上 海 交 通 大 学 试 卷 （月考 卷）
（ 2020至 2021 学年第2学期 ）

班级号＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿ 姓名(中&法)＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
课程名称 : ＿＿MA160＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Avertissements :

1. *Les questions sont indépendants. Elles peuvent être traitées dans un ordre quelconque.*
2. *Tous les documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone dont smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.*
3. *Pour l'exercice 2, la qualité de la rédaction sera prise en compte.*

Pour le QCM (exercice 1), chaque question a une, et ***une seule****, réponse juste.*
每一题只有一个正确答案：单选题

Exemple :

0. $1+1$ *est égal à combien ?*

(A) 略 (B) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (C) Autre réponse (D) 2

Tableau de réponse

Question	Réponse (A)	Réponse (B)	Réponse (C)	Réponse (D)
0				$\surd$

Exercice 1 : QCM

Équations différentielles

1. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ y' + \frac{y}{t} = \frac{1}{t}$$

sur $I =]0, +\infty[$.

(A) L'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur I est $t \mapsto \dfrac{1}{t} + 1$.

(B) L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I est $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{t \mapsto K\,t,\ K \in \mathbb{R}\}$

(C) Une solution de $(\mathcal{E})$ est : $t \mapsto \dfrac{\sqrt{e^{-2}}}{\pi\, t} + 1$

(D) $y = e^{-x/t} + 1$

2. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ y' + t\,y = \sqrt{2}\,t$$

sur $I = \mathbb{R}$. Soit f et g deux solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$. Alors :

(A) $f = g$

(B) $f - g$ peut-être n'importe quelle solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$

(C) $f'(0) = g'(0) = \sqrt{2}$

(D) Il existe $K \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) - g(t) = K\,e^{-t^2/2}$

3. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ y'' + y = 2\,\cos(t)$$

sur $I = \mathbb{R}$, et la fonction $f : t \mapsto t\,\sin(t)$.
Soit g une solution de $(\mathcal{E})$. On suppose que $g'(0) = 0$. Alors :

(A) $f = g$

(B) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = t\,\sin(t)$

(C) $f \neq g$

(D) Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) - g(t) = K\,\cos(t)$

Tableau de réponse

Question	Réponse (A)	Réponse (B)	Réponse (C)	Réponse (D)
1			$\surd$	
2	$\surd$			
3				$\surd$

Intégration

4. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)\,\arctan(t)} + \dfrac{1}{2\,t}$ est :

(A) $t \mapsto \dfrac{1}{\arctan(t)}$

(B) $t \mapsto \ln(\sqrt{t}\,\arctan(t))$

(C) $t \mapsto \dfrac{2\,t\,\arctan(t)+1}{(1+t^2)^2\,\arctan(t)^2} - \dfrac{1}{2\,t^2}$

(D) $t \mapsto \arctan(\arctan(t))$

5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) \in]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}$. Alors :

(A) Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) < 1$.

(B) Il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) < x$.

(C) Il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) < 0$.

(D) f n'a pas de point fixe.

6.

$$\int_0^1 t\,\arctan(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$$

(A) $\dfrac{\pi-2}{4}$

(B) $\dfrac{\pi-1}{8}$

(C) $2 - \dfrac{3\,\pi}{8}$

(D) Aucune des réponses précédentes

Tableau de réponse

Question	Réponse (A)	Réponse (B)	Réponse (C)	Réponse (D)
4		$\surd$		
5		$\surd$		
6	$\surd$			

Exercice 2 : Intégration d'une grosse fraction rationnelle

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation

$$z^3 = -1.$$

<u>En utilisant le résultat trouvé</u>, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$$

Réponse

On a $0^3 = 0 \neq -1$, donc 0 n'est pas une solution.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Écrivons $z = Re^{i\theta}$, avec $R > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\Leftrightarrow R^3 e^{3i\theta} = -1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R^3 = 1 \\ 3\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = -1$ est donc :

$$\{e^{i\pi/3}, -1, e^{-i\pi/3}\}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x - e^{i\pi/3}\right)\left(x - e^{-i\pi/3}\right) = (x+1)\left(x^2 - 2\cos(\pi/3) + 1\right) = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$$

2. Déterminer $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$\forall x \geq 0,\ \frac{1}{(x^3+1)\left(x^2 - x + 1\right)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2\, x + a_3}{x^2 - x + 1} + \frac{a_4\, x + a_5}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Réponse

Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \geq 0,\ \frac{1}{(x^3+1)\,(x^2-x+1)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2\,x+a_3}{x^2-x+1} + \frac{a_4\,x+a_5}{(x^2-x+1)^2} \\
\Leftrightarrow &\forall x \geq 0,\ 1 = a_1\,(x^2-x+1)^2 + (a_2x+a_3)\,(x^3+1) + (a_4x+a_5)\,(x+1) \\
\Leftrightarrow &\forall x \geq 0,\ 1 = (a_1+a_2)\,x^4 + (-2a_1+a_3)\,x^3 + (3\,a_1+a_4)\,x^2 + (-2a_1+a_2+a_4+a_5)\,x \\
&\quad + (a_1+a_3+a_5) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a_1+a_2=0 \\ -2a_1+a_3=0 \\ 3a_1+a_4=0 \\ -2a_1+a_2+a_4+a_5=0 \\ a_1+a_3+a_5=1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a_1 = 1/9 \\ a_2 = -1/9 \\ a_3 = 2/9 \\ a_4 = -1/3 \\ a_5 = 2/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

3. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}_+$ de :
Pas de justification demandée pour les questions 3.a, 3.b et 3.c

   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$

   Réponse

   $$x \mapsto \ln(|x+1|)$$

   (b) $x \mapsto \dfrac{2\,x-1}{x^2-x+1}$

   Réponse

   $$x \mapsto \ln(x^2+x+1)$$

   (c) $x \mapsto \dfrac{2\,x-1}{(x^2-x+1)^2}$

   Réponse

   $$x \mapsto -\frac{1}{x^2-x+1}$$

4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ en détaillant vos calculs.

Réponse

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

et donc

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$ est donc

$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5. Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} \, \mathrm{d}x$$

On pourra effectuer un changement de variable faisant apparaître la fonction tan.

Réponse

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{16}{9} \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{t = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x}}{=} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} \, \mathrm{d}t$$

$$\underset{\substack{u = \arctan(t) \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}}{=} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\tan(u)^2 + 1} \mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(u)^2 \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2u)) \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2}\sin(2u)\right) \, \mathrm{d}u\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
&= \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

6. Déduire de tout ce qui précède :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^3)(x^2 - x + 1)} \mathrm{d}x$$

Réponse

Il n'y a plus qu'à tout remettre ensemble.