Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD_2

20 Septembre 2022

Exercice 1 : (Exemple 1.1.6 du livre)

Soit X un ensemble non vide et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $\mathcal{F}(X, E) = \{f : X \to E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : (Exercice 1.1 du livre , important)

Montrer, en utilisant la définition d'un espace vectoriel, que dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel les relations suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x \in E,\ 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$;
3. $\forall x \in E,\ (-1_{\mathbb{K}}).x = -x$;
4. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda.x = 0_E \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0_{\mathbb{K}} \\ \text{ou} \\ x = 0_E \end{array} \right.$.

Exercice 3 : Combinaison linéaire

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2,\quad u = (1, 2),\quad u_1 = (1, -2),\quad u_2 = (2, 3)$;
2. $E = \mathbb{R}^2,\quad u = (1, 2),\quad u_1 = (1, -2),\quad u_2 = (2, 3)$; $\quad u_3 = (-4, 5)$;
3. $E = \mathbb{R}^3,\quad u = (2, 5, 3),\quad u_1 = (1, 3, 2),\quad u_2 = (1, -1, 4)$;
4. $E = \mathbb{R}^3,\quad u = (3, 1, m),\quad u_1 = (1, 3, 2),\quad u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 4 : Combinaison linéaire

Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 RMB. Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 RMB.
Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. En utilisant la méthode des combinaisons linéaires, combien va-t-il la payer ?

Exercice 5 : Polynôme

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?

Exercice 6 : Sous-espace vectoriel

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 2y = 4z\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + z = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + z = 0\}$.