Séries de Fourier
Td-Tp 13

Decembre 2023

Exercice 1

Déterminer la série de Fourier pour les fonctions suivantes :

1. $\forall x \in]0, \pi[,\ f(x) = 1$ impaire, 2π-périodique.
2. $\forall x \in]0, \pi[,\ f(x) = x(\pi - x)$ paire, 2π-périodique.

1. L'expression de n-ième coefficient de Fourier de f est

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t\right)$$

Si $n = 0$,

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-i\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot e^{-i\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

Si $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{t=0}^{\pi} - \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{t=\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1-e^{-in\pi}}{in\pi}$$

Alors, on peut développer la fonction f en série de Fourier complexe comme

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e_p(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-in\pi}}{in\pi}e^{inx} - \frac{1-e^{in\pi}}{in\pi}e^{-inx}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)$$

(a) **Déterminer les coéfficients de Fourier trigonométrique de f à l'aide de $c_n(f)$**
On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0(f) = c_0(f) = 0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 0$$

$$b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi,

$$S(f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)x)$$

(b) **Déterminer les coéfficients de Fourier trigonométrique de f par définition**
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{par périodicité}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. De la même façon, on va calculer les coefficients de Fourier de $f(x) = x(\pi - x)$ paire.

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \underset{\text{par périodicité}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \underset{\text{par parité}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Si $n = 0$,

$$c_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cdot e^{-i\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$

Si $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2e^{-int}\,\mathrm{d}t \overset{\text{I.P.P.}}{=} -\frac{1+e^{-in\pi}}{n^2}$$

Alors, on peut développer la fonction f en série de Fourier complexe comme

$$\begin{aligned} S(f)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e_p(t) \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1+e^{-in\pi}}{n^2}e^{inx} - \frac{1+e^{in\pi}}{n^2}e^{-inx}\right) \end{aligned}$$

(a) **Déterminer les coéfficients de Fourier trigonométrique de f à l'aide de $c_n(f)$**
On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{-2 - e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2}$$
$$b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right) = 0$$

Ainsi,

$$S(f)(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2 - e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2}\cos(nx)$$

(b) **Déterminer les coéfficients de Fourier trigonométrique de f par définition**
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cdot\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{-4}{n^2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t(\pi - t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

et

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{par périodicité}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$

En fait, nous allons obtenir le même résultat avec les méthodes différentes. Alors, si vous n'étes pas sûrs d'avoir le bon, éssayez une autre façon !
Les séries de Fouriers des fonctions impaire contiennent seulement les termes sin. *En revanche, les séries de Fouriers des fonctions paire contiennent seulement les termes* cos. *Imaginez que* sin *soit une fonction impaire et que* cos *soit une fonction paire, ce qui détermine également la parité de la série qui les compose.*

Exercice 2

Soit la fonction de période $T = 2\pi$, définie par

$$t \mapsto f(t) = t^2 + t, \quad \text{si } t \in [0, 2\pi[$$

1. Tracer la graphe de f.
2. Déterminer le développement de f en série de Fourier complexe.
3. Déterminer le développement de f en série de Fourier sous forme trigonométrique.
4. Si la fonction définie par $g : t \mapsto t^2 + t$ sur $t \in [0, 2[$ est 2-périodique, comment déterminez-vous les coefficients de Fourier (sans calcul) ?

1. À l'aide de Python...
2. L'expression de n-ième coefficient de Fourier de f est

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(t^2 + t\right) e^{-int} \, \mathrm{d}t = i \frac{1 + 2\pi}{n} + \frac{2}{n^2}$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{d}t = \pi + \frac{4\pi^2}{3}$$

Ainsi,

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e_p(t) = \pi + \frac{4\pi}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(i \frac{1 + 2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) e^{inx} + \left(-i \frac{1 + 2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) e^{-inx} \right)$$

3. Par définition,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t^2 + t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{8\pi^3}{3} + \frac{4\pi^2}{2} \right) = \frac{4\pi^2 + 3\pi}{3}$$

(a) Par partie :

$$u = t^2 + t, \qquad v' = \cos(nt)$$
$$u' = (2t + 1), \qquad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

2 fois :

$$u = 2t + 1, \qquad v' = \sin(nt)$$
$$u' = 2, \qquad v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t^2 + t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (t^2 + t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(t^2 + t) \sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} (2t + 1) \sin(nt) \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{n\pi} \left[-(2t + 1) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_{t=0}^{2\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{n\pi} \left(\left(-\frac{4\pi + 1}{n} - \left(-\frac{1}{n} \right) + \frac{2}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{2\pi} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{n\pi} \left(-\frac{4\pi}{n} + 0 \right) = \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

(b) Par partie :

$$u = t^2 + t, \qquad v' = \sin(nt)$$
$$u' = (2t+1), \quad v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

2 fois :

$$u = 2t+1, \quad v' = \cos(nt)$$
$$u' = 2, \qquad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t^2+t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(t^2+t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(t^2+t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}(2t+1)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2+2\pi}{n} - 0\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\left[(2t+1)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2+2\pi}{n} - 0\right) + \frac{1}{n\pi}\left(0 - 0 - \frac{2}{n}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{2\pi}\right) \\
&= -\frac{4\pi^2+2\pi}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{4\pi+2}{n}
\end{aligned}$$

En résumé :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{4\pi^2+3\pi}{3} \\ a_n = \dfrac{4}{n^2} \\ b_n = -\dfrac{4\pi+2}{n} \end{cases} \tag{1}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$S(t) = \frac{4\pi^2+3\pi}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nt) - \frac{4\pi+2}{n}\sin(nt)\right)$$

4. Si nous voulons étudier une fonction T-périodique, alors le système total n'est plus $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous le remplaçons par $(e^{in\frac{2\pi}{T}x})_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont aussi T-périodiques. Pour obtenir

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}, \quad \forall (n,m)\in\mathbb{Z}^2$$

Le produit scalaire hermitien est défini comme

$$\forall (f,g)\in E^2, \quad \langle f,g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc, posons, pour $n\in\mathbb{Z}$

$$e_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto e^{in\frac{2\pi}{T}x} \end{cases}$$

Alors, la n-ième coefficient de Fourier de f

$$c_n(f) \overset{\text{Not}}{=} \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t$$

De même, les coefficients de Fourier trigonométriques de f

$$a_0(f) = c_0(f)$$
$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n(f) = i\,(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ bornée. Développer en série de Fourier la fonction $g(x) = |\sin(x)|$ sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)|\sin(\lambda x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b \frac{f(x)\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Que dire de

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin(\lambda x)|\,\mathrm{d}x \ ?$$

La fonction g est 2π-périodique, donc est développable en série de Fourier, définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(g)(x) = a_0(g) + \sum_{p=1}^{n} a_p(g)\cos(px) + b_p(g)\sin(px)$$

Comme g est paire, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $b_p(g) = 0$. Alors :

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2x)\right]_{x=0}^{\pi} = 0$$

Et, pour tout $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
a_p(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\cos(px)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(px)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin((p+1)x) - \sin((p-1)x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\left((p+1)x\right)}{p+1} + \frac{\cos\left((p-1)x\right)}{p-1}\right]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{-(-1)^{p+1}}{p+1} + \frac{(-1)^{p-1}}{p-1}\right) - \left(\frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p-1}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{p+1}-1}{p^2-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$, et on en déduit

$$S_{2n}(g)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos(2px)}{4p^2-1}$$

Comme g est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, $S_n(g)$ converge uniformément vers g. Donc

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{4p^2-1}$$

Cela donne, en remplaçant x par λx, en multipliant par $f(x)$ et en intégrant entre a et b :

$$\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\int_a^b f(x)\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2p\lambda x)}{4p^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Il ne reste plus qu'à inverser le signe somme et le signe intégrale. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(x) = \frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}$$

Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2-1}$ intégrable sur $[a,b]$,
2. $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{4n^2-1}$, donc $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,b]$ (d'après le critère de Riemann).

Alors on peut inverser le signe somme et le signe intégrale pour obtenir l'égalité recherchée : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)|\sin(\lambda x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b \frac{f(x)\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}\,\mathrm{d}x$$

D'après le Lemme de Riemann-Lebesgue, $v_n(\lambda) := \int_a^b \frac{f(x)\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}\,\mathrm{d}x \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. Enfin, il nous reste à montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{\lambda\to+\infty} v_n(\lambda) = 0$. Or, $\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{(b-a)\|f\|_\infty}{4n^2-1}$, donc $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\int_a^b f(x)|\sin(\lambda x)|\,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

On considère l'ensemble

$$E1 = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

Montrer l'existence de constantes C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\forall f \in E_1, \quad \|f\|_\infty \leq C_1\|f'\|_2, \quad \|f\|_\infty \leq C_2\|f''\|_2, \quad \|f\|_2 \leq C_3\|f'\|_2$$

Trouver, dans chaque cas, la meilleure constante possible.

On remarque que la fonction

$$\begin{aligned} g : [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f\left(\frac{x}{\pi}\right) & \text{si } x > 0 \\ -f\left(-\frac{x}{\pi}\right) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

est impaire, continue et vérifie $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, donc elle se prolonge en une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, que l'on note g également.
Comme $f \in \mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, alors g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$. On va montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$. Il suffit pour cela de montrer que sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche coïncident.
Si $t > 0$:

$$\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{f\left(\frac{t}{2\pi}\right) - f\left(\frac{0}{2\pi}\right)}{t-0} = \frac{1}{2\pi}\frac{f\left(\frac{t}{2\pi}\right) - f\left(\frac{0}{2\pi}\right)}{\frac{t}{2\pi}-0} \to \frac{1}{2\pi}f'(0)$$

Si $t < 0$:
$$\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{-f(-2\pi t)-f(0)}{-t\cdot 2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}\frac{f(-2\pi t)-f(0)}{-t} \to \frac{1}{2\pi}f'(0)$$
Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$. De la même façon on montre que g' est continue en π, donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, et donc sur $\mathbb{R}$ comme elle est 2π-périodique. De plus, g de classe $\mathscr{C}^2$ par morceaux. Donc elle est égale à sa série de Fourier : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

Alors $\|g\|_\infty, \mathbb{R} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$.
D'autre part, g' est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc converge : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$$

où $\alpha_n = n\cdot b_n$ car $c_n(f') = in\cdot c_n(f)$. Par l'égalité de Parseval,

$$\|g'\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2|b_n|^2.$$

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|g\|_\infty^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cdot n|b_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n^2\right) = \frac{\pi^2}{3}\|g'\|_2^2$$

Donc
$$\|g\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\|g'\|_2$$
On en déduit que
$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\|g'\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}\|f'\|_2.$$
De la même façon,
$$\|g''\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|\beta_n|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4\cdot b_n^2.$$
$$\|g\|_\infty^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n^2|b_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 b_n^2\right) = \frac{\pi^4}{45}\cdot\|g''\|_2^2$$
$$\|f\|_\infty^2 = \|g\|_\infty^2 \leq \frac{\pi^4}{45}\|g''\|_2^2 = \frac{1}{45}\|f''\|_2^2$$
$$\|f\|_\infty = \frac{1}{3\sqrt{5}}\|f''\|_2$$