Topologie et Calcul différentiel – TD 4: Topologie : distance, norme, fermé, adhérence

07 avril 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manier les outils de topologie qui nous serviront plus tard.

Distances et normes

Exercice 1 : Des distances en vrac

Démontrer que chacune des applications suivantes est une distance.

1. Sur $\mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

▷ d_1 est clairement positive et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

▷ On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\text{'}\ d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d_1(y,x)$$

▷ Pour démontrer l'inégalité triangulaire, on introduit la fonction $f : x > 0 \mapsto \frac{x}{1+x}$. Sa dérivée f' est donnée par :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

Donc f est croissante. On a donc :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ d(x,y) = f\left(|x-y|\right) &\leqslant f\left(|x-z|+|z-y|\right)\\ &\leqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\ &\leqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}\\ &\leqslant d(x,z)+d(z,y)\end{aligned}$$

$$\boxed{d_1 \text{ est une distance sur } \mathbb{R}.}$$

2. Sur $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d_2(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

L'application d_2 est définie comme la somme d'une série. Il faut d'abord vérifier que d_2 est bien définie. Ensuite, pour montrer que d_2 est une distance, on vérifie les propriétés sur les sommes partielles et on passe à la limite.

▷ On commence d'abord par montrer que d_2 est bien définie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Comme $\frac{1}{2^n}$ est le terme d'une série convergente et que les termes $\frac{|x_n-y_n|}{2^n}$ sont positifs, on en déduit que d_2 est bien définie.
▷ L'application d_2 est clairement positive. Comme d_2 est définie comme la somme d'une série à termes positifs, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = y_n \Leftrightarrow x = y$$

▷ On a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{N} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{|y_n - x_n|}{2^n}$$

On passe à la limite ($N \to +\infty$) dans l'égalité et on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ d_2(x,y) = d_2(y,x)$$

▷ Inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{N} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{|x_n - z_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{|z_n - y_n|}{2^n}$$

On passe à la limite et on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ d_2(x,y) \leqslant d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

$$\boxed{d_2 \text{ est une distance sur } E.}$$

3. Sur $\mathbb{R}^n$ l'application suivante :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \ d_3(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|y\| \text{ sinon} \end{cases}$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

▷ L'application d_3 est clairement positive et on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \ d_3(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \|x-y\| = 0 \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|y\| = 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ x = y = 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

▷ On a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \ d_3(x,y) &= \begin{cases} \|x-y\| \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|y\| \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \|y-x\| \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|y\| + \|x\| \text{ sinon} \end{cases} \\ &= d_3(y,x) \end{aligned}$$

▷ Pour démontrer l'inégalité triangulaire, on distingue les deux cas. Soient $(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^3$.

- Si x et y sont colinéaires. Alors :

$$d(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\|$$

Si x et z sont colinéaires, alors y et z sont colinéaires et on a donc :

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

Sinon, x et z ne sont pas colinéaires et donc z et y ne sont pas colinéaires et on a :

$$\begin{aligned} d(x,y) = \|x-y\| &\leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \\ &\leqslant \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| \\ &\leqslant d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

- Si x et y ne sont pas colinéaires. On a : :

$$d(x,y) = \|x\| + \|y\| = \|x-z+z\| + \|y-z+z\|$$

Et donc, en séparant les différents cas :

$$d(x,y) \leqslant \begin{cases} \|x-z\| + \|z\| + \|y\| \text{ si } x \text{ et } z \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|z\| + \|z-y\| \text{ si } y \text{ et } z \text{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| \text{ si } z \text{ n'est aligné ni avec } y \text{ ni avec } z \end{cases}$$

Donc on a bien :

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

$$\boxed{d_3 \text{ est une distance sur } \mathbb{R}^n.}$$

Exercice 2 : Une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que :

$$f \mapsto \|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur E.

Posons :

$$\varphi : \begin{cases} E \times E & \to & \mathbb{C} \\ (f,g) & \mapsto & \overline{f(0)} \times g(0) + \int_0^1 \overline{f'(t)} \times g'(t) \,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

La fonction φ ainsi définie est une forme sesqui-linéaire hermitienne (voir le cours d'algèbre linéaire avancé). De plus, pour tout $f \in E$, $\varphi(f,f) \geqslant 0$. Supposons que $\varphi(f,f) = 0$. Alors, $f(0) = 0$ et

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit donc que f' est nulle, donc f est constante. Comme $f(0) = 0$, on peut conclure que f est nulle. La fonction φ est donc un produit scalaire hermitien. Ainsi, pour tout $f \in E$, $\varphi(f,f) = \|f\|^2$, ce qui montre que :

$$\boxed{\|f\| \text{ est une norme.}}$$

Exercice 3 : Les normes ont des boules convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ et
$$N(x) = 0 \iff x = 0.$$
2. et
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x).$$

On note $B = \{x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$.

1. Montrer que B est convexe si, et seulement si, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Montrons ($\Leftarrow$). Soit $(x, y) \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $(1 - \lambda).x + \lambda.y \in B$. Par hypothèse N vérifie l'inégalité triangulaire et la propriété d'homogénéité. Donc,

$$N((1 - \lambda).x + \lambda.y) \leqslant (1 - \lambda) \times N(x) + \lambda \times N(y) \leqslant 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

D'où $(1 - \lambda).x + \lambda.y \in B$. Ainsi,

$$\boxed{B \text{ est convexe.}}$$

Montrons ($\Rightarrow$). Soit $(x, y) \in E^2$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors d'après la première hypothèse, on a : $N(x) = 0$ ou $N(y) = 0$. Donc $N(x + y) = N(x) + N(y)$. Supposons maintenant $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas, $N(x) \neq 0$ et $N(y) \neq 0$. De plus,

$$\lambda = \frac{N(x)}{N(x) + N(y)} \in [0, 1], \quad \frac{N(y)}{N(x) + N(y)} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \frac{N(y)}{N(x) + N(y)} = 1 - \frac{N(x)}{N(x) + N(y)} = 1 - \lambda.$$

D'où, comme B est convexe et que $\frac{1}{N(x)}.x \in B$ et $\frac{1}{N(y)}.y \in B$

$$\lambda \times \frac{1}{N(x)}.x + (1 - \lambda) \times \frac{1}{N(y)}.y \in B.$$

Donc,

$$N\left(\lambda \times \frac{1}{N(x)}.x + (1 - \lambda) \times \frac{1}{N(y)}.y\right) \leqslant 1.$$

La propriété d'homogénéité permet alors d'obtenir :

$$N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Ainsi,

$$\boxed{N \text{ vérifie la propriété d'homogénéité.}}$$

Exercice 4 : Une distance sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $E =]0, +\infty[$. On définit :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

1. Montrer que d est une distance sur E.

▷ L'application d est clairement positive et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$$

▷ On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x)$$

▷ L'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ d(x,y) &\leqslant \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right| \\ &\leqslant d(x,z) + d(z,y)\end{aligned}$$

$$\boxed{d \text{ est une distance sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $A =]0,1]$, A est-elle bornée pour d ?

Montrons que A n'est pas borné. Pour cela on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n}$. On a :

$$\forall y \in A,\ d(x_n, y) = \left|n - \frac{1}{y}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que le diamètre de A est infini.

$$\boxed{A \text{ n'est pas borné.}}$$

3. Calculer le diamètre de l'ensemble $B =]2, +\infty[$.

▷ Pour tout couple $(x,y) \in B^2$, on a :

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\min(x,y)} - \frac{1}{\max(x,y)} \leqslant \frac{1}{\min(x,y)} \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc $\mathrm{diam}(B) \leqslant \frac{1}{2}$.
▷ On définit les deux suites de B suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2 + \frac{1}{n} \text{ et } v_n = n$$

Il est clair que $u_n \to 2$ et $v_n \to +\infty$. De plus :

$$d(u_n, v_n) = \left|\frac{n}{1+2n} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \mathrm{diam}(B)$$

Or $d(u_n, v_n) \to \frac{1}{2}$. Donc $\mathrm{diam}(B) \geqslant \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathrm{diam}(B) = \tfrac{1}{2}.}$$

4. On définit, pour tout $x \in E$ et pour tout $r > 0$ l'ensemble $BO_d(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) < r\}$. Donner $BO_d(x,r)$ sous forme d'un intervalle.

Soit $x \in E$. On a :

$$y \in BO_d(x,r) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < r$$
$$\Leftrightarrow -r + \frac{1}{x} < \frac{1}{y} < r + \frac{1}{x}$$

Il y a deux cas à traiter : ▷ Si $x \geqslant \frac{1}{r}$, on a :

$$y \in BO_d(x,r) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < r + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow y \in \left]\frac{1}{r + \frac{1}{x}}, +\infty\right[$$

▷ Si $x < \frac{1}{r}$, on a :

$$y \in BO_d(x,r) \Leftrightarrow -r + \frac{1}{x} < \frac{1}{y} < r + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow y \in \left]\frac{1}{r + \frac{1}{x}}, \frac{1}{-r + \frac{1}{x}}\right[$$

5. Pour $x \in E$ et $r > 0$ comparer $BO_d(x,r)$ à $BO(x,r) = \{y \in E,\ |x - y| < r\}$.

Il n'y a pas moyen de comparer les deux ensembles en général :

$$BO_d(1,1) =]\frac{1}{2}, +\infty[\text{ mais } BO(1,1) =]0, 2[$$

Exercice 5 : La norme p "tend" vers la norme infinie

Dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

On rappelle que ces deux applications sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$$

Le résultat est clairement vrai pour $x = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. Alors :

$$\forall p > 1,\ \|x\|_p = \|x\|_\infty \left(\left(\frac{|x_1|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \left(\frac{|x_2|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Or, $\exists k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$ donc :

$$1 \leqslant \left(\left(\frac{|x_1|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \left(\frac{|x_2|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}}$$

Et donc en passant à la limite dans l'inégalité ($p \to \infty$), on obtient :

$$\left(\left(\frac{|x_1|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \left(\frac{|x_2|}{\|x\|_\infty}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Finalement :

$$\|x\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty.}$$

Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

2. Montrer que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$$

Le résultat est clairement vrai lorsque $f = 0$. Soit donc $f \in E$ non nulle. On a :

$$\forall p > 1,\ \|f\|_p = \|f\|_\infty \left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes, donc il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0) = \|f\|_\infty$. Comme $|f|$ est continue en t_0, on a :

$$\text{Il existe } \eta > 0 \text{ tel que } |t - t_0| < \eta \Rightarrow |\,|f(t)| - |f(t_0)|\,| < \varepsilon$$

Et donc :

$$|t - t_0| < \eta \Rightarrow |f(t)| > |f(t_0)| - \varepsilon$$

On en déduit :

$$(2\eta)^{\frac{1}{p}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right) \leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1$$

De plus, il est clair que $(2\eta)^{\frac{1}{p}} \to 1$ donc :

$$\text{Il existe } P \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \geqslant P \Rightarrow |(2\eta)^{\frac{1}{p}} - 1| < \varepsilon$$

On a donc :

$$\forall p \geqslant P,\ (1-\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right) \leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1$$

Ce qui donne :

$$\forall p \geqslant P,\ 1 - \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\|f\|_\infty}\right) \leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1$$

Donc :

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Et donc on en conclut que :

$$\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$$

$$\boxed{\forall p > 1,\ \|f\|_p = \|f\|_\infty \left(\int_0^1 \left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.}$$

Exercice 6 : La "norme p" n'est PAS une norme si $p < 1$

Soit $p \in]0,1[$. On suppose que $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$).

1. Montrer que l'application $||\cdot||_p : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{l=1}^{n} |x_l|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme.

   Posons $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Comme $p \in]0, 1[$, on a : $||x + y||_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = ||x||_p + ||y||_p$ Donc,

   $$\boxed{||\cdot||_p \text{ n'est pas une norme.}}$$

2. Dessiner l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2,\ ||x||_p = 1\}$ lorsque $p = 1/2$ et $p = 1/4$.
3. Vers quel ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2,\ ||x||_p = 1\}$ converge-t-il lorsque p tend vers 0 ?

Exercice 7 : Une norme bizarre

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x, y) = \int_0^1 |x + t \times y|\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que N est une norme.

   Elle vérifie :

   (a) Elle est bien définie, car $f : t \mapsto |x + t \times y|$ est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$. Cette fonction étant positive, l'intégrale l'est aussi.

   (b) Elle est définie, car si $N(x, y) = 0$, alors f étant continue, positive, on en déduit que :

   $$\forall t \in [0, 1],\ x + t \times y = 0,\ \text{donc } x = y = 0.$$

   (c) Elle est clairement homogène.

   (d) Elle vérifie l'inégalité triangulaire, car :

   $$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4,\ \forall t \in [0, 1],\ |(x_1 + x_2) + t \times (y_1 + y_2)| \leq |x_1 + t \times y_1| + |x_2 + t \times y_2|.$$

   La croissance de l'intégrale permet alors de conclure.

2. Tracer la sphère unité.

   Il suffit de calculer la norme pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a plusieurs cas :

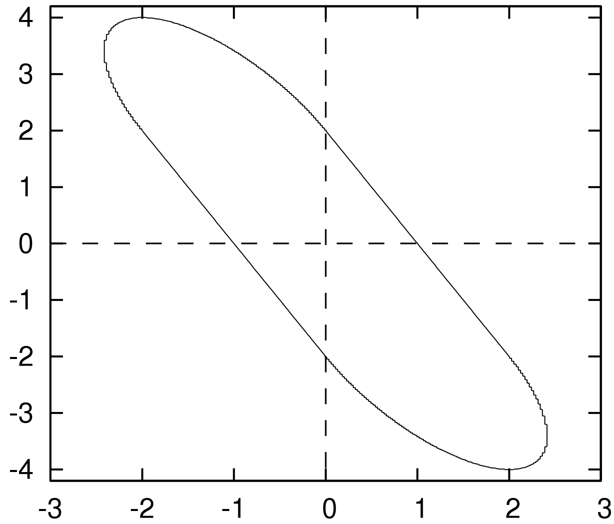
   (a) f ne s'annule pas sur $]0, 1[$, alors $t \mapsto x + t \times y$ garde un signe constant $\big((x \geq 0$ et $x + y \geq 0)$ ou $(x \leq 0$ et $x + y \leq 0)\big)$ et :

   $$N(x, y) = \left| x + \frac{y}{2} \right|.$$

   (b) f s'annule en $t_0 = -x/y \in]0, 1[$, alors :

   $$N(x, y) = \left| \frac{y^2 + 2\,x \times y + 2\,x^2}{2\,y} \right|.$$

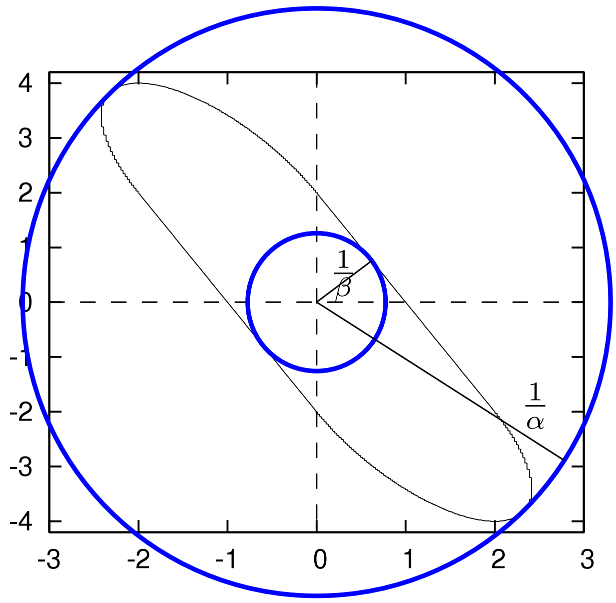
   On obtient alors facilement :



3. Chercher les constantes α maximale et β minimale telles que

$$BF_2(0,1/\beta) \subseteq BF_N(0,1) \subseteq BF_2(0,1/\alpha)$$

Ils s'observent sur le dessin !



Pour trouver le petit cercle, on pose β tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \beta^2 \times (x^2+y^2) \geq \left(x + \frac{y}{2}\right)^2.$$

L'équation du second degré (en y/x) doit avoir un discriminant nul (négatif pour qu'il y ait inégalité, nul pour qu'il y ait un cas d'égalité). Soit :

$$1 - 4\,(1-\beta^2) \times \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right) = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}.}$$

On retrouve ce que l'on a observé sur le dessin : $1/\beta$ est la distance de O à la droite $x + y/2 = 1$.

Pour trouver le grand cercle, on pose α tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \ \left(\frac{y^2 + 2\,x \times y + 2\,x^2}{2\,y}\right)^2 \geq \alpha^2 \times (x^2 + y^2).$$

L'équation du quatrième degré (toujours en y/x) doit avoir une solution double, donc α doit vérifier :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \left(4\,\alpha^2 - 1\right)\,t^4 - 4\,t^3 + \left(4\,\alpha^2 - 8\right)\,t^2 - 8\,t - 4 & = 0 \\ \left(4\,\alpha^2 - 1\right)\,t^3 - 3\,t^2 + \left(2\,\alpha^2 - 4\right)\,t - 2 & = 0. \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\alpha = 0.221 \pm 10^{-3}.}$$

On peut aussi trouver cette valeur, en exprimant que le rayon vecteur reliant O au point de contact, doit être orthogonal à l'ellipse trouvée, il est donc colinéaire au gradient. Le système devient alors :

$$\begin{cases} y^2 + 2\,x \times y + 2\,x^2 - 2\,y = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 2\,y + 4\,x \\ y & 2\,y + 2\,x - 2 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Fermés et adhérence

Exercice 8 :

Soit E l'ensemble des suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |a_n|$ converge. On définit une norme sur E par :

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Montrer que c'est une norme.
2. Soit

$$F = \left\{ a \in E,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

   F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

1. Montrons que $||\cdot||$ est une norme que E.
   — $||\cdot||$ est définie positive :
   Soit $a \in E$, alors

$$||a|| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \geqslant \sum_{n=0} \infty 0 = 0$$

   avec égalité ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ssi $a = 0$.
   — $||\cdot||$ est homogène :
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $a \in E$. Alors

$$||\lambda a|| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda| \cdot |a_n| = |\lambda| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |\lambda| \cdot ||a||$$

   — $||\cdot||$ vérifie l'inégalité triangulaire :

Soit $(a,b) \in E^2$. Alors :

$$||a+b|| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = ||a|| + ||b||$$

2. F est fermé, non ouvert et non borné.
   - Montrons que F est fermé.
     Soit $(a^N)_{N\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a \in \mathbb{C}^N$.
     Montrons que $a \in F$. Tout d'abord, $||a|| \leqslant ||a - a^N|| + ||a^N|| < +\infty$, donc $a \in E$.
     Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $||a - a^N|| < \varepsilon$. Alors,

$$\left|1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \left|1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^N\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^N - a_n)\right| < 0 + \varepsilon$$

     car $a^N \in F$, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^N = 1$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $|1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n| = 0$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$, et par conséquent $a \in F$. Donc F est fermé.
     Remarque : on verra plus tard qu'on peut prouver que F est fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par la fonction continue $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   - F n'est pas ouvert.
     Soir $\varepsilon > 0$. Alors $(1, 0, \ldots) \in F$ mais $(1 + \varepsilon, 0, \ldots) \notin F$.
   - F n'est pas borné. En effet, $e_n = (n, -1, \ldots, -1, 0, \ldots) \in F$ et $||e|| = 2n - 1 \to +\infty$.

Exercice 9 :

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.

   $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $\bar{A} \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}$. Or $\mathrm{Vect}(\bar{A})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bar{A}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in \overline{\mathrm{Vect}(A)}^2$. Il existe deux suites $(u_n, v_n) \in (\mathrm{Vect}(A))^{\mathbb{N}})^2$ tels que $||u_n - u|| \to 0$ et $||v_n - v|| \to 0$. Alors $\lambda u_n + v_n \in \mathrm{Vect}(A)$. Donc $\lambda u + v = \lim_n \lambda u_n + v_n \in \overline{\mathrm{Vect}(A)}$. D'où $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Dans cette question nous allons montrer que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général. On considère ici que E est l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme $||.||_\infty$.
   (a) Soit $A = \{u \in E,\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$. Montrer que A est fermé dans E.

   Soit $(v^N)_{N\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de suites appartenant à A qui converge vers $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrons que $v \in A$.
   Tout d'abord on remarque que $||v|| \leqslant ||v^N - v|| + ||v^N|| < \infty$ donc $v \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire,

$$|v_n| \leqslant |v_n^N - v_n| + |v_n^N|$$

   Comme $v^N \in A$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ (qui dépend de N) tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|v_n^N| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Comme $||v^N - v|| \to 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, pour tout $N \geqslant N_2$, $||v^N - v|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par définition de la norme sur E, cela implique que pour tout $N \geqslant N_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n^N - v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   En posant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N_3$, $|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $v \in A$.
   Donc A est fermé.

(b) Soit $B = \{u \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n = 0\}$. Quelle est l'adhérence de B ?

Montrer que $\bar{B} = A$. Comme $B \subset A$ et que A est fermé, alors $\bar{B} \subset A$.
Montrons que $A \subset \bar{B}$. Soit $u \in A$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $(u_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^N = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leqslant N, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $u^N \in B$ et $||u - u^N||_\infty = \sup_{n>N} |u_n| \to 0$ quand N tend vers l'infini, car $u \in A$. Donc $u^N \to u$. Donc $u \in \bar{B}$. Ainsi, $\bar{B} = A$.

(c) Conclure.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on définit $e^{(p)} \in E$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n^{(p)} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Soit

$$G = \{e^{(p)},\ p \in \mathbb{N}\}$$

Alors G est fermé car lorsque $i \neq j$ on a $\|e^{(i)} - e^{(j)}\|_\infty = 1$.
Comme, par défnition, $\mathrm{Vect}(G)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de G, on voit que $B = \mathrm{Vect}(G) = \mathrm{Vect}(\bar{G})$.
Donc $\overline{\mathrm{Vect}(G)} = \bar{B} = A \neq B = \mathrm{Vect}(G) = \mathrm{Vect}(\bar{G})$.

Exercice 10 :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit A un ouvert de E et B une partie de E.

1. Montrer que : $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Soit $\lambda \in A \cap \overline{B}$.
On a $\lambda \in A$ et A est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $BO(\lambda, r) \subset A$.
On a $\lambda \in \overline{B}$, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ qui converge vers λ dans E. D'après la définition de la convergence :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in BO(\lambda, r).$$

On a donc $(x_n)_{n\geqslant N} \in A \cap B$, donc $\lambda \in \overline{A \cap B}$. Ce qui prouve :

$$\boxed{A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.}$$

2. Montrer que $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Supposons $A \cap B = \emptyset$. Alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B} = \emptyset$. Donc $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Finalement

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset.}$$

Exercice 11 :

$\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fermé ou non.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y \leqslant 2\}$;

L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y \end{array}$$

est continue (car polynomiale), et $]-\infty, 2]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{F_1 = f^{-1}(]-\infty, 2]) \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^2.}$$

2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y < 2\}$;

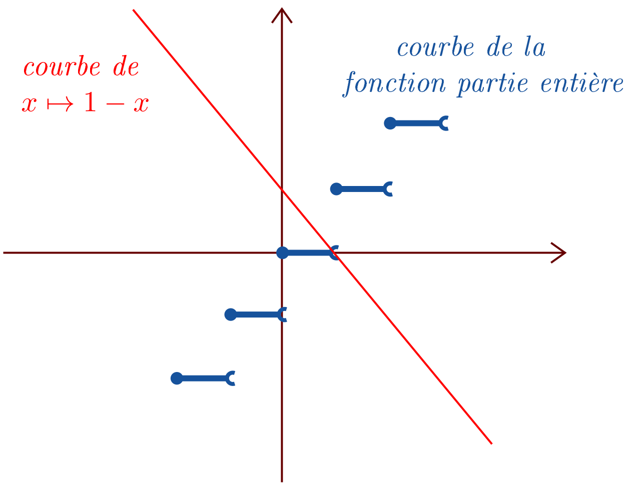
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 0$ et $y_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. On a alors $(x_n, y_n) \in F_2$ et

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0, 2) \notin F_2.$$

Donc

$$\boxed{F_2 \text{ n'est pas fermé dans } \mathbb{R}^2.}$$

3. $F_3 = \{x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant 1 - x\}$.



Sur le graphique, il semble que $F_3 =]-\infty, 1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. On a

$$\lfloor x_n \rfloor = 0 \text{ et } 1 - x_n = \frac{1}{n}$$

donc $x_n \in F_3$.
Puisque

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \notin F_3,$$

on en déduit que

F_3 n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 :

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_{\infty,[0,1]}$. Soit

$$A = \left\{ f \in E,\ f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}.$$

1. Montrer que A est fermé dans E.

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A qui converge vers une fonction g dans E pour la norme $\|.\|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g(0)| = |g(0) - g_n(0)| \leqslant \|g - g_n\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $g(0) = 0$. Soit maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - g_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \epsilon$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (g(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant - \left| \int_0^1 (g(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t \right| + \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant - \int_0^1 |g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant - \int_0^1 \|g - g_n\|_{\infty,[0,1]}\,\mathrm{d}t + 1 \\
&\geqslant -\epsilon + 1
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1.$$

Finalement $g \in A$ ce qui prouve que A est fermé.

2. Montrer que : $\forall f \in A,\ \|f\|_{\infty,[0,1]} > 1$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant 1$. Alors

$$1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_{\infty,[0,1]} \|f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant 1.$$

D'où $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Et donc

$$\int_0^1 (f(t) - 1)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or la fonction $t \mapsto f(t) - 1$ est continue et positive. C'est donc la fonction nulle. Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 1$. Cela contredit $f(0) = 0$.

3. Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A. Cette distance est définie par :

$$d(0_E, A) = \inf\{d(0_E, f),\ f \in A\} = \inf\{\|f - 0_E\|_{\infty,[0,1]},\ f \in A\}.$$

D'après la question précédente on a $d(0_E, A) \geqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2} \text{ si } t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases}.$$

On vérifie que $f_n \in A$. On a $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc

$$d(0_E, A) = 1.$$

Exercice 13 :

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit F un fermé non vide de E. Montrer que :

$$x \in F \quad \iff \quad d(x, F) \overset{\text{Déf}}{=} \inf\{d(x, y),\, y \in F\} = 0.$$

Montrons ($\Rightarrow$). Soit $x \in F$. On a alors $0 = N(x - x) \geqslant \inf\{N(x - y),\, y \in F\}$. Or, N est à valeurs positives, donc $d(x, F) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{d(x, F) = 0.}$$

Montrons ($\Leftarrow$). Soit $x \in E$ tel que $d(x, F) = \inf\{N(x - y),\, y \in F\} = 0$. Par propriété de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ tel que :

$$N(y_n - x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $N(y_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in F$ et F est fermé, donc, par définition,

$$\boxed{x \in F.}$$

2. On considère F et G deux fermés, non vides et disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que :

$$F \subset U, \quad G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Posons :

$$U = \bigcup_{x\in F} BO\left(x, \frac{d(x, G)}{2}\right), \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{y\in G} BO\left(y, \frac{d(y, F)}{2}\right).$$

D'après la question 1., comme F et G sont disjoints, pour tout $x \in F$, on a $d(x, G) > 0$ et donc $x \in U$. De même, pour tout $y \in G$, on a $y \in V$.

$$\boxed{F \subset U \text{ et } G \subset V.}$$

De plus, les boules ouvertes de E sont des ouverts de E. Donc,

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont des ouverts,}}$$

car ce sont des unions quelconques d'ouverts.

Il reste donc à montrer que $U \cap V = \emptyset$. Procédons par l'absurde. Soit $z \in U \cap V$, il existe donc $x \in F$ et $y \in G$ tel que

$$z \in BO\left(x, \frac{d(x,G)}{2}\right) \quad \text{et} \quad z \in BO\left(y, \frac{d(y,F)}{2}\right).$$

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$N(x-y) \leqslant N(x-z) + N(z-y) < \frac{d(x,G)}{2} + \frac{d(y,F)}{2} \leqslant \frac{N(x-y)}{2} + \frac{N(x-y)}{2} \leqslant N(x-y).$$

ou, de façon équivalente,

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{d(x,G)}{2} + \frac{d(y,F)}{2} \leqslant \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(y,x)}{2} \leqslant d(x,y)$$

C'est absurde. Ainsi,

$$\boxed{U \cap V = \emptyset.}$$

Ainsi,

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ répondent à la question.}}$$

Voici une autre démonstration intéressante de ce même résultat. On définit l'application f par :

$$f : \begin{cases} (E,d) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x & \mapsto & \frac{d(x,G)}{d(x,F)+d(x,G)} \end{cases}.$$

L'application f est bien définie, car si $d(x,F) + d(x,G) = 0$, alors $d(x,F) = d(x,G) = 0$. D'après la question 1, on en déduit que $x \in F \cap G$, ce qui est impossible car F et G sont disjoints.
De plus, on sait que les applications $x \mapsto d(x,F)$ et $y \mapsto d(x,G)$ sont lipschitziennes (donc continues sur E).
Donc,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } E}$$

en tant que quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Par ailleurs on a

$$\boxed{\forall x \in F,\ f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ f(x) = 0.}$$

f est une fonction continue, donc l'image réciproque par f de tout ouvert de $(\mathbb{R}, |\ |)$ est un ouvert de (E,d). Posons donc :

$$\boxed{U = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \quad \text{et} \quad V = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right).}$$

On sait que $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ sont des ouverts de $(\mathbb{R}, |\ |)$, donc U et V sont des ouverts de (E,d). De plus, par construction,

$$\boxed{F \subset U \quad \text{et} \quad G \subset V.}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} V \cap U &= f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) \cap f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \\ &= f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cap \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = f^{-1}(\emptyset). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{V \cap U = \emptyset.}$$

Ainsi

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ répondent à la question.}}$$