

# Chapitre 1

## ÉQUATIONS DE MAXWELL

### A RAPPELS

#### A.1 Rappels sur les distributions de charge et de courant

##### A.1.1 Distributions volumiques

Les distributions de charge sont représentées par **la densité volumique de charge** :  $\rho(M, t)$  : la charge contenue par un petit volume  $d\tau_M$  au voisinage du point  $M$  à l'instant  $t$  est donnée par

$$dQ_M = \rho(M, t) d\tau_M.$$

De même un courant réparti en volume est caractérisé par un **vecteur densité (volumique) de courant** :  $\vec{J}(M, t)$  : l'intensité qui traverse un élément de surface  $dS_M$  de normale  $\vec{n}_M$  au voisinage du point  $M$  à l'instant  $t$  est

$$dI_M = \vec{J}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M.$$

Ces distributions sont dites **stationnaires** si, en tout point, elles sont indépendantes du temps :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}(M, t) = \vec{0}.$$

##### A.1.2 Conservation de la charge

Nous avons montré précédemment que le principe de **conservation de la charge**, qui énonce que la charge électrique d'un système fermé est indépendante du temps, entraîne une relation différentielle entre les distributions locales de charge et de courant :

$$\boxed{\text{div } \vec{J}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.}$$

---

**Activité 1-1 :** Retrouver ce résultat et vérifiez votre démonstration dans les notes du cours Électromagnétisme 1.

---

De ce fait, les distributions de charge et de courant ne peuvent être fixées arbitrairement, indépendamment l'une de l'autre.

### A.1.3 Distributions de faible dimensionnalité

Certaines situations réelles sont plus commodément décrites par des distributions localisées sur une surface, une ligne ou réduites à un point. Les densités de charge et le vecteur densité de courant associées ont été décrites dans le cours d'électromagnétisme 1.

De telles distributions peuvent toujours être représentées comme des limites de distributions volumiques. Par exemple, les distributions volumiques statiques

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{|z|}{\delta}\right); \quad \vec{J}(x, y, z) = J_0 \exp\left(-\frac{|z|}{\delta}\right) \vec{e}_x,$$

sont des distributions localisées au voisinage du plan  $z = 0$ . Si  $|z|$  est plus grand que quelques  $\delta$ , les densités sont négligeables. À une échelle de distance beaucoup plus grande que  $\delta$ , les deux densités seront plus commodément représentées par des densités localisées sur le plan  $z = 0$ , associées aux densités surfaciques

$$\sigma(x, y) = \rho_0 \times 2\delta \quad \text{et} \quad \vec{J}_s(x, y) = J_0 \times 2\delta \vec{e}_x.$$

Mathématiquement, cette description introduit des discontinuités dans les champs de distribution. Nous étudierons les méthodes qui permettent de traiter ces difficultés mathématiques.

## A.2 Rappels des propriétés des champs statiques

L'électromagnétisme est la théorie qui s'intéresse aux interactions entre particules chargées. L'étude de l'électrostatique et de la magnétostatique a montré que ces interactions peuvent être décrites à l'aide :

- Du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  lorsqu'on étudie les interactions entre charges immobiles ; la force électrique subie par une charge test  $q_t$  placée en un point  $M$ , de la part de charges qui sont elles-mêmes immobiles s'exprime à partir du champ électrostatique par  $\vec{F} = q_t \vec{E}(M)$ .
- Du champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  lorsqu'on étudie les interactions d'une charge avec une distribution statique de courant électrique ; la force électrique subie par une charge test  $q_t$  de vitesse  $\vec{v}$  placée en un point  $M$ , de la part de courants électriques indépendants du temps s'exprime à partir du champ magnétostatique par  $\vec{F} = q_t \vec{v} \wedge \vec{B}(M)$ .

Nous avons vu que toutes les propriétés des champs électrostatiques et magnétostatiques peuvent être déduite des équations locales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}(M) &= \vec{0}; \quad \text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} && \text{équations locales de l'électrostatique} \\ \text{div} \vec{B}(M) &= 0; \quad \text{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) && \text{équations locales de la magnétostatique} \end{aligned}$$

Historiquement, les phénomènes électrostatiques et magnétostatiques ont été étudiés séparément ; ils appartenait à des domaines d'étude disjoints. Ce n'est qu'au début du dix-neuvième siècle, essentiellement avec les travaux de Faraday (Michael Faraday, 1791–1867) que l'on s'est rendu compte que les phénomènes électriques et magnétiques étaient reliés entre eux si l'on étudie des phénomènes dépendant du temps. Faraday a en effet montré qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique (c'est-à-dire qu'une charge placée

dans un champ magnétique dépendant du temps est soumise à une force proportionnelle à sa charge, qui vient s'ajouter à la force magnétique et qui existe même si cette charge est immobile dans le champ).

Il a fallu attendre 1864 pour que Maxwell (James Clerk Maxwell, 1831–1879) donne une présentation unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, valable y compris dans les situations dépendant du temps. On ne saurait surévaluer l'importance de ces travaux, au plan théorique comme au plan pratique ; nous allons y consacrer près des deux tiers des cours de ce semestre.

Plutôt que d'adopter une présentation chronologique, où l'ordre de présentation suit l'histoire – pourtant passionnante – du développement de la théorie, nous choisissons de prendre comme point de départ la théorie de Maxwell, dans une formulation très proche de sa version finale. Nous verrons dans ce cours la très grande variété de phénomènes que ces quelques équations permettent d'expliquer, et comment elles ont profondément modifié notre vision du monde.

## B POSTULATS FONDAMENTAUX DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

### B.1 Force de Lorentz – Champ électromagnétique

On étudie, dans un référentiel  $(R)$ , une charge ponctuelle  $q_t$  située au point  $M$  à l'instant  $t$  au voisinage d'une distribution de charge et de courant de densités  $\{\rho(P, t); \vec{J}(P, t)\}$ . (figure 1.1)

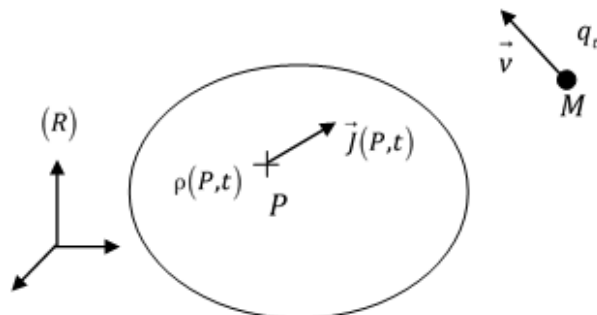


FIGURE 1.1 – Force de Lorentz

La charge  $q_t$  est soumise de la part de la distribution à une force qui s'écrit, par définition des *champs électrique*  $\vec{E}(M, t)$  et *magnétique*  $\vec{B}(M, t)$  :

$$\boxed{\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} q_t(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t)).}$$

Cette force est la **force de Lorentz**.

L'ensemble  $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$  s'appelle le **champ électromagnétique créé** par la distribution de **sources**  $\{\rho(P, t); \vec{J}(P, t)\}$ .

Le champ  $\vec{E}(M, t)$  s'exprime en  $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ , et le champ  $\vec{B}(M, t)$  en Tesla (T).

## B.2 Équations de Maxwell

### B.2.1 Énoncé

En 1864, Maxwell, énonce les propriétés générales du champ électromagnétique classique. Il postule que le champ électromagnétique et les densités de charge et de courant vérifient localement l'ensemble des 4 équations suivantes, dites *équations de Maxwell* :

$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$	(I) : <i>équation de conservation du flux magnétique</i>
$\operatorname{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$	(II) : <i>équation de Maxwell-Faraday</i>
$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$	(III) : <i>équation de Maxwell-Gauss</i>
$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left( \vec{J}(M, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right)$	(IV) : <i>équation de Maxwell-Ampère</i>

#### Remarques :

- Dans ces équations,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont deux constantes fondamentales. Ce sont les mêmes que celles qui ont été introduites dans le cours sur les champs statiques. Rappelons que l'on a, exactement, par convention du système international d'unités  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ . Par ailleurs  $\varepsilon_0 \simeq 8,84 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ .
- La quantité  $\vec{J}_D(M, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$  est appelée (pour des raisons historiques) densité de **courant de déplacement**. Elle est homogène à une densité volumique de courant et s'exprime donc en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ .
- Les équations sont des équations locales, valables en tout point  $M$  et à chaque instant. Nous verrons une formulation intégrale équivalente de ces équations un peu plus loin.

### B.2.2 Couplages

L'examen des équations de Maxwell fait apparaître deux types de couplages :

- les couplages entre les deux champs, électrique et magnétique. Les variations du champ magnétique dépendent de celles du champ électrique, et réciproquement.
- les couplages de ces champs avec les champs de distribution de charge et de courant  $\vec{J}(M, t), \rho(M, t)$  (qui apparaissent seulement dans les équations III et IV).

Les champs  $\{\vec{J}(M, t); \rho(M, t)\}$  sont *conjointement*  *sources des champs électriques et magnétiques*.

Ces différents couplages montrent que c'est bien *l'ensemble* des deux champs  $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$  et des distributions de sources  $\{\rho(M, t); \vec{J}(M, t)\}$  qui doivent, en général, être considérées.

Notons que les équations (I) et (II) ne font pas intervenir les sources. Ces équations sont parfois appelées *équations de structure* du champ électromagnétique, puisqu'elles impliquent des relations entre les champs électriques et magnétiques, indépendamment des sources qui donnent naissance à ces champs.

### B.2.3 Linéarité - Principe de superposition

L'ensemble des 4 équations de Maxwell est linéaire. Les solutions vérifient donc le principe de superposition.

Soit une distribution  $\{\rho_1(M, t); \vec{J}_1(M, t)\}$  donnant naissance à un champ  $\{\vec{E}_1(M, t); \vec{B}_1(M, t)\}$  et une distribution  $\{\rho_2(M, t); \vec{J}_2(M, t)\}$  donnant naissance à un champ  $\{\vec{E}_2(M, t); \vec{B}_2(M, t)\}$ .

Comme les équations de Maxwell sont linéaires, la combinaison linéaire :

$$\{\lambda_1 \rho_1(M, t) + \lambda_2 \rho_2(M, t); \lambda_1 \vec{J}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{J}_2(M, t)\}$$

donne alors naissance au champ électromagnétique :

$$\{\lambda_1 \vec{E}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{E}_2(M, t); \lambda_1 \vec{B}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{B}_2(M, t)\}$$

### B.2.4 Conservation de la charge

Prenons la divergence de l'équation (IV). La divergence d'une rotationnel étant toujours nulle, il vient :

$$0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J}(M, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}(M, t).$$

Or d'après l'équation (III), on a :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

on a donc nécessairement :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.}$$

La relation locale de conservation de la charge peut donc être déduite des équations de Maxwell. On peut dire que ce principe fondamental de conservation est une conséquence de ces équations.

**Remarque historique :** En utilisant le langage et les notations d'aujourd'hui, on peut dire qu'avant Maxwell, on pensait que l'équation de Maxwell-Ampère s'écrivait simplement comme en magnétostatique :

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{J}(M, t),$$

sans le terme de densité de courant de déplacement  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Les équations du champ n'étaient donc pas compatibles avec le principe de conservation de la charge : c'est pour assurer cette compatibilité que Maxwell a été amené à introduire ce terme supplémentaire, sans aucune indication expérimentale de la nécessité de ce terme. Nous verrons cependant que l'équation

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{J}(M, t)$$

est une bonne approximation dans les cas pratiques où il existe des sources de champ magnétique dépendant lentement du temps, ce qui explique qu'elle ait pu paraître satisfaisante à une époque où l'on ne savait pas produire de façon contrôlée des champs variant très rapidement avec le temps. Nous y reviendrons.

### B.2.5 Le cas statique

Dans la mesure où les champs et les densités de courant sont indépendantes du temps, toutes les dérivées temporelles sont nulles et les équations de Maxwell se réduisent aux équations déjà rencontrées dans le cours “électromagnétisme 1” :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B}(M) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M) &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{E}(M) &= \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M) &= \mu_0 \vec{J}(M)\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, on assiste à un découplage des équations.

- Les champs électrique et magnétique sont maintenant indépendants l'un de l'autre.
- Le champ électrostatique ne dépend que de la distribution de charge.
- Le champ magnétostatique ne dépend que de la distribution de courant.

---

**Activité 1-2 :** À titre de révisions, retrouver rapidement à l'aide du théorème de Gauss, les champs électriques fondamentaux suivants : boule uniformément chargée, plan infini uniformément chargé, cylindre infini uniformément chargé.

**Activité 1-3 :** De même, retrouver rapidement à l'aide du théorème d'Ampère les champs magnétostatiques fondamentaux suivants : fil cylindrique infini parcouru par un courant uniformément réparti, nappe plane infinie avec densité de courant surfacique uniforme, solénoïde infini.

---

## C SYMÉTRIES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'analyse complète et rigoureuse des symétries du champ électromagnétique dans le cas général est menée en détail dans l'appendice 5, en fin de ce document.

Nous citons ici sans démonstration les résultats essentiels relatifs aux distributions présentant un plan de symétrie ou d'anti-symétrie.

Ces règles sont très faciles à retenir puisque ce sont les mêmes que celles rencontrées dans les cas électrostatique et magnétostatique. Simplement, il ne faut pas oublier que dans le cas général dépendant du temps, c'est la symétrie de l'ensemble des sources, densité de courant et densité de charge que l'on doit considérer, aussi bien pour le champ magnétique que pour le champ électrique.

### C.1 Sources présentant un plan de symétrie

#### C.1.1 Définition

Nous considérons une source constituée de charge et de courant de distributions  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$ . Nous dirons que cette distribution possède un plan de symétrie  $\Pi$  si l'on a, **à chaque instant**  $t$  :

$$\forall P, \forall t : \quad \begin{cases} \rho(S_\Pi(P), t) = \rho(P, t) \\ \vec{J}(S_\Pi(P), t) = S_\Pi(\vec{J}(P, t)) \end{cases}$$

Dans cette équation nous avons noté :

- $S_{\Pi}(P)$  le point symétrique de  $P$  relativement au plan  $\Pi$
- $S_{\Pi}(\vec{V})$  le vecteur symétrique d'un vecteur  $\vec{V}$  donné relativement au plan  $\Pi$ .

Un exemple de cette situation est schématisé sur la figure 1.2, où les densités de charge sont représentées par une échelle de couleur.

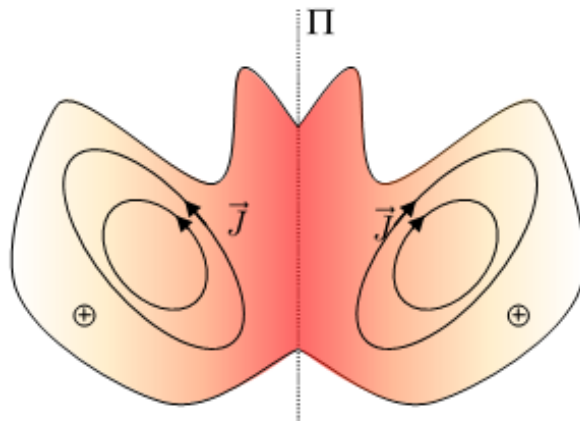


FIGURE 1.2 – Distributions présentant un plan de symétrie

### C.1.2 Symétries du champ électromagnétique

Nous admettons le résultat suivant (démontré au appendice 5) : Si une distribution de charge et de courant  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$  possède un plan de symétrie  $\Pi$ , alors :

$$\forall M, \forall t : \begin{cases} \vec{E}(S_{\Pi}(M), t) = S_{\Pi}(\vec{E}(M, t)) \\ \vec{B}(S_{\Pi}(M), t) = -S_{\Pi}(\vec{B}(M, t)) \end{cases}$$

On retient ce résultat sous la forme suivante :

Les plans de symétrie des sources sont les plans de symétrie du champ  $\vec{E}$  et les plans d'anti-symétrie du champ  $\vec{B}$ .

Cette différence de comportement des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  montre bien que ces deux types de champs vectoriels sont de natures distinctes.

Le champ  $\vec{E}$  est un **champ de vecteurs polaire** et le champ  $\vec{B}$  est un **champ de vecteurs axial**.

Une conséquence de ce résultat particulièrement utile est obtenue lorsque l'on étudie le champ en un point  $M$  du plan de symétrie  $\Pi$ , qui vérifie  $S_{\Pi}(M) = M$ . On a alors, en un tel point :

$$M \in \Pi \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M, t) = S_{\Pi}(\vec{E}(M, t)) \\ \vec{B}(M, t) = -S_{\Pi}(\vec{B}(M, t)) \end{cases}$$

Par conséquent :

Le champ  $\vec{E}(M, t)$  est parallèle au plan  $\Pi$  et le champ  $\vec{B}(M, t)$  lui est perpendiculaire.

## C.2 Sources présentant un plan d'anti-symétrie

### C.2.1 Définition

Nous dirons que la distribution  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$  possède un plan d'anti-symétrie  $\Pi$  si l'on a, à chaque instant  $t$  :

$$\forall P, \forall t : \begin{cases} \rho(S_{\Pi}(P), t) = -\rho(P, t) \\ \vec{J}(S_{\Pi}(P), t) = -S_{\Pi}(\vec{J}(P, t)) \end{cases}$$



Un exemple de cette situation est schématisé sur la figure 1.3 où les densités de charge sont représentées par une échelle de couleur.

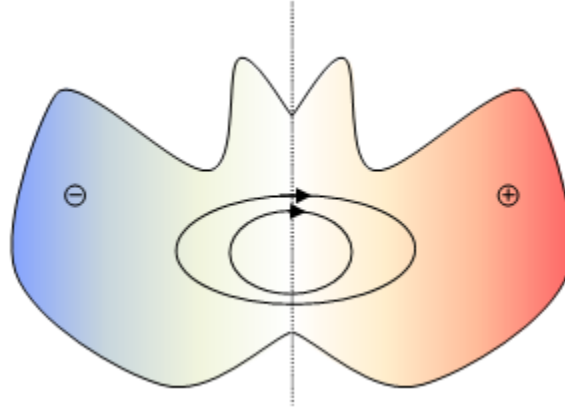


FIGURE 1.3 – Distributions présentant un plan d'anti-symétrie

### C.2.2 Symétries du champ électromagnétique

Nous admettons le résultat suivant (démontré au appendice 5). Si une distribution de charge et de courant  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$  possède un plan d'anti-symétrie  $\Pi$ , alors :

$$\forall M, \forall t : \begin{cases} \vec{E}(S_{\Pi}(M), t) = -S_{\Pi}(\vec{E}(M, t)) \\ \vec{B}(S_{\Pi}(M), t) = S_{\Pi}(\vec{B}(M, t)) \end{cases}$$

On retient ce résultat sous la forme suivante :

Les plans d'anti-symétrie des sources sont les plans d'anti-symétrie du champ  $\vec{E}$  et de symétrie du champ  $\vec{B}$ .

Une conséquence de ce résultat particulièrement utile est obtenue lorsque l'on étudie le champ



en un point  $M$  du plan d'anti-symétrie  $\Pi$ , qui vérifie  $S_{\Pi}(M) = M$ . On a alors, en un tel point

$$M \in \Pi \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M, t) = -S_{\Pi}(\vec{E}(M, t)) \\ \vec{B}(M, t) = +S_{\Pi}(\vec{B}(M, t)) \end{cases}$$

Par conséquent :

Le champ  $\vec{E}(M, t)$  est perpendiculaire au plan  $\Pi$  et le champ  $\vec{B}(M, t)$  lui est parallèle.

### C.3 Autres symétries et invariances

Nous résumons les résultats essentiels du appendice 5, dont beaucoup sont d'ailleurs intuitivement évidents.

#### C.3.1 Invariance par translation

Si une distribution de sources  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$  est, à chaque instant, invariante par toute translation dans une direction  $\vec{u}$  (par exemple l'un des vecteurs de base  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ) le champ électromagnétique  $\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)$  est lui-même invariant dans toute translation dans la direction  $\vec{u}$ .

Par exemple, si  $\{\rho(x, y, z, t), \vec{J}(x, y, z, t)\}$  ne dépend pas de  $x$ ,  $\{\vec{E}(x, y, z, t), \vec{B}(x, y, z, t)\}$  n'en dépend pas non plus. Ce résultat montre que les équations de Maxwell sont compatibles avec l'homogénéité de l'espace, puisque quelle que soit l'origine choisie, le champ électromagnétique ne change pas.

#### C.3.2 Invariance par rotation

Si une distribution  $\{\rho(P, t), \vec{J}(P, t)\}$  est invariante par rotation autour d'un axe de direction  $\vec{e}_z$ , les composantes cylindro-polaires des champs  $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$  sont indépendantes de l'angle polaire  $\theta$ .

Cette propriété montre que la théorie de Maxwell est compatible avec l'isotropie de l'espace, puisque le champ électromagnétique est indépendant de la direction choisie pour l'origine angulaire.

#### C.3.3 Exemples

##### Exemple 1 - Distributions de sources à symétrie sphérique

Une distribution de sources à symétrie sphérique de centre  $O$  est de la forme (coordonnées sphériques) :

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, t) \quad \text{et} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = J(r, t)\vec{e}_r,$$

avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $r = OM$  et  $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$  (voir figure 1.4).

C'est le cas par exemple d'une sphère radioactive qui émet des particules chargées de façon

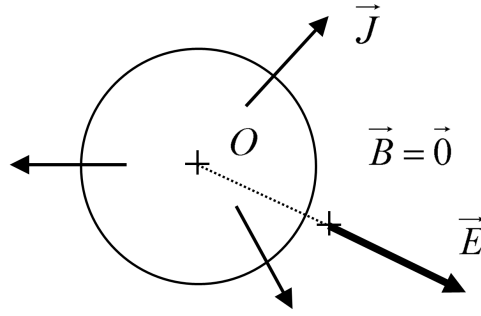


FIGURE 1.4 – Symétrie sphérique

isotrope. Dans ce cas :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t)\vec{e}_r; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

---

**Activité 1-4 :** Démontrez ce résultat.

---

### Exemple 2 - Symétries cylindriques

On utilise les coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$ , et on considère des distributions cylindriques infinies, invariantes par translation le long de l'axe du cylindre. Il y a plusieurs situations possibles représentées sur la figure 1.5.

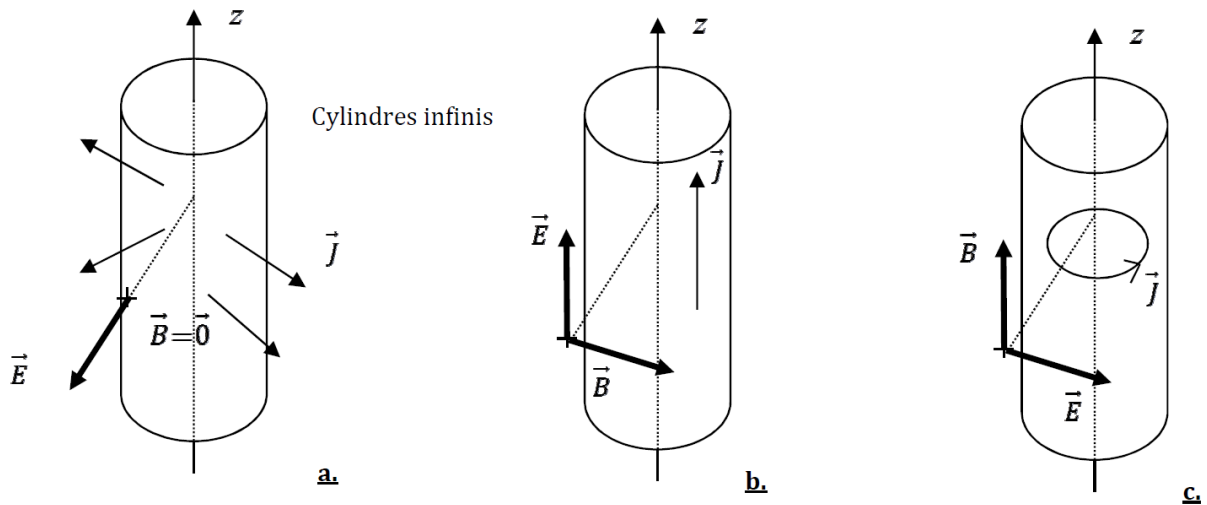


FIGURE 1.5 – Symétries cylindriques

#### Cas a : Courant radial

On suppose que

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, t) \quad \text{et} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = J(r, t)\vec{e}_r, \quad (\text{voir figure 1.5 a}).$$

Noter que cela impose une invariance par rotation et par translation parallèle à  $Oz$  des sources. Dans ce cas :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t)\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

---

**Activité 1-5 :** Démontrez ce résultat.

---

**Cas b : Courant axial sans charges**

Il s'agit du cas où :

$$\rho(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = J(r, t)\vec{e}_z \quad (\text{figure 1.5 b}).$$

On obtient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = B(r, t)\vec{e}_\theta$$

---

**Activité 1-6 :** Démontrez ce résultat.

---

**Cas c : Courant orthoradial sans charges**

Il s'agit du cas où :

$$\rho(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = J(r, t)\vec{e}_\theta \quad (\text{figure 1.5 c}).$$

On en obtient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = B(r, t)\vec{e}_z$$

---

**Activité 1-7 :** Démontrez ce résultat

---

## D CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE VIDE

### D.1 L'opérateur Laplacien Vectoriel

#### D.1.1 Définition

Nous allons avoir besoin dans la suite de l'*opérateur Laplacien vectoriel* défini par :

$$\Delta \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}).$$

Il s'agit d'un opérateur linéaire agissant sur un champ vectoriel et produisant un champ également vectoriel. Par souci de simplification, il est d'usage d'employer le même symbole “ $\Delta$ ” que pour l'opérateur laplacien scalaire, mais il s'agit, bien entendu, d'un opérateur différent.

#### D.1.2 Expression en coordonnées cartésiennes

L'expression en coordonnées cartésiennes est très simple. Dans ce système de coordonnées les composantes du laplacien vectoriel sont les laplaciens des composantes du vecteur. Plus clairement, pour un champ

$$\vec{A}(M, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$$

nous avons :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = (\Delta A_x)(M, t)\vec{e}_x + (\Delta A_y)(M, t)\vec{e}_y + (\Delta A_z)(M, t)\vec{e}_z,$$

avec :

$$\begin{aligned}\Delta A_x(M, t) &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}(x, y, z, t) \\ \Delta A_y(M, t) &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}(x, y, z, t) \\ \Delta A_z(M, t) &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}(x, y, z, t)\end{aligned}$$

### D.1.3 Autres systèmes de coordonnées

Les expressions en sont très complexes. À titre documentaire, l'expression en coordonnées sphériques est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r A_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 A_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} A_\theta \right] \vec{e}_r + \\ & \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(r A_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \vec{e}_\theta + \\ & \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(r A_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Fort heureusement, nous n'aurons pas à utiliser cette formule dans toute sa généralité.

## D.2 Équations de Maxwell dans le vide

### D.2.1 Énoncé

Dans le vide, c'est-à-dire dans une région électriquement neutre et sans courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B}(M, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M, t) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t), \\ \operatorname{div} \vec{E}(M, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M, t) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t).\end{aligned}$$

On note la grande symétrie de ces équations. Le couplage des champs entre eux y apparaît également très clairement : les variations temporelles du champ électrique apparaissent comme une source de champ électrique, analogue à une densité de courant ; les variations temporelles de  $\vec{B}$  sont également des sources de champ électrique mais de nature différente des charges électriques, car elles interviennent dans le rotationnel du champ électrique et non dans sa divergence.

### D.2.2 Équations découplées

En prenant le rotationnel des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, on arrive aisément aux deux équations découplées suivantes :

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}.$$

---

**Activité 1-8 : Démontrez ces résultats.**

---

Dans ces équations, nous avons introduit le paramètre  $c$  défini par :

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Ce paramètre  $c$  est une vitesse, dont la valeur est définie par convention internationale :

$$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On se contente souvent de l'approximation :

$$c \simeq 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ces équations découplées permettent d'étudier séparément le champ électrique et le champ magnétique dans le vide.

### D.2.3 Interprétation - Ondes électromagnétiques

Dans le système de coordonnées cartésiennes, envisageons par exemple la composante selon  $x$  du champ électrique  $E_x(x, y, z, t)$ , et supposons que la symétrie du problème impose une dépendance en  $z$  seulement. Le champ  $E_x(z, t)$  vérifie alors l'équation :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}(z, t) = 0$$

On reconnaît **l'équation de d'Alembert** étudiée dans le cours consacré aux "Signaux". Nous savons que cette équation possède des solutions progressives vérifiant

$$E_x(z, t) = E_x\left(z = 0, t - \frac{z}{c}\right).$$

Les équations de Maxwell prévoient donc l'existence d'ondes qui se propagent à la vitesse  $c$ . Ces **ondes électromagnétiques** seront étudiées en détail dans la suite du cours.

La vitesse de propagation de ces ondes est le paramètre  $c$  qui s'exprime en fonction des constantes  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Les valeurs numériques de ces deux constantes étaient connues du temps de Maxwell, qui a constaté que le paramètre  $c$  a la même valeur que la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, également connue (estimée à  $298000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  par Foucault en 1862). Maxwell a donc, le premier, découvert que la lumière n'est rien d'autre qu'une onde électromagnétique, mettant fin en 1865 à plusieurs siècles d'interrogations sur la nature physique des phénomènes lumineux.

Cette découverte figure dans l'article scientifique dans lequel Maxwell a présenté ses équations : "A dynamical theory of the electromagnetic field". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 : 459–512 (1865<sup>1</sup>). On peut noter - et admirer - la sobriété avec laquelle Maxwell présente dans ce texte cette découverte remarquable :

*"The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws."*

---

1. l'article fait suite à une présentation orale à la Royal Society en 1864

## E FORMULATION INTÉGRALE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Les équations de Maxwell sont locales : valables en chaque point à chaque instant. À l'aide des théorèmes de Stokes et de Green Ostrogradski, nous allons obtenir un ensemble de relations qui mettent en jeu des intégrales (flux ou circulation) des champs et des sources (charge ou intensité). Ces relations sont équivalentes aux équations locales, mais sont souvent plus commodes d'emploi car les grandeurs "sources" intégrées (charge et intensité) sont beaucoup plus faciles à mesurer que les densités de charge et de courant.

### E.1 Conservation du flux de $\vec{B}$

Nous étudions les conséquences de l'équation

$$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0.$$

#### E.1.1 Propriété fondamentale

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est un champ à flux conservatif.

Considérons donc une surface ( $S$ ) fermée orientée vers l'extérieur (normale locale  $\vec{n}_{ext,M}$ ), délimitant un volume intérieur ( $V$ ). D'après le théorème de Green Ostrogradski :

$$\oint\oint_{(S)} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext,M} dS_M = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{B}(M, t) d\tau_M = 0.$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est nul.

Ce résultat, déjà rencontré dans le cas statique, reste donc vrai dans le cas général des régimes dépendant du temps.

#### E.1.2 Conséquences

La structure du champ magnétique dans le cas général est identique à celle du champ magnéto-statique. Nous retrouvons donc les propriétés déjà rencontrées :

- Tube de champ  $\vec{B}$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers une section de tube de champ est indépendant de cette section.

- Notion de flux à travers un contour

Le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface s'appuyant sur un contour ne dépend que du contour, et pas de la surface particulière choisie (figure 1.6). Avec les notations de la figure 1.6 : si ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont des surfaces s'appuyant sur le contour orienté ( $C$ ) et de mêmes orientations, alors :

$$\iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

---

**Activité 1-9 :** Démontrez ce résultat.

---

Cette relation permet de définir la notion de flux de  $\vec{B}$  à travers un *contour* : c'est le flux de  $\vec{B}$  à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur ce contour.

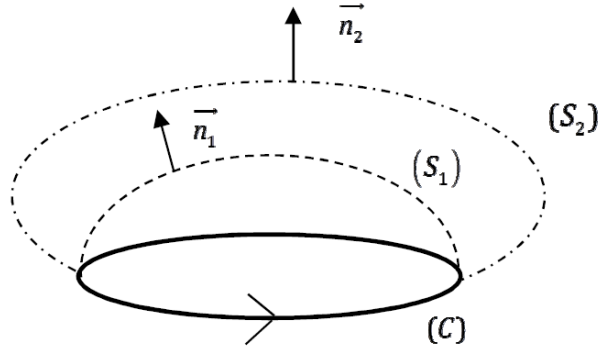


FIGURE 1.6 – Flux à travers un contour

## E.2 Équation de Maxwell-Gauss

Nous envisageons les conséquences de l'équation

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}.$$

### E.2.1 Théorème de Gauss

Considérons encore une surface  $(S)$  fermée orientée vers l'extérieur (normale locale  $\vec{n}_{ext,M}$ ), de volume intérieur  $(V)$ . D'après le théorème de Green Ostrogradski :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext,M} dS_M = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E}(M, t) d\tau_M = \iiint_{(V)} \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} d\tau_M.$$

Soit, en introduisant la charge intérieure qui se trouve dans le volume  $(V)$  à l'instant  $t$  :

$$Q_{\text{int}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_{(V)} \rho(M, t) d\tau_M,$$

on obtient : le **théorème de Gauss généralisé** (au cas des régimes dépendant du temps) :

$$\boxed{\oiint_{(S)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext,M} dS = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}.$$

Il est très utile, comme en électrostatique, pour déterminer les champs dans les situations hautement symétriques.

### E.2.2 Cas du vide

Dans le cas d'une région vide de charge (ou neutre) , nous aurons  $Q_{\text{int}}(t) = 0$ , et :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext,M} dS = 0.$$

Le champ électrique dans le vide est donc à flux conservatif.

### E.2.3 Exemple d'application

Nous étudions le cas d'une sphère chargée de rayon  $R$ , placée dans un conducteur Ohmique de conductivité  $\gamma$ . La charge totale de la sphère évolue avec le temps; elle est notée  $Q(t)$ .

Le problème est à symétrie sphérique donc la densité de courant et le champ électrique sont radiaux :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{e}_r; \quad \vec{J}(M, t) = J(r, t)\vec{e}_r$$

---

**Activité 1-10 :** Justifier que le champ magnétique est nul dans cette situation.

---

Appliquons le théorème de Gauss généralisé à la sphère de rayon  $R^+$ , tout juste extérieure à la sphère conductrice. Nous aurons :

$$E(R, t) \times 4\pi R^2 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}.$$

Mais par définition :

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -J(R, t) \times 4\pi R^2.$$

De plus la loi d'Ohm impose :

$$J(R, t) = \gamma E(R, t).$$

On en déduit :

$$\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} Q(t) = 0.$$

La charge de la sphère diminue donc selon une loi exponentielle de constante de temps caractéristique  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_0/\gamma$  :

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La sphère se décharge donc au bout de quelques  $\tau$ .

---

**Activité 1-11 :** Déterminer le champ électrique  $E(r, t)$  dans le milieu conducteur pour  $r > R$ .

---

## E.3 Équation de Maxwell-Faraday

Nous étudions les conséquences de l'équation

$$\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t).$$

### E.3.1 Relation générale

Considérons un contour  $(C)$  fermé, orienté et fixe dans le référentiel considéré.

Soit une surface  $(S_C)$  s'appuyant sur  $(C)$  et orientée de façon conventionnelle (règle du tire-bouchon, ou de la main droite), par un vecteur normal  $\vec{n}_M$  (Figure 1.7).

Le théorème de Stokes entraîne :

$$\oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \iint_{(S_C)} \text{rot } \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M.$$



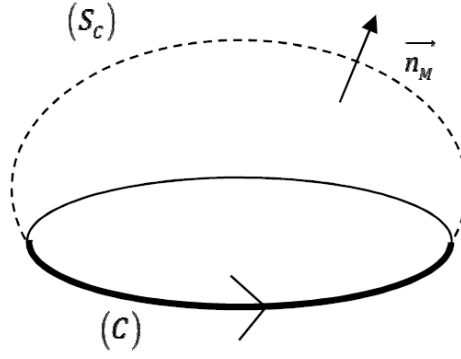


FIGURE 1.7 – Loi de Faraday

Mais :

$$\text{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t),$$

Donc :

$$\oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \iint_{(S_C)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M = -\frac{d}{dt} \iint_{(S_C)} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M.$$

On reconnaît le flux du champ  $\vec{B}$  à travers la surface  $(S_C)$ , donc à travers le contour  $(C)$  :

$$\Phi_{\vec{B}/(C)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{(S_C)} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M$$

On peut donc écrire la **loi de Faraday**, dont nous étudierons les importantes conséquences pratiques :

$$\oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = -\frac{d\Phi_{\vec{B}/(C)}(t)}{dt}.$$

Dans les situations hautement symétriques, cette équation donne un moyen simple pour déterminer le champ électrique associé aux variations de champ magnétique (voir l'exemple ci-dessous).

### E.3.2 Cas stationnaire

On retrouve que dans le cas stationnaire

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0,$$

Donc, pour tout contour  $(C)$  :

$$\oint_{(C)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Le champ électrostatique est à circulation conservative. Nous avons vu qu'une conséquence est l'impossibilité d'avoir des lignes de champ électrique fermées en régime stationnaire.

Cela n'est pas exclu en régime dépendant du temps où les lignes de champ électrique peuvent très bien être fermées, comme nous le verrons, par exemple dans le paragraphe suivant.

### E.3.3 Exemple : champ induit dans un solénoïde parcouru par un courant variable

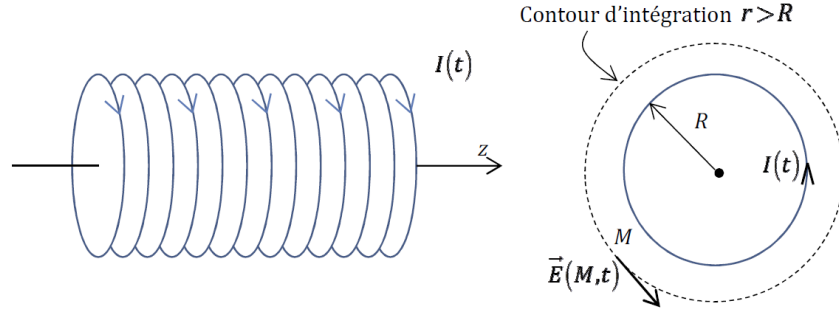


FIGURE 1.8 – Solénoïde parcouru par un courant variable.

La situation est représentée sur la figure 1.8. Un solénoïde cylindrique d'axe  $Oz$ , comportant  $n$  spires par unité de longueur est parcouru par un courant d'intensité lentement variable  $I(t)$ . Le solénoïde a une longueur  $\ell$  mais nous négligeons les effets de bords et le considérons comme infini pour obtenir une expression simple des champs.

Dans ce cas, la symétrie du problème impose :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{e}_z.$$

**Activité 1-12 :** Retrouvez ce résultat.

Pour calculer le champ magnétique, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires, dont la validité sera précisée plus loin. Dans ce cadre, nous admettons que le champ magnétique est donné par les expressions statiques dans lesquelles on change simplement l'intensité en fonction du temps. Cette approximation est très certainement justifiée si les champs varient très lentement (affirmation à laquelle nous donnerons un sens quantitatif un peu plus loin).

Dans ces conditions, nous pouvons confondre le champ avec son expression “quasi-statique” :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_{QS}(M, t),$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{QS}(M, t) &= \mu_0 n I(t) \vec{e}_z \quad \text{si } r < R \\ \vec{B}_{QS}(M, t) &= \vec{0} \quad \text{si } r > R. \end{aligned}$$

Appliquons la loi de Faraday à un contour fermé circulaire d'axe  $Oz$  de rayon  $r$ . Nous obtenons le résultat :

$$E(r, t) = -\mu_0 \frac{nr}{2} \frac{dI}{dt} \quad \text{si } r < R \quad \text{et} \quad E(r, t) = -\mu_0 \frac{nR^2}{2r} \frac{dI}{dt} \quad \text{si } r > R$$

**Activité 1-13 :** Démontrez ce résultat.

Le résultat précédent fait apparaître plusieurs points essentiels :

- Le champ électrique obtenu du fait des variations de  $\vec{B}$  possède des lignes de champ fermées (des cercles d'axe  $Oz$ ). Il a donc une structure essentiellement différente de celle d'un champ électrostatique. Aucune distribution statique de charge ne peut donner un tel champ électrique, même si  $\frac{dI}{dt}$  était indépendant du temps.
- Le champ électrique est nul si  $\frac{dI}{dt}$  est lui-même nul, c'est-à-dire si le champ magnétique est constant.  
Le champ électrique est non nul en dehors du solénoïde ( $r > R$ ), alors que le champ magnétique y est identiquement nul.

## E.4 Équation de Maxwell-Ampère

Nous étudions les conséquences de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left( \vec{J}(M, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right).$$

### E.4.1 Résultat général

On considère le même contour ( $C$ ) et la même surface ( $S_C$ ) qu'au paragraphe précédent. On a alors :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \iint_{(S_C)} \text{rot} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M.$$

À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient donc :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \iint_{(S_C)} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M + \mu_0 \iint_{(S_C)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}_M dS_M.$$

Mais comme la surface ( $S_C$ ) est fixe dans le référentiel d'étude, on peut simplifier le membre de droite pour obtenir le **théorème d'Ampère généralisé** :

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \iint_{(S_C)} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{(S_C)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M}$$

Ici encore, ce théorème peut être utilisé pour déterminer le champ magnétique associé à un champ électrique dépendant du temps.

### E.4.2 Courants de charge et de déplacement

Le premier terme du membre de droite de l'équation précédente :

$$\iint_{(S_C)} \vec{J}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M \stackrel{\text{def}}{=} I_{(S_C)}$$

représente l'intensité du courant de charge à travers la surface ( $S_C$ ). Nous introduisons **l'in-**

**tensité du courant de déplacement :**

$$I_{dep,(S_C)} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{(S_C)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}_M dS_M = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{(S_C)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M,$$

pour obtenir la relation :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \times (I_{(S_C)} + I_{dep,(S_C)})$$

Cette relation est écrite d'une façon analogue au théorème d'Ampère de la magnétostatique. Elle fait apparaître que dans le cas général, la circulation de  $\vec{B}$  est fonction de deux intensités, l'intensité "vraie" correspondant au mouvement des charges à travers la surface  $(S_C)$  et une intensité fictive, qu'on a historiquement nommée, faute de mieux, intensité de **courant de déplacement**, alors que cette intensité n'est associée à aucun déplacement d'aucune particule.

Il est à noter que, en général, les champs  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$  n'étant pas à flux conservatif,  $I_{(S_C)}$  et  $I_{dep,(S_C)}$  dépendent de la surface  $(S_C)$  particulière choisie. En revanche la somme

$$I_{(S_C)} + I_{dep,(S_C)}$$

ne dépend que du contour choisi.

**Activité 1-14 :** Justifiez ce résultat.

### E.4.3 Exemple d'application

Nous considérons l'exemple d'un condensateur plan circulaire de rayon  $a$ , d'épaisseur  $e$ , alimenté par une intensité  $I(t)$  (figure 1.9).

Nous supposons que l'intensité est faible et que toutes les grandeurs électriques varient suffisamment lentement pour que l'expression du champ électrique soit la même que celle de l'électrostatique.

Nous faisons donc l'approximation :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_{QS}(t),$$

avec  $\vec{E}_{QS}(M, t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$  entre les armatures et  $\vec{E}_{QS}(M, t) = \vec{0}$  en dehors des armatures.

Le système est à symétrie cylindrique avec courants axiaux, donc :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_\theta.$$

Nous cherchons le champ magnétique extérieur au condensateur en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à la courbe  $(C)$  formée d'un cercle axial de rayon  $r$ .

Comme surface  $(S_C)$  nous allons essayer deux choix (figure 1.9) :

- Choix 1 :  $(S_{C1})$  : disque intérieur à  $(C)$

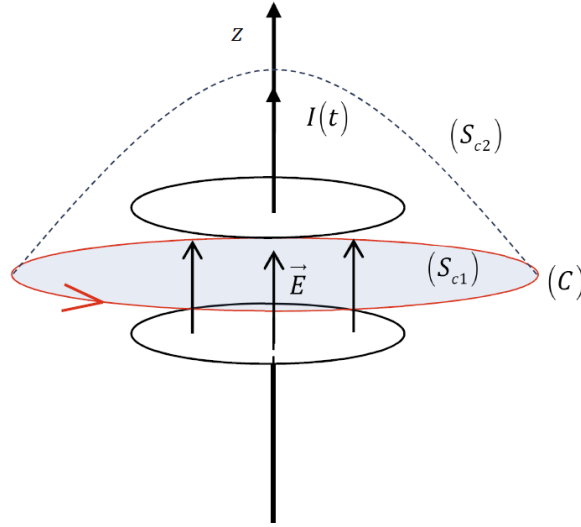


FIGURE 1.9 – Condensateur cylindrique.

- Choix 2 :  $(S_{C2})$  : surface englobant l'armature supérieure du condensateur

Avec la surface  $(S_{C1})$  nous obtenons aisément :

$$I_{(S_{C1})} = 0; \quad I_{dep,(S_{C1})} = \varepsilon_0 \frac{d\sigma/\varepsilon_0}{dt} \times \pi a^2 = \frac{dQ}{dt} = I(t)$$

Avec la surface  $(S_{C2})$ , il vient :

$$I_{(S_{C2})} = I(t) \quad I_{dep,(S_{C2})} = 0$$

---

**Activité 1-15 :** Démontrez ces résultats.

---

On constate bien que la somme  $I_{(S_C)} + I_{dep,(S_C)}$  est la même pour les deux choix de  $(S_C)$ , même si les contributions relatives des deux courants sont différentes dans les deux cas.

Ces deux choix conduisent évidemment à un résultat unique pour le champ magnétique extérieur au condensateur :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

---

**Activité 1-16 :** Montrer que le champ magnétique intérieur au condensateur est donné par

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta.$$


---

## E.5 Distributions surfaciques

### E.5.1 Position du problème

On rencontre fréquemment des situations physiques où les charges et les courants sont très intenses dans une couche de très faible épaisseur. Par exemple, une feuille métallique (comme par exemple l'Aluminium d'emballage utilisé pour conserver les aliments) peut être le siège de courants intenses, localisés dans la feuille. Nous savons également que dans un conducteur

électrique, les charges électriques se localisent dans une couche très fine (de l'ordre de quelques nanomètres) au voisinage de la couche externe du conducteur.

De telles situations sont habituellement modélisées par une densité surfacique de charge  $\sigma(M, t)$  et une densité surfacique de courant  $\vec{J}_S(M, t)$  localisés sur la surface. De telles distributions sont des limites dans lesquelles les densités volumiques tendent vers l'infini : dans cette limite certaines dérivées du champ divergent et les champs électromagnétiques peuvent présenter des discontinuités.

Les équations de Maxwell, sous forme intégrale, nous permettent de prévoir la forme générale de ces discontinuités. Nous commencerons par revenir sur deux situations statiques connues et donnerons sans démonstration le résultat général (la démonstration est donnée dans l'appendice A).

### E.5.2 Champ électrique

Considérons tout d'abord une distribution de charge où les charges sont localisées sur le plan infini  $z = 0$  avec une densité de charge uniforme  $\sigma$ . À l'aide du théorème de Gauss, nous avons déterminé que le champ électrostatique est :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{pour } z > 0 \\ \vec{E}(z) &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{pour } z < 0\end{aligned}$$

Le champ électrique est donc discontinu en  $z = 0$ , avec la discontinuité :

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

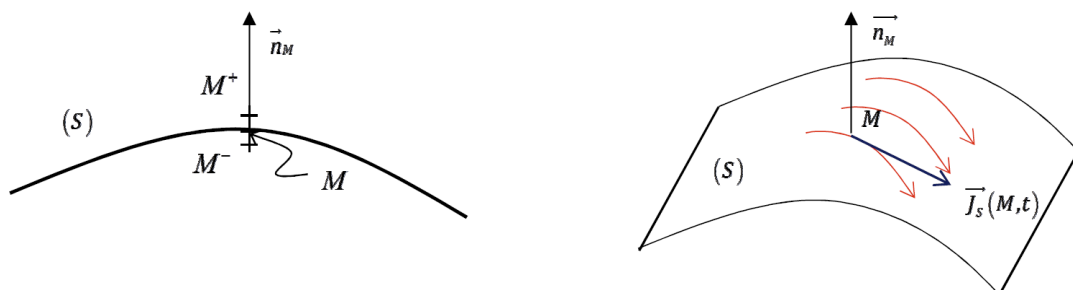


FIGURE 1.10 – Charges et courants de surface

Ce résultat peut être généralisé. Considérons la situation représentée sur la figure 1.10 où la surface  $(S)$  est le siège de courants  $\vec{J}_S(M, t)$  et de charges  $\sigma(M, t)$ . La normale locale à  $S$  en  $M$  est notée  $\vec{n}_M$ . On montre alors que le champ électrique de part et d'autre de la surface, aux points  $M^-$  et  $M^+$  (tels que  $\overrightarrow{M^- M^+}$  est dans le sens de  $\vec{n}_M$ ) voisins de la surface vérifient

$$\boxed{\vec{E}(M^+, t) - \vec{E}(M^-, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_M}$$

Cette relation est appelée **relation de passage pour le champ électrique**.

En conséquence :

La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue au passage par  $(S)$ .

En revanche, la composante normale du champ électrique est discontinue si la surface est chargée.

---

**Activité 1-17 :** Démontrez ces deux affirmations.

---

### E.5.3 Champ magnétique

Le champ magnétique créé par une distribution de courant uniforme et constant  $\vec{J}_S = J_S \vec{e}_x$  localisée dans le plan  $z = 0$  est bien connu :

$$\begin{aligned}\vec{B}(z) &= -\frac{\mu_0 J_S}{2} \vec{e}_y \quad \text{pour } z > 0 \\ \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 J_S}{2} \vec{e}_y \quad \text{pour } z < 0\end{aligned}$$

Le champ magnétique est donc discontinu au passage par  $z = 0$  et vérifie :

$$\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = -\mu_0 J_S \vec{e}_y = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{e}_z.$$

Ici encore, ce résultat peut être généralisé. Pour la situation générale décrite sur la figure 1.10, nous avons, dans le cas le plus général :

$$\vec{B}(M^+, t) - \vec{B}(M^-, t) = \mu_0 \vec{J}_S(M, t) \wedge \vec{n}_M$$

Cette relation est appelée *relation de passage pour le champ magnétique*.

Pour le champ magnétique, nous pouvons en déduire que :

La composante normale du champ magnétique est toujours continue.

En revanche, la composante tangentielle du champ est discontinue si la surface est parcourue par des courants surfaciques.

---

**Activité 1-18 :** Démontrez ces deux affirmations.

---

## F POTENTIELS APPROXIMATION DES RÉGIMES QUASI STATIONNAIRES

### F.1 Potentiel scalaire et potentiel vecteur

#### F.1.1 Définitions

De l'équation

$$\text{div } \vec{B}(M, t) = 0,$$

nous déduisons qu'il existe un champ de vecteurs  $\vec{A}(M, t)$  (exprimé en T·m) appelé *potentiel vecteur* tel que :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t).$$

De l'équation

$$\text{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t),$$

nous pouvons déduire :

$$\text{rot} \left( \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) \right) = \vec{0}.$$

Le champ  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est donc à circulation conservative. Nous savons alors qu'il existe un champ  $V(M, t)$ , appelé **potentiel scalaire** (exprimé en V) tel que :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) - \text{grad} V(M, t).$$

La connaissance du couple  $\{\vec{A}(M, t); V(M, t)\}$  permet donc de déterminer complètement le champ électromagnétique. D'une certaine façon, nous avons diminué le nombre de paramètres libres définissant le champ électromagnétique puisque les 4 champs scalaires associés au couple des potentiels permettent de déterminer les 6 champs scalaires associés au champ électromagnétique  $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$ .

### F.1.2 Indétermination

Soient deux couples de potentiels  $\{\vec{A}; V\}$  et  $\{\vec{A}'; V'\}$  associés à un champ électromagnétique donné. Il est facile de voir que les potentiels doivent vérifier (en n'explicitant pas la dépendance en  $M$  et  $t$  pour alléger les notations) :

$$\text{rot}(\vec{A} - \vec{A}') = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{grad}(V - V') = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}' - \vec{A})$$

---

**Activité 1-19 :** Démontrez-le.

---

Le champ  $\vec{A} - \vec{A}'$  est à circulation conservative, il existe donc un champ scalaire  $g(M, t)$  tel que :

$$\vec{A}'(M, t) = \vec{A}(M, t) + \text{grad} g(M, t) \quad \text{et} \quad V'(M, t) = V(M, t) - \frac{\partial g}{\partial t}(M, t)$$

Nous avons donc trouvé tous les potentiels  $\{\vec{A}; V\}$  associés à un champ électromagnétique donné. Ces potentiels sont loin d'être uniques. La transformation ci-dessus qui fait passer d'un couple de potentiel à un autre est appelée **transformation de jauge**. Il y a une infinité de telles transformations, toutes associées à un champ scalaire  $g(M, t)$  donné.

### F.1.3 Jauges de Lorentz et de Coulomb

Le paragraphe précédent montre que nous avons une grande latitude quant au choix du couple  $\{\vec{A}; V\}$ .

Selon les situations, on peut imposer telle ou telle condition pour réduire le nombre de possibilités tout en simplifiant les calculs. Il est clair que les prédictions physiques, c'est à dire le champ électromagnétique, n'en sont en rien affectées. On trouve deux conditions supplémentaires largement utilisées, selon le domaine d'application.



### (i) *Jauge de Coulomb*

En régime statique ou quasi statique, il est commode de choisir un potentiel vecteur indépendant du temps et d'imposer la condition suivante, appelée ***Jauge de Coulomb***

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}(M, t) = 0.}$$

### (ii) *Jauge de Lorentz*

En régime dépendant du temps, il est plus intéressant de fixer la condition suivante, appelée ***Jauge de Lorentz***

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}(M, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) = 0.}$$

Notons que dans les deux cas, le fait d'imposer une jauge ne rend pas le couple de potentiels unique pour autant. Il reste toujours une indétermination.

## F.2 Potentiels retardés

Dans le cas général, la jauge de Lorentz permet de découpler les équations d'évolution des potentiels.

### F.2.1 Équations de Poisson retardées

#### Potentiel scalaire

On a

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\operatorname{grad}} V \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V,$$

où l'on a posé :

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Compte tenu de l'équation de Maxwell-Gauss :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , nous obtenons :

$$\boxed{\Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(M, t) = -\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}}$$

#### Potentiel vecteur

De la même façon, en utilisant

$$\Delta \vec{A} = \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A},$$

on obtient l'équation :

$$\boxed{\Delta \vec{A}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(M, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}(M, t)}$$

---

**Activité 1-20 :** Retrouvez ces résultats.

---

On constate que la jauge de Lorentz permet un double découplage entre  $\vec{A}$  et  $V$  d'une part et entre les densités de charge et de courant d'autre part.

### F.2.2 Solutions des potentiels retardés

Nous donnons sans démonstration les solutions de ces équations vérifiant la Jauge de Lorentz, dans le cas de distributions de charge et de courant d'extension spatiale finies, et en prenant les origines des potentiels scalaires et vecteurs à l'infini :

$$V(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P.$$

Dans le cas de distributions statiques, nous retrouvons les expressions rencontrées en électrostatique et magnétostatique :

$$V(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau_P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d\tau_P.$$

Ces potentiels sont appelés **potentiels retardés** car la contribution des sources situées autour de  $P$  en un point  $M$  à l'instant  $t$  dépend des valeurs des champs sources en  $P$  à l'instant  $t - PM/c$ . Tout changement des sources en  $P$  est sensible en  $M$  avec un retard  $PM/c$ , ce qui s'interprète comme une propagation à la célérité  $c$ .

Les équations de Maxwell montrent donc que les interactions électromagnétiques ne sont pas instantanées : les changements de distribution en un point ne sont sensibles qu'après un certain retard, associé à une vitesse de propagation finie  $c$ .

Lorsque nous regardons une étoile distante de  $d$  (disons 10 années-lumière), nous ne percevons les changements survenus sur cette étoile qu'avec un retard  $d/c$  (10 ans). Regarder au loin, c'est regarder dans le passé.

**Remarque :**

Il existe d'autres solutions pour les équations du potentiel dans lesquelles le terme  $t - \frac{PM}{c}$  est remplacé par  $t + \frac{PM}{c}$ . Ces solutions, appelées **potentiels avancés**, ne sont pas retenues car elles contredisent le **principe de causalité** qui énonce que les causes se produisent avant les effets. Dans ce cas en effet, tout changement de sources en  $P$  est ressenti en  $M$  un instant  $\frac{PM}{c}$  *avant* que ces changements ne se soient produits.

## F.3 Approximation des régimes quasi-stationnaires

### F.3.1 Expression approchée des potentiels

Imaginons que les densités de charge et de courant  $\rho(P, t)$ ,  $\vec{J}(P, t)$  évoluent avec un temps caractéristique  $\tau$  (temps nécessaire pour que la modification des densités soit appréciable, en ordre de grandeur). Par exemple si  $\rho(P, t)$  varie sinusoïdalement en fonction de  $t$  avec une

pulsation  $\omega$ , nous pourrions prendre  $\tau = 1/\omega$ . Si toutes les distances  $PM$  considérées dans le problème vérifient

$$\frac{PM}{c} \ll \tau.$$

nous aurons :

$$\rho(P, t - \frac{PM}{c}) \simeq \rho(P, t) \quad \text{et} \quad \vec{J}(P, t - \frac{PM}{c}) \simeq \vec{J}(P, t),$$

et nous pourrions écrire :

$$V(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P, t)}{PM} d\tau_P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P, t)}{PM} d\tau_P.$$

Ces potentiels peuvent être qualifiés d'*instantanés*. Ils dépendent du temps mais tout changement des sources est immédiatement perceptible en tout point. Lorsque cette approximation est vérifiée, on dit que l'on se place dans *l'approximation quasi stationnaire*.

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (**ARQS**) consiste à négliger tout phénomène de propagation dans les expressions des potentiels et donc des champs.

Dans le cas de variations sinusoïdales des grandeurs à la pulsation  $\omega$ , il est commode d'écrire la condition de validité de l'ARQS sous la forme :

$$PM \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Pour simplifier, on retient souvent le critère de validité, plus simple à retenir (mais légèrement moins fort) :  $PM \ll \lambda$ .

L'ARQS est valable lorsque toutes les distances considérées sont faibles devant la longueur d'onde  $\lambda$  d'une onde de pulsation  $\omega$  et de vitesse  $c$  :  $PM \ll \lambda$ .

Donnons un ordre de grandeur, pour des distances à l'échelle humaine,  $PM \sim 1$  m, l'ARQS sera valable tant que  $\omega \ll \frac{3 \times 10^8}{1} = 300 \times 10^6$  rad.s<sup>-1</sup>, soit des fréquences très inférieures à 100 MHz.

Étant donnée la grande valeur de  $c$ , à notre échelle, la plupart des situations étudiées au début de l'histoire de l'électromagnétisme étaient réalisées dans un domaine de fréquence où l'ARQS était largement vérifiée.

**Remarque :** L'ARQS est parfois également désignée par les initiales ARQP : Approximation des Régimes Quasi Permanents.

### F.3.2 Champ magnétique

Le champ magnétique s'obtient simplement en prenant le rotationnel du potentiel vecteur :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot} \vec{A}(M, t).$$

La relation est la même qu'en magnétostatique :

$$\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}(M),$$

à ceci près que, dans le calcul de  $\vec{A}(M)$ , on remplace à chaque instant les densités de courant  $\vec{J}(P)$  par leurs valeurs instantanées  $\vec{J}(P, t)$ .

Ainsi le champ magnétique créé par un circuit parcouru par une intensité  $I(t)$  sera donné par la même relation que l'expression du champ magnétostatique du même circuit, parcouru par un courant constant  $I$ , en remplaçant simplement  $I$  par  $I(t)$ .

Par exemple, dans cette approximation, le champ créé par un anneau de rayon  $a$  parcouru par une intensité  $I(t)$  sur les points de son axe pas trop éloignés (tels que  $PM \ll c\tau$ ) sera donné par la relation quasi-statique (en utilisant les mêmes notations que dans le cours de magnétostatique) :

$$\vec{B}_{QS}(z, t) = \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} I(t) \vec{e}_z.$$

### F.3.3 Champ électrique

Le champ électrique comprend deux termes :

$$\vec{E}(M, t) = -\vec{\text{grad}}V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

Par conséquent, même dans le cas où les points  $M$  considérés vérifient

$$PM \ll c\tau,$$

le champ sera obtenu comme la somme de deux termes :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_{QS}(t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t),$$

Dans cette relation,  $\vec{E}_{QS}$  est le champ que l'on obtient à partir du champ électrostatique en remplaçant les densités de charge par leur valeur instantanées.

Le champ supplémentaire  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  a des conséquences pratiques essentielles que nous étudierons dans les chapitres consacrés à l'induction électromagnétique. Ce terme montre que, même pour des sources variant lentement, le champ électrique peut différer notablement de celui qui existe en électrostatique.

Par exemple dans le cas d'un conducteur parcouru par un courant dépendant du temps mais restant neutre (ce qui est le cas général, nous le verrons), le terme quasi-statique est nul (car  $\rho(P, t) = 0$  partout), mais il existera un champ supplémentaire  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , susceptible d'accélérer des charges électriques et donc d'être facilement détecté .

## G EXERCICES

### Exercice 1-1 : Charges émises à partir d'un point

Une petite sphère de matière radioactive, de rayon  $R$ , émet des charges ponctuelles dans l'espace de manière isotrope. La charge totale comprise à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  ( $r > R$ ) à l'instant  $t$  est notée  $Q(r, t)$ .

1. À partir d'arguments de symétrie, déterminer la direction de  $\vec{E}$  en un point  $M$  extérieur à la sphère de rayon  $R$ .
2. Démontrer que le champ magnétique est partout nul.
3. Calculer le champ électrique en  $M$  à l'instant  $t$ .
4. Calculer le vecteur densité de courant lié au mouvement des charges, ainsi que le courant de déplacement.

### Exercice 1-2 : Émission isotrope de charge dépendant du temps

Une bille de cuivre fixe de rayon  $a$  suffisamment faible par rapport aux autres dimensions pour que cette bille soit confondue avec son centre  $O$ , initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir de l'instant  $t = 0$  : le nombre d'électrons émis par unité de temps est une constante  $\alpha$  et les électrons sont émis avec un vecteur vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$  où  $v_0$  est une constante. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons (approximation d'ordre le plus bas).

1. Déterminer la densité volumique de charge  $\rho(r, t)$  en exprimant la charge comprise entre les sphères de centre  $O$  et de rayons  $r$  et  $r + dr$ . En déduire que la densité de courant  $\vec{j}(r, t)$  vaut :

$$\vec{j}(r > v_0 t, t) = \vec{0}; \quad \vec{j}(r < v_0 t, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

2. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  supposé isotrope et vérifier qu'il dérive d'un potentiel scalaire  $V(r, t)$ .

Calculer le courant de déplacement et montrer que les équations de MAXWELL sont compatibles avec un champ magnétique  $\vec{B}$  nul. Pouvaient-on prévoir ce résultat en utilisant d'autres arguments ?

### Exercice 1-3 : Champ électrique statique créé par un champ magnétique variable

On considère un solénoïde infini ( $n$  spires par unités de longueur) de rayon  $a$  dans lequel le courant varie avec le temps selon une loi :  $i = i_0 \frac{t}{\tau}$  où  $\tau$  est une constante. On admet que le champ magnétique créé est donné par  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$  pour  $r < a$  et  $\vec{B} = \vec{0}$  pour  $r > a$ , à l'extérieur du solénoïde.

1. Déterminer le champ électrique induit  $\vec{E}(M, t)$ .
2. Ce champ, indépendant du temps, pourrait-il être obtenu avec des charges immobiles ?

### Exercice 1-4 : Condensateur plan en régime variable

Un condensateur plan utilisé en régime sinusoïdal permanent est formé de deux disques conducteurs de même rayon  $a$  de quelques cm et de même axe  $Oz$ . Ils sont séparés par une distance  $2h$ . On néglige tout effet de bord en supposant le champ électrique entre les armatures de la forme :  $\vec{E} = E(r) \cos \omega t \vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques.

1. Établir une équation différentielle vérifiée par la fonction  $E(r)$  seule.

On suppose que  $E(r)$  est peu variable en fonction de  $r$  et que l'on a approximativement  $E(r) = E_0 \left(1 - \eta \frac{r^2}{a^2}\right)$  où on suppose  $\eta \ll 1$  constant.

2. Déterminer  $\eta$  en fonction de  $\omega, c, a$ . Montrer que cette solution n'est acceptable que si la fréquence est inférieure à une fréquence maximum qu'on évaluera.

- Donner l'expression du champ magnétique entre les armatures.
- On suppose que  $E(r)$  a pour valeur maximum  $1 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ . Calculer la valeur maximale de l'intensité du courant de déplacement de Maxwell pour une fréquence de  $1 \text{ MHz}$  et un rayon de  $1 \text{ cm}$  ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ ).

**Rappel :** en coordonnées cylindriques

$$\text{rot} \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$

### Exercice 1-5 : Onde de courant dans un câble coaxial

Un câble coaxial (axe  $Oz$ ) est constitué par un conducteur cylindrique intérieur de rayon  $a$  et d'une enveloppe métallique mince, cylindrique de même axe, de rayon intérieur  $d$ . On désigne par  $r$  la distance d'un point de l'espace à l'axe  $Oz$ . Le conducteur intérieur est parcouru par un courant d'intensité  $I(z, t)$ , réparti uniformément et variant sinusoïdalement avec le temps. En notation complexe, I s'écrit :  $\underline{I}(z, t) = \underline{i}(z) \exp(j\omega t)$

- Montrer que le champ  $\vec{B}$  est orthoradial. Que peut-on dire sur la direction de  $\vec{E}$  dans le cas général ?

Dans la suite, on choisit  $\vec{E}$  **radial**. On écrit, en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(r, z, t) = \underline{e}(r, z) \exp(j\omega t) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(r, z, t) = \underline{b}(r, z) \exp(j\omega t) \vec{e}_\theta.$$

On se limite à l'espace compris entre  $r = a$  et  $r = d$  (les champs sont supposés nuls partout ailleurs).

- Calculer  $\underline{b}(r, z)$  en fonction de  $\underline{i}(z)$  et de  $r$ .
- En déduire  $\underline{e}(r, z)$  en fonction de  $\frac{d\underline{i}}{dz}$  et de  $r$ .
- Montrer que  $\underline{i}(z)$  est de la forme :  $\underline{i}(z) = A \exp(jkz) + B \exp(-jkz)$  et donner l'expression de  $k$ . Interpréter ce résultat.
- Cette question nécessite le chapitre suivant.* On choisit  $\underline{i}(z) = i_0 \exp(-jkz)$ . Calculer le vecteur de Poynting et en déduire la puissance moyenne transportée par le câble.  
Application numérique. Calculer  $i_0$  pour que le câble transporte une puissance de  $100 \text{ W}$ .  
On donne  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$  ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $d/a = 5$ .

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot} \vec{a} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

### Exercice 1-6 : Supraconducteur

Les supraconducteurs sont des milieux conducteurs de conductivité infinie. On constate expérimentalement qu'un supraconducteur placé dans un champ magnétique extérieur est le siège de courants de surface qui tendent à annuler le champ à l'intérieur du supraconducteur : le supraconducteur "expulse" le champ magnétique.

Pour comprendre cet effet, un modèle (de London) consiste à supposer que dans le supraconducteur, il existe une relation entre la densité de courant et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{J} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \delta^2},$$

où  $\vec{A}$  vérifie la Jauge de Coulomb :  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Le paramètre  $\delta$  dépend du supraconducteur.

1. Montrer que le champ  $\vec{B}$  vérifie l'équation  $\Delta \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}$ . Quelle est la dimension de  $\delta$  ?

Nous étudions un milieu supraconducteur occupant le demi espace  $x > 0$  : voir figure G.

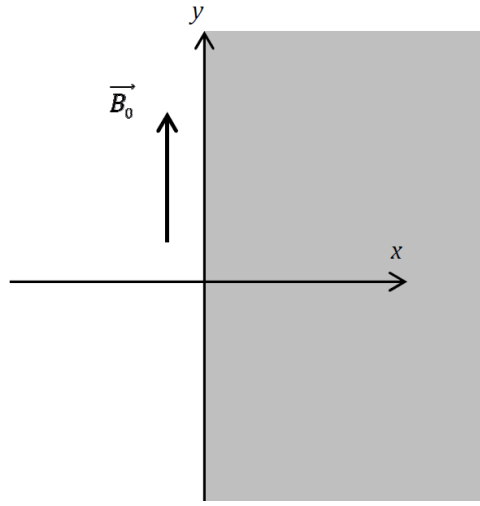


FIGURE 1.11 – Le matériau supraconducteur occupe le demi espace  $x > 0$ . A l'extérieur du supraconducteur, règne un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ .

A l'extérieur du supraconducteur, règne un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ . Le champ magnétique interne au supraconducteur est  $\vec{B} = B(x) \vec{e}_y$ .

2. Déterminer  $B(x)$ . Donner un sens concret à  $\delta$ .
3. Déterminer la distribution de courant  $\vec{J}(x)$ . En pratique,  $\delta$  est de l'ordre de quelques nanomètres et on peut assimiler la distribution de courant à une distribution surfacique  $\vec{J}_S$ . Déterminer  $\vec{J}_S$  de deux façons différentes.