Suites et Séries – TD_{10}

14-15 novembre 2022

Exercice 1

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   Pour composer un code, on effectue un tirage successif de chiffres avec remise où l'ordre est important. Il s'agit donc d'un $3-$uplet de $\{1, 2, \ldots, 9\}^3$. Le nombre de codes possibles est $9^3 = 729$.

   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

   Les deux premiers chiffres constituent un $2-$uplet de $\{1, 2, \ldots, 9\}^2$, et le troisième chiffre est un élément de $\{2, 4, 6, 8\}$. Le nombre de codes est $9^2\,4 = 324$.

   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

   On va compter par différence : le nombre de codes ne contenant aucun chiffre 4 est un $3-$uplet de $\big(\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{4\}\big)^3$. Il y en a $8^3 = 512$ codes. On en déduit que le nombre de codes contenant au moins un chiffre 4 est $9^3 - 8^3 = 217$ codes.

   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

   Un code contenant exactement un chiffre 4 est choisi de la manière suivante :

   — On choisit la position du chiffre 4 : on a un code à trois chiffres, donc on a 3 choix possibles pour la position du chiffre 4.

   — Les deux autres chiffres restants sont choisi parmi $\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{4\}$, c'est donc un $2-$uplet, le nombre de choix est 8^2.

   On a donc $3\,8^2 = 192$ codes contenant exactement un seul chiffre 4.

2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   Dans ce cas, on effectue un tirage successif sans remise (les trois chiffres sont disc-ticts). L'ordre est toujours important. On parle alors d'arrangement de 3 éléments parmi $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Le nombre de codes est $\frac{9!}{(9-3)!} = 504$.

   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

   On commence par choisir le dernier chiffre, il y a 5 choix. Ensuite il reste à choisir un arrangement de 2 chiffres parmi les 8 restants. Il y a donc $\frac{8!}{(8-2)!}\,5 = 280$ tels codes.

   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

   Il y a 3 choix pour la position où on place le chiffre 6 dans le code. Pour les autres chiffres, c'est un arrangement de 2 parmi 8. Le nombre de tels codes est donc de $\frac{8!}{(8-2)!}\,3 = 168$.

Exercice 2

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne :

$$\text{Card}(E) = 800,\ \text{Card}(H) = 300,\ \text{Card}(S) = 352,\ \text{Card}(M) = 424,$$

$$\text{Card}(H \cap S) = 188,\ \text{Card}(H \cap M) = 166,\ \text{Card}(S \cap M) = 208,\ \text{Card}(H \cap M \cap S) = 144.$$

On cherche $\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$. On a

$$\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = \text{Card}(\overline{H \cup M \cup S}).$$

On applique la formule du crible :

$$\begin{aligned}\text{Card}(H \cup M \cup S) &= \text{Card}(H) + \text{Card}(M) + \text{Card}(S) - \text{Card}(H \cap M) - \text{Card}(H \cap S) - \text{Card}(M \cap S)\\ &\quad +\text{Card}(H \cap M \cap S).\end{aligned}$$

On en déduit $\text{Card}(H \cup M \cup S) = 658$ puis

$$\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = 800 - 658 = 142.$$

$$\boxed{\text{Il y a 142 femmes célibataires non syndiquées}}$$

Exercice 3

Soit p points distincts du plan.

1. On construit un polygone à p côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il ?

   Une diagonale est définie par le choix de deux sommets. Pour dessiner toutes les diagonales possibles on suit les étapes suivantes :

   (a) On choisit d'abord un premier sommet A parmi les p sommets du polygone.

   (b) On choisit ensuite un deuxième sommet parmi les sommets du polygone. Ce sommet ne peut pas être égal à A, il ne peut non plus être un sommet adjacent à A. Il y a donc $p-3$ choix.

   En réalisant ces deux étapes, on aura compté chaque diagonale deux fois (une diagonale $[AB]$ est identique à la diagonale $[BA]$). Donc :

   $$\boxed{\text{Le nombre de diagonales est } \tfrac{p(p-3)}{2}}$$

2. Combien de polygones à $n \leqslant p$ côtés peut-on réaliser à partir de ces p points ?

   Il faut d'abord choisir n points parmi ces p points. C'est un tirage simultané où l'ordre n'est pas important : il y a $\binom{p}{n}$ choix. On a donc n points. Pour construire un polygone on fixe un premier sommet comme origine, ensuite on choisit un deuxième sommet : $n-1$ choix, ensuite un troisième : $n-2$ choix. Ainsi on obtient $(n-1)(n-2)...1 = (n-1)!$ choix possibles pour ordonner les sommets.

En réalisant ces étapes, on aura compté chaque polygone deux fois : par exemple un carré $ABCD$ est la même chose que $ADCB$, on conclut que le nombre de polygones possibles est $\frac{1}{2}(n-1)!\binom{p}{n}$.

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{1}{2}(n-1)!\binom{p}{n} \text{ polygones possibles}}$$

Exercice 4

Déterminer les valeurs des sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$;

D'après le binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1)^{n-k}\binom{n}{k}=(1-1)^n=0^n.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tbinom{n}{k}=0 \text{ si } n\in\mathbb{N}^*, \text{ et } \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\tbinom{n}{k}=1.}$$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ (on pourra faire un raisonnement de dénombrement) ;

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles B de E à k éléments. Ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum\limits_{B\in\mathscr{P}(E)}\mathrm{Card}(B)$: cela revient à compter tous les éléments de chaque ensemble $B\subset E$.
Soit $k_0\in E$. L'élément k_0 est compté 1 fois pour chaque ensemble B qui contient k_0 : l'élément k_0 est donc compté 2^{n-1} fois. Comme il y a n éléments au total, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\,2^{n-1}.}$$

Autre méthode : Posons $S=\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$. Alors par le changement d'indice $k'=n-k$, on a $S=\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}$. Donc d'après le binôme de Newton,

$$2S=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n\,2^n.$$

Finalement, $S=n\,2^{n-1}$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. On pourra remarquer que $\binom{n}{k}^2=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ et faire un raisonnement de dénombrement.

On considère un ensemble E de cardinal fini $2n$, découpé en deux ensemble F et G chacun de cardinal n (par exemple, une classe de $2n$ étudiants avec n filles et n garçons). Pour choisir n éléments de E,

- Je choisis le nombre $k\in[\![0,n]\!]$ d'éléments de F que je vais prendre ;

- puis je choisis k éléments dans F (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités) ;
- puis je choisis $n-k$ éléments dans G (il y a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ possibilités).

Finalement, le nombre total de possibilités est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Comme de plus on sait qu'il y a $\binom{2n}{n}$ façons de choisir n éléments parmi les $2n$ éléments de E, on en déduit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

Formellement, ce dénombrement correspond à la bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \bigcup_{k=0}^{n} \left(\{A \in \mathscr{P}(F)\,, \operatorname{Card}(A) = k\} \{B \in \mathscr{P}(G)\,, \operatorname{Card}(B) = n-k\}\right) \\ C & \mapsto & (\quad C \cap F \quad , \quad C \cap G \quad) \end{array}$$

de réciproque $(A, B) \mapsto A \cup B$.
Comme l'union est disjointe, le cardinal de $\bigcup_{k=0}^{n} \left(\{A \in \mathscr{P}(F)\,, \operatorname{Card}(A) = k\} \{B \in \mathscr{P}(G)\,, \operatorname{Card}(A) = k\}\right)$ *vaut la somme des cardinaux des* $\left(\{A \in \mathscr{P}(F)\,, \operatorname{Card}(A) = k\} \{B \in \mathscr{P}(G)\,, \operatorname{Card}(A) = k\}\right)$, *c'est-à-dire* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Exercice 5

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

   Y est une partie quelconque de $E \setminus X$ qui compte $n-p$ éléments. Il y a donc 2^{n-p} choix pour Y.

   $$\boxed{\text{Il y a } 2^{n-p} \text{ choix possibles pour } Y}$$

2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

   On fixe d'abord p le nombre d'éléments de X. Ce nombre étant fixé, il y a $\binom{n}{p}$ choix pour X. X étant fixé, il y a 2^{n-p} choix pour Y d'après la question précédente. Le nombre recherché est donc, d'après la formule du binôme de Newton

   $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$$

   $$\boxed{\text{Il y a } 3^n \text{ choix possibles de couples } (X, Y) \text{ formés de parties disjointes de } E}$$

Exercice 6

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle l'*indicatrice de* A l'application

$\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On rappelle que si A est une partie finie, l'application $\mathbb{1}_A$ permet de retrouver le cardinal de A :

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble fini et soient $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E non nécessairement disjoints. Montrer la *formule du crible* :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

On note $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Pour évaluer $\mathrm{Card}(A)$ on peut penser à écrire la fonction indicatrice de A en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On utilisera les propriétés suivantes : si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A . \mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B)$$

Soit $x \in E$. $x \in A$ veut dire qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in A_{i_0}$, autrement dit $\mathbb{1}_{A_{i_0}}(x) = 1$.
On peut donc écrire :

$$\mathbb{1}_A = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

On peut développer cette expression comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A &= 1 - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \prod_{i \in I} (-\mathbb{1}_{A_i}) \right] \\ &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \prod_{i \in I} (\mathbb{1}_{A_i}) \end{aligned}$$

Or, $\prod_{i \in I} (\mathbb{1}_{A_i})$ représente la fonction indicatrice de l'intersection des ensembles A_i, donc :

$$\mathbb{1}_A = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

En passant à la somme sur les éléments de E, on déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in E}\mathbb{1}_A(x) &= -\sum_{x\in E}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{Card}(I)=k}}\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I}A_i}\Big)\\ &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{Card}(I)=k}}\left(\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I}A_i}(x)\right)\end{aligned}$$

Il s'agit de sommes finies, on peut donc changer l'ordre des signes Σ sans problème.'

C'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{Card}(I)=k}}\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)}$$

Exercice 7

Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Dans cet exercice on veut calculer $S(n,p)$, le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$.

1. Des cas particuliers :
   (a) Calculer $S(n,p)$ pour $p>n$.

   Si $p>n$, il n'y a pas de surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. On a donc $S(n,p)=0$.

   (b) Calculer $S(n,n)$.

   Lorsque $p=n$, les surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$ sont les bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n!=S(n,n)$.

   (c) Calculer $S(n,1)$.

   Lorsque $p=1$, toute application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n,1)=1$.

   (d) Calculer $S(n,2)$.

   Lorsque $p=2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$. On en déduit que $S(n,2)=2^n-2$.

2. Calculer $S(n+1,n)$.

   Lorsque l'on étudie les surjections de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut donc caractériser une surjection par le choix de cet élément et de ses deux antécédents, puis par une bijection entre les $n-1$ autres éléments. On a donc

   $$S(n+1,n)=n\binom{n+1}{2}(n-1)!=\frac{n(n+1)!}{2}.$$

3. Démontrer que, pour tout $n>1$ et tout $p>1$, on a la relation

   $$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big).$$

Soit s une surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. Il y a p façons de choisir la valeur de $s(n)$. Une fois cette valeur choisie, notons s' la restriction de s à $\{1,\dots,n-1\}$. Remarquons que tous les éléments de $\{1,\dots,p\}\setminus\{i\}$ sont atteints par s'. On distingue alors deux cas :

- soit i est atteint par s', et alors s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}$, il y a $S(n-1,p)$ possibilités ;
- soit i n'est pas atteint par s', et s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}\setminus\{i\}$. Il y a $S(n-1,p-1)$ possibilités.

Finalement, on obtient que

$$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big).$$

4. En déduire un algorithme pour calculer $S(n,p)$.

On programme la fonction suivante S, d'arguments n et p deux entiers naturels non nuls.

```
def S(n,p):
        if p > n:
                return 0
        if p == 1:
                return 1
        return p*(S(n-1,p-1) + S(n-1,p))
```

5. Démontrer que

$$S(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$$

On va prouver ce résultat par récurrence sur n. Si $n=1$, le résultat est clair si $p=1$; si $p>1$, alors $S(1,p)=0$ qui est bien égal à

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1}=-p(1-1)^{p-1}=0$$

où on a utilisé $p\binom{p-1}{k-1}=k\binom{p}{k}$.
Supposons le résultat prouvé au rang $n-1$, et prouvons-le au rang n. Si $p=1$, à nouveau l'égalité est évidente. On peut donc supposer $p>1$ et on écrit

$$\begin{align}
S(n,p)= & \quad p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big) \tag{1}\\
= & \quad p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^{n-1}+\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^{n-1}\right) \tag{2}\\
= & \quad p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}k^{n-1}\left(\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}\right)+k^{n-1}\right) \tag{3}\\
& \tag{4}
\end{align}$$

On utilise maintenant la formule du triangle de Pascal et il vient :

$$\begin{align}
S(n,p)= & \quad p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}k^{n-1}\binom{p-1}{k-1}+k^{n-1}\right) \tag{5}\\
= & \quad \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1}k^{n-1}. \tag{6}
\end{align}$$

On obtient le résultat voulu en remarquant à nouveau que

$$p\binom{p-1}{k-1}=k\binom{p}{k}.$$

Une autre méthode pour obtenir la formule de $S(n,p)$ consiste à considérer les ensembles suivants :

- $E = \{f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,p\},\ f \text{ application}\}$ *ensemble de toutes les applications de* $\{1,\dots,n\}$ *sur* $\{1,\dots,p\}$. *On a* $\mathrm{Card}(E) = p^n$.
- S *le sous-ensemble de* E *contenant les applications surjectives.* $\mathrm{Card}(S) = S(n,p)$.
- *Pour* $I \subset \{1,\dots,p\}$ *on pose :*

$$A_I = \{f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,p\},\ f(\{1,\dots,n\}) \cap I = \emptyset\}$$

Alors, on remarque que pour tout $I \subset \{1,\dots,p\}$ *non vide, les applications de l'ensemble* A_I *ne sont pas surjectives. D'où la relation :*

$$S = E \setminus \Big(\bigcup_{I \subset \{1,\dots,p\}} A_I \Big)$$

De plus, on a :

$$\bigcup_{I \subset \{1,\dots,p\}} A_I = \bigcup_{i=1}^{p} A_{\{i\}}$$

D'où :

$$S = E \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_{\{i\}} \Big)$$

On trouve alors $S(n,p)$ *en passant au cardinal dans la relation précédente, et en utilisant la formule du crible (exercice 5).*