TD n°14 : Série de Fourier/résolution d'équation différentielles

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2, & \text{si } t \in [0, \pi[\\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Montrer que la série de Fourier de f s'écrit :

$$S(f) = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4(1-(-1)^n)}{\pi n^3} \sin(nt).$$

2. f est-elle égale à sa série de Fourier?

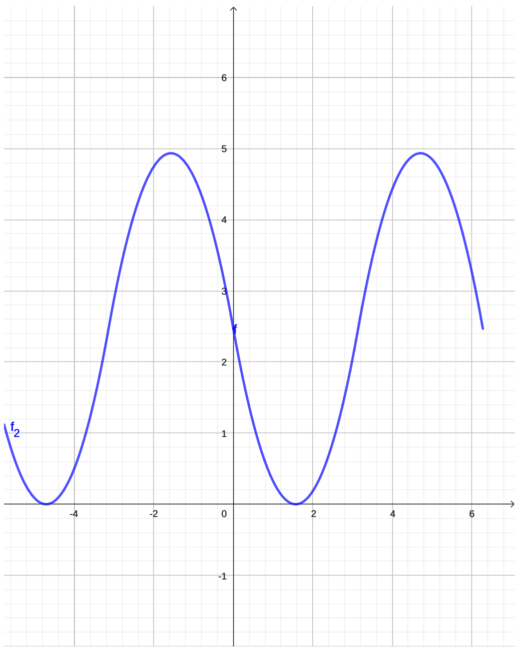
On considère l'équation différentielle :

$$y' + y = f.$$

3. Montrer que cette équation admet des solutions développables en série de Fourier.

Correction :

1. f est 2π-périodique. Traçons la fonction :



Sur les intervalles $[0, \pi[$, $[\pi, 2\pi[$, f est $\mathscr{C}^\infty$. Montrons que f est continue.

- **Étude en** π. On vérifie juste que

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Donc f est continue en π.

- **Étude en** 0 On a clairement :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi^2}{4}$$

Par périodicité :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 2\pi} f(x) = -\left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Donc f est continue $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Calculons les différents coefficients de Fourier.

- Commençons par $c_0(f)$:

$$\begin{aligned} c_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

- Graphiquement, on remarque que $f - \frac{\pi^2}{4}$ est une fonction impaire. Démontrons le. On pose $g = f - \frac{\pi^2}{4}$. Soit $x \in [-2\pi, 0[$

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{4} &= f(x+2\pi) - \frac{\pi^2}{4} \\ &= \begin{cases} \left(x+\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}, & \text{si } x+2\pi \in [0,\pi[\\ -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4} & \text{si } x+2\pi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(x+\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}, & \text{si } x \in [-2\pi,-\pi[\\ -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4} & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(-x-\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}, & \text{si } x \in [-2\pi,-\pi[\\ -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases} \\ &= f(-x) + \frac{\pi^2}{4} = g(-x) \end{aligned}$$

Ainsi tous les termes a_n sont nuls pour la fonction g. Donc en particulier $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$.

- Calculons $b_n(f)$ pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left(-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right)\sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nt)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(n(t+3\pi/2))dt + \frac{\pi}{2}\int_\pi^{2\pi} \sin(nt)dt \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nt)dt}_{I_1} + \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_\pi^{2\pi}\sin(nt)dt}_{I_2}. \end{aligned}$$

Commençons par le plus simple :

$$I_2 = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)$$

Pour calculer I_1, on doit faire 2 intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi} \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nt)dt \\
&= \left[-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos(nt)}{n}dt \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)dt \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2}{n}\left(\left[(t-\frac{\pi}{2})\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) \\
&= \left(1-(-1)^n\right)\left[\frac{\pi^2}{4n}-\frac{2}{n^3}\right].
\end{aligned}$$

En réinjectant, on trouve finalement :

$$b_n(f) = -\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}.$$

2. Comme f est continue $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,2\pi]$, f est égale à sa série de Fourier. De plus, on a convergence normale de la série de Fourier.

3. On raisonne par analyse synthèse.

•**Analyse.** On cherche y qui se développe en série de Fourier sous la forme :

$$\forall t\in[0,2\pi], \qquad y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt).$$

On suppose pour le moment avoir le droit de dériver sous le signe somme. Alors :

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -nA_n\sin(nt) + nB_n\cos(nt).$$

En injectant dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
&y'(t)+y(t) = f(t) \\
\Rightarrow &\sum_{n=1}^{+\infty} -nA_n\sin(nt)+nB_n\cos(nt) + C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt) \\
\Rightarrow &C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(nB_n+A_n)\cos(nt) + (B_n-nA_n)\sin(nt) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt).
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients de Fourier, on obtient :

$$\begin{cases} C_0 = c_0, \\ nB_n + A_n = 0 \\ B_n - nA_n = b_n \end{cases}$$

On résout :

$$C_0 = c_0, \quad B_n = \frac{b_n}{1+n^2}, \qquad A_n = \frac{-nb_n}{1+n^2}.$$

• **Synthèse.** On pose pour $t\in\mathbb{R}$:

$$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt).$$

avec $B_n = \frac{b_n}{1+n^2}$, $\qquad A_n = \frac{-nb_n}{1+n^2}$.

Montrons que y est une fonction dérivable. On pose

$$u_n(t) = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)$$

- **H1** $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto u_n(t)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u'(n) = -nA_n \sin(nt) + tB_n \cos(nt).$$

- **H2** On remarque que pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |u_n(t)| \leq |A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)| &\leq |A_n| + |B_n| \\ &\leq \frac{1+n}{1+n^2}|b_n| \\ &= \frac{1+n}{1+n^2}\frac{8}{\pi n^3} \sim \frac{8}{\pi n^4} \end{aligned}$$

  Donc $\sum u_n$ converge normalement donc simplement.

- **H3** Par le même raisonnement :

$$|u_n'(t)| \leq \frac{n(1+n)}{1+n^2}\frac{8}{\pi n^3} \sim \frac{8}{\pi n^3}$$

  On a convergence normale de la série $\sum u_n'$.

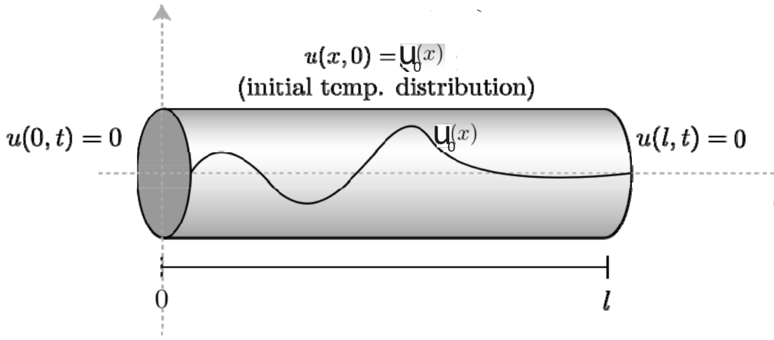
D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, y est une fonction $\mathscr{C}^1$ et on peut dériver sous le signe somme.

Finalement, on vérifie qu'en injectant dans l'équation $y' + y$, alors $y' + y = f$.

Exercice 2

On cherche à comprendre la propagation de la chaleur dans une barre cylindrique de longueur $l = \pi$.

- Au vue des symétries, on considère que le problème est plan.
- On suppose que la distribution de la chaleur à l'instant $t = 0$ dans la barre est une fonction u_0.
- On impose que la température au bord $x = 0$ et $x = \pi$ est nulle.



Alors le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[\\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, & \forall t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème, on suppose :

- $u_0(0) = u_0(l) = 0$.
- On suppose que u_0 est une fonction continue $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,l]$.

On complète u et u_0 sur $[-\pi,\pi]$ par imparité puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Existe-t-il des solutions sous la forme :

$$u(t,x) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx))?$$

Correction :

1. **Analyse**

On cherche une solution sous la forme

$$u(t,x) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx))$$

On suppose dans un premier temps pouvoir dériver en temps et en espace sous le signe somme. On sait déjà que $u(t,\cdot)$ est impaire donc pour $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_0(t) = 0$ et $a_n(t) = 0$.

$$\begin{cases} u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\sin(nx) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n'(t)\sin(nx) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx) \end{cases}$$

Alors par unicité des coefficients de Fourier, pour $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n'(t) = -n^2 K b_n(t)$$

$u_0(x)$ est continue $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Ainsi u_0 est égale à sa série de Fourier : Alors, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(nx) \\ c_0(u_0) = 0 \\ a_n(u_0) = 0 \end{cases}$$

car u_0 est impaire et

$$c_0(u_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$a_n(u_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

ici pour $n \geq 1$, $\beta_n = b_n(u_0)$. Comme on suppose que u_0 est continue $\mathscr{C}^1_{pm}$, alors la série on a aussi que $\sum \beta_n$ converge absolument. Finalement,

$$\begin{cases} b_n(t) = k_n e^{-n^2 K t} \\ b_n(0) = \beta_n \end{cases}$$

donc $k_n = \beta_n$.

On obtient donc :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-n^2 K t}\sin(nx)$$

2. **Synthèse**

On pose

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-n^2 K t}\sin(nx)$$

. Vérifions que u satisfait toutes les hypothèses. On pose

$$f_{x,n}(t) = \beta_n e^{-n^2 K t}\sin(nx)$$

(a) On vérifie que u est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à t sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $A > 0$.
On utilise les théorèmes sur les séries de fonctions. Par exemple, le théorème de permutation dérivation et série. D'abord, on fixe la variable x.

i. **H1** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto f_{x,n}(t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et
$$f'_{x,n}(t) = -n^2 K\beta_n e^{-n^2Kt}\sin(nx).$$

ii. **H2** $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{x,n}(t)$ converge simplement vers $S(t)$. En effet :
$$|f_{x,n}(t)| \le |\beta_n| e^{-n^2KA}.$$

iii. **H3** La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_{x,n}(t)$ CVU sur tout $[A, +\infty[$ vers une fonction h :
$$|f'_{x,n}(t)| \le n^2|\beta_n| e^{-n^2KA}$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, $t \mapsto u(t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[A, +\infty[$ (donc $\mathbb{R}_+^*$) et :
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_{x,n}(t)$$
Par un raisonnement analogue, on vérifie de même que u est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à x sur $\mathbb{R}$, et alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

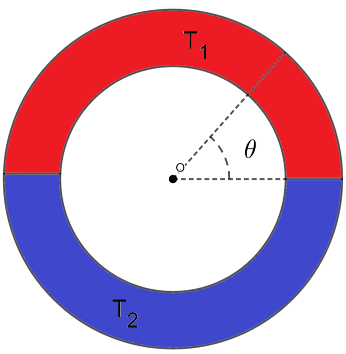
(b) On utilise le théorème de passage à la limite.
$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
En effet la série $\sum f_{x,n}(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$:
$$|f_{x,n}(t)| \le |\beta_n|.$$
Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\beta_n\right|$ converge. Le résultat découle du théorème d'interversion limite/série.

Exercice 3

Nous allons étudier la propagation de la chaleur au sein d'un anneau métallique, où une moitié est maintenue à une température T_1 tandis que l'autre est maintenue à une température T_2 ($T_1 \neq T_2$). À l'instant initial $t = 0$, l'anneau est dans cet état, et notre objectif est d'analyser l'évolution de la température en tout point de l'anneau au fil du temps.

Description mathématique du problème :

Afin de simplifier notre étude, nous faisons l'hypothèse que la température est constante le long de chaque section circulaire de l'anneau. Par conséquent, elle devient une fonction du temps t et de l'angle θ qui repère cette section. Désignons cette température par $u(t,\theta)$.



Cette fonction doit satisfaire l'équation de la chaleur formulée par Fourier.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\theta) = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(t,\theta), & \forall (t,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\\ u(0,\theta) = T_1, & \forall \theta \in]0,\pi[\\ u(0,\theta) = T_2, & \forall \theta \in]\pi,2\pi[\end{cases}$$

Il convient de noter que la condition initiale n'est pas spécifiée en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (le point $\theta = 2\pi$ correspond naturellement au point $\theta = 0$, puisque nous travaillons sur un anneau). Cela s'explique par le fait qu'il n'y a pas de sens physique à définir la température à l'interface des deux zones chauffées à deux températures distinctes, T_1 et T_2. La constante K est une constante physique positive liée aux propriétés thermodynamiques du matériau.

Avant de rechercher des solutions à cette équation, clarifions les aspects mathématiques. L'équation différentielle que $u(t,\theta)$ doit satisfaire implique que cette fonction doit être dérivable une fois par rapport à t sur $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, et deux fois par rapport à θ sur cet ensemble. Nous exigeons également une continuité en $t=0$ des solutions, car physiquement, le profil de température de l'anneau ne peut pas "sauter" d'un profil de température à l'autre. Ainsi, la fonction $u(t,\theta)$, pour être une solution de l'équation de la chaleur, doit également satisfaire à une dernière condition

$$\forall \theta \in]0,\pi[\bigcup]\pi,2\pi[, \quad \lim_{t\to 0^+} u(t,\theta) = u(0,\theta)$$

1. Déterminer la série de Fourier associée à la donnée initiale. La série de Fourier de u_0 est-elle égale à u_0 ?

2. Existe-t-il des solutions développables en série de Fourier ? Pour $t \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$u(t,\theta) = c_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(t)\cos(k\theta) + b_k(t)\sin(k\theta))$$

où les fonctions $a_k(t)$ et $b_k(t)$ sont supposées dérivables sur $]0,+\infty[$. On suppose également que $u(t,\theta)$ est dérivable terme à terme une fois par rapport au temps et deux fois par rapport à θ.

Correction :

1. La fonction u_0 est continue par morceaux et 2π-périodiques et vérifie pour $\theta \in [0,2\pi]$:

$$u_0(\theta) = \begin{cases} T_1, & \forall \theta \in]0,\pi[\\ T_2, & \forall \theta \in]\pi,2\pi[\end{cases}$$

Soit $k \geq 1$. Calculons les différents coefficients.

$$\begin{cases} c_0(u_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} T_1\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} T_2\mathrm{d}\theta\right) = \dfrac{T_1+T_2}{2} \\ a_k(u_0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} T_1\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} T_2\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta\right) = 0 \\ b_k(u_0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} T_1\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} T_2\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta\right) \\ \qquad = \dfrac{1}{\pi}\left(T_1\left[\dfrac{+\cos(k\theta)}{k}\right]_{\theta=0}^{\pi} + T_2\left[\dfrac{+\cos(k\theta)}{k}\right]_{\theta=\pi}^{2\pi}\right) \\ \qquad = \dfrac{1}{k\pi}(T_1-T_2)\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ pair} \\ \dfrac{2}{k\pi}(T_1-T_2), & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi la série de Fourier est :

$$S(u_0)(\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(T_1-T_2)}{(2p+1)\pi}\sin(2p+1)\theta.$$

u_0 n'est pas forcément égale à sa série de Fourier. Nous aurons besoin de ce résultat. Nous n'avons imposé aucune condition à l'interface $x=0$ et $x=\pi$. On va choisir $u_0(\pi) = u_0(0) = \frac{T_1+T_2}{2}$. Dans ce cas,

u_0 est dans l'espace de Dirichlet. En particulier, il y a convergence de la série de Fourier vers u_0. Donc $\forall \theta \in [0, 2\pi]$:

$$u_0(\theta) = S(u_0)(\theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(T_1 - T_2)}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\theta.$$

> **Remarque**
>
> Si vous remarquez que les coefficients $a_k = 0$ pour $k \geq 1$, il y a probablement une fonction impaire cachée. Il suffit de considérer la fonction $f : x \mapsto u_0(x) - \frac{T_1+T_2}{2}$. Cette fonction est impaire tous ces coefficients a_k sont nuls.

2. On raisonne par analyse-synthèse.

• **Analyse.** On cherche u sous la forme

$$u(t, \theta) = c_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(t) \cos(k\theta) + b_k(t) \sin(k\theta))$$

On suppose pour le moment qu'on peut dériver sous le signe somme. Alors :

Les dérivées sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, \theta) = c_0'(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k'(t) \cos(k\theta) + b_k'(t) \sin(k\theta)\right) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(t, \theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(a_k(t) \cos(k\theta) + b_k(t) \sin(k\theta)\right) \end{cases}$$

et qu'elle vérifie l'équation de la chaleur $\forall (t, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$

$$c_0'(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k'(t) \cos(k\theta) + b_k'(t) \sin(k\theta)\right) = -K \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(a_k(t) \cos(k\theta) + b_k(t) \sin(k\theta)\right)$$

On suppose pour le moment qu'il y a égalité des coefficients de Fourier. Ceci est le cas si u_0 est dans L^2 et 2π-périodique. En effet, la famille $\{e_k\}$ forment une base hilbertiennes de cet espace. Les coefficients de Fourier sont les coordonnées de u_0 dans cette base.

On en déduit que alors $a_0'(t) = 0$, et pour tout $t > 0$ et tout $k \geq 1$

$$a_k'(t) = -Kk^2 a_k(t), \quad b_k'(t) = -Kk^2 b_k(t)$$

On en déduit que $a_0(t) = a_0(0)$, $a_k(t) = a_k(0)e^{-Kk^2 t}$ et $b_k(t) = b_k(0)e^{-Kk^2 t}$, pour tout $t > 0$ et tout $k \geq 1$.

Or en évaluant en 0,

$$u(0, \theta) = u_0(\theta) = c_0(0) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(0) \cos(k\theta) + b_k(0) \sin(k\theta).$$

Dans la question 1., nous avons justifié que u_0 est DSF et qu'elle est égale à sa série de Fourier. On suppose avoir pour le moment assez de régularité pour pouvoir égalisé les coefficients. Ainsi $a_k(0) = a_k(u_0), \quad b_k(0) = b_k(u_0)\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Cela conduit à

$$u(t, \theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(T_1 - T_2)}{(2p+1)\pi} e^{-K(2p+1)^2 t} \sin((2p+1)\theta)$$

• **Synthèse.** On pose :

$$u(t, \theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(T_1 - T_2)}{(2p+1)\pi} e^{-K(2p+1)^2 t} \sin((2p+1)\theta)$$

Vérifions que u satisfait toutes les conditions.

► Soit $A > 0$. On pose

$$u_n(t, \theta) = \frac{2(T_1 - T_2)}{(2p+1)\pi} e^{-K(2p+1)^2 t} \sin((2p+1)\theta)$$

- **H1**. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [A,+\infty[$. La série $\sum u_n(t,\theta)$ converge simplement.
- **H2**. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u_n(t,\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(t,\theta) = -K(2p+1)^2\frac{2(T_1-T_2)}{(2p+1)\pi}e^{-K(2p+1)^2 t}\sin((2p+1)\theta)$$

- **H3**. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [A,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_n(t,\theta)\right| \leq \frac{2K}{\pi}|T_1-T_2|e^{-K(2p+1)^2 A} = w_n.$$

  On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 w_n = 0$. Ainsi la série $\sum w_n$ converge. Donc la série $\sum \frac{\partial}{\partial t}u_n$ converge normalement.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, $t \mapsto u(t,\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,+\infty$. De plus :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\theta) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{-2K(T_1-T_2)(2p+1)}{\pi}e^{-k(2p+1)^2 t}\sin((2p+1)\theta).$$

La propriété reste vraie pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

► Par un raisonnement analogue, on démontre que la fonction $\theta \mapsto u(t,\theta)$ est $\mathscr{C}^2$ pour $t \in [A,+\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et on peut dériver termes à termes. La propriété reste vraie pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

►. Une fois démontrée, il suffit d'égaliser pour démontrer que u satisfait l'équation de la chaleur.

►. On voit clairement que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad u(0,\theta) = u_0(\theta)$$

Par contre il n'est pas clair du tout que $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\theta) = u_0(\theta)$. Pour le moment la synthèse n'est pas satisfaite. On peut montrer que cette hypothèse n'est pas satisfaite.

> **Remarque**
>
> Si on suppose de la convergence en norme L^2, l'hypothèse $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\theta) = u_0(\theta)$ est satisfaite à l'aide de Parseval. Ce n'est pas vrai avec la convergence simple.

> **Remarque**
>
> On a démontré que les dérivées partielles sont continues donc u est $\mathscr{C}^1$ dès que $t > 0$. En particulier, l'argument d'unicité des coefficients de Fourier est vérifié a posteriori.