Mathématiques II – TD$_2$

18-19 avril 2022

Exercice 1

Résoudre les équations du second degré d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$$(1)\ z^2 + 2z + 3 = 0 \quad (2)\ z^2 - z - \frac{\sqrt{3}}{4} i = 0 \quad (c)\ i\, z^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$$

Attention, dans ce cours on n'écrit jamais $\sqrt{x}$ si x n'est pas un nombre réel positif.
*Si $x \in \mathbb{C}^*$, ce nombre admet **deux** racines carrées s_1 et s_2, c'est-à-dire des nombres complexes tels que $(s_1)^2 = (s_2)^2 = x$ avec $s_2 = -s_1$. Par exemple :*

- *si $x = 2$, $s_1 = \sqrt{2}$ et $s_2 = -\sqrt{2}$*
- *si $x = -2$, $s_1 = \sqrt{2}\, i$ et $s_2 = -\sqrt{2}\, i$*
- *si $x = 2i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, $s_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ et $s_2 = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$*

Quand on écrit $\sqrt{2i}$, on ne sait pas si c'est $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ ou $-\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$.
*Si $x \geqslant 0$, on définit $\sqrt{x}$ comme **l'unique** nombre positif y tel que $y^2 = x$. Sinon, l'écriture $\sqrt{x}$ est ambiguë.*

1. Le discriminant Δ de cette équation du second degré est

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$$

Une racine carré δ de Δ est donnée par

$$\delta = \sqrt{8}\, i = 2\sqrt{2}\, i$$

On peut retenir qu'une racine carrée de $a < 0$ est donnée par $\sqrt{-a}\, i$.

Les solutions sont données par $\dfrac{-2 \pm \delta}{2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{-1 + \sqrt{2}\, i \quad \text{et} \quad -1 - \sqrt{2}\, i}$$

Vérifions avec Sympy :

```python
from sympy import *
init_printing()
z = Symbol('z')
solve(z**2 + 2*z + 3,z)
```

Résultat : $\left[-1 - \sqrt{2}i,\ -1 + \sqrt{2}i\right]$

Puisque l'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$ est à coefficients réels, les deux solutions sont conjuguées : $\overline{-1 + \sqrt{2}\, i} = -1 - \sqrt{2}\, i$.

2. Le discriminant Δ de cette équation du second degré est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, i = 1 + \sqrt{3}\, i = 2\mathrm{e}^{i\pi/3}$$

Une racine carré δ de Δ est donnée par

$$\delta = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

On peut retenir qu'une racine carrée de $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est donnée par $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/2}$.

Les solutions sont donc données par

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\, i \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\, i}$$

Vérifions avec Sympy :

```
solve(z**2 - z - sqrt(3)/4*I,z)
```

Résultat : $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{i\left(\sqrt{3} - i\right)}}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{i\left(\sqrt{3} - i\right)}}{2}\right]$

Ce n'est pas sous forme cartésienne $a + b\,i$ (et en plus le symbole $\sqrt{\ }$ est ambiguë...), on peut faire la chose suivante :

```
sol = solve(z**2 - z + sqrt(3)/4*I, z)
re(sol[0]) + im(sol[0])*I, re(sol[1]) + im(sol[1])*I
```

Résultat : $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{4},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}i}{4}\right)$

3. Le discriminant Δ de cette équation du second degré est

$$\Delta = (4i - 3)^2 - 4i(i - 5) = -3 - 4i$$

Pour chercher une racine carrée $\delta = \alpha + \beta\, i$ de Δ (avec α et β des nombres réels), on veut $\delta^2 = \Delta$, c'est-à-dire $\alpha^2 - b^2 + 2\alpha\,\beta\, i = -3 - 4i$. On a également $|\delta^2| = |\Delta|$, avec

$$|\delta^2| = |\delta|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad |\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 - \beta^2 & = & -3 \\ 2\alpha\,\beta & = & -4 \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & 5 \end{array}\right.$$

On obtient alors $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ (ou $\alpha = -1$ et $\beta = 2$). Finalement, $\delta = 1 - 2i$ (ou $\delta = -1 + 2i$) est une racine de Δ. Dans les deux cas, les solutions sont données par

$$\boxed{-3 - 2i \quad \text{et} \quad -1 - i}$$

Vérifions avec Sympy.

```
solve(I*z**2 + (4*I-3)*z + I - 5,z)
```

Résultat : $[-3-2i,\ -1-i]$

Exercice 2

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivant :

$$w = \frac{2+i}{1-i} \quad \text{et} \quad z = \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{121}$$

— On fait apparaître un conjugué au dénominateur :

$$w = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)\overline{1-i}}{(1-i)\overline{1-i}} = \frac{(2+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i$$

donc

$$\boxed{\Re(w) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Im(w) = \frac{3}{2}}$$

Vérifions avec Sympy.

```
re((2+I)/(1-I)), im((2+I)/(1-I))
```

Résultat : $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

— On fait apparaître les formes exponentielles du numérateur et du dénominateur :

$$1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$$

et

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$$

On a donc

$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i} = \frac{2}{\sqrt{12}}\exp\left(i\,\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}$$

On en déduit, comme $\frac{121}{12} = 10 + \frac{1}{12}$, que :

$$\begin{aligned} z = (\sqrt{2})^{121}\exp\left(i\,\pi\frac{121}{12}\right) &= (\sqrt{2})^{121}\mathrm{e}^{i\pi/12} \\ &= (\sqrt{2})^{121}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \\ &= (\sqrt{2})^{120}\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= ((\sqrt{2})^2)^{60}\frac{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i}{1^2+1^2} \\ &= 2^{60}\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2^{60}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,i \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\Re(z) = 2^{59}(1+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad im(z) = 2^{59}(1-\sqrt{3})}$$

Vérifions avec Sympy.

```
z = ((1+sqrt(3)*I)/(1+I))**(121)
simplify(re(z)), simplify(im(z))
```

Résultat : $\left(576460752303423488 + 576460752303423488\sqrt{3},\right.$
$\left.-576460752303423488 + 576460752303423488\sqrt{3}\right)$

```
2**59*(1+sqrt(3)),2**59*(sqrt(3)-1)
```

Résultat : $\left(576460752303423488 + 576460752303423488\sqrt{3},\right.$
$\left.-576460752303423488 + 576460752303423488\sqrt{3}\right)$

Exercice 3

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-(1+i)| \leqslant 1$. Montrer que

$$\sqrt{10} - 1 \leqslant |z-4| \leqslant \sqrt{10} + 1$$

Traduire géométriquement le résultat.

L'idée ici est de faire apparaître $(1+i)$ dans $|z-4|$ car on sait que $|z-(1+i)| \leqslant 1$.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |z-4| &= |z-(1+i)+(-3+i)| \\ &\leqslant |z-(1+i)| + |-3+i| \\ &\leqslant 1 + \sqrt{(-3)^2+1^2} \\ &\leqslant 1 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned} |z-4| &= |z-(1+i)-(3-i)| \\ &\geqslant |3-i| - |z-(1+i)| \\ &\geqslant \sqrt{10} - 1 \end{aligned}$$

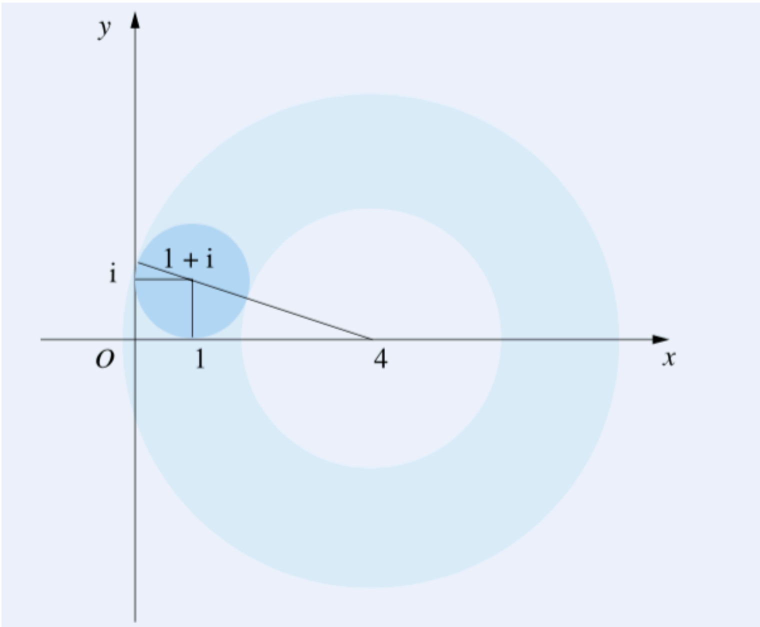
Finalement :

$$\boxed{\sqrt{10} - 1 \leqslant |z-4| \leqslant \sqrt{10} + 1}$$

Si $a \in \mathbb{C}$ et $R \geqslant 0$, l'ensemble $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant R\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon R.
Si $a \in \mathbb{C}$ et $R_1, R_2 \geqslant 0$, l'ensemble $C(a,R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_2\}$ est la couronne de centre a et de rayons R_1 et R_2.

On a montré que si $z \in D(1+i,1)$, alors $z \in C(4, \sqrt{10}-1, \sqrt{10}+)$. On en déduit que $D(1+i,1) \subset C(4, \sqrt{10}-1, \sqrt{10}+)$:

le disque fermé de centre $1+i$ et de rayon 1 est inclus dans la couronne fermée de centre 4 et de rayons $\sqrt{10}-1$ et $\sqrt{10}+1$.



Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^4(x)$ et $\sin(x)\cos^2(x)$.
2. Délinéariser $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$.

1. On a

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k\left(\mathrm{e}^{-ix}\right)^{4-k} \\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{e}^{-i(4-k)x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{4ix}+4\mathrm{e}^{3ix}\,\mathrm{e}^{-ix}+6\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-2ix}+4\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{4ix}+\mathrm{e}^{-4ix}+4(\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix})+6}{16} \\
&= \frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

On applique la même méthode, on écrit

$$\sin(x)\cos^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^2$$

et le calcul est similaire à ce qui précède. On obtient alors

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \sin(x)\cos^2(x) = \frac{\sin(x)}{4} + \frac{\sin(3x)}{4}}$$

Vérifions avec Sympy.

```
x = symbols('t')
simplify(cos(x)**4 - (cos(4*x)/8+cos(2*x)/2+3/8))
```

Résultat : 0

```
simplify(sin(x)*cos(x)**2 - (sin(x)/4+sin(3*x)/4))
```

Résultat : 0

2. On a

$$\cos(3x)+i\sin(3x) = (\cos(x)+i\sin(x))^3 = \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on a

$$\boxed{\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \quad \text{et} \quad \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)}$$

Vérifions avec Sympy.

```
simplify(cos(3*x) - (cos(x)**3-3*cos(x)*sin(x)**2))
```

Résultat : 0

```
simplify(sin(3*x) - (3*cos(x)**2*sin(x)-sin(x)**3))
```

Résultat : 0

Exercice 5

Résoudre les équations $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ et $\cos(3x) + \sin(3x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) &= \Re\left(e^{ix} - \sqrt{3}e^{i(x+\pi/2)}\right) \\
&= \Re\left((1-i\sqrt{3})e^{ix}\right) \\
&= \Re\left(2e^{-i\pi/3}e^{ix}\right) \\
&= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 &\iff 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$
\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 \iff x \in \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}}
$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) + \sin(3x) &= \Re\left(\mathrm{e}^{i3x} - \mathrm{e}^{i(3x+\pi/2)}\right) \\
&= \Re\left((1-i)\mathrm{e}^{i3x}\right) \\
&= \Re\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}\mathrm{e}^{i3x}\right) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) + \sin(3x) = 1 &\iff \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
&\iff \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$
\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(3x) + \sin(3x) = 1 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}}
$$

Exercice 6

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \cos(k\,x)$.

Deux idées ici :

1. *Écrire* $\cos(k\,x)$ *à l'aide d'exponentielle car* $eikx = (\mathrm{e}^{ix})^k$ *et on peut utiliser la formule (à connaître !)*

$$
\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{N+1} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ N+1 & si\ q = 1 \end{cases}
$$

2. *Utiliser la formule de l'arc moitié pour factoriser :*

$$
\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 - \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-i\theta/2} - \mathrm{e}^{i\theta/2}\right) = \mathrm{e}^{i\theta/2}\,(-2i)\sin(\theta/2)
$$

On a

$$\sum_{k=0}^{N} \cos(k\,x) = \sum_{k=0}^{N} \Re(\mathrm{e}^{ikx}) = \Re\left(\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{ikx}\right)$$

- S'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2n\,\pi$, on a $\mathrm{e}^{ikx} = 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{N} \cos(k\,x) = \Re(\underbrace{N+1}_{\in\mathbb{R}}) = N+1$$

- Sinon $\mathrm{e}^{ikx} \neq 1$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{ikx} &= \sum_{k=0}^{N} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{i(N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{(N+1)}{2}x}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{(N+1)}{2}x}-\mathrm{e}^{i\frac{(N+1)}{2}x}}{\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{iNx}{2}}\,\frac{-2i\sin\left(\frac{(N+1)}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}_{in\mathbb{R}}\left[\cos\left(\frac{N}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{N}{2}x\right)\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{N} \cos(k\,x) = \Re\left(\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \cos\left(\frac{Nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \cos(k\,x) = \begin{cases} N+1 & \text{s'il existe } n\in\mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2n\,\pi \\ \cos\left(\frac{Nx}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Quel est le résultat pour $a = 2i$?
2. Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Attention à ne pas écrire des choses fausses comme $z^n = a$ donc $z = a^{1/n}$, ou $z^n = 1$ donc $z = 1$. Dans les nombres complexes, il y a plus de solutions...
Le plus simple est de se ramener aux racines n-ièmes de l'unité :

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\right\} = \left\{\exp\left(\frac{2i\,k\,\pi}{n}\right) : k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$$

1. Si $a=0$, l'unique solution est $z=0$. Sinon, on écrit $a = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ avec $r>0$ et $\theta \in [0,2\pi[$. On a alors

$$z^n = a \iff z^n = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta} \iff \frac{z^n}{r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}} = 1 \iff \Bigg(\underbrace{\frac{z}{r^{1/n}\,\mathrm{e}^{i\,\theta/n}}}_{=\omega}\Bigg)^n = 1$$

On en déduit que $z^n = a$ si, et seulement si, ω est une racine n-ième de l'unité si, et seulement si, il existe $k \in \{0,\dots,n\}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$. Conclusion :

$$\boxed{z^n = a \iff \exists k \in \{0,\dots,n\},\ z = r^{1/n} \exp\left(\frac{i(2\,k\,\pi+\theta)}{n}\right)}$$

Pour $a = 2i = 2\mathrm{e}^{i\pi/2}$, l'ensemble des solutions de $z^n = a$ est sont

$$\left\{\sqrt{2}\exp\left(\frac{i(2\,k\,\pi+\frac{\pi}{2})}{n}\right) : k \in \{0,\dots,n\}\right\}$$

2. Remarquons que $z=0$ est solution.
   — Analyse : supposons que $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, soit solution. On a $z^n = \overline{z}$ donc en passant aux modules
   $$\underbrace{|z^n|}_{=|z|^n} = |\overline{z}| = |z|$$
   donc $|z|^{n-1} = 1$ et finalement $|z|=1$. On peut donc écrire $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. L'égalité $z^n = \overline{z}$ donne alors $\mathrm{e}^{in\theta} = \mathrm{e}^{-i\theta}$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} = 1$. On en déduit qu'il existe $k \in \{0,\dots,n\}$ tel que $\theta = 2k\pi/(n+1)$.
   — Synthèse : on vérifie que les nombres complexes $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta = 2k\pi/(n+1$ et $k \in \{0,\dots,n\}$ sont solutions de $z^n = \overline{z}$.
   $$\boxed{z^n = \overline{z} \iff \left(z=0 \text{ ou } \exists k \in \{0,\dots,n\},\ z = \mathrm{e}^{2ik\pi/(n+1)}\right)}$$

Exercice 8

Soit f la transformation du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point d'affixe $z' = -i\overline{z}+1+i$. Soit g la transformation qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $z' = i\overline{z}-1+i$.

1. Donner les points fixes de f et g.

   (Coming soon...)

2. On pose $h = f \circ g$. Déterminer la nature géométrique de h.

   (Coming soon...)

Exercice 9

Étant donné deux points A et C du plan d'affixes a et c, quels sont les affixes b et d des points B et D tels que $ABCD$ soit un carré direct ?

On remarque que l'affixe du centre O du carré est $\frac{a+c}{2}$. Il suffit maintenant d'écrire la formule de la rotation ϕ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donnée par :

$$\phi : z \longmapsto e^{i\pi/2}\left(z - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{a+c}{2} = \frac{a+c}{2} + i\left(z - \frac{a+c}{2}\right)$$

On en déduit que $ABCD$ est un carré direct si,

$$b = \phi(a) = \frac{a+c}{2} + i\frac{a-c}{2}$$

et

$$d = \phi(c) = \frac{a+c}{2} + i\frac{-a+c}{2}$$

$ABCD$ est un carré direct si, et seulement si, $b = \dfrac{a+c}{2} + i\dfrac{a-c}{2}$ et $d = \dfrac{a+c}{2} + i\dfrac{c-a}{2}$.

Exercice 10

Soient A, B et C trois points du plan tous distincts et non aligné, d'affixes a, b et c. Montrer que le triangle ABC est :

1. rectangle en A si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur ;
2. isocèle en A si, et seulement si, $a\,\overline{b} + b\,\overline{a} + c\,\overline{c} = a\,\overline{c} + c\,\overline{a} + b\,\overline{b}$;
3. équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = a\,b + b\,c + c\,a$.

1. L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est donné par l'argument principale du nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$. On en déduit que ABC est rectangle en A si, et seulement si,

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

   c'est-à-dire que $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.
2. Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si, $AB = AC$. Mais

$$AB = AC \iff |b-a| = |c-a| \iff |b-a|^2 = |c-a|^2 \iff (b-a)\,\overline{b-a} = (c-a)\,\overline{c-a}$$

   En développant et en simplifiant, on obtient que ABC est isocèle en A si, et seulement si, $a\,\overline{b} + b\,\overline{a} + c\,\overline{c} = a\,\overline{c} + c\,\overline{a} + b\,\overline{b}$.
3. Le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\frac{2\pi}{3}$ et $CA = CB$, c'est-à-dire

$$\frac{a-c}{c-b} = \mathrm{j}, \qquad \text{avec } \mathrm{j} = e^{\frac{2ß\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + ß\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   ce qui est équivalente à

$$a + b\,\mathrm{j} + (-1-\mathrm{j})c = 0$$

   Mais $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ donc le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si,

$$a + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{j}^2 = 0$$

   Le triangle ABC est équilatéral indirect si, et seulement si, ACB est équilatéral direct, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, si, et seulement si,

$$a + c\,\mathrm{j} + b\,\mathrm{j}^2 = 0$$

On en déduit que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, il est équilatéral direct ou indirect si, et seulement si,

$$\left(a + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{j}^2\right)\left(a + b\,\mathrm{j}^2 + c\,\mathrm{j}\right) = 0$$

En développant, on en déduit que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = a\,b + b\,c + c\,a$$