Mathématiques II – TD$_8$

30-31 mai 2022

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t$.

L'idée est de découper l'intégrale en deux morceaux : sur $[-1,0]$ et sur $[0,2]$ pour se débarasser de la valeur absolue.

D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} t\,|t|\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, $t\,|t| = t^2$ si $t \in [0,2]$ donc

$$\int_{0}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3},$$

et d'autre part $t\,|t| = -t^2$ si $t \in [-1,0]$ donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-1}^{0} t\,|t|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} -t^2\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} t^2\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=0} = -\left(\frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_{-1}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}.}$$

Exercice 2

Calculer des primitives des fonctions suivantes en precisant sur quel intervalle la primtive est valable :

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^6+1}$

1. Notons I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I. Posons $u = x^3+1 = \phi(x)$ avec ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et donc $du = 3x^2dx$,

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln(|x^3+1|) + C.$$

   Où C répresnete un constant dans $\mathbb{R}$.

2. Notons I est l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

Posons $u = x^2 = \phi(x)$ avec ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $du = 2xdx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(u+1)^2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2}\right)du \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

Où C répresnete un constant dans $\mathbb{R}$.

3. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx + \int \frac{x}{x^6+1}\,dx.$$

Ensuite, en posant $u = x^3 = \phi_1(x)$ avec ϕ_1 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $du = 3x^2dx$,

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\arctan u + C_1 = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + C_1,$$

Où C_1 répresnete un constant dans $\mathbb{R}$. Et en posant $u = x^2$ $\phi_2(x)$ avec ϕ_2 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $du = 2xdx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3+1}\,du \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2-u+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C_2 \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C_2\end{aligned}$$

Où C_2 répresnete un constant dans $\mathbb{R}$. Finalement,

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Où C répresnete un constant dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Pour chaque fonction, déterminer une primitive sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$ avec u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$. On a donc
$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^3.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4.$$

2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 1$ avec u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, -2[$ de sorte que $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1 - x^2)$. On en déduit que
$$f(x) = \frac{-1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{(x^3 - 3x + 1)^2}.$$

3. Posons $u(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$ avec u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$. On a $u'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$. On en déduit que
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

4. Il faut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2\ln x$. On a alors
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)},$$
avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x).$$

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cosh(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\cos(2x)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{2x}}$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(2x) + \sin(x)}$

1. **Méthode 1**
On utilise la définition exponentielle de cosh , on a le terme général de la fonction comme :
$$\frac{1}{2}e^x\cos(2x) + \frac{1}{2}e^{-x}\cos(2x)$$
Comme la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on a :
$$\int \cosh(x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)\,dx$$

Puisque
$$\int e^x \cos(2x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx$$
où $u : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On fait deux fois primitivation par parties :

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos(2x)\,dx &= e^x \frac{1}{2}\sin(2x) - \int e^x \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x \sin(2x) - \int e^x \sin(2x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x \sin(2x) - (-\frac{1}{2}e^x \cos(2x) - \int -\frac{1}{2}e^x \cos(2x)\,dx)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^x \sin(2x) + \frac{1}{4}e^x \cos(2x) - \frac{1}{4}\int e^x \cos(2x)\,dx
\end{aligned}$$

On obtient alors :
$$\frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{1}{5}e^x \sin(2x) + \frac{1}{10}e^x \cos(2x)$$
de la même manière :
$$\frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{1}{5}e^{-x} \sin(2x) + \frac{1}{10}e^{-x} \cos(2x)$$
On a alors :
$$\begin{aligned}
\int \cosh(x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{2\cosh(x)\sin(2x)}{5} + \frac{\cos(2x)\sinh(x)}{5}
\end{aligned}$$

Une primitive est donc :
$$\boxed{x \mapsto \frac{2\cosh(x)\sin(2x)}{5} + \frac{\cos(2x)\sinh(x)}{5}}$$

Méthode 2

On utilise la définition exponentielle de cosh et cos :
$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\cos(2x) &= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}
\end{aligned}$$
Le terme général de la fonction s'écrit donc :
$$\frac{1}{4}\left(e^{(1+2i)x} + e^{(1-2i)x} + e^{(-1+2i)x} + e^{(-1-2i)x}\right).$$

On trouve alors une primitive :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}+\frac{e^{(1-2i)x}}{1-2i}+\frac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i}+\frac{e^{(-1-2i)x}}{-1-2i}\right)\\
&=\frac{(1-2i)e^{(1+2i)x}+(1+2i)e^{(1-2i)x}}{20}\\
&+\frac{(-1-2i)e^{(-1+2i)x}+(-1+2i)e^{(-1-2i)x}}{20}\\
&=\frac{e^{x}\left(2\cos(2x)+4\sin(2x)\right)+e^{-x}\left(-2\cos(2x)+4\sin(2x)\right)}{20}\\
&=\frac{2\cosh(x)\sin(2x)}{5}+\frac{\cos(2x)\sinh(x)}{5}
\end{aligned}$$

2. On pose $G(x)=(x^2+2x+2)$ et $f(x)=\cos(2x)$.
   Comme G et f sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :
   $$\int (x^2+2x+2)\cos(2x)\,dx=(x^2+2x+2)\frac{1}{2}\sin(2x)-\int(2x+2)\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$
   avec
   $$\int(2x+2)\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx=-(2x+2)\frac{1}{4}\cos(2x)-\int -2\frac{1}{4}\cos(2x)\,dx$$
   On concatène tout ça, et on trouve une primitive :
   $$\boxed{x\mapsto\frac{(2x^2+4x+3)\sin(2x)+(2x+2)\cos(2x)}{4}.}$$
3. On a :
   $$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2x}}&\underset{u=e^x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2\,(1+u)}\\
   &=\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$
   où la fonction $u=e^x=\phi(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive est donc :
   $$\boxed{x\mapsto\ln(e^x+1)-x-e^{-x}.}$$
4. Le domaine de définition de la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ est, noté D_f :
   $$D_f=\left\{x,x\neq\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\text{ avec }k\in\mathbb{Z}\right\}$$
   Comme la fonction arctan sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x\in D_f$, on a :
   $$\begin{aligned}\int^x\frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\mathrm{d}t&=\int^x\frac{\tan(t)+1-1}{\tan(t)+1}\mathrm{d}t\\
   &=\int^x 1\mathrm{d}t-\int^x\frac{1}{\tan(t)+1}\mathrm{d}t\\
   &\underset{u=\tan(t)}{=}x+\int^{\tan(x)}\frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u\\
   &=x-\left(\frac{1}{2}\int^{\tan(x)}\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int^{\tan(x)}\frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int^{\tan(x)}\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u\right)\\
   &=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(|\tan(x)+1|)+\frac{1}{4}\ln(\tan^2(x)+1)\end{aligned}$$

Une primitive est donc :

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(|\tan(x)+1|) + \frac{1}{4}\ln(\tan^2(x)+1)}$$

Remarque : une autre méthode possible consiste à faire lechangement de variable $u = \sin(x) + \cos(x)$ *.*

5. Puisque la fonction cos est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\sin(2t)+\sin(t)}\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{(2\cos(t)+1)\sin(t)}\mathrm{d}t\\ &= \int^x \frac{\sin t}{(2\cos(t)+1)\sin^2(t)}\mathrm{d}t\\ &\underset{u=\cos(t)}{=} \int^{\cos(x)} \frac{1}{(2u+1)(1-u^2)}\mathrm{d}u\\ &= -\frac{2}{3}\ln(|2\cos(x)+1|) + \frac{1}{6}\ln(|1-\cos(x)|) + \frac{1}{2}\ln(|1+\cos(x)|)\end{aligned}$$

Une primitive est donc :

$$\boxed{x \mapsto -\frac{2}{3}\ln(|2\cos(x)+1|) + \frac{1}{6}\ln(|1-\cos(x)|) + \frac{1}{2}\ln(|1+\cos(x)|)}$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\,(1+\ln(t)^2)}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)-\cos^3(t)}\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\ \ln(1+\cos(u))\,\mathrm{d}u$

1. On décompose une fonction rationnel et calcule l'intégrale avec changement de variable

$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \psi(t)$ avec ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\left([\ln(1+t)]_0^1 + \int_0^1 \frac{-1}{2}\,\frac{2t-1}{1-t+t^2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{-1}{2}\,[\ln(1-t+t^2)]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,(t-\frac{1}{2})\right)^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) + 0 + \sqrt{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right) \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,[\arctan(u)]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

2. Puisque la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,e]$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{t\,(1+\ln(t)^2)}\mathrm{d}t &\underset{u=\ln(t)}{=} \int_0^1 \frac{e^u}{e^u\,(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3. Puisque les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,e]$, par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_1^e t^n\,\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)-\cos^3(t)}\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)(1-\cos^2(t))}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos(t)}(-\sin(t))\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}\,\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\left[\cos^{\frac{3}{2}}(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{2}{3}\left[\cos^{\frac{3}{2}}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

5. Effectuons le changement de variable $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) = \phi(u)$ avec ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \ln(1+\cos(u))\,\mathrm{d}u &= \int_{\tan(\frac{\pi}{6})}^{\tan(\frac{\pi}{4})} \ln\left(\frac{2}{1+t^2}\right) \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(2) \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \ln(1+t^2) \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(2) \left[\ln(1+t^2)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} - \left[\frac{\ln(1+t^2)^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, x f(y) + y f(x) \leqslant 1$$

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Inégalité sur une intégrale par transformation de l'écriture, ici on peut faire deux changements de variable $x = \sin u$ et $x = \cos v$.

Notons

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a, par les changements de variable $x = \sin u$ et $y = \cos v$, et les fonction sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) \cos u\,\mathrm{d}u$$

et

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos v)(-\sin v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \sin v\,\mathrm{d}v,$$

d'où, en additionnant et en utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(\sin u)\cos u + f(\cos u)\sin u\right)\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 7

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $f(x)$ pour $x > 0$.
3. Montrer que pour tous $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a < b$,

$$\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + a\,g(a)^2 - b\,g(b)^2$$

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (car f est continue sur $\mathbb{R}_+$) donc en particulier continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit, g est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a, en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$,

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\big(F(x) - F(0)\big) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0),$$

puisque F est dérivable sur R_+ (donc en 0) et $F' = f$, ce qui montre que g est continue en 0 et donc que

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

2. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x)$$

d'où

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}}$$

3. L'expression incite à faire une intégration par parties. On pose $u\colon t \mapsto g(t)^2$ et $v\colon t \mapsto t$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[u(t)\,v(t)\big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[g(t)^2\,t\big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b 2\,g(t)\,g'(t)\,t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'une part on a

$$\big[g(t)^2\,t\big]_{t=a}^{t=b} = b\,g(b)^2 - a\,g(a)^2$$

et d'autre part, d'après la question précédente,

$$\int_a^b 2\,g(t)\,g'(t)\,t\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b g(t)\,\frac{f(t) - g(t)}{t}\,t\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, on obtient

$$\int_a^b g(t)^2 \,\mathrm{d}t = b\,g(b)^2 - a\,g(a)^2 - 2\int_a^b g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + a\,g(a)^2 - b\,g(b)^2}$$

Exercice 8

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue et soient $u\colon J \to I$ et $v\colon J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que la fonction $\phi\colon x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et calculer sa dérivée ϕ'.

Application : étudier le sens de variation de la fonction $\psi\colon x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$ sur $]1,+\infty[$.

▷ Notons F une primitive de f sur I (possible car f est continue sur I). On a, pour tout $x \in J$,

$$\phi(x) = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F\big(u(x)\big) + F\big(v(x)\big) - F(a) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big),$$

où a est un élément quelconque de I. Par composition, cela montre que

$$\boxed{\phi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } J}$$

▷ De plus, pour tout $x \in J$,

$$\phi'(x) = v'(x)F'\big(v(x)\big) - u'(x)F'\big(u(x)\big)$$

et comme $F' = f$ sur I, on obtient

$$\boxed{\forall x \in J, \quad \phi'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)}$$

▷ D'après ce qui précède, puisque $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)^2}$ est continue sur $I =]1,+\infty[$ et que $v\colon x \mapsto x$ et $v\colon x \mapsto x^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J =]1,+\infty[$, ψ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus,

$$\forall x > 1, \quad \psi'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)^2} - \frac{1}{\ln(x)^2} = \frac{x-2}{2\ln(x)^2}.$$

On en déduit que $\psi' < 0$ sur $]1,2[$ et $\psi' > 0$ sur $]2,+\infty[$, d'où

$$\boxed{\psi \text{ est décroissante sur }]1,2] \text{ et croissante sur } [2,+\infty[}$$

Exercice 9

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique (c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ de deux façons : (1)

en utilisant la fonction $g\colon x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$; (2) par un changement de variable.

1. D'après l'exercice précédent, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1\, f(x+T) - 1\, f(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

puisque f est T-périodique. Cela montre que g est constante sur $\mathbb{R}$. En particulier, $g(a) = g(0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la dernière intégrale, on fait le changement de variable $u = t - T$ ($t \mapsto t - T$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = 1$$

donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ ». De plus, quand $t = T$, u vaut 0 et quand $t = a + T$, u vaut a, donc, par changement de variable et en utilisant le fait que f est T-périodique :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0 f(u)\,\mathrm{d}u$$

On obtient donc

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc finalement

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u}$$

Remarque : le résultat est toujours vrai si f est seulement continue par morceaux.

Exercice 10

Calculer les integrales multiples suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y), x \leqslant 1, y \leqslant 1, x+y \geqslant 1\}$
2. $\displaystyle\int\int_{[-1,1]^2} |x+y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. $\displaystyle\int\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
   où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$

4. $\displaystyle\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

1.

$$\begin{aligned}\int\int_D (x+y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y)\,dy\right)\,dx\\ &= \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}\,dx\\ &= \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)\,dx\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\,dx\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

On a alors

$$\int\int_D (x+y)dxdy = \frac{2}{3}.$$

2. Ponsons $f(x,y)=|x+y|$ alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$. C'est-à-dire, f prend les memes valeurs en deux points symetriques par rapport a O. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)\,dxdy &= \int\int_{-1\leqslant x,y\leqslant 1, x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy + \int\int_{-1\leqslant x,y\leqslant 1, x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy\\ &= 2\int\int_{-1\leqslant x,y\leqslant 1, x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy\\ &= 2\int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x+y)\,dy\right)\,dx\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

On a alors

$$\int\int_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy = \frac{8}{3}.$$

3.

$$\begin{aligned}\int\int_D xy\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right) x\,dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x(x-x^4)\,dx\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

On a alors

$$\int\int_D xy\,dxdy = \frac{1}{12}.$$

4. Appliquons le théorème Fubini cas général, on a

$$\begin{aligned}\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z} xyz\,dxdydz &= \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 z\,dz\right)y\,dy\right)x\,dx\\ &= \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy\right)x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4})x\,dx\\ &= \frac{1}{48}\end{aligned}$$

On a alors

$$\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z} xyz\,dxdydz = \frac{1}{48}.$$