# Suites et Séries – TD$_2$

19-20 septembre 2022

## Exercice 1

Dans chacun des cas, donner un exemple d'une suite réelle qui est :

1. décroissante, positive et qui ne tend pas vers $0$ ;
2. bornée et non convergente ;
3. positive, non bornée et ne tendant pas vers $+\infty$ ;
4. non monotone et qui tend vers $0$ ;
5. positive, qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

## Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer un équivalent le plus simple possible quand $n \to +\infty$ de la suite de terme général :

1. $5n^3 - 2n + 4$ ;
2. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$ ;
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ;
4. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ;
5. $\cos\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$.

## Exercice 3

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}.$$

En revenant à la définition de la limite d'une suite, montrer que $u$ converge vers 0.

## Exercice 4

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que si

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

alors $u$ et $v$ convergent vers 1 (*indication : on pourra raisonner par l'absurde).*

# Exercice 5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

La suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle la *suite des moyennes de Cesàro* de $u$.

1. (a) Montrer que si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $v$ converge vers $\ell$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
   (c) Montrer que si
   $$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$
   alors
   $$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
2. (a) Dans cette question on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer que si
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0,$$
   alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$.
   (b) En déduire la limite de la suite $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}.$$
3. (a) Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} w_k}.$$
   Montrer que
   $$\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   (b) En déduire un équivalent de $w$.

# Exercice 6

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que les suites $a$ et $b$ sont adjacentes.