MA3305P – Semaine 01

24 février 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manipuler des calculs de différentielles.
On rappelle le résultat suivant du cours d'algèbre linéaire :

Théorème : Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On définit les applications suivantes :

$$||M||_F = \mathrm{Tr}({}^tM \cdot M),\ ||M||_2 = \sup_{|x|=1} |Mx|$$

Alors ces deux applications sont des normes d'algèbre. C'est-à-dire que ce sont des normes sur l'espace des matrices, et qu'elles satisfont de plus la propriété suivante :

$$\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ ||MN|| \leqslant ||M|| \times ||N||$$

On admet aussi le théorème de topologie que nous montrerons à la fin de l'année :

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

En particulier, on peut écrire les $o(|h|)$ pour n'importe quelle norme.

Exercice 1 :

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ et φ l'application définie par :

$$\varphi\ : \begin{cases} E \to E \\ A \mapsto\ {}^tA \cdot A \end{cases}$$

1. Montrer que l'application φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Calculer la différentielle de φ en A_0.
3. Calculer la différentielle seconde de φ en A_0.

Exercice 2 :

On considère l'application f définie par :

$$f\ : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \to M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle en $A \in\ M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est deux fois différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle seconde en $A \in M_n(\mathbb{R})$.
3. Vérifier vos résultats avec Python (voire le Notebook sur Moodle).

Exercice 3 :

L'application suivante est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathscr{C}^1$?

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (0,0) & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \left(x^2\cos(\frac{1}{x^2+y^4}), y^2\sin(\frac{1}{x^4+y^2})\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(On pourra s'aider de Python pour le calcul des dérivées partielles de f).

Exercice 4 :

Soit $f : E \to E$ bijective telle que f et f^{-1} soient différentiables. Pour $x \in E$, déterminer $\mathrm{d}(f^{-1})_x$ en fonction de $\mathrm{d}f$.

Exercice 5 :

Soit $n \geqslant 2$. On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. En admettant que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, calculer la différentielle du déterminant sur l'ensemble $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ det(A) \neq 0\}$ des matrices inversibles. (On pourra commencer par calculer la différentielle de la matrice identité).

Exercice 6 :

Soit E un espace euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $|.|$ sa norme. Soit O un ouvert de E et soit f et $g : O \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables sur O, soit enfin φ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle le théorème de représentation de Riesz (Théorème 4.3 page 31 du poly d'algèbre linéaire du S1) :

Théorème 2 (de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace euclidien, et soit $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire sur E. Alors,*

$$\exists! v \in E,\ \forall x \in E,\ f(x) = \langle v, x\rangle$$

Dans le cas où la forme linéaire est la différentielle d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (pas forcément linéaire), on note $\operatorname{grad}_x f$ le vecteur v dans le théorème de représentation de Riesz, que l'on apppelle gradient de f au point x. On a donc :

$$\forall x \in O,\ \forall h \in E,\ \mathrm{d}f_x(h) = \left\langle \operatorname{grad}_x f, h\right\rangle.$$

4. Calculer pour $x \in O$:
$$\operatorname{grad}_x(f \times g).$$
5. Calculer pour $x \in O$:
$$\operatorname{grad}_x(\varphi \circ f).$$

On suppose dans la suite de cet exercice que $E = M_n(\mathbb{R})$.
On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA \cdot B\right).$$

6. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in GL_n(\mathbb{R})$.

► *On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par* ($S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$) *:*

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA \cdot S \cdot B\right).$$

7. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 :

Soit E un espace euclidien, nous noterons $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $|\cdot|$ sa norme associée. Soit $f \in E^\star$ une forme linéaire non nulle sur E. On considère l'application :

$$g\ :\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \times \exp\left(-|x|^2\right). \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur E.
2. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $x_0 \in E$.

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et vérifiant $f(0) = 1$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne $|\cdot|$. On pose $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x) = f(|x|) \cdot x$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et déterminer sa différentielle.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle en $0_{\mathbb{R}^n}$.
3. Montrer que
$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle \mathrm{d}F_x(h), h\rangle \geqslant f(|x|) \times |h|^2.$$
4. Montrer que $t \mapsto t \times f(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis montrer que F est injective.
5. Soit $y \in \mathbb{R}^n$; on définit l'application $\psi : t \mapsto |F(t.y)|$. Montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\psi(t) = |y|$, puis montrer que F est surjective.