Suites et Séries – TD$_{13}$

5-6 décembre 2022

Exercice 1

Une personne a n clés et une seule ouvre la porte de son appartement, mais elle ne sait plus laquelle. Elle essaie les clés les unes après les autres au hasard, en éliminant après chaque essai la clé si elle ne marche pas.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'essais pour trouver la bonne clé. Donner la loi de X.

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés. Soit T la somme des valeurs obtenues, soit X le reste de la division euclidienne de T par 2 et soit Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

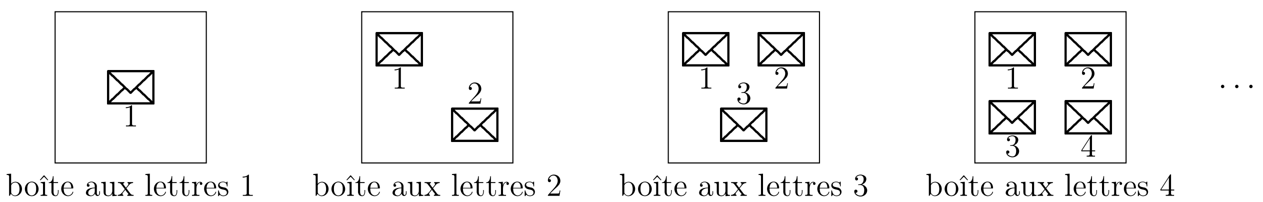
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi sur $[\![1, n]\!]$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$$

1. Donner la fonction de répartition de X et Y.
2. On note $Z = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (b) En déduire la loi de Z.
3. Même question pour $T = \min(X, Y)$.

Exercice 4 (DS 2020)

On considère $N \in \mathbb{N}^*$ boîtes aux lettres (邮箱) numérotées de 1 à N. La boîte aux lettres i contient i enveloppes (信封) numérotées de 1 à i :



On fait l'expérience aléatoire suivante :

- on choisit au hasard une boîte aux lettres ;
- on choisit au hasard une enveloppe dans cette boîte aux lettres.

On note X le numéro de la boîte aux lettres choisie et Y le numéro de l'enveloppe choisie.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y)
3. En déduire la loi de Y.

Exercice 5 (DS 2020)

Alice et Bob jouent au jeu « pierre-feuille-ciseaux (剪刀石头布) ». On note P pour « pierre (石头) », F pour « feuille (布) » et C pour « ciseaux (剪刀) ».
On note le résultat d'une partie sous la forme (a, b) où $a \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{C}\}$ est le choix d'Alice et où $b \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{C}\}$ est le choix de Bob. On suppose qu'Alice et Bob jouent au hasard.

1. Alice et Bob jouent une partie. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois « pierre », c'est-à-dire (P,P) ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « pierre », c'est-à-dire (a, b) avec $a = P$ ou $b = P$) ?
2. Alice et Bob font plusieurs parties à la suite de « pierre-feuille-ciseaux » et s'arrêtent quand ils ont joué tous les deux « pierre ». On note :
   - X le numéro de la première partie où il y a « pierre » (au moins une fois) ;
   - Y le numéro de la partie où il y a deux fois « pierre ».

   Par exemple, si les parties sont (C,F), (C,C), (C,P), (F,F) et (P,P) ; on a $X = 3$ et $Y = 5$.
   On suppose que les résultats des parties sont indépendants.
   (a) Déterminer, en justifiant, les lois suivies par X et par Y.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = n, Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{1}{5}$.