Suites et Séries – TD$_8$

31 octobre - 1 novembre 2021

Exercice 1. (Nature de séries à termes quelconques)
Donner la nature de la série $\sum_n u_n$, avec :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$
2. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$
3. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
4. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1!-2!+3!-\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^s}$ où $s \in \mathbb{C}$

Exercice 2. (Avec calcul de somme)

1. Montrer que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.
2. En utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
3. Montrer que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. (Produit de Cauchy)

1. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même diverge.
2. Pour un nombre complexe z tel que $|z|<1$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$. (Il faut d'abord justifier l'existence de ces deux sommes).

Exercice 4. (Exercice de synthèse)

On considère la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

1. Étudier, suivant la valeur de α, la nature de la série $\sum_n u_n$.
2. Pour $\alpha = 1$, donner un équivalent de $R_n(u)$.

Exercice 5. (Sommation par paquets)

Étudier la nature de la série $\sum_n u_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + \sin(2n\pi/3)}.$$

Indication : faire une sommation par paquets de longueur 3.

Exercice 6. (Une inégalité célèbre)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

   Quel est le nom de cette inégalité ?

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictements positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

3. Étudier le cas où $\sum_n u_n$ diverge.

Exercice 7. (Famille sommable)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la famille suivante n'est pas sommable :

$$(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}, \; a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2} \text{ si } n \neq p \text{ et } a_{n,n} = 0$$

2. Montrer l'existence et calculer la valeur de la somme :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p + q^2)(p + q^2 + 1)}$$

3. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$ n'est pas sommable.