Convergence monotone et dominée
Td-Tp 7

Octobre 2023

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n\ :\ x \longmapsto n\ \ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\ \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f\ \mathrm{d}\lambda$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée.

1. f_n est mesurable sur $\mathbb{R}$, car c'est la composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue ;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$
3. et on a, par convexité du logarithme ($\ln(1+u) \leq u$, pour tout $u > 0$)
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x)| = f_n(x) \leq n\,\frac{f(x)}{n} = f(x)$$
f est la dominante cherchée, elle est indépendante de n et intégrable par hypothèse. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne le résultat demandé.

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Soit une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g_n = \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}$.

1. g_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue.
2. Puisque n existe à la fois sur le numérateur et le dénominateur de la fonction g_n et il y a le terme $n\,t$, cela pose des problèmes lorsque nous tendons n vers $+\infty$ pour chercher la limite de la suite de g_n, parce que
$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g\ : t \mapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$
Nous considérons donc de faire le changement de variable.
$$\int_0^\infty \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x=n\,t}{\overset{\text{c.d.v.}}{=\!=}} \int_0^\infty \frac{1}{n}\frac{nf\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Alors, on pose $z_n(x) = \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}$ et applique le théorème de convergence dominée.

1. z_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a la limite

$$z_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z(x) = \frac{1}{1+x^2} f(0)$$

3. Dominante pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|z_n(x)| \leq \frac{\|f\|_{\infty,\mathbb{R}_+}}{1+x^2} = \varphi(x)$$

avec $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)|$ car f est continue et bornée.

(a) $\varphi(x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue.

(b) $\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc,

$$\int_0^\infty \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x f(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, vérifiant de plus $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour utiliser le théorème de convergence dominée, soit une suite de fonctions $g_n(t) = \frac{e^{-x_n\,t}}{\sqrt{t}} f(t)$ avec la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On va ensuite utiliser le théorème de convergence dominée.

1. g_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue.
2. Soit $x > 0$ et $t \in]0, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{e^{-x\,t}\, f(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}} \|f\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$$

avec $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)|$ car f est continue et bornée.

(a) Sur $]0, 1]$ (*la fonction est définie sur* $\Omega =]0, +\infty[$), on a

$$\left|\frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

or

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C \Longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$$

alors, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, et donc $t \mapsto \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

(b) Sur $[1, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

De même, on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}$ sur $[1, +\infty[$.

Enfin, on a trouvé la fonction dominée intégrable

$$\varphi\ : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si}\, t \in]0, 1] \\ \frac{1}{t^2} & \text{si}\, t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

3. Changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\, f(t)\,\mathrm{d}t \underset{u=x\,t}{\overset{\text{c.d.v.}}{=\!=\!=}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, f\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Attention, ici on peut pas arriver à $t = 0$. Mais comme $\lim_{\alpha\to 0^+,\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta \frac{e^{-x\,t} f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe, on peut passer à la limite dans le terme de doite.

4. Appliquer le théorème de convergence dominée, l'idée est juste comme l'exercice 2,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, f\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, f(0)\,\mathrm{d}u$$

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on pose

$$z_n\ : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, f\left(\frac{u}{x_n}\right)$$

(a) z_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue ;

(b) la limite de la suite z_n existe,

$$z_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, f(0) = z(u)$$

Attention, $u = x\,t$ et $t \in]0, +\infty[$, on peut avoir $f(0)$ si et seulement si f est continue.

(c) Domination

$$|z_n(u)| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\|f\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \varphi(u)$$

On a déjà eu l'intégrablité de φ sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}\, f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\,\to\,+\infty]{} f(0)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = f(0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 4

On donne $c = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de c.

$f\,:\,t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \ln(t)$ qui est négatif et intégrable. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o\left(e^{-t/2}\right)$ par croissances comparées, qui est positif et intégrable. Par conséquent, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et son intégrale $\boxed{c \text{ existe}}$.

2. Montrer que $c < 0$.

On a :

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \int_{+\infty}^1 e^{-1/x}\ln\left(\tfrac{1}{x}\right)\frac{-\,\mathrm{d}x}{x^2} + \int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{à l'aide du changement de variable } x = 1/t \\ &= \int_1^{+\infty}\left(\tfrac{-e^{-1/t}}{t^2} + e^{-t}\right)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{>0}\left(1 - e^{g(t)/t}\right)\underbrace{\ln(t)}_{>0}\,\mathrm{d}t \quad \text{où } g(t) = t^2 - 1 - 2t\ln(t). \end{aligned}$$

> g est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $g(1)=0$ et $g' : t \mapsto 2(t-1-\ln(t))$. Par concavité de ln, on en déduit que g est strictement croissante, donc strictement positive sur $]1,+\infty[$. Finalement, on conclut que $\boxed{c<0}$ par monotonie de l'intégrale (d'une fonction continue strictement positive).

3. (a) Montrer $c = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ \mathrm{d}t$

> Puisque $\ln(1+u) \leq u$, on a
>
> $$0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$
>
> De plus, pour la suite $\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$. Donc, si on pose $f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t)$
>
> i. f_n est mesurable sur $]0,+\infty[$ car elle est continue ;
>
> ii. $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) = e^{-t}\ \ln(t)$ et $|f_n(t)| \leq \left|e^{-t}\ln(t)\right| = \varphi(t)$
>
>   A. φ est mesurable sur $]0,+\infty[$ car elle est continue ;
>
>   B. φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\varphi \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\varphi \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
>
> iii. Donc, par convergence dominée
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\ \mathrm{d}t = c$$

(b) En déduire $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^n \left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_1^0 x^n \ln\big(n(1-x)\big)(-n\ \mathrm{d}x) \quad \text{à l'aide du changement de variable } x = 1-\tfrac{t}{n} \\
&= n\ln(n)\int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n \ln(1-x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n+1}\ln(n) - n\int_0^1 \sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{n+k}}{k}\ \mathrm{d}x \quad \text{à l'aide du dévelop. en série entière de ln} \\
&= \frac{n}{n+1}\ln(n) - n\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\int_0^1 x^{n+k}\ \mathrm{d}x \quad \text{d'après le théo. de convergence monotone} \\
&= \frac{n}{n+1}\ln(n) - n\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(n+k+1)} \\
&= \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \quad \text{par télescopage} \\
&= \underbrace{\frac{-n}{n+1}}_{\to -1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) - \underbrace{\frac{n}{(n+1)^2}}_{\to 0} \quad \text{quand } n \to +\infty.
\end{aligned}
$$

On déduit du résultat de la question précédente que $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$ vers $-c$.

Exercice 5

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$
\sum_{n\geq 0}\int_\Omega |f_n|\ \mathrm{d}\mu < +\infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\int_\Omega f_n\ \mathrm{d}\mu\right) = \int_\Omega \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\ \mathrm{d}\mu
$$

D'après le théorème de convergence monotone, la suite des fonctions $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est croissante. Cela implique la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$
\left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n| \text{ et } \sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow[N\to+\infty]{p.p.} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n
$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$
\int_\Omega\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)\ \mathrm{d}\mu \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_\Omega\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\ \mathrm{d}\mu
$$

Par ailleurs, pour tout $N \geq 0$

$$
\int_\Omega\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)\ \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{N}\int_\Omega f_n\ \mathrm{d}\mu
$$

Et $\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient le résultat.

2. En déduire, calculer les intégrales

(a)

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln(x)$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n \;: x \in]0,1[\mapsto x^n \ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,

$$\int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 x^n \ln(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$. On peut donc appliquer la question 1, et alors,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} x^n \ln(x) \right) \, \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^n \ln(x) \, \mathrm{d}x = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\sin(ax)}{e^x-1} = e^{-x} \frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x} \sin(ax)$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n \;: x \in]0,+\infty[\mapsto e^{-(n+1)x} \sin(ax)$. Alors, pour tout $x > 0$, $|f_n| \leq ax \, e^{-(n+1)x}$, et

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x \leq \sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} ax \, e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

Ainsi, d'après la question 1,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1} \, \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(e^{-(n+1)x} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(n+1)x - iax} - \frac{1}{(n+1)x + iax} \right) = \frac{a}{(n+1)^2} + a^2$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1} \, \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}$$