Topologie et Calcul différentiel – TD 7: Topologie : convexes, compacts, espaces vectoriels normés

19 mai 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à savoir utiliser les ensembles compacts pour des problèmes d'analyse, de savoir montrer si deux normes sont équivalentes, et faire quelques rappels sur les ensembles convexes.

Exercices sur les ensembles compacts

Exercice 1 :

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère $f : K \to K$ une application ρ-lipschitzienne, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leqslant \rho ||x - y||$$

1. On suppose que $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que $\rho = 1$ et K étoilé en a, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$, $[x, a] \subset K$. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. *On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions*

$$f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x).$$

Exercices sur les ensembles convexes

Exercice 2 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que la boule unité fermée B est strictement convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in B^2,\ ]x, y[\subset \mathring{B}$$

Exercice 3 :

1. Soit C un convexe fermé non borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que C contient une demi-droite. (On admet dans cette question que les ensembles fermés et bornés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts).
2. Même question sans supposer C fermé.

Exercices sur les normes équivalentes

Exercice 4 :

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit les normes N et N' par

$$N(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty, \ N'(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.
2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $||\cdot||_\infty$?

Exercice 5 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ N(x,y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + t \times y}{1 + t^2} \right|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Tracer la sphère unité (de centre 0 et de rayon 1).
3. Montrer que la norme N est équivalente à la norme euclidienne, et trouver des constantes $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ optimales telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \alpha \times \sqrt{x^2 + y^2} \leq N(x,y) \leq \beta \times \sqrt{x^2 + y^2}.$$

à l'aide d'un dessin.