Topologie et Calcul différentiel : Fonctions convexes – TD 3

24 mars 2023

Exercice 1 : Fonctions convexes ?

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Justifier. *(On pourra utiliser `Python`).*

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= |x| \quad \text{sur } \mathbb{R}\\
f_2(x) &= \max\left(1, x^2\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}\\
f_3(x) &= \ln\left(1 + x^2\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}\\
f_4(x) &= \arctan\left(\ln\left(1 + x^2\right)\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}\\
f_5(x) &= \begin{cases} f_3(x) - f_3(1) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ f_2(x) - f_2(1) & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \end{cases}
\end{aligned}
$$

Réponse

Commençons par tracer les courbes pour se faire une idée. Voir la session `Python` 1.1, de la présente page

Session `Python` 1.1 – Tracer de courbes

Utilisation de `matplotlib` et de `numpy`.

In [1]

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

In [2]

```python
x = np.linspace(-5, 5, 200)
```

In [3]

```python
def f1(x):
    return(np.abs(x))


def f2(x):
    return(max(1, x**2))


def f3(x):
    return(np.log(1+x**2))


def f4(x):
```

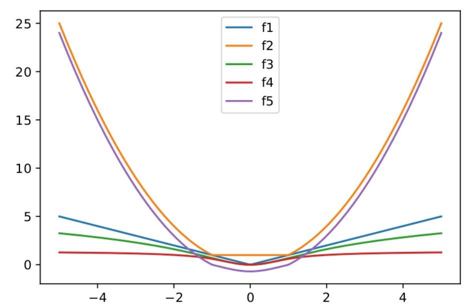
```python
    return(np.arctan(np.log(1+x**2)))


def f5(x):
    if (np.abs(x) <= 1):
        return(f3(x)-f3(1))
    else:
        return(f2(x)-f2(1))
```

In[4]

```python
plt.plot(x, f1(x), label="f1")
plt.plot(x, [f2(t) for t in x], label="f2")
plt.plot(x, f3(x), label="f3")
plt.plot(x, f4(x), label="f4")
plt.plot(x, [f5(t) for t in x], label="f5")
plt.legend();
```

Voir la figure 1.1, de la présente page

Figure 1.1 – Courbes



On observe donc que f_1, f_2 et f_5 sont convexes, alors que f_3 et f_4 ne le sont pas. Montrons-le.

1. f_1 *est convexe.* C'est une simple inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0, 1]$, alors

$$\left|(1-\lambda)\, x + \lambda\, y\right| \leqslant (1-\lambda)\, |x| + \lambda\, |y|$$

   ce qui exprime la convexité de f_1. On pourrait aussi dire qu'elle est continue et elle est en tout point dérivable à droite et sa dérivée à droite est croissante.
2. f_2 *est convexe.* Elle est continue et elle est en tout point dérivable à droite et sa dérivée à droite est croissante.
3. f_3 *n'est pas convexe.* On peut calculer sa dérivée seconde qui est positive sur $[-1, 1]$ et négative en dehors. Voir la session `Python` 1.2, de la présente page.

Session `Python` 1.2 – Dérivée seconde de f_3

On redémarre le noyau pour ne pas mélanger les objets numériques et symboliques...

In[1]

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x', real=True)
```

In[2]

```
(sp.ln(1+x**2)).diff(x, x)
```

Out[2]

$$\frac{2\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}+1\right)}{x^2+1}$$

In[3]

```
_.factor()
```

Out[3]

$$-\frac{2\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4. f_4 *n'est pas convexe.* La fonction est croissante au voisinage de $+\infty$ et converge vers la limite $\pi/2$. Elle ne peut donc pas être convexe, car elle doit être *au-dessus* de sa tangente. Cela donne la démonstration suivante (par l'absurde, supposons f_4 convexe).
   (a) La fonction est croissante (composée de deux fonctions croissantes).
   (b) Soit $x_0 > 0$ tel que $m = f_4'(x_0) > 0$ (par exemple $x_0 = 1$), alors
   $$\forall x \in [x_0, +\infty[,\ f(x) \geqslant m\,(x - x_0) + f(x_0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
5. f_5 *est convexe.* La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, car en ± 1, elle se recolle bien (valeur$=0$) et elle est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. On peut alors utiliser le fait qu'en tout point la fonction est dérivable à droite et f_d' est croissante. En effet
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ {f_5}'_d(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{si } x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ f_2'(x) & \text{si } x \geqslant -1 \text{ et } x < 1 \end{cases}$$
   Pour en vérifier la croissance (évidente sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$) il suffit de regarder ce qui se passe en ± 1. Or
   $$\lim_{x\to -1^-} {f_5}'_d(x) = -2 < {f_5}'_d(-1) = f_3'(-1) = -1$$
   et
   $$\lim_{x\to 1^-} {f_5}'_d(x) = 1 < {f_5}'_d(1) = 2$$

Nous avons utilisé plusieurs fois la propriété suivante : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ayant en tout point une dérivée à droite telle que f_d' soit croissante, alors f est convexe.

Exercice 2 : Composée de fonctions convexes

Soit f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$, g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Réponse

On revient à la définition. Soit $\lambda \in [0,1]$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a, comme f est convexe :

$$f(\lambda \times a + (1-\lambda) \times b) \leqslant \lambda \times f(a) + (1-\lambda) \times f(b)$$

donc comme g est croissante :

$$g(f(\lambda \times a + (1-\lambda) \times b)) \leqslant g(\lambda \times f(a) + (1-\lambda) \times f(b))$$

finalement, comme g est convexe :

$$g(f(\lambda \times a + (1-\lambda) \times b)) \leqslant \lambda \times g(f(a)) + (1-\lambda) \times g(f(b)).$$

Exercice 3 : Fonction convexe bornée

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.

   Réponse

   Supposons que f n'est pas décroissante. Alors il existe $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Par l'inégalité des pentes, on a, pour tout $z > y$:

   $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

   ▷ Posons $a = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$. Ainsi, pour tout $z > y$, on a

   $$f(z) \geqslant a \times (z-x) + f(x) \xrightarrow[z \to +\infty]{} +\infty$$

   C'est absurde car f est bornée.
   Donc f est décroissante.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

   Réponse

   Le raisonnement précédent montre que f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Un raisonnement similaire pour $z < x$ montre que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Soit $h > 0$ fixé.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x < y$, on a

$$f(y+h) - f(x+h) \geqslant f(y-h) - f(x-h).$$

Réponse

▷ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x < y$. On applique l'inégalité des pentes aux points $x - h$, $y - h$ et $x + h$

$$\frac{f(y-h) - f(x-h)}{y-x} \leqslant \frac{f(x+h) - f(y-h)}{x-y+2h}$$

Elle est vérifiée dans les cas "$y - h < x + h$" et "$y - h > x + h$". On traite le cas "$y - h = x + h$" à la fin de cette démonstration.

▷ On applique l'inégalité des pentes aux points $y - h$, $x + h$ et $y + h$

$$\frac{f(x+h) - f(y-h)}{x-y+2h} \leqslant \frac{f(y+h) - f(x+h)}{x-y}.$$

▷ Finalement, $\dfrac{f(y-h) - f(x-h)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(y+h) - f(x+h)}{y-x}$, donc

Donc $f(y+h) - f(x+h) \geqslant f(y-h) - f(x-h)$.

▷ Traitons le cas "$y - h = x + h$" : on a $y = x + 2h$. Alors

$$f(x+h) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

d'où

$$f(x+h) + f(y-h) = 2 \times f(x+h) \leqslant f(x) + f(y)$$

et finalement

$$f(y+h) - f(x+h) \geqslant f(y-h) - f(x-h).$$

2. Montrer que la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{2h} \times \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

est convexe.

Réponse

▷ Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Ainsi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{2h} \times (f(x+h) - f(x-h)).$$

▷ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Alors d'après la question 1,

$$g'(y) - g'(x) = \frac{1}{2h}(f(y+h) - f(y-h) - f(x+h) + f(x-h)) \geqslant 0$$

donc g' est croissante.

Donc g est convexe.

Exercice 5 : Inégalité de convexité

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Comparer :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}, \quad h = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}.$$

Réponse

On utilise la convexité de la fonction exponentielle. Si $f(x) = e^x$, alors pour tous réels $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(y_k).$$

Donc en prenant $y_k = \ln(x_k)$: $g \leqslant m$. De même, en prenant $y_k = -\ln(x_k)$, on a :

$$\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$$

donc par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $h \leqslant g$. Finalement :

$$\boxed{h \leqslant g \leqslant m}$$

Exercice 6 : Inégalité de convexité discrète

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs, p, q, r des nombres réels vérifiant $0 < p < 1 < q < r$. On pose

$$\forall k \in \{1, p, q, r\},\ m_k = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k}$$

1. Comparer les m_k pour $k \in \{1, p, q, r\}$.

Réponse

(a) On commence par les ordonner à l'aide de `Python`. Voir la session 6.1, page suivante. On constate que l'application $k \longmapsto m_k$ semble croissante. Montrons-le !

(b) Soit $0 < a < b$ deux nombres réels, pour passer de m_a à m_b on peut utiliser la fonction

$$x \longmapsto x^{b/a}$$

qui est convexe. L'inégalité de convexité discrète nous donne alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(y_1, \ldots, y_n) \in]0, +\infty[^n$, (comme les $(y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ ont un rôle symétrique, on considère des isobarycentres)

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^{b/a} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{b/a}\right)$$

Ce qui donne, en posant pour $j \in [\![1, n]\!]$, $y_j = x_j^a$, et en élevant à la puissance $1/b$ (la fonction $t \longmapsto t^{1/b}$ étant croissante)

$$m_a = \sqrt[a]{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^a} \leqslant \sqrt[b]{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^b} = m_b$$

Finalement, on a

$$\boxed{m_p \leqslant m_1 \leqslant m_q \leqslant m_r}$$

Session Python 6.1 – Évaluations des moyennes

Un peu de calcul numérique... On utilise `numpy`.

In [1]

```python
import numpy as np
```

In [2]

```python
def f(k, l):
    aux = np.sum([np.abs(i)**k for i in l])/len(l)
    return(aux**(1/k))
```

In [3]

```python
[f(k, [1, 2, 3]) for k in [0.5, 1, 1.5, 2]]
```

Out [3]

```
[1.9101675806055889, 2.0, 2.083869324916839, 2.160246899469287]
```

2. Placer g et h par rapport aux m_k, $k \in \{1, p, q, r\}$ lorsque

$$g = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \frac{n}{h} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

Réponse

(a) On commence de même par évaluer g et h, pour les placer par rapport aux m_k. Voir la session 6.2, page suivante. Sur l'exemple, on obtient $h \leqslant g \leqslant m_p$. Essayons de le démontrer.

(b) ($h \leqslant g$) Pour g, on a vu en cours qu'il était plus simple de prendre le logarithme, on va donc comparer $\ln(h)$ et $\ln(g)$. La fonction $\ln$ étant concave, on a pour $(y_1, \dots, y_n) \in]0, +\infty[^n$, en prenant des isobarycentres

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(y_j)\right) \qquad (*)$$

en prenant, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $y_j = 1/x_j$, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{h}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{x_j}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{g}\right)$$

(c) ($g \leqslant m_p$) Dans $(*)$, on prend, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $y_j = x_j^p$, on obtient alors

$$p\,\ln\left(m_p\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(x_j^p\right)\right) = p\,\ln(g)$$

Session Python 6.2 – Placement des moyennes géométriques et harmoniques

On procède comme précédemment.

In [4]

```
def g(l):
    return(np.prod(l)**(1/len(l)))


def h(l):
    aux = np.sum([1/i for i in l])
    return(len(l)/aux)
```

In [5]

```
g([1, 2, 3]), h([1, 2, 3])
```

Out [5]

```
(1.8171205928321397, 1.6363636363636365)
```

Exercice 7 : Inégalité de convexité

Soit a, b et c trois nombres réels > 0, montrer en utilisant une inégalité de convexité que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

Réponse

La présence de $a+b+c$ nous fait penser que, peut-être, les coefficients barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pourraient être (a, b, c). Dans ce cas, par exemple

$$\frac{a^2}{a+b} = a\,\frac{a}{a+b} = a\,\frac{1}{1+b/a}$$

Donc, si on prend

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{1}{1+x},\ x_1 = \frac{b}{a},\ x_2 = \frac{c}{b},\ x_3 = \frac{a}{c}$$

puisque la fonction f est convexe, on obtient

$$f\left(\frac{a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3}{a+b+c}\right) \leqslant \frac{a\,f(x_1) + b\,f(x_2) + c\,f(x_3)}{a+b+c}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{2} = f(1) \leqslant \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right)$$

ce que nous voulions.

Remarque : on peut recommencer avec n nombres réels strictement positifs, on trouve alors, avec la convention $x_{n+1} = x_1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_k + x_{k+1}} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

Exercice 8

Dans cet exercice, il suffit d'appliquer l'inégalité de convexité discrète à des fonctions convexes (ou concaves) bien choisies.
Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

1. Démontrer que :
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Réponse

Soit $f : x > 0 \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$. On en déduit que f est convexe. Donc :
$$f\left(\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) \leqslant \frac{1}{n}f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n)$$
Ce qui donne :
$$\frac{1}{\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \frac{1}{n}x_n} \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{1}{x_n}$$
On passe à l'inverse dans l'inégalité et on obtient finalement :
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

2. Démontrer que :
$$1 + (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + x_1)^{\frac{1}{n}} (1 + x_2)^{\frac{1}{n}} \ \dots \ (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$$
(On pourra démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.)

Réponse

$\triangleright$ Soit $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$, montrons que f est convexe. On remarque que f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ et } f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$
Comme $f'' > 0$, on en déduit que f est convexe.
$\triangleright$ On applique l'inégalité de convexité avec la famille $(\ln(x_1), \dots, \ln(x_n))$:
$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n)\right) &\leqslant \frac{1}{n}f(\ln(x_1)) + \cdots + \frac{1}{n}f(\ln(x_n)) \\
\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n)}\right) &\leqslant \frac{1}{n}\ln(1 + x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(1 + x_n) \\
\ln\left(1 + (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) &\leqslant \ln\left((1 + x_1)^{\frac{1}{n}} \dots (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}$$
Et donc, comme exp est croissante, on obtient l'inégalité voulue :
$$1 + (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + x_1)^{\frac{1}{n}} (1 + x_2)^{\frac{1}{n}} \ \dots \ (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$$

3. Démontrer à l'aide de l'inégalité précédente que :
$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 y_2 \dots y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (x_1 + y_1)^{\frac{1}{n}} (x_2 + y_2)^{\frac{1}{n}} \ \dots \ (x_n + y_n)^{\frac{1}{n}}$$

Réponse

On applique l'inégalité précédente à la famille $\left(\frac{y_1}{x_1} \dots \frac{y_n}{x_n}\right)$:

$$1 + \left(\frac{y_1}{x_1} \dots \frac{y_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \frac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(1 + \frac{y_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Et en multipliant par $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ dans l'inégalité, on obtient le résultat voulu :

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 y_2 \dots y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (x_1 + y_1)^{\frac{1}{n}} (x_2 + y_2)^{\frac{1}{n}} \dots (x_n + y_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 9 : Inégalité de Hölder

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, on définit l'ensemble $\mathcal{L}(I)$ par

$$\mathcal{L}^p(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R}, \ \int_I |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{L}^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.

Réponse

On va appliquer l'inégalité de Hölder avec les exposants $p = 3$ et $q = 3/2$, qui vérifient bien $1/p + 1/q = 1$. On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} |f^2(x)| \times |g(x)| dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{2 \times \frac{3}{2}}\right)^{2/3} \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^3\right)^{1/3} < +\infty$$

2. Soit $p, q, r \geqslant 1$ tels que $1/p + 1/q = 1/r$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Démontrer que $fg \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R})$.

Réponse

On pose $p' = p/r$ et $q' = q/r$, on pose $f_1 = f^r$ et $g_1 = g^r$ et on applique la question 1.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Si $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, montrer l'inclusion $\mathcal{L}^q([a, b]) \subseteq \mathcal{L}^p([a, b])$. Si $[a, b] = [0, 1]$, montrer que l'inclusion est stricte.

Réponse

On va utiliser l'inégalité de Hölder. Prenons $f \in \mathcal{L}^q([a, b])$. On a :

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| \times 1 dx$$

Soit r tel que $rp = q$, c'est-à-dire $r = q/p \in]1, +\infty]$, et soit r' tel que $1/r + 1/r' = 1$. L'inégalité de Hölder donne

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/r} \left(\int_a^b 1^{r'} dx\right)^{1/r'} \leqslant |b - a|^{1/r'} \left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/r} < +\infty$$

Ainsi, f est dans $\mathcal{L}^p([a, b])$. Cette inclusion est stricte si $[a, b] = [0, 1]$. En effet, la fonction $f(x) = 1/x^\alpha$ est dans $\mathcal{L}^p([0, 1])$ si et seulement si $p\alpha < 1$.

Exercice 10 : Propriétés asymptotiques des fonctions convexes

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'une des propriétés suivantes est satisfaite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - a\,x\Big) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - a\,x\Big) = b \in \mathbb{R}$$

Réponse

La fonction taux d'accroissement en 0 définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

est croissante (puisque f est convexe). Donc, soit elle est majorée, soit elle ne l'est pas. On a donc deux cas

1. Elle n'est pas majorée, en ce cas

$$\frac{f(x)}{x} = \tau(x) + \frac{f(0)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

2. Si elle est majorée, elle admet une limite notée $a \in \mathbb{R}$. Donc

$$\frac{f(x)}{x} = \tau(x) + \frac{f(0)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$$

Dans ce cas, considérons la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall g \in [0,+\infty[,\ g(x) = f(x) - a\,x$$

La fonction g est décroissante, car si $0 < x < y$, on a

$$g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - a\,(y-x) = (y-x)\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - a\right)$$

mais, d'après la convexité de f, si $z > y$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \xrightarrow[z\to+\infty]{} a^-$$

Ce qui montre que g est décroissante. On a à nouveau deux cas : soit elle est minorée, soit elle ne l'est pas.

(a) Si g n'est pas minorée, alors

$$f(x) - a\,x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

(b) Si g est minorée, elle admet une limite $b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) - a\,x \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$$

Exercice 11 : Fonctions log-convexes

On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ est log-convexe si, et seulement si, $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que lorsque f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ et log-convexes alors $f+g$ est log-convexe.

Réponse

Puisque les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$, $\ln(f+g)$ est de classe $\mathscr{C}^2$. Nous allons montrer que sa dérivée seconde est positive. Comme $(\ln(f+g))'' = ((f''+g'')+(f'+g')^2)/(f+g)^2$, on sait que $f\,f'' - f'^2 \geqslant 0$ et de même $g\,g'' - g'^2 \geqslant 0$, puisque f et g sont log-convexes. Mais en ce cas

$$(f+g)\,(f''+g'') - \Big(f'+g'\Big)^2 = \underbrace{f\,f'' - f'^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{g\,g'' - g'^2}_{\geqslant 0} + f\,g'' + f''\,g - 2\,f'\,g'$$

Comme f et g sont strictement positives et que $ff'' - (f')^2 \geqslant 0$ et $gg'' - (g')^2 \geqslant 0$:

$$f\,g\,\Big(f\,g'' + f''\,g - 2\,f'\,g'\Big) \geqslant f^2\,g'^2 + f'^2\,g^2 - 2\,f\,g\,f'\,g' = \Big(f\,g' - f'\,g\Big)^2 \geqslant 0$$

on déduit que

$$(f+g)\,(f''+g'') - \Big(f'+g'\Big)^2 \geqslant 0$$

ce qui traduit la log-convexité de $f+g$.

2. Montrer que c'est encore vrai en général (c'est-à-dire même quand f et g ne sont aps de classe $\mathcal{C}^2$. *(On pourra utiliser la midconvexité).*

Réponse

On nous conseille d'utiliser la midconvexité. Allons-y ! D'abord, signalons que f et g sont continues, car $\ln\circ f$ et $\ln\circ g$ le sont.

(a) Que sait-on ?

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ln\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln\Big(f(x)\Big) + \ln\Big(g(x)\Big)\right)$$

ou encore, de manière équivalente, en passant par l'exponentielle :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{f(x)\,f(y)}$$

et de même pour g.

(b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors

$$(f+g)\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{f(x)\,f(y)} + \sqrt{g(x)\,g(y)}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^2+b^2 \geqslant 2ab$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{f(x)\,f(y)} + \sqrt{g(x)\,g(y)}\right)^2 &= f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y) + 2\sqrt{f(x)\,f(y)\,g(x)\,g(y)}\\ &\leqslant f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y) + \Big(f(x)\,g(y) + f(y)\,g(x)\Big)\end{aligned}$$

d'après la célèbre inégalité

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ 2\,a\,b \leqslant a^2+b^2$$

et donc, finalement

$$(f+g)\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{(f+g)(x)\,(f+g)(y)}$$

ce qui montre la midconvexité de $\ln\circ(f+g)$ et donc sa convexité.

Exercice 12 : Dérivation d'un équivalent

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que

$$f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Montrer que

$$f'(x) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}}$$

Trouver un contre-exemple lorsque f n'est plus convexe.

Réponse

1. Voici un contre-exemple lorsqu'il n'y a pas de convexité :

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha} + \sin\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$$

En effet, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b[$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b[$. De plus, d'une part, on a bien

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha} + \sin\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

car $|\sin(y)| \leqslant 1$ et $\frac{1}{(b-x)^\alpha} \to +\infty$ quand $x \to b^-$. D'autre part,

$$f'(x) = \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)\right)$$

Ce terme est égal à 0 quand $x = x_k = b - \frac{1}{\sqrt[\alpha]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}}$ Donc

$$f'(x_k)(b - x_k)^{\alpha+1} \to 0 \neq \alpha$$

Enfin on peut remarquer que

$$f''(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(b-x)^{\alpha+2}}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)\right) - \frac{\alpha^2}{(b-x)^{2\alpha+2}} \sin\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right) < 0 \text{ lorsque } x = x_k$$

donc f n'est pas convexe.

2. On suppose désormais que f convexe, et que $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ c'est-à-dire que

$$f(x)(b-x)^\alpha \xrightarrow[x \to b^-]{} 1$$

On veut montrer que $f'(x) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}}$, c'est-à-dire que

$$f'(x)(b-x)^{\alpha+1} \xrightarrow[x \to b^-]{} \alpha$$

Le passage à la limite, ainsi que l'hypothèse de convexité, nous suggèrent d'utiliser l'inégalité des pentes en encadrant la dérivée en un point, et de faire un passage à la limite à gauche et à droite de cette dérivée.
Soit donc $a < x < y < z < b$. D'après l'inégalité des pentes :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y) \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

et donc

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(b-y)^{\alpha+1} \leqslant f'(y)(b-y)^{\alpha+1} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}(b-y)^{\alpha+1}$$

$$\underbrace{\frac{f(y)}{y-x}(b-y)^{\alpha+1}}_{(1)} - \underbrace{\frac{f(x)}{y-x}(b-y)^{\alpha+1}}_{(2)} \leqslant f'(y)(b-y)^{\alpha+1} \leqslant \underbrace{\frac{f(z)}{z-y}(b-y)^{\alpha+1}}_{(3)} - \underbrace{\frac{f(y)}{z-y}(b-y)^{\alpha+1}}_{(4)}$$

Comme on veut montrer que le terme central tend vers α quand y tend vers b^-, il suffit de montrer que $(1)-(2)$ et $(3)-(4)$ tendent tous les deux vers α quand x, y et z tendent vers b^-, et de conclure avec le théorème des gendarmes. On commence par utiliser notre hypothèse sur l'équivalent de $f(x)$ au voisinage de b^- pour simplifier. On a :

$$(1) = \frac{f(y)}{y-x}(b-y)^{\alpha+1} \underset{y\to b^-}{\sim} \frac{b-y}{y-x}$$

Par ailleurs,

$$(2) = \frac{f(x)}{y-x}(b-y)^{\alpha+1} = f(x)(b-x)^{\alpha}\left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\alpha+1}\frac{b-x}{y-x} \underset{x\to b^-}{\sim} \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\alpha+1}\frac{b-x}{y-x}$$

La différence de ces deux termes doit converger (par rapport à x ? y ?c'est encore un peu flou) vers α. Cela ne semble possible que si x, y et b sont dépendants les uns des autres ! On va donc imposer une dépendance entre eux. Comme $x < y < b$, on impose à ce qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $y = \lambda\cdot x + (1-\lambda)\cdot b$
Alors, $b-y = \lambda\cdot(b-x)$ et $y-x = (1-\lambda)\cdot(b-x)$
Ainsi,

$$(1) \underset{y\to b^-}{\sim} \frac{b-y}{y-x} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$
$$(2) \underset{x\to b^-}{\sim} \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\alpha+1}\cdot\frac{b-x}{y-x} = \lambda^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{1-\lambda}$$

On procède de même avec les termes de droite.

$$(3) = \frac{f(z)}{z-y}(b-y)^{\alpha+1} = f(z)(b-z)^{\alpha}\cdot\left(\frac{b-y}{b-z}\right)^{\alpha+1}\cdot\frac{b-z}{z-y} \underset{z\to b^-}{\sim} \left(\frac{b-y}{b-z}\right)^{\alpha+1}\frac{b-z}{z-y}$$
$$(4) = \frac{f(y)}{z-y}(b-y)^{\alpha+1} \underset{y\to b^-}{\sim} \frac{b-y}{z-y}$$

De manière similaire, on impose à ce qu'il existe $\mu \in]0,1[$ tel que $z = \mu\cdot y + (1-\mu)\cdot b$. Alors, $z-y = (1-\mu)\cdot(b-y)$ et $b-z = \mu\cdot(b-y)$.
Ainsi,

$$(3) \underset{y\to b^-}{\sim} \frac{1}{\mu^{\alpha+1}}\cdot\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{1}{(1-\mu)\mu^{\alpha}}$$
$$(4) \underset{x\to b^-}{\sim} \frac{1}{1-\mu}$$

Il nous reste maintenant à voir si $(1)-(2)$ et $(3)-(4)$ tendent bien α. Encore faut-il savoir quelle valeur de λ et de μ on souhaite prendre. Comme on souhaite faire apparaître un α, et que le α est partout en puissance, il faut faire apparaître un α grâce à un passage à la limite de λ et de μ. Comme $(1)-(2)$ tend vers 0 quand λ tend vers 0, et que $(3)-(4)$ tend vers $+\infty$ quand μ tend vers 0, bien que ces vérifications nous rassurent car elles ne contredisent pas les calculs jusqu'ici effectués, elles ne nous sont pas utiles pour introduire notre α tant convoité. Par élimination, on tente donc de faire tendre λ vers 1, et μ vers 1. On pose $\lambda' = 1-\lambda$ et $\mu' = 1-\mu$ et on obtient

$$\begin{aligned}(1)-(2) &= \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\lambda^\alpha) = \frac{1-\lambda'}{\lambda'}(1-(1-\lambda')^\alpha) = \frac{1-\lambda'}{\lambda'}(1-(1-\alpha\lambda'+o(\lambda'))) \\ &= \frac{1-\lambda'}{\lambda'}(\alpha\lambda'+o(\lambda')) = (1-\lambda')(\alpha+o(1)) \xrightarrow[\lambda'\to 0]{} \alpha \\ (3)-(4) &= \frac{1}{\mu'}\left(\frac{1}{(1-\mu')^\alpha}-1\right) = \frac{1}{\mu'}\left((1+\mu'+o(\mu'))^\alpha - 1\right) = \alpha + o(1) \xrightarrow[\mu'\to 0]{} \alpha\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a bien que

$$f'(x)(b-x)^{\alpha+1} \xrightarrow[x\to b^-]{} \alpha$$

Exercice 13 : Transformation de Legendre

Soit ϕ une fonction définie sur un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur I. On définit la *transformée de Legendre de* ϕ par

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(x\,y - \phi\,(x)\big) \in]-\infty, +\infty]$$

et on s'intéresse à

$$J = \left\{y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) \neq +\infty\right\}$$

1. Montrer que si ϕ est paire et que $J \neq \varnothing$, alors $\widetilde{\phi}$ est paire.

Réponse

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, $\phi : x \longmapsto |x|^p/p$ définie sur $I = \mathbb{R}$, calculer $\widetilde{\phi}$ et J. Quelle inégalité du cours retrouve-t-on ?

Réponse

La fonction ϕ étant paire, la fonction $\widetilde{\phi}$ sera paire. On peut donc se limiter aux cas $y > 0$ (on peut même se limiter au cas où $x > 0$). On trouve alors :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) = \frac{|y|^q}{q},\ \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Donc $J = \mathbb{R}$.

Session `Python` 13.1 – Transformée de Legendre

On se limite ici aux cas où $x > 0$ et $y > 0$, les autres cas pourraient se traiter de la même manière, si on ne remarque pas les propriétés de $\widetilde{\phi}$.

In [6]

```python
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

In [7]

```
x = sp.symbols('x', positive=True)
y = sp.symbols('y', positive=True)
p = sp.symbols('p', positive=True)
```

In [8]

```
sp.diff(x*y-x**p/p, x)
```

Out [8]

$$y - \frac{x^p}{x}$$

In [9]

```
sp.solve(_, x)
```

Out [9]

$$\left[y^{\frac{1}{p-1}}\right]$$

In [10]

```
(x*y-x**p/p).subs({x: _[0]}).simplify()
```

Out [10]

$$y^{\frac{p}{p-1}} - \frac{\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)^p}{p}$$

3. En considérant la fonction $\phi : x \longmapsto x\,\ln(x) - x$ définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$, calculer J et montrer que

$$\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2,\ a\,b \leqslant a\,\ln(a) - a + e^b$$

Réponse

Bien sûr, on pourrait démontrer l'inégalité directement en étudiant des fonctions.
On peut aussi calculer la transformée de Legendre de ϕ. Voir la session 13.2, de la présente page. On trouve que $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) = e^y$$

L'inégalité est alors immédiate, par définition de la transformation de Legendre.

Session Python 13.2

Même technique.

In [11]

```python
(x*y-x*sp.ln(x)+x).diff(x)
```

Out [11]

$y - \log(x)$

In [12]

```python
sp.solve(_, x)
```

Out [12]

$[e^y]$

In [13]

```python
(x*y-x*sp.ln(x)+x).subs({x: _[0]}).simplify()
```

Out [13]

e^y

4. Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\widetilde{\phi}$ est convexe sur J.

Réponse

Soit $(y, z) \in J^2$ et $\lambda \in]0,1[$. Si on prend un $x \in I$

$$x\,\big((1-\lambda)\;y + \lambda\,z\big) - \phi(x) = (1-\lambda)\;\big(x\,y - \phi\,(x)\big) + \lambda\;\big(x\,z - \phi\,(x)\big)$$

en majorant les termes de droite par leurs bornes supérieures, on obtient

$$x\;\big((1-\lambda)\;y + \lambda\,z\big) - \phi(x) = (1-\lambda)\;\big(x\,y - \phi(x)\big) + \lambda\;\big(x\,z - \phi(x)\big) \leqslant (1-\lambda)\;\widetilde{\phi}(y) + \lambda\,\widetilde{\phi}(z) \in \mathbb{R}$$

Ce qui montre que

$$(1-\lambda)\;y + \lambda\,z \in J$$

et donc, que J est un intervalle. De plus, en passant à la borne supérieure dans le terme de gauche, on obtient

$$\widetilde{\phi}\,\big((1-\lambda)\;y + \lambda\,z\big) \leqslant (1-\lambda)\;\widetilde{\phi}(y) + \lambda\,\widetilde{\phi}(z)$$

ce qui est la convexité de $\widetilde{\phi}$.

5. On suppose que $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\; \phi''(x) > 0 \text{ et } \phi'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

montrer alors que

$$\widetilde{\widetilde{\phi}} = \phi$$

Réponse

Comme ϕ est dérivable, il est facile de trouver la valeur de $\widetilde{\phi}(y)$, elle est obtenue quand

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\,y-\phi(x)\big)=y-\phi'(x)=0$$

et, comme $\phi''>0$, ϕ' est strictement croissante. La deuxième hypothèse sur ϕ nous assure que $\phi'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Finalement, en notant $\psi(y)$ le point d'annulation trouvé ci-dessus, on a

$$\psi(y)=\phi'^{-1}(y)\text{ et }\widetilde{\phi}(y)=y\,\psi(y)-\phi\big(\psi(y)\big)$$

D'après les hypothèses sur ϕ, la fonction $\psi=\phi'^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a pour $y\in\mathbb{R}$

$$\phi'\big(\psi(y)\big)=y\text{ donc }\psi'(y)\,\phi''\big(\psi(y)\big)=1$$

ensuite, on constate que $\widetilde{\phi}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\widetilde{\phi}'(y)=\psi(y)+y\,\psi'(y)-\psi'(y)\,\phi'\big(\psi(y)\big)=\psi(y)$$

On a donc que $\widetilde{\phi}'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

On note $\theta(y)$ le point d'annulation de la fonction $x\mapsto\frac{d}{dx}(xy-\tilde{\phi}(x))$. On remarque alors, avec un raisonnement analogue, que

$$\theta=\left(\widetilde{\phi}'\right)^{-1}=\psi^{-1}=\phi'$$

En particulier, $\psi\circ\theta(y)=y$. En remplaçant y par $\theta(y)$ dans l'expression $\widetilde{\phi}(y)=y\,\psi(y)-\phi\big(\psi\,(y)\big)$, il vient :

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\phi}}(y)&=y\,\theta(y)-\widetilde{\phi}\big(\theta\,(y)\big)\\&=y\,\theta(y)-\Big(\theta(y)\,\psi\big(\theta\,(y)\big)-\phi\Big(\psi\big(\theta\,(y)\big)\Big)\Big)\\&=y\,\theta(y)-\big(\theta(y)\,y-\phi\,(y)\big)\\&=\phi(y)\end{aligned}$$