上 海 交 通 大 学 试 卷（月考 卷）

（2020至 2021 学年第2学期）

班级号____________________ 学号____________ 姓名(中&法)________________

课程名称：MATH1301P 高等数学 I 成绩____________________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

Avertissements :

1. *Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
   各个题目是不相关的，可以按照任何顺序来完成。
2. *Tous les documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone, smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.*
   不能使用任何参考资料和电子设备包括手机、翻译器和计算器。

1 Question de cours (20 Points)

Donner la définition de k-ième application partielle de f en $\overrightarrow{x_0} \in \Delta$ et de k-ième fonction dérivée partielle de f où $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n > 1$.

Réponse

Vu au cours

2 $\mathbb{R}^n$ euclidien (35 Points)

Soit $A = (1,2,3)$, $B = (2,-1,1)$ et $C = (1,1,1)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ? (Justifier)

   Réponse

   On a : $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-2)$ et $\overrightarrow{AC} = (0,-1,-2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc, Les points A, B et C ne sont pas alignés. Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note P_1 le plan passant par A, B et C.

2. Déterminer une équation cartésienne de P_1.

   Réponse

   Un vecteur normal à P_1 est :
   $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4,2,-1).$$
   Comme le point C appartient à P_1, un équation cartésienne de P_1 est :
   $$4\ (x-1) + 2\ (y-1) - (z-1) = 0.$$
   Ainsi, $P_1\ :\ 4\ x + 2\ y - z - 5 = 0$.

On considère la droite D d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} 2\,x + y + z - 5 & = 0 \\ -2\ x - y + z + 3 & = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer un point de D, un vecteur directeur de D et un vecteur normal à D.

   Réponse

   ▷ On trouve par exemple le point $E = (0,4,1)$.
   ▷ La droite D est l'intersection du plan d'équation $2 + y + z - 5 = 0$ et du plan d'équation $-2\,x - y + z + 3 = 0$. Un vecteur normal du premier plan est $(2,1,1)$ et un vecteur normal du

second est $(-2,-1,1)$. Un vecteur directeur de D est obtenu en calculant le produit vectoriel de ces deux vecteurs : $(2,-4,0)$. Ainsi, D est la droite passant par $E=(0,4,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}=(1,-2,0)$.

On considère le point $A'=(2,-2,-3)$.

4. Le point A' est-il dans D ? (Justifier)

Réponse

Comme $2\times 2-2-3-5\neq 0$, le point A' n'appartient pas à D.

On note P_2 le plan passant par A' et contenant D.

On rappelle que deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

5. Déterminer un vecteur normal de P_2.

Réponse

Un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{u}=(-4,-2,0)$. Un vecteur normal à P_2 est (4,2, -1)

6. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles et que $P_1\neq P_2$.

Réponse

$\triangleright$ Un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{A'E}\wedge\overrightarrow{u}=(8,4,-2)$.
Un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{v}=(-4,-2,1)$.
Les vecteurs sont colinéaires donc les plans P_1 et P_2 sont donc parallèles.
$\triangleright$ On a $4\times 2+2\times(-2)+3-5\neq 0$. Donc, A' n'appartient pas P_1.

Ainsi, les plans P_1 et P_2 sont parallèles et $P_1\neq P_2$.

Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta=1$. Pour tout $M\in P_1$, on note

$$G_M=\mathrm{Bar}\big((A',\alpha),(M,\beta)\big).$$

7. Dans cette question, on pose $M=A$. On note $G_A=(a,b,c)$. Déterminer une expression de a, b et c en fonction de α et β.

Réponse

Par définition du barycentre, on a : $\overrightarrow{AG_A}=\alpha.\overrightarrow{AA'}$. Autrement dit : $G_A=A+\alpha.\overrightarrow{AA'}$. Comme $A=(1,2,3)$ et $\overrightarrow{AA'}=(1,-4,-6)$. Donc, $G_A=(1+\alpha,2-4\,\alpha,3-6\,\alpha)$.

3 Fonctions de plusieurs variables (25 points)

Soit f la fonction définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\times\sqrt{|y|}\times\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse

— Les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et ln sont continues sur $]0,+\infty[$ donc, par composition de fonctions continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

— Étude en $(0,0)$. Soit $(x,y)\neq(0,0)$, on a,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\sqrt{|x|}\times\sqrt{|y|}\times\ln\left(||(x,y)||^2\right)\leq 2\,||(x,y)||\times\ln\left(||(x,y)||\right)\xrightarrow[||(x,y)||\to0]{}0.$$

Donc f est continue en $(0,0)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe et donner son expression.

Réponse

Les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et ln sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et comme x et y sont strictement positifs, les valeurs absolues ne sont pas un problème.
Donc, on peut calculer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On a :

$$\partial_1 f(x,y)=\frac{\sqrt{y}\times\ln\left(y^2+x^2\right)}{2\,\sqrt{x}}+\frac{2\,x\times\sqrt{x}\times\sqrt{y}}{y^2+x^2}$$

3. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et calculer sa valeur.

Réponse

Pour tout $t\neq0$, on a :

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0\xrightarrow[t\to0]{}0.$$

Donc, $\partial_1 f(0,0)$ existe et vaut 0. $\partial_1 f(0,0)$ existe et vaut 0.

4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Réponse

On remarque que, pour tout $t > 0$,

$$\partial_1 f(t,t) = \frac{1}{2} \times \ln\left(2\ t^2\right) + 1 \xrightarrow[t \to 0,\ t>0]{} -\infty.$$

Donc, $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi, La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4 Fonctions de plusieurs variables (20 points)

Soit ϕ et ψ deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et f la fonction :

$$f : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \sqrt{xy}\,\phi(\frac{y}{x}) + \psi(xy) \end{cases}$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*)^2$, calculer$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ après avoir justifié leurs existences.

Réponse

Par composée, produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^2$, f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\phi(\frac{y}{x}) - \frac{y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\phi'(\frac{y}{x}) + y\psi'(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\phi(\frac{y}{x}) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\phi'(\frac{y}{x}) + x\psi'(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\sqrt{y}\left(4y\left(x^{7/2}\sqrt{y}\psi''(xy) + x\phi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\phi''\left(\frac{y}{x}\right)\right) - x^2\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4x^{7/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4y\left(x^{7/2}\sqrt{y}\psi''(xy) + x\phi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\phi''\left(\frac{y}{x}\right)\right) - x^2\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{4x^{3/2}y^{3/2}}$$