## Exercice

Une urne contient 6 boules : 4 blanches et 2 noires. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boule simultanément, sans remise entre les deux tirages. On note $A$, $B$, $C$ et $D$ les événements suivants :

- A :"aucune boule blanche n'est tirée au cours du premier tirage"
- B :"une boule blanche et une boule noire sont tirées au cours du premier tirage"
- C :"deux boules blanches sont tirées au cours du premier tirage"
- D :"une boule blanche et une boule noire sont tirées au cours du deuxième tirage"

## Exercice

1. Calculer $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_B(D)$ et $\mathbb{P}_C(D)$.
2. En déduire $\mathbb{P}(D \cap A)$, $\mathbb{P}(D \cap B)$ et $\mathbb{P}(D \cap C)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $D$.

① $\circledast$ $\mathbb{P}_A(D)$ : si $A$ a lieu, alors deux boules noirs sont obtenues au premier tirage, il n'en reste aucune pour le deuxième tirage : $\mathbb{P}_A(D) = 0$

$\circledast$ $\mathbb{P}_B(D)$ : si $B$ a lieu, alors $D$ revient à faire un tirage de deux boules dans l'ensemble $\{\underbrace{B\ B\ B}_{3 \text{ blanches}}\ \underbrace{N}_{1 \text{ noirs}}\}$. La probabilité est : $\mathbb{P}_B(D) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\circledast$ Après $C$, l'urne contient $\{B\ B\ N\ N\}$ donc : $\mathbb{P}_C(D) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{1}{3}$

② $\circledast$ D'après la formule de probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(D \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

Calculons $\mathbb{P}(A)$. Notons $\Omega = \{2\text{-combinaisons de l'urne}\}$, $\text{Card}(\Omega) = \binom{6}{2}$

Pour obtenir $A$ on a besoin de tirer 2 boules noirs. Nombre de choix $\binom{4}{0} \times \binom{2}{2}$. Donc : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{4}{0}\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{1}{15}$

D'où : $\mathbb{P}(A \cap D) = \dfrac{1}{15} \times 0 = 0$

$\circledast$ De même : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{8}{15}$ donc $\mathbb{P}(B \cap D) = \dfrac{8}{15} \times \dfrac{1}{2}$

⊛ $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{6}{15}$ donc $\mathbb{P}(C\cap D) = \dfrac{6}{15}\times\dfrac{2}{3}$

③ $(A,B,C)$ constitue un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales et composées :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A\cap D) + \mathbb{P}(B\cap D) + \mathbb{P}(C\cap D) = \frac{8}{15}$$