MATH2307P – QCM$_4$

10 avril 2023

1. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphismes de E, son adjoint est défini par
$$\forall x \in E,\ \langle x, u^\star(x)\rangle = \langle u(x), x\rangle$$

Réponse – Faux

C'est
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$
La relation donnée ne définit rien de manière claire. Par exemple si $u \in \mathscr{A}(E)$, tous les endomorphismes de la forme $v = \lambda.u$ vérifient
$$\langle x, v(x)\rangle = \langle u(x), x\rangle (= 0)$$

2. Soit E un espace euclidien et $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, alors
$$(u \circ v)^\star = u^\star \circ v^\star$$

Réponse – Faux

C'est
$$(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$$

3. Soit E un espace euclidien, $p \in \mathscr{L}(E)$, alors
$$[p \text{ est un projecteur orthogonal}] \iff [p^\star = p]$$

Réponse – Faux

C'est la définition d'un endomorphisme symétrique, cela peut ne pas être un projecteur (par exemple $p = 2\,\mathrm{id}_E$).

4. Soit E un espace euclidien de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors
$$[u^\star = u] \iff [\exists \mathcal{B},\ \text{base orthonormée de } E,\ \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})]$$

Réponse – Vrai

C'est le *fameux* théorème spectral (dit de réduction des endomorphismes auto-adjoints).

5. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors
$$\left[u \circ u^\star \in \mathscr{S}^{++}(E)\right] \iff [u \in \mathscr{GL}(E)]$$

Réponse – Vrai

Dans tous les cas, on a
$$(u \circ u^\star)^\star = u \circ u^\star,\ \text{donc } u \in \mathscr{S}(E)$$
de plus, pour $x \in E$
$$\langle u \circ u^\star(x), x\rangle = \langle u^\star(x), u^\star(x)\rangle = \|u^\star(x)\|^2 \geqslant 0 \text{ donc } u \circ u^\star \in \mathscr{S}^+(E)$$

On en déduit aussi que $x \in \operatorname{Ker}(u \circ u^\star)$ si, et seulement si, $x \in \operatorname{Ker}(u^\star)$ or

$$\operatorname{Ker}\left(u^\star\right) = \operatorname{Im}(u)^{\perp}.$$

Finalement,

$$\left[u \circ u^\star \in \mathscr{S}^{++}(E)\right] \iff \left[u^\star \in \mathscr{GL}(E)\right] \iff \left[\operatorname{Im}(u)^{\perp} = \{0_E\}\right] \iff \left[u \in \mathscr{GL}(E)\right]$$

6. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors si $\mathcal{B}$ est une base de E

$$\operatorname{Mat}\left(u^\star, \mathcal{B}\right) = {}^t\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B})$$

Réponse – Faux

Il manque le fait que $\mathcal{B}$ est une base *orthonormée* de E.

7. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$\left[u \in \mathscr{O}(E)\right] \iff \left[\exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E,\ \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})\right]$$

Réponse – Faux

Une rotation du plan, par exemple ne vérifie pas cette propriété.

8. Soit E un espace euclidien, alors

$$\mathscr{O}(E) \cap \mathscr{S}(E) = \left\{s \in \mathscr{GL}(E),\ s^\star = s\right\}$$

Réponse – Faux

Ce sont les symétries *orthogonales* et pas toutes les applications auto-adjointes bijectives.

9. Soit E un espace euclidien, alors

$$\mathscr{S}(E) \cap \mathscr{GL}(E) = \mathscr{S}^{++}(E)$$

Réponse – Faux

Tous les endomorphismes auto-adjoints dont les λ_k sont non nuls sont dans $\mathscr{S}(E) \cap \mathscr{GL}(E)$, mais si un des λ_k est négatif, l'endomorphisme n'est pas positif.

10. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{O}(E)$, alors

$$\left[u \in \mathscr{A}(E)\right] \iff \left[u^2 = -\mathrm{id}_E\right]$$

Réponse – Vrai

Car $u^\star = u^{-1} = -u$.