

上海交通大学巴黎卓越工程师学院阶段测试
Devoir surveillé

2022 至 2023 学年, 第 1 学期
Année universitaire 2022-2023, 1^{er} semestre

课程名称: 信号学
Cours : Signaux
PHY2302P

班级号 N° de classe		学号 N° d'étudiant(e)	
---------------------	--	------------------------	--

中文姓名 Nom, prénom chinois		法文名字 Prénom français	
-----------------------------	--	-------------------------	--

成绩 Note	
------------	--

说明

Avertissement

1. 考试的时间: 持续**1小时30分钟**。
1. Durée de l'examen : **1 heure 30 minutes**.
2. 可以使用**计算器**。但不能使用其它电子设备(包括手机、平板电脑)和任何参考资料。也不能带自己的草稿纸。
2. L'utilisation d'une calculatrice est **autorisée**. Les autres outils électroniques (téléphone, tablette, etc.) et tous les documents sur papier sont interdits. Il est aussi interdit d'apporter son propre papier de brouillon.
3. 各个课题是不相关的, 可以按照任何顺序来完成。
3. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
4. 请注意会影响阅卷老师批改试卷的书写质量: 不清楚的或者没有清楚表述的答题将影响得分。
4. La correction tient compte de la qualité de la rédaction : toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée.

Exercice 1 – Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques (25%)

Les signaux s_1 et s_2 sont des carrés de période 2 secondes et varient entre 0 V et 2 V. Les profils de s_1 et s_2 sont montrés en Figure 1.

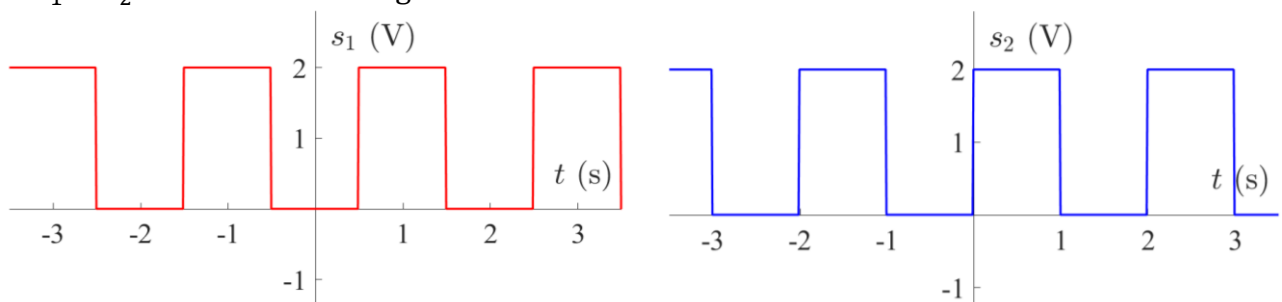


Figure 1. Profils de deux signaux s_1 et s_2

1. Décomposer le signal s_1 en une série de Fourier.

Le théorème de Fourier indique qu'une fonction T-périodique peut se décomposer en une somme de série de Fourier :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

Où $A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$ et $B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$ pour t_0 quelconque, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

On l'applique sur le signal s_1

$$\langle s_1 \rangle = 1 \text{ V}$$

Le s_1 est pair, ainsi $B_n = 0$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s_1(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u_0 \cos(n\omega t) dt = \frac{2u_0}{Tn\omega} \sin(n\omega t) \Big|_{t=\frac{T}{4}}^{t=\frac{3T}{4}}$$

$$A_n = \frac{2u_0}{Tn\omega} \left(\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) = -\frac{2u_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

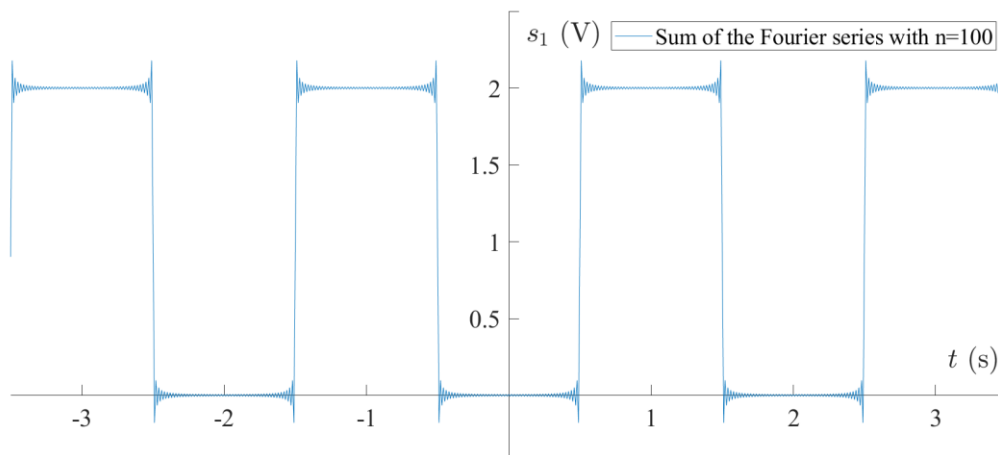
Donc

$$s_1(t) = \langle s_1 \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Avec

$\langle s_1 \rangle = 1 \text{ V}$, $T = 2 \text{ s}$ et $u_0 = 2 \text{ V}$

Un exemple de $s_1(t)$ sommé par les 100 premiers composants est en-dessous.



2. Décomposer le signal s_2 en une série de Fourier. Indiquer les similitudes et les différences entre les deux séries.

On enlève la partie constante de $s_2(t)$ et on obtient ainsi un signal impair :

$$s'_2(t) = s_2 - \langle s_2 \rangle$$

Alors $A_n = 0$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s_2(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u_0 \sin(n\omega t) dt = -\frac{2u_0}{Tn\omega} \cos(n\omega t) \Big|_{t=0}^{t=\frac{T}{2}}$$

$$B_n = \frac{u_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

Donc

$$s_2(t) = \langle s_2 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Avec

$$\langle s_2 \rangle = 1 \text{ V}, T = 2 \text{ s et } u_0 = 2 \text{ V}$$

Les spectres de Fourier pour ces deux signaux ont la même amplitude :

$$\left| \frac{2u_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = \left| \frac{u_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \right|$$

En même temps, chaque harmonique de $s_2(t)$ est en quadrature avancée par rapport à $s_1(t)$, la même relation de phase entre $s_2(t)$ et $s_1(t)$.

Exercice 2 – Adaptation d'impédances (25%)

L'adaptation d'impédances consiste à maximiser la puissance électrique **active** transmise vers une impédance d'utilisation.

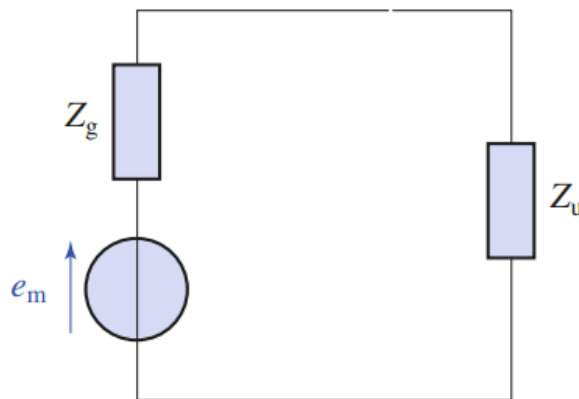


Figure 2 Un circuit comportant un générateur et un utilisateur

1. Le générateur fournit une force électromotrice sinusoïdale de valeur efficace e_m et de pulsation ω . Déterminer la relation entre l'impédance du générateur Z_g et l'impédance d'utilisation Z_u pour que la puissance réelle de l'utilisateur soit maximale en régime sinusoïdal établi.

On exprime les impédances Z_g et Z_u en sommes de parties réelles et imaginaires.

$$Z_u = R_u + jX_u \text{ et } Z_g = R_g + jX_g$$

L'intensité efficace qui traverse le Z_u

$$i_{\text{eff}} = \frac{e_m}{|Z_u + Z_g|}$$

$$P = R_u i_{\text{eff}}^2 = \frac{R_u e_m^2}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2}$$

Pour Z_g et e_m donné, P est maximisée si

$$X_u = -X_g \text{ et } R_u = R_g$$

Puissance réelle est maximale si $Z_u = Z_g^*$

2. L'impédance du générateur est une résistance pure R_g , et l'impédance de l'utilisateur est aussi une résistance pure R_u . On a $R_u > R_g$. Pour réaliser l'adaptation d'impédances, on ajoute dans le circuit un quadripôle, celui-ci est composé d'un condensateur idéal de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L . Déterminer les expressions de L et C en fonction de R_u , R_g et ω . Indication : un condensateur idéal ou une bobine idéale ne consomment pas de puissance active.

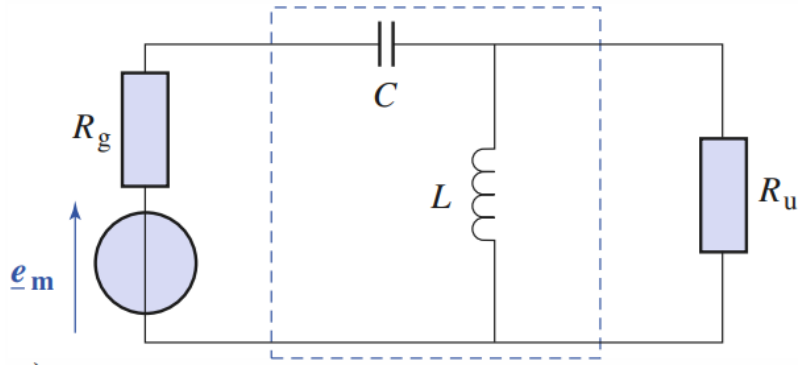


Figure 3 Adaptation d'impédance pour $R_u > R_g$ par un quadripôle composé de C et L.

Si le circuit ne contient que les deux résistances pures R_u et R_g avec $R_u > R_g$, la résistance est alors non-adaptée et la puissance reçue par R_u n'est pas maximale.

Avec l'introduction d'un quadripôle composé d'un condensateur idéal de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L, c'est possible de réaliser une adaptation d'impédance.

On découpe le circuit en deux parties par l'ajout d'une ligne séparatrice comme indiquée en dessous. L'impédance à gauche est considérée comme l'impédance du générateur $Z_g = R_g + \frac{1}{jC\omega}$,

l'impédance à droite est considérée comme l'impédance de l'utilisateur $Z_u = \frac{R_u \cdot jL\omega}{R_u + jL\omega} = \frac{R_u^2 jL\omega + R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2}$.

Quand $Z_u = Z_g^*$, la puissance réelle consommée par Z_u est maximale. Vu que la bobine idéale L ne consomme pas de puissance réelle en RSE, cette puissance maximale est entièrement consommée par la résistance R_u .

Donc les exigences vérifiées par L et C sont :

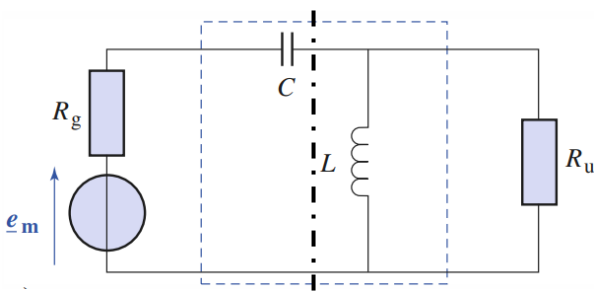
$$R_g = \frac{R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{R_u^2 L \omega}{R_u^2 + L^2 \omega^2}$$

Les expressions de L et C sont ainsi trouvés (en appliquant la relation $R_u > R_g$) :

$$L = \frac{R_u}{\omega} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}$$

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_g (R_u - R_g)}}$$



Exercice 3 – Modulation et démodulation d'amplitude (50%)

Un signal modulé sinusoïdalement en amplitude est un signal de la forme $s(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) (1 + \varepsilon \cos(\omega t))$, où Ω est la pulsation du signal porteur (ou porteuse), $\omega \ll \Omega$

la pulsation du signal modulant $m(t)$ et ε l'indice (ou taux) de modulation. Les profils du signal modulant et du signal porteur sont montrés en-dessous.

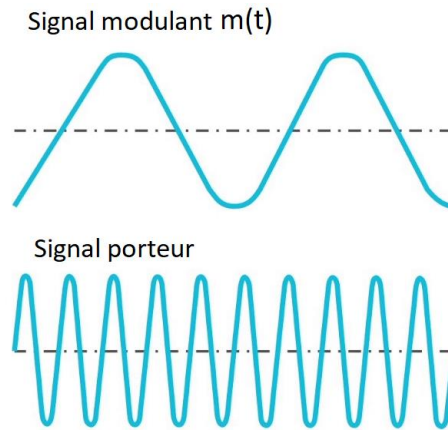
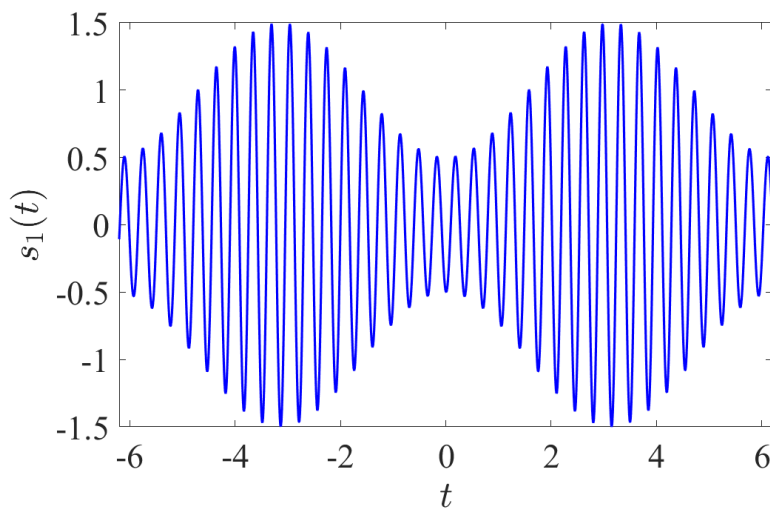


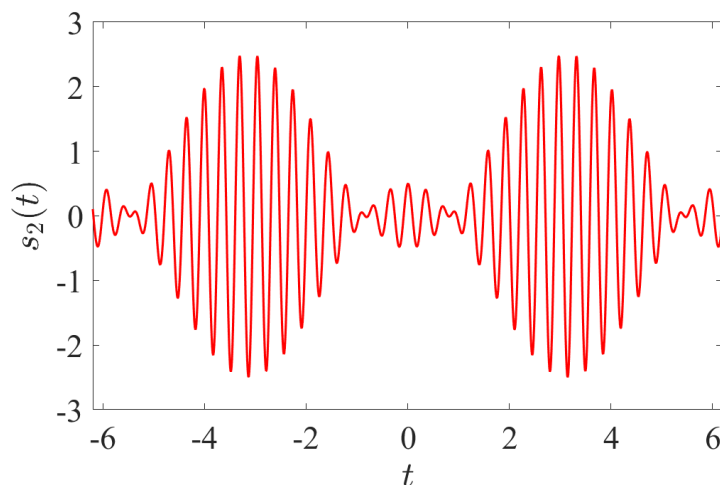
Figure 4 Courbes des signaux modulant et porteur

1. Donner les allures du signal modulé $s(t)$ pour un indice de modulation $\varepsilon_1 < 1$ et pour un indice de modulation $\varepsilon_2 > 1$ (surmodulation).

Pour $\varepsilon_1 < 1$, le signal modulé $s(t)$ a la forme

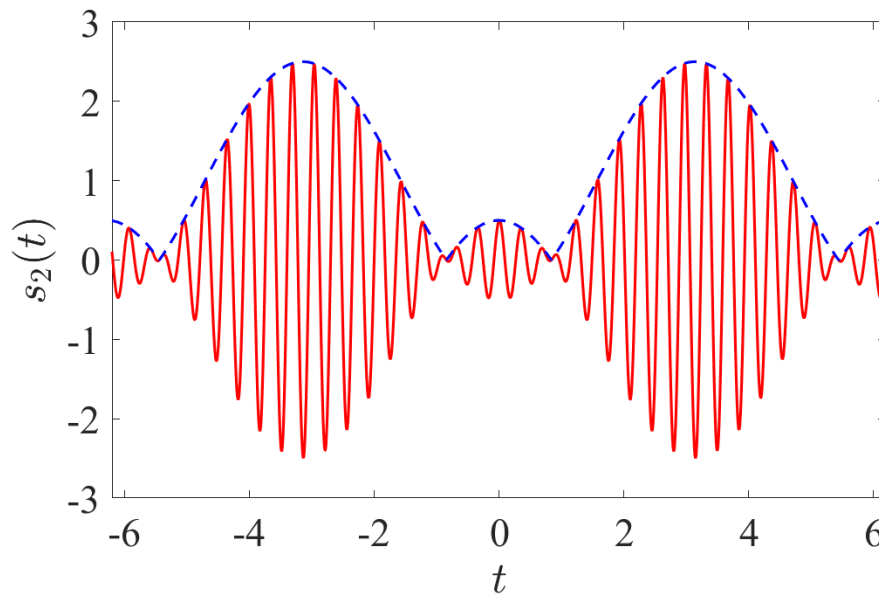


Pour $\varepsilon_2 > 1$, le signal surmodulé $s(t)$ a la forme :



2. Une méthode simple de démodulation d'amplitude est la détection de crêtes. Quel est son inconvénient pour démoduler un signal surmodulé ?

Pour un signal surmodulé, la détection de crêtes dévoile un signal distordu comme celui en dessous :



La courbe de crêtes (bleu en pointillé) n'a pas exactement l'allure du signal modulant $m(t)$, donc la démodulation n'a pas réussi.

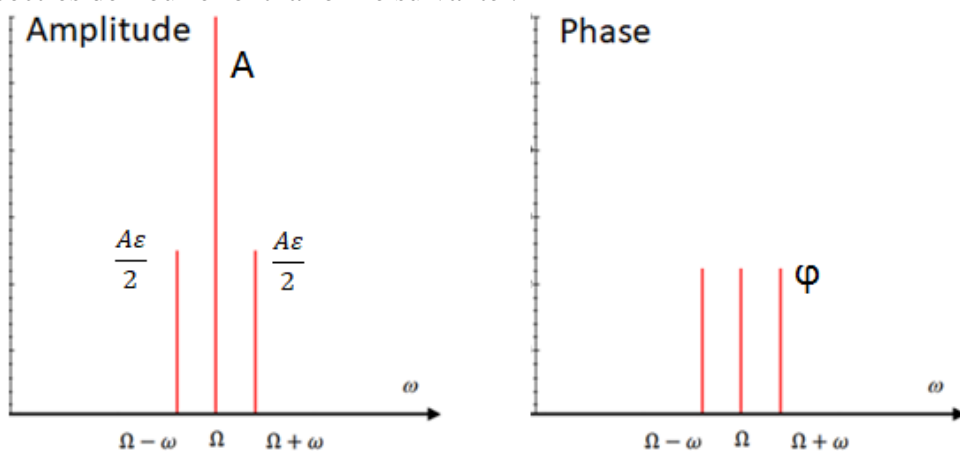
3. Tracer les spectres de Fourier du signal modulé $s(t)$, y compris les amplitudes et les phases. Pour le cas $\varepsilon \leq 1$, quel est le ratio maximal d'énergie des composants 'utiles' de $s(t)$, c'est-à-dire les composants de pulsation reliée avec ω ? Indication : la relation Parseval.

On décompose le signal modulé en une somme de série de Fourier :

$$s(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) (1 + \varepsilon \cos(\omega t))$$

$$= A \cos(\Omega t + \varphi) + \frac{A\varepsilon}{2} [\cos((\Omega - \omega)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega)t + \varphi)]$$

Ainsi les spectres de Fourier ont la forme suivante :



Les composants de pulsation $\Omega + \omega$ et $|\Omega - \omega|$ sont 'utiles', donc le ratio des composants utiles est $\frac{(\frac{A\varepsilon}{2})^2 + (\frac{A\varepsilon}{2})^2}{(\frac{A\varepsilon}{2})^2 + (\frac{A\varepsilon}{2})^2 + A^2}$. La valeur maximale de ce ratio pour $\varepsilon \leq 1$ est $\frac{1}{3}$, vérifiée quand $\varepsilon = 1$

Une autre méthode de démodulation d'amplitude est la démodulation synchrone. Elle consiste à multiplier le signal modulé $s(t)$ par la porteuse $y(t) = \cos(\Omega t + \varphi)$, et on obtient $d(t) = y(t)s(t)$. Après passage par un filtre passe-bas composé d'une résistance R et d'une capacité C d'ordre 1, on extrait le signal modulant à la fin $m(t)$.

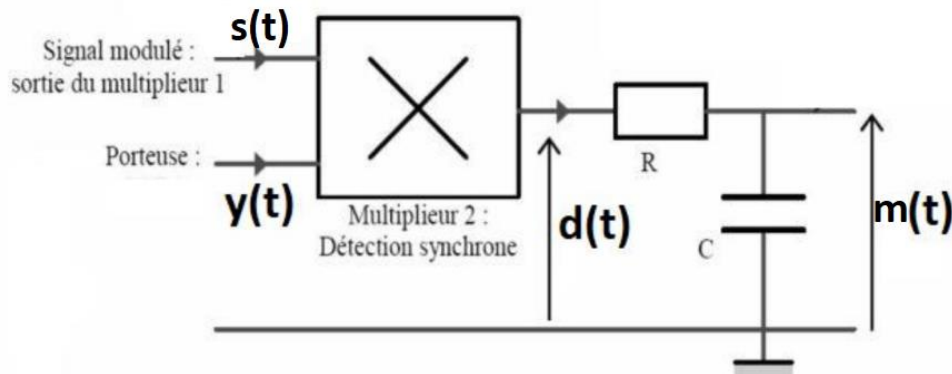


Figure 5 Schéma du circuit détection synchrone d'un signal modulé.

4. Calculer l'expression du signal $d(t)$, et ainsi trouver une exigence que la résistance R et la capacité C doivent vérifier pour accomplir la fonction souhaitée. Indication : penser à la pulsation de coupure.

On décompose le signal $d(t)$:

$$\begin{aligned} d(t) &= y(t)s(t) = \cos(\Omega t + \varphi) A \cos(\Omega t + \varphi) (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \\ d(t) &= A \frac{1 + \cos(2\Omega t + 2\varphi)}{2} (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A\varepsilon}{2} \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \cos(2\Omega t + 2\varphi) \\ &\quad + \frac{A\varepsilon}{4} [\cos((2\Omega - \omega)t + 2\varphi) + \cos((2\Omega + \omega)t + 2\varphi)] \end{aligned}$$

Le signal $d(t)$ contient les composants continue, composants de pulsations ω et 2Ω , $2\Omega + \omega$ et $|2\Omega - \omega|$. On veut extraire le signal modulant de pulsation ω ($\ll 2\Omega$, $2\Omega + \omega$ et $|2\Omega - \omega|$), donc il faut appliquer un filtre passe-bas avec une pulsation de coupure $\omega \ll \omega_c \ll 2\Omega$. Ces deux relations \ll sont pour garantir une meilleure séparation des composants.

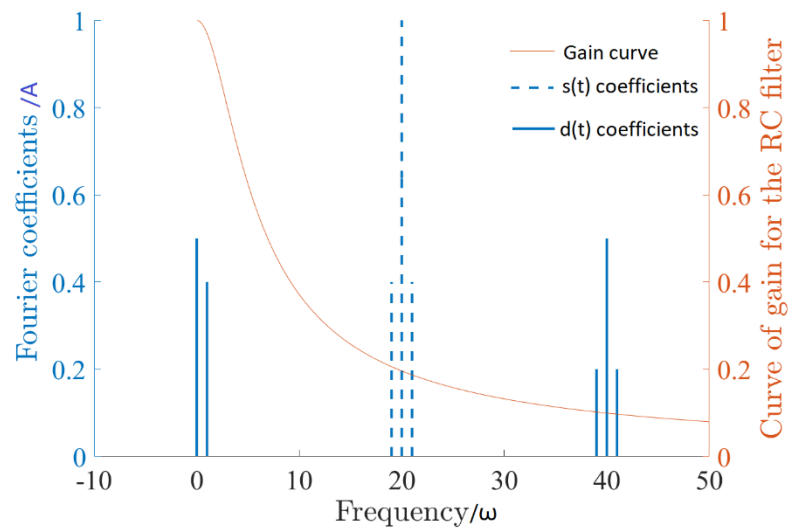
Pour un filtre passe-bas RC, on a une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{jC\omega(R + \frac{1}{jC\omega})} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$

avec $\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

Finalement, on trouve l'exigence $\omega \ll \frac{1}{RC} \ll 2\Omega$

5. Tracer le spectre de Fourier des signaux $d(t)$ et $s(t)$, en superposant la courbe de gain du filtre RC sur la figure. Est-ce possible de démoduler un signal $s(t)$ surmodulé par cette méthode de détection synchrone ?

On trace les coefficients de Fourier de $d(t)$ et $s(t)$ avec la courbe de gain du filtre RC superposée dessus :



Dans cette figure on a supposé $\varepsilon = 0.8$, $\Omega = 20\omega$ et $\frac{1}{RC} = 4\omega$

Le filtre passe-bas aide à extraire le signal modulant $m(t)$.

C'est possible de démoduler le signal $s(t)$ surmodulé par la méthode de détection synchrone, car la grandeur ε n'influence pas le fonctionnement du filtre passe-bas.