上 海 交 通 大 学 试 卷 （月考 卷）
（ 2020至 2021 学年第2学期 ）

班级号________________ 学号____________ 姓名(中&法)________________

课程名称：MA160________________ 成绩________________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：__________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

Avertissements :

1. *Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
   各个题目是不相关的，可以按照任何顺序来完成。
2. *Une feuille A4 recto-verso* manuscrite *de mémorisation est autorisée (écrite à la main !).*
   允许携带一张手写的$A4$白纸手稿 。
3. *Tous les autres documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone, smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.*
   不能使用任何其它参考资料和电子设备包括手机、翻译器和计算器。

1 Linéariser est utile !

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos(x))^5 = \frac{\cos(5\,x)}{16} + \frac{5\,\cos(3\,x)}{16} + \frac{5\,\cos(x)}{8}$$

Réponse

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\cos(x))^5 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32} \times \left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right) \\ &= \frac{1}{32} \times (2\cos(5x) + 10\cos(3x) + 20\cos(x)) \\ &= \frac{\cos(5x)}{16} + \frac{5\cos(3x)}{16} + \frac{5\cos(x)}{8}\end{aligned}$$

2. En déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto (\cos(x))^5$.

Réponse

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\cos(x))^5 &= \frac{\cos(5x)}{16} + \frac{5\cos(3x)}{16} + \frac{5\cos(x)}{8} \\ &= \frac{1}{16} \times \left(1 - \frac{(5x)^2}{2} + \frac{(5x)^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) + \frac{5}{16} \times \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\ &\quad + \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\ &= 1 - \frac{5x^2}{2} + \frac{65x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\end{aligned}$$

2 Développements limités en vrac

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, admettant le $\mathrm{DL}_3(0)$ suivant :

$$f(x) = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

1. Que valent $f'(0)$ et $f^{(3)}(0)$?

Réponse

D'après le théorème de Taylor Young, et par unicité du $DL_4(0)$ de f, on a :

$$f'(0) = 2 \text{ et } f^{(3)}(0) = 4 \times 3! = 24$$

2. Déterminer les développements limités suivants :
   (a) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(f(x)+1)$

Réponse

$$\begin{aligned}\ln(f(x)+1) &= \ln\left(2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\end{aligned}$$

or $x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc on peut appliquer le développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ en 0 :

$$\begin{aligned}\ln(f(x)+1) = \ln(2) &+ \left(x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2\\ &+ \frac{1}{3}\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\\ = \ln(2) &+ x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

   (b) $DL_2(0)$ de $x \mapsto f(x)^{1/\sin(x)}$

Réponse

f est continue et $f(0) = 1 > 0$, donc il existe un voisinage V de 0 sur lequel f est strictement positive. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cap V$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x)^{1/\sin(x)} &= \exp\left(\frac{1}{\sin(x)} \times \ln\left(f(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \times \ln\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}\right. \\
&\qquad \left. \times \left((2x + 3x^2 + 4x^3) - \frac{1}{2}(2x + 3x^2)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x} \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \times \left(2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right) \\
&= \exp\left(2 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= \exp(2) \times \exp\left(x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= e^2 \times \left((x + x^2) + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= e^2 \times (x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\
&= e^2 x + \frac{3e^2}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

3 Binôme ?

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1 + e^{i\,\theta}$.

Réponse

On a :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} \times \left(e^{-i\theta + e^{i\theta}}\right) = 2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\theta/2}$$

On a donc : $|1 + e^{i\theta}| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\frac{\theta}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\,\theta)$.

On rappelle la formule du binôme de Newton :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

Réponse

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\,\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\,k\,\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((1+e^{i\theta})^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\theta/2}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(2^n\, \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n\, e^{i\,n\,\theta/2}\right) \\
&= 2^n\, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n\, \cos\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

4 Projection stéréographique

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminez le module et un argument du nombre complexe $z = \dfrac{1+i\,a}{1-i\,a}$

Réponse

On a :

$$|1+i\,a| = \sqrt{1+a^2} = |1-i\,a|$$

donc $|z| = 1$ On écrit $1+ia$ sous forme exponentielle :

$$1+i\,a = R\,e^{i\theta}$$

et on a :

$$\cos(\theta)\frac{1}{R} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{a}{R}$$

donc

$$\tan(\theta) = a$$

Comme $\cos(\theta) \geq$, on peut choisir $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est à dire :

$$\theta = \arctan(a).$$

On a de même :

$$1-i\,a = Re^{-i\theta}$$

Au final, on trouve :

$$z = e^{2\,i\,\theta}$$

donc $|z| = 1$, et un argument de z est $2\,\theta = 2\,\arctan(a)$

2. En déduire une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Réponse

La fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to &]-\pi,\pi[\\ & & a & \mapsto & 2\arctan(a) \end{array}$$

est une bijective. En effet,

— elle est strictement croissante, donc injective ;

— elle est continue, et on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est surjective.

De plus, la fonction

$$\begin{array}{rccc} g & : &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{U} \setminus -1 \\ & & \theta & \mapsto & e^{2\,i\,\theta} \end{array}$$

est bijective. En effet,

— Elle est surjective (d'après le cours), car

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{i\,\theta},\, \theta \in \left]-\pi,\pi\right[\right\}$$

et $e^{i\,\pi} = -1$.

— Elle est injective, car pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in]-\pi,\pi[$,

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

et on a nécessairement $\theta_2 - \theta_1 \in]-2\pi, 2\pi[$. Comme $2\pi\mathbb{Z} \cap]-2\pi, 2\pi[= 0$, g est bien injective.

La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ est donc bijective.