Mathématiques II – TD$_3$

25-26 avril 2022

Exercice 1

Calculer les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$ à l'ordre 3 ;
2. $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 6 ;
4. $x \mapsto \big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 ;
6. $x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 ;
7. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 ;
8. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ à l'ordre 4 ;

1.
$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x = 1+x+x^2+x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3) - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}.$$

2.
$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\underset{x\to 0}{o}(x^4) - \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\\ &= \boxed{2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+\underset{x\to 0}{o}(x^4).}.\end{aligned}$$

3. En appliquant la méthode du cours, puisque les développements limités de la fonction sinus commencent par x, on a seulement besoin d'un $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(2x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\\ &= \boxed{x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^6).}\end{aligned}$$

On peut vérifier ce résultat à l'aide de la commande *series* de Python :

```
series(sin(x)*cos(2*x),x,0,6)
```

Résultat : $x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + \underset{x\to 0}{O}(x^6)$

4. À partir de maintenant, on applique la méthode du cours pour trouver les ordres des différents développements limités.

$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2 = \boxed{x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

5. On pose $u = x + x^2$ et on a $u \to 0$ quand $x \to 0$. De plus,

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+u^4+\underset{x\to 0}{o}(u^4)$$

avec

$$\begin{aligned} u &= x + x^2 \\ u^2 &= x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &= x^3 + 3x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ u^4 &= x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

6. On a
$$\cos x + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = \frac{1}{2}\big(1-u\big) \quad \text{avec} \quad u = \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
On a $u \to 0$ quand $x \to 0$ et $\underset{x\to 0}{o}(u) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + \underset{x\to 0}{o}(u) = 1 + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
On a donc
$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
d'où
$$\frac{\sin x - 1}{1 + \cos x} = \big(-1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\big)\Big(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big) = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

```
series((sin(x)-1)/(1+cos(x)),x,0,3)
```

Résultat : $-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{O}(x^3)$

7. On a
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
d'où
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$
Or $u \to 0$ quand $x \to 0$ et $\underset{x\to 0}{o}(u^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ donc
$$u^2 = \frac{x^4}{36} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$
Comme
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(u^2),$$
on a
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \boxed{\frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

8. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \to 0$ quand $x \to 0$ donc

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(u^4).$$

Comme

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ u^3 &= x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ u^4 &= x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4), \end{aligned}$$

on obtient

$$\mathrm{e}^{\sin x} = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

Exercice 2

Calculer les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 ;
2. $x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 ;
3. $x \mapsto x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4.

1. On écrit

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/x} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \\ &= \exp\left[\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right] \\ &= \exp\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\ &= \exp(1)\ \exp\left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \end{aligned}$$

On pose

$$u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Alors on a

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(u^2)$$

Avec

$$u^2 = \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Donc

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/x} &= \exp(1)\ \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\ &= \exp(1)\ \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \end{aligned}$$

Finalement

$$(1+x)^{1/x} = \boxed{\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

Vérifions par Python :

```
series((1+x)**(1/x),x,0,3)
```

Résultat : $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{O}(x^3)$

2. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\big(\sin(x)\ln(\cos x)\big).$$

On pose

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ u^3 &= \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ u^4 &= \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ u^5 &= \underset{x\to 0}{o}(x^5) \end{aligned}$$

donc

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\ &= -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \end{aligned}$$

En posant

$$v = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

on a $v^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ d'où

$$\mathrm{e}^v = 1 + v + \underset{x\to 0}{o}(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

donc finalement

$$(\cos x)^{\sin x} = \boxed{1 - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^5).}$$

```
series(cos(x)**(sin(x)),x,0,6)
```

Résultat : $1 - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{O}(x^6)$

3. On a
$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cosh x)\right).$$
On a également
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
et on pose
$$u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
On a
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(u^2).$$
Comme
$$u^2 = \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4),$$
on obtient finalement
$$\frac{1}{x}\ln(\cosh x) = \frac{1}{x}\ln(1+u) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$
On pose
$$v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
de sorte que
$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(v^3).$$
Mais
$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ v^2 &= \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ v^3 &= \frac{x^3}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$
d'où
$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
et donc
$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$$

```
series(x*(cosh(x))**(1/x),x,0,5)
```

Résultat : $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$

Exercice 3

Calculer les développements limités à l'ordre et au voisinage indiqué des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 2 ;
2. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1 ;
3. $x \mapsto \cos x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$;
4. $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 2.

1. On pose $x = 2 + h$ d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h^3)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + \underset{h\to 0}{o}(h^3).\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^3\right).}$$

```
1  series(1/x,x,2,4)
```

Résultat : $1 - \frac{x}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \underset{x\to 2}{O}\left((x-2)^4\right)$

2. On pose $x = 1 + h$ d'où

$$\mathrm{e}^{1+h} = \mathrm{e}\mathrm{e}^h = \mathrm{e} + \mathrm{e}h + \frac{\mathrm{e}}{2}h^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)$$

et donc

$$\mathrm{e}^x = \boxed{\mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right).}$$

3. On pose $x = \frac{\pi}{3} + h$ d'où

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)\end{aligned}$$

donc

$$\cos x = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).}$$

```
1  series(cos(x),x,pi/3,4)
```

Résultat : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$

4. On pose $x = 2 + h$, d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} &= \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)\right] \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3).\end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{x} = \boxed{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + \underset{x\to 2}{o}\big((x-2)^3\big).}$$

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = x^2 + f(2\,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les $\mathrm{DL}_3(0)$ possibles de f.

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$, elle admet un $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3),$$

avec a_0, a_1, a_2 et a_3 des nombres réels. Par composition à droite par $x \mapsto 2x$, on obtient

$$x^2+f(2\,x) = x^2+a_0+2\,a_1\,x+4\,a_2\,x^2+8\,a_3\,x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3) = a_0+2\,a_1\,x+(4\,a_2+1)\,x^2+8\,a_3\,x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Puisque $f(x) = x^2 + f(2\,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par unicité de la partie régulière du $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, on en déduit que

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = 2\,a_1, \quad a_2 = 4\,a_2 + 1 \quad \text{et} \quad a_3 = 8\,a_3$$

donc

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-1}{3} \quad \text{et} \quad a_3 = 0.$$

Finalement, les $\mathrm{DL}_3(0)$ possibles de f sont de la forme

$$\boxed{f(x) = a_0 - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3), \quad a_0 \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 5

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n et le calculer.

Il y a plusieurs méthodes possibles. On peut partir d'un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et élever au carré. On propose ici une autre méthode.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, elle admet donc un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On remarque ensuite que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ sur $]-1,+\infty[$ donc elle admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ donné par

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-0} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\,x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\,x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

Or on sait que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n+1} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) = 1 + \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

Par unicité de la partie régulière, on en déduit que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \frac{a_k}{k+1} = 1$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

Exercice 6

Montrer que les fonctions arc sinus et arc cosinus admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n. Calculer leur $\mathrm{DL}_7(0)$.

La fonction arc sinus est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n. Or on sait que la fonction arc sinus est une primitive $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. Mais,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

donc par composition à droite par $x \mapsto x^2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^6).$$

Par primitivation,

$$\arcsin x = \arcsin 0 + x + \frac{x^3}{3\times 2} + \frac{3x^5}{5\times 8} + \frac{5x^7}{7\times 16} + \underset{x\to 0}{o}(x^7) = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \underset{x\to 0}{o}(x^7).}$$

De même, on montre que la fonction arc cosinus admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n et en utilisant que c'est une primitive de $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$, on obtient

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \underset{x\to 0}{o}(x^7).}$$

Vérification par Python :

```
series(acos(x),x,0,8),series(asin(x),x,0,8)
```

Résultat : $\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \underset{x\to 0}{O}(x^8), x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \underset{x\to 0}{O}(x^8)\right)$

Remarque : on peut également se servir de la relation $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel.

1. Justifier que la fonction tangente admet un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ et qu'on peut écrire

$$\tan x = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\, x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),$$

avec $a_0, \ldots, a_{2n+1}$ des nombres réels.

2. Justifier que

$$\tan'(x) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, a_{2k+1}\, x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}).$$

3. En déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tangente.

1. Puisque la fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^\infty$, elle admet un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$. De plus, la fonction tangente est impaire au voisinage de 0 donc son $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ est de la forme

$$\boxed{\tan x = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\, x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$$

avec $a_0, \ldots, a_{2n+1}$ des nombres réels.

2. La fonction $\tan'$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de la forme

$$\tan'(x) = \sum_{k=0}^{2n} b_k\, x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

avec $b_0, \ldots, b_{2n}$ des nombres réels. Par primitivation,

$$\tan x = \tan 0 + \sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{k+1}\, x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

Par unicité de la partie régulière du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction tangente, on obtient

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad a_{2k+1} = \frac{b_{2k}}{2k+1}$$

d'où

$$\boxed{\tan'(x) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, a_{2k+1}\, x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}).}$$

3. On a $\tan' = 1 + \tan^2$. Or

$$\tan'(x) = a_1 + 3\, a_3, x^2 + 5\, a_5\, x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

et

$$1 + \tan(x)^2 = 1 + \left(a_1\, x + a_3\, x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)^2 = 1 + a_1^2\, x^2 + 2\, a_1\, a_3\, x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

On a donc

$$a_1 = 1, \quad 3\, a_3 = a_1^2 \quad \text{et} \quad 5\, a_5 = 2\, a_1\, a_3,$$

c'est-à-dire

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad a_5 = \frac{2}{15}$$

d'où

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}.$$

Remarque : on peut montrer plus généralement que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{2j+1}\, a_{2k-2j-1},$$

ce qui permet de calculer tous les $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ *de la fonction tangente.*

Exercice 8

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \end{cases}$$

admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n et le calculer. Que pensez-vous de l'affirmation : « deux fonctions admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout entier naturel n qui sont les mêmes sont égales au voisinage de 0 » ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{X \to +\infty} X^n\, \mathrm{e}^{-X^2} = 0,$$

donc par changement de variable $x = \frac{1}{X}$, on obtient

$$\lim_{x \to 0,\, x \neq 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0,\, x \neq 0} \frac{1}{x^n} \exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{X \to +\infty} X^n\, \mathrm{e}^{-X^2} = 0.$$

Puisque $f(0) = 0$, on a

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \text{ de partie régulière nulle.}}$$

La fonction nulle $x \mapsto 0$ admet aussi un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on a $0 \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Comme la fonction nulle et f ne sont pas égales au voisinage de 0, on conclut que

$$\boxed{\text{l'affirmation n'est pas vrai.}}$$