Mathématiques I
QCM-2 le 8 avril 2022

Nom Prénom :

. . . .

Question 1 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quelle est la réponse correcte ?

- $\boxed{\text{A}}$ Correct f n'est pas continue en $(0,0)$, mais les dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$ (y compris en $(0,0)$).
- $\boxed{\text{B}}$ f n'est ni continue ni dérivable en $(0,0)$.
- $\boxed{\text{C}}$ f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ entier.
- $\boxed{\text{D}}$ f est continue mais non dérivable en $(0,0)$.

Question 2 Soit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Quelle est la bonne réponse ?

- $\boxed{\text{A}}$ $\forall y \neq 0,\ f(0,y) = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ Correct Au voisinage de $(0,0)$: $|f(x,y)| \leq |x^2\ln(x^2)|$.
- $\boxed{\text{C}}$ f n'est pas continue en 0.

Question 3 Dans l'espace euclidien, on considère trois points A, B et C tels que : $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$. Il existe une unique homothétie h de centre O et de rapport k telle que $h(A) = B$ et $h(B) = C$. O et k sont donnés par :

- $\boxed{\text{A}}$ $k = 3$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $k = 2$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- $\boxed{\text{C}}$ Correct $k = 3$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $k = 2$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Question 4 Dans l'espace euclidien, on considère les trois points $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 0, 1)$ et $C = (0, -1, -2)$. Soit le point $M = (8, 10, 5)$. Donner les coordonnées de la projection orthogonale de M sur le plan (ABC).

- [A] $H = (3, 1, 8)$.
- [B] Correct $H = (2, 1, 8)$.
- [C] $H = (1, 0, 3)$.

Question 5 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quelle est la réponse correcte ?

- [A] f est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais non dérivable en $(0, 0)$.
- [B] f n'est pas continue en $(0, 0)$.
- [C] Correct f est continue, les dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$ (y compris en $(0, 0)$) mais la fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- [D] f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Question 6 Dans l'espace euclidien, on considère la droite D_1 donnée par

$$D_1 : \begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

et la droite D_2 donnée par :

$$D_2 : \begin{cases} 3x + 2y + 4z + 8 &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

La distance entre D_1 et D_2 est égale à :

- [A] $2\sqrt{3}$.
- [B] Correct $3\sqrt{5}$.
- [C] $3\sqrt{3}$.
- [D] $2\sqrt{5}$.

Question 7 Dans l'espace euclidien, soit le plan P d'équation $x + 2y - 5 = 0$ et le plan P' d'équation $x + y + z - 3 = 0$.
Donner une forme paramétrée de la droite D intersection de P et P'.

- $\boxed{\text{A}}$ $\begin{cases} x = & 1 - 2t \\ y = & 2 + t \\ z = & -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}..$
- $\boxed{\text{B}}$ $\begin{cases} x = & 1 - 2t \\ y = & 2 + t \\ z = & 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}..$
- $\boxed{\text{C}}$ Correct $\begin{cases} x = & 1 - 2t \\ y = & 2 + t \\ z = & t \end{cases}, t \in \mathbb{R}..$

Question 8 Dans l'espace euclidien, on considère les trois points $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 0, 1)$ et $C = (0, -1, -2)$. Donner une équation cartésienne du plan passant par les trois points A, B et C.

- $\boxed{\text{A}}$ $-2x + 3y - z + 1 = 0.$
- $\boxed{\text{B}}$ $2x + 3y - z - 1 = 0.$
- $\boxed{\text{C}}$ Correct $2x + 3y - z + 1 = 0.$

Question 9 Dans l'espace euclidien, on considère les deux droites D_1 et D_2 déinifies par :

$$(D_1) : \begin{cases} x + y & = 2 \\ y - 2z & = 3 \end{cases} \qquad (D_2) : \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x - 2y + 3z & = a \end{cases}$$

Ces deux droites sont coplanaires (appartiennent au même plan) si et seulement si :

- $\boxed{\text{A}}$ $a = -1.$
- $\boxed{\text{B}}$ $a = 0.$
- $\boxed{\text{C}}$ a est quelconque dans $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{D}}$ Correct ? À vérifier $a = 4.$

Question 10 Dans l'espace euclidien, on considère les deux droites D_1 et D_2 déinifies par :

$$(D_1) : \begin{cases} x + y & = 2 \\ y - 2z & = 3 \end{cases} \qquad (D_2) : \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x - 2y + 3z & = a \end{cases}$$

Lorsque ces deux droites sont coplanaires (appartiennent au même plan), une équation cartésienne du plan qui les contient est :

- $\boxed{\text{A}}$ Correct $4x + y + 6z + 1 = 0.$
- $\boxed{\text{B}}$ $4x + y + 6z - 1 = 0.$
- $\boxed{\text{C}}$ $4x - y + 6z + 1 = 0.$

Question 11 Dans l'espace euclidien, on considère les trois points $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 0, 1)$ et $C = (0, -1, -2)$. Soit le point $M = (8, 10, 5)$. Donner une forme paramétrée de la droite passant par M et orthogonale au plan (ABC).

- [A] $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 8+2t \\ y & = & 10-3t \\ z & = & 5-t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}..$
- [B] $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 8+2t \\ y & = & 10+3t \\ z & = & 5+t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}..$
- [C] Correct $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 8+2t \\ y & = & 10+3t \\ z & = & 5-t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}..$

Question 12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on définit :

$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f\Big(y, f(x, x)\Big) \end{array}\right.$$

g est $\mathcal{C}^1$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ses dérivées partielles sont :

- [A] $\left\{\begin{array}{ll} \partial_1 g(x, y) & = 2\partial_1 f(x, x)\partial_2 f\Big(y, f(x, x)\Big) \\ \partial_2 g(x, y) & = \partial_1 f\Big(y, f(x, x)\Big) \end{array}\right..$
- [B] Correct $\left\{\begin{array}{ll} \partial_1 g(x, y) & = \Big(\partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x)\Big)\partial_2 f\Big(y, f(x, x)\Big) \\ \partial_2 g(x, y) & = \partial_1 f\Big(y, f(x, x)\Big) \end{array}\right..$
- [C] $\left\{\begin{array}{ll} \partial_1 g(x, y) & = 2\partial_1 f(x, x)\partial_1 f\Big(y, f(x, x)\Big) \\ \partial_2 g(x, y) & = \partial_1 f\Big(y, f(x, x)\Big) \end{array}\right.$

Question 13 Soit la fonction :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}\right.$$

est-ce que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

- [A] Correct Oui, car $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies est continues sur $\mathbb{R}^2$.
- [B] Non, car elle n'est pas continue en $(0, 0)$.
- [C] Non, car en $(0, 0)$ $\partial_2 f$ n'admet pas de limite, donc $\partial_2 f(0, 0)$ n'existe pas.

Question 14 Dans l'espace euclidien, soit le plan P d'équation $x + 2y - 5 = 0$ et le plan P' d'équation $x + y + z - 3 = 0$.
Soit D la droite intersection de P et P'. Donner une équation cartésienne du plan P" perpendiculaire à D et passant par le point $A = (1, 0, -1)$.

- A $-2x + y + z - 3 = 0$.
- B $2x - y + z + 3 = 0$.
- C Correct $-2x + y + z + 3 = 0$.

Question 15 Soit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$:

- A $\begin{cases} \partial_1 f(x, y) & = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2} \\ \partial_2 f(x, y) & = \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$.
- B $\begin{cases} \partial_1 f(x, y) & = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \\ \partial_2 f(x, y) & = \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} \end{cases}$.
- C Correct $\begin{cases} \partial_1 f(x, y) & = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2} \\ \partial_2 f(x, y) & = \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} \end{cases}$.