Suites et Séries – DM1

À rendre le mardi 25 octobre 2022

Numéro étudiant : . . . . Nom chinois : . . . . Nom français : . . . .

1 Valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors elle admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, elle admet donc au moins une valeurs d'adhérence $\lambda \in \mathbb{R}$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme la suite est divergente, alors elle ne converge pas vers λ. Cela veut dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N,\ |u_n - \lambda| \geq \varepsilon.$$

On peut alors construire par récurrence une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{\phi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon$.
En effet :
- Pour $N = 0$, il existe $n_0 \geq N = 0$ tel que $|u_{n_0} - \lambda| \geq \varepsilon$. On pose $\phi(0) = n_0$.
- Supposons construits $\phi(0), \ldots, \phi(n)$ pour un certain rang n. Pour $N = \phi(n)$, il existe $n_N \geq N = \phi(n)$ tel que $|u_{n_N} - \lambda| \geq \varepsilon$. On note $\phi(n+1) = n_N$.

Ainsi, on a construit une exctration ϕ et une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{\phi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon$.
La suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même bornée, donc admet une valeur d'adhérence $\mu \in \mathbb{R}$. Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{\phi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon$, alors $\lambda \neq \mu$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

2. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}\Big(u_{n+1} - u_n\Big) = 0$ alors $\mathrm{Adh}(u)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, elle admet donc au moins une valeurs d'adhérence $\lambda \in \mathbb{R}$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Si $\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\}$: il n'y a rien à démontrer. Un singleton est un intervalle.
- Supposons que $\mathrm{Adh}(u)$ contient au moins deux valeurs distinctes $\lambda < \mu$. Soit $\gamma \in]\lambda, \mu[$. Montrons que γ est aussi une valeur d'adhérence de la suite u.

  Fixons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to+\infty}\Big(u_{n+1} - u_n\Big) = 0$ veut dire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que :
  $$\forall n \geq N_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon.$$
  - λ est une valeur d'adhérence de u, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{N_1} < \gamma$ et $N_1 \geq \max(N, N_0)$.
  - De même, $\mu \in \mathrm{Adh}(u)$ implique qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{N_2} > \gamma$ et $N_2 \geq N_1$.

Notons A l'ensemble défini par :

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ N_1 \leq n < N_2 \text{ et } u_n < \gamma\}$$

L'ensemble A est non vide (car contient N_1) et borné (car contient au maximum $N_2 - N_1$ éléments). Donc A admet un maximum $p \in \mathbb{N}$ qui vérifie : $N_1 \leq p \leq N_2 - 1$ (p ne peut pas être égal à N_2).
On a donc

$$u_p < \gamma \leq u_{p+1} \tag{1}$$

En particulier, cela veut dire que $0 < u_{p+1} - u_p$. Par ailleurs, comme $p > N_1 \geq N_0$ alors $|u_{p+1} - u_p| \leq \varepsilon$. D'où :

$$0 < u_{p+1} - u_p \leq \varepsilon \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) nous permettent de déduire que $|u_p - \gamma| \leq \varepsilon$. On a montré donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N,\ |u_p - \gamma| \leq \varepsilon.$$

En notant ϕ l'application qui à N associe p, on a donc construit une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers γ. D'où $\gamma \in \mathrm{Adh}(u)$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Adh}(u) \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$

2 Suite implicite

Soit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est l'unique solution de $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Pourquoi cette suite est-elle bien définie ?

Pour tout nombre entier n, la fonction tan est une *bijection* continue de $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc (d'après le TVI) un *unique* réel x_n tel que $\tan(x_n) = x_n$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

2. Donner la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier n on a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, on déduit alors d'après la règle des gendarmes que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$

3. Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n au voisinage de $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\tan(x_n) = x_n$, par continuité de la fonction arctan on a donc :

$$\arctan(\tan(x_n)) = \arctan(x_n)$$

C'est-à-dire :

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n)$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} x_n &= n\pi + \arctan(x_n) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

Afin de trouver le terme suivant du développement asymptotique, notons $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} x_n &= \tan(x_n) \\ &= \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n\right) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + y_n\right) \\ &= \frac{-1}{\tan(y_n)} \end{aligned}$$

Comme $y_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ donc $\tan(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$, d'où : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{y_n}$, c'est-à-dire $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{\pi n}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$

3 Suite récurrente

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3+1}{3}$, et soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$.

Étudier, en fonction de a_0, le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note α, β et γ les trois racines distinctes de l'équation $f(x) = x$. Ces trois réels sont donc les seules limites finies possibles de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le tableau suivant résume l'étude de f et $x \mapsto f(x) - x$.

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	α	$\nearrow$	β	$\nearrow$	γ	$\nearrow$	
$f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On remarque que les intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$, $]\beta, \gamma[$ et $]\gamma, +\infty[$ sont stables par f.

- Si $a_0 \in]-\infty, \alpha[$: f est croissante (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone) et $x \mapsto f(x) - x$ est négative (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Comme il n'y a aucun point fixe de f dans $]-\infty, \alpha[$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$.
- Si $a_0 = \alpha$: la suite est constante. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha}$.
- Si $a_0 \in]\alpha, \beta]$: f est croissante (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone) et $x \mapsto f(x) - x$ est positive (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante). Comme β est le seul point fixe de f dans $]\alpha, \beta]$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \beta}$.
- Si $a_0 \in]\beta, \gamma[$: f est croissante (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone) et $x \mapsto f(x) - x$ est négative (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Comme β est le seul point fixe de f dans $[\beta, \gamma[$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \beta}$.
- Si $a_0 = \gamma$: la suite est constante. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma}$.
- Si $a_0 \in]\gamma, +\infty[$: f est croissante (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone) et $x \mapsto f(x) - x$ est négative (donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante). Comme il n'y a aucun point fixe de f dans $]\gamma, +\infty[$ alors

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$.