Suites et Séries – TD$_8$ – Complément

Devoir surveillé 2021-2022

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *bornée* telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone.

1. Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par un certain $M>0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n| \leqslant 2M.$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée, donc elle converge vers une limite $l\in\mathbb{R}$.

2. Montrer par l'absurde que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— Supposons $l>0$. Par définition de la convergence, on a

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} :\ \forall n\geqslant N,\ l-\varepsilon < u_{n+1}-u_n < l+\varepsilon.$$

On applique cette définition à $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$: il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N,\ l-\frac{l}{2} < u_{n+1}-u_n.$$

Ainsi,

$$\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\geqslant u_n+\frac{l}{2}.$$

On en déduit :

$$\forall n\geqslant N,\ u_n \geqslant \underbrace{u_N+\frac{l}{2}(n-N)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty}.$$

C'est absurde car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

— De même, on obtient une contraction si $l<0$. Finalement, $l=0$ et donc :

$$\boxed{u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ?

Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge vers 0.

— Supposons que (v_n) est croissante. Montrons qu'elle est négative. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $k\geqslant n$, on a $v_k\geqslant v_n$. Par passage à la limite quand $k\to+\infty$, on obtient $0\geqslant v_n$.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée, donc elle converge.

— De même, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on obtient avec la convergence vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée, donc elle converge.

— On a donc montré que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 1$$

La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. $\boxed{\text{En général, le résultat n'est plus vrai si on ne suppose plus } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée.}}$

Exercice 2.
Soit la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^5} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0, +\infty\right[$$

Remarque : il s'agit ici de l'exercice 2.5.2 du polycopié. Les étudiants ayant travaillé le polycopié trouveront ce Midterm Exam particulièrement sympathique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x + x^{-5}$.
L'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ est stable par f et $u_0 > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, d'après la question (1).
— L'équation $x = x + x^{-5}$ n'a pas de solution sur $\left]0, +\infty\right[$, cela veut dire que la fonction f (définie dans la réponse à la question (1)) n'a pas de point fixe sur cet intervalle.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^{-5} \geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par conséquent, elle converge ou elle tend vers $+\infty$. Comme f n'a pas de point fixe, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. On souhaite trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Pour cela, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{u_n^6}{6}$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

(a) Donner un équivalent de w_n lorsque $n \to +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_n w_n$.

Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$w_n = v_{n+1} - v_n = \frac{1}{6}\left(\left(u_n + \frac{1}{u_n^5}\right)^6 - u_n^6\right) = \frac{1}{6}u_n^6\left(\frac{6}{u_n^6} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^6}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

La série $\sum\limits_n w_n$ est donc grossièrement divergente.

(b) Donner un équivalent de v_n lorsque $n \to +\infty$. En déduire un équivalent de u_n.

$\sum_n w_n = \sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est à termes positifs, divergente (grossièrement), donc par comparaison des séries à termes positifs :

$$v_n - v_0 = S_n(w) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(1) = n+1$$

C'est-à-dire :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

On en déduit que $\dfrac{u_n^6}{6n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et comme la fonction $x \mapsto \sqrt[6]{x}$ est continue en 1, on a $\dfrac{u_n}{\sqrt[6]{6n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[6]{6n}}$

4. Donner le terme suivant du développement asymptotique de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On reprend le développement limité de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{6}\left(\left(u_n + \frac{1}{u_n^5}\right)^6 - u_n^6\right) = \frac{1}{6}u_n^6\left(\frac{6}{u_n^6} + \frac{15}{u_n^{12}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^{12}}\right)\right) = 1 + \frac{5}{2u_n^6} + o\left(\frac{1}{u_n^6}\right).$$

Comme $u_n^6 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6n$, on a finalement

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{5}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$v_{n+1} - v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{12n}.$$

La série $\sum_n \frac{5}{12n}$ est à termes positifs et divergente, donc c'est le cas aussi de la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n - 1)$. On a donc par comparaison des sommes partielles :

$$v_n - v_1 - (n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{12k}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on en déduit

$$v_n = n + \frac{5}{12}\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n)).$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[6]{6n + \frac{5}{2}\ln(n) + o(\ln(n))} \\ &= \sqrt[6]{6n}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \sqrt[6]{6n}\left(1 + \frac{5}{72}\frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{u_n = \sqrt[6]{6}\,n + \dfrac{5\sqrt[6]{6}}{72}\dfrac{\ln(n)}{n^{5/6}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^{5/6}}\right)}$

Exercice 3.
On définit la série $\sum_n u_n$ de terme général u_n donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{1+(-1)^{n+1}n}.$$

On rappelle que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la série de Bertrand $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si :

$$(\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

1. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(n)}{1+(-1)^{n+1}n} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}}$

2. Montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Le terme $(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}$ n'est pas de signe constant et ne converge pas absolument. On ne peut donc pas utiliser le critère d'équivalence. Il faut donc faire un développement asymptotique de u_n à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(n)}{1+(-1)^{n+1}n} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}$ et $w_n = -\frac{\ln(n)}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

On vérifie que $\sum v_n$ est une série alternée :
▷ On définit

$$\begin{aligned} f : [1;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

f est dérivable sur $[1;+\infty[$, et pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Pour tout $x > e$, on a $f'(x) \leqslant 0$.
La suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.
▷ On a de plus $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
▷ Enfin, les signes sont bien alternés.
Par théorème des séries alternées, la série $\sum v_n$ est donc convergente.

De plus, on a $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$. C'est le terme général d'une série de Bertrand convergente, on en déduit que $\sum_n w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

$\boxed{\text{La série } \sum_n u_n \text{ est donc bien convergente.}}$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$.

   Donner un équivalent de $R_n(v) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ quand $n \to +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= u_{2n-1} + u_{2n}\\
&= \frac{\ln(2n-1)}{2n} - \frac{\ln(2n)}{2n-1}\\
&= \frac{\ln(2n) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{2n} - \frac{\ln(2n)}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\\
&= \frac{\ln(2n)}{2n} + \frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&- \frac{\ln(2n)}{2n}\left[1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= -\frac{\ln(2n)}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(2n)}{n^2}\right) - \frac{1}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{\ln(2n)}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(2n)}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(2n)}{4n^2}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(n)}{4n^2}
\end{aligned}$$

On a, $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que $-v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n^2}$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = \dfrac{\ln(n)}{4n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on a donc $R_n(v) \underset{+\infty}{\sim} -R_n(w)$.
On considère la fonction :

$$\begin{aligned}
f : [1;+\infty[&\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{\ln(x)}{4x^2}
\end{aligned}$$

La fonction f est décroissante à partir d'un certain rang N, et on a donc, pour tout $k \geqslant N$,

$$w_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant w_k.$$

En sommant ces inégalités entre $n \geqslant N$ et $+\infty$, on obtient

$$R_n(w) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant R_n(w) + w_n.$$

On a de plus, pour tout $x > n$,

$$\begin{aligned}
\int_n^x f(t)\mathrm{d}t &= \int_n^x \frac{\ln(t)}{4t^2} \\
&= \left[-\frac{\ln(t)}{4t}\right]_n^x + \int_n^x \frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(x)}{x} - \left[\frac{1}{4t}\right]_n^x \\
&= \frac{\ln(n)}{4n} - \frac{\ln(x)}{4x} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4x} \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(n)}{4n} + \frac{1}{4n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n}
\end{aligned}$$

On a donc $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)$. On en déduit que

$$R_n(w) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n}.$$

On a donc $R_n(v) = -\dfrac{\ln(n)}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. $\boxed{R_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(n)}{4n}.}$

4. En déduire un équivalent de $R_n(u)$ quand $n \to +\infty$.

On en déduit que $R_{2n}(u) = -\dfrac{\ln(n)}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{2n+1}(u) = R_{2n}(u) - u_{2n+1} = -\frac{\ln(n)}{4n} - \frac{\ln(2n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = -\frac{3\ln(n)}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

$\boxed{\text{On a donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{(2+(-1)^{n+1})\ln(n)}{4n}}$