Mathématiques I – TD_1

14-15 février 2022

Exercice 1 (Rappel)

Soit X et Y deux ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$.

1. Montrer que : f est injective si, et seulement si, il existe $g\colon Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
2. Montrer que : f est surjective si, et seulement si, il existe $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Pour montrer une équivalence (« si, et seulement si »), on fait une double implication.

1. — Supposons que f soit injective.

   L'idée à exploiter est le fait que f est bijective sur son image

   $$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in X\} = \{y \in Y,\ \exists x \in X,\ y = f(x)\}$$

   On définit une application $g\colon Y \to X$ de la manière suivante. Soit $y \in Y$.
   - Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et il est unique car f est injective. On pose alors $g(y) = x$.
   - Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, on pose $g(y) = x_0$ avec $x_0 \in X$ quelconque.

   Montrons alors que $g \circ f = \mathrm{id}_X$, c'est-à-dire

   $$\forall x \in X,\ (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$$

   Pour montrer un résultat du type $\forall x \in E\dots$ on commence par « soit $x \in E$ ».

   Soit $x \in X$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $g\big(f(x)\big) = x$ par définition de g. On a donc $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   — Supposons qu'il existe $g\colon Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Soit $(x_1, x_2) \in X^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors
   $$g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$$
   Mais $g\big(f(x_1)\big) = (g \circ f)(x_1) = \mathrm{id}_X(x_1) = x_1$ et de même $g\big(f(x_2)\big) = x_2$. On a donc $x_1 = x_2$ et on en déduit que f est injective.

   Conclusion :

   $$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, il existe } g\colon Y \to X \text{ telle que } g \circ f = \mathrm{id}_X.}$$

2. — Supposons que f soit surjective. Soit $y \in Y$. Puisque f est surjective, il existe $x_y \in E$ tel que $y = f(x_y)$. On pose alors $g(y) = x_y$. On a donc définit une application $g\colon Y \to X$. Montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Soit $y \in E$ et soit $x_y \in E$ tel que $y = f(x_y)$. Alors

   $$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_Y(y)$$

   donc $f \circ g = \mathrm{id}_Y$

   — Supposons qu'il existe $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Soit $y \in Y$. On a alors

   $$f\big(g(y)\big) = y$$

   Autrement dit, pour tout $y \in Y$, il existe $x = g(y) \in X$ tel que $y = f(x)$, donc f est surjective.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est surjective si, et seulement si, il existe } g\colon Y \to X \text{ telle que } f\circ g = \mathrm{id}_Y.}$$

Exercice 2

Soit A et B deux ensembles finis.

1. Montrer que $A\times B$ est fini et que $\mathrm{card}(A\times B) = \mathrm{card}(A)\,\mathrm{card}(B)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est fini et $\mathrm{card}(A^n) = (\mathrm{card}\,A)^n$.
3. Montrer que $A\cup B$ est fini et que $\mathrm{card}(A\cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$.

1\.

D'après le cours, A est fini veut dire qu'il existe une bijection entre A et $[\![1, n_A]\!]$, où $n_A = \mathrm{card}(A)$. De plus, comme $\mathrm{card}([\![1, n_A]\!]) = \mathrm{card}([\![0, n_A-1]\!]) = n_A$, alors on peut dire qu'il existe une bijection entre A et $[\![0, n_A-1]\!]$.

Ensuite, on va étudier le cardinal de $[\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]$, et d'utiliser une bijection naturelle entre $[\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]$ et $[\![0, n_A n_B-1]\!]$ donnée par la division euclidienne.

Si $A=\emptyset$ ou $B=\emptyset$ alors $A\times B=\emptyset$ et on a bien

$$\mathrm{card}(A\times B) = \mathrm{card}(\emptyset) = 0 = \mathrm{card}(A)\,\mathrm{card}(B)$$

Supposons que $A\neq\emptyset$ et $B\neq\emptyset$. Posons $n_A = \mathrm{card}(A)\in\mathbb{N}^*$ et $n_B = \mathrm{card}(B)\in\mathbb{N}^*$. Il existe des bijections $\phi_A\colon A\to[\![0, n_A-1]\!]$ et $\phi_B\colon B\to[\![0, n_B-1]\!]$. Alors

$$\left\{\begin{array}{ccc} A\times B & \longrightarrow & [\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!] \\ (a,b) & \longmapsto & \big(\phi_A(a), \phi_B(b)\big) \end{array}\right.$$

est une bijection puisqu'elle admet pour réciproque

$$\left\{\begin{array}{ccc} [\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!] & \longrightarrow & A\times B \\ (k,\ell) & \longmapsto & \big(\phi_A^{-1}(k), \phi_B^{-1}(\ell)\big) \end{array}\right.$$

Pour montrer qu'une fonction $f\colon X\to Y$ est bijective, on peut essayer de trouver directement une fonction $g\colon Y\to X$ telle que $f\circ g = \mathrm{id}_Y$ et $g\circ f = \mathrm{id}_X$ (on a alors $g = f^{-1}$ la réciproque de f.

On a donc

$$\mathrm{card}(A\times B) = \mathrm{card}\big([\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]\big)$$

Montrons que $[\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]$ est en bijection avec $[\![0, n_A n_B-1]\!]$. En effet, par division euclidienne :

$$\forall n\in[\![0, n_A n_B-1]\!],\ \exists!\,(q,r)\in[\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!],\quad n = n_B\, q + r$$

donc $n\mapsto(q,r)$ est une bijection de $[\![0, n_A n_B-1]\!]$ sur $[\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A\times B) &= card([\![0, n_A-1]\!]\times[\![0, n_B-1]\!]) \\ &= \mathrm{card}([\![0, n_A n_B-1]\!]) \\ &= n_A n_B \\ &= \mathrm{card}(A)\mathrm{card}(B)\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A)\operatorname{card}(B)}$$

2.

Il est naturel de faire une récurrence pour montrer un résultat portant sur les entiers naturels.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la propriété « A^n est fini et $\operatorname{card}(A^n) = \operatorname{card}(A)^n$ ».

- *Initialisation :* P_1 est vraie car $A^1 = A$ est fini et

$$\operatorname{card}(A^1) = \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A)^1$$

- *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie et montrons que P_{n+1} est vrai. On a

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

  Par hypothèse de récurrence, A^n est fini donc en appliquant la question précédente (et le fait que A est aussi fini), on en déduit que A^{n+1} est fini et que

$$\operatorname{card}(A^{n+1}) = \operatorname{card}(A^n \times A) = \operatorname{card}(A^n)\operatorname{card}(A)$$

  Mais par hypothèse de récurrence $\operatorname{card}(A^n) = \operatorname{card}(A)^n$ donc

$$\operatorname{card}(A^{n+1}) = \operatorname{card}(A^n)\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A)^n\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A)^{n+1}$$

  ce qui montre que P_{n+1} est vraie.
- *Conclusion :* Par principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n \text{ est fini et } \operatorname{card}(A^n) = (\operatorname{card} A)^n.}$$

3.

On commence par le cas où $A \cap B = \emptyset$.

- Si $A = \emptyset$ alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = \emptyset$ et on a bien

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(B) = \underbrace{\operatorname{card}(\overbrace{A}^{=\emptyset})}_{=0} + \operatorname{card}(B) - \underbrace{\operatorname{card}(\overbrace{A \cap B}^{=\emptyset})}_{=0}$$

  De même, si $B = \emptyset$ on a $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.
  On suppose donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$. Posons $n_A = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N}^*$ et $n_B = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N}^*$. Il existe des bijections $\phi_A : A \to [\![1, n_A]\!]$ et $\phi_B : B \to [\![n_A + 1, n_A + n_B]\!]$.

  Posons

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} A \cup B & \longrightarrow & [\![1, n_A + n_B]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \phi_A(x) & \text{si } x \in A \\ \phi_B(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{array} \right.$$

  La fonction ψ est bien définie car on ne peut pas avoir $x \in A$ et $x \in B$ (car on aurait $x \in A \cap B = \emptyset$, c'est absurde). Elle est de plus bijective car elle admet pour réciproque

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, n_A + n_B]\!] & \longrightarrow & A \cup B \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \phi_A^{-1}(n) & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant n_A \\ \phi_B^{-1}(n) & \text{si } n_A + 1 \leqslant n \leqslant n_B \end{cases} \end{array} \right.$$

Puisque ψ est bijective, on en déduit que $A \cup B$ est fini et

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}([\![1, n_A + n_B]\!]) = n_A + n_B = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \underbrace{\operatorname{card}(\overbrace{A \cap B}^{=\emptyset})}_{=0}$$

- Si $A \cap B \neq \emptyset$. En remarquant que

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{et} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

on en déduit d'après le point précédent que $A \cup B$ est fini et que

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A)$$

On a aussi

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

donc

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \cap A)$$

Conclusion :

$$\boxed{A \cup B \text{ est fini et } \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)}$$

Exercice 3

Soit E un ensemble.

1. On suppose dans cette question que E est fini. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ est fini et que

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\operatorname{card}(E)}$$

   Les ensembles E et $\mathscr{P}(E)$ sont-ils en bijection ?

2. Montrer que E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont jamais en bijection.

1.

Pour construire une partie (un sous-ensemble) de E, on choisit de prendre ou non chaque élément de E. On va formaliser cette idée.

— Si $E = \emptyset$, alors $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ donc $\mathscr{P}(E)$ est fini et il a $1 = 2^0 = 2^{\operatorname{card}(E)}$ éléments.

— Si $E \neq \emptyset$, comme E est fini, il existe $\phi\colon \{1, \ldots, n\} \to E$ bijective (avec $n = \operatorname{card}(E) \in \mathbb{N}^*$). On a donc $E = \{\phi(1), \ldots, \phi(n)\}$. Posons

$$\Phi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ (\delta_1, \ldots, \delta_n) & \longmapsto & \{\phi(i),\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } \delta_i = 1\} \end{array} \right.$$

Pour montrer que Φ est bijective, on peut trouver sa réciproque.

On construit une application $\Psi\colon \mathscr{P}(E) \to \{0,1\}^n$ de la manière suivante. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On pose $\Psi(A) = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ avec

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(i) \in A \\ 0 & \text{si } \phi(i) \notin A \end{cases}$$

Alors on a $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{0,1\}^n}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ par construction de Φ et Ψ, ce qui montre que Φ est une bijection et que sa réciproque est Ψ.
Comme $\{0,1\}^n$ est fini et à 2^n éléments (voir l'exercice précédent), on en déduit par bijection que $\mathscr{P}(E)$ est fini et a aussi $2^n = 2^{\operatorname{card} E}$ éléments.

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{P}(E) \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\operatorname{card}(E)}.}$$

On aurait pu aussi montrer le résultat par récurrence sur $n = \operatorname{card}(E)$.

Comme $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n > n = \operatorname{card}(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est fini, } E \text{ et } \mathscr{P}(E) \text{ ne sont jamais en bijection.}}$$

2. On a déjà démontré le résultat pour $E = \emptyset$. Supposons $E \neq \emptyset$ et supposons par l'absurde qu'il existe une bijection $\phi\colon E \to \mathscr{P}(E)$. Soit

$$A = \{x \in E,\ x \notin \phi(x)\}$$

En particulier, $A \in \mathscr{P}(E)$ et, comme ϕ est surjective, il existe $a \in E$ tel que $\phi(a) = A$. Distinguons deux cas :

— si $a \in A$, alors $a \notin \phi(a) = A$, absurde ;

— si $a \notin A$, alors $a \in A$, absurde.

On conclut donc :

$$\boxed{E \text{ et } \mathscr{P}(E) \text{ ne sont jamais en bijection.}}$$

Exercice 4

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre naturel dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même. Par exemple : 3, 5, 7 et 11 sont premiers. 4, 8 et 9 ne sont pas premiers.
Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{P}$ soit fini. On sait que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ (par exemple $2 \in \mathbb{P}$). Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Posons

$$q = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$$

— Si $q \in \mathbb{P}$, c'est absurde, car $q \neq p_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

— Si $q \notin \mathbb{P}$, alors il est divisible par un nombre premier donc il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que p_{i_0} divise q. Mais p_{i_0} divise aussi le produit $\prod_{i=1}^{n} p_i$ donc divise la différence $q - \prod_{i=1}^{n} p_i = 1$. On a donc $p_{i_0} = 1 \notin \mathbb{P}$, absurde.

Conclusion :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathbb{P} \text{ des nombres premiers est infini.}}$$

Exercice 5

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
3. $\mathbb{R}$ est-il dénombrable ?

1. On veut dénombrer tous les éléments de $\mathbb{Z}$. Par exemple on peut penser à écrire $\mathbb{Z}$ sous la forme suivante :
$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$$
On cherche donc une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, etc.
On définit donc l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la manière suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
L'application f est surjective. En effet, soit $a \in \mathbb{Z}$.
   - Si $a \geqslant 0$, on pose $n = 2a$, alors $f(n) = \frac{2a}{2} = a$.
   - Si $a < 0$, on pose $n = -2a - 1$, alors n est impair et donc $f(n) = -\frac{-2a-1+1}{2} = a$.

   On a montré que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = f(n)$. L'application f est donc surjective.
D'après le cours, on déduit que
$$\boxed{\mathbb{Z} \text{ est dénombrable.}}$$
2. D'après le cours, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. L'application
$$\phi \colon \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (a, b) & \longmapsto & \dfrac{a}{b} \end{cases}$$
est surjective (mais elle n'est pas injective, par exemple $\phi(1, 2) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \phi(2, 4)$). D'après le cours, on en déduit que
$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$$
3. Montrons d'abord que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde : on suppose que $[0, 1[$ est dénombrable. Comme cet ensemble est infini, il existe une bijection $\phi \colon \mathbb{N}^* \to [0, 1[$ donc
$$[0, 1[= \{\phi(1),\ \phi(2),\ \phi(3),\ \ldots\}$$
On va construire un nombre réel $x \in [0, 1[$ de la façon suivante : on pose
$$x = \overline{0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots}$$
où $a_n \in [\![0, 9]\!]$ est la n-ième décimale de x ($n \in \mathbb{N}^*$) avec
   - $a_n = 2$ si la n-ième décimale de $\phi(n)$ est égale à 1 ;
   - $a_n = 1$ si la n-ième décimale de $\phi(n)$ est différente de 1.

   Alors on a $x \neq \phi(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Cela montre que ϕ n'est pas surjective, ce qui est une contradiction. On en déduit que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

*Cet argument s'appelle l'*argument diagonale de Cantor. *Voici une figure pour l'illustrer :*

éléments de $[0,1[$	*on pose* $x = 0,112112\ldots$
$\phi(1) = 0,\boxed{3}842434789\ldots$	$x \neq \phi(1)$ *à cause du 3*
$\phi(2) = 0,5\boxed{7}64318974\ldots$	$x \neq \phi(2)$ *à cause du 7*
$\phi(3) = 0,38\boxed{1}6175312\ldots$	$x \neq \phi(3)$ *à cause du 1*
$\phi(4) = 0,754\boxed{8}137246\ldots$	$x \neq \phi(4)$ *à cause du 8*
$\phi(5) = 0,5122\boxed{4}54494\ldots$	$x \neq \phi(5)$ *à cause du 4*
$\phi(6) = 0,11211\boxed{1}1111\ldots$	$x \neq \phi(6)$ *à cause du 1*
$\vdots$	$\vdots$

Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}$ est dénombrable : il existe une bijection $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. L'application $\theta\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $x \to x$ est injective donc par composée de fonctions injectives, $\theta \circ \psi\colon [0,1[\to \mathbb{N}$ est injective, donc $[0,1[$ est dénombrable, ce qui est une contradiction.
Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

Exercice 6

Soit :

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\,x}{1-x^2} \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Tracer la courbe représentative de f à l'aide de Sympy. Comment dire si la fonction f est injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que f est bijective et expliciter sa réciproque.

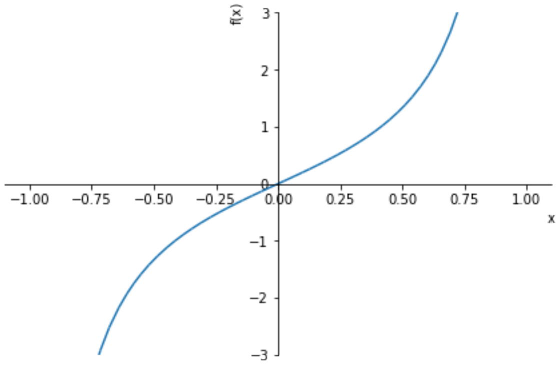
1. *Dans l'expression de $f(x)$, le seul problème possible est de diviser par* 0.

   Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $x \neq 1$ et $x \neq -1$ donc $1-x^2 \neq 0$. On en déduit que

   $$\boxed{f \text{ est bien définie.}}$$

2. On trace la courbe représentative de f :

```python
from sympy import *
x = symbols('x')
plot(2*x/(1-x**2),(x,-1,1),ylim=(-3,3))
```



Soit $g\colon I \to J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$. Alors

- *g est surjective si*

$$\forall y \in J,\ \exists x \in I, \quad y = g(x)$$

Graphiquement, cela veut dire que toutes les droites horizontales d'équation $y = a$ avec $a \in J$ ont au moins *un point d'intersection avec la courbe représentative de g.*

- *g est injective si*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Graphiquement, cela veut dire que toutes les droites horizontales d'équation $y = a$ avec $a \in J$ ont au plus *un point d'intersection avec la courbe représentative de g.*

- *g est bijective si elle est surjective et injective, c'est-à-dire*

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I, \quad y = g(x)$$

Graphiquement, cela veut dire que toutes les droites horizontales d'équation $y = a$ avec $a \in J$ ont un seul *un point d'intersection avec la courbe représentative de g.*

On conjecture que f est bijective.

3.

Pour montrer que f est bijective, on peut montrer qu'elle est injective et surjective. On peut aussi directement montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in]-1, 1[, \quad y = f(x)$$

Pour cela, le plus simple est de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

- Analyse : on suppose qu'il existe $x \in]-1, 1[$ tel que

$$y = f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

On a donc

$$(1 - x^2)\, y = 2x$$

d'où

$$y\, x^2 + 2x - y = 0$$

Si $y = 0$, alors $x = 0$.
Si $y \neq 0$, alors le discriminant est $4 + 4y^2 = 4(1 + y^2) > 0$ donc on a deux solutions

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+y^2)}}{2y} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$$

On a trouvé deux solutions, ce qui est embêtant... Mais on doit vérifier qu'elles sont bien dans $]-1,1[$.

D'une part, on a

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{1+y^2}}{y}\right)^2 = \frac{\overbrace{1 + 2\sqrt{1+y^2} + 1}^{\geqslant 0} + y^2}{y^2} \geqslant \frac{y^2}{y^2} = 1$$

donc

$$\frac{-1 - \sqrt{1+y^2}}{y} \notin]-1,1[$$

D'autre part, on a

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{1+y^2}}{y}\right)^2 = \frac{\overbrace{1 - 2\sqrt{1+y^2}}^{<0} + y^2}{y^2} < \frac{y^2}{y^2} = 1$$

donc

$$\frac{-1 + \sqrt{1+y^2}}{y} \in]-1,1[$$

*L'étape d'analyse montre que **SI** il existe $x \in]-1,1[$, alors il est unique et on a son expression en fonction de y.*

- On a $f(0) = 0$ donc si $y = 0$, il existe $x = 0 \in]-1,1[$ tel que $f(x) = y$.
  Si $y \neq 0$, on pose
  $$x = \frac{-1 + \sqrt{1+y^2}}{y}$$
  alors on a vu que $x \in]-1,1[$ et on vérifie par un calcul que $f(x) = y$.

L'étape de synthèse montre donc l'existence d'un $x \in]-1,1[$ (à partir de l'expression trouvée lors de l'étape d'analyse). On a donc montré qu'il existe $x \in]-1,1[$ tel que $f(x) = y$ et qu'il est unique (étape d'analyse), donc f est bijective.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est bijective et sa réciproque est } y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{-1 + \sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}}$$