1 Tension et intensité d'une bobine en RSE (40)

Solution :

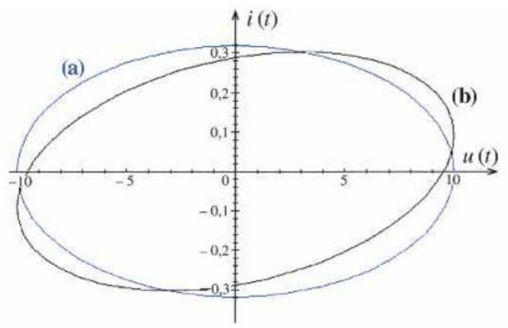
1 Son impédance $Z = jL\omega$

En RSE, on a $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{u_m}{jL\omega}$

Donc $i(t) = \frac{u_m}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_m}{L\omega}\sin\omega t$

2 on a les expressions : $i(t) = \frac{u_m}{L\omega}\sin\omega t$, $u(t) = u_m\cos(\omega t)$

Ainsi la courbe $i(u)$ de la bobine idéale est une ellipse. Le sens de parcours de l'ellipse est anti-horaire.



Doc. 24. *Caractéristiques dynamiques à $f = 50$ Hz.*
(a) *bobine idéale :* **(b)** *bobine réelle.*

3 $Z_{tot} = r + jL\omega = 10 + 32j\ \Omega$

$i(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{u_m}{r+jL\omega}\right) = \frac{u_m}{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$, avec $\tan\varphi = \frac{L\omega}{r}$

Application numérique : $i(t) = 0{,}30\cos(\omega t - \varphi)$, avec $\tan\varphi = 3{,}2$

$i_{\mathrm{eff}} = \frac{0{,}30}{\sqrt{2}} = 0{,}21$ A

Le facteur de puissance est $\cos\varphi = 0{,}30$

4 $i(t) = \frac{u_m}{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{u_m}{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}\sin\left(\omega t' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$,

$u(t) = u_m\cos(\omega t) = u_m\cos\left(-\omega t' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ décrit elle ellipse tiltée.

L'ellipse nouvelle d'une bobine réelle est tracée dans la figure précédente. Cette ellipse est tiltée avec un angle positif (l'axe longue dans les 1[e] et 3[e] quadrant), car à t=0, $u(t)$ est maximale, $i(t)$ est positive.

5 Quand le facteur de puissance devient 1, les impédances inductives/capacitives s'annulent entre elles.

$$jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = 0$$

On obtient $C = 98\ \mu\text{F}$

Le fait $\cos\varphi = 1$ correspond à la résonance de l'intensité, car l'amplitude de $i(t)$ est maximale en ce moment (la norme de Z est minimale)

2. Spectres des signaux triangulaires et créneaux (40)

Solution

1 On applique le théorème de Fourier :

$$\langle u \rangle = 0$$

Supposons que $u(y)$ est impaire, ainsi $A_n = 0$ pour tous nombres entiers n.

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-A)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{T}{2}} A\sin(n\omega t)\,dt\right]$$
$$= \frac{2A}{n\pi}(1 - cos(n\pi))$$

$\mathrm{Donc\ B_n = 0\ si\ n\ est\ pair\ et\ B_n = \frac{4A}{n\pi}\ si\ n\ est\ impair}$

2 Supposons que le signal triangulaire est pair, ainsi $A_0 = 0$ et $B_n = 0$ pour tous nombres entiers.

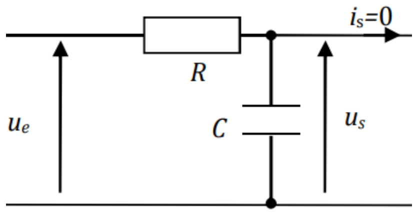
$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Le dérive $\frac{du}{dt}$ est un signal créneau, impaire, de pulsation ω, et d'amplitude crête-à-crête $2 \times \frac{2A}{T/2} = \frac{4A\omega}{\pi}$, donc on a :

$$\frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t)\,(-n\omega)$$

Selon le résultat de la question précédente, on a $A_n \times (-n\omega) = \frac{2\frac{4A\omega}{\pi}}{n\pi} = \frac{8A\omega}{n\pi^2}$ pour n impair. Ainsi $A_n = \frac{8A}{n^2\pi^2}$

3 le schéma :



Pour un filtre passe-bas RC, on a $\omega_c = \frac{1}{RC}$, $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$

Par l'application numérique, on a $f_c = 1{,}6$ kHz.

4 on a $f \ll f_c$ en ce moment, donc la plupart des spectres peuvent passer le filtre RC. Le spectre du signal triangulaire décroît très rapidement avec n, donc avec la même fonction de transfert, le signal triangulaire se déforme moins.

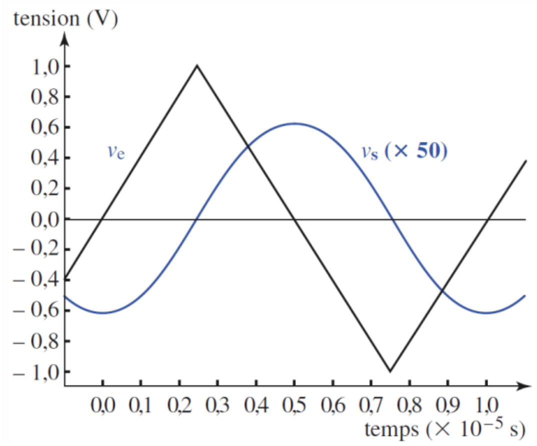
5 On a $f \gg f_c$ en ce moment. Le signal d'entré v_e a une valeur moyenne 0, ainsi son terme constant est nul, donc tous ses composants sinusoïdaux ont une pulsation beaucoup plus grande que la pulsation de coupure du filtre passe-bas, donc le filtre fonctionne comme un intégrateur pour v_e. v_e est linéaire, donc v_s est quadratique. v_e est antisymétrique par rapport à son intersection avec l'abscisse, donc v_s l'est aussi. Donc un quart de période de v_e, varié entre 0 et son amplitude, correspond à la transition de v_s de 0 à sa valeur extrême.

On calcul l'intégration du signal d'entré dans un quart de période : $e(t) = Akt$, avec la pente $k = \frac{4}{T}$

$$\Delta s = \omega_0 \int_0^{\frac{T}{4}} Akt\,\mathrm{d}t = \frac{\omega_0 Ak}{2}\frac{T^2}{16} = \frac{\omega_0 AT}{8} = \frac{10^4 A 10^{-5}}{8} = \frac{A}{80}$$

Donc l'amplitude du signal de sortie est $\frac{A}{80}$

Le signal de sortie tracée sur le schéma ci-dessous :



3. Théorème de Parseval (20)

Correction :

On vérifie d'abord l'expression de la décomposition de Fourier du signal redressé double alternance :

$$u(t) = \frac{2u_0}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\omega_0 t)}{4n^2 - 1}\right]$$

Où u_0 est l'amplitude du signal d'entrée.

Supposons que le signal initial est $e(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Alors on a l'expression du signal redressé en double alternance : $u(t) = u_0|\sin(\omega_0 t + \varphi)|$, et la nouvelle période est $T = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$, ainsi la pulsation fondamentale de u est $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_0$

On choisit la phase initiale de $u(t)$ pour que $u(t = 0) = 0$: ainsi $u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t)$ pour l'intervalle $t \in \left[0, T = \frac{\pi}{\omega_0}\right]$.

Ainsi par le théorème de Fourier, on a les coefficients de Fourier $B_n = 0$ et

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T u_0 \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2u_0}{T}\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t)\cos(2n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2u_0}{T\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos(2n\omega_0 t)\,\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)$$

On a

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{2u_0}{T\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos(2\omega_0 t)\,\mathrm{d}\cos(\omega_0 t) = -\frac{2u_0}{T\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} [2\cos(\omega_0 t)^2 - 1]\,\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)\\ &= \frac{2u_0}{T\omega_0}\left[\cos(\omega_0 t)|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} - \frac{2}{3}\cos(\omega_0 t)^3|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}}\right] = \frac{2u_0}{T\omega_0}\left[-2 - \frac{2}{3}\times(-2)\right] = -\frac{4u_0}{3T\omega_0}\\ &= -\frac{4u_0}{3\pi}\end{aligned}$$

1 On choisit la phase initiale du signal d'entrée pour que $u(t) = u_0\cos(\omega_0 t)$. Le redressement de simple alternance a pour effet de donner une tension de sortie $u_s(t) = \max(0, u_0\cos(\omega_0 t))$, donc dans une période $(-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0})$, $u_s(t) = u_0\cos(\omega_0 t)$ pour l'intervalle $(-\frac{\pi}{2\omega_0}, \frac{\pi}{2\omega_0})$, et sinon $u_s(t) = 0$

Par définition, $u_{\text{eff,simple}} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} u_s^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} u_0^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt} = \frac{u_0}{2}$

Le redressement de double alternance donne la tension de sortie $u_s(t) = u_0|\cos(\omega_0 t)|$, la nouvelle période est $T = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$, on a

$$u_{\text{eff,double}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} u_s^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} u_0^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$$

Conclusion : le redressement simple alternance divise la tension efficace par $\sqrt{2}$, et la double alternance garde la même tension efficace que le signal non redressé.

2 La puissance d'un signal est proportionnelle au carré de tension efficace. Supposons que la charge du signal est une résistance pure R.

Donc la puissance globale du signal redressé est : $P_{\text{globale}} = \frac{u_{\text{eff,double}}^2}{R} = \frac{u_0^2}{2R}$

La puissance de chaque terme de la décomposition de Fourier :

$P_0 = \frac{\left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}{R}$, $P_{n\geq 1} = \frac{\left(\frac{4u_0}{(4n^2-1)\pi}\right)^2}{2R}$, le 2 dans le dénominateur est du à l'effet de variation sinusoïdale des termes harmoniques.

Donc $\frac{P_0}{P_{\text{globale}}} = \frac{\frac{\left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}{R}}{\frac{u_0^2}{2R}} = \frac{8}{\pi^2} = 81.06\%$

$$\frac{P_1}{P_{\text{globale}}} = \frac{\frac{\left(\frac{4u_0}{(4-1)\pi}\right)^2}{2R}}{\frac{u_0^2}{2R}} = \frac{16}{9\pi^2} = 18.01\%$$

Ainsi $P_0 + P_1$ dépasse déjà le seuil 99% demandé. La pulsation de coupure $\omega_c > 1\omega = 2\omega_0$

La valeur minimale de f_c doit être supérieure à $2f_0$, ou double de la fréquence du signal non-redressé.