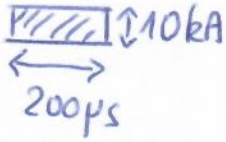
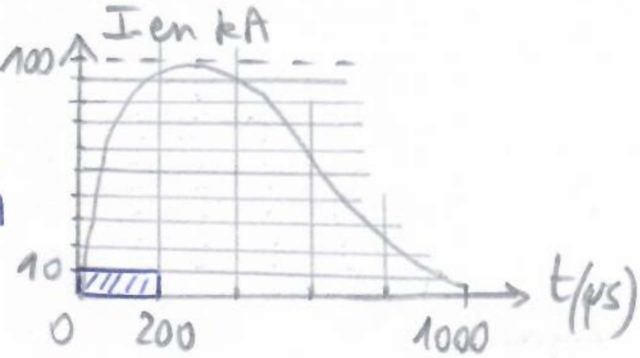
Ex 2.2 - Energie électromagnétique de la foudre

1) La charge totale $\boxed{Q = \int I \, dt}$
est égale à l'aire sous la courbe.
Environ 30 carreaux





an $Q \simeq 30 \times 200 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3 = \underline{\underline{60 \, C}}$

L'intensité moyenne du courant $\boxed{I_m = \frac{Q}{t}}$

an $I_m = \frac{60}{1000 \times 10^{-6}} = \underline{\underline{6 \times 10^4 \, A}} = \underline{\underline{60 \, kA}}$.

2) Avant le coup de foudre $E = 5 kV.m^{-1} = \frac{U}{h} \Rightarrow \boxed{U = E \times h}$.

an $U = 5 \times 10^3 \times 10^3 = \underline{\underline{5 \times 10^6 \, V}}$

L'énergie dissipée dans le coup de foudre $W_{él} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} QU = W_{él}}$

modèle du condensateur

an $W_{él} = \frac{1}{2} \times 60 \times 5 \times 10^6 = \underline{\underline{1{,}5 \times 10^8 \, J}}$

La puissance moyenne dissipée $\boxed{P_m = \frac{W_{él}}{t}}$

an $P_m = \frac{1{,}5.10^8}{1000 \times 10^{-6}} = \underline{\underline{1{,}5.10^{11} \, W}}$.

Comparaison entre l'énergie journalière d'un humain $E = 10^3 \, kJ$ et l'énergie dissipée dans le coup de foudre :

$$\frac{W_{él}}{E} = \frac{1{,}5 \times 10^8}{10^3 \times 10^3} = 150 \text{ (faible)}$$

Comparaison entre la puissance d'une centrale nucléaire $P = 1 \, GW$ et la puissance moyenne dissipée $P_m = 1{,}5.10^{11} \, W$.

$$\frac{P_m}{P} = \frac{1{,}5.10^{11}}{1 \times 10^9} = 150 \text{ (faible)}$$

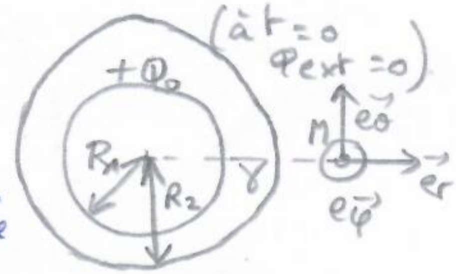
3) Calculons un ordre de grandeur des dimensions du nuage.

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h} = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{S = \frac{hQ}{\varepsilon_0 U}}$

an $S = \frac{1 \times 10^3 \times 60}{8{,}85.10^{-12} \times 5.10^6} \simeq \underline{\underline{1{,}4 \times 10^9 \, m^2}}$

Ex 2.3 - Décharge d'une boule conductrice

1) Système de coordonnées sphériques (r, θ, φ)



les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ~~et~~ $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont des plans de symétrie.

Le champ $\vec{E}$ appartient à ces plans de symétrie donc $\vec{E}$ est selon $\vec{e_r}$.

Le champ $\vec{B}$ $\perp$ à chacun de ces plans de symétrie donc $\vec{B} = \vec{0}$.

2) On applique le théorème de Gauss pour une surface de Gauss tel que $R_1 < r < R_2$:

$$E(r,t) \times 4\pi r^2 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \qquad (\text{à } t=0,\ Q(t) = Q_0)$$

D'après la loi d'Ohm locale, $\vec{j}(r,t) = \gamma \vec{E}(r,t)$

Par définition, $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = j(r,t) \times 4\pi r^2 = \underbrace{-\frac{dQ(t)}{dt}}$

$$\Rightarrow I = \gamma E(r,t) \cancel{\times 4\pi r^2} = -\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}(r,t) \cancel{\times 4\pi r^2}$$

⚠ variation négative car décharge de la boule.

$$\boxed{\frac{dE}{dt}(r,t) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} E(r,t) = 0}$$

Le champ $\vec{E}$ suit une loi de décroissance exponentielle car les solutions sont du type :

$$\boxed{E(r,t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

3) Bilan énergétique à $t=0$ (gaz isolant)

$$W_{él} = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{r=R_1}^{R_2} \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right] = \boxed{\frac{Q_0^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2} = W_{él}}$$

Rem : $W_{él} = \frac{1}{2} Q_0 V_1$

or $U = V_1 - V_2 = V_1 - 0 = \frac{Q_0}{C}$

$$V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right]$$

$$V_1 - 0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right] = \frac{Q_0}{C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

↳ sphère extérieure globalement neutre.

Ex 2.4 - Charge d'un condensateur circulaire

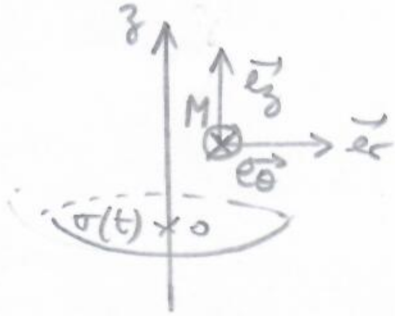
1) On néglige les effets de bord ⇒ cela revient à supposer les armatures illimités (ici on peut dire que $a \gg e$)

Etude d'une armature de densité surfacique de charge $\sigma(t)$.

Symétries : les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ et $(M, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ sont des plans de symétrie pour $\sigma(t)$

Or $\vec{E} \in$ aux plans de symétrie donc

$$\vec{E}(M,t) = E(M,t)\,\vec{e_z}$$



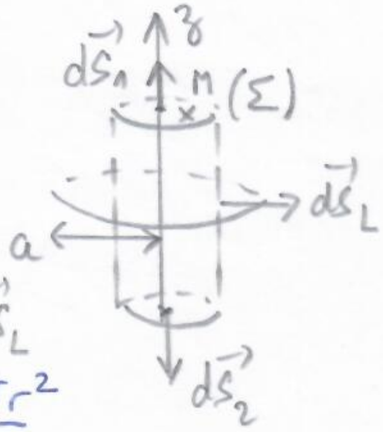
Invariances : par rotation selon θ et par translation selon r donc $\vec{E}(M,t) = E(z)\,\vec{e_z}$.

Appliquons le théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}(M,t) \cdot \vec{dS}_{ext} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Raisonnement en ARQS (on néglige le champ induit créé par $\vec{B}(t)$)

Choix de la surface de Gauss : cylindre d'axe Oz, de rayon $r < a$ et de hauteur $2 \times z_M$. (Σ)

$$\oiint \vec{E}(M,t) \cdot \vec{dS}_{ext} = \iint_{S_1} \vec{E}(M,t) \cdot \vec{dS_1} + \iint_{S_2} \vec{E}(M,t) \cdot \vec{dS_2} + \iint_{S_L} \underbrace{\vec{E}(M,t) \cdot \vec{dS_L}}_{=0 \text{ car } \vec{E}(M,t) \perp \vec{dS_L}}$$



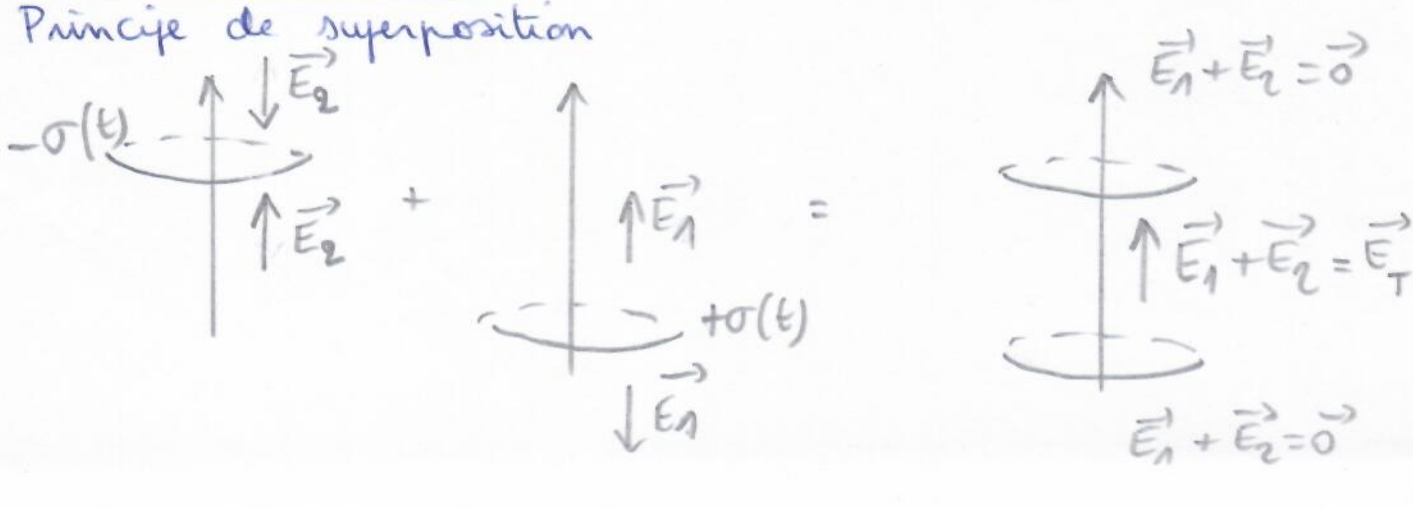
$$E(z,t)\,S_1 - E(-z,t)\,S_2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(t) \times \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

or $E(-z,t) = -E(z,t)$ et $S_1 = S_2 = S$

$$2E(z,t)\,S = \frac{\sigma(t)\,S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(z,t) = \dfrac{\sigma(t)}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} \text{ pour } z > 0. \\ \vec{E}(z,t) = -\dfrac{\sigma(t)}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} \text{ pour } z < 0. \end{cases}$$

Etude du condensateur

Principe de superposition

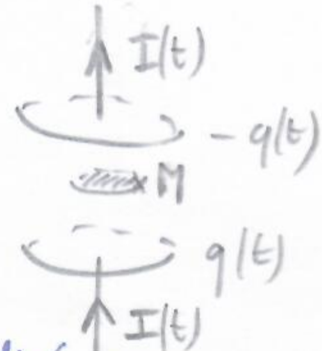


Pour $r < a$, $\boxed{\vec{E} = E(M,t)\,\vec{e_z} = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\,\vec{e_z}}$ entre les armatures

et $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$ en dehors des armatures.

Or $q(t) = \sigma(t) \times \pi a^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M,t) = \dfrac{q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}\,\vec{e_z}}$

2) Système à symétrie cylindrique avec courants axiaux.
Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant.
Or $\vec{B} \perp$ au plan de symétrie donc
$\vec{B}(M,t) = B(M,t)\,\vec{e_\theta}$.



Pour $r<a$, à l'intérieur du condensateur
on applique l'équation de Maxwell-Ampère généralisée sous forme intégrale

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS}_{=0} + \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS$$

car pas de courant entre les armatures

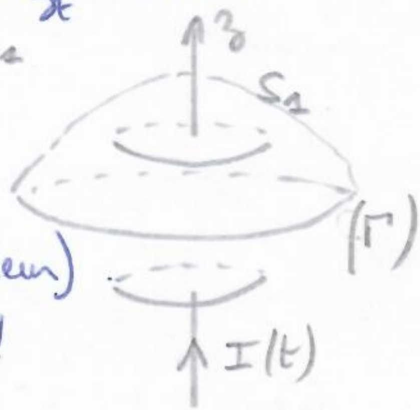
$$= 0 + \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{1}{\pi a^2 \varepsilon_0}\,\frac{dq(t)}{dt} \times dS$$

$$B(M,t) \times 2\pi r = \frac{\mu_0}{\pi a^2}\,\dot{q}(t)\,\pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0\,\dot{q}(t)\,r}{2\pi a^2}\,\vec{e_\theta}}$$

Pour $r>a$, à l'extérieur du condensateur

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS + \mu_0\varepsilon_0 \iint_{S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS$$

(voir l'activité 1.15).
Choix de S_1, surface s'appuyant sur le contour d'Ampère (Γ) englobant l'armature supérieure du condensateur ($\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur)

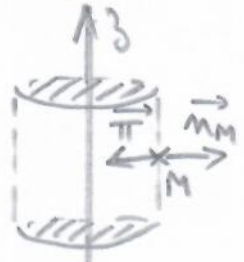


$$B(M,t) \times 2\pi r = \mu_0 I(t) + 0 = \mu_0 \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0\,\dot{q}(t)}{2\pi r}\,\vec{e_\theta}}$$

C'est une approximation car on a négligé le champ induit créé par les variations de $\vec{B}(M,t)$. (M.F : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ loi de Faraday)

3) A l'<u>intérieur</u> du condensateur, la puissance EM transportée <u>vers</u> le condensateur a pour expression :



$$\mathcal{P}_{\text{ém}\,\text{sortant}}(t) = \oiint \vec{\Pi}(M,t)\cdot\vec{n}_{M_{ext}}\,dS_M$$

avec $$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}$$

$$= \frac{\left(\frac{q(t)}{\pi a^2\varepsilon_0}\right)\vec{e_z}\wedge\left(\cancel{\mu_0}\frac{\dot{q}(t)r}{2\pi a^2}\right)\vec{e_\theta}}{\cancel{\mu_0}}$$

$$= \frac{q(t)\,\dot{q}(t)\,r}{2\pi^2 a^4\varepsilon_0}\left(-\vec{e_r}\right)$$ car $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ trièdre direct.

$$\mathcal{P}_{\text{ém}\,\text{sortant}}(t) = \|\vec{\Pi}\|(-\vec{e_r})\cdot\|\vec{n}_M\|\vec{e_r}\,dS_M$$

$$\mathcal{P}_{\text{ém}\,\text{entrant}} = +\frac{q(t)\,\dot{q}(t)\,a}{2\pi^2 a^4\varepsilon_0}\times\underbrace{2\pi a e}$$

↳ surface latérale = périmètre × hauteur

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ém}\,\text{entrant}}(t) = +\frac{q(t)\,\dot{q}(t)\,e}{\pi a^2\varepsilon_0}}$$

<u>Energie stockée</u> par le condensateur lorsque sa charge est Q.

$$W_{\text{ém}} = \iiint w_{\text{él}}\,d\tau + \iiint w_{\text{mag}}\,d\tau$$

$$\begin{cases} w_{\text{él}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q(t)}{\pi a^2\varepsilon_0}\right)^2 \\ w_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0\,\dot{q}(t)r}{2\pi a^2}\right)^2 \end{cases}$$

lorsque la charge est Q alors $\dot{q}(t) = 0$ et <u>$W_{\text{ém}} = W_{\text{él}}$</u>

et. $$W_{\text{ém}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Q^2}{(\pi a^2\varepsilon_0)^2}\times\pi a^2 e = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2\,e}{\pi a^2\varepsilon_0} = W_{\text{ém}}}$$

<u>Remarque</u> : $$\frac{w_{\text{él}}}{w_{\text{mag}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\varepsilon_0\left(\frac{q(t)}{\pi a^2\varepsilon_0}\right)^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0\,\dot{q}(t)r}{2\pi a^2}\right)^2} = \frac{q^2(t)\,4}{\dot{q}^2(t)\,r^2\mu_0\varepsilon_0} = \left[\frac{2q(t)}{\dot{q}(t)}\frac{c}{r}\right]^2$$

Dans le volume du condensateur $r \leq a$, on a :

$$\frac{\langle w_{\text{él}}\rangle}{\langle w_{\text{mag}}\rangle} = \left(\frac{2q(t)c}{\omega q(t)\,r}\right)^2 = \frac{4c^2}{\omega^2 r^2} \geqslant \frac{4c^2}{\omega^2 a^2}$$

Dans l'ARQS, on a supposé $a \ll \lambda \simeq \frac{c}{\omega} \Leftrightarrow \frac{c}{\omega a} \gg 1$ ce qui implique que l'énergie EM est essentiellement sous forme d'énergie électrique car $\langle w_{\text{él}}\rangle \gg \langle w_{\text{mag}}\rangle$

<u>Capacité du condensateur</u>

$$W_{\text{ém}} = W_{\text{él}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 e}{\pi a^2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi a^2\varepsilon_0}{e}}\ \left(= \frac{\varepsilon_0 S}{e}\right)$$