Mathématiques I – TD$_7$

28-29 mars 2022

Exercice 1

Dans le plan, on considère les objets suivants :

D_1 : L'ensemble des points situés à la même distance des points $(0,0)$ et $(1,1)$

D_2 : La droite passant par le point $(0,2)$ et dirigée par le vecteur $(-2,1)$

$D_3 = \left\{ \left(t\,,\, \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \right)\,,\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Donner une équation cartésienne de D_1, D_2 et D_3.

D_1 : Notons $A = (0,0)$ et $B = (1,1)$. Soit $M = (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} M \in D_1 &\iff \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \\ &\iff \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ &\iff y = 1 - x \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{une équation cartésienne de } D_1 \text{ est } x + y - 1.}$$

D_2 : Notons $A = (0,2)$ et $\overrightarrow{v} = (-2,1)$. Soit $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque D_2 passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{v}$, on a

$$M \in D_2 \iff \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AM},\, \overrightarrow{v}\right) = 0 \iff -2\,(y-2) - 1\,x = 0 \iff x + 2y - 4 = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{une équation cartésienne de } D_1 \text{ est } x + 2y - 4 = 0.}$$

D_3 : Soit $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} M \in D_3 &\iff \exists t \in \mathbb{R},\; x = t \text{ et } y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ &\iff y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ &\iff -x + 2\,y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{une équation cartésienne de } D_3 \text{ est } -x + 2\,y + 1 = 0.}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de D_1 et de D_2, de D_1 et de D_3, de D_2 et de D_3.

Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$M \in D_1 \cap D_2 \iff \begin{cases} x + y - 1 & = 0 \\ x + 2\,y - 4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le point d'intersection de } D_1 \text{ et } D_2 \text{ est } (-2, 3).}$$

$$M \in D_1 \cap D_3 \iff \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + 2\,y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le point d'intersection de } D_1 \text{ et } D_3 \text{ est } (1, 0).}$$

$$M \in D_2 \cap D_3 \iff \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x + 2\,y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le point d'intersection de } D_2 \text{ et } D_3 \text{ est } A\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{4})}$$

3. Calculer $\|\overrightarrow{BC}\|$.

$$\boxed{\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}.}$$

4. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

Soit $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right]$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$. On a

$$\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u} = (-2,\ 1)$ (et de même sens). On a

$$\overrightarrow{CB} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{v} = (2,\ 1)$ (et de même sens). On a donc

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} = -\frac{3}{5}$$

On a donc

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Cela est vrai car on a choisi $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right]$. Il n'y a donc que deux antécédents possibles de $-\dfrac{3}{5}$ par la fonction cosinus dans l'intervalle $\left]-\pi, \pi\right]$.

De plus, comme $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = -4 < 0$, on a $\sin(\alpha) < 0$. Comme $\alpha \in [-\pi, \pi]$, on a $\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$, et donc $\alpha = -\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{une mesure de l'angle } \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \text{ est } -\arccos\left(-\frac{3}{5}\right).}$$

5. Donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et perpendiculaire à D_1.

Un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{u} = (1, -1)$. Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\iff \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{CM} \right\rangle = 0 \\ &\iff 1\left(x - \frac{5}{2}\right) + (-1)\left(y - \frac{3}{4}\right) = 0 \\ &\iff x - y - \frac{7}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \Delta \text{ est } x - y - \frac{7}{4} = 0.}$$

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé direct.

1. Soit $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 5)$ et $C(2, 3, 4)$. Calculer le projeté orthogonal $H = (x_H, y_H, z_H)$ d'un point $M = (u, v, w)$ sur le plan P qui passe par A, B et C.

Un vecteur normal à P est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-3, 3, 0)$ donc $(-1, 1, 0)$ est aussi normal à P. Une équation de P est donc de la forme $x - y + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Comme $A \in P$, on a donc $1 - 2 + d = 0$ donc $d = 1$. Une équation de P est donc

$$x - y + 1 = 0 \tag{1}$$

La perpendiculaire (D) à P passant par M a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan, par exemple $(1, -1, 0)$. Comme (D) passe par M, elle admet pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = u + t \\ y = v - t \\ z = w \end{cases} \tag{2}$$

L'intersection de (D) et de P est le projeté orthogonal recherché. Si (1) et (2) sont toutes les deux vérifiées, on a $u + t - v + t + 1 = 0$ donc $t = \dfrac{-u + v - 1}{2}$.
Conclusion :

$$\boxed{x_H = u + \frac{-u + v - 1}{2} = \frac{u + v - 1}{2},\ y_H = v - \frac{-u + v - 1}{2} = \frac{u + v + 1}{2} \text{ et } z_H = w}$$

2. Calculer la distance :

(a) du point $N = (1, 1, 1)$ au plan Q paramétré par $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = t + t' \\ z = 2 + t + t' \end{cases}$

Le plan Q est déterminé par le point $A = (1, 0, 2)$ et les deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$. La distance de N au plan Q est donc donnée par

$$\boxed{\frac{|\det(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}}$$

(b) du point $N' = (0, 2, 4)$ à la droite (D) d'équation $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$

On commence par chercher une représentation paramétrique de la droite (D). On a :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in (D) &\iff \begin{cases} x + y - 3z + 1 &= 0 \\ 2x + y - 5z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - 3z + 1 &= 0 \\ x - 2z - 1 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = & 2z + 1 \\ y = & -x + 3z - 1 = z - 2 \\ z = & z \end{cases}
\end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc donnée par

$$\begin{cases} x = & 2t + 1 \\ y = & -x + 3z - 1 = t - 2 \\ z = & t \end{cases}$$

Un point de la droite est donc $A = (1, -2, 0)$ et un vecteur directeur est $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$. La distance de N' à la droite est alors

$$\boxed{\frac{\|\overrightarrow{AN'} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{3}}$$

3. Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

Soit S une telle sphère. Elle a pour équation cartésienne

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Soit $(x, y, z) \in S$.

— Puisque S contient le premier cercle, on a $x^2 + y^2 = 9$ et $z = 0$ donc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 = R^2$$

Pour $x = 3$ et $y = 0$ (on a bien $3^2 + 0^2 = 9$), on trouve

$$(3 - a)^2 + b^2 + c^2 = R^2$$

Pour $x = -3$ et $y = 0$ (on a bien $(-3)^2 + 0^2 = 0$), on trouve

$$(-3 - a)^2 + b^2 + c^2 = R^2$$

Par différence, on obtient $(3-a)^2 = (-3-a)^2$ donc

$$3-a=-3-a \quad \text{ou} \quad 3-a=3+a$$

Le premier cas est impossible et le deuxième donne $a=0$.
En considérant $x=0$ et $y=3$, puis $x=0$ et $y=-3$, on a de même $b=0$.
En considérant $x=3$ et $y=z$, on trouve que $c^2+9=R^2$.

— Puisque S contient le deuxième cercle, on a $x^2+y^2=25$ et $z=2$ donc

$$x^2+y^2+(z-c)^2=R^2$$

donc

$$25+4-4c+R^2-9=R^2$$

d'où $c=5$. On en déduit que $R^2=c^2+9=34$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{l'équation de la sphère est } x^2+y^2+(z-5)^2=34.}$$

Exercice 3

1. On pose $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$ et $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$. Calculer $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ pour tout $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}^2$.

On peut appliquer la formule ou bien utiliser la règle de la main droite. On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}\\
&\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\\
&\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}\\
&\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\\
&\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}\\
&\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}\\
&\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}
\end{aligned}}$$

Vérifions avec Sympy.

```python
from sympy.vector import *
C = CoordSys3D("C") # déclare un système de coordonnées
C.i,C.j,C.k         # les vecteurs de la base
```

Résultat : $(\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}},\ \hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}},\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}})$

```python
cross(C.i,C.i)
```

Résultat : $\hat{0}$

```python
cross(C.j,C.j)
```

Résultat : $\hat{0}$

```
cross(C.k,C.k)
```

Résultat : $\hat{0}$

```
cross(C.i,C.j)
```

Résultat : $\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.j,C.k)
```

Résultat : $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.k,C.i)
```

Résultat : $\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.j,C.i)
```

Résultat : $-\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.k,C.j)
```

Résultat : $-\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.i,C.k)
```

Résultat : $-\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}}$

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2. A-t-on $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$?

On a

$$(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$$

et

$$\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \neq -\overrightarrow{i}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{en général, on n'a pas } (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}).}$$

Vérifions avec Sympy.

```
cross(cross(C.i,C.j),C.j)
```

Résultat : $-\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}}$

```
cross(C.i,cross(C.j,C.j))
```

Résultat : $\hat{0}$

Exercice 4

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On veut montrer qu'il y a équivalence entre :

(I) Un des trois vecteurs est une *combinaison linéaire* des deux autres vecteurs (par exemple, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$).

(II) Il existe un plan P tel que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dans la direction de P.

(III) il existe un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Quand ces conditions sont vérifiées, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires*.

1. Montrer que (III) implique (II).

On suppose qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Soit P le plan vectoriel de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dans la direction de P.

2. Montrer que (I) implique (III).

Supposons que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$ (les deux autres cas sont identiques).

- Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont colinéaires. Il suffit alors de prendre $\overrightarrow{n}$ un vecteur orthogonal à la droite engendré par ces vecteurs.
- Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. Posons $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$. Alors $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. De plus,

$$\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{n}, \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w} \rangle = \lambda.\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v} \rangle + \mu \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w} \rangle = 0 + 0 = 0$$

  donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

3. Montrer que (II) implique (I).

On suppose qu'il existe un plan P tel que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dans la direction de P.

- Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v}$.
  - Si $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{w}$, alors $\overrightarrow{v} = 0.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
  - Si $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{w} = 0.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ ou à $\overrightarrow{w}$, le même raisonnement montre que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ ou à $\overrightarrow{w}$.
- On suppose que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires deux-à-deux.

  On veut écrire $\overrightarrow{u}$ sous la forme $\lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$. Pour cela, il faut trouver λ et μ. On va faire un raisonnement par analyse-synthèse.

  - *Dans la partie analyse, on suppose que $\overrightarrow{u}$ a cette forme, et on trouve des valeurs possibles de λ et μ.*
  - *Dans la partie synthèse, on ne suppose plus que $\overrightarrow{u}$ a cette forme mais on vérifie que les valeurs trouvées dans la partie analyse marchent.*

  - Analyse : on suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$. Alors

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \mu.\overrightarrow{w} \wedge v \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$$

Attention ! On ne peut PAS diviser par un vecteur, on ne peut pas écrire

$$\cancel{\lambda = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}}{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}}}$$

On peut seulement dire que « λ est un nombre réel tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ ». Dans la partie Synthèse, on ne suppose plus qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$. On doit donc :

— *montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$, et un nombre réel μ tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \mu.\overrightarrow{w} \wedge v$;*

— *montrer que l'égalité $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$ est vraie.*

— Synthèse : puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de P, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est non nul et est un vecteur normal à P (d'après le cours). De même, les vecteurs $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ sont non nuls et sont des vecteurs normaux à P. D'après le cours, ces vecteurs sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\mu.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$$

Pour montrer une égalité entre deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, il est parfois plus facile de montrer que leur différence $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ est nulle. Pour montrer que $\overrightarrow{t}$ est nul, on peut alors essayer de montrer que :

— *$\overrightarrow{t}$ est colinéaire et orthogonal à un vecteur non nul ;*

— *$\overrightarrow{t}$ est colinéaire à deux vecteurs non colinéaires ;*

— *$\overrightarrow{t}$ est colinéaire à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$;*

— *$\overrightarrow{t}$ est orthogonal à lui-même ;*

— *$\overrightarrow{t}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$;*

— *etc.*

Posons $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} - \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$. Alors

$$\overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} - \mu.\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = -\mu.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} - \overrightarrow{0} - \mu.\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

et

$$\overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} - \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} + \mu.\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} - \lambda.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit que $\overrightarrow{t}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Comme $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$ donc

$$\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Finalement, un des trois vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres vecteurs

Exercice 5

Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b} \right\}.$$

— Premier cas : $\vec{b} = \vec{0}$.

—
- Si $\vec{a} = \vec{0}$, on a, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0} = \vec{b}$$

Conclusion :

si $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{b} = \vec{0}$, alors $E = \mathbb{R}^3$.

- Si $\vec{a} \neq \vec{0}$, alors pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\vec{u} \in E \iff \vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{a}$$

Comme $\vec{a}$ est non nul, on obtient :

Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} = \vec{0}$, alors $E = \{\lambda.\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (la droite vectorielle engendrée par $\vec{a}$).

— Deuxième cas : $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- S'il existe $\vec{u}$ tel que $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$, alors $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ donc :

si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux, alors $E = \emptyset$.

- De même :

si $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$, alors $E = \emptyset$.

— On suppose maintenant que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux et tous les deux non nuls. Notons P le plan orthogonal à $\vec{b}$.

- **Analyse :** soit $\vec{u} \in E$. Comme $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$, $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc $\vec{u} \in P$. Notons $\vec{u_2}$ la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle D incluse dans P et orthogonale à $\vec{a}$. On a alors

$$\vec{a} \wedge \vec{u_2} = \vec{b}$$

Par la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{u_2}) = \langle \vec{a}, \vec{u_2} \rangle \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{u_2} = -\|\vec{a}\|^2.\vec{u_2}$$

Comme $\vec{a} \neq \vec{0}$, on a $\|\vec{a}\| \neq 0$ donc

$$\vec{u_2} = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{b} \wedge \vec{a}$$

Comme $\vec{u} \in P$ et $\vec{u_2}$ est la projection de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle D incluse dans P et orthogonale à $\vec{a}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = u_2 + \lambda.\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{b} \wedge \vec{a} + \lambda.\vec{a}$$

- **Synthèse :** Posons

$$\vec{u_0} = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{b} \wedge \vec{a}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\vec{u} = \vec{u_0} + \lambda.\vec{a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u_0}+\lambda.\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a}\\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a})\\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a})\wedge a\\ &= \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{u_0}+\lambda.\overrightarrow{a}\in E$.

La partie Analyse montre que $E\subset\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}+\lambda.\overrightarrow{a},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

La partie Synthèse montre que $\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}+\lambda.\overrightarrow{a},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}\subset E$.

Conclusion :

si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux et non nuls, alors $E=\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}+\lambda.\overrightarrow{a},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 6

Déterminer le centre C et le rayon R de la sphère S circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes :

$$x+y+z=0,\quad x+y-z=2,\quad x-y+z=4\quad\text{et}\quad -x+y+z=6$$

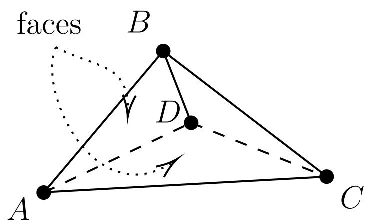


FIGURE 1 – (on cherche la sphère qui passe par les 4 points A, B, C et D).

Calculons les coordonnés des quatre sommets A, B, C, D du tétraèdre. Notons P_1, P_2, P_3 et P_4 les quatre plans de l'énoncé. Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$M\in P_1\cap P_2\cap P_3\iff\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-z=2\\x-y+z=4\end{cases}\iff\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=-1\end{cases}$$

$$M\in P_1\cap P_2\cap P_4\iff\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-z=2\\-x+y+z=6\end{cases}\iff\begin{cases}x=-3\\y=4\\z=-1\end{cases}$$

$$M\in P_1\cap P_3\cap P_4\iff\begin{cases}x+y+z=0\\x-y+z=4\\-x+y+z=6\end{cases}\iff\begin{cases}x=-3\\y=-2\\z=5\end{cases}$$

$$M \in P_2 \cap P_3 \cap P_4 \iff \begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+y+z=6 \\ x-y+z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$$

Les sommets du tétraèdre sont donc $A=(3,-2,1)$, $B=(-3,4,-1)$, $C=(-3,-2,5)$ et $D=(3,4,5)$.

Montrons qu'il existe une unique sphère passant par ces 4 points. Soit $C=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $R \geqslant 0$. Notons $S_{C,R}$ la sphère de centre C et de rayon R. On a

$$\begin{aligned}
(A,B,C,D) \in (S_{C,R})^4 &\iff \|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = R \\
&\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{CA}\|^2 = R^2 \\ \|\overrightarrow{CB}\|^2 = R^2 \\ \|\overrightarrow{CC}\|^2 = R^2 \\ \|\overrightarrow{CD}\|^2 = R^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{CA}\|^2 = R^2 \\ \|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 \\ \|\overrightarrow{CC}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 \\ \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = R^2 \\ (x+3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2 = (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 \\ (x+3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2 = (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 \\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2 = (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 \end{cases} \\
&\iff (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = R^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \\
&\iff (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = R^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \\
&\iff (0-3)^2+(1+2)^2+(2+1)^2 = R^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \\
&\iff R = 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la sphère de centre } (0,1,2) \text{ et de rayon } 3\sqrt{3} \text{ est l'unique sphère passant par } A,\ B,\ C \text{ et } D.}$$

Exercice 7

Soient A B et C trois points de $\mathbb{R}^3$ non alignés.

1. Soit α, β et γ trois nombres réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Montrer que le barycentre G de $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ est situé sur le plan (ABC).

Par définition du barycentre, on a

$$\forall M \in (ABC), \quad (\alpha+\beta+\gamma).\overrightarrow{GM} = \alpha.\overrightarrow{AM} + \beta.\overrightarrow{BM} + \gamma.\overrightarrow{CM}$$

donc

$$\alpha.\overrightarrow{GA} = \beta.\overrightarrow{BG} + \gamma.\overrightarrow{CG}$$

d'où

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} = \beta.(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}) + \gamma.(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GA}) = \beta.\overrightarrow{BA} + \gamma.\overrightarrow{CA}$$

On a donc

$$\overrightarrow{GA} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{CA}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est situé dans le plan } (ABC).}$$

2. Montrer que le plan (ABC) est égal à l'ensemble des barycentres des points A, B et C, c'est-à-dire l'ensemble

$$(ABC) = \left\{\mathrm{Bar}((A,a),\,(B,b),\,(C,c)),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a+b+c \neq 0\right\}$$

Notons $E = \left\{\mathrm{Bar}((A,a),\,(B,b),\,(C,c)),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a+b+c \neq 0\right\}$.
D'après la question précédente, E est inclus dans le plan (ABC).
Soit $M \in (ABC)$. Montrons que $M \in E$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires donc il existe des nombres réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC}$$

donc

$$\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AM} + \lambda.\overrightarrow{MB} + \mu.\overrightarrow{AM} + \mu.\overrightarrow{MC}$$

et donc

$$(1-\lambda-\mu).\overrightarrow{AM} + \lambda.\overrightarrow{BM} + \mu.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$$

Comme $1-\lambda-\mu+\lambda+\mu = 1 \neq 0$ alors

$$M = \mathrm{Bar}\left((A,\,1-\lambda-\mu),\,(B,\,\lambda),\,(C,\,\mu)\right) \in E$$

On en déduit que le plan (ABC) est inclus dans E
Par double inclusions, on a montré que :

$$\boxed{(ABC) = \left\{\mathrm{Bar}((A,a),\,(B,b),\,(C,c)),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a+b+c \neq 0\right\}.}$$

Exercice 8

1. Soit $PQRS$ un parallélogramme. Écrire S comme un barycentre de P, Q et R.

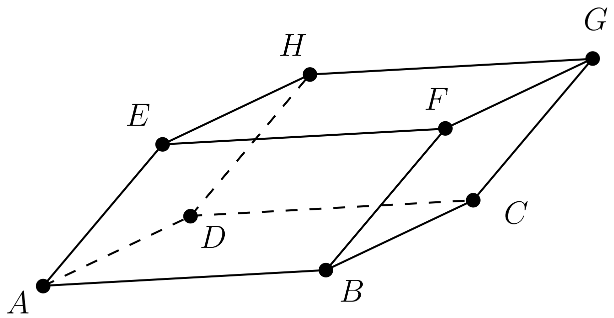
Par définition d'un parallélogramme, on a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Comme $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}$, on en déduit

$$\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{0}$$

Comme $1-1+1 = 1 \neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{S \text{ est le barycentre de } \{(P,1),(Q,-1),(S,1)\}.}$$

2. Soit A, B, D, E quatre points non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ et $ABCDEFGH$ le parallélépipède associé. Démontrer que la droite (AG) coupe le plan (BDE) en un point I tel que
   - I est le centre de gravité du triangle BDE ;
   - I est le point du segment $[AG]$ tel que $AI = \dfrac{1}{3}AG$.



Notons I le barycentre de $(A,2)$ et $(G,1)$. Alors I est le point du segment $[AG]$ tel que $AI = \dfrac{1}{3}AG$. Par associativité du barycentre, c'est aussi le barycentre de $\{(A,1),(A,1),(G,1)\}$.

Comme $BFEA$ est un parallélogramme, d'après la question précédente A est le barycentre de $\{(B,1),(F,-1),(E,1)\}$. Comme $1-1+1=1$, par associativité du barycentre, I est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(F,-1),(E,1),(G,1)\}$.

Comme $AFGD$ est un parallélogramme, d'après la question précédente, D est le barycentre de $\{(A,1),(F,-1),(G,1)\}$. Comme $1-1+1=1$, par associativité du barycentre, I est le barycentre de $\{(D,1),(B,1),(E,1)\}$.

Conclusion :

$$\boxed{I \text{ est le centre de gravité du triangle } BDE.}$$

D'après l'exercice précédent, c'est un point du plan (BDE). Par définition de I, c'est donc le point d'intersection entre la droite (AG) et le plan (BDE).

Exercice 9

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points de $\mathbb{R}^3$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note G_k l'isobarycentre de l'ensemble de points $\{A_i \mid i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}\}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_kG_k} = \overrightarrow{0}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\overrightarrow{A_kG_k} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \overrightarrow{A_kA_i}$$

En sommant ces relations pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_k G_k} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \overrightarrow{A_k A_i} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{(i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq k}}^{n} \overrightarrow{A_k A_i} \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{\substack{(j,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \\ j < \ell}}^{n} \overrightarrow{A_j A_\ell} + \sum_{\substack{(j,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \\ j < \ell}}^{n} \overrightarrow{A_\ell A_j} \right) \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$