Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_5$

18 Octobre 2022

Partie 1 : Projecteurs et symétries

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer que f est un projecteur puis calculer $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où g est la symétrie associée à f.

Exercice 2 (Exercice 1.10 du livre) :

On pose $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \big(x \mapsto f(-x)\big) \end{array}$$

Montrer que ϕ est une symétrie. Par rapport à quel espace et parallèlement à quel espace ?

Exercice 3 :

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. Enoncer une condition nécessaire et suffisante semblable pour que p et q aient même image.

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$u^2 - 5.u + 6.\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On pose $F = \mathrm{Ker}(u - 3.\,\mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(u - 2.\,\mathrm{id}_E)$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et soit q la symétrie associée. Exprimer p et q en fonction de u.
4. Montrer que u est un automorphisme et exprimer u^{-1} en fonction de u.

Partie 2 : Images et noyaux d'endomorphismes

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Exercice 6 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Donner une base de E.
2. Montrer que u est un endomorphisme de E.
3. Déterminer l'image de u et donner une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Déterminer le noyau de u et donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Soit $E^\star = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual de E. On considère les formes linéaires :
$$\forall i \in [\![0, 3]\!],\ f_i : P \mapsto \int_{-1}^{1} t^i P(t)dt$$
5. Montrer que $B^\star = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E^\star$.

Exercice 7 :

On considère un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel noté E, et l'on note :
$$\mathcal{S}(E) = \left\{u \in \mathscr{L}(E),\ u^3 = u^2\ \right\}$$

1. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,\, y,\, z) = (0,\, x,\, z).$$
   — Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.
   — Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
   — Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Montrer que $u = \mathrm{id}_E$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$. Montrer que u est un projecteur.
   Dans la suite, on suppose que Ker$(u) \neq \{0_E\}$ et que Ker$(u) \neq$ Ker(u^2).
4. Déterminer pour $n \geq 3$, u^n.
   En déduire que : $E = \mathrm{Ker}(u^2) \bigoplus \mathrm{Im}(u^2)$.
5. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u^2)$ est stable par u. .

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec u (c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$). Montrer que $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par u (c'est-à-dire $u(\mathrm{Im}(v)) \subset \mathrm{Im}(v)$ et $u(\mathrm{Ker}(v)) \subset \mathrm{Ker}(v)$).
2. Soit p un projecteur de E tel que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u. Montrer que u commute avec p.

Partie 3 : Résultats importants

Exercice 9 :

Le but de cet exercice est de redémontrer le théorème du rang différent de la méthode en classe .

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E soit de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$.

1. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Montrer que u induit une bijection entre H et $\mathrm{Im}(u)$.
2. En déduire le théorème du rang :

$$\mathrm{rang}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim E.$$

Exercice 10 :

Le but de cet exercice est de redémontrer la formule de Grassman à partir du théorème du rang.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie et soit $\phi\colon F \times G \to F + G$ définie par

$$\forall (f, g) \in F \times G, \quad \phi(f, g) = f + g.$$

1. Montrer que $\mathrm{rang}(\phi) = \dim(F + G)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est isomorphe à $F \cap G$.
3. En déduire la formule de Grassman :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$