Suites et Séries – TD$_{11}$

21-22 novembre 2021

Exercice 1

Un jeu de 52 cartes est composé de 13 cartes différentes (as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame et roi) qui existent chacune en 4 couleurs différentes (pique ♠, cœur ♡, carreau ♢ et trèfle ♣).

1. (a) On tire 5 cartes en même temps. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?
2. (a) On tire 5 cartes l'une après l'autre sans remise. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?
3. (a) On tire 5 cartes l'une après l'autre avec remise. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi qu'une probabilité.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs ?

On note E l'ensemble des 52 cartes.

1. (a) On peut choisir Ω l'ensemble des 5-combinaisons de E (c'est-à-dire l'ensemble des parties de E à 5 éléments). Puisqu'on tire « au hasard », nous sommes dans une situation d'équiprobabilité : on travaille donc avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a $\text{Card}(\Omega) = \binom{52}{5}$.

   Il est aussi possible de travailler avec $\Omega = E^5$. Cependant ici, ce n'est pas une bonne idée car on ne prend pas en compte l'ordre des cartes, et on n'autorise pas les répétitions (on n'aura pas une probabilité uniforme sur $\Omega = E^5$).

   (b) On s'intéresse à l'évènement A constitué des 5-combinaisons qui contiennent exactement 3 cœurs. Choisir un élément de A, c'est choisir 3 cœurs parmi les 13 cœurs puis choisir 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs. Le nombre de choix possibles est alors $\binom{13}{3}\binom{39}{2}$. Puisque $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme :

   $$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est } \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.082.}$$

2. (a) Ici on choisit Ω l'ensemble des 5-arrangements muni de la probabilité uniforme.

   (b) D'après la question 2a :

   $$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est } \frac{\binom{5}{3}\frac{13!}{10!}\frac{39!}{37!}}{\frac{52!}{47!}} \simeq 0.082.}$$

   On obtient le même résultat qu'en question (1b), cela n'est pas surprenant, car le fait d'obtenir 3 cœurs ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a tiré les cartes.

3. (a) Cette fois-ci, on prend en compte l'ordre puisque c'est un tirage avec remise. On considère donc $\Omega = E^5$, l'ensemble des 5-listes de E, muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a $\text{Card}(\Omega) = (\text{Card}(E))^5 = 52^5$.

(b) On s'intéresse à l'évènement A constitué des 5-listes ayant exactement 3 cœurs. Choisir un élément de A, c'est

- ▷ choisir les 3 indices des 3 cœurs parmi les 5 indices de la 5-liste : il y a $\binom{5}{3}$ possibilités ;
- ▷ puis choisir chacune des 3 cœur (13^3 possibilités car on tire avec remise) ;
- ▷ puis choisir chacune des 2 cartes restantes (39^2 possibilités car on tire avec remise).

Finalement, on a $\text{Card}(A) = \binom{5}{3} \times 13^3 \times 39^2$ et comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme :

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir exactement 3 Cœur est } \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{5}{3} \times 13^3 \times 39^2}{52^5} \simeq 0.088.}$$

Exercice 2

Vous êtes responsable d'une usine qui produit des téléphones portables. Des statistiques ont montré qu'un téléphone fabriqué sur 10000 est défectueux. Une entreprise vient vous voir pour vous vendre son nouveau test pour détecter automatiquement les téléphones défectueux. Si le téléphone est défectueux, le test est positif à 99% et si le téléphone n'est pas défectueux, le test est positif à $0,1\%$. Est-ce une bonne idée d'utiliser ce test dans votre usine ?

Notons M l'évènement correspondant à « le téléphone est défectueux » et T l'évènement correspondant à « le test est positif ». D'après l'énoncé,

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-4}, \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,99 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,001.$$

En appliquant la formule de Bayes au système complet d'évènements $(M, \overline{M})$ (qui sont bien de probabilités non nulles),

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}_M(T)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\,\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 10^{-3} \times 0,999} \simeq 0,09.$$

Autrement dit, la probabilité qu'un téléphone soit défectueux alors qu'il est positif au test est inférieur à 10%. Ce test n'est donc absolument pas fiable :

$$\boxed{\text{Ce n'est pas une bonne idée d'utiliser ce test.}}$$

On retrouve ce genre de problème dans la détection des maladies rares, les tests de dépistage doivent être extrêmement fiables (bien plus que les chiffres de cet énoncé). Il faut toujours faire attention aux chiffres et aux statistiques !

Exercice 3

Quelle est la probabilité qu'en lançant 6 dés équilibrés, on obtienne 6 résultats tous différents ?

On modélise cette situation par l'espace de probabilité fini $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$ muni de la probabilité uniforme (situation d'équiprobabilité). On a $\text{Card}(\Omega) = 6^6$.
La situation qui nous intéresse est modélisée par l'évènement

$$A = \{(\sigma(1), \ldots, \sigma(6)),\ \sigma \in S_6\}$$

où S_6 est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On a $\text{Card}(A) = 6!$ et comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme :

$$\boxed{\text{la probabilité recherchée est } \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{6!}{6^6} \simeq 0.015.}$$

Exercice 4

On considère une réunion de $n \geqslant 2$ personnes. On considère qu'il y a autant de chance qu'une personne soit un homme ou une femme.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait des personnes des deux sexes (évènement A) ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus une femme (évènement B) ?
3. Donner sans calcul supplémentaire la probabilité de $A \cap B$.

1. On modélise cette expérience aléatoire avec l'univers $\Omega = \{\mathrm{H}, \mathrm{F}\}^n$ fini muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (situation d'équiprobabilité).
   Le contraire de « il y a des personnes des deux sexes » est « il n'y a que des hommes ou que des femmes » donc
   $$\overline{A} = \{\mathrm{H}\}^n \cup \{\mathrm{F}\}^n$$
   où l'union est disjointe. On a donc, comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme,
   $$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\{\mathrm{H}\}^n) + \mathbb{P}(\{\mathrm{F}\}^n) = \frac{\mathrm{Card}(\{\mathrm{H}\}^n)}{\mathrm{Card}(\Omega)} + \frac{\mathrm{Card}(\{\mathrm{F}\}^n)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$
   donc
   $$\boxed{\text{la probabilité recherchée est } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

   On utilise ici deux méthodes très courantes en probabilité : passage au complémentaire et écrire un évènement comme union disjointe d'évènements plus simples

2. Soit $B_0 = \{\mathrm{H}\}^n$ l'évènement correspondant à « il n'y a que des hommes » et B_1 l'évènement correspondant à « il y a exactement une femme » :
   $$B_1 = \big\{(G, \dots, G, F, G, \dots, G) \colon \text{F est au } j\text{-ième rang, } j \in \{1, \dots, n\}\big\}$$
   On a alors $B = B_0 \cup B_1$ avec union disjointe, donc, comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme,
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_1) = \frac{\mathrm{Card}(B_0)}{\mathrm{Card}(\Omega)} + \frac{\mathrm{Card}(B_1)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$
   $$\boxed{\text{La probabilité recherchée est } \mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}.}$$

3. On remarque que $A \cap B = B_1$ (intuitivement cela correspond à « il y a des personnes des deux sexes et il y a au plus une femme » c'est-à-dire « il y a exactement une femme ») donc
   $$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{n}{2^n}.}$$

Exercice 5

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire au hasard et sans remise deux boules simultanément, puis deux boules simultanément, etc. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boule dans l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

C'est une bonne habitude de dessiner un arbre de probabilités afin de modéliser la situation.

▷ Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, posons A_j l'évènement correspondant à « les deux boules tirées au j-ième tirage sont de couleurs différentes ». La probabilité recherchée est $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.
▷ D'après l'énoncé, le premier tirage est équiprobable donc

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}}$$

et les autres aussi donc

$$\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_j}(A_{j+1}) = \frac{(n-j)^2}{\binom{2(n-j)}{2}}.$$

▷ La formule des probabilités composées donne alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_j}(A_{j+1}) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j)^2}{\binom{2(n-j)}{2}} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité recherchée vaut } \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.}$$

Exercice 6

Soit $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$. On dispose de deux pièces numérotée 1 et 2. Quand on les lance, la pièce 1 a une probabilité p_1 de tomber sur « pile », la pièce 2 une probabilité p_2. On commence par lancer la pièce 1. Si elle tombe sur « pile », on la relance, sinon on lance la pièce 2. Ensuite on recommence : on lance la pièce 1 après un « pile », la pièce 2 après un « face » et ainsi de suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que le n-ième lancer donne « pile » ?

▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement correspondant à « obtenir pile au n-ième lancer » et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.
▷ D'après l'énoncé $a_1 = \mathbb{P}(A_1) = p_1$ (on commence par lancer la pièce 1), $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = p_1$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = p_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
▷ Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(A_n, \overline{A_n})$:

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = a_n p_1 + (1 - a_n)p_2 = (p_1 - p_2)a_n + p_2.$$

Quand $p_1 \neq p_2$, on reconnaît une suite arithmético-géométrique.

▷ Si $p_1 = p_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = p_1 = p_2$.
▷ Si $p_1 \neq p_2$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = a_n - \frac{p_2}{1 + p_2 - p_1}$$

et on a alors $b_{n+1} = (p_1 - p_2)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$b_1 = \frac{(p_1 - p_2)(1 - p_1)}{1 + p_2 - p_1}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{(p_1 - p_2)(1 - p_1)}{1 + p_2 - p_1}(p_1 - p_2)^{n-1}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_n) = a_n = \frac{1 - p_1}{1 + p_2 - p_1}(p_1 - p_2)^n + \frac{p_2}{1 + p_2 - p_1}.}$$

Exercice 7 : le paradoxe des anniversaires

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement au hasard n jetons **avec remise** et on s'intéresse à la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plusieurs fois.
   (a) Proposer un univers Ω modélisant cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}$ que l'on considère naturellement sur cet univers ?
   (b) Proposer un évènement $A_n \subset \Omega$ qui modélise « aucun jeton n'est tiré plusieurs fois ».
   (c) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. (a) Parmi une classe de n élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour (on suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février) ?
   (b) À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure ou égale à 50% ? Ce résultat vous parait-il surprenant ?

1. (a) On fait des tirages avec remise, donc on peut considérer $\Omega = \{1, \ldots, M\}^n$ avec $M \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ des entiers. Il s'agit d'un univers fini et nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Il est donc naturel de considérer la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

   $\boxed{\text{On propose l'espace de probabilité discret } \Omega = \{1, \ldots, M\}^n \text{ muni de la probabilité uniforme } \mathbb{P}.}$

   (b) Le fait « aucun jeton n'est tiré plusieurs fois » correspond à un n-arrangement de $\Omega = \{1, \ldots, M\}$. On considère donc

   $\boxed{\text{l'ensemble } A_n \text{ des } n\text{-arrangements de } \Omega = \{1, \ldots, M\}.}$

   (c) Si $n \leqslant M$, le cardinal de A_n est $\frac{M!}{(M-n)!}$ donc par définition de la probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{\mathrm{Card}(A_n)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{M!}{M^n(M-n)!}.$$

   Si $n > M$, A_n est vide (principe des tiroirs) d'où $A_n = \emptyset$ et donc $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} \dfrac{M!}{M^n(M-n)!} & \text{si } n \leqslant M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}}$$

2. (a) Cette situation peut être interprétée comme l'expérience aléatoire de la question 1 : on dispose d'une urne avec $M = 365$ jetons (toutes les dates d'anniversaire) et on tire n jetons avec remise (les dates d'anniversaire des n élèves). On s'intéresse alors à l'évènement $B_n = \overline{A_n}$ modélisant « il y a deux jetons identiques » (c'est-à-dire il y a deux dates d'anniversaire identiques). On a, par passage au complémentaire,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M!}{365^n(365-n)!} & \text{si } n \leqslant 365 \\ 1 & \text{si } n > 365 \end{cases}}$$

(b) Une application numérique donne

$$B_{22} \simeq 0,467 \quad \text{et} \quad B_{23} \simeq 0,507,$$

ce qui montre que :

à partir de 23 élèves, on a plus d'une chance sur deux que deux élèves soient nés le même jour.

Ce résultat peut paraitre surprenant. Quand on pose la question aux gens n'ayant pas eu la chance de suivre le cours *Suites et Séries*, ils ont tendance à chercher la probabilité qu'il y a des dates d'anniversaire égales à *une date d'anniversaire fixée* (par exemple leur propre date d'anniversaire), ce qui donne effectivement des probabilités bien plus faibles ! Alors qu'ici, on cherche la probabilité pour que la date d'anniversaire de *n'importe qui* soit la même que celle de *n'importe qui d'autre*. Ce résultat est appelé **paradoxe des anniversaires**, bien que ce ne soit pas à proprement parler un paradoxe, juste un résultat qui semble contraire à l'intuition.

Il est possible de proposer d'autres modélisations, notamment en utilisant des variables aléatoires indépendantes.