上 海 交 通 大 学 试 卷 （考试 卷）
（ 2022 至 2023 学年第1学期 ）

班级号________________ 学号____________ 姓名(中&法)______________
课程名称：Algèbre linéaire et bilinéaire I 成绩__________________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：__________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

Avertissements :

1. *Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
   各个题目是不相关的，可以按照任何顺序来完成。
2. *Tous les documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone, smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.*
   不能使用任何参考资料和电子设备包括手机、翻译器和计算器。
3. *Toutes vos réponses doivent être justifiées.*
   所有解答需要证明或说明理由。

1 Question de cours (20 Points)

1. Énoncer la définition d'une application linéaire f de E dans E' . (Entierèment)
2. Énoncer le théorème du rang (application linéaire) et le démontrer.

2 Exercice : (20 points)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 2), \quad v_3 = (1, -2, 3)$$

1. La partie $\{v_1, v_2, v_3\}$ est elle libre ?
2. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la partie $\{v_1, v_2, v_3\}$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.
3. On considère la partie
$$G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + 2b + c = 0\}.$$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Comparer F et G

3 Exercice : (30 points)

1. Soit
$$E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_n \text{ converge}\},$$
F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergeant vers 0. Trouver les relations entre E, F et G puis le démontrer.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $E_{a,b} = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.
Soit l'application définie par :
$$\phi \ : \begin{cases} E_{a,b} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (u_0, u_1) \end{cases}$$
   (i) Montrer que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (ii) Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $E_{a,b}$ et $\mathbb{R}^2$.
   (iii) Déterminer la dimension de $E_{a,b}$

4 Exercice : (30 points)

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$, alors $p \circ q$ est un projecteur.
2. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
$$p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad p + q \text{ est un projecteur.}$$
3. Montrer que si $p + q$ est un projecteur, alors
$$\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}er(p + q) = \mathrm{K}er(p) \cap \mathrm{K}er(q).$$
4. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$, alors
$$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}er(p \circ q) = \mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q).$$