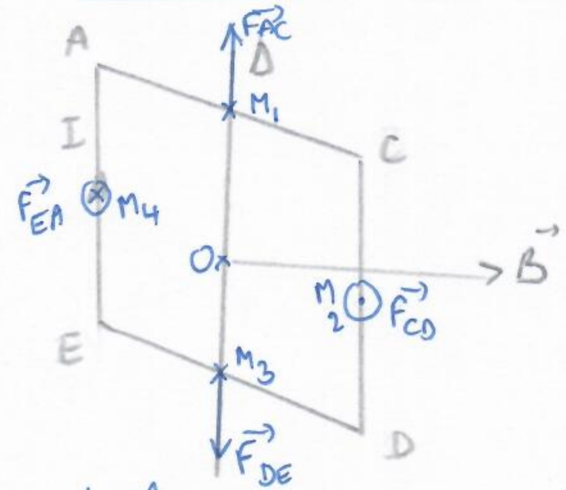
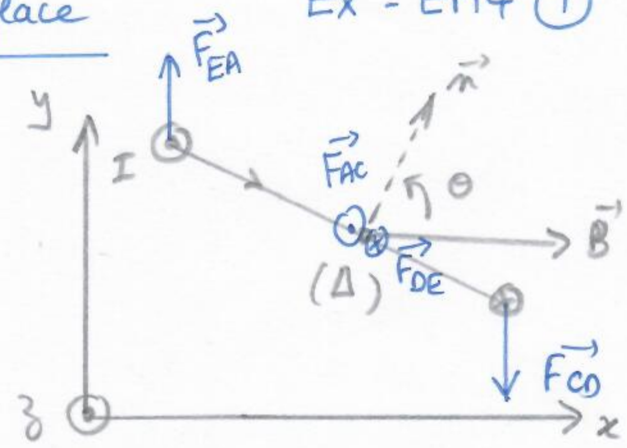
Ex 4.1 - Moment des forces de Laplace





1) Forces de Laplace

$$\vec{F}_{AC} = \int_A^C I\,d\vec{l} \wedge \vec{B} = I\int_A^C \left(dl\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e_x} + \left(-dl\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e_y}\right)\wedge B\vec{e_x}\right.$$

$$= I\int_A^C \left(dl\sin\theta\,\vec{e_x} - dl\cos\theta\,\vec{e_y}\right)\wedge B\vec{e_x}$$

$$= I\int_A^C -dl\cos\theta\left(\vec{e_y}\wedge\vec{e_x}\right)B = \underline{\underline{I\times b\times B\times\cos\theta\,\vec{e_z} = \vec{F}_{AC}}}$$

$$\vec{F}_{CD} = \int_C^D I\,dl(-\vec{e_z})\wedge B\vec{e_x} = I\int_C^D dl\,B\left(-\vec{e_z}\wedge\vec{e_x}\right) = \underline{\underline{-I\times b\times B\,\vec{e_y} = \vec{F}_{CD}}}$$

$$\vec{F}_{DE} = \int_D^E I\,d\vec{l}\wedge\vec{B} = I\int_D^E dl\left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e_x} + dl\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e_y}\right)\wedge B\vec{e_x}$$

$$= I\int_E^D \left(dl(-\sin\theta\,\vec{e_x}) + dl\cos\theta\,\vec{e_y}\right)\wedge B\vec{e_x}$$

$$= I\int_E^D dl\cos\theta\times B\left(+\vec{e_y}\wedge\vec{e_x}\right) = \underline{\underline{-I\times b\times B\cos\theta\,\vec{e_z} = \vec{F}_{DE}}}$$

$$\vec{F}_{EA} = \int_E^A I\,d\vec{l}\wedge\vec{B} = \int_E^A I\,dl\,\vec{e_z}\wedge\vec{B}\,\vec{e_x} = \underline{\underline{I\,b\,B\,\vec{e_y} = \vec{F}_{EA}}}$$

$$\vec{M}_O\left(\Sigma\vec{F}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = M_\Delta\left(\Sigma\vec{F}\right) = \Sigma\left(\vec{OM}\wedge\vec{F}\right)\cdot\vec{e_\Delta}$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{AC}) = \vec{M}_O(\vec{F}_{AC})\cdot\vec{e_\Delta} = \left(\vec{OM_1}\wedge\vec{F}_{AC}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = \left(OM_1\,\vec{e_z}\wedge F_{AC}\,\vec{e_z}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = 0.$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{CD}) = \vec{M}_O(\vec{F}_{CD})\cdot\vec{e_\Delta} = \left(\vec{OM_2}\wedge\vec{F}_{CD}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = \left[OM_2\underbrace{\sin\theta}_{\cos(\pi/2-\theta)}\vec{e_x} + OM_2\underbrace{\cos\theta}_{\sin(\pi/2-\theta)}(-\vec{e_y})\right)\wedge F_{CD}(-\vec{e_y})\Big]\cdot\vec{e_z}$$

$$= OM_2\sin\theta\,F_{CD}\left(\vec{e_x}\wedge(-\vec{e_y})\right)\cdot\vec{e_z} = \frac{b}{2}\sin\theta(+IbB)(-1) = -\frac{Ib^2B}{2}\sin\theta$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{DE}) = 0$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{EA}) = \vec{M}_O(\vec{F}_{EA})\cdot\vec{e_\Delta} = \left[OM_4(-\sin\theta\,\vec{e_x}) + OM_4\cos\theta\,\vec{e_y}\right)\wedge F_{EA}\vec{e_y}\Big]\cdot\vec{e_\Delta}$$

$$= \frac{b}{2}\sin\theta\,F_{EA}\left(-\vec{e_x}\wedge\vec{e_y}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = \frac{b}{2}\sin\theta\,IbB(-1) = -\frac{b^2IB}{2}\sin\theta$$

$$\boxed{\Sigma M_\Delta(\vec{F}) = -Ib^2B\sin\theta} = -mB\sin\theta$$

$\vec{\Gamma}_0 = \vec{m} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{m} = IS\vec{n} = IS(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y})$

$\Gamma_\Delta = \vec{\Gamma}_0 \cdot \vec{e_\Delta} = [IS(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}) \wedge B\vec{e_x}] \cdot \vec{e_\Delta}$

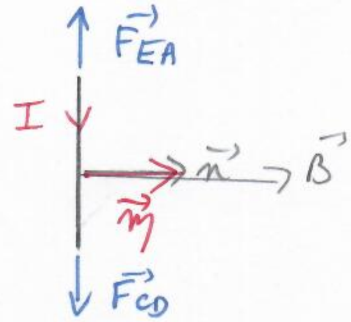
$\boxed{\Gamma_\Delta = -ISB\sin\theta} = -mB\sin\theta$

2) Equilibre du cadre lorsque $\Sigma M_\Delta(\vec{F}) = 0$

ici $-ISB\sin\theta = 0 \iff \theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

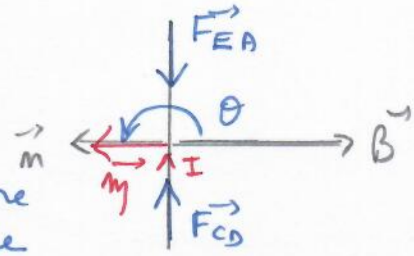
$\theta = 0$

Equilibre stable



$\theta = \pi$

Equilibre instable



3) Soit J le moment d'inertie du cadre / l'axe Δ

Théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F})$

ici $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \Sigma M_\Delta(\vec{F})$

$J\ddot{\theta} = -mB\sin\theta$

$\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{mB}{J}\sin\theta = 0}$ Eq. différentielle du 2° ordre à coefficients constants.

Pour des petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$

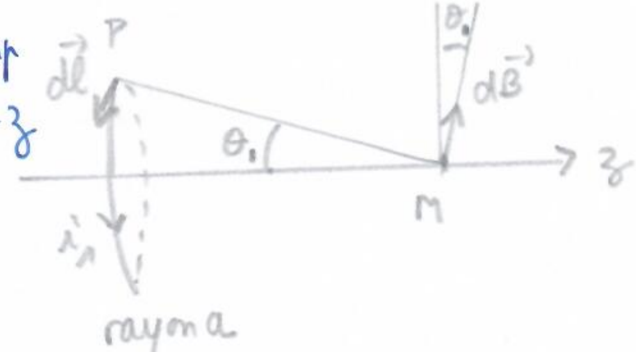
$\ddot{\theta} + \dfrac{mB}{J}\theta = 0$

Equation du type : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mB}{J}}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mB}} = T}$

Ex 4.3 - Lévitation magnétique

1) Pour 1 spire, exprimons le champ élémentaire dB_z projeté sur l'axe z



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{\vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad \text{(Biot et Savart)}$$

$$\|\vec{PM}\| = r = \frac{a}{\sin\theta_1}$$

$$PM^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta_1} = r^2$$

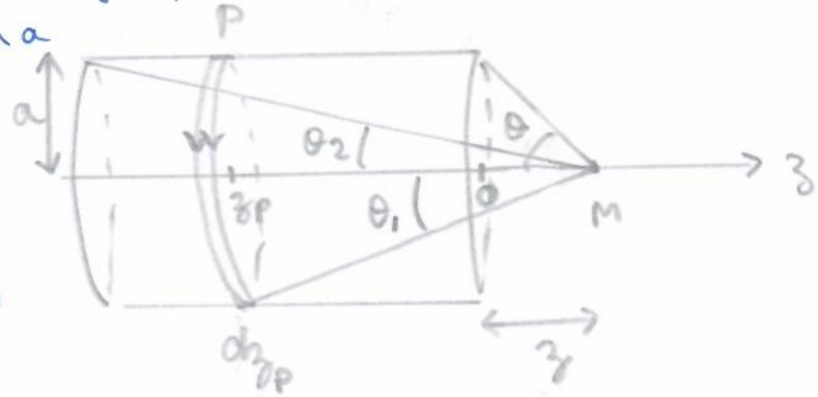
$$dB_z = d\vec{B} \cdot \vec{e_z} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \left(\frac{d\ell\, \vec{e_\theta} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{d\ell}{r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{d\ell}{r^2} \sin\theta_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{d\ell \sin^3\theta_1}{a^2}$$

$$B_z(\theta_1) = \int dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{2\pi a \sin^3\theta_1}{a^2} = \boxed{\mu_0 \frac{i_1 \sin^3\theta_1}{2a}} \quad \text{pour 1 spire.}$$

Pour un solénoïde semi-infini,
Pour dn spires jointives, on a

$$B_z(\theta_1) = dn\, \mu_0 \frac{i_1}{2a} \sin^3\theta_1$$



Pour le solénoïde, on a

$$B_z = \int n\, dz_P\, \mu_0 \frac{i_1}{2a} \sin^3\theta_1$$

avec
$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{z - z_P}{PM} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{a}{PM} \\ \tan\theta_1 = \dfrac{a}{z - z_P} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{z}_{\text{cste}} - z_P = \frac{a}{\tan\theta_1}$$

$$d(z - z_P) = \underbrace{dz}_{0 \text{ car M est fixé}} - dz_P = a\, d\left(\frac{1}{\tan\theta_1}\right) = a\left(-\frac{d\theta_1}{\sin^2\theta_1}\right) = -dz_P$$

$$B_z = \int_{\theta_1 = 0}^{\theta} n\, \mu_0 \frac{i_1}{2a} \sin^3\theta_1 \left(a \frac{d\theta_1}{\sin^2\theta_1} \right) = \int_0^\theta n\, \mu_0 \frac{i_1}{2} \sin\theta_1\, d\theta_1$$

(solénoïde semi-infini)

$$= n\, \mu_0 \frac{i_1}{2} \left[-\cos\theta_1 \right]_0^\theta = n\, \mu_0 \frac{i_1}{2} \left[-\cos\theta + \cos 0 \right]$$

$$B_z = n\, \mu_0 \frac{i_1}{2} \left[1 - \cos\theta \right] \Rightarrow \boxed{\vec{B} = n\, \mu_0 \frac{i_1}{2} \left[1 - \cos\theta \right] \vec{e_z}}$$

$i_1 = i_{1m} \cos wt$

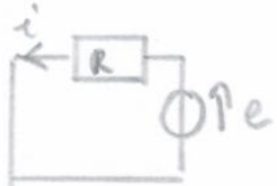
2) Pour calculer le courant induit dans la bobine, on calcule le flux créé par $\vec{B}$ du solénoïde dans la petite bobine de rayon b.

$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B \vec{e_z} \cdot dS \vec{e_z}$ pour 1 spire

$\phi = n \mu_0 \frac{i_1}{2} [1 - \cos\theta] \pi b^2$

Pour N spires, $\phi_N = N n \mu_0 \frac{i_1}{2} [1 - \cos\theta] \pi b^2 = M i_1$
où M est la mutuelle inductance.

On décrit alors le circuit électrique équivalent



$e = -\frac{d\phi_{bobine}}{dt} = R i_{induit} = R i$

avec $\phi_{bobine} = \phi_{propre} + \phi_{solénoïde \to bobine} = L i_{induit} + M i_1 = Li + M i_1$

$\Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = Ri \Rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0.$

En régime sinusoïdal établi $\underline{i} = I_m e^{j wt} e^{j\varphi}$

$R\underline{i} + L j w \underline{i} + M j w \underline{i_1} = 0 \Rightarrow \underline{i} = -\underline{i_1} \frac{j w M}{R + jLw}$

$I_m \cancel{e^{jwt}} e^{j\varphi} = - i_{1m} \cancel{e^{jwt}} \frac{j w M}{R + jLw} = - i_{1m} \frac{w M}{-jR + Lw} \cancel{e^{jwt}}$

$I_m = |\underline{i}| = \frac{M w i_{1m}}{\sqrt{L^2 w^2 + R^2}}$

et $\varphi = + \arg(-i_{1m} w M) - \arg(-jR + Lw) = \pm \pi + \arctan\left(+\frac{R}{Lw}\right)$

$\cos\varphi = \frac{-Lw}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}$) *

$\Rightarrow i = I_m \cos(wt + \varphi) = \boxed{\frac{M w i_{1m}}{\sqrt{L^2 w^2 + R^2}} \cos(wt + \varphi) = i}$

3) On a $B_r = \frac{\mu_0 n i_1 b}{4a} \sin^3\theta$.

$\vec{F} = \int N i \vec{dl} \wedge \vec{B} = \int N i \, dl \, \vec{e_\theta} \wedge B_r \vec{e_r} = \int N i \, dl \, B_r (-\vec{e_z})$

$= \int \underbrace{N i \frac{\mu_0 n i_1 b}{4a}}_{cst} \sin^3\theta \, dl (-\vec{e_z}) = N i \mu_0 \frac{n i_1 b}{4a} \sin^3\theta \times 2\pi b (-\vec{e_z})$

$= - \frac{N \mu_0 n \pi b^2}{2a} I_m \cos(wt + \varphi) i_{1m} \cos(wt) \sin^3\theta \, (\vec{e_z})$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

$= - N \frac{\mu_0 n \pi b^2}{2a} I_m i_{1m} \left[\frac{1}{2}\left(\cos(2wt + \varphi) + \overset{*}{\cos(\varphi)}\right)\right] \sin^3\theta \, \vec{e_z}$

or $\langle \cos(2wt + \varphi) \rangle = 0$

$\langle \vec{F} \rangle = - \frac{N \mu_0 n \pi b^2}{4a} I_m i_{1m} \sin^3\theta \left(\frac{-Lw}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}\right) \vec{e_z}$

$\boxed{\langle \vec{F} \rangle = + \frac{N \mu_0 n \pi b^2}{4a} I_m i_{1m} \sin^3\theta \frac{Lw}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}} \vec{e_z}}$

Il y a lévitation si $F \geq$ Poids pour $\theta = \pi/2$ au dessus du solénoïde, équilibre stable.
$\sin\theta = 1$

$\Rightarrow i_{1m} = \frac{mg \, 4a \sqrt{R^2 + L^2 w^2}}{\ldots}$

4) $\mathcal{P}_0 = R i^2 = R I_m^2 \cos^2(wt + \varphi)$

$\boxed{\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2}$

Ex 4.5 - Système de 2 barres mobiles

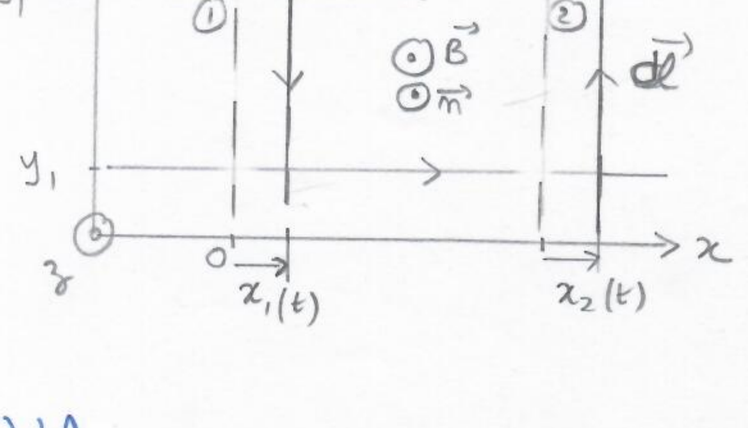
Raisonnement qualitatif :

Déplacement de la barre 1 → variation du flux magnétique
↓
force électromotrice (élect)
↓
courant induit → forces de Laplace → déplacement barre 2 (méca)

(déplacement barre 1 (régime forcé).)

⚠ orienter sens ⊕ du courant et sens ⊕ pour la normale $\vec{n}$ (calcul du flux).

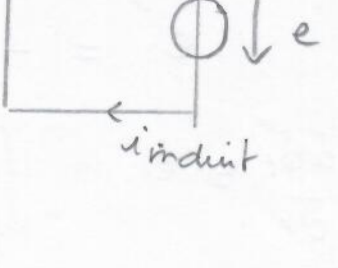
1) Barre 1 : $x_1(t) = a\cos(\omega t)$



- Déplacement de barre ①
↓
- $$\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS}$$
$$= \iint B\vec{e_z}\cdot dS\,\vec{e_z}$$
$$= B\int_{x_1}^{l_0+x_2} dx \int_{y_1}^{y_1+l} dy$$
$$= B\,(l_0 + x_2 - x_1\quad))l$$
$$= B\,a\,(l_0 + x_2(t) - x_1(t))$$
- Variation de flux
$$\frac{d\phi_B}{dt} = Bl\,\frac{d}{dt}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = Bl\,(v_2(t) - v_1(t))$$
- force électromotrice — loi de Lenz
$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Bl\,(v_2(t) - v_1(t))$$

…/…

- Courant induit
$$e = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{-Bl\,(v_2(t) - v_1(t))}{R}$$



- Forces de Laplace
$$\vec{F_2} = \int i(t)\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$
$$\vec{F_2} = \int_{y_1}^{y_1+l}\left(-\frac{Bl}{R}\left(v_2(t) - v_1(t)\right) dl\,\vec{e_y}\wedge B\,\vec{e_z}\right.$$
$$\vec{F_2} = -\frac{B^2l^2}{R}\left(v_2(t) - v_1(t)\right)\vec{e_x}$$

RFD : pour barre 2

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{F_2} = m \frac{d\vec{v_2}}{dt}(t)$$

$$-\frac{B^2 l^2}{R}\left(v_2(t) - v_1(t)\right)\vec{e_x} = m\frac{dv_2}{dt}(t)\,\vec{e_x}$$

Selon $\vec{e_x}$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v_2(t) = \frac{B^2 l^2}{mR} v_1(t) \qquad \text{avec } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$$

$$\boxed{\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_2(t) = \frac{1}{\tau} v_1(t)} = \frac{1}{\tau}\frac{dx_1}{dt}(t)$$

Eq. différentielle du 1er degré en $v_2(t)$

$$\boxed{\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_2}{dt}(t) = \frac{1}{\tau}\frac{dx_1}{dt}(t)}$$

Eq. différentielle du 2° ordre en x_2 à coeff constants mais avec un second membre variable.

Pour la résolution, on passe en notation complexe :

$$\frac{d^2 \underline{x_2}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\underline{x_2}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\frac{d\underline{x_1}(t)}{dt}$$

$$\left[(j\omega)^2 + \frac{1}{\tau} j\omega\right]\underline{x_2}(t) = \frac{1}{\tau} j\omega\, \underline{x_1}(t)$$

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{x_2}(t) = \frac{1}{\tau}\underline{x_1}(t)$$

$$\boxed{\underline{x_2}(t) = \frac{1/\tau}{1/\tau + j\omega}\underline{x_1}(t)} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}\underline{x_1}(t)$$

$$|\underline{x_2}(t)| = \frac{a/\tau}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg \underline{x_2} = \arg a - \arg(1 + j\tau\omega) = 0 - \arctan(\tau\omega)$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\cos(\omega t + \varphi)}$$

2) On déplace la barre 1 de x, très rapidement, puis on laisse 1 fixe.

à $t = 0$, $v_1(t=0) = v_1$ et x_1 se déplace de 0 à x.

à $t = 0^+$, $v_1(t = 0^+) = 0$

Mouvement de 2 ?

$x_1 : 0 \to x$ donc $\frac{d\phi}{dt} \searrow$, $\exists$ fem induite telle que $e = -\frac{d\phi}{dt} > 0$

$i_{induit} > 0$ apparait barre 2 $\Rightarrow \vec{F}_{Laplace} = F\,\vec{e_x}$

cette force implique une $\nearrow$ de flux qui compense la $\searrow$ initiale.

La barre 2 s'arrête quand le circuit a repris sa taille initiale.

A $t = 0$, $x_2 - x_1 = l_0$.

A $t \to \infty$, $x_2 - x_1 = l_0$.

RFD : barre 2

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$-\frac{B^2 l^2}{R}\left(v_2(t) - v_1\right)\vec{e_x} = m\frac{d\vec{v_2}}{dt}$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR}\left(v_2(t)\right) = \frac{B^2 l^2}{mR} v_1$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{\tau}\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau}\dot{x}_1$$

$\int$ intégration $/t$

$$\dot{x}_2(t) + \frac{1}{\tau}x_2(t) = \frac{1}{\tau}(\Delta x_1) \qquad \Delta x_1 = x \text{ (énoncé)}$$

$$x_2(t) = x_{2p} + x_{2H}$$
$$= \Delta x_1 + C e^{-t/\tau}$$

à $t = 0$, $x_2(t) = 0 = \Delta x_1 + C \Rightarrow C = -\Delta x_1$

$$\boxed{x_2(t) = \Delta x_1\left[1 - e^{-t/\tau}\right]} \to \text{à } t = 0,\ x_2(t) = 0$$

à $t \to \infty$, $x_2(t) \to \Delta x_1$

3) On donne à 1 une vitesse $V = cste$.

RFD : barre 2

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_2(t) = \frac{1}{\tau}V$$

Solutions du type : $V_2(t) = V_{2p} + V_{2H}$

$$= V + K e^{-t/\tau}$$

à $t = 0$, $V_2(t) = 0 = V + K \Rightarrow K = -V$

$$\boxed{V_2(t) = V\left[1 - e^{-t/\tau}\right]} \to \text{à } t = 0,\ V_2(t) = 0.$$

à $t \to \infty$, $V_2(t) \to V$

Après un régime transitoire, les 2 barres vont évoluer à la même vitesse V. Il n'y aura plus de variation de flux donc $i_{induit} = 0$, $\vec{F_L} = \vec{0} \Rightarrow$ Mouvement uniforme des 2 barres.