MATH2307P – QCM$_2$

1$^{\text{er}}$ mars 2023

1. Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace euclidien.

Réponse – Faux

Il doit en plus être de dimension finie.

2. Soit E un espace euclidien, on note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Réponse – Vrai

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou on utilise de plus que

$$\langle x, y\rangle \leqslant \left|\langle x, y\rangle\right|$$

3. Soit E un espace euclidien, alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left[\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right] \iff \left[\langle x, y\rangle = 0\right]$$

Réponse – Vrai

C'est le *fameux* théorème de Pythagore.

4. Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle .e_k$$

Réponse – Faux

C'est seulement vrai lorsque la base est *orthonormée*.

5. Soit E un espace euclidien, E_1 un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E_1, alors la projection orthogonale de E sur E_1 est définie par

$$P_{E_1} : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle .e_k \end{cases}$$

Réponse – Faux

Il faut que la base de E_1 soit orthonormée.

6. Soit E un espace euclidien, E_1 un sous-espace vectoriel de E, $E_1^{\perp}$ l'orthogonal de E_1 dans E,on a alors

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$$

Réponse – Vrai

Cela devient faux lorsque la dimension est infinie.

7. Soit E un espace euclidien, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ deux bases orthonormées de E, alors la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ est définie par

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left[\left\langle e_i, b_j \right\rangle\right]_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$$

Réponse – Vrai

Car, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, b_j \rangle . e_i$$

8. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors

$$\mathrm{Matrice}\,(u, \mathcal{E}) = \left[\left\langle u(e_j), e_i \right\rangle\right]_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$$

Réponse – Vrai

C'est la propriété 4.18, page 31 du polycopié papier, dans le cas d'un endomorphisme.

9. Soit E un espace euclidien, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ deux bases orthonormées de E et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$\mathrm{Matrice}\,(u, \mathcal{B}) = {}^tP_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{Matrice}\,(u, \mathcal{E}) \cdot P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$$

Réponse – Vrai

Si $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, la formule usuelle dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque serait

$$\mathrm{Matrice}\,(u, \mathcal{B}) = P^{-1} \cdot \mathrm{Matrice}\,(u, \mathcal{E}) \cdot P$$

mais, comme les bases sont orthonormées, on a

$$P^{-1} = {}^tP$$

10. Soit E un espace euclidien, p un projecteur de E ($p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$), alors

$$\big[\mathrm{Ker}(p) \text{ orthogonal à } \mathrm{Im}(p)\big] \iff \Big[\forall x \in E,\ \big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\|\Big]$$

Réponse – Vrai

C'est l'exercice 4.2.4. qui a été traité en Td.