# MATH2307P – QCM$_6$

31 mai 2023

1. Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, une fonction $q$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique si, et seulement si

$$\forall x \in E,\ q(2\,x) = 4\,q(x) \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}\,\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) \text{ est bilinéaire}$$

**Réponse – Vrai**

Il suffit de vérifier que, pour $x \in E$, $q(x) = B(x, x)$.

2. Soit $q$ une forme quadratique sur $E$, espace vectoriel réel de dimension finie, alors

$$\operatorname{Ker}(q) = \big\{x \in E,\ q(x) = 0\big\}$$

**Réponse – Faux**

L'ensemble de droite définit l'ensemble des vecteurs isotropes ($0_E$ compris).

3. Soit $q$ une forme quadratique sur $E$, espace vectoriel réel de dimension finie et soit $E_1$ un sous-espace vectoriel de $E$, alors

$$\dim\left({E_1}^{\perp_q}\right) = \dim(E) - \dim\left(E_1\right)$$

**Réponse – Faux**

C'est vrai si la forme quadratique est non dégénérée, mais faux en général, car alors

$$\dim\left({E_1}^{\perp_q}\right) = \dim(E) - \dim\left(E_1\right) + \dim\big(E_1 \cap \operatorname{Ker}(q)\big)$$

4. Soit $q$ une forme quadratique sur $E$, espace vectoriel réel de dimension finie, alors $E$ possède une base $q$-orthonormée.

**Réponse – Faux**

C'est vrai si $q$ est définie positive, c'est faux en général. On ne peut assurer que l'existence d'une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_d)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, d]\!]\,,\ q(e_i) \in \{-1, 0, +1\} \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, d]\!]^2\,,\ [i \neq j] \implies \Big[B\left(e_i, e_j\right) = 0\Big]$$

5. La forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^2$ pour $a \in \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x, y) = x^2 + 2\,a\,x\,y + y^2$$

est de signature $(1, 1)$ si, et seulement si $|a| > 1$.

**Réponse – Vrai**

On a en effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x^2 + 2\,a\,x\,y + y^2 = (x + a)^2 + \left(1 - a^2\right)\,y^2$$

ce qui donne une différence de deux carrés indépendants quand $|a| > 1$.

6. La signature de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ q(x,y,z) = x\,y - x\,z + 2\,y\,z$$

est $(1,2)$.

Réponse – Faux

En effet, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$q(x,y,z) = (x + 2\,z)\,(y - z) + 2\,z^2 = \frac{1}{4}\left((x+y+z)^2 - (x-y+3\,z)^2\right) + z^2$$

la signature est donc $(2,1)$.

7. Les deux matrices suivantes sont congruentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Réponse – Vrai

Le produit des valeurs propres (déterminant) est, dans les deux cas négatif, il y a donc une valeur propre $> 0$ et une $< 0$, la signature des formes quadratiques associées est $(1,1)$. Le théorème de Sylvester permet de conclure.

8. Les deux matrices suivantes sont congruentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Réponse – Vrai

Le produit des valeurs propres est nul, donc il y a une valeur propre nulle (formes quadratiques dégénérées). Pour trouver le signe de la deuxième valeur propre, on peut regarder la trace de la matrice (somme des valeurs propres), les deux sont $> 0$, donc la signature des deux formes quadratiques est la même $(1,0)$.

9. Soit $q$ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel de dimension finie, alors il existe un vecteur isotrope non nul si, et seulement si, il existe une base de vecteurs isotropes.

Réponse – Vrai

C'était un exercice du dernier td-tp.

10. Le maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$(x,y) \longmapsto \frac{2\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2}{x^2 + x\,y + y^2}$$

est 5.

Réponse – Faux

Le théorème de co-réduction nous permet de dire que le minimum est la plus petite valeur propre de $A^{-1} \cdot B$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

C'est la plus petite racine de l'équation $\det(B - x.A) = 0$. Cette équation a pour solution 2 et 6, donc le minimum est 2 et le maximum 6 (obtenu, par exemple pour $(1, -2)$).