TD n°11 : Étude pratique de suites et séries de fonctions (le retour)

Exercice 1

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$.

2. Exprimer I à l'aide de $\zeta(2)$.

Correction :

On pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{(1-t^2)}$

1. Découpons l'intervalle d'étude :

- Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$. Cette fonction est intégrable sur $]0, 1/2]$. Par comparaison dans le cas des fonctions positives, la fonction f est intégrable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On pose $t = 1-h$ avec $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(1-h) &= \frac{\ln(1-h)}{1-(1-h)^2} \\
&= \ln(1-h) \times \frac{1}{2h+h^2} \\
&= \frac{1}{2h} \ln(1-h) \frac{1}{1+\frac{h}{2}} \\
&= \frac{1}{2h} \left(-h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) \\
&= \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) \\
&= -\frac{1}{2}(1 + o(h)).
\end{aligned}$$

  Ainsi f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$. En particulier f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- **Conclusion :** f est intégrable sur $]0, 1]$.

2. Développons f. Soit $t \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(t) t^{2n}
\end{aligned}$$

On pose $f_n(t)$ vérifions les hypothèses du théorème d'interversion série/intégrale.

- $f_n(t)$ est mesurable sur $[0, 1]$.

- Calculons :

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

  par intégration par partie. Cette série est convergente par comparaison à une série de Riemann. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt < +\infty$.

On peut intervertir série intégrale. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\inf} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}\right) \\
&= -\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{3}{4}\zeta(2).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Correction :

On pose $f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$.

• **Étape n°1 :** Vérifier que l'intégrale a du sens.

On note $I = [0, +\infty[$:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est continue sur I.
- $\|f_n\|_{\infty,I} = \frac{1}{n^2}$. Cette série est convergente par critère de Riemann. Ainsi la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur I.

• **Étape n°2 :** Vérifier les hypothèses du théorème d'interversion série intégrale.

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1/n}{1+\left(\frac{t}{n}\right)^2}dt \\
&= \frac{1}{n}\left[\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2n}
\end{aligned}$$

Cette série est divergente, on ne peut appliquer le théorème d'interversion série-intégrale.

• **Étape n°3 :** Revenir à des suites.

On pose pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t)$.

- S_N est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
- La suite (S_N) converge simplement vers S.
- La suite (f_n) est une suite alternée. On sait dans ce cas que la somme partielle S_N est encadrée par les termes et impaires. En particulier :

$$S_n(t) \leq S_1(t) = \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

  Mais $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \int_I S_N(t)dt &= \int_I \lim_{N\to+\infty} S_N(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\end{aligned}$$

Calculons $\int_I S_n(t)dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx.$$

2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

3. Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n I_n$ et calculer sa somme si elle converge.

Correction :

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car continue. De plus :

- Sur $[0,1]$ f_n est continue donc intégrable.
- Sur $[1,+\infty[$.

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}$$

  Or $3n > 1$. Par comparaison des fonctions positives intégrables, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- **Conclusion :** (f_n) est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- **H1** f_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$.
- **H2** f_n converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- **H3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad |f_n(x)| \leq f_1(x).$$
or $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0}.$$

3. La série vérifie :

- (I_n) est positive décroissante (par croissance de l'intégrale).
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ d'après la question précédente

D'après le T.S.S.A., la série $\sum(-1)^n I_n$ est convergente. On aimerait intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left|f_n(x)\right| dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^3}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3}{x^3} dx\end{aligned}$$

Cette intégrale diverge. On ne peut appliquer directement le théorème d'interversion série-intégrale.

Soit $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n f_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^3)^n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} \times \frac{1-\frac{(-1)^N}{(1+x^3)^N}}{1+\frac{1}{1+x^3}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3}\left(1+\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3}\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} dx\end{aligned}$$

Or :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3}\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{N+1}} dx = \int_0^{+\infty} f_{N+1}(x) dx = I_{N+1}$$

Or d'après la question 2.), $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} dx.$$

On pose $x = 2^{1/3} u$. Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} dx = \frac{1}{2^{2/3}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^3} du$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{u^3+1} = \frac{1/3}{u+1} + \frac{-1/3u+2/3}{u^2-u+1}$$

En intégrant (il y a du travail) on obtient finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{2^{1/3}\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

Exercice 4

1. Établir que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}dt.$$

2. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction :

1. On pose $u(t) = \ln(1+t)$ et $v(t) = \ln(t)$. En intégrant par partie, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = [\ln(t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}dt.$$

Or $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)\ln(1+t) = 0$. On obtient le résultat annoncé.

2. On développe en série entière la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ dont le rayon de convergence est 1. Ainsi :

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln(t)}{1+t} &= -\ln(t)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} t^n \ln(t).
\end{aligned}$$

On pose $f_n(t) = (-1)^{n+1}t^n\ln(t)$. On souhaite intervertir série et intégrale. Vérifions les hypothèses :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n \ln(t)dt.$$

On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t^n$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. On intègre par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n \ln(t)dt &= \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}t^n dt \\
&= 0 - \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{1}{(n+1)^2}$. Cette série est convergente. Ainsi, on peut permuter série et intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n+1}t^n\ln(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

3. L'idée est de séparer les termes paires et impaires :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \frac{\pi^2}{12}}$.

Exercice 5

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer, à l'aide d'une comparaison série intégrale, un équivalent de f en $+\infty$.

3. En déduire un équivalent de la fonction $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt$ en $+\infty$.

Correction :

On notera $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. On souhaite appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit $a > 0$. On note $I = [-a, a]$

- **H1** Soit $x \in I$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi la série $\sum f_n(x)$ converge. Autrement dit, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- **H2** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- **H3** De plus, $\forall x \in I$,

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|-\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{2a}{n^4}$$

  Ainsi $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de dérivabilité sous le signe somme

- **C1** S est $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$.
- **C2** $\forall x \in [-1, 1]$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

En particulier S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dans la suite, on notera $f_x(t) = \frac{1}{t^2+x^2}$. La fonction f_x est continue positive et décroissante. On effectue une comparaison série intégrale. Soit $n \in [\![-1, +\infty[\![$ et $x \in [n, n+1]$. Alors

$$f_x(n+1) \leq \frac{1}{t^2+x^2} \leq f_x(n)$$
$$f_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+x^2}\,dt \leq f_x(n)$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\,dt$$
$$\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} \leq f(x) \leq \left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(x) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x}$$

Or $\frac{1}{x}\arctan(1/x) \sim \frac{1}{x^2}$. Donc $f(x) \sim \frac{\pi}{2x}$.

3. On note $f(x,t) = \frac{\sin(nt)}{e^t-1}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sin(xt)e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \sin(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(xt)e^{-(k+1)t} \end{aligned}$$

On aimerait pouvoir intervertir intégrale et série. Vérifions les hypothèses du théorème de Fubini-Lebesgue. Cela revient à se poser la question si :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |\sin(xt)e^{-(k+1)t}|dt < +\infty$$

On a :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(xt)e^{-(k+1)t}|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t}dt = \frac{1}{k+1}$$

Cette série n'est pas convergente. On ne peut appliquer directement le théorème d'interversion série/intégrale. Nous devons procédé à la permutation à la main. On écrit :

$$\frac{\sin(xt)}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{N}\sin(xt)e^{-(k+1)t} + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\sin(xt)e^{-(k+1)t}.$$

Pour simplifier on notera $R_N(x,t) = \sum_{k=N+1}^{+\infty}\sin(xt)e^{-(k+1)t}$. Ainsi :

$$g(x) = \underbrace{\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{N}\sin(xt)e^{-(k+1)t}dt}_{I_{1N}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} R_N(x,t)dt}_{I_{2N}}.$$

Traitons chacun des deux morceaux :

• Pour I_{N1} :

$$\begin{aligned} I_{N1} &= \sum_{k=0}^{N}\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}(e^{ixt})e^{-(k+1)t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{N}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-(k+1)t}dt\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{k+1-ix}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{x}{(k+1)^2+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{N\to+\infty} I_{N1} = xf(x)$.

• On aimerait montrer que I_{N2} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

- Majorons $R_N(x,t)$:

$$\begin{aligned} |R_N(x,t)| &= \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}\sin(xt)e^{-(k+1)t}\right| \\ &\leq (xt)\sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-(k+1)t} \\ &\leq xte^{-(N+2)t}\frac{1}{1-e^{-t}} \\ &= xe^{-(N+1)t}\frac{t}{e^t-1} \leq x\varphi(t) \end{aligned}$$

avec $\varphi : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (en prolongeant par continuité en 0.

- $\lim_{N \to +\infty} R_N(x,t) = 0$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,x)dx = 0.$$

• Finalement, on obtient que :

$$\boxed{g(x) = xf(x)}$$

En particulier $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

4. (Question ouverte). Peut-on déterminer la valeur $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?