MATH2307P – QCM$_3$

6 mars 2023

1. Soit E un espace vectoriel, alors E et $E^\star$ sont isomorphes.

Réponse – Faux

En dimension finie, ils sont isomorphes car ils ont même dimension. En dimension infinie, ils ne sont pas isomorphes (en tous cas, on a vu un contre-exemple).

2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre d'un espace vectoriel E, la famille duale est définie par

$$\forall (i,j) \in I^2,\ e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$$

Réponse – Faux

Il faut que la famille soit une base pour que les $e_i^\star$ puissent être définies correctement.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions polynomiales d'interpolation de Lagrange définies pour $a_1 < \cdots < a_n$, où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ L_k\ :\ x \longmapsto \frac{\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}(x - a_i)}{\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}(a_k - a_i)}$$

est la base ante-duale de $E = \text{Vect}\left(\left\{x \longmapsto x^i,\ i \in \{1, \ldots, n\}\right\}\right)$ associée aux formes linéaires

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a_k) \end{array}\right.$$

Réponse – Vrai

Tout simplement car

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

4. Soit E un espace vectoriel, tout hyperplan de E possède un supplémentaire de dimension 1.

Réponse – Vrai

Ou autrement dit, tout hyperplan est de codimension 1.

5. Soit $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$, alors

$$\left\{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\right\}$$

est un espace de codimension 2.

Réponse – Vrai

Car les formes linéaires $f \longmapsto f(0)$ et $f \longmapsto f(1)$ sont deux formes linéaires indépendantes.

6. Soit $\mathcal{H}_1$, de direction de H_1 et $\mathcal{H}_2$, de direction H_2 deux plans affines de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ est un sous-espace affine de direction $H_1 \cap H_2$.

Réponse – Faux

Il faut que les deux plans affines aient une intersection non vide, sinon $\varnothing$ *n'est pas* un espace affine.

7. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $A \in \mathcal{E}$, alors $\{A\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Réponse – Vrai

Car $\{A\} = A + \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

8. Le maximum de la fonction $g : (x, y, z) \longmapsto x + y + z$ sur l'ensemble

$$\Gamma = \left\{x^2 + y^2 - x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

annulera la différentielle de la fonction

$$L \ : (x, y, z, \lambda, \mu) \longmapsto x + y + z - \lambda \left(x^2 + y^2 - x\right) - \mu \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Réponse – Faux

Le lagrangien du système est

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z - \lambda \left(x^2 + y^2 - x\right) - \mu \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

9. Soit E un espace vectoriel $\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_p\right) \in E^{\star p}$, alors

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}\left(\varphi_k\right)\right) \geqslant p$$

Réponse – Faux

(a) Si les formes linéaires sont indépendantes, il y a égalité (théorème de mise en équations).

(b) Si non, on a

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}\left(\varphi_k\right)\right) = \operatorname{rang}\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_p\right) < p$$

10. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie et E_1 un sous-espace vectoriel de E de codimension finie, alors E_1 est isomorphe à E.

Réponse – Vrai

Le cas de la codimension 1 a été traité dans le Td-Tp 3, une simple récurrence sur la codimension permet de conclure.