Renewtcolorboxframedbreakable
Renewcommand0.4pt0pt
Rfoot Page 1/?? Rhead Renewcommand$\veebar \wedge$

1. Définition d'une boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.

Réponse – Vrai

$$BO(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < r\}$$

Réponse – Faux

$$BO(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| \leqslant r\}$$

Réponse – Faux

$$BO(x,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < r\}$$

Réponse – Faux

$$BO(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-r| < x\}$$

2. Définition d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue en $x \in \mathbb{R}^n$.

Réponse – Vrai

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in BO(x,\eta),\ f(y) \in BO(f(x),\varepsilon)$$

Réponse – Faux

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in BO(x,\varepsilon),\ f(y) \in BO(f(x),\eta)$$

Réponse – Faux

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in BO(x,\eta),\ f(y) \in BO(f(x),\eta)$$

Réponse – Faux

$$\exists \eta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in BO(x,\eta),\ f(y) \in BO(f(x),\varepsilon)$$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

est-elle continue en (0,0) ?

Réponse – Vrai

Non, car elle n'est pas constante sur une droite passant par $(0,0)$.

Réponse – Faux

Oui, car elle est constante et égale à 0 sur l'axe des abscisses.

Réponse – Faux

Oui, car elle est constante et égale à 0 sur l'axe des ordonnées.

Réponse – Faux

Oui, car elle est constante et égale à 0 sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Réponse – Vrai

Oui, comme somme et composée de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$, et parce que $1+x^2y^2 > 0$.

Réponse – Faux

Non, car la fonction racine n'est pas définie sur $]-\infty,0[$.

Réponse – Faux

Oui car ses dérivées partielles en $(0,0)$ existent.

Réponse – Faux

Non car une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est jamais de classe $\mathcal{C}^1$

5. Pourquoi fait-on du calcul différentiel sur des ouverts ?

Réponse – Vrai

C'est plus délicat de travailler sur les bords d'un ensemble quand il n'est pas ouvert.

Réponse – Faux

Personne ne sait vraiment pourquoi. C'est un chercheur qui a copié sur un autre, qui a copié sur autre... et personne ne s'est jamais posé la question.

Réponse – Faux

Ca rime avec couverts, et ça donne faim.

Réponse – Faux

C'est marrant les ouverts.

6. Comment calcule-t-on une différentielle de f en x_0 ?

Réponse – Vrai

On peut utiliser les règles de calcul (somme, produit, composée, fonction bilinéaire...) de fonctions différentiables, et en dernier recours calculer $f(x_0+h)$ et le décomposer sous la forme terme constant + terme linéaire en h + terme négligeable.

Réponse – Faux

On dérive, comme sur $\mathbb{R}$.

Réponse – Faux

On calcule les dérivées partielles.

Réponse – Faux

On copie sur un voisin plus intelligent / une voisine plus intelligente.

7. Pour une fonction différentiable sur un ouvert, quel est le lien entre sa dérivée partielle en un point x dans la direction v, et sa dérivée partielle en ce même point x dans la direction $2v$?

Réponse – Vrai

Elles sont dans la même direction, et la dérivée partielle dans la direction v est deux fois plus petite que celle dans la direction $2v$.

Réponse – Faux

Elles sont dans la même direction, et la dérivée partielle dans la direction v est deux fois plus grande que celle dans la direction $2v$.

Réponse – Faux

Elles sont égales.

Réponse – Faux

Elles ne sont pas nécessairement dans la même direction.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, et soit $(h, x) \in \mathbb{R}$. Que vaut $df_x(h)$?

Réponse – Vrai

$2xh$

Réponse – Faux

x^2

Réponse – Faux

h^2

Réponse – Faux

$x^2 + 2xh + h^2$

9. Quelle est la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 2xy, 4y + 1)$ au point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?

Réponse – Vrai

$$\begin{bmatrix} 1+2b & 2a \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Réponse – Faux

$$\begin{bmatrix} 1+2b & 0 \\ 2a & 4 \end{bmatrix}$$

Réponse – Faux

$$\begin{bmatrix} 2a & 4 \\ 1+2b & 0 \end{bmatrix}$$

Réponse – Faux

$$\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 1+2b & 4 \end{bmatrix}$$

10. Pour montrer qu'une fonction à deux variables n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert O :

Réponse – Vrai

Il suffit de montrer qu'une de ses dérivées partielles n'est pas continue sur O.

Réponse – Faux

Il faut montrer qu'elle n'est pas continue.

Réponse – Faux

Il faut impérativement commencer par calculer sa différentielle, et ensuite montrer qu'elle n'est pas continue.

Réponse – Faux

Il faut montrer qu'il existe un point pour lequel est n'a aucune dérivée directionnelle continue.

11. Quelle est la différentielle de la norme euclidienne au point x en h ?

Réponse – Vrai

$\frac{\langle x,h\rangle}{|x|}$

Réponse – Faux

$|h| \cdot |x|$

Réponse – Faux

$\langle x, h\rangle$

Réponse – Faux

$\frac{\langle x,h\rangle}{|h|}$

12. Comment calcule-t-on la différentielle seconde d'une application f ?

Réponse – Vrai

On peut appliquer les règles de calculs vues pour la différentielle. On peut aussi calculer df_{x+h} (ou $df_{x+h}(k)$), que l'on sépare en trois termes : un terme constant en h, un terme linéaire en h et un terme négligeable en h.

Réponse – Faux

On saute la question, c'est trop dur.

Réponse – Faux

On peut appliquer les règles de calculs vues pour la différentielle. On calcule $df_x(h)$, que l'on sépare en trois termes : un terme constant en h, un terme linéaire en h et un terme négligeable en h.

Réponse – Faux

On calcule la dérivée de la différentielle.

13. Sur quels points la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \max(x^2, y^2)$ n'est-elle pas différentiable ?

Réponse – Vrai

Elle est différentiable partout sauf sur l'ensemble $\{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \{x, -x\}\}$

Réponse – Faux

Elle est différentiable partout, comme composée de deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$

Réponse – Faux

Elle est différentiable partout sauf sur l'ensemble $\{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$

Réponse – Faux

Elle est différentiable partout sauf sur l'ensemble $\{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\}\}$

14. Soit $n \geqslant 2$. L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est stable par :

Réponse – Vrai

Addition, composition, mais pas par multiplication ni par quotient

Réponse – Faux

Addition, composition, multiplication, mais pas par quotient

Réponse – Faux

Addition, composition, multiplication, quotient

Réponse – Faux

Addition, composition, quotient, mais pas par multiplication