1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si elle vérifie

   Réponse – Vrai

   $$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a+tb) \leqslant (1-t)f(a)+tf(b)$$

   Réponse – Faux

   $$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b)$$

   Réponse – Faux

   $$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(ta+(1-t)b) \leqslant (1-t)f(a)+tf(b)$$

   Réponse – Faux

   $$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

2. Une fonction convexe passe

   Réponse – Vrai

   En-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes.

   Réponse – Faux

   Au-dessus de ses cordes et au-dessus de ses tangentes.

   Réponse – Faux

   Au-dessus de ses cordes et en-dessous de ses tangentes.

   Réponse – Faux

   En-dessous de ses cordes et en-dessous de ses tangentes.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on appelle épigraphe de f l'ensemble

Réponse – Vrai

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$$

Réponse – Faux

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

Réponse – Faux

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ y < f(x)\}$$

Réponse – Faux

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ f(y) \geqslant x\}$$

4. Soit f une fonction continue. Alors f est convexe si et seulement si

Réponse – Vrai, c'est la mid-convexité

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

Réponse – Vrai, même preuve que la mid-convexité

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \leqslant \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

Réponse – Faux, prendre $f(x) = x^2$, $x = 0$, $y = -1$

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$$

Réponse – Faux, $x + y$ ne sont pas forcément dans l'intervalle

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f(x + y) \leqslant x + y$$

5. Une fonction convexe est

Réponse – Vrai

Croissante sur au plus un intervalle, décroissante sur au plus un intervalle

Réponse – Faux

Toujours croissante

Réponse – Faux

Toujours décroissante

Réponse – Faux

Elle peut être croissante sur deux intervalles disjoints, et être décroissante entre les deux

6. Si une fonction f est convexe et dérivable, alors

Réponse – Vrai

f' est croissante

Réponse – Faux

f' est convexe

Réponse – Faux

f' est positive

Réponse – Faux

f' tend vers l'infini

7. L'inégalité de convexité discrète est encore vraie si

Réponse – Vrai, en fait comme on divise par $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, on a bien $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

La somme des λ_k n'est pas égale à 1

Réponse – Faux

f est concave

Réponse – Faux

Certains λ_k sont <0

Réponse – Faux, ces fonctions sont concaves sur $]-\infty, 0]$ donc l'inégalité est inversée

$f(x) = x^{2n+1}$

8. L'inégalité de Hölder est encore vraie si

Réponse – Vrai

On fait tendre q vers 1 et p vers l'infini

Réponse – Faux

Certains a_k ou certains b_k sont négatifs

Réponse – Faux

$1/p + 1/q \neq 1$

Réponse – Faux

Certains a_k et certains b_k sont des nombres complexes