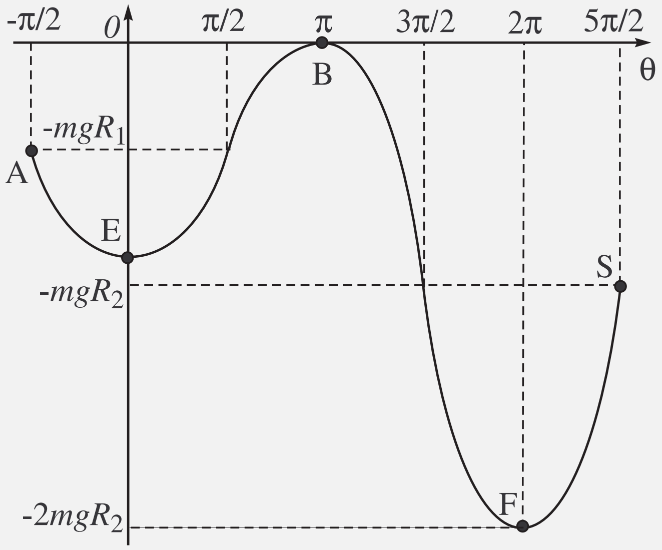
# Devoir Maison - Mécanique du point matériel - CORRECTION

*Exercice 1 : Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire*

1. $M$ est soumis à son poids $P = -mg\vec{e}_z$ et à la réaction du support $N$ qui ne travaille pas puisqu'elle est orthogonale au mouvement. On note $z$ son altitude.
   Alors, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à $M$ entre les points $E$ et $M$ (position quelconque) :
   $\frac{1}{2}mR_1^2(\dot\theta^2 - \dot\theta_E^2) = [E_c]_E^M = W(\vec{P})_{E\to M} = -mg[z-(-2R_1)] = -mgR_1(-1-\cos\theta+2)$
   car $z = -R_1(1+\cos\theta)$ sur la partie (1).
   donc
   $$\boxed{\dot\theta^2 = \dot\theta_E^2 - \frac{2g}{R_1}(1-\cos\theta)}$$
2. La verticale étant ascendante, $E_{pg} = mgz + K$, avec $K$ constante nulle pour que $E_{pg}(B) = 0$.
   D'où
   $$\boxed{E_{pg} = \begin{cases} -mgR_1(1+\cos\theta) & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi \\ -mgR_2(1+\cos\theta) & \text{si } \pi < \theta < 5\pi/2 \end{cases}}$$
3. L'allure est donnée ci-dessous :




4. $E$ et $F$ sont des positions d'équilibre stables car les énergies potentielles associées sont des minima locaux alors que $B$ est une position d'équilibre instable car l'énergie potentielle associée est un maximum local.
5. Pour $-\pi/2 < \theta < \pi$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = mgR_1\sin\theta$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR_1\cos\theta$
   En $\theta = \theta_E = 0$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR_1 \geq 0$, $E$ est donc bien une position d'équilibre stable.
   En $\theta = \theta_B = \pi$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = -mgR_1 \leq 0$, $B$ est donc bien une position d'équilibre instable.
   Pour $\pi < \theta < 5\pi/2$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = mgR_2\sin\theta$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR_2\cos\theta$
   En $\theta = \theta_F = 2\pi$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR_1 \geq 0$, $F$ est donc bien une position d'équilibre stable.
   En $\theta = \theta_B = \pi$, $\frac{\mathrm{d}E_{pg}}{\mathrm{d}\theta} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2E_{pg}}{\mathrm{d}\theta^2} = -mgR_1 \leq 0$, $B$ est encore une position d'équilibre instable.

6. $M$ est soumis à son poids $P$ conservatif et à la réaction du support $N$ qui ne travaille pas puisqu'elle est orthogonale au mouvement. Son énergie mécanique se conserve donc.

   Pour arriver au point $F$, $M$ doit dépasser le point $B$ avec une vitesse $v_B$ non nulle (cela revient à avoir $E_m > 0$, notamment en raisonnant graphiquement). C'est le point qui présente la plus forte "barrière de potentiel" en venant de $A$. Or
   $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_1 = E_{m,A} = E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_B^2$
   donc $v_B^2 = v_0^2 - 2gR_1 > 0$ soit

   $$\boxed{v_0 > \sqrt{2gR_1}}$$

7. $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_1 = E_{m,A} = E_{m,F} = \frac{1}{2}mv_F^2 - 2mgR_2$
   donc

   $$\boxed{v_F = \sqrt{v_0^2 + 2g(2R_2 - R_1)}}$$

8. En raisonnant graphiquement, on voit qu'avec $v_B > 0$ et donc $E_m > 0$, le mouvement n'est pas borné. L'anneau peut donc sortir au point $S$ avec une vitesse non nulle donnée par :
   $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_1 = E_{m,A} = E_{m,S} = \frac{1}{2}mv_S^2 - mgR_2$
   et donc

   $$\boxed{v_S = \sqrt{v_0^2 + 2g(R_2 - R_1)}}$$

9. $E_m = \frac{1}{2}m(R_2\dot{\theta})^2 - mgR_2(1 + \cos\theta)$
   En dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $mR_2^2\dot{\theta}$ (car $\dot{\theta}$ est non identiquement nulle) :
   $0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{R_2}\sin(\theta)$
   Dans les conditions données, $\theta$ reste proche de $\theta_F = 2\pi$. Posons $\varepsilon = \theta - 2\pi$ avec $\varepsilon \ll 2\pi$.
   Alors $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ et $\sin(\theta) = \sin(2\pi + \varepsilon) = \sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon$ donc

   $$\boxed{0 = \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{R_2}\varepsilon}$$

   C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période

   $$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_2}{g}}}$$

10. Ces oscillations sont amorties jusqu'à disparaître. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique, cette dernière est dissipée au cours du mouvement.

*Exercice 2 : Satellite géostationnaire*

1. Pour le point matériel $M$ en mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique adapté à l'échelle de ce problème (ce qui n'est pas le cas du référentiel terrestre), le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit :
   $m(-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = m\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\vec{e}_r$
   Ce qui donne selon $\vec{e}_\theta$ : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $v = v_0$ est une constante, le mouvement est uniforme.
   Selon $\vec{e}_r$ : $-mv^2/r = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}$ donc $\boxed{v_0 = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r}}$.
   À la surface de la Terre, : $mg_0 = \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2}$ donc $\mathcal{G}M_T = g_0 R_T^2$. D'où $\boxed{v_0 = R_T\sqrt{g_0/r}}$
2. $v_0 = R_T\sqrt{g_0/(R_T+h)} = \sqrt{\mathcal{G}M_T/(R_T+h)}$ alors $\boxed{v_0 = 7,72 \text{ km.s}^{-1}}$
3. Le satellite n'est soumis qu'à une force conservative, donc l'énergie mécanique $E_m$ se conserve d'après le théorème de l'énergie mécanique.
   La force de gravitation s'exerçant sur le satellite dérive de $E_p = -\mathcal{G}M_T m/r + K$.
   Pour que $E_r \to 0$ quand $r \to +\infty$, il faut $K = 0$.
   Et $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}M_T m/r$, d'où $\boxed{E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\mathcal{G}M_T m/r}$.
4. En présence de forces de frottements fluides $\vec{f}$ opposées à la vitesse, $E_m$ diminue au cours du mouvement, il y a dissipation d'énergie (en fait conversion de l'énergie mécanique en énergie thermique).
   Donc le rayon de la trajectoire $r$ diminue d'après l'expression établie à la question précédente et la vitesse augmente d'après son expression.
   Néanmoins, pour être rigoureux, il faudrait établir les nouvelles expressions de ces grandeurs car le mouvement n'est plus circuliaire uniforme.
5. Dans ce cas, dans le référéentiel géocentrique, le satellite a un mouvement de rotation de rayon $r_0 = R_T\cos\lambda$ autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\Omega$. Son énergie cinétique vaut donc
   $E_{c0} = \frac{1}{2}m(r_0\Omega)^2 = \frac{1}{2}m(2\pi R_T\cos\lambda/T)^2$.
   Son énergie potentielle vaut $E_{p0} = -\mathcal{G}M_T m/R_T$.
   D'où $\boxed{E_{m0} = \frac{1}{2}m(2\pi R_T\cos\lambda/T)^2 - \mathcal{G}M_T m/R_T}$.
6. $E_{p0}$ ne dépend pas de la latitude $\lambda$ (la Terre étant supposée parfaitement sphérique). $E_{c0}$ et donc $E_{m0}$ sont maximales quand $\lambda = 0$, ce qui correspond à l'équateur.
   Pour lancer un satellite, il faut lui fournir de l'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Ce supplément d'énergie est minimal quand $E_{c0}$ est maximale. Il est donc judicieux de lancer ce satellite depuis une latitude faible (idéalement nulle).
   Pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale à l'Équateur apportée par la rotation de la Terre, il faut envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'Est.

7. Le plan de la trajectoire du satellite doit contenir le point $O$ d'après l'énoncé. Pour qu'un satellite géostationnaire soit toujours au-dessus d'un même point de la surface terrestre, le plan de sa trajectoire doit être orthogonal à l'axe des pôles. Tout satellite géostationnaire a donc une trajectoire contenue dans le plan de l'Équateur, la réponse à la question posée est non.
8. Ce satellite géostationnaire tourne dans le plan de l'équateur sur un cercle de rayon $r_G = R_T + h_G$ avec la même vitesse angulaire $\Omega$ que la Terre.
   Donc $v_G = r_G \Omega = 2\pi r_G / T$, or $v_G = \sqrt{\mathcal{G} M_T / r_G}$ d'après la question 2.
   On en déduit la **troisième loi de Kepler** :
   $$\frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}$$
   De plus, $r_G = (\frac{T^2 \mathcal{G} M_T}{4\pi^2})^{1/3}$
   donc $\boxed{h_G = r_G - R_T = 35,8.10^3 \text{ km}}$ avec $T = 24$ h.
   $v_G = 2\pi / T (\frac{T^2 \mathcal{G} M_T}{4\pi^2})^{1/3}$ soit $\boxed{v_G = 3,07 \text{ km.s}^{-1}}$.
   Ces résultats sont indépendants de la masse du satellite qui peut donc être quelconque.
   $E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2} \mathcal{G} M_T m / r_G$ donc $\boxed{E_{mG} = -4,7.10^9 \text{ J}}$.
9. Les résultats sont réunis dans un tableau :

| | E$_c$($10^9$J) | E$_p$($10^9$J) | E$_m$($10^9$J) |
|---|---|---|---|
| À la surface de la Terre (indice 0) | 0,1 | -62,6 | -62,5 |
| Géostationnaire (indice $G$) | 4,7 | -9,4 | -4,7 |