Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD3

27 Septembre 2022

Exercice 1 : Sous-espace vectoriel

Vrai ou Faux. Les espaces suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}([-1,1],\mathbb{R})$?

1. F_1 l'ensemble des fonctions bornées sur $[-1,1]$;
2. F_2 l'ensemble des fonctions bornées par la constante 1 sur $[-1,1]$;
3. F_3 l'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$;
4. F_4 l'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 1$;
5. F_5 l'ensemble des fonctions paires ;
6. F_6 l'ensemble des fonctions impaires ;
7. F_7 l'ensemble des fonctions paires ou impaires ;
8. F_8 l'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1,1]$;
9. F_9 l'ensemble des fonctions monotones sur $[-1,1]$;
10. F_{10} l'ensemble des fonctions f qui vérifient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Exercice 2 : Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient E_1, E_2 et E_3 3 sous-espaces vectoriels de E.

1. Comparer pour l'inclusion
$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \text{ et } (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3).$$
2. A quelle condition suffisante a-t-on égalité ?

Exercice 3 : Génératrice

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la famille
$$(x \mapsto (x-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
est une famille génératrice de l'ensemble des fonctions polynomiales noté E.
2. Déterminer dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\big(\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \geq 0\big)$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, que dire de
$$\mathrm{Vect}(E \setminus F) \ ?$$

Exercice 4 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ et $(E'_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-espaces vectoriels de E, tels que :
$$\forall i \in I,\ E'_i \subset E_i.$$
Montrer que :
$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E'_i \ \Rightarrow\ \forall i \in I, E_i = E'_i.$$

Exercice 5 : Somme directe et Supplémentaire

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles et :

$$\begin{aligned} F &= \{y : x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}, \\ G_1 &= \{f \in E,\ f(0) = 0\}, \\ G_2 &= \{f \in E,\ f(0) = f(1) = f(-1) = 0\}, \\ G_3 &= \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}. \end{aligned}$$

1. Justifier que F, G_1, G_2, G_3 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F + G_1 = E$. La somme est-elle directe ?
3. Montrer que $F + G_2$ est directe. La somme vaut-elle E ?
4. Montrer que F et G_3 sont supplémentaires dans E.

Exercice 6 : Somme directe et Supplémentaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :

$$E = F + G, \quad H \cap F = \{0_E\} \quad \text{et} \quad G \subset H.$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. Montrer que $H = G$.

Exercice 7 : Somme directe et Supplémentaire

Soit E l'ensemble des fonctions $u \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite finie en $+\infty$: $\exists \ell \in \mathbb{R},\quad \lim_{x \to +\infty} u(x) = \ell$.

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui sont constantes : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$ et soit G le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions $g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 8 : Supplémentaire

Dans cet exercice, on se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soit $F = \{f \in E \colon f(0) = f'(0) = 0\}$.
   (a) Trouver une fonction $g \in E$ telle que $g(0) = 0$ mais $g'(0) \neq 0$ puis trouver une fonction $h \in E$ telle que $h(0) \neq 0$ mais $h'(0) = 0$.
   (b) En déduire un supplémentaire de F dans E.
2. Soit $H = \{f \in E \colon f(0) = f(1) = 0\}$. En s'inspirant de la question précédente, donner un supplémentaire de H dans E.