Formulaire d'analyse vectorielle

Quelques expressions et théorèmes à connaitre (seulement pour les parties $\boxed{\text{encadrées}}$), avec beaucoup d'applications (mécanique des fluides, électromagnétisme). Les hypothèses mathématiques permettant leur emploi sont supposées validées.

L'opérateur gradient

$\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur très utilisé. On s'en sert notamment pour écrire les développements limités à l'ordre 1 des champs scalaires :

$$\boxed{A(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) = A(\vec{r}) + \overrightarrow{\text{grad}}A \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

Sous forme intégrée :

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{\text{grad}}A \cdot \mathrm{d}\vec{r} = A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)}$$

Exemples d'utilisation :

- statique des fluides : $\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho\vec{g}$
- électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

Expression en coordonnées :

- cartésiennes : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}A = \dfrac{\partial A}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial A}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z}$
- cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}A = \dfrac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z$
- sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}A = \dfrac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

L'opérateur divergence

L'opérateur divergence (noté div) traduit de façon locale la non-conservation du flux d'un champ vectoriel. Le théorème de Green-Ostrogradski permet de trouver une relation entre le flux surfacique d'un champ vectoriel et la divergence de ce champ :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

où $\mathcal{V}$ est un volume arbitraire, $\mathcal{S}$ est la surface qui contient $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur.

Exemples d'utilisation :

- électromagnétisme : $\text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\text{div}\vec{B} = 0$
- conservation des quantités physiques en l'absence de sources : $\text{div}\vec{j}_A + \dfrac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0$ où ρ_A est la densité volumique de A (qui se conserve) et $\vec{j}_A$ est le vecteur densité volumique de flux associé.

Expression en coordonnées :

— cartésiennes : $\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}}$

— cylindriques : $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

— sphériques : $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

L'opérateur rotationnel

L'opérateur rotationnel est noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$. Le théorème de Stokes donne une relation entre la circulation d'un champ vectoriel et le flux du rotationnel de ce champ :

$$\oint_\Gamma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

où Γ est un contour fermé orienté, et $\mathcal{S}$ est une surface orientée délimitée par Γ.

Exemples d'utilisation :

— électrostatique : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$

— magnétostatique : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Expression en coordonnées :

— cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ (voir l'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$)

— cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$

— sphériques : $\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}$

Le laplacien

l'opérateur laplacien, noté Δ, se définit comme $\Delta = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)$
Expression en coordonnées :

— cartésiennes : $\Delta A = \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

— cylindriques : $\Delta A = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial A}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

— sphériques : $\Delta A = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial A}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}$

— sphériques (expression équivalente) : $\Delta A = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}$

On rencontrera aussi l'opérateur laplacien pour un champ vectoriel :

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

L'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla) est souvent utilisé pour donner une écriture alternative aux opérateur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, div et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ en base cartésienne uniquement :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Remarquons que les opérateur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, div et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ s'expriment simplement à l'aide de nabla :

- $\overrightarrow{\mathrm{grad}} A = \vec{\nabla} A$
- $\mathrm{div} \vec{X} = \vec{\nabla} \cdot \vec{X}$ (« $\cdot$ » est ici analogue au produit scalaire)
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{X} = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$ (« $\wedge$ » est ici analogue au produit vectoriel)
- $\Delta A = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} A$

Quelques relations entre opérateurs

Les plus utilisées sont :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{X}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} X\right) = \Delta X$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{X}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div} \vec{X}\right) - \Delta \vec{X}$$