Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_8$

8 Novembre 2022

Exercice 1

Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices triangulaires supérieurs.
Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i > j$, alors $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Le cofficient ligne i, colonne j, de la matrice $A \cdot B$ est

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dans cette somme, si $k > j$, alors $b_{kj} = 0$ puis $a_{ik}b_{kj} = 0$ et si $k \leq j$, alors $i > j \geq k$ et en particulier $i > k$ de sorte que $a_{ik} = 0$ puis $a_{ik}b_{kj} = 0$.

Finalement, tous les termes de la somme sont nuls puis la somme est nulle.

En résumé, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, on a $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$.
Ceci montre que la matrice $A \cdot B$ est triangulaire supérieure.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B} = \big((1,2),(3,1)\big)$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E);\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E);\ \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \text{ et } \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}.$$

Notons $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$, on a :

▷ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, car $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(e_i) = e_i$ pour $i \in \{1,2\}$.

▷ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, car $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u_i) = u_i$ pour $i \in \{1,2\}$.

▷ $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, car

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u_1) = u_1 = 1.e_1 + 2.e_2$$
$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u_2) = u_2 = 3.e_1 + 1.e_2$$

▷ $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, car

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(e_1) = e_1 = -\frac{1}{5}.u_1 + \frac{3}{5}.u_2$$
$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(e_2) = e_2 = \frac{2}{5}.u_1 + -\frac{1}{5}.u_2$$

2. Montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ est inversible et que son inverse est $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$.

On calcule les produits suivants :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}.\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

et

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}.\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}. = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \text{ est inversible et son inverse est } \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}.}$

Exercice 3

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par :

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}({}^tA)$.

On a ${}^tA = [a_{j,i}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, d'où

$\boxed{\mathrm{trace}({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{trace}(A).}$

2. Montrer que trace est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On a

$$\mathrm{trace} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Soit $(A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = [b_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. On a alors $\lambda.A + B = [\lambda.a_{i,j} + b_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. D'où :

$$\mathrm{trace}(\lambda.A+B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda.a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda.\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda.\mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B).$$

$\boxed{\text{La trace est une forme linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$

3. Montrer que pour tout $(B,C) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: $\mathrm{trace}(B \cdot C) = \mathrm{trace}(C \cdot B)$.

Notons $B = [b_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $C = [c_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$. On a :

$$B \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{i,k}.c_{k,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad \text{et} \quad C \cdot B = \left[\sum_{l=1}^{n} c_{i,l}.b_{l,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{trace}(B \cdot C) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{i,k}.c_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}.c_{i,k}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.b_{k,i}\right) = \mathrm{trace}(C \cdot B).$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

4. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Montrer que

$$\operatorname{trace}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right) = \operatorname{trace}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)\right)$$

On a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u).P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

et donc, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)\right) &= \operatorname{trace}\left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u).P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)\\ &= \operatorname{trace}\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right)\\ &= \operatorname{trace}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right)\end{aligned}$$

car $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = I_n$.

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on définit :

$$\operatorname{trace}(u) = \operatorname{trace}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

5. Si u est un projecteur de E, Montrer que $\operatorname{trace}(u) = \operatorname{rang}(u)$

Soit u est un projecteur de E et posons $F = \operatorname{Im}(u)$ et $G = \operatorname{Ker}(u)$, la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r}\end{array}\right]$$

On a alors

$$r = \operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \operatorname{trace}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right) = \operatorname{trace}(u)$$

D'où

$$\boxed{\operatorname{trace}(u) = \operatorname{rang}(u).}$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

L'idée est que, si $-1 < x < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{p-1}) &= I_n - A + A - A^2 + A^2 + \dots + A^{p-1} - A^p\\ &= I_n - A^p\\ &= I_n.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } I_n - A \text{ est inversible et } A^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{p-1}.}$

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $(f_1, f_2) \in (\mathcal{L}(E))^2$ vérifiant :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = A_1 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E.

Plusieurs méthodes sont possibles.

— *Première méthode.* Montrons que $\mathcal{B}'$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a\,\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_2 + c\,\varepsilon_3 = 0_E$$

On a

$$\begin{aligned} a\,\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_2 + c\,\varepsilon_3 = 0_E &\iff (a+b+c)e_1 + (b+c)e_2 + (a+c)e_3 = 0_E \\ &\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Comme $\dim E = 3$ et que $\mathcal{B}'$ a 3 éléments, on conclut que

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E.}$$

— *Deuxième méthode (plus tard).* On écrit la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La méthode du pivot de Gauss donne

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned}$$

donc le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est 3. Elle est donc inversible, ce qui montre que

$$\boxed{B' \text{ est une base de } E.}$$

Remarques : (1) on a $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (2) en utilisant la méthode de la matrice augmentée on obtient directement $P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

2. Déterminer les matrices de f_1 et f_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ vérifie $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Deux méthodes pour calculer cet inverse :

— *Première méthode.* (*pas encore vu au cours*) On utilise la méthode de la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \; L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \; L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

donc

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

— *Deuxième méthode.* On exprime $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{B}'$ en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} e_1 + e_3 = \varepsilon_1 \\ e_1 + e_2 = \varepsilon_2 \\ e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_3 \end{cases}$$

d'inconnue (e_1, e_2, e_3), on trouve après calculs que

$$\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ e_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\ e_3 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

donc

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_1) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)\,P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.}$$

De même,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2)\,P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.}$$

3. Calculer $(A_1)^n$ et $(A_2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $P^{-1}P = I_3$, par une récurrence immédiate sur n on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_1)^n = \left(P \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_1) P^{-1}\right)^n = P \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_1)^n P^{-1}.$$

Comme $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)$ est une matrice diagonale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_1)^n = \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_1)^n = \begin{bmatrix} -(-2)^n + 3^n + 1 & (-2)^n - 3^n & (-2)^n - 1 \\ -(-2)^n + 1 & (-2)^n & (-2)^n - 1 \\ -(-2)^n + 3^n & (-2)^n - 3^n & (-2)^n \end{bmatrix}.}$$

De même, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_2)^n = P \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2)^n P^{-1}.$$

Pour calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2)$, plusieurs méthodes sont possibles.

— *Première méthode.* On calcule pour des petites valeurs de n pour deviner le résultat puis on le montre par récurrence sur n. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2)^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

— *Deuxième méthode.* On remarque que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2) = 2I_3 + N$ avec

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0_3.$$

Comme $(2I_3)N = N(2I_3)$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2)^n = (2I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} \\ &= (2I_3)^n + \binom{n}{1} N (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (2I_3)^{n-2} \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_2)^n = \begin{bmatrix} 2^n - n(n-1)2^{n-3} & n(n-1)2^{n-3} + n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ -n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ -n(n-1)2^{n-3} + n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} & 2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n-1} \end{bmatrix}.}$$

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & m & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de f.

   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(x,y,z,t) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+z+t=0 \\ m \times t = 0 \\ m \times x + m \times y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z+t=0 \\ m \times t = 0 \end{cases}$$

   Il faut donc distinguer deux cas.

   ▷ Si $m \neq 0$. Alors

$$(x,y,z,t) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

   Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,-1,0))$. Une base de $\ker(f)$ est donc $((1,-1,-1,0))$. On sait alors d'après le théorème du rang que la dimension de l'image de f est 3. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit de trouver une famille libre de 3 vecteurs de cet espace. Par exemple, en notant C_k la k-ième colonne de la matrice de f, les vecteurs C_3, $C_1 - 2C_3$ et $\frac{1}{m}(C_4 - C_3)$ forment une famille libre. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $((0,1,0,0),(1,0,0,m),(0,0,1,0))$.

   ▷ Si $m = 0$, on a

$$(x,y,z,t) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z+t=0 \end{cases}$$

   Une base de $\ker(f)$ est donc $((1,-1,-1,0),(0,0,1,-1))$. On sait alors d'après le théorème du rang que la dimension de l'image de f est 2. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit de trouver une famille libre de 2 vecteurs de cet espace. Les vecteurs C_3 et $C_2 - C_3$ forment par exemple une famille libre. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $((0,1,0,0),(1,0,0,0))$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau et l'image soient supplémentaires.

   Il faut et il suffit que leur intersection soit égale à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Ici, c'est vrai quelque soit la valeur de m.

Exercice 7

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.}$$

2. Calculer $A^2 - 3.A + 2.I_3$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

On vérifie que

$$A^2 - 3.A + 2.I_3 = 0_3.$$

On réécrit ceci en :

$$A^2 - 3.A = -2.I_3.$$

Donc

$$\left(-\frac{1}{2}.(A - 3.I_3)\right).A = A.\left(-\frac{1}{2}.(A - 3.I_3)\right) = I_3$$

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\tfrac{1}{2}.(A - 3.I_3).}$$

Exercice 8

Calculer le rang des matrices suivantes, déterminer celles qui sont inversibles et calculer leur inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

1. On a :

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Le rang de la matrice A est donc égal à 2.

2. On a :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Le rang de la matrice B est donc égal à 3.

3. On a :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Le rang de la matrice C est donc égal à 2.