TD n°9 : changements de variables convergence simple et uniforme

I Changement de variables

Exercice 1 **Changement de variable**

Soient $0 \leq a < b$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y,\ a < xy < b,\ y^2 - x^2 < 1\right\}$. On souhaite calculer :

$$I = \int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

1. On considère

$$\left\{\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (xy, y^2 - x^2) \end{array}\right.$$

a. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme.

b. Déterminer $\varphi(D)$.

2. En déduire la valeur de I.

Remarque : Afin d'utiliser les mêmes notations on notera $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

Correction :

1.

a. L'application :

$$\left\{\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (xy, y^2 - x^2) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On peut aussi dire que φ admet des différentielles par rapport à x et y continues. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$.

• Il reste à justifier que φ est bijective de D dans $\varphi(D)$. Calculons la Jacobienne

$$Jac(\varphi) = \begin{vmatrix} y & -2x \\ x & 2y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2) \neq 0$$

Ainsi d'après le théorème d'inversion local, φ est localement inversible. Il faut montrer que φ est injective sur D.

•. Notons $Delta = \{(u,v),\quad a < u < b,\ 0 < v < 1\}$. Soit $(u,v) \in \Delta$. On cherche $(x,y) \in D$ tel que $\varphi((x,y)) = (u,v)$.

On raisonne par analyse-synthèse

- **Analyse**. Comme $x, y \neq 0$, on peut écrire $x = \frac{u}{y}$. Ainsi en injectant, y est solution de l'équation $y^4 - vy^2 - u^2 = 0$. On pose $Y = y^2$. Alors :

$$Y^2 - vY - u^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = v^2 + 4u^2$. Les solutions sont :

$$Y_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4u^2}}{2} < 0, \qquad Y_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u^2}}{2}$$

Or $Y = y^2$. La seule possibilité est donc Y_2. On obtient alors deux solutions en y :

$$y = \pm\sqrt{\frac{v + \sqrt{v^2 + 4u^2}}{2}}$$

De même, $y > 0$. Ainsi $y = \sqrt{\frac{v+\sqrt{v^2+4u^2}}{2}}$. On obtient aussi un unique $x = \frac{u}{y}$.

- **Synthèse.** On vérifie facilement que x y satisfont les équations. Il faut vérifier que c'est à dire que $(x, y) \in D$. On a bien $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. La condition $0 < x < y$ est aussi satisfaite.
  - $x.y \in [a, b]$ est aussi vérifée.
  - Un calcul montre que $y^2 - x^2 < 1$

  On a donc montré que tout élément de Δ admet un unique antécédent dans D. Autrement dit, φ est bijective de D dans Δ.

- . On a aussi démontré que $\varphi(D) = \Delta$.
  b. Soit g une fonction mesurable et φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Alors :

$$\int_D g \circ \varphi \times |Jac(\varphi)| d\lambda = \int_{\varphi(D)} g d\lambda.$$

On reconnait que $g(u, v) = v^u$. On obtient alors

$$I = \int_{a<u<b} \int_{0<v<1} \frac{v^u}{2} du dv$$
$$\frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{v^{u+1}}{u+1} \right]_0^1 du$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

Exercice 2 **Changement de variables**

On note $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \ z \in [0, 2]\right\}$. Calculer :

$$I = \int\int\int_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz.$$

Correction :

On considère le changement de variable :

$$\begin{cases} \varphi : & \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \end{cases}$$

φ est $\mathscr{C}^1$.

- $\varphi^{-1}(D) = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad 0 < r \leq 2\right\}$
- Écrivons la jacobienne de φ.

$$Jac(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial r} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

  Comme $r \neq 0$, φ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\varphi^{-1}(D)$ sur D.

- On remplace et on obtient :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^2 \frac{z}{r} r dr d\theta = 8\pi.$$

Exercice 3 **Changement de variables**

On considère $f:(x,y)\mapsto e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

2. On note :

$$I_R=\int_{B(0,R)} f(x,y)\,dx\,dy,$$

où $B(0,R)$ est la boule de centre 0 et de rayon R. Calculer la valeur de I_R. En déduire la valeur de $\int_{R} e^{-x^2}dx$.

Correction :

1. f est positive et continue sur $\mathbb{R}^2$ donc mesurable. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2}=0$, alors la fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right)dy=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2<+\infty.$$

D'où le résultat annoncé.

2. On considère le changement de variables :

$$\left\{\begin{array}{llcl}\varphi: & \mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2\\ & (r,\theta,z) & \mapsto & (r\cos(\theta),r\sin(\theta))\end{array}\right.$$

φ est de classe $\mathscr{C}^1$.

- $\varphi^{-1}(B(0,R))=\{(r,\theta),\quad 0<r<R,\ \theta\in]0,2\pi]\}$
- Calculons la jacobienne :

  $$Jac(\varphi)=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix}=r$$

  Ainsi φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
- Finalement,

$$\begin{aligned}I_R&=\int_0^R\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,dr\,d\theta,\\&=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R,\\&=\pi(1-e^{-R^2})\end{aligned}$$

D'après la question 1, on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

II Suites et séries de fonctions

Exercice 4

On définit la suite de fonctions (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\left\{\begin{array}{ll}x^n\ln(x), & \text{si } x\in]0,1],\\ 0, & \text{si } x=0\end{array}\right.$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$

Correction :

- On étudie déjà la convergence simple.

Si $x=0$ alors $u_n(x)=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0)=0$. Par le même raisonnement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1)=0$.
Pour $x\in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$.
Donc le suite (u_n) CVS vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n est dérivable et :

$$u_n'(x)=nx^{n-1}\ln(x)+x^{n-1}=x^{n-1}(n\ln(x)+1).$$

Ainsi :

$$\|u_n\|_{\infty,[0,1]}=|u_n(e^{-1/n}|=\frac{e^{-1}}{n}.$$

Ainsi (u_n) CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Exercice 5

On définit la suite de fonctions (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad u_n(x)=e^{-nx}\sin(nx).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $A>0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[A,+\infty[$.

3. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? Justifier.

Correction :

1.

- Pour $x=0$, on a $u_n(0)=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0)=0$.
- Pour $x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$.
- Pour $x>0$, $u_n(x)$ n'a pas de limites.

Ainsi (u_n) CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. On notera u sa limite.

2. Soit $A>0$. Alors $\forall x\in[A,+\infty[$:

$$|u_n(x)|\leq e^{-na}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi (u_n) CVU vers la fonction nulle sur $[A,+\infty[$.

3. On considère la suite $x_n=\frac{1}{n}$. Alors $u_n\left(\frac{1}{n}\right)-u\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-1}\sin(1)\neq 0$. Il n'y a pas de CVU sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6

Étudier la suite de fonctions (u_n) définie par :

$$f_n(x)=\frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}.$$

Correction :

1. Notons I_n l'ensemble de définition de f_n. A priori $\mathscr{D}_{f_n}=\mathbb{R}^*$. Or,

$$f_n(x)\underset{x=0}{\sim}n.$$

   Ainsi on prolonge f_n par continuité en 0, en posant $f_n(0)=n$.

2. Étudions la convergence simple.

   - $\forall x\leq 0$, f_n n'a pas de limite finie.
   - $\forall x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Ainsi (f_n) CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. A-t-on de la CVU sur $\mathbb{R}_+^*$? On pose $x_n = \frac{1}{n}$. Alors :

$$f_n(x_n) = ne^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $A > 0$. A-t-on convergence uniforme sur $[A, +\infty[$?
Soit $x \in [A, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1-e^{-A^2}} nx^2 e^{-nx}.$$

La fonction $g_n(x) = nx^2e^{-nx}$ atteint son maximum en $x = \frac{2}{n}$. Ainsi :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1-e^{-A^2}} 2e^{-2}\frac{1}{n}.$$

Ainsi (f_n) CVU sur $[A, +\infty[$.

Exercice 7

On définit la suite de fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On notera f la limite lorsqu'elle existe.

b. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f_n(x) \geq f(x).$$

2. On admettra l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[0, A]$ avec $A > 0$.

3. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction :

1.

a. Il s'agit d'une limite classique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}.$$

Ainsi (f_n) CVS vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

b. On sait que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+t) \leq t$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \geq e^x \quad \text{par monotonie}$$

2. Soit $A > 0$. Soit $x \in [0, A]$. Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n},\\
&-\frac{x}{n} \leq -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2},\\
&-x \leq -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq -x + \frac{x^2}{2n},\\
&e^{-x} \leq f_n(x) \leq e^{-x}e^{\frac{A^2}{2n}}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e^0 \left| e^{\frac{A^2}{2n}} - 1 \right|$$

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, A]$ vers f.

3. Soit $a > 0$ et $x \geq a$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq f_n(x) + e^{-x} \leq f_n(a) + e^{-x} \leq f_n(a) - e^{-a} + e^{-a} + e^x.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, $\exists a > 0$ tel que $e^{-a} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
- En particulier :

$$e^{-x} + e^{-a} \leq 2e^{-a} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

- Par convergence simple, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

- Ainsi :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1, \quad \forall x \geq A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Or sur $[0, A]$, on a de la convergence uniforme. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ telque :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2, \quad \forall x \in [0, A], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En posant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on en déduit que

$$\exists N_3 \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_3, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On conclut pour la convergence uniforme.

Exercice 8

On considère une suite de fonctions (f_n) telle que :

- $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est décroissante.
- (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Démontrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Correction :

Comme chacune des fonction f_n est décroissantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

Ainsi

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|).$$

D'où la convergence uniforme.

Exercice 9

On définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1. Étudier les différentes convergences de la suite de fonctions (f_n).

2. Étudier les différentes convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Correction :

1.

- Étudions la convergence simple.
  - Si $x \in]0,1[$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} n \to +\infty 0 \atop \to$$
  - Si $x > 0$;
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

  Ainsi la suite (f_n) converge simplement vers 0.

- Étudions la convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable et :
$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$
  Ainsi :
$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n}.$$
  On rappelle la formule de Stirling :
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
  Ainsi $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

2.

- On sait que $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$.
- $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Car c'est une série de rayon de convergence $R = +\infty$. Le fait de multiplier par e^{-x} n'assure peut être pas la convergence uniforme. Il faut l'étudier de nouveau.
- Soit $a > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq a$. Alors, $\forall n \geq N$:
$$|f_n(x)| \leq |f_n(a)| = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$
  La série $\sum \frac{a^n e^{-a}}{n!}$ converge. Ainsi, la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$.

  Montrons qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On raisonne par l'absurde.

  Si il y a de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, on pourrait appliquer le théorème de la double limite soit :
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_k(x)$$
  On aurait alors $1 = 0$. Ce qui est absurde

- De plus, il ne peux y avoir de convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(n)$ n'est pas une série convergente.

Exercice 10

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Correction :

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$
$\sum 1/n^2$ converge. Ainsi la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

Correction :

1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, la série suite (f_n) est alternée et tend vers 0 en décroissant. Ainsi :
  1. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge. On a donc de la convergence simple sur $\mathbb{R}$.
  2. De plus,
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$
- D'après la deuxième propriété, on a de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
- On remarque que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$. La série diverge. Ainsi $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.