
2. ($\Leftarrow$) On va procéder par contraposition [a] et montrer que
$$\left[f(x) \underset{x \xrightarrow{d} a}{\overset{d'}{\not\longrightarrow}} \ell' \right] \implies \left[\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} a \text{ et } f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{d'}{\not\longrightarrow}} \ell' \right]$$
On sait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall \eta > 0, \ \exists x \in A, \ d(x,a) \leqslant \eta \text{ et } d'(f(x), \ell') > \varepsilon$$
En prenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta = 1/(n+1)$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que
$$d(x_n, a) \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ et } d'(f(x_n), \ell') > \varepsilon$$

a. Il faut toujours aller du continu vers le discret !

Définition 3.23

On a, en généralisant les définitions usuelles, les définitions des fonctions.

Fonction continue en un point

$f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est dite *continue* en un point $a \in E$, si $f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{d} a]{d'} f(a)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in E, \ [d(x,a) \leqslant \eta] \implies [d'(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon]$$

Fonction continue sur E

$f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est dite *continue sur* E, si elle est continue en tout point $a \in E$, plus précisément

$$\forall a \in E, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in E, \ [d(x,a) \leqslant \eta] \implies [d'(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon]$$

Fonction uniformément continue sur E

$f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est dite *uniformément continue sur* E, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall (x,y) \in E^2, \ [d(x,y) \leqslant \eta] \implies [d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon]$$

Fonction lipschitzienne sur E

$f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ est dite *lipschitzienne sur E* si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in E^2,\ d'\left(f(x), f(y)\right) \leqslant k\, d(x, y)$$

Lorsque $k \in [0, 1[$, on dit que f est *contractante*.

Propriété 3.10

Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ on a alors les implications suivantes

$$[f \text{ lipschitzienne}] \implies [f \text{ uniformément continue}] \implies [f \text{ continue}]$$

Démonstration

Pour la première implication, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/k$. La deuxième est laissée en exercice. C'est de la manipulation logique de quantificateurs.

Remarque 3.16

On peut discrétiser ces définitions, on obtient les définitions équivalentes

f continue en a

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \left[d(x_n, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right] \implies \left[d'\left(f(x_n), f(a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

f continue sur E

$$\forall a \in E,\ \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \left[d(x_n, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right] \implies \left[d'\left(f(x_n), f(a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

f uniformément continue sur E

$$\forall \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \left(A^{\mathbb{N}}\right)^2,\ \left[d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right] \implies \left[d'\left(f(x_n), f(y_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

Démonstration

Laissé en exercice. Cet exercice est *fortement* conseillé pour s'entraîner à la discrétisation.

Proposition 3.13 – Caractérisation topologique de la continuité

Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$

Continuité en un point

$$[f \text{ est continue en } a \in E] \iff \left[\forall V \in \mathcal{V}\left(f(a)\right),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)\right]$$

Continuité sur E

$$[f \text{ continue sur } E] \iff \left[\forall O' \text{ ouvert de } E',\ f^{-1}(O') \text{ est un ouvert de } E\right]$$

ou, de manière équivalente

$$[f \text{ continue sur } E] \iff \left[\forall F' \text{ fermé de } E',\ f^{-1}(F') \text{ est un fermé de } E\right]$$

Démonstration pour la continuité en un point

1. ($\Rightarrow$) Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$, il existe alors un $\varepsilon > 0$, tel que
$$BO\,(f(a),\varepsilon) \subset V$$
mais en ce cas
$$BO(a,\eta) \subset f^{-1}(V)$$
où le $\eta > 0$ est associé au ε dans l'écriture de la continuité. Ceci nous permet de dire que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.
2. ($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, alors $V = BO\,(f(a),\varepsilon) \in \mathcal{V}(f(a))$, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$, il existe donc un $\eta > 0$, tel que $BO\,(a,\eta) \subset f^{-1}(V)$, ce qui exprime la continuité de f en a.

Démonstration pour la continuité sur E

1. ($\Rightarrow$) Soit O' un ouvert de E', et $a \in f^{-1}(O')$ alors $f(a) \in O'$, il existe donc un $\varepsilon > 0$, tel que $BO\,(f(a),\varepsilon) \subset O'$, soit $\eta > 0$ associé à cet ε dans la définition de la continuité de f en a, alors $BO(a,\eta) \subset f^{-1}(O')$. Ce qui montre que $f^{-1}(O')$ est voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert.
2. ($\Leftarrow$) Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. On prend $O' = BO\,(f(a),\varepsilon)$, alors $a \in f^{-1}(O')$ qui est ouvert, il existe donc un $\eta > 0$ tel que $BO(a,\eta) \subset f^{-1}(O')$.

Pour obtenir le résultat sur les fermés, il suffit de passer aux complémentaires et d'utiliser le fait que
$$\forall B \subset E',\ f^{-1}\left(E'\backslash B\right) = E\backslash f^{-1}(B)$$

La propriété des fonctions continues sur les ouverts et les fermés obtenue dans la proposition 3.13, page précédente est souvent très utile pour montrer qu'une partie de E est ouverte ou fermée dans E. Voir l'exemple 3.13, de la présente page.

Exemple 3.13 – Utilisation de la caractérisation des fonctions continues

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, en effet, on a
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det{}^{-1}\left(\mathbb{K}^*\right)$$
et $\mathbb{K}^*$ est ouvert dans $\mathbb{K}$ (son complémentaire est $\{0\}$ qui est fermé dans $\mathbb{K}$) et det est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, car n-linéaire par rapport aux colonnes de la matrice (Voir le cours sur les formes n-linéaires de [?], propriété 3.9, page 193 et l'exemple 3.24, page 99).
2. $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, car, si on considère la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors
$$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) = \bigcap_{n\geqslant i>j\geqslant 1} \left(E_{i,j}^\star\right)^{-1}(\{0\})$$
et tous les $E_{i,j}^\star$ sont continues.
3. Donc
$$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \left(\det\big|_{\mathrm{T}_n(\mathbb{K})}\right)^{-1}(\mathbb{K}^*) \text{ est ouvert dans } \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$$

Remarque importante 3.17

l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas toujours un ouvert.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$
$$f\ :\ x \longmapsto x^2 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ mais } f\left(\underbrace{]-1,1[}_{\text{ouvert de }\mathbb{R}}\right) = \underbrace{[0,1[}_{\text{non ouvert de }\mathbb{R}}$$

Remarque importante 3.18

⚠ La notion d'ouvert, de fermé, de voisinage est *relative à* E.

Par exemple, si $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par $x \longmapsto \sqrt{x}$ (manifestement continue), alors

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = [0,1[\text{ qui est un ouvert } \textit{et} \text{ un fermé de } [0,1[$$

Si $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $x \mapsto \sqrt{2}\,x$ (manifestement continue), alors

$$f^{-1}(]-1,+1[) = f^{-1}([-1,+1]) = f^{-1}(]-1,+1]) = f^{-1}([-1,1[) = \underbrace{\mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[= \mathbb{Q} \cap \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q} \cap \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[}_{\text{tous ouverts et fermés dans } \mathbb{Q}}$$

Exemple 3.14 – Fonctions lipschiziennes

Norme

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors

$$N \ : \ E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est lipschitzienne}$$

Il est alors immédiat que $BO(a,r)$ est ouverte, $BF(a,r)$ est fermée, $S(a,r)$ est fermée...

Distance

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Alors

$$x \longmapsto d(x, A) \text{ est lipschitzienne}$$

Démonstration de la deuxième propriété

Cette fonction est 1-lipschitzienne. En effet, soit $(x, y) \in E^2$, et soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, tel que $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, A) + \varepsilon$, par définition d'une borne inférieure. Donc

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(y, a) - (d(x, a) - \varepsilon) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$$

Par symétrie, on obtient aussi

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(y, x) = d(x, y) \text{ et donc } |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$$

Proposition 3.14 – Composées de fonctions continues.

Soit (E, d), (E', d') et (E'', d'') des espaces métriques. Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ et $g : (E', d') \longrightarrow (E'', d'')$. Soit $a \in E$.

1. *Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*
2. *Si f est continue sur E et que g est continue sur E', alors $g \circ f$ est continue sur E.*

Démonstration

On peut s'amuser à démontrer cette proposition

- en revenant à la définition de la continuité en un point ;
- avec la caractérisation séquentielle ;

— avec les voisinages.

Par exemple, soit $V \in \mathcal{V}(g \circ f(a))$, alors, par continuité de g en $f(a)$, on a $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(f(a))$ et par continuité de f en a, on a

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \mathcal{V}(a)$$

Propriété 3.11 – Fonctions continues sur une partie dense

Soit (E, d), (E', d') des espaces métriques et A une partie dense dans E. Soit f et g des fonctions continues de E dans E' qui coïncident sur A (c'est-à-dire telles que $f_{|A} = g_{|A}$). Alors f et g sont égales.

Démonstration

Soit $x \in E$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x$. Par continuité, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} f(x)$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} g(x)$. Comme f et g coïncident sur A, on a $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(x) = g(x)$.

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Démontrer les résultats énoncés à la remarque 3.16, page 73.

3.3.2 Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \sup(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$$

(a) $\|.\|_1$ est-elle une norme sur E ?

(b) Soit F le sous-ensemble des $f \in E$ s'annulant une seule fois sur $[0,1]$, et telle que ce point d'annulation est dans $]0,1[$ et qu'en ce point la dérivée est non nulle. Montrer que F est un ouvert de $(E, \|.\|_1)$.

3.3.3 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, $C_1 = \{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+\}$, $C_2 = \{f \in E,\ f \text{ croissante}\}$ et $C_3 = \{f \in E,\ f(0) = f(1)\}$.

(a) On munit E de la norme infinie, préciser alors $\overline{C_k}$ et $\mathring{C}_k$ pour $k \in [\![1,3]\!]$.

(b) On munit E de la norme 1, préciser de même $\overline{C_k}$ et $\mathring{C}_k$ pour $k \in [\![1,3]\!]$.

3.3.4 Soit $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées muni de la norme infinie. [a]

(a) Montrer que l'espace des suites convergentes est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge n'est pas fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

3.3.5 Soit E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie et F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Quelle est l'adhérence de F dans E ? Même question si E est l'ensemble des suites dont la série converge absolument muni de la norme

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

3.3.6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$$

(a) Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Réciproque ?

3.3.7 On dit qu'une application f est *ouverte* si pour tout ouvert O de l'ensemble de départ, $f(O)$ est ouvert dans l'ensemble d'arrivée. Les applications suivantes sont-elles ouvertes ?

(a) $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $z \longmapsto |z|$;

(c) $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^z$.

3.3.8 Soit (E,d) un espace métrique et f une application K-lipschitzienne définie sur une partie non vide A de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour $x \in E$

$$g(x) = \inf_{a \in A} \left(f(a) + K\, d(x,a)\right)$$

on définit un prolongement K-lipschitzien de E dans $\mathbb{R}$.

3.3.9 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie et $\Phi : f \in E \longmapsto \exp \circ f \in E$. Φ est-elle continue ?

3.3.10 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1]^2;\mathbb{R})$. Montrer que

$$m(y) = \max_{x \in [0,1]} f(x,y), \text{ existe et est continue.}$$

3.3.11 Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et E le sous-espace affine de $\mathcal{C}$ formé des fonctions f de $\mathcal{C}$ telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

On norme $\mathcal{C}$ par $\|\ \|_\infty$.

(a) Montrer que E est fermé, de codimension finie à déterminer.

(b) Montrer que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

---

a. On définira de même, pour $p \in [1,+\infty[$,

$$\ell^p(\mathbb{K}) \overset{\text{Def}}{=} \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum |u_n|^p \text{ converge}\right\}$$

muni de la norme

$$\forall u \in \ell^p,\ \|u\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p}$$

3.2 Compacité

3.2.1 Propriétés élémentaires

La notion de compacité*, étudiée ici dans le cadre des espaces métriques, est une notion très importante en topologie, car elle nous permet de résoudre très simplement des problèmes d'existence, de limites, etc.*

Définition 3.24 – Compact

Soit A une partie d'un espace métrique (E,d), on dit que A est *compacte* si elle vérifie

$$\forall u \in A^{\mathbb{N}},\ \mathrm{Adh}(u) \cap A \neq \varnothing$$

Autrement dit, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans A.

Remarque 3.19

On peut dire aussi, de toute suite de A on peut extraire une sous-suite *convergente dans* A.

Comment montre-t-on qu'une partie A d'un espace métrique (E,d) est compacte ?

1. On part d'une suite quelconque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.
2. On construit une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E vers une limite $\lambda \in E$.

3. On vérifie que $\lambda \in A$ (ce qui est immédiat si on sait que A est fermé dans E).

On utilisera aussi la proposition 3.17, page 80 et, dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la propriété 3.22, page 99.

Proposition 3.15

Un compact A de E est fermé dans E et borné. **La réciproque est fausse en général.**

Démonstration

1. ($\Rightarrow$)
   - *Un compact est fermé.*
     Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers $\lambda \in E$. On sait qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $a \in A$. Mais toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, donc $\lambda = a \in A$.
   - *Un compact est borné.*
     Montrons-le par contraposée. Soit $A \subset E$ un ensemble non borné. Si $x_0 \in E$ est quelconque, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence d'un $x_n \in A \backslash BO(x_0, n)$.

     La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de suite extraite convergente.
2. (*Réciproque fausse dans le cas où E est un espace vectoriel normé*) [a]
   Prenons $E = \mathrm{Vect}\left(\{t \longmapsto t^n,\ n \in \mathbb{N}\}\right)$ muni de la norme définie par
   $$\forall P \in E,\ P\ :\ t \longmapsto \sum_{k=0}^{\delta} a_k\, t^k,\ \|P\| = \max\left(\{|a_k|,\ k \in [\![0, \delta]\!]\}\right)$$
   Prenons alors
   $$A = BF(0_E, 1),\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n\ :\ t \longmapsto t^n$$
   On a alors
   $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ [p \neq q] \implies [\|x_p - x_q\| = 1]$$
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc avoir aucune valeur d'adhérence, mais A est fermée et bornée dans E (c'est une boule fermée).
3. (*Réciproque fausse dans le cas métrique*)
   Prenons $E =]0, 1]$, muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Alors la suite définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{n+1}\ \text{n'a pas de valeur d'adhérence.}$$
   Pourtant E est fermé (dans E) et borné !

a. Nous verrons plus loin qu'elle est vraie dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finie.

En fait, la notion de *compact* pour un ensemble A est une notion *intrinsèque*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de E (l'éventuel espace métrique qui contient A – bien sûr, la distance sur A reste la même !). Contrairement, aux notions d'ouvert et de fermé qui sont des notions *extrinsèques* (ou *relatives*), c'est-à-dire qu'elles dépendent de E.

Ainsi $([0, 1], |\ |)$ est compacte (dans $[0, 1]$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$...), mais $]0, 1]$ est fermée dans $\mathbb{R}_+^*$, ouverte dans $]-\infty, 1]$, ni ouverte, ni fermée dans $\mathbb{R}$...

C'est pourquoi, on dira souvent « soit K un compact », sans préciser l'éventuel espace métrique dans lequel K se trouve.

Propriété 3.12

Soit K un compact. Tout fermé F inclus dans K est compact.

Démonstration

Soit F un fermé dans un compact K, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. Comme K est compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\lambda \in K$. Mais, comme F est fermé dans K, $\lambda \in F$.

Propriété 3.13

Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de compacts de (E,d). Alors leur intersection $\bigcap_{i\in I} K_i$ est compacte.

Démonstration

Si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de compacts de E, alors pour un $i_0 \in I$ donné, $\cap_{i\in I} K_i$ est un fermé (intersection de fermés) dans K_{i_0}, c'est donc un compact.

Propriété 3.14

Soit $(K_1, \dots, K_p)$ une famille *finie* de compacts de (E,d). Alors leur réunion $\bigcup_{i=1}^{p} K_i$ est compacte.

Démonstration

Soit $K_1, \dots, K_p$ des compacts de E. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\cup_{k=1}^{p} K_k$, posons

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \Delta_k = \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in K_k\}$$

l'un au moins des Δ_k est infini, on peut donc extraire une sous-suite de x qui reste dans un K_{k_0}, qui est compact, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $K_{k_0} \subset \cup_{k=1}^{p} K_k$.

Propriété 3.15

Soit $(E_1,d_1), \dots, (E_n,d_n)$ des espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace produit muni de la distance produit d (voir définition 3.3, page 52).

Si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, K_i est un compact de E_i, alors

$$K = K_1 \times \cdots \times K_n \text{ est un compact de } E$$

Démonstration

Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, on écrit pour $p \in \mathbb{N}$, x_p sous la forme

$$x_p = \left(x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)}\right),\ \text{où } \forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \left(x_p^{(k)}\right)_{p\in\mathbb{N}} \in {K_k}^{\mathbb{N}}$$

On procède alors de la manière suivante.

1. De la suite $\left(x_p^{(1)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ on extrait une sous-suite $\left(x_{\varphi_1(p)}^{(1)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha_1 \in K_1$, puisque K_1 est compact.
2. De la suite $\left(x_{\varphi_1(p)}^{(2)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ on extrait une sous-suite $\left(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(p)}^{(2)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha_2 \in K_2$, puisque K_2 est compact.

...

n. De la suite $\left(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_{n-1}(p)}^{(n)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ on extrait une sous-suite $\left(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_{n-1}\circ\varphi_n(p)}^{(n)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha_n \in K_n$, puisque K_n est compact.

Posons $\psi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$, on obtient alors que

$$x_{\psi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{d} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K$$

ce qui montre la compacité de K.

Proposition 3.16 – Caractérisation des suites convergentes dans un compact

Dans un compact, toute suite possédant une seule valeur d'adhérence est une suite convergente.

Remarque 3.20

C'est une méthode essentielle pour montrer la convergence d'une suite !

Démonstration de la proposition

Soit K un compact et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{Adh}(x) = \{\lambda\}$. Si x ne converge pas vers λ on a l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ d(x_n, \lambda) > \varepsilon$$

Ceci nous permet de construire une sous-suite de x, $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{\varphi(n)} \in K \backslash BO(\lambda, \varepsilon)$$

Mais, $K \backslash BO(\lambda, \varepsilon)$ est fermé dans K, donc compacte ! De plus, toute valeur d'adhérence de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur d'adhérence de x. Ce qui nous amène à une contradiction.

Proposition 3.17 – Image d'un compact par une application continue

L'image directe par une application continue d'un compact est un compact. Si K est un compact et $f : K \longrightarrow E$, où (E,d) est un espace métrique et f une application continue, alors $f(K)$ est un compact de E.

Démonstration

Soit K un compact et $f : K \longrightarrow E'$ une application continue, soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(K)^{\mathbb{N}}$ une suite de $f(K)$. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $x'_n = f(x_n)$. Ceci permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K, dont on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $\lambda \in K$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, on a

$$x'_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} f(\lambda) \in f(K)$$

Propriété 3.16

Si K est compact, et $f : K \longrightarrow E'$ est une application continue et *bijective*, alors f^{-1} est aussi continue.

Démonstration

Utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $\lambda' \in E'$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$, telle que

$$x'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} \lambda'$$

Posons $x_n = f^{-1}(x'_n)$ et $\lambda = f^{-1}(\lambda')$. La suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans un compact E, donc

$$\mathrm{Adh}(x) \neq \varnothing$$

Soit $\mu \in \mathrm{Adh}(x)$, il existe alors une suite extraite de x, $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers μ. Comme f est continue

$$x'_n = f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} f(\mu) = \lambda',\ \text{donc } \mu = \lambda$$

La suite x possède une unique valeur d'adhérence dans le compact E, elle est donc convergente vers λ.

Définition 3.25 – Homéomorphisme

Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ on dit que f est un *homéomorphisme*, si elle vérifie

1. f est bijective
2. f est continue

3. f^{-1} est continue

Remarque 3.21

La propriété 3.16, page précédente s'énonce donc que toute application continue, bijective définie sur un compact est un homéomorphisme.

Deux espaces homéomorphes pourront donc être considérés comme topologiquement semblables ! Mêmes ouverts, fermés, compacts, fonctions continues, suites convergentes, seules les boules sont la plupart du temps différentes...

Proposition 3.18 – Fonctions continues définies sur un ensemble compact

Soit K un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et ses bornes sont atteintes.

Démonstration

Montrons, par exemple, que la borne supérieure est un maximum.
Soit
$$M = \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
On peut alors, par discrétisation, construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} M$$
Mais, comme K est compact, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente
$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \lambda \in K$$
Alors,
$$f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} f(\lambda) = M$$
Ce qui montre que M est fini (donc f est majorée) et atteinte en λ (c'est donc un maximum).

Proposition 3.19 – Distance à un compact

Soit (E, d) un espace métrique et K un compact de E. La distance à K est toujours réalisée.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists a \in K,\ d(x, K) = d(x, a)}$$

Démonstration

Soit K un compact inclus dans (E, d). Soit $x \in E$, alors
$$d(x, K) = \inf_{a \in K} d(x, a)$$
Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, telle que
$$d(x, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, K)$$
Comme K est compact, on peut extraire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente
$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \lambda \in K$$
On a alors , pour $n \in \mathbb{N}$
$$d(x, K) \leqslant d(x, \lambda) \leqslant \underbrace{d(x, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, \lambda)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x,K)}$$
donc $d(x, \lambda) = d(x, K)$.

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Soit (E,d) un espace compact, (E',d') un espace métrique quelconque, A une partie fermée de $E\times E'$. Montrer que la projection p définie par

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E' & \longrightarrow & E' \\ (x,x') & \longmapsto & x' \end{array} \right.$$

est fermée, c'est-à-dire, pour tout fermé F de A, $p(F)$ est un fermé de E'. Donner un contre-exemple lorsque E n'est plus compact.

3.4.2 Soit K une partie compacte de (E,d). Montrer qu'il existe a et b dans K tels que

$$d(a,b) = \sup_{(x,y)\in K^2} d(x,y) \overset{\text{Rap}}{=} \operatorname{diam}(K)$$

3.4.3 Trouver un exemple de deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$ de distance nulle.

3.4.4 Dans un espace vectoriel normé E, si A et B sont deux parties non vides de E, que dire de $A+B$ lorsque

(a) A et B sont compactes ;

(b) A compacte et B fermée.

3.4.5 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit K la partie de E constituée des fonctions f 1-lipschitziennes et vérifiant $f(0)=0$. Montrer que K est compact.

3.4.6 Soit X une partie compacte de E, $f : X \longrightarrow X$ telle que

$$\forall (x,y)\in X^2,\ [x\neq y] \implies [d\left(f(x),f(y)\right) < d(x,y)]$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans X. Donner un contre-exemple lorsque X est seulement fermée.

3.4.7 Soit A un compact de (E,d), et $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\bigcup_{x\in A} BF(x,\varepsilon) \text{ est fermé}$$

3.4.8 (a) K est un compact d'un espace métrique (E,d) et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x,y)\in K^2,\ d\left(f(x),f(y)\right) \geqslant d(x,y)$$

Montrer que f est une isométrie (i.e. $d\left(f(x),f(y)\right) = d(x,y)$).

(b) Montrer qu'une telle application est un homéomorphisme.

3.4.9 Soit (A,d) un espace métrique. Montrer que A est compact si, et seulement si, toute partie infinie de A possède un point d'accumulation dans A.

3.4.10 Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts. Montrer que $K = \prod_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact.

3.2.2 Utilisation de la compacité

La compacité permet de définir des notions de « propriétés locales »/« propriétés globales ». Soit (E,d) un espace métrique et $\mathcal{F}$ une propriété définie sur $\mathscr{P}(E)$ (les parties de E). Cette propriété sera dite *locale* si elle vérifie

$$\forall A\in\mathscr{P}(E),\ [\mathcal{F}(A) \text{ est vraie}] \iff [\forall K \text{ compact } \subset A,\ \mathcal{F}(K) \text{ est vraie}]$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas locale, elle est dite *globale*. Il est très important de différencier ces deux types de propriétés !

Proposition 3.20 – Existence de compacts

Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\lambda \in E$, alors

$$\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda\} \ \text{ est un compact}$$

Démonstration

Soit $y = (y_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque.

1. S'il existe un élément $x \in \Gamma$ tel que

$$\{p \in \mathbb{N},\ y_p = x\} \text{ est infini}$$

alors, on peut extraire une sous-suite constante de y qui converge donc dans Γ.

2. Sinon, on construit deux suites extraites $(y_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante.
   — *Initialisation*

$$\varphi(0) = \min\left(\{p \in \mathbb{N},\ y_p \neq \lambda\}\right) \text{ et } \psi(0) = \min\left(\{n \in \mathbb{N},\ x_n = y_{\varphi(0)}\}\right)$$

   — *Itération* Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(k+1) = \min\left(\{p \in \mathbb{N},\ p > \varphi(k),\ y_p \notin \{x_{\psi(0)}, \dots, x_{\psi(k)}\} \cup \{\lambda\}\}\right) \text{ et } \psi(k+1) = \min\left(\{n \in \mathbb{N},\ x_n = y_{\varphi(k+1)}\}\right)$$

   Comme on n'interdit qu'un ensemble fini de valeurs pour y_p (et donc d'après l'hypothèse, un nombre fini d'indices), les ensembles dont on prend les minimums sont non vides.

   On obtient alors

$$y_{\varphi(p)} = x_{\psi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{d} \lambda$$

Proposition 3.21 – Localité de la continuité

Si $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$, alors

$$[f \text{ continue sur } E] \iff [\forall K \text{ compact } \subset E,\ f|_K \text{ est continue}]$$

Démonstration

— $(\Rightarrow)$ Ce sens est immédiat.

— $(\Leftarrow)$ Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un $\lambda \in E$. L'ensemble $\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda\}$ est compact d'après la proposition 3.20, de la présente page, donc par hypothèse la fonction $f|_\Gamma$ est continue, et par conséquent

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d'} f(\lambda)$$

car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Γ convergente vers λ.

Exemple 3.15

Locale

La continuité est une propriété locale.

Globale

L'uniforme continuité *n'est pas* une propriété locale. C'est donc une propriété globale. Par exemple, $x \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur tout compact de $\mathbb{R}$ (théorème 3.2, de la présente page), mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 – Heine

Soit (E,d) un espace compact, soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application continue sur E, alors f est uniformément continue.

Démonstration

Raisonnons par contraposée. Supposons que la fonction f n'est pas uniforménent continue sur E. Alors,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in E^2,\ d(x,y) \leqslant \eta \text{ et } d'\left(f(x), f(y)\right) > \varepsilon$$

En discrétisant (en posant $\eta = \frac{1}{n+1}$), on obtient deux suites

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } d'\left(f(x_n), f(y_n)\right) > \varepsilon$$

Comme (E,d) est compact, on peut extraire de la suite x une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $\alpha \in E$. Il en découle que

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ d'(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) > \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire, on en conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d'(f(x_{\varphi(n)}), f(\alpha)) > \varepsilon/2 \text{ ou } d'(f(y_{\varphi(n)}), f(\alpha)) > \varepsilon/2$$

En considérant la suite z définie par $z_n = x_{\varphi(n)}$ ou $z_n = y_{\varphi(n)}$ suivant le plus grand des deux termes de l'équation précédente, cela montre que la fonction f n'est pas continue en α.

Exemple 3.16 – Fonction uniformément continue

Dans $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$, mais elle n'est pas lipschitzienne.

Dans $\mathbb{R}^2$

La fonction définie sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{(1+x)\,(1+y)\,(x+y)}$$

est uniformément continue sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

Démonstration

1. *(La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$)* La fonction est 1/2-lipschitzienne (théorème des accroissements finis), donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$. De plus, elle est uniformément continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème de Heine.

   Elle n'est pas lipschitzienne, car sa dérivée n'est pas majorée sur $]0, 1]$. Par exemple, prenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$x_n = \frac{1}{n} \text{ et } y_n = \frac{2}{n}$$

   alors

   $$\frac{\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}}{y_n - x_n} = \frac{1}{\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

2. *(La deuxième fonction)* Laissé en exercice. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on pourra diviser le quart de plan ouvert ${\mathbb{R}_+^*}^2$ en une partie compacte et une partie où la fonction f est majorée par ε, en prenant soin que les deux parties aient une intersection commune suffisante pour recoller les morceaux (voir la note ci-dessous).

Théorème 3.3 – Fermés emboîtés, version compacte

Si (E,d) est compact, et si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vides, décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \subset F_n$ (on dit aussi que c'est une suite de fermés emboîtés*), alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$$

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_n$$

Une telle suite existe car les F_n sont supposés non vides. Nous sommes dans un compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \lambda \in E$$

Mais, d'après l'inclusion des F_n, on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\varphi(n) \geqslant p] \implies \left[x_{\varphi(n)} \in F_p\right]$$

Or, les F_p sont fermés dans E, donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lambda \in F_p$$

soit

$$\lambda \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p$$

Remarque 3.22

Par contraposition, on obtient que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés emboîtés de E telle que

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p = \varnothing$$

on peut en déduire que

$$\exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant P,\ F_p = \varnothing$$

Exemple 3.17

Théorème de Dini

Soit K un compact, et $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\left[\forall x \in K,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)\right],\quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} \geqslant f_n \text{ et } f \text{ continue}$$

alors la convergence est uniforme, c'est-à-dire

$$\|f_n - f\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, considérons

$$\forall p \in \mathbb{N},\ F_p = \{x \in K,\ |f_p(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

- *F_p est un fermé de K*, car f et f_p sont continues et
$$F_p = (f_p - f)^{-1}\left(\mathbb{R}\backslash\right] - \varepsilon, +\varepsilon\left[\right)$$
- *Ils sont emboîtés*, car si $x \in F_{p+1}$, on a
$$f(x) - f_p(x) \geqslant f(x) - f_{p+1}(x) \geqslant \varepsilon$$
donc $x \in F_p$.
- *L'intersection des F_p est vide*, car
$$\forall x \in K,\ f_p(x) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(x)$$

Donc, ils sont tous vides à partir d'un certain rang P, soit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ [p \geqslant P] \implies [\forall x \in K,\ |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Exemple 3.18

Théorème des médiances

Les trois médianes d'un triangle se coupent.

Démonstration

En TD.

Définition 3.26 – Espace métrique précompact

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est un espace précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ε.

Proposition 3.22

Tout espace compact est précompact.

Démonstration

Raisonnons par contraposée. Si (E, d) n'est pas un espace précompact. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ne peut pas recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ε. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ d(x_i, x_n) > \varepsilon \text{ et } E \subsetneq \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon).$$

On ne peut pas extraire de sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc (E, d) n'est pas un espace métrique compact.

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Terminer la démonstration de l'exemple 3.16, page 84.

3.5.2 Soit A une partie compacte de (E, d). Montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui est dense dans A.

3.5.3 Soit K un compact, F un espace vectoriel normé, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de K dans F, et $g : K \longrightarrow F$ continue. Montrer l'équivalence de

(a) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g

(b) Pour tout $x \in K$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K de limite x, on a

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x_n)$$

Contre-exemple si l'on n'a plus la compacité de K ?

3.5.4 Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow K$ continue. On pose

$$K_0 = K, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = f(K_n) \text{ et } K_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

Montrer que K_∞ est un compact non vide et que $f(K_\infty) = K_\infty$.

3.5.5 Soit E un espace vectoriel normé. Si $\varnothing \neq F \subset E$ on note

$$\operatorname{diam}(F) = \sup_{(x,y)\in F\times F} \|x - y\| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts, et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que

$$\operatorname{diam}(A) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(A_n)$$

3.5.6 Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{card} f^{-1}(\{a\}) = 1$. Montrer que a est un extremum global de f.
(b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ est compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global.
(c) On suppose que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) \text{ existe dans } [-\infty, +\infty]$$

3.5.7 Soit f_n et f des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\|f_n \circ g - f \circ g\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors

$$\|g \circ f_n - g \circ f\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(c) Donner un contre-exemple lorsque g est seulement continue.

3.3 Espaces vectoriels normés

3.3.1 Normes équivalentes

Nous parlons ici d'espaces vectoriels normés. Le corps $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

Définition 3.27 – Boules unités

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On appelle *boule unité ouverte* la boule $BO(0, 1)$. On définit de même la boule unité fermée et la sphère unité.

Définition 3.28 – Normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N et N' deux normes sur E, on dit qu'elles sont *équivalentes* si

$$\exists (\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \forall x \in E,\ \alpha\, N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta\, N(x)$$

Remarque 3.23

Le fait que $\alpha > 0$ est *très important* !

Propriété 3.17

Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, fermés, compacts... seules diffèrent éventuellement les boules.

Démonstration 1

Soit N et N' deux normes équivalentes, et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ associés à N et N' dans la définition de normes équivalentes.

Nous commençons tout d'abord par montrer que les ouverts de N et N' sont les mêmes. Pour cela, nous allons montrer que tout ouvert O pour la norme N contient un ouvert pour la norme N'. Puis nous pourrons écrire O comme union d'ouverts pour la norme N', ce qui conclura que O est bien un ouvert pour la norme N'.

Soit O un ouvert pour la norme N. Donc pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $BO_N(x, \varepsilon_x) \subset O$. Par définition de α et β, cela implique que $BO_{N'}(x, \varepsilon_x/\beta) \subset BO_N(x, \varepsilon_x)$. Donc, $BO_{N'}(x, \varepsilon_x/\beta) \subset O$. Ainsi on en déduit que

$$O = \bigcup_{x \in O} BO_{N'}\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right)$$

donc O est bien un ouvert pour la norme N'. Avec le même raisonnement on peut montrer que tout ouvert pour la norme N' est un ouvert pour la norme N.

Par passage au complémentaire, il vient que les fermés de deux normes équivalentes sont les mêmes.

Enfin pour les compacts, la preuve est laissée en exercice.

Remarque importante 3.24

⚠ Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit d'exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \text{ ou } \frac{N(x_n)}{N'(x_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exemple 3.19 – Normes non équivalentes

Sur $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ les normes $\| \|_{\infty,[0,1]}$ et $\| \|_{1,[0,1]}$ et $\| \|_{2,[0,1]}$ ne sont pas équivalentes (deux à deux).

Démonstration

Les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$ vérifient

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty,[0,1]} &= 1 \\ \|f_n\|_{1,[0,1]} &= \frac{1}{n+1} \\ \|f_n\|_{2,[0,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

Propriété 3.18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. Ces normes sont *équivalentes* si, et seulement si, il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$BO_N(0_E, \gamma) \subset BO_{N'}(0_E, 1) \subset BO_N(0_E, \delta)$$

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Supposons les deux normes équivalentes, il existe donc deux constantes strictement positives α et β telles que
$$\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$$
Si $x \in BO_{N'}(0_E, 1)\backslash\{0_E\}$, alors
$$N(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} N'(x) < \frac{1}{\alpha}, \text{ donc } x \in BO_N\left(0_E, \frac{1}{\alpha}\right)$$
$\delta = 1/\alpha$ convient. De même, $\gamma = 1/\beta$ convient, car
$$\forall x \in BO_N\left(0_E, \frac{1}{\beta}\right)\backslash\{0_E\},\ N'(x) < 1$$
2. $(\Leftarrow)$ Supposons connus γ et δ deux réels strictement positifs tels que
$$BO_N(0_E, \gamma) \subset BO_{N'}(0_E, 1) \subset BO_N(0_E, \delta)$$

Soit $x \in E \backslash \{0_E\}$, on a alors

$$\frac{1}{N'(x)}.x \in BF_{N'}(0_E, 1) = \overline{BO_{N'}(0_E, 1)} \subset \overline{BO_N(0_E, \delta)} = BF_N(0_E, \delta)$$

donc

$$N\left(\frac{1}{N'(x)}.x\right) \leqslant \delta, \text{ donc } N(x) \leqslant \delta\, N'(x)$$

$\alpha = 1/\delta$ convient. De même

$$\frac{\gamma}{N(x)}.x \in BF_N(0_E, \gamma) \subset BF_{N'}(0_E, 1)$$

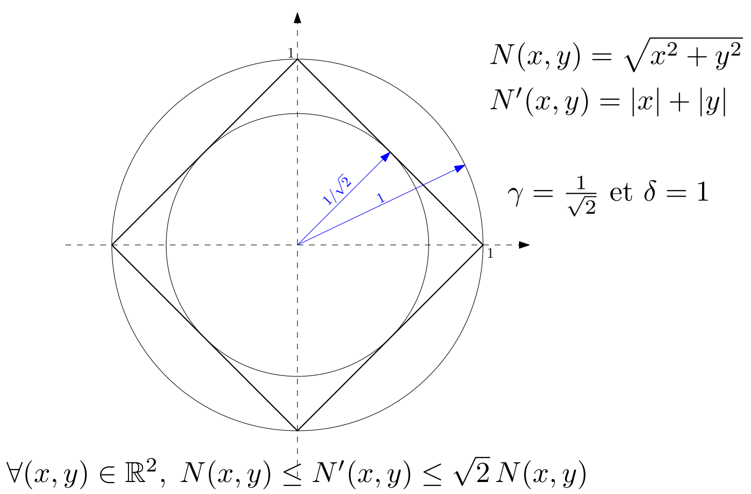
donc

$$N'\left(\frac{\gamma}{N(x)}.x\right) \leqslant 1, \text{ donc } \gamma\, N'(x) \leqslant N(x)$$

$\beta = 1/\gamma$ convient.

Les meilleures valeurs de γ et δ se visualisent sur un dessin, mémoriser les liens avec les « meilleures valeurs » de α et β. Voir l'exercice 3.1.3, page 55. Voir la figure 3.3, de la présente page.

Figure 3.3 – Visualisation de normes équivalentes



3.3.2 Convexité

Définition 3.29

Segment

On appelle *segment* d'un espace vectoriel normé E d'extrémités x et y vecteurs de E l'ensemble

$$[x, y] = \{z \in E,\ \exists t \in [0, 1], z = t.x + (1 - t).y\}$$

Partie convexe

On appelle *partie convexe* de E, tout sous-ensemble C de E tel que

$$\forall (x, y) \in C^2,\ [x, y] \subset C$$

Partie étoilée

On appelle *partie étoilée* de E, tout sous-ensemble S de E tel que

$$\exists x_0 \in S,\ \forall x \in S,\ [x_0, x] \subset S$$

Un tel point x_0 est appelé centre de la partie étoilée.

Exemple 3.20

1. Toute boule d'un espace vectoriel normé est convexe.
2. L'intérieur et l'adhérence d'un convexe sont convexes.

Démonstration

1. (*Toute boule est convexe*) Prenons par exemple une boule ouverte $BO(x, r)$. Soit $(y, z) \in BO(x, r)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors
$$\|x - (\lambda.y + (1 - \lambda).z)\| = \|\lambda.(x - y) + (1 - \lambda).(x - z)\| \leqslant \lambda \|x - y\| + (1 - \lambda) \|x - z\| < r$$
2. (*L'adhérence d'un convexe est convexe*) Soit C un convexe et $(a, b) \in \overline{C}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On sait qu'il existe deux suites
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$$
telles que
$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|} a \text{ et } b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|} b$$
En ce cas
$$\underbrace{\lambda.a_n + (1 - \lambda).b_n}_{\in C} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|} \lambda.a + (1 - \lambda).b \in \overline{C}$$
3. (*L'intérieur d'un convexe est convexe*) (La propriété est illustrée à la figure 3.4, page suivante). Soit C un convexe, $(a, b) \in \mathring{A}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On sait alors qu'il existe deux réels $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que
$$BO(a, r_a) \subset C \text{ et } BO(b, r_b) \subset C$$
Prenons $r = \min(r_a, r_b)$, alors
$$BO(\lambda.a + (1 - \lambda).b, r) \subset C$$
Car, pour $z \in BO(\lambda.a + (1 - \lambda).b, r)$ on a
$$z = \lambda.\left(a + (z - (\lambda.a + (1 - \lambda).b))\right) + (1 - \lambda).\left(b + (z - (\lambda.a + (1 - \lambda).b))\right) \in C$$

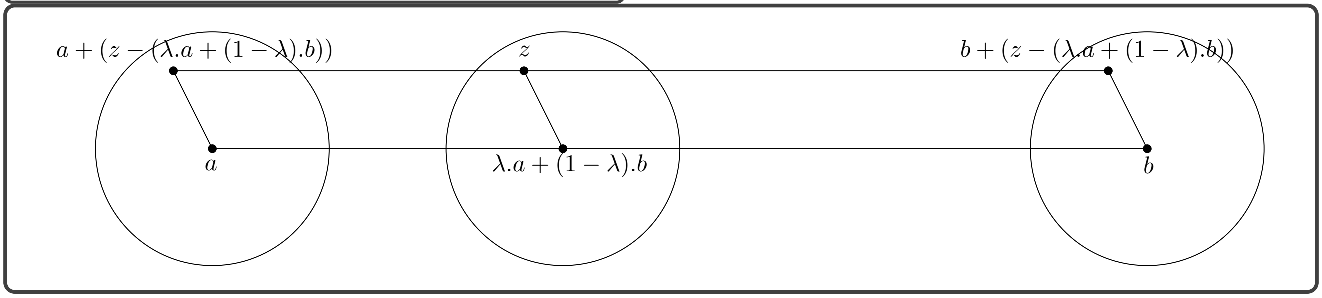
Exercice(s) 3.6

3.6.1 Soit A un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal qui contient A. Proposer deux normes telles que, pour la première norme, la boule de rayon minimal est unique, mais pas pour la deuxième norme.

3.6.2 Soit C une partie convexe de l'espace vectoriel normé E.

(a) Montrer que $\overline{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes.

Figure 3.4 – L'intérieur d'un convexe est convexe



(b) Si, de plus, C est d'intérieur non vide, montrer que

$$\overset{\circ}{\overline{C}} = \mathring{C}, \quad \overline{\mathring{C}} = \overline{C}$$

et que la frontière de C est d'intérieur vide.

(c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$C_\varepsilon = \{x \in E \ ; \ d(x, C) \leqslant \varepsilon\}$$

Montrer que C_ε est convexe fermé et d'intérieur non vide.

3.6.3 Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $A = \mathbb{R}^n$.

3.6.4 Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que la boule unité fermée B est strictement convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in B^2, \ ]x, y[\subset \mathring{B}$$

3.6.5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

(a) d'une part

$$\forall x \in E, \ N(x) \geqslant 0 \text{ et } \forall x \in E, \ [N(x) = 0] \iff [x = 0]$$

(b) et d'autre part

$$\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ N(\lambda.x) = |\lambda| \, N(x)$$

On note $B = \{x \in E, \ N(x) \leqslant 1\}$. Montrer que B est convexe si, et seulement si, N vérifie l'inégalité triangulaire.

3.6.6 (a) Soit C un convexe fermé non borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que C contient une demi-droite.

(b) Même question sans supposer C fermé.

3.3.3 Continuité dans un espace vectoriel normé

Proposition 3.23 – Caractérisation de la continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$ où (E, N) et (E', N') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *u est continue en 0 ;*
2. *u est continue sur E ;*
3. *u est uniformément continue sur E ;*
4. *u est lipschitzienne sur E ;*
5. *Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\boxed{\forall x \in E, N'(u(x)) \leqslant C\, N(x)}$$

Démonstration

1. ($4 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 1$) Bien connus.
2. ($5 \Rightarrow 4$) Soit $(x, y) \in E^2$, alors
$$\left|N'(u(x)) - N'(u(y))\right| \leqslant N'(u(x) - u(y)) = N'(u(x-y)) \leqslant C\, N(x-y)$$
u est donc C-lipschitzienne.
3. ($1 \Rightarrow 5$) Comme u est continue en 0_E, en prenant $\varepsilon = 1$ (par exemple), il existe un $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in E,\ [N(x - 0_E) \leqslant \eta] \implies [N'(u(x) - u(0_E)) \leqslant 1]$$
Prenons un $x \in E \backslash \{0_E\}$, alors
$$N\left(\frac{\eta}{N(x)}.x\right) \leqslant \eta, \text{ donc } N'\left(u\left(\frac{\eta}{N(x)}.x\right)\right) \leqslant 1$$
ce qu'on peut écrire
$$N'(u(x)) \leqslant \frac{1}{\eta} N(x)$$
$C = 1/\eta$ convient.

Nous utiliserons presque tout le temps la propriété 5. pour démontrer qu'une application linéaire est continue.

Pour montrer la non-continuité, nous utiliserons la propriété 1. (non continuité en 0_E).

Définition 3.30 – Norme triple

Soit (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Pour $u \in \mathscr{L}(E, E')$ continue, on définit la *norme triple* de u par
$$|||u|||_{N,N'} = \sup_{x \in E \backslash \{0\}} \frac{N'(u(x))}{N(x)}$$
Ceci définit une norme sur l'ensemble $\mathscr{LC}(E, E')$ des applications linéaires continues de E dans E'.

Remarque 3.25

La norme triple est aussi appelée « norme subordonnée à N et N' » ou « norme associée à N et N' ».

Démonstration de la norme associée à la norme infinie (exemple 3.2, page 54)

On considère A comme la matrice d'une application linéaire u de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ (exprimée dans les bases canoniques). Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, et $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que $\underline{y} = u(\underline{x})$. On a alors
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\, x_j$$
et donc
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|\, |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|\right) \|\underline{x}\|_\infty$$
On trouve donc l'inégalité
$$\|\underline{y}\|_\infty \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|\right) \|\underline{x}\|_\infty \qquad (*)$$
ce qui nous donne
$$|||\ |||_{\|\ \|_\infty, \|\ \|_\infty} \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|\right)$$
Montrons l'égalité. Pour cela, il suffit de trouver un vecteur non nul réalisant l'égalité dans $(*)$. Soit i_0 un

indice tel que

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|\right)=\sum_{j=1}^{m}|a_{i_0,j}|$$

l'égalité est réalisée pour

$$\underline{x_0}=(\varepsilon_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$$

où

$$\forall j\in[\![1,m]\!]\,,\ \varepsilon_j\,a_{i_0,j}=|a_{i_0,j}|$$

Démonstration de la norme associée à la norme 1 (exemple 3.2, page 54)

Reprenons les notations de la démonstration précédente. Maintenant, on munit $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ des normes suivantes

$$\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^m,\ \|\underline{x}\|_1=\sum_{j=1}^{m}|x_j|\ \text{et}\ \forall \underline{y}\in\mathbb{R}^n,\ \|\underline{y}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$$

On a alors

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\,,\ |y_i|\leqslant\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|\,|x_j|$$

donc, pour $\underline{y}\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\|\underline{y}\|_1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|\,|x_j|$$

Donc,

$$\|\underline{y}\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)|x_j|\leqslant\max_{j\in[\![1,m]\!]}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|\underline{x}\|_1$$

Le cas d'égalité est obtenu pour le vecteur $(\delta_{j,j_0})_{j\in[\![1,n]\!]}$, où j_0 est un indice tel que

$$\max_{j\in[\![1,m]\!]}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}|$$

Propriété 3.19

Soit $u\in\mathscr{LC}(E,E')$. Alors

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{N,N'}=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{N'(u(x))}{N(x)}=\sup_{x\in BF(0,1)}N'(u(x))=\sup_{x\in S(0,1)}N'(u(x))$$

Démonstration

Cela provient de la propriété d'homogénéité de la norme.

Définition 3.31 – $\mathbb{K}$-algèbre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que E est une *algèbre* s'il existe une opération *interne* notée $\times$, telle que

Propriétés de la loi interne $\times$

$\forall(x,y)\in E^2, x\times y\in E$	loi interne
$\forall(x,y,z)\in E^3,\ (x\times y)\times z=x\times(y\times z)\overset{\text{Not}}{=}x\times y\times y$	associativité
$\exists 1_E\in E,\ \forall x\in E,\ 1_E\times x=x\times 1_E=x$	unité

Propriétés de $\times$ en rapport avec $+$

$\forall(x,y,z)\in E^3,\ x\times(y+z)=x\times y+x\times z$	distributivité à gauche
$\forall(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)\times z=x\times z+y\times z$	distributivité à droite

Propriétés de $\times$ en rapport avec .

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$$

On note $(E, +, ., \times)$ l'algèbre.

Exemple 3.21 – Algèbres

$(\mathbb{K}^n, +, ., \times)$, $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \bullet)$, $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres, lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si (E, d) est un espace métrique et E' une $\mathbb{K}$-algèbre, alors $(\mathscr{F}(E, E'), +, ., \times)$, $(\mathscr{C}(E, E'), +, ., \times)$ sont aussi des $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition 3.32 – Norme d'algèbre

Soit $(E, +, ., \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, N une norme sur E, on dit que N est une *norme d'algèbre* si elle vérifie de plus

$$\forall (x,y) \in E^2,\ N(x \times y) \leqslant N(x)\, N(y)$$

Proposition 3.24

Soit (E, N), (E', N') et (E'', N'') des espaces vectoriels normés. Alors

$$\forall u \in \mathscr{LC}(E, E'),\ \forall v \in \mathscr{LC}(E', E''),\ |||v \circ u|||_{N,N''} \leqslant |||v|||_{N',N''}\ |||u|||_{N,N'}$$

En particulier, pour tout $(u, v) \in \mathscr{LC}(E)$, on a

$$|||v \circ u|||_{N,N} \leqslant |||v|||_{N,N}\ |||u|||_{N,N}$$

$|||\ |||_{N,N}$ *est donc une* norme d'algèbre *sur* $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

Démonstration

Soit $u \in \mathscr{LC}(E, E')$ et $v \in \mathscr{LC}(E', E'')$, alors pour $x \in E$, on a

$$N''(v \circ u(x)) \leqslant |||v|||_{N',N''}\ N'(u(x)) \leqslant |||v|||_{N',N''}\ |||u|||_{N,N'}\ N(x)$$

Définition 3.33 – Norme produit

Soit (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. On appelle *structure produit* le couple $(E \times E', \mathcal{N})$ où

$$\forall (x, x') \in E \times E',\ \mathcal{N}\big((x, x')\big) = \big\|\big(N(x), N'(x')\big)\big\|$$

et $\mathcal{N}$ s'appelle la *norme produit*.

Proposition 3.25

On a de même, si B est une application bilinéaire de $E \times E'$ dans E'', où (E, N), (E', N') et (E'', N'') sont trois espaces vectoriels normés et où $E \times E'$ est muni de la norme produit. Alors

$$[B \text{ est continue}] \iff \big[\exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, x') \in E \times E',\ N''\big(B(x, x')\big) \leqslant C\, N(x)\, N'(x')\big]$$

Démonstration

Prenons sur $E \times E'$, la norme infinie dans la base canonique.

1. ($\Rightarrow$) Comme B est continue, elle est continue en $(0_E, 0_{E'})$ et on a, pour $\varepsilon = 1$, l'existence d'un $\eta > 0$ tel que
$$\forall (x, x') \in E \times E',\ \left[\mathcal{N}(x, x') \leqslant \eta\right] \implies \left[N''\left(B(x, y)\right) \leqslant 1\right]$$
Soit $x \in E \backslash \{0_E\}$ et $x' \in E' \backslash \{0_{E'}\}$, alors
$$\mathcal{N}\left(\frac{\eta}{N(x)}.x, \frac{\eta}{N'(x')}.x'\right) \leqslant \eta, \text{ et donc } N''\left(B\left(\frac{\eta}{N(x)}.x, \frac{\eta}{N'(x')}.x'\right)\right) \leqslant 1$$
ce qui donne, en utilisant la bilinéarité de B et l'homogénéité des normes
$$N''\left(B(x, x')\right) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\, N(x)\, N(x')$$
2. ($\Leftarrow$) Soit $(x, x') \in E \times E'$, fixés, et $(h, h') \in E \times E'$, étudions
$$\delta(h, h') = N''\left(B(x + h, x' + h') - B(x, x')\right)$$
L'objectif est de montrer que
$$\delta(h, h') \xrightarrow[\mathcal{N}(h,h') \to 0]{} 0$$
Or
$$\delta(h, h') \leqslant N''\left(B(x + h, x' + h') - B(x + h, x')\right) + N''\left(B(x + h, x') - B(x, x')\right) = N''\left(B(x + h, h')\right) + N''\left(B(h, x')\right)$$
d'après la bilinéarité de B. On obtient donc
$$\delta(h, h') \leqslant C\, N(x + h)\, N'(h') + C\, N(h)\, N'(x') \xrightarrow[\mathcal{N}(h,h') \to 0]{} 0$$

Exemple 3.22 – Norme triple dans un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrons que, en prenant pour N la norme euclidienne
$$|||u||| = \max\left(\left\{\sqrt{\lambda},\ \lambda \text{ valeur propre de } u^\star \circ u\right\}\right)$$

Démonstration

$u^\star \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$ (ou $\mathcal{H}^+(E)$), il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ associés à des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où on peut supposer que $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Alors, si $x \in E$, on a
$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle.e_k$$
En ce cas
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^\star \circ u(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x\rangle^2$$
Donc
$$\|u(x)\|^2 \leqslant \lambda_1 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2}_{=\|x\|^2}$$
(inégalité réalisée pour $x = e_1$) et, finalement
$$|||u||| = \sqrt{\lambda_1}$$

Remarque 3.26

On verra plus tard que toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, on obtient donc toujours les mêmes ouverts, fermés, compacts, etc.

Propriété 3.20 – Continuité des opérations

On munit systématiquement les produits de la structure produit.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \quad \text{est continue} \\ \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \quad \text{est continue} \end{array}$$

Démonstration

Prenons toujours la norme infinie dans la base canonique dans $\mathbb{R}^2$.

Nous avons affaire à des applications linéaires ou bilinéaires et clairement

1. l'addition est continue car linéaire et

$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \leqslant 2\mathcal{N}(x, y)$$

2. la multiplication externe est continue, car bilinéaire et

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x) \qquad (C = 1)$$

Remarque importante 3.27

Lorsque E est une algèbre, munie d'une norme d'algèbre, alors la multiplication est aussi continue car

$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x \times y) \leqslant N(x)\, N(y) \qquad (C = 1)$$

Propriété 3.21

Soit (E, N), (E', N') et (E'', N'') des espaces vectoriels normés. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{LC}(E, E') \times \mathscr{LC}(E', E'') & \longrightarrow & \mathscr{LC}(E, E'') \\ (u, v) & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

est continue pour les normes triples.

Démonstration

C'est la relation de la proposition 3.24, page 94.

Proposition 3.26

1. *L'adhérence d'un sous-espace vectoriel de (E, N) est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Le noyau d'une forme linéaire φ non nulle de E est soit dense, soit fermé dans E.*
3. *De plus, si φ est continue, ce noyau (un hyperplan donc) est fermé.*
4. *La réciproque est vraie pour les formes linéaires. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall \varphi \in E^\star,\ [\varphi \text{ continue}] \iff [\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ fermé dans } E]}$$

5. *La réciproque devient fausse pour les applications linéaires.*

Démonstration

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E, car il est stable par combinaison linéaire et non vide ($\overline{F} \supset F$). En effet, soit $(x, y) \in \overline{F}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, il existe alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tels que
$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} x \text{ et } y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} y$$
mais alors
$$\lambda.x_n + \mu.y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} \lambda.x + \mu.y \in \overline{F}$$
2. Soit $\varphi \in E^\star \setminus \{0_{E^\star}\}$, $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H, qui est de codimension 1, c'est donc soit H (et H est alors fermé dans E), soit E (et H est alors dense dans E).
3. Si φ est continue, alors
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) \text{ est fermé dans } E$$
car c'est l'image réciproque par une application continue du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$.
4. Réciproquement, supposons H fermé dans E, comme il est de codimension 1, on peut trouver $e \neq 0_E$ tel que
$$E = H \oplus \mathbb{K}.e$$
Utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité pour montrer la continuité de φ en 0_E (et donc sur tout E, d'après la proposition 3.23, page 91), soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0_E, on peut alors trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = h_n + \lambda_n.e$$
Supposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0, on peut alors trouver un $\varepsilon > 0$ et une extraction θ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda_{\theta(n)}| > \varepsilon$$
mais, en ce cas
$$e = \frac{1}{\lambda_{\theta(n)}}.(x_{\theta(n)} - h_{\theta(n)}), \text{ donc } -\frac{1}{\lambda_{\theta(n)}}.h_{\theta(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{N} e \in \overline{H} = H$$
ce qui est absurde. Donc
$$\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} 0 \text{ et, donc } \varphi(x_n) = \lambda_n\,\varphi(e) \xrightarrow[n\to+\infty]{N} 0$$
ce qui exprime la continuité de φ.
5. C'est faux pour les applications linéaires en général ! Soit $E = \mathrm{Vect}(\{x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\})$, prenons la norme définie par le maximum des valeurs absolues des coefficients (norme infinie dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$), et D l'application linéaire de dérivation des fonctions de E. Alors
$$\mathrm{Ker}(D) = \mathbb{R}.(x \longmapsto 1) \text{ fermé dans } E$$
et D n'est pas continue, car
$$\forall n \in \mathbb{N},\ D(x \longmapsto x^n) = n$$

Exercice(s) 3.7

3.7.1 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$$
Soit $\alpha \in [0, 1]$, on pose
$$\varphi_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$
si $x > 0$.
(a) Montrer que $\varphi_\alpha(f)$ se prolonge par continuité en 0.
(b) Étudier la continuité de φ_α sur $[0, 1]$.
(c) Montrer que φ_α est un endomorphisme continu si $\alpha \neq 1$.
(d) Si $\alpha \neq 1$, calculer la norme associée de φ_α.
(e) Traiter le cas $\alpha = 1$.

3.7.2 Soit $E = \mathrm{Vect}\left(\{x \longmapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ et $u_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto P(a)$.

(a) On munit E de la norme $\|P\|_\infty = \max_k(|a_k|)$. Pour quelles valeurs de a, la fonction u_a est-elle continue ?

(b) Même question avec la norme $\|P\|_1 = \sum_k |a_k|$.

3.7.3 Soit $f : E \longrightarrow E$, bornée sur la boule unité de E et qui vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est linéaire (il reste à montrer l'homogénéité).

3.7.4 Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Calculer la norme de l'application

$$\theta\ :\ f \in E \longmapsto \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\ \mathrm{d}t$$

Est-elle atteinte ?

3.7.5 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $g \in E$ fixée. On considère

$$T\ :\ \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

Montrer que T est linéaire continue et calculer sa norme pour les normes ∞, 1 et 2 sur E.

3.3.4 Compacité dans les espaces vectoriels normés

Théorème 3.4 – Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie*, N et N' deux normes sur E, alors elles sont équivalentes.*

Démonstration

1. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E, on peut définir alors une norme infinie suivant la base $\mathcal{B}$ par

$$\forall x \in E,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^n,\ \left[x = \sum_{k=1}^{p} x_k b_k\right] \Longrightarrow \left[\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} \overset{\text{Def}}{=} \max\{|x_k|,\ k \in [\![1,p]\!]\}\right]$$

En ce cas la sphère unité de centre 0 de rayon 1 pour cette norme est compacte dans E pour la norme $\|\ \|_{\infty,\mathcal{B}}$. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cette sphère. De la suite $\left(b_1^\star(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $\left(b_1^\star(x_{\varphi_1(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α_1, puis de la suite $\left(b_2^\star(x_{\varphi_1(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(b_2^\star(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α_2... En continuant jusqu'à la p-ième coordonnées, on obtient $\psi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p$, telle que

$$x_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_{\infty,\mathcal{B}}} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k.b_k \in S(0_E, 1)$$

2. L'application

$$\begin{cases} (E, \|\ \|_{\infty,\mathcal{B}}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto N(x) \end{cases}$$

est continue. En effet, elle est même lipschitzienne, car si x et y sont deux vecteurs de E, on a

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |b_k^\star(x-y)|\, N(b_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} N(b_k)\right) \|x-y\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

3. La fonction N restreinte à la sphère $S(0_E, 1)$ est donc bornée et les bornes sont atteintes. De plus, les bornes non nulles d'après le caractère défini de la norme.

C'est pourquoi (sauf pour les boules) il est inutile dans un espace vectoriel normé de dimension finie de préciser la norme utilisée, on peut même en changer si besoin est.

Propriété 3.22

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Démonstration

On l'a vu pour la boule fermée unité pour la norme infinie en base $\mathcal{B}$, un fermé borné, sera fermé dans un compact de type $BF(0_E, R) = R.BF(0_E, 1)$ pour un certain rayon R, ce sera donc un compact.

Proposition 3.27 – Continuité des applications linéaires en dimension finie

Toute application linéaire $u : E \to E'$ définie sur un espace vectoriel normé (E, N) de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé (E', N') quelconque est continue (donc lipschitzienne au voisinage de 0).

Démonstration

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ une base de E. Alors si $u \in \mathscr{L}(E, E')$ on a

$$\forall x \in E,\ N'(u(x)) = N'\left(\sum_{k=1}^{p} b_k^\star(x).u(b_k)\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} N'(u(b_k))\right) \|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

Remarque importante 3.28

On procède de même pour montrer que toute application bilinéaire (et même p-linéaire) est continue lorsque l'espace de départ est de dimension finie.

Exemple 3.23 – Continuité des applications linéaires et multilinéaires

1. trace, det, Com, ^{t} sont continues sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $u \longmapsto \chi_u$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$, lorsque E est de dimension finie.
3. $(u, v) \longmapsto u \wedge v$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

   etc.

Exemple 3.24

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration

L'application det est une application n-linéaire sur $\mathbb{K}^n$, donc continue. L'application induite sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi continue et

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det{}^{-1}(\mathbb{K}^*)$$

Exemple 3.25

Plus généralement

$$\{M \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}(M) \geqslant r\}$$

est ouvert dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall r \in \{0, \ldots, \min(n, p)\}$.

Démonstration

Soit $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rang}(M) = r_0 \geqslant r$. On sait alors qu'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} I_{r_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si on « bouge » un peu M, la sous-matrice des $r_0 \times r_0$ premières lignes et colonnes sera encore inversible. Le rang sera donc supérieur à $r_0 \geqslant r$.

Propriété 3.23

Tout sous-espace vectoriel E_1 de dimension finie d'un espace vectoriel normé E quelconque est fermé.

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1^{\mathbb{N}}$, une suite qui converge vers $\alpha \in E$. Cette suite est donc bornée pour n'importe quelle norme N_1 sur E_1, elle reste dans une boule fermée $BF_{N_1}(0, R)$ de E_1 qui est, puisque E_1 est de dimension finie, compacte. On peut donc extraire une sous-suite

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta \in B$$

Par unicité de la limite, $\alpha = \beta \in B \subset E_1$.

Propriété 3.24

Dans un espace vectoriel normé, la distance d'un point à un sous-espace de dimension finie est réalisée.

Démonstration

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de dimension finie de (E, N). Soit $x \in E$, et $\delta = d(x, E_1)$. On sait alors qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_1, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta \leqslant d(x, x_n) \leqslant \delta + \frac{1}{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $BF(x, \delta + 1) \cap E_1$ compacte, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers $\alpha \in E_1$, à la limite, on obtient

$$d(x, \alpha) = \delta$$

Théorème 3.5 – Riesz

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Déjà vu.
2. $(\Leftarrow)$

   Soit (E, N) un espace vectoriel de dimension infinie. Nous allons construire une suite de la sphère unité qui n'a pas de valeur d'adhérence. L'idée est simple : nous allons choisir à chaque étape un vecteur « le plus loin possible » des précédents.

- Posons $S = S(0_E, 1)$. Soit $x_0 \in S$ quelconque, et supposons construits $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

  $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ d\left(x_k, , \mathrm{Vect}(\{x_0, \ldots, x_{n-1}\})\right) = 1$$

  Comme E est de dimension infinie, S n'est pas inclus dans $\mathrm{Vect}(\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}) = E_n$. Posons

  $$\delta_n = \sup_{x\in S} d(x, E_n)$$

  « Le plus loin possible ». Comme $0_E \in E_n$, on a $\delta_n \leqslant 1$.
- S'aidant du graphique 3.5, page ci-contre (tracé dans un cadre euclidien qui n'a aucun sens ici), on peut raisonner ainsi : soit $y \in S\backslash E_n$, alors, comme E_n est fermé dans E, $d(y, E_n) > 0$, il existe $z_n \in E_n$ tel que

  $$d(y, E_n) = N(y - z_n) > 0$$

  et finalement

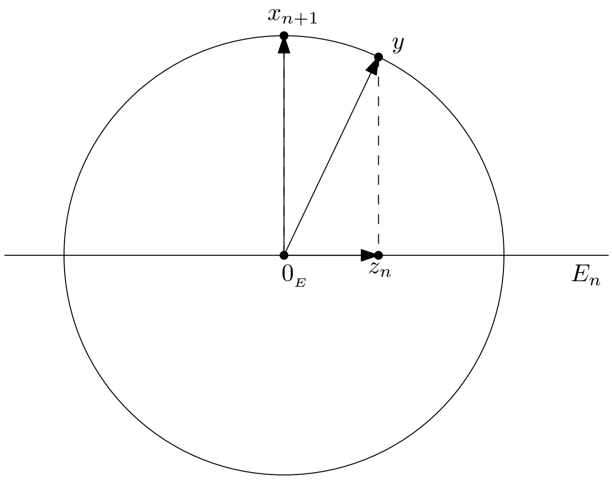
  $$x_{n+1} = \frac{1}{N(y - z_n)}.(y - z_n) \in S$$

Soit $z \in E_n$, alors

$$N(x_{n+1} - z) = \frac{1}{N(y - z_n)} N(y - z_n - N(y - z_n).z) \geqslant 1$$

Donc, $d(x_{n+1}, E_n) = 1$.

Figure 3.5 – Théorème de Riesz



Exercice(s) 3.8

3.8.1 Soit $E_0 = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On note $\| \|_\infty$ la norme infinie classique $\| \|_{\infty,[0,1]}$.

(a) $E_1 = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. Montrer que $\|f\|_1 = \sup_{[0,1]} |f'(x)|$ est une norme sur E_1.

(b) E_1 est un sous-espace vectoriel de E_0. Comparer $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$ sur E_1. Sont-elles équivalentes ?

(c) Soit $\varphi : E_1 \longrightarrow E_0,\ f \longmapsto f' + f^2$, montrer que φ est continue pour les normes précédentes.

3.8.2 Soit

$$E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$$

Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 f''(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E. Est-elle équivalente à la norme infinie ?

3.8.3 Montrer que deux compacts convexes d'intérieurs non vides d'un espace vectoriel normé sont homéomorphes.

3.8.4 E est un espace vectoriel réel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose la suite $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ bornée. On pose

$$g_p = \frac{1}{p}.\left(\mathrm{id} + f + \cdots + f^{p-1}\right)$$

Montrer que $\left((f - Id) \circ g_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, puis que $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence qui est un projecteur, puis que $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers un projecteur.

3.8.5 Si $f \in E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[0,1]$, on pose

$$\|f\|_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n}$$

(a) Montrer que $\| \|_a$ est une norme sur E si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$.

(b) Montrer que si a et b sont deux suites denses dans $[0,1]$ telles que

$$\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\} \neq \{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$$

alors les normes $\|\ \|_a$ et $\|\ \|_b$ ne sont pas équivalentes.

3.8.6 Soit E l'ensemble des suites réelles bornées. On pose, pour tout $u\in E$,

$$N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(|u_n| + |u_{2\,n}|\right)$$

Montrer que N est une norme et qu'elle est équivalente à la norme infinie.

3.8.7 Soit

$$E = \left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=0\right\}$$

On note N la norme infinie sur E, $\|f\| = N(f) + N(f')$ et $\mu(f) = N(f+f')$. Montrer que $\|\ \|$ et μ sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

3.8.8 Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}},\ \left[N_1(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right] \iff \left[N_2(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

3.8.9 Existe-t-il une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A,B)\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|AB\| = \|BA\|\ ?$$

Existe-t-il une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \|P^{-1}AP\| = \|A\|\ ?$$

Figure 3.6 – Petite promenade