Mathématiques I – TD$_5$

14-15 mars 2022

Exercice 1

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut penser à utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ (livre Maths I p. 55).

Quand on dérive plusieurs fois la fonction f, on fait apparaître un terme du type $p\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ avec p une fonction polynomiale, ce qui nous donne l'idée de la récurrence en utilisant les croissances comparées.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$). En particulier elle est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- On a

$$\frac{-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

donc, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Comme $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, on en déduit que f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et il existe une fonction polynomiale p_n telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ »}$$

et montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  * *Initialisation :* on a déjà montré que f est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) et la fonction polynomiale $p_0 : x \mapsto 1$ (fonction constante) convient, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
  * *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. La fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (par produit de composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) et

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\,p_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\,p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\forall x < 0, \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

Posons $p_{n+1} : y \mapsto -y^2\,p_n'(y) + y^2\,p_n(y)$ qui est une fonction polynomiale.

La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale, la somme de fonctions polynomiales est polynomiale et le produit de fonctions polynomiales est polynomiale.

Par croissance comparée :

$$p_{n+1}(y)\,e^{-y} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\dfrac{-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, par composée de limites on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

De plus, comme pour tout $x<0$, $f^{(n+1)}(x)=0$, on a : $f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ donc $f^{(n+1)}$ tend vers 0 en 0. Finalement :

- $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par l'hypothèse de récurrence ;
- $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$;
- $f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ appliqué à $f^{(n)}$, on en déduit que $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et de plus $f^{(n+1)}(0)=0$. Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

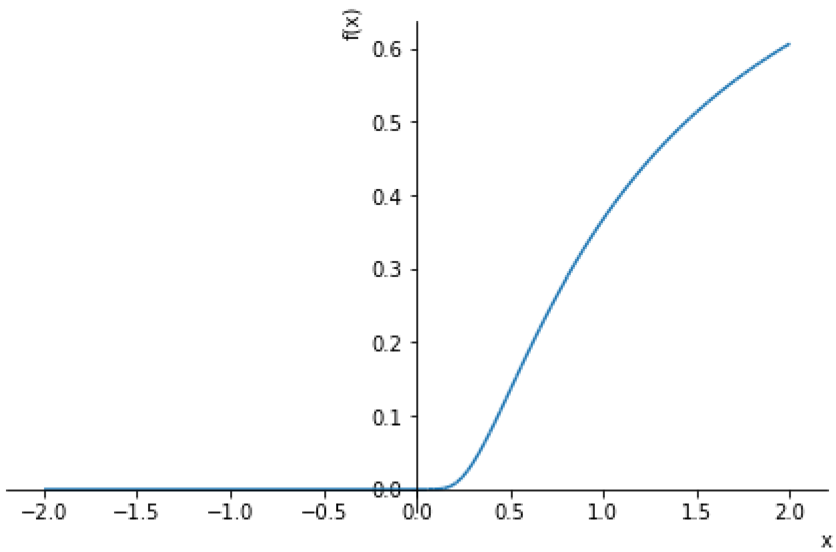
Par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f^{(n)}(0)=0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

Vérifions avec Sympy.

```
P1 = plot(exp(-1/x),(x,0,2), show = False)
P2 = plot(0,(x,-2,0), show = False)
P1.append(P2[0])
P1.show()
```



Exercice 2

Trouver toutes les applications $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

La méthode naturelle pour résoudre un exercice du type « trouver tous les objets tels que ... » est de faire une analyse-synthèse.
Quand on a deux variables x et y, on peut en fixer une et dériver par rapport à l'autre.

- *Analyse* : soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f'(x)$$

Ici $f(y)$ est une constante par rapport à x, donc sa dérivée est nulle. De plus, si on veut justifier rigoureusement ce calcul, on peut poser $g\colon x \mapsto x+y$, ce qui donne $f(x+y) = (f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $g'\colon x \mapsto 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)'(x) = g'(x)\, f'\big(g(x)\big) = 1 \times f'(x+y) = f'(x+y)$$

En particulier, pour $x = 0$, on a $f'(y) = f'(0)$. Comme c'est vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on en déduit que f' est constante, égale à $a = f'(0)$. Il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a\,t + b$$

On a alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a\,x + b + a\,y + b = f(x) + f(y) = f(x+y) = a\,x + a\,y + b$$

En prenant $x = y = 0$, on a $2b = b$ donc $b = 0$. Finalement, $f(x) = a\,x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

*Attention, l'exercice n'est pas fini. On a seulement fait l'étape d'analyse : on a montré que **SI** f est solution, alors f s'écrit $x \mapsto a\,x$. Il faut vérifier la réciproque : est-ce que les fonctions $x \mapsto a\,x$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont bien solutions ?*

- *Synthèse* : soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : x \mapsto a\,x$. Alors f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = a\,(x+y) = a\,x + a\,y = f(x) + f(y)$$

donc f est solution du problème.

Par une analyse-synthèse, on a donc montré que :

> les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les $f\colon x \mapsto a\,x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois sur $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en (au moins) $n+1$ points différents. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Pour avoir l'idée, on commence à regarder le cas $n = 1$ (c'est exactement le théorème de Rolle). Pour le cas $n = 2$, on voit qu'on peut appliquer deux fois le théorème de Rolle, ce qui nous dit que f' s'annule deux fois et on applique une deuxième fois le théorème de Rolle. C'est l'idée de la récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois sur $\mathbb{R}$, si f s'annule en $n+1$ points différents, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ » et montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation* : soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f s'annule en $1+1=2$ points qu'on note a et b avec $a < b$. Alors f est continue sur $[a,b]$ (car dérivable sur $[a,b]$), dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$ telle que f s'annule en $n+2$ points différents notés $x_1, \dots, x_{n+2}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$.
  Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a
  - ∗ f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ (car f dérivable $n+1 \geqslant 1$ fois sur $[x_i, x_{i+1}]$) ;
  - ∗ f est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ (car f dérivable $n+1 \geqslant 1$ fois sur $[x_i, x_{i+1}]$) ;
  - ∗ $f(x_i) = f(x_{i+1})$;

  donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$. Comme $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$, on a $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$. Finalement :
  - ∗ f' est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ (car f dérivable $n+1$ fois) ;
  - ∗ f' s'annule en $n+1$ points différents.

  D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, c'est-à-dire $f^{(n+1)}(c) = 0$. Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f^{(n)}(c) = 0.}$$

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il faut donc trouver un lien entre f et f', donné par le théorème des accroissements finis.

Puisque $\frac{\ell}{2} > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant A, \quad f'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$$

Soit $x > A$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [A, x]$ tel que

$$f(x) - f(A) = f'(c)(x - A) \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A)$$

donc

$$f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A) + f(A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On conclut par encadrement que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Exercice 5

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) < f'(b)$. Montrer que pour tout $y \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = y$.

Puisque f' n'est généralement pas continue, cet exercice montre qu'il existe d'autres fonctions que les fonctions continues qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires : les fonctions qui sont des dérivées. Ce résultat s'appelle le théorème de Darboux.

▷ On définit une fonction g par :

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - y\,x \end{array}$$

Comme f est dérivable sur $[a,b]$, g est dérivable sur $[a,b]$ et :

$$g'(a) = f'(a) - y < 0 \quad \text{et} \quad g'(b) = f'(b) - y > 0$$

On ne peut pas utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, car g' n'est pas continue ! Pour trouver un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, on peut essayer d'appliquer le théorème de Rolle ou de regarder le maximum (ou minimum) de g s'il existe.

▷ Comme g est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un minimum sur $[a,b]$, atteint en $c \in [a,b]$. Montrons que ce minimum n'est pas atteint en a ou en b. On a

$$\lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) < 0$$

Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, a+\eta[, \ \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$$

Ainsi, pour tout $x \in]a, a+\eta[$, $g(x) < g(a)$ donc le minimum de f sur $[a,b]$ n'est pas atteint en a.
▷ De la même manière

$$\lim_{x \to b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = g'(b) > 0$$

donc il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in]b - \eta', b[, \quad \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$$

Ainsi, pour tout $x \in]b - \eta', b[, g(x) < g(b)$. Donc le minimum de f sur $[a,b]$ n'est pas atteint en b.
▷ Finalement, $c \in]a,b[$. La fonction g est dérivable en c, et atteint son minimum en c qui n'est pas une extrémité de $[a,b]$, donc $g'(c) = 0$. Cela montre que

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]f'(a), f'(b)[\,, \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = y.}$$

Exercice 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $x \in I$, on pose $f_p(x) = px - f(x)$. On note également $J_f = \big\{p \in \mathbb{R}, \ \text{ la fonction } f_p \text{ est majorée sur } I\big\}$.

Partie 1 : Exemple

Dans cette partie, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$. Établir le tableau de variations de f_p.

Soit $p \in \mathbb{R}$. La fonction f_p est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) = p - \exp(x).$$

On en déduit les tableaux de variations suivants.

— **Cas** $p < 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p'(p) \leqslant 0$. Donc f_p est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f_p(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f_p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_p'(x)$	$-$	
f_p	$-\infty$ ↘	$-\infty$

— **Cas** $p = 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p'(p) \leqslant 0$. Donc f_p est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f_p(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $f_p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_p'(x)$	$-$	
f_p	0 ↘	$-\infty$

— **Cas** $p > 0$
Pour tout $x \in]-\infty, \ln(p)]$, $f_p'(p) \geqslant 0$ et pour tout $x \in]\ln(p), +\infty]$, $f_p'(p) \leqslant 0$. Donc f_p est croissante sur $]-\infty, \ln(p)]$ et f_p est décroissante sur $]\ln(p), +\infty]$.
On a aussi, $f_p(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$f_p(x) = x \times \left(p - \frac{\exp(x)}{x}\right).$$

En utilisant les limites usuelles et les propriétés des limites, $f_p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

x	$-\infty$		$\ln(p)$		$+\infty$
$f_p'(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	↗	$f(\ln(p))$	↘	$-\infty$

2. Calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_p(x)$ pour tout $p \in \mathbb{R}$. En déduire J_f.

D'après la question précédente,

$$\sup_{x\in I} f_p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p<0 \\ 0 & \text{si } p=0 \\ p\times\ln(p)-p & \text{si } p>0. \end{cases}$$

Par définition de J_f, on a,

$$\boxed{J_f = \mathbb{R}_+.}$$

Partie 2 : Propriétés générales

Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles telle que $J_f \neq \emptyset$. On définit la fonction g_f par :

$$g_f : \begin{cases} J_f & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup\limits_{x\in I} f_p(x). \end{cases}$$

1. Montrer que J_f est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Montrons que ;

$$\forall (a,b)\in J_f\times J_f,\ \forall t\in[0,1],\ ta+(1-t)b\in J_f.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, comme $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f_{ta+(1-t)b}(x) &= (ta+(1-t)b)x - f(x) \\ &= t\big(ax-f(x)\big)+(1-t)\big(bx-f(x)\big) \\ &= tf_a(x)+(1-t)f_b(x). \end{aligned}$$

Or, $(a,b)\in J_f\times J_f$, donc $\sup\limits_{x\in I} f_a(x) < +\infty$ et $\sup\limits_{x\in I} f_b(x) < +\infty$. D'où,

$$f_{ta+(1-t)b}(x) \leqslant t\sup_{x\in I} f_a(x) + (1-t)\sup_{x\in I} f_b(x) < +\infty.$$

Donc la fonction $f_{ta+(1-t)b}$ est majorée sur $\mathbb{R}$. Donc $ta+(1-t)b\in J_f$.

$$\boxed{J_f \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$$

2. Montrer que :

$$\forall (a,b)\in J_f\times J_f,\ \forall t\in[0,1],\ g_f\big(ta+(1-t)b\big) \leqslant tg_f(a)+(1-t)g_f(b).$$

Soit $(a,b)\in J_fJ_f$ et $t\in[0,1]$. D'après la question précédente et la définition de g_f, pour tout $x\in I$,

$$f_{ta+(1-t)b}(x) \leqslant tg_f(a)+(1-t)g_f(b).$$

Donc, $tg_f(a)+(1-t)g_f(b)$ est un majorant de $\big\{f_{ta+(1-t)b}(x),\ x\in I\big\}$. Par propriété de la borne supérieure,

$$\boxed{g_f\big(ta+(1-t)b\big) \leqslant tg_f(a)+(1-t)g_f(b).}$$

Remarque : On dit que la fonction g_f est *convexe* (大二见).

Partie 3 : Étude d'un cas particulier

On note $\mathscr{H} = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f'' \text{ est strictement positive et } f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\right\}$. Soit $f \in \mathscr{H}$.

1. Montrer que la fonction f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa monotonie.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

— Par hypothèse : $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc $\boxed{f' \text{ est surjective.}}$

— Par hypothèse : f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{f' \text{ est injective.}}$

Donc,

$$\boxed{f' \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $p \in \mathbb{R}$. En déduire les variations de f_p.

La fonction f_p est une somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc,

$$\boxed{f_p \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On sait que la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p'(x) = p - f'(x)$.
D'où, la fonction f_p' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, on déduit que $f_p'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique $x_p \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_p) = p$, c'est-à-dire : $x_p = (f')^{-1}(p)$.
On en déduit les variations de f_p.

$$\boxed{\text{La fonction } f_p \text{ est croissante sur }]-\infty, x_p] \text{ et est décroissante sur } [x_p, +\infty[.}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_p		$+\infty$
$f_p'(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_p)$	$\searrow$	$-\infty$

3. En déduire que $J_f = \mathbb{R}$ et que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, $g_f(p) = p(f')^{-1}(p) - f\big((f')^{-1}(p)\big)$,
(La fonction g_f est définie dans la partie 2.)

D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{R}$, la fonction f_p est majorée par $f_p(x_p)$. Donc $p \in J_f$. Ainsi, $\mathbb{R} \subset J_f \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{J_f = \mathbb{R}.}$$

De plus, comme $x_p = (f')^{-1}(p)$, on a :

$$\boxed{g_f(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_p(x) = f_p\big((f')^{-1}(p)\big) = p(f')^{-1}(p) - f\big((f')^{-1}(p)\big).}$$

4. Montrer que $g_f \in \mathscr{H}$.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

— *Montrons que g_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.*
Par hypothèse, la fonction f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f'' ne s'annule pas. D'après le cours, $(f')^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Donc, g_f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$g_f'(p) = (f')^{-1}(p) + p\frac{1}{f''\big((f')^{-1}(p)\big)} - f'\big((f')^{-1}(p)\big)\frac{1}{f''\big((f')^{-1}(p)\big)}$$

Or, $f'\big((f')^{-1}(p)\big) = p$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$g_f'(p) = (f')^{-1}(p).$$

Comme, $(f')^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on déduit que g_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

— *Montrons que $g_f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*
Comme f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $g_f' = (f')^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc, $g_f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

— *Montrons que g_f'' est strictement positive.*
En utilisant l'expression de g_f' trouvée précédemment, on a, pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$g_f''(p) = \frac{1}{f''\big((f')^{-1}(p)\big)} > 0.$$

Donc, g_f'' est strictement positive.

Ainsi,

$$\boxed{g_f \in \mathscr{H}}$$

5. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big(px - g_f(x)\big)$.

Soit $p \in \mathbb{R}$. Comme $g_f \in \mathscr{H}$, on sait que $\sup\limits_{x\in I} \big(px - g_f(x)\big) < +\infty$ et

$$\sup_{x\in I} \big(px - g_f(x)\big) = p(g_f')^{-1}(p) - g_f\big((g_f')^{-1}(p)\big).$$

Or, $g_f'(p) = (f')^{-1}(p)$. Donc,

$$\sup_{x\in I} \big(px - g_f(x)\big) = pf'(p) - g_f\big(f'(p)\big).$$

De plus, $g_f(p) = p(f')^{-1}(p) - f\big((f')^{-1}(p)\big)$. Donc,

$$\sup_{x\in I} \big(px - g_f(x)\big) = pf'(p) - f'(p)(f')^{-1}\big(f'(p)\big) + f\big((f')^{-1}\big(f'(p)\big)\big) = f(p).$$

Ainsi,

$$\boxed{\sup_{x\in I} \big(px - g_f(x)\big) = f(p)}$$

6. Montrer que l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \\ f & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(px - f(x)).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

est bien définie et est une bijection.

On définit

$$\mathscr{L} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \\ f & \mapsto & \mathscr{L}(f) = g_f\end{array}\right.$$

D'après la question précédente, $\mathscr{L} \circ \mathscr{L} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{L} \text{ est une bijection de } \mathscr{H} \text{ sur } \mathscr{H} \text{ et } \mathscr{L}^{-1} = \mathscr{L}.}$$

Remarque : On dit que $\mathscr{L}$ est une *involution*.