Topologie et Calcul différentiel – TD 6: Topologie : Fonctions continues, ensembles compacts

05 mai 2023

Le but de ce TD est d'apprendre de savoir manier les fontions continues pour montrer que des ensembles sont ouverts, fermés, compacts, et d'utiliser les propriétés basiques sur les compacts.

Exercices sur les fonctions continues

Exercice 1 :

Soit (E, d) un espace métrique et f une application K-lipschitzienne définie sur une partie non vide A de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour tout $x \in E$

$$g(x) = \inf_{a \in A} (f(a) + K\, d(x, a))$$

on définit un prolongement K-lipschitzien de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et E le sous-espace affine de $\mathscr{C}$ formé des fonctions f de $\mathscr{C}$ telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

On norme $\mathscr{C}$ par $\| \|_\infty$.

1. Montrer que E est fermé, de codimension finie à déterminer.
2. Montrer que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

Exercice 3 :

$\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fermé ou non.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y \leqslant 2\}$;
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y < 2\}$;
3. $F_3 = \{x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant 1 - x\}$.

Exercices sur les ensembles compacts

Exercice 4 :

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1]^2; \mathbb{R})$. Montrer que

$$m(y) = \max_{x \in [0,1]} f(x, y), \text{ existe et est continue.}$$

Exercice 5 :

1. Soit (E,d) un espace métrique.
   (a) Soit K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrer l'existence de $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1,x_2) = d(K_1,K_2) = \inf_{x\in K_1, y\in K_2} d(x,y)$.
   (b) Soit K un compact de E et F un fermé de E. Si $K \cap F = \emptyset$, montrer que $d(K,F) \neq 0$. Donner un contre-exemple dans le cas où K est seulement fermé.
2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $||.||_2$.
   (a) Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que
   $$\lim_{||x||\to+\infty,\, x\in F} f(x) = +\infty.$$
   Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$.
   (b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Montrer l'existence de $x \in K$ et $y \in F$ tel que $d(x,y) = d(K,F)$.
   Donner un contre-exemple dans le cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 6 :

Dans chacun des cas suivants, dire si la partie A est compacte.

1. Dans $(\mathbb{R}^3, ||.||_\infty)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 < 1\}$.
2. Dans $(\mathbb{R}^3, ||.||_2)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z \in [1,2] \cup \{3\}\}$.
3. Dans $(M_3(\mathbb{R}), |||.|||_\infty)$, $A = GL_3(\mathbb{R})$.
4. Dans $(M_3(\mathbb{R}), |||.|||_\infty)$, $A = SO_3(\mathbb{R})$.
5. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, $A = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0,10]\!]\})$
6. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, $A = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\}) \cap S(0_E,1)$
7. Dans $(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, $A = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0,10]\!]\}) \cap S(0_E,1)$

Exercice 7 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(A,B) \subset E^2$ et pour tout $x_0 \in E$, on note

$$A+B = \{a+b,\ a\in A,\ b\in B\} \qquad \text{et } x_0 + A = \{x_0 + a,\ a \in A\}$$

1. Montrer que $A+B$ est compact lorsque A et B sont compacts.
2. Montrer que $A+B$ est fermé dans E lorsque A est compact et B fermée dans E.
3. Montrer que lorsque A et B sont fermés, on ne peut rien dire.

Exercice 8 :

On considère $E = [0,1]^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]\}$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on définit

$$d_E(u,v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}.$$

1. Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E (c'est donc une suite de suites réelles bornées). Soit $u \in E$.

(a) On suppose que $u^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{d_E} u$. Montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0}^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} u_{n_0}$.

(b) Réciproquement, on suppose que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0}^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} u_{n_0}$. Montrer que $u^{(k)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{d_E} u$.

2. Montrer que E est compact.

Exercice 9 :

Soit (K, d_K) un espace métrique. Pour $(x, y) \in K^2$, on définit $\widetilde{d_K}(x, y) = \min(1, d_K(x, y))$.

1. Montrer que $\widetilde{d_K}$ est une distance sur K telle que : $\forall (x, y) \in K^2, \widetilde{d_K}(x, y) \leqslant 1$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ et $l \in K$. Montrer que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_K} l \iff x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\widetilde{d_K}} l\,.$$

3. Montrer que si (K, d_K) est compact, alors $(K, \widetilde{d_K})$ est compact.

Partie 2

Dans cette partie, (K, d_K) un espace métrique **compact**.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il n'existe pas de suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que : pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ distincts, $d_K(y_p, y_q) \geqslant \varepsilon$.

(b) En déduire qu'il existe un ensemble **fini** $A_\varepsilon \subset K$ tel que $K \subset \bigcup_{a\in A_\varepsilon} BO(a, \varepsilon)$.

2. Montrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ est dense dans K.
3. Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de K qui est dénombrable et dense dans K.

Partie 3

Dans cette partie, (K, d_K) un espace métrique **compact** tel que $\forall (x, y) \in K^2, d_K(x, y) \leqslant 1$. On considère $E = [0, 1]^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]\}$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on définit

$$d_E(u, v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}.$$

On admet que d_E est une distance sur E.
D'après la partie 2, il existe une partie $A \subset K$ dénombrable et **dense** dans K. Comme A est dénombrable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. On définit alors l'application

$$f : \begin{array}{ccc} (K, d_K) & \to & (E, d_E) \\ x & \mapsto & (d_K(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathscr{E}$ tel que : pour toute distance d sur $\mathscr{E}$, l'espace métrique $(\mathscr{E}, d)$ n'est pas compact.

Exercice 10 :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit K un compact non vide de E.
Soit U un ouvert de E tel que $K \subset U$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, K)$ est continue sur E.
2. Montrer que :
$$\exists r > 0,\ \forall x \in K,\ BO(x, r) \subset U.$$

Exercice 11 :

Soit (K, d) un compact non vide. On pose $E = \mathscr{C}^0(K, \mathbb{R})$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K, on définit $||.||_a : E \to \mathbb{R}$ par :
$$||f||_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n}.$$

1. Justifier que pour tout $f \in E$, $||f||_a$ est bien défini.
2. Montrer que $||.||_a$ est une norme sur E si et seulement si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans K.
3. On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha \cdot N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta \cdot N_1(x)$. Montrer que si a et b sont deux suites denses dans K telles que
$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$$
alors les normes $||.||_a$ et $||.||_b$ ne sont pas équivalentes

Exercice 12 :

Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y, \qquad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que nous noterons α.
2. Soit x_0 un point quelconque de E. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
3. Donner un contre-exemple dans le cas où E est un espace vectoriel normé.

Exercice 13 :

Pour un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on pose :
$$\phi([a, b]) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[a + 2\,\frac{b-a}{3}, b\right].$$

Et pour une réunion finie de segments disjoints :
$$\phi\left(\cup_{k=1}^{p} I_k\right) = \cup_{k=1}^{p} \phi(I_k).$$

On définit alors la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $[0,1]$ par :

$$K_0 = [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = \phi\left(K_n\right).$$

On a donc :

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \text{ et } K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

1. Montrer que si $n \geq 1$, alors K_n est la réunion des 2^n segments de la forme :

$$\left[a_n, a_n + \frac{1}{3^n}\right] \text{ où } a_n \in \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_k}{3^k},\ \text{où } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \epsilon_k \in \{0,2\}\right\}.$$

2. On pose :

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k},\ \text{où } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \{0,2\}\right\}.$$

   Montrer que K est un compact non vide.
3. Quel est son intérieur ? Dans $\mathbb{R}$, bien sûr !
4. Quels sont les points isolés de K ?
5. K est-il dénombrable ?

Exercice 14 :

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni des deux normes :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_{\infty,[0,1]} \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_{1,[0,1]} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Existe-t-il α et/ou β dans $\mathbb{R}_+^*$, tels que :

$$\forall f \in E,\ \alpha \times \|f\|_{1,[0,1]} \leq \|f\|_{\infty,[0,1]} \leq \beta \times \|f\|_{1,[0,1]}\ ?$$

   (On justifiera les existences ou non existences de α et β).
2. Montrer que tout fermé de E pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$ est aussi fermé dans E pour la norme $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$.
3. Montrer que tout compact de E pour la norme $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$ est aussi compact pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$.
4. Donner un exemple de sous-ensemble de E qui est fermé pour $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$ mais pas pour $\|\ \|_{1,[0,1]}$. Justifier.
5. Donner une exemple de sous-ensemble de E qui est compact pour $\|\ \|_{1,[0,1]}$ mais pas pour $\|\ \|_{\infty,[0,1]}$. Justifier.