

## Chapitre 2

# ASPECTS ÉNERGÉTIQUES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

## A ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### A.1 Densité d'énergie électromagnétique

#### A.1.1 Définition

Établir un champ électromagnétique dans l'espace nécessite de l'énergie. Pour établir un tel champ  $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$  dans un petit volume d'espace  $d\tau_M$  au voisinage d'un point  $M$ , un opérateur doit fournir une énergie

$$dW_{em} = w_{em}(M, t) d\tau_M$$

où  $w_{em}$  est la **densité volumique d'énergie électromagnétique**. Cette grandeur s'exprime en  $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Nous admettons sans démonstration que la densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit en fonction des champs sous la forme :

$$w_{em}(M, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t)$$

Cette expression fait intervenir deux contributions, associées respectivement aux champs électrique et magnétique. Ces deux contributions sont très symétriques, elles sont toutes deux proportionnelles aux carrés des champs.

Comme toute énergie, l'énergie électromagnétique est susceptible d'être échangée et donc transformée (par exemple en énergie cinétique de particules chargées lorsqu'un champ met ces charges en mouvement).

#### A.1.2 Énergie électromagnétique

Dans un volume ( $V$ ) donné, l'énergie électromagnétique  $E_{em}$  totale est simplement la somme des énergies de chaque volume :

$$E_{em}(t) = \iiint_{(V)} w_{em}(M, t) d\tau_M.$$

Pour créer une distribution donnée de charge et de courant il faut dépenser l'énergie électromagnétique associée au champ électromagnétique qui règne dans tout l'espace. Cette énergie est donc donnée par l'intégrale :

$$E_{\text{Distribution}}(t) = \iiint_{(\text{Tout l'espace})} w_{em}(M, t) d\tau_M$$

## A.2 Situations statiques

### A.2.1 Condensateur plan

Considérons un condensateur plan circulaire, de rayon  $a$  et d'épaisseur  $e$  représenté sur la figure 2.1. En régime statique, le champ électrique est, en fonction de la densité de charge de la plaque inférieure :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ entre les armatures du condensateur, et } \vec{E} = \vec{0} \text{ ailleurs.}$$

L'énergie totale associée à cette distribution de charge est :

$$E_{em} = \iiint_{(\text{Tout l'espace})} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M) d\tau_M.$$

La densité d'énergie est uniforme entre les plaques et nulle à l'extérieur. L'énergie électromagnétique associée au champ électrique du condensateur est donc simplement :

$$E_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 \times \pi a^2 \times e = \frac{1}{2} (\sigma \pi a^2)^2 \times \frac{e}{\varepsilon_0 \times \pi a^2}$$

Le résultat précédent a été arrangé pour faire clairement apparaître :

- La charge totale  $Q = \sigma \times \pi a^2$ .
- La capacité du condensateur :  $C = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{e}$ .

On a donc :

$$E_{em} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Nous retrouvons l'expression bien connue de l'énergie stockée dans un condensateur.

### A.2.2 Sphère chargée en surface

Pour une sphère de rayon  $a$  chargée uniformément en surface, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= \vec{0} \quad \text{si } r < a \\ \vec{E}(M, t) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{a^2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{si } r > a. \end{aligned}$$

---

**Activité 2-1 :** Retrouvez ce résultat à l'aide du théorème de Gauss.

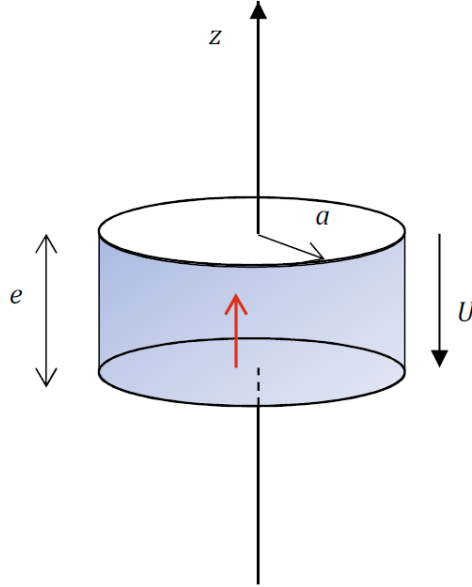


FIGURE 2.1 – Condensateur plan

---

L'énergie électromagnétique totale associée à cette distribution est donc :

$$E_{em} = \iiint_{(\text{Tout l'espace})} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M) d\tau_M = \frac{1}{2} \int_{r=a}^{+\infty} \varepsilon_0 E^2 \times 4\pi r^2 dr.$$

Le calcul donne directement :

$$E_{em} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \times 4\pi a^4}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{a}.$$

En fonction de la charge totale  $Q$  de la distribution, nous avons donc :

$$E_{em} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

**Remarque 1 :**

Ce résultat peut être établi directement à l'aide du raisonnement mécanique suivant où l'on imagine que l'on charge progressivement la sphère, en amenant successivement de petites charges depuis l'infini. Lorsqu'elle a une charge  $q$ , la sphère est au potentiel  $V(r = a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ . Pour augmenter de  $dq$  la charge de cette sphère un opérateur doit fournir le travail

$$\delta W = dq \times V(a) = \frac{q dq}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Pour établir la charge  $Q$ , il doit donc fournir

$$W = \int_{q=0}^Q \frac{q dq}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

On retrouve le même résultat qu'avec l'expression postulée de la densité d'énergie électromagnétique.

### Remarque 2 :

À la limite d'une charge ponctuelle,  $a \rightarrow 0$  et l'énergie nécessaire à la constitution de la charge est infinie. Les charges ponctuelles sont donc, dans la théorie classique de Maxwell, des idéalizations impossibles à atteindre en pratique.

En physique moderne, les particules élémentaires comme l'électron sont considérées comme ponctuelles, ce qui pose le problème de l'énergie électromagnétique infinie associée. Ce problème n'est correctement résolu que dans la théorie de l'électrodynamique quantique, mise au point au milieu du XX<sup>ème</sup> siècle.

Si on ne s'intéresse pas à l'énergie constitutive des électrons (ou des autres particules) et si l'on ne considère que des situations où les électrons ne changent pas de nature, cette énergie constitutive ne varie pas et nous n'avons pas à nous en préoccuper dans les bilans énergétiques.

### A.2.3 Bobine parcourue par un courant

Considérons une bobine de  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  et de longueur  $\ell$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Pour obtenir une estimation de l'énergie électromagnétique associée à cette situation nous proposons une description très grossière du champ magnétique que nous assimilons à celui d'un solénoïde infini à l'intérieur de la bobine et que nous négligeons en dehors. Alors :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z \text{ dans la bobine et } \vec{B} = \vec{0} \text{ ailleurs.}$$

---

**Activité 2-2 :** Justifiez ce résultat.

---

L'énergie électromagnétique est alors :

$$W_{em} = \iiint_{\text{Partout}} \frac{B^2(M)}{2\mu_0} d\tau_M = \frac{1}{2\mu_0} \times \left( \mu_0 \frac{N}{\ell} I \right)^2 \times \pi R^2 \times \ell.$$

On en déduit :

$$W_{em} = \frac{1}{2} L I^2, \text{ avec } L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2.$$

Nous retrouvons ici encore un résultat établi dans le cours d'électrocinétique, dans lequel nous avons montré que l'énergie stockée par une bobine parcourue par un courant  $I$  est de la forme

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L I^2.$$

Nous verrons dans le cours d'induction que l'expression de  $L$  obtenue par ce raisonnement énergétique est la même que celle que l'on utilise en électrocinétique (rappelons que le coefficient d'auto-induction  $y$  a été défini à partir de la relation donnant la différence de potentiel aux bornes de la bobine et l'intensité :  $u = L \frac{dI}{dt}$ ).

### A.3 Situations quasi statiques

Dans les situations dépendant du temps, il existe deux contributions, électrique et magnétique, à l'énergie électromagnétique.

Cependant, dans les situations lentement variables c'est l'une ou l'autre de ces contributions qui l'emporte largement. Nous allons étudier ce phénomène sur deux exemples.

### A.3.1 Situation quasi statique magnétique

Reprenons la situation du chapitre 1 paragraphe E.3.3, d'un solénoïde parcouru par un courant variable et envisageons l'intérieur du solénoïde  $r < R$ . Dans l'approximation quasi statique nous aurons, dans le volume intérieur au solénoïde :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\mu_0 \frac{nr}{2} \frac{dI}{dt}(t) \vec{e}_\theta.$$

La densité d'énergie électrique est :

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\mu_0^2 n^2 r^2}{4} \right) \left( \frac{dI}{dt}(t) \right)^2,$$

et la densité d'énergie magnétique est :

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0^2 n^2) I(t)^2.$$

On a donc :

$$\frac{w_{mag}}{w_{el}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{4}{r^2} \frac{I^2(t)}{\left( \frac{dI}{dt}(t) \right)^2}.$$

Pour une variation sinusoïdale de l'intensité à la pulsation  $\omega$  nous aurons, en ne considérant que les valeurs moyennes :

$$\frac{\langle w_{mag} \rangle}{\langle w_{el} \rangle} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{4}{r^2 \omega^2} = \frac{4c^2}{r^2 \omega^2}.$$

**Activité 2-3 :** Démontrez ce résultat.

Par conséquent, dans le volume intérieur du solénoïde,  $r < R$ , nous aurons :

$$\frac{\langle w_{mag} \rangle}{\langle w_{el} \rangle} \geq \frac{4c^2}{R^2 \omega^2}$$

Par conséquent, dans l'approximation quasi statique, où l'on a

$$R \ll \frac{c}{\omega},$$

nous aurons :

$$\boxed{\frac{\langle w_{mag} \rangle}{\langle w_{el} \rangle} \gg 1.}$$

L'énergie est essentiellement sous forme magnétique.

**Remarque :**

À l'extérieur du solénoïde, la *densité* d'énergie électrique est nécessairement plus grande que la densité d'énergie magnétique, qui est nulle. Cependant, on peut montrer que, dans le cadre de l'ARQS, l'énergie électrique *totale* associée à l'extérieur du solénoïde est beaucoup plus faible que l'énergie magnétique totale (les expressions quasi statiques des champs obtenues plus haut en dehors du solénoïde ne sont valables qu'au voisinage du solénoïde).

### A.3.2 Situation quasi statique électrique

Nous reprenons l'exemple du condensateur étudié dans le chapitre 1 paragraphe E.4.3, dans le cadre de l'ARQS. Pour un point intérieur au solénoïde, avec les notations du chapitre 1 paragraphe E.4.3 :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{e}_\theta,$$

avec

$$I = \frac{dQ}{dt} = \pi a^2 \times \frac{d\sigma}{dt}.$$

Dans le condensateur nous aurons donc un rapport

$$\frac{w_{el}}{w_{mag}} = \frac{4}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{r^2} \frac{\sigma^2}{(d\sigma/dt)^2}.$$

Pour une variation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  de la densité de charge, nous aurons en valeur moyenne

$$\frac{\langle w_{el} \rangle}{\langle w_{mag} \rangle} = \frac{4}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{\omega^2 r^2} = \frac{4c^2}{\omega^2 r^2}.$$

Dans le volume du condensateur  $r \leq a$ , on a donc :

$$\frac{\langle w_{el} \rangle}{\langle w_{mag} \rangle} \geq \frac{4c^2}{\omega^2 a^2}.$$

Mais dans l'ARQS, nous avons supposé  $a \ll \frac{c}{\omega}$ . On a donc :

$$\boxed{\frac{\langle w_{el} \rangle}{\langle w_{mag} \rangle} \gg 1.}$$

Il s'agit d'une situation où l'énergie électromagnétique est essentiellement sous forme électrique.

#### Remarque :

À l'extérieur du condensateur l'énergie est uniquement sous forme magnétique, mais on peut montrer que l'énergie totale associée est très faible devant l'énergie électrique totale. La situation est exactement symétrique du paragraphe précédent.

On distingue parfois les régimes quasi-stationnaires selon la forme dominante de l'énergie électromagnétique : **l'ARQS magnétique** (resp. **électrique**) est associée à des situations lentement variables où l'énergie est essentiellement magnétique (resp. **électrique**).

## B TRANSFERTS D'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### B.1 Bilan local d'énergie

#### B.1.1 Vecteur de Poynting

On définit le **vecteur de Poynting** (d'après le physicien anglais John Henry Poynting 1852-1914) par :

$$\boxed{\vec{\Pi}(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}.}$$

Cette grandeur s'exprime en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ , il s'agit donc d'une puissance par unité de surface.

---

**Activité 2-4 :** Démontrez ce résultat par analyse dimensionnelle.

---

Le vecteur de Poynting est orthogonal aux deux champs.

### B.1.2 Équation locale de Poynting

L'*équation locale de Poynting*, établie en 1884, s'écrit :

$$\text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) + \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} = -\vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

---

**Activité 2-5 :** Démontrez ce résultat en utilisant les équations de Maxwell et l'égalité :  $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$ .

---

Cette équation est dite équation du **bilan local d'énergie électromagnétique** ou parfois, **théorème local de Poynting**.

Tous les termes de cette équation sont des puissances par unité de volume. Nous reconnaissons en particulier le terme :

$$p_v(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

étudié dans le cours du semestre précédent, qui représente la **puissance volumique locale fournie aux charges** par le biais de la force de Lorentz.

### B.1.3 Bilan local dans le vide

Dans le vide, la densité de courant est nulle :

$$\vec{J}(M, t) = \vec{0}.$$

Par conséquent, nous aurons :

$$\text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) + \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} = 0.$$

Cette équation est évidemment à rapprocher de l'équation locale de conservation de la charge :

$$\text{div} \vec{J}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0.$$

Nous pouvons donc faire une analogie directe :

$\vec{\Pi}(M, t) \leftrightarrow \vec{J}(M, t)$  et  $w_{em}(M, t) \leftrightarrow \rho(M, t)$  : énergie électromagnétique  $\leftrightarrow$  charge électrique.

L'équation locale de Poynting dans le vide est donc interprétée comme une équation qui traduit la conservation de l'énergie. De plus le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M, t)$  peut être interprété comme un "**vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique**."

Nous allons développer cette analogie.

## B.2 Bilan intégral d'énergie électromagnétique

### B.2.1 Expression générale

Considérons une surface fermée ( $\Sigma$ ), fixe, délimitant un volume ( $V$ ). L'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est :

$$E_{em}(t) = \iiint_{(V)} w_{em}(M, t) d\tau_M.$$

Elle varie en fonction du temps selon :

$$\frac{dE_{em}}{dt}(t) = \iiint_{(V)} \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau_M.$$

Nous aurons donc :

$$\frac{dE_{em}}{dt}(t) = \iiint_{(V)} -\operatorname{div}(\vec{\Pi}(M, t)) d\tau_M - \iiint_{(V)} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau_M.$$

La puissance totale fournie aux charges est :

$$P_{\rightarrow \text{charges}} = \iiint_{(V)} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau_M.$$

Par ailleurs, le théorème de Green permet d'écrire :

$$\iiint_{(V)} -\operatorname{div}(\vec{\Pi}(M, t)) d\tau_M = - \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext, M} dS_M = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n}_{int, M} dS_M$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\frac{dE_{em}}{dt}(t) = -P_{\rightarrow \text{charges}} + \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n}_{int, M} dS_M.}$$

Cette équation montre que l'énergie électromagnétique varie au cours du temps sous l'effet de deux causes :

- l'énergie qui est donnée aux charges,
- un terme complémentaire qui s'exprime comme un flux à travers la surface limitant le volume ( $V$ ), c'est-à-dire à un transport d'énergie à travers la surface.

Nous voyons donc que l'énergie électromagnétique peut être transportée d'un point à un autre, comme le sont les charges électriques par exemple. Elle peut également être créée ou consommée par interaction avec les charges du système.



### B.2.2 Puissance électromagnétique traversant une surface

De même que l'intensité d'un transport de charge à travers une surface est le flux du vecteur densité de courant à travers cette surface, nous pouvons affirmer que la puissance électromagnétique traversant une surface  $(S)$  orientée par  $\vec{n}_M$  est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{em/(S)}(t) = \iint_{(S)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M.$$

Il ne faut pas oublier que cette grandeur est algébrique.

## B.3 Exemples

### B.3.1 Variation du courant dans un solénoïde

Considérons à nouveau un solénoïde de longueur  $\ell$ , de rayon  $a$ , d'axe  $Oz$  et comptant  $n$  spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité  $I(t)$ . On veut effectuer un bilan d'énergie électromagnétique sur le volume intérieur au solénoïde  $(V)$ . Rappelons les résultats déjà obtenus. Dans l'ARQS, le champ magnétique est :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z \text{ dans le solénoïde et } \vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur.}$$

Le champ électrique associé à l'intérieur du solénoïde est :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dI}{dt} \vec{e}_\theta \text{ (pour } r < a \text{).}$$

On en déduit le vecteur de Poynting dans le volume intérieur :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} I \frac{dI}{dt} \vec{e}_r, \text{ pour } r < a.$$

Ce vecteur de Poynting est radial. Il est rentrant si  $|I|$  augmente et sortant si  $|I|$  diminue. Autrement dit, lorsque l'intensité augmente en valeur absolue, la puissance électromagnétique se transporte vers l'intérieur et lorsqu'elle diminue, la puissance électromagnétique se transporte vers l'extérieur.

Calculons la puissance électromagnétique rentrante. On évalue pour cela le flux du vecteur  $\vec{\Pi}(M, t)$  à la limite intérieure du solénoïde :

$$\vec{\Pi}(a^-, t) = -\frac{\mu_0 n^2 a}{2} I \frac{dI}{dt} \vec{e}_r$$

et le flux rentrant à travers le cylindre délimitant  $(V)$  est donc :

$$-\iint_{(S)} \vec{\Pi}(a^-, t) \cdot \vec{n}_{ext} dS = \mu_0 \frac{n^2 a}{2} I \frac{dI}{dt} \times 2\pi a \ell.$$

La variation d'énergie électromagnétique dans le volume (vide)  $(V)$  est donc donnée par :

$$\frac{dE_{em}}{dt} = \mu_0 \frac{n^2 a}{2} I \frac{dI}{dt} \times 2\pi a \ell = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 I^2.$$

On retrouve alors l'inductance propre  $L = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2$  et la relation précédente s'écrit :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right)}.$$

L'ensemble est cohérent : l'énergie électromagnétique stockée dans le solénoïde correspond à un transport d'énergie vers l'intérieur du solénoïde. On retrouve une fois de plus (c'est la troisième fois !) l'énergie stockée dans une bobine d'auto-induction.

**Remarque :**

Il est intéressant d'effectuer un bilan d'énergie électromagnétique sur un volume un peu différent : le volume  $(V')$  tout juste extérieur au solénoïde (cylindre de rayon  $R^+$ , de longueur  $\ell$ ).

Sur la frontière de ce volume, le vecteur de Poynting est nul (car le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde). En revanche, le système n'est plus vide car il contient les distributions de courant du solénoïde. On a donc :

$$\frac{dE'_{em}}{dt} = - \iiint_{(V')} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau_M = -P_{\rightarrow \text{charges}},$$

où  $P_{\rightarrow \text{charges}}$  est la puissance des forces de Lorentz fournies aux charges et  $E'_m$  l'énergie électromagnétique à l'intérieur de  $(V')$ . Or, les champs électriques et magnétiques restant finis en  $R = a$ , on aura :

$$E'_{em} = E_{em}$$

et donc :

$$\frac{dE_{em}}{dt} = -P_{\rightarrow \text{charges}}.$$

On peut interpréter ce résultat (intuitivement évident) en remarquant que l'énergie électromagnétique du système est intégralement prélevée (ou fournie) aux charges qui circulent dans le solénoïde. Et donc :

$$\boxed{P_{\rightarrow \text{charges}} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right)}.$$

### B.3.2 Bilan de puissance dans une résistance

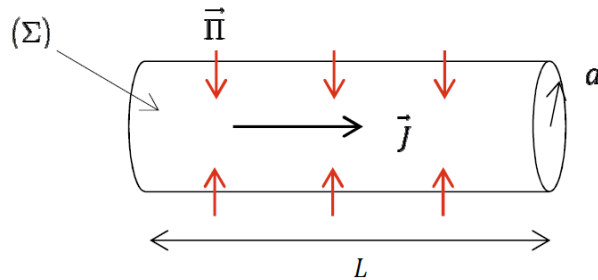


FIGURE 2.2 – Transfert d'énergie et résistance.

Considérons un conducteur Ohmique cylindrique, de rayon  $a$ , longueur  $L$  et conductivité  $\gamma$  (figure 2.2). Ce conducteur est parcouru par un courant  $I$  associé à une densité de courant uniforme et constante  $\vec{J} = J\vec{e}_z$ .

À la distance  $r = a$ , nous avons un champ magnétique bien connu :

$$\vec{B}(r = a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta$$

et un champ électrique, donné par la loi d'Ohm :

$$\vec{E}(r = a) = \vec{E}(r = a^-) = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma} \vec{e}_z.$$

Noter que nous avons utilisé la continuité du champ, que nous admettons ici (nous en verrons la démonstration un peu plus tard).

Le vecteur de Poynting est donc :

$$\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma} \vec{e}_r.$$

La puissance électromagnétique rentrant dans le cylindre (limité par la surface fermée  $(\Sigma)$ ) est :

$$P_{em/(\Sigma)} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M) \cdot \vec{n}_{int,M} dS_M = \iint_{(\text{cylindre } r=a)} \vec{\Pi}(M) \cdot (-\vec{e}_r) dS_M = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \gamma}.$$

On voit apparaître la résistance  $R = \frac{L}{\gamma \pi a^2}$  et donc

$$P_{em/(\Sigma)} = RI^2.$$

Nous avons déjà calculé la puissance fournie aux charges et nous avons bien trouvé

$$P_{\rightarrow \text{charges}} = RI^2.$$

Le bilan d'énergie électromagnétique pour ce segment de résistance donne

$$\frac{dE_{em}}{dt} = P_{em/(\Sigma)} - P_{\rightarrow \text{charges}} = 0,$$

comme il se doit en régime permanent !

On peut donc concevoir une résistance comme un dispositif qui reçoit en permanence de la puissance électromagnétique à travers sa surface et qui restitue (en régime permanent), l'intégralité de cette énergie aux charges.

## C EXERCICES

### Exercice 2-1 : Rayon classique de l'électron

On suppose qu'un électron (charge  $-e$  masse  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg) est une sphère de rayon  $a$  chargée en surface.

1. Déterminer le rayon  $a$  si on admet que l'énergie électromagnétique associée à l'électron est égale à son énergie de masse  $m_e c^2$ . Ce rayon est appelé "*rayon classique de l'électron*". Calculer sa valeur numérique.

### Exercice 2-2 : Énergie électromagnétique de la foudre