Mathématiques II – TD$_5$

9-10 mai 2022

Exercice 1

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage indiqué **sans passer par un calcul de développement limité**.

1. $x \mapsto x + 1 + \ln x$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$;
2. $x \mapsto \cos(\sin x)$ au voisinage de 0 ;
3. $x \mapsto \cosh(\sqrt{x})$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$;
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ au voisinage de 0 ;

1. On factorise par le terme dominant. Pour tout $x \neq 0$,

$$x + 1 + \ln x = \ln(x)\Big(1 + \underbrace{\frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}\Big) = \ln(x)\big(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)\big)$$

et

$$x + 1 + \ln x = x\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}_{\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0}\Big) = x\big(1 + \underset{x\to +\infty}{o}(1)\big)$$

d'où

$$\boxed{x + 1 + \ln x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \quad \text{et} \quad x + 1 + \ln x \underset{x\to +\infty}{\sim} x.}$$

2. On a $\cos y \underset{y\to 0}{\sim} 1$, et $\sin x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc on a :

$$\boxed{\cos(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} 1.}$$

3. On a $\cosh x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sqrt{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc on a :

$$\boxed{\cosh(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} 1.}$$

On a :

$$\cosh(\sqrt{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2}\big(1 + \underbrace{\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}_{\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2}\big(1 + \underset{x\to +\infty}{o}(1)\big)$$

d'où :

$$\boxed{\cosh(\sqrt{x}) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2}.}$$

4. On sait que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ (en composant à droite $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ par $x \mapsto x^2$), d'où :

$$\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\,x^2}{x\,x}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} x.}$$

Exercice 2

Déterminer si les fonctions suivantes admettent une limite en 0 et donner la valeur de cette limite si elle existe :

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$;
2. $x \mapsto \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$;
3. $x \mapsto \dfrac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$;
4. $x \mapsto \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ avec $a > 0$ et $b > 0$;

1. On a :
$$\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
d'où :
$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{-1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{6}$$
donc la limite en 0 existe et
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{-1}{6}.}$$

2. On a :
$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x) - \big(-x + \underset{x\to 0}{o}(x)\big) = 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
donc :
$$\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{2x}{2x + \underset{x\to 0}{o}(x)} = \frac{1}{1 + \underset{x\to 0}{o}(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
donc la limite en 0 existe et :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = 1.}$$

3. Par une composition de développements limités
$$\begin{aligned}\exp(\sin x) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= \exp(x)\exp\left(-\frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\end{aligned}$$
et on trouve de même que :
$$\exp(\tan x) = \exp(x)\left(1 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right).$$
On a donc :
$$\begin{aligned}\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} &= \exp(x)\frac{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= \exp(x)\frac{1 + \underset{x\to 0}{o}(1)}{1 + \underset{x\to 0}{o}(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$
donc la limite en 0 existe et :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} = 1.}$$

4. On a, par composition à droite par $x \mapsto x\,\ln a$ et $x \mapsto x\,\ln b$:

$$\begin{aligned} a^x + b^x &= \mathrm{e}^{x\ln a} + \mathrm{e}^{x\ln b} \\ &= 1 + \ln(a)\,x + \underset{x\to 0}{o}(x) + \big(1 + \ln(b)\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\big) \\ &= 2 + (\ln a + \ln b)\,x + \underset{x\to 0}{o}(x). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x\ln a} + e^{x\ln b}\right)\right) &= \ln\Big(1 + \frac{x}{2}\big(\ln a + \ln b\big) + \underset{x\to 0}{o}(x)\Big) \\ &= \frac{x}{2}\big(\ln a + \ln b\big) + \underset{x\to 0}{o}(x) + \underset{x\to 0}{o}\Big(\frac{x}{2}\big(\ln a + \ln b\big) + \underset{x\to 0}{o}(x)\Big) \\ &= \frac{x}{2}\ln(a\,b) + \underset{x\to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x\ln a} + e^{x\ln b}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(a\,b) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

On en déduit, par continuité de la fonction exponentielle,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} &= \exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x\ln a} + e^{x\ln b}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln(a\,b) + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{1}{2}\ln(a\,b)\right) \end{aligned}$$

donc finalement la limite en 0 existe et :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{a\,b}.}$$

```
x = symbols('x')
a,b = symbols('a b',positive=True)
limit(((a**x+b**x)/2)**(1/x),x,0)
```

Résultat : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{a\,b}$

Exercice 3

Soit $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non nulle. Déterminer un équivalent simple de P au voisinage de $+\infty$ puis un équivalent simple de P au voisinage de 0.

On écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$$

avec $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels. On note

1. d le degré de P, c'est-à-dire le plus grand entier $k \in \{0, \ldots, \}$ tel que $a_k \neq 0$;
2. p le plus petit entier $k \in \{0, \ldots, \}$ tel que $a_k \neq 0$.

On remarque que d et p existent car les a_k ne sont pas tous nuls (car P n'est pas la fonction nulle). On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=p}^{d} a_k\, x^k = a_p\, x^p + + \cdots + a_d\, x^d.$$

Pour trouver un équivalent d'une somme, une méthode qui marche souvent est de factoriser par le terme dominant.

— Au voisinage de $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P(x) = a_d\, x^d \Big(\underbrace{\sum_{k=p}^{d-1} \frac{a_k}{a_d}\, x^{k-d}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} +1 \Big),$$

car pour tout $k \in \{p, \dots, d-1\}$, $k - d < 0$. On a donc $P(x) = a_d\, x^d \big(1 + \underset{x\to+\infty}{o}(1)\big)$, c'est-à-dire

$$\boxed{P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d\, x^d.}$$

— Au voisinage de 0, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P(x) = a_p\, x^p \Big(\underbrace{\sum_{k=p+1}^{d} \frac{a_k}{a_p}\, x^{k-d}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} +1 \Big),$$

car pour tout $k \in \{p+1, \dots, d\}$, $k - d > 0$. On a donc $P(x) = a_p\, x^p \big(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)\big)$, c'est-à-dire

$$\boxed{P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\, x^p.}$$

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^4$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{f(a+h) - 2\,f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \underset{h\to 0}{O}(h^2).$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}\, h^2 + \frac{f'''(a)}{6}\, h^3 + \frac{f''''(a)}{24}\, h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)$$

donc

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}\, h^2 - \frac{f'''(a)}{6}\, h^3 + \frac{f''''(a)}{24}\, h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4).$$

On a donc

$$f(a+h) - 2\,f(a) + f(a-h) = f''(a)\, h^2 + \frac{f''''(a)}{12}\, h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)$$

d'où

$$\frac{f(a+h) - 2\,f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{f''''(a)}{12}\, h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

Or

$$\frac{f''''(a)}{12}\,h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2) = h^2\Big(\underbrace{\frac{f''''(a)}{12} + \underset{h\to 0}{o}(1)}_{\text{borné au voisinage de 0}}\Big) = h^2\underset{h\to 0}{O}(1) = \underset{h\to 0}{O}(h^2).$$

On a donc

$$\boxed{\frac{f(a+h)-2\,f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \underset{h\to 0}{O}(h^2).}.$$

Exercice 5

Faire une étude locale au voisinage de 0 (déterminer l'équation de la tangente en 0, déterminer la position relative de la courbe et de sa tangente, étudier la présence d'un extremum local ou d'un point d'inflexion) des fonctions :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\sinh x} \quad \text{et} \quad g : : x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}.$$

— On a :

$$\frac{\sin x}{\sinh x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}.$$

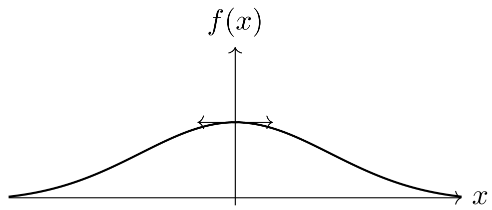
En utilisant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$, on a :

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

d'où :

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\sinh x} = \Big(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big) = 1 - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après le cours, cela montre que la courbe de la fonction f admet pour tangente $y = 1$ en 0, qu'elle est située en dessous de sa tangente au voisinage de 0 et que f a un maximum local en 0 (car $f'(0) = 0$).



— On a :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}.$$

On pose $u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \to 0$ quand $x \to 0$. On a :

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

donc $\underset{x\to 0}{o}(u^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ et d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} = \frac{1}{1-u} &= 1+u+u^2+\underset{x\to 0}{o}(u^2)\\ &= 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^4}{36}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\ &= 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

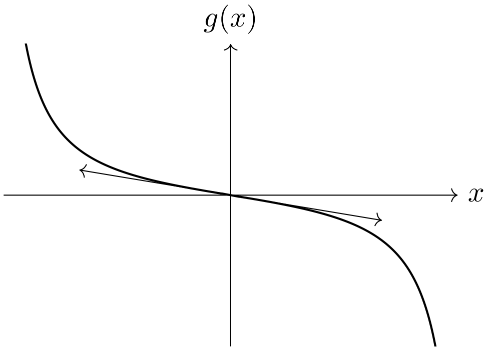
d'où :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}\Big(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\Big) = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Finalement,

$$g(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

D'après le cours, cela montre que la courbe de la fonction g admet pour tangente $y=-\frac{x}{6}$ en 0 et qu'elle admet comme point d'inflexion $(0,0)$ (la courbe de g traverse sa tangente en $(0,0)$).



Exercice 6

Montrer que la courbe de la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \frac{x^2}{x+1}\exp\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

a une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on donnera l'équation. La courbe de f est-elle située au-dessus ou en-dessous de son asymptote ?

Posons $h=\frac{1}{x}$. On a d'une part :

$$\frac{1}{h(1+h)} = \frac{1}{h}\frac{1}{1+h} = \frac{1}{h}\big(1-h+h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\big)$$

et d'autre part

$$\mathrm{e}^{\cos h} = \exp\Big(1-\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\Big) = \mathrm{e}\exp\Big(-\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\Big) = \mathrm{e}\Big(1-\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\Big)$$

donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\Big(\frac{1}{h}\Big) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\cos h}}{h(1+h)} = \frac{\mathrm{e}}{h}\big(1-h+h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\big)\Big(1-\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\Big) \\
&= \frac{\mathrm{e}}{h} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}\,h}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \\
&= \mathrm{e}\,x - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).
\end{aligned}$$

On en déduit en particulier que :

$$f(x) - \big(\mathrm{e}\,x - \mathrm{e}\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que :

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet la droite d'équation } y = e\,x - \mathrm{e} \text{ comme asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

De plus, on a :

$$f(x) - \big(\mathrm{e}\,x - \mathrm{e}\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2x}$$

et comme $\frac{\mathrm{e}}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est située au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

Exercice 7

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\,\exp(x^2).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_4(0)$ et le calculer.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. En particulier, elle est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (2x^2+1)\exp(x^2) > 0.$$

   En particulier, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

   Puisque f est de plus continue,

$$\boxed{f \text{ est bijective.}}$$

2. Puisque f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc :

$$\boxed{f^{-1} \text{ admet un } \mathrm{DL}_4(0).}$$

   On remarque d'abord que $f^{-1}(0) = 0$. On écrit :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

   avec a, b, c et d des nombres réels à déterminer.

Un simple calcul donne :

$$f(x) = x + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

Posons $y = x + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On a alors :

$$\begin{aligned} y &= x + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ y^2 &= x^2 + 2x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ y^3 &= x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ y^4 &= x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

et $\underset{x\to 0}{o}(y^4) = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ d'où :

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \underset{x\to 0}{o}(y) = ax + bx^2 + (a+c)x^3 + (2b+d)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

Mais :

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

donc par unicité de la partie régulière du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on obtient :

$$a = 1, \quad b = 0, \quad a + c = 0 \quad \text{et} \quad 2b + d = 0$$

d'où :

$$\boxed{f^{-1}(x) = x - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

Remarque : on pouvait savoir à l'avance que $b = c = 0$ car f^{-1} est impaire.

Exercice 8

Donner un développement asymptotique à quatre termes au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$x \longmapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

On prendra comme fonctions d'échelles $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ où k est un entier naturel.

On a, pour tout $x > 0$,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right].$$

On a, par composition à droite du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $h \mapsto \ln(1+h)$ avec $x \mapsto \frac{1}{x}$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

d'où :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &= \mathrm{e} \exp\left[-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]. \end{aligned}$$

On pose :

$$u = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ u^3 &= -\frac{1}{8x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ \underset{x\to+\infty}{o}(u^3) &= \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \mathrm{e}^t \exp(u) \\ &= \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{x\to+\infty}{o}(u^3)\right) \\ &= \mathrm{e}\left[1 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{3x^3}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{1}{8x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2x} + \frac{11\,\mathrm{e}}{24x^2} - \frac{7\,\mathrm{e}}{16x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0$, il existe une unique solution x_λ dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^4 + x^3 = \lambda^4$.
2. Soit $\lambda \geqslant 0$. Montrer que si $x_\lambda < 1$, alors $\lambda < \sqrt[4]{2}$. En déduire que :
$$x_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
puis que :
$$x_\lambda = \lambda + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(\lambda).$$
3. Montrer que :
$$x_\lambda = \lambda - \frac{1}{4} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(1).$$
4. Donner le terme suivant dans le développement asymptotique de x_λ en fonction de λ.

1. La fonction $x \mapsto x^4 + x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes et continues. Comme elle vaut 0 en 0, elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même d'après le théorème de la bijection. En particulier,
$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \geqslant 0, \text{ il existe unique } x_\lambda \geqslant 0 \text{ tel que } (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^3 = \lambda^4}.$$
2. Supposons $x_\lambda < 1$. Alors :
$$\lambda^4 = (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^3 < 1 + 1 < 2$$
d'où :
$$\boxed{\lambda < \sqrt[4]{2}.}$$

supposons que $\lambda \geqslant \sqrt[4]{2}$. Par contraposition, $x_\lambda \geqslant 1$ et donc :

$$\lambda^4 = (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^3 \leqslant (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^4 = 2(x_\lambda)^4.$$

On en déduit que :

$$x_\lambda \geqslant \frac{\lambda}{\sqrt[4]{2}} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où :

$$\boxed{x_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

En particulier, en composant à gauche la comparaison $\underset{\lambda\to+\infty}{o}(\lambda^3) = \underset{\lambda\to+\infty}{o}(\lambda^4)$ par x_λ, on a :

$$\underset{\lambda\to+\infty}{o}\big((x_\lambda)^3\big) = \underset{\lambda\to+\infty}{o}\big((x_\lambda)^4\big)$$

et donc :

$$\lambda^4 = (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^3 = (x_\lambda)^4 + \underset{\lambda\to+\infty}{o}\big((x_\lambda)^4\big) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} (x_\lambda)^4.$$

On conclut, en élevant cet équivalent à la puissance $\frac{1}{4}$ que $x_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \lambda$, c'est-à-dire

$$\boxed{x_\lambda = \lambda + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(\lambda).}$$

3. La relation $\lambda^4 = (x_\lambda)^4 + (x_\lambda)^3$ donne, pour tout $\lambda > 0$,

$$x_\lambda = \lambda\Big(1 + \frac{1}{x_\lambda}\Big)^{-1/4} = \lambda\Big(1 + \frac{1}{\lambda + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(\lambda)}\Big)^{-1/4}.$$

Il suffit alors de faire une composition de développements limités avec :

$$(1+u)^{-1/4} = 1 - \frac{u}{4} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(u)$$

pour obtenir :

$$\boxed{x_\lambda = \lambda - \frac{1}{4} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(1).}$$

4. On itère le procédé. On a :

$$x_\lambda = \lambda\Big(1 + \frac{1}{x_\lambda}\Big)^{-1/4} = \lambda\Big(1 + \frac{1}{\lambda - \frac{1}{4} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(1)}\Big)^{-1/4}$$

et toujours par calcul de développements limités, on obtient :

$$\boxed{x_\lambda = \lambda - \frac{1}{4} + \frac{3}{32\,\lambda} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).}$$

Remarque : en itérant, on peut obtenir un développement asymptotique de x_λ à l'ordre que l'on veut.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction **positive ou nulle** de classe $\mathscr{C}^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que si $f(a) \neq 0$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable en a.
2. On suppose que $f(a) = 0$.

(a) Montrer que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geqslant 0$.

(b) En déduire que $\sqrt{f}$ est dérivable en a si et seulement si $f''(a) = 0$.

1. Supposons $f(a) \neq 0$. La fonction f est dérivable en a et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en $f(a) > 0$, on en déduit par composition que

$$\boxed{\sqrt{f} \text{ est dérivable en } a.}$$

2. (a) Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, elle admet un $\mathrm{DL}_2(a)$:

$$f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{=0} + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

Si $f'(a) \neq 0$ alors f change de signe au voisinage de a, ce qui est absurde car f est positive ou nulle. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, cela montre que f admet un maximum local strict en a, ce qui est absurde également. Finalement,

$$\boxed{f'(a) = 0 \text{ et } f''(a) \geqslant 0}.$$

(b) On a, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{f''(a)}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\frac{f''(a)}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)}.$$

— Si $f''(a) = 0$, alors

$$\frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\underset{h\to 0}{o}(1)} = \underset{h\to 0}{O}(1)\sqrt{\underset{h\to 0}{o}(1)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que $\sqrt{f}$ est dérivable en a (et son nombre dérivé en a vaut 0).

— Si $f''(a) \neq 0$, alors

$$\frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h} \underset{h\to 0,\ h>0}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{f''(a)}{2}}$$

et

$$\frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h} \underset{h\to 0,\ h<0}{\longrightarrow} -\sqrt{\frac{f''(a)}{2}},$$

ce qui montre que $\frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h}$ n'a pas de limite quand $h \to 0$, c'est-à-dire que $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable en a.

Finalement,

$$\boxed{\sqrt{f} \text{ est dérivable en } a \quad \text{si et seulement si} \quad f''(a) = 0.}$$