Intégrale à paramètres
Td-Tp 12

Novembre 2023

Exercice 1

1. Justifier que pour $x > 0$ l'intégrale :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt,$$
est bien définie.
2. Justifier que f est continue sur son domaine de définition.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(x) + f(x+1)$.
4. Déterminer une équivalent de f en 0^+ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

1. On pose $h : (x,t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$. Soit $x > 0$. Déterminons un équivalent de h en 0^+ :
$$h(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$
Cette fonction est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x < 1$ c'est à dire si et seulement si $x > 0$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $A > 0$.
   - **H1** $\forall x \in [1,+\infty[$ $t \mapsto h(x,t)$ est une fonction mesurable.
   - **H2** $\forall t \in]0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[A,+\infty[$.
   - **H3 : hypothèse de domination.** Soit $x \in [A,+\infty[$ et $t \in]0,1]$:
   $$|h(x,t)| \leq \frac{t^{A-1}}{1+t} \leq t^{A-1} = \varphi(t).$$
   La fonction φ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1 - A < 1 \Leftrightarrow A > 0$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}^1(]0,1],\mathbb{R})$.

   On peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale. La fonction f est continue sur $[A,+\infty[$. Ainsi f est continue sur $\bigcup_{A>0}[A,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :
$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}.$$
4. Comme f est continue en 1, $\lim_{x\to 0} f(x+1) = f(1) < +\infty$. Ainsi en utilisant l'identité de la question 3, on déduit que
$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$
f est une fonction positive. Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On aurait pu utiliser un théorème d'interversion limite/intégrale, i.e. le théorème de convergence dominée ici.

Exercice 2

1. Justifier l'existence de la fonction :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cosh(2xt) \, \mathrm{d}t.$$
2. Déterminer F à l'aide d'une équation différentielle.
3. Déterminer F à l'aide d'une permutation série intégrale.

1. On pose $f : (x,t) \to e^{-t^2} \cosh(2xt)$. $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus :
$$\lim_{t \to +\infty} t^2 f(x,t) = 0.$$
Ainsi $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t^2}$. Par comparaison pour des fonctions positives, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Nous souhaitons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale :
   - **H1** $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$.
   - **H2** $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
   $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = 2te^{-t^2} \sinh(2xt).$$
   Soit $x \in [-a, a]$ et $t \in \mathbb{R}_+$:
   $$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| \leq 2te^{-t^2} |\sinh(2at)| = \varphi_a(t).$$
   De plus,
   $$\lim_{t\to+\infty} t^2 \varphi_a(t) = 0$$
   Ainsi $\varphi_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

   D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \sinh(2xt) dt.$$
   Intégrons par partie. On pose :
$$u'(t) = 2te^{-t^2}, \qquad u(t) = -e^{-t^2},$$
$$v(t) = \sinh(2xt), \qquad v'(t) = 2x \cosh(2xt)$$
   $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On peut intégrer par partie :
$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[-e^{-t^2} \sinh(2x) \right]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cosh(2xt) dt \\ &= 2xF(x). \end{aligned}$$
   Ainsi F est solution de l'équation différentielle $F' - 2xF = 0$. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 avec $a(x) = -2x$ qui est continue. Les solutions sont de la forme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = ke^{x^2}, \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$
   De plus, $F(0) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}}$.

3. On développe cosh en série entière. Alors :

$$\cosh(2xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}.$$

On définit la série de fonction :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}.$$

On souhaite intervertir série et intégrale.

— **H1** $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est mesurable car continue.

— **H2** Calculons :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{2^{2n}|x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Estimons la dernière intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$. On écrit : $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} t e^{-t^2} dt$. On pose :

$$u'(t) = te^{-t^2}, \qquad u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2},$$
$$v(t) = t^{2n-1}, \qquad v'(t) = (2n-1)t^{2n-2}.$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On peut intégrer par partie :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} t^{2n-1} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{(2n-1)}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt \quad = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$$

On démontre par récurrence que $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} |x|^{2n}$. Il s'agit d'une série entière donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

2. On définit pour $x \in \mathbb{R}_+$:
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$$
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. En admettant la continuité de F en 0 déterminer la valeur de I.
5. (pour les plus rapides). Justifier que F est continue en 0.

1. On souhaite intégrer par partie. On pose :
$$u'(t) = \sin(t), \qquad u(t) = 1 - \cos(t),$$
$$v(t) = \frac{1}{t}, \qquad v'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$
u et$v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
$$[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$$
Ainsi $\int_{R_+} u'v$ et $\int_{\mathbb{R}_+} uv'$ sont de même nature. Découpons l'intégrale en 2 :
   — sur $[0,1]$. On a :
   $$u(t)v'(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2}.$$
   Ainsi la fonction uv' est prolongeable par continuité en 0 en posant $(uv')(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi uv' est intégrable sur $[0,1]$.
   — Sur $[1,+\infty[$:
   $$\left|u(t)v'(t)\right| \leq \frac{2}{t^2}.$$
   Par comparaison dans le cadre des fonctions positives, uv' est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc $uv' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $u'v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Ce qui répond à la question.
2. On pose $f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$. Soit $A > 0$
   — On peut majorer :
   $$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-xt} \leq e^{-At} = \varphi_A(t)$$
   La fonction $\varphi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
   — Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
   $$\forall\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = -sin(t)e^{-xt}.$$
   De plus pour $x \in [A,+\infty[$:
   $$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq e^{-At} = \varphi_A(t)$$
   On a déjà précisé que $\varphi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A,+\infty[$ et :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt} dt \\ &= -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-xt} dt\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = -\arctan(x) + c.$$

Déterminons la constante à l'aide de la question 2).

3. D'après la question précédente
   — $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t) = 0$
   — Pour $x \in [A, +\infty[$ (avec $A > 0$) et $t \in \mathbb{R}_+$:
   $$|f(x,t)| \leq e^{-At} = \varphi_A(t).$$
   De plus $\varphi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

   D'après le théorème de convergence dominée, on obtient
   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$
   En particulier, on en déduit que $c = \frac{\pi}{2}$.
4. Si la fonction F est continue en 0, on en déduit que
   $$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$
5. Montrons que F est continue en 0.
   On décompose F en deux morceaux :
   $$F(x) = \underbrace{\int_0^1 f(x,t)dt}_{F_1(x)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x,t)dt}_{F_2(x)}.$$
   — Étudions la continuité de la fonction F_1. Le plus simple est de reprendre la preuve de la dérivabilité :
   $$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| = \left|-\sin(t)e^{-xt}\right| \leq 1 = \psi(t)$$
   La fonction $\psi \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$. D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction F_1 est continue en 0.
   — Pour résoudre le problème pour F_2, on passe dans les complexes. On note :
   $$F_{2i}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} e^{-tx} dt$$
   On pose :
   $$u'(t) = e^{t(i-x)}, \qquad u(t) = \frac{1}{i-x} e^{t(i-x)},$$
   $$v(t) = \frac{1}{t}, \qquad v'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$
   $u, v \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{C})$. On intègre par partie. Ainsi
   $$F_{2i}(x) = -\frac{e^{i-x}}{i-x} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{t(i-x)}}{t^2} dt$$
   On pose $G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{t(i-x)}}{t^2} dt$ et $g(x,t) = \frac{e^{t(i-x)}}{t^2}$. Alors
   — Soit $x \in [0,1]$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est mesurable.
   — Soit $t \in [1, +\infty[$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
   — De plus $\forall x \in [0,1], \ \forall t \in [1, +\infty[$:
   $$|g(x,t)| \leq \frac{1}{t^2} = \psi_2(t)$$
   La fonction ψ_2 est intégrable sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction G puis F_{2i} est continue sur $[0,1]$.

   Ainsi la fonction F est continue en 0.

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction F est continue sur son domaine de définition.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer F à l'aide de sa dérivée.

1. Comme f est paire, on se contente d'étudier f pour $x \in [0,+\infty[$. Montrons que f est continue sur $[0,+\infty[$.

   On se place sur $[0,b]$ avec $b > 0$:
   - **H1** Pour $x \in [0,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est mesurable sur $[0,+\infty[$ car continue presque partout.
   - **H2** Pour presque tout $t \in [0,+\infty[$ $(t \neq 0)$, $x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,b]$.
   - **H3** Pour $t \in [0,+\infty[$ et $x \in [0,b]$,
   $$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\max\left(-\ln(t^2), \ln(t^2+b^2)\right)}{1+t^2}.$$

   La fonction $t \mapsto \frac{ln\left(t^2+b^2\right)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et
   $$\frac{\ln(t^2+b^2)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$
   intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux intégrales de Riemann.

   La fonction $t \mapsto \frac{-\ln\left(t^2\right)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de 0^+ car
   $$\frac{-\ln\left(t^2\right)}{1+t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} -2\ln(t)$$
   est intégrable en 0^+, en $+\infty$ on a
   $$\frac{-\ln\left(t^2\right)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

   La fonction $t \mapsto \frac{\max\left(-\ln(t^2),\ln(t^2+b^2)\right)}{1+t^2}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ comme maximum de deux fonctions intégrables.

   Par le théorème de continuité sous le signe intégral, f est continue sur $[0,b]$ pour tout $b > 0$, donc sur $\bigcup_{b>0}[0,b] = [0,+\infty[$.

2. On se place sur $[a,b]$ avec $0 < a < b$.

   Pour $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{x^2+t^2}{t^2}\right)$ est mesurable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue.
   - **H1** Pour $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur $[0,+\infty[$ et, pour $x \in [a,b]$, $\ln\left(1+\frac{x^2+t^2}{t^2}\right) = o_{t\to+\infty}\left(t^{3/2}\right)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux intégrales de Riemann.
   - **H2** Pour $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}$ est dérivable sur $[a,b]$ avec une dérivée donnée par
   $$x \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}.$$

— Pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, b]$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Or si $x \neq 1$, $\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{x^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$.
Soit si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\infty}\left(\frac{2}{1-x^2}\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2}{1-x^2}\arctan\left(\frac{t}{x}\right) - \frac{2x}{1-x^2}\arctan(t)\right]_{t=0}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{1-x^2}\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1+x} \end{aligned}$$

3. Pour $x \in [a, b]$, $x \neq 1$, $f(x) = \pi\ln(1+x) + k$. f est dérivable donc continue sur $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \pi\ln(1+x) + k.$$

Ceci étant valable pour tout $0 < a < b$, $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = \pi\ln(1+x) + k.$$

Par parité et continuité de f sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi\ln(1+|x|) + f(0)$.
On utilise sympy pour calculer $f(0)$.

$$f(0) = 2\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ pour $t \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $f(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pi\ln(1+|x|).$$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. On considère

$$F_n : \begin{cases} [a, A] \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n} \end{cases}$$

— **H1** Pour chaque x de $[a, A]$, la fonction $t \mapsto F_n(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $F_n(x, t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$ avec $2n > 1$.

— **H2** La fonction F_n admet sur $[a, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[, \quad \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

— **H3** De plus, $\frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ vérifie les trois hypothèses :

— Pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

— Pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,

— Pour chaque $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}} \leq \frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \quad I_n'(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^{n+1}} = -2nxI_{n+1}(x).$$

Donc, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x).$$

2. Pour $x > 0$, on a

$$I_1(x) = \left[\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

Ensuite,

$$I_2(x) = -\frac{1}{2x} I_1'(x) = \frac{\pi}{4x^3},$$

puis

$$I_3(x) = -\frac{1}{4x} I_2'(x) = \frac{3\pi}{16x^5},$$

On a donc

$$I_3(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$