Suites et Séries – TD$_{10}$

14-15 novembre 2022

Exercice 1

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 2

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 3

Soit p points distincts du plan.

1. On construit un polygone à p côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il ?
2. Combien de polygones à $n \leqslant p$ côtés peut-on réaliser à partir de ces p points ?

Exercice 4

Déterminer les valeurs des sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ (on pourra faire un raisonnement de dénombrement) ;
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On pourra remarquer que $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ et faire un raisonnement de dénombrement.

Exercice 5

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 6

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle l'*indicatrice de A* l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On rappelle que si A est une partie finie, l'application $\mathbb{1}_A$ permet de retrouver le cardinal de A :

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble fini et soient $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E non nécessairement disjoints. Montrer la *formule du crible* :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

Exercice 7

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Dans cet exercice on veut calculer $S(n,p)$, le nombre de surjections de $\{1,\ldots,n\}$ sur $\{1,\ldots,p\}$.

1. Des cas particuliers :
   (a) Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$.
   (b) Calculer $S(n,n)$.
   (c) Calculer $S(n,1)$.
   (d) Calculer $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que, pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a la relation

$$S(n,p) = p\big(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\big).$$

4. En déduire un algorithme pour calculer $S(n,p)$.
5. Démontrer que

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$