Mathématiques I – TD$_2$

21-22 février 2022

Exercice 1

Montrer que

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$$

On rappelle que les fonctions $\arccos \colon [-1,1] \to [0,\pi]$ *et* $\arcsin \colon [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *vérifient*

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos\big(\arccos(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \sin\big(\arcsin(x)\big) = x$$

Dans cet exercice, il faut faire attention aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions.

— Soit $x \in [-1,1]$. On a $1-x^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{1-x^2}$ est bien définie. On a, en utilisant le fait que $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos\big(\arccos(x)\big)^2} = \sqrt{\sin\big(\arccos(x)\big)^2} = \left|\sin\big(\arccos(x)\big)\right|$$

Attention : si $t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{t^2} \neq t$ *en général mais* $\sqrt{t^2} = |t|$. *Par exemple,* $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

On a $\arccos(x) \in [0,\pi]$. Comme $\sin(y) \geqslant 0$ pour tout $y \in [0,\pi]$, on a $\left|\sin\big(\arccos(x)\big)\right| = \sin\big(\arccos(x)\big)$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2}}$$

— De même, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin\big(\arcsin(x)\big)^2} = \sqrt{\cos\big(\arccos(x)\big)^2} = \left|\cos\big(\arccos(x)\big)\right|$$

On a $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\cos(y) \geqslant 0$ pour tout $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\left|\cos\big(\arcsin(x)\big)\right| = \cos\big(\arcsin(x)\big)$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 2

1. En utilisant la définition de la limite montrer que :

$$\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On veut démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x > A\,,\quad \underbrace{\left|\frac{1}{x^2} - 0\right|}_{=\frac{1}{x^2}} < \varepsilon$$

On commence donc par « soit $\varepsilon > 0$ ».

Pour trouver A, on peut faire un raisonnement par analyse-synthèse, avec l'étape d'analyse au brouillon : on veut

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, on a

$$\forall x > A, \quad \frac{1}{x^2} < \frac{1}{A^2}$$

Il suffit donc de vérifier

$$\frac{1}{A^2} = \varepsilon \quad \textit{c'est-à-dire} \quad A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall x > A, \quad 0 \leqslant \frac{1}{x^2} < \frac{1}{A^2} = \varepsilon$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x > A\,,\quad \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

ce qui est la définition de

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \text{ et } \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$

Supposons que la fonction sinus admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$.
Par la composition de limites, comme $x + \frac{\pi}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors on a : $\sin(x + \frac{\pi}{2}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\cos(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
De même on obtient : $\sin(x - \frac{\pi}{2}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $\cos(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\ell$.
Par unicité de la limite on déduit que $\ell = 0$.
Cela veut dire d'après la définition de la limite que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x > A, |\sin(x)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x > A, |\sin(x)| < \frac{1}{3}$$

On pose $x_0 = 2\lfloor A \rfloor \pi + \frac{\pi}{2}$, on a $x_0 > A$ et $\sin(x_0) = 1 > \frac{1}{3}$, Cela contredit la définition de la limite, donc sinus ne peut pas avoir 0 comme limite en $+\infty$,

$$\boxed{\text{La fonction sinus n'admet pas de limite en } +\infty}$$

Exercice 3

On admet que :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

On va montrer ce résultat plus tard en utilisant la notion de dérivée (ou développement limité).

Étudier la limite des fonctions suivantes en 0 :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} \qquad g : x \longmapsto \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 - \sin(x)}}{x}$$

$$h : x \longmapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \qquad i : x \longmapsto \frac{\sin\big(\sin(x)\big)}{\sin(5x)}$$

— *Première fonction f.* Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $1 \leqslant 2 + \sin(y) \leqslant 3$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{|x|}{3} \leqslant \underbrace{\left| \frac{x}{2 + \sin(1/x)} \right|}_{= \dfrac{|x|}{2 + \sin(1/x)}} \leqslant |x|$$

Comme $\frac{|x|}{3} \to 0$ et $|x| \to 0$ quand $x \to 0$, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

Vérifions avec Sympy :

```python
from sympy import *
x = symbols('x')
limit(x/(2+sin(1/x)),x,0)
```

Résultat : 0

— *Deuxième fonction g.*

La présence de racines carrées fait penser aux quantités conjuguées. Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont des quantités conjuguées :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}\sqrt{a}-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}&=\frac{\left(\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}\right)\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\\&=\frac{(1+\sin(x))-(1-\sin(x))}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\\&=2\times\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}\end{aligned}$$

On sait que $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ quand $x \to 0$. De plus, $\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)} \to 2 \neq 0$ quand $x \to 0$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Par opérations sur les limites, on a

$$\boxed{g(x)=\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2\times 1\times\frac{1}{2}=1}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit((sqrt(1+sin(x))-sqrt(1-sin(x)))/x,x,0)
```

Résultat : 1

— *Troisième fonction h.*

On essaye de se ramener à des limites déjà connues.

On a (formule trigonométrique) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1-\cos(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{2}{x^2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

On a $\frac{x}{2} \to 0$ quand $x \to 0$ et $\frac{\sin(y)}{y} \to 1$ quand $y \to 0$ donc par composée de limites, on a

$$\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Par opérations sur les limites, on a donc

$$\boxed{h(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit((1-cos(x))/x**2,x,0)
```

Résultat : $\frac{1}{2}$

— *Quatrième fonction* i. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\sin\big(\sin(x)\big)}{\sin(5x)} = \frac{\sin\big(\sin(x)\big)}{\sin(x)} \times \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{1}{5}$$

On sait que $\frac{\sin(y)}{y} \to 1$ quand $y \to 0$ (exercice précédent). Comme $\sin(x) \to 0$ et $5x \to 0$ quand $x \to 0$, par composée de limites, on a

$$\frac{\sin\big(\sin(x)\big)}{\sin(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(5x)}{5x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq 0$$

On a donc

$$\frac{5x}{\sin(5x)} = \frac{1}{\frac{\sin(5x)}{5x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1} = 1$$

Par opérations sur les limites, on a donc

$$\boxed{i(x) = \frac{\sin\big(\sin(x)\big)}{\sin(5x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit(sin(sin(x))/sin(5*x),x,0)
```

Résultat : $\frac{1}{5}$

Nous verrons plus tard une méthode plus efficace pour déterminer ces limites (développements limités).

Exercice 4

Soient I et J des intervalles non vides de $\mathbb{R}$ et soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. On suppose qu'il existe $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to \ell_1]{} \ell_2$$

Montrer que

$$(g \circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$$

On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |(g\circ f)(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

On commence donc par « soit $\varepsilon > 0$ *».*

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $g(x) \to \ell_2$ quand $x \to \ell_1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in J, \quad |y - \ell_1| < \eta \implies |g(y) - \ell_2| < \varepsilon \tag{$*$}$$

Comme $f(x) \to \ell_1$ quand $x \to a$, il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - a| < \eta' \implies |f(x) - \ell_1| < \eta'$$

Ici, on a utilisé le fait que $f(x) \to \ell_1$ quand $x \to a$, donc :

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \eta' > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta' \implies |f(x) - \ell_1| < \varepsilon'$$

avec $\varepsilon' = \eta$. Attention, on ne peut pas utiliser les symboles ε et η car ils sont déjà utilisés !

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta'$. Alors $|f(x) - \ell_1| < \eta$ donc, d'après $(*)$ avec $y = f(x)$, on a

$$|g(f(x)) - \ell_2| < \varepsilon$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta' > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta' \implies |(gof)(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que :

$$\boxed{(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2}$$

Exercice 5

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Commentaire : on peut donc choisir des inégalités larges ou des inégalités strictes dans la définition de la limite.

2. Soit $C > 0$. Montrer que

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < C\,\varepsilon\Big)$$

Commentaire : lorsqu'on veut démontrer une limite, on peut donc conclure si on obtient « $< C\,\varepsilon$ » à la fin de la démonstration. Attention, C ne doit PAS dépendre de η. Par exemple, si on obtient « $< \eta\,\varepsilon$ », on ne peut pas conclure car η dépend de ε.

Dans ces définitions, ε, η, x, etc. sont des variables MUETTES. Cela veut dire que leur nom n'est pas important ! Par exemple,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

peut aussi s'écrire

$$\forall ☺ > 0,\ \exists ☹ > 0,\ \forall ☻ \in I, \quad |☻ - a| \leqslant ☹ \implies |f(☻) - \ell| \leqslant ☺$$

1. - Supposons que $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
Posons $\eta' = \frac{\eta}{2} > 0$. Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta'$. On a alors $|x-a| < \eta$ donc $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ d'où $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Finalement, on a montré que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta' > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta' \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
   - Supposons que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En fixant $\varepsilon > 0$, un veut obtenir « $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ » à la fin. On va donc appliquer l'hypothèse pour un $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon' < \varepsilon$, par exemple $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, par hypothèse il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
Soit $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$. Alors $|x-a| \leqslant \eta$ donc
$$|f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
Finalement, on a montré que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
c'est-à-dire que $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$.

Conclusion :
$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

2. - Supposons que $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$.

On applique la définition de la limite avec $C\,\varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $C\,\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < C\,\varepsilon$$
   - Supposons que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < C\,\varepsilon$$
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\varepsilon}{C} > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$
On a donc montré que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
c'est-à-dire que $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$.

Conclusion :
$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < C\,\varepsilon\Big)}$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que

$$f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas croissante.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x > A, \quad |f(x+1) - f(x)| < \varepsilon$$

Soit $x > A$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ x - n > A\}$ est non vide (il contient $n = 0$) et est majoré (par exemple par $\lfloor x \rfloor + 1$). En particulier, il admet un maximum donc on peut poser :

$$n_x = \max\{n \in \mathbb{N},\ x - n > A\} \in \mathbb{N}$$

On a, par téléscopage,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_x} \big(f(x-k+1) - f(x-k)\big)}{x} + \frac{f(x-n_x)}{x} \tag{1}$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n_x\}$, on a $x - k \geqslant x - n_x \geqslant A$ donc

$$\forall k \in \{1, \dots, n_x\}, \quad |f(x-k+1) - f(x-k)| < \varepsilon$$

donc (1) devient :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{n_x}{x}\varepsilon + \left|\frac{f(x-n_x)}{x}\right| \tag{2}$$

Par définition de n_x, on a $n_x < x$ et $x - (n_x + 1) < A$. Comme f est positive et croissante, l'inégalité (2) devient :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{f(A+1)}{x} \tag{3}$$

On pose

$$M = \max\left(\frac{f(A+1)}{\varepsilon}, A\right) > 0$$

Si $x > M$, l'inégalité (3) devient :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \big(1 + f(A+1)\big)\,\varepsilon$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > M \implies \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \underbrace{\big(1 + f(A+1)\big)}_{>0}\,\varepsilon$$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

Pour le contre-exemple où f n'est pas croissante, posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors f est positive et n'est pas croissante. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x+1) - f(x) = 0$ (donc $f(x+1) - f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$) et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in]0,1[,\quad \frac{f(n+y)}{n+y} = \frac{1}{(n+y)(n+y-\lfloor n+y \rfloor)} \geqslant \frac{1}{2\,n\,y} \xrightarrow[y \to 0]{} +\infty$$

donc $\frac{f(x)}{x}$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exercice 7

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors

$$\sup(A) \leqslant \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A) \geqslant \inf(B)$$

Distinguons les cas.

— Si B n'est pas majoré, alors $\sup(B) = +\infty$ donc on a bien $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ car $\sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

— Si B est majoré, alors $\sup(B) \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \leqslant \sup(B)$. On en déduit que $\sup(B)$ est un majorant de A. On a donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

De même :

— Si B n'est pas minoré, alors $\inf(B) = -\infty$ donc on a bien $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ car $\inf(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

— Si B est minorée, alors $\inf(B) \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \geqslant \inf(B)$. On en déduit que $\inf(B)$ est un minorant de A. On a donc $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\sup(A) \leqslant \sup(B) \text{ et } \inf(A) \geqslant \inf(B)}$$

On suppose à partir de maintenant que A et B sont deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

Puisqu'à partir de maintenant A et B sont deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, les bornes supérieures et inférieures de A et B sont donc finies.

2. Montrer que $A \cup B$ est borné et que

$$\sup(A \cup B) = \max\big(\sup(A), \sup(B)\big) \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) = \min\big(\inf(A), \inf(B)\big)$$

— Pour tout $x \in A \cup B$, on a $x \in A$ ou $x \in B$ d'où

$$\inf(A) \leqslant x \leqslant \sup(A) \quad \text{ou} \quad \inf(B) \leqslant x \leqslant \sup(B),$$

et donc

$$\min(\inf(A), \inf(B)) \leqslant x \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$$

On en déduit que $A \cup B$ est borné et que

$$\min(\inf(A), \inf(B)) \leqslant \inf(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$$

— On a $A \subset A \cup B$ donc $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$ (question 1). De même, on a $B \subset A \cup B$ dont $\sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)$. On en déduit que $\max(\sup(A), \sup(B)) \leqslant \sup(A \cup B)$. On conclut donc par double inégalité que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

— On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $\inf(A) \leqslant \inf(A \cup B)$ et $\inf(B) \leqslant \inf(A \cup B)$ (question 1). On en déduit que $\min(\inf(A), \inf(B)) \geqslant \inf(A \cup B)$. On conclut donc par double inégalité que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

Conclusion :

$$\boxed{A \cup B \text{ est borné, } \sup(A \cup B) = \max\big(\sup(A), \sup(B)\big) \text{ et } \inf(A \cup B) = \min\big(\inf(A), \inf(B)\big)}$$

Application : donner les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

On considère les deux ensembles non vides suivants :

$$E_p = \left\{1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } E_i = \left\{-1 + \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

On remarque que $E = E_p \cup E_i$. De plus, on a :

— $E_p \subset E$ et E est borné donc E_p est borné. $\frac{3}{2} \in E_p$ donc $E_p \neq \emptyset$, d'où $\sup(E_p)$ et $\inf(E_p)$ existent dans $\mathbb{R}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{2}$ avec égalité pour $n = 1$, donc :

$$\sup(E_p) = \max(E_p) = \frac{3}{2}$$

La borne supérieure de E_p est atteinte.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 + \frac{1}{2n} > 1$, 1 est donc un minorant de E_p. On va montrer que $\inf(E_p) = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$$

Alors $n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$ d'où :

$$1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} > 1$$

On a montré que :

— 1 est un minorant de E_p,

— $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, 1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} > 1$

Cela veut dire que :

$$\inf(E_p) = 1$$

— De la même manière, on peut montrer que E_i est borné et non vide, et que :

$$\sup(E_i) = \max(E_i) = 0 \text{ et } \inf(E_i) = -1$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\sup(E) = \max\left(0, \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2} \text{ et } \inf(E) = \min(1, -1) = -1}$$

3. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors

$$\sup(A \cap B) \leqslant \min\big(\sup(A), \sup(B)\big) \quad \text{et} \quad \inf(A \cap B) \geqslant \max\big(\inf(A), \inf(B)\big)$$

Y-a-t-il égalité ?

— Pour tout $x \in A \cap B$, on a $x \leqslant \sup(A)$ et $x \leqslant \sup(B)$ donc $x \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$, c'est-à-dire que $\min(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cap B$. On a donc $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$

— Pour tout $x \in A \cap B$, on a $x \geqslant \inf(A)$ et $x \geqslant \inf(B)$ donc $x \geqslant \max(\inf(A), \inf(B))$, c'est-à-dire que $\max(\inf(A), \inf(B))$ est un minorant de $A \cap B$. On a donc $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf(A), \inf(B))$

— En prenant

$$A = \left\{1 - \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{1 - \frac{1}{3^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

on a $\sup(A) = \sup(B) = 1$ donc $\min(\sup(A), \sup(B)) = 1$. Mais $A \cap B = \{0\}$ donc $\sup(A \cap B) = 0$. Il n'y a donc pas égalité.

Conclusion :

$$\boxed{\sup(A \cap B) \leqslant \min\big(\sup(A), \sup(B)\big),\ \inf(A \cap B) \geqslant \max\big(\inf(A), \inf(B)\big) \text{ et il n'y a pas égalité}}$$

4. On pose

$$A + B = \big\{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\big\}$$

Montrer que $A + B$ est borné et que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

— Soit $x \in A + B$. On a $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Comme $\inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A)$ et $\inf(B) \leqslant b \leqslant \sup(B)$, on en déduit que

$$\inf(A) + \inf(B) \leqslant x = a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

donc $A + B$ est borné et

$$\inf(A) + \inf(B) \leqslant \inf(A + B) \quad \text{et} \quad \sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

— Soit $(a, b) \in A \times B$. On a $a + b \in A + B$ donc $a + b \leqslant \sup(A + B)$ et donc $a \leqslant \sup(A + B) - b$. Par passage à la borne supérieure sur $a \in A$, $\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b$. On a donc $b \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$ donc, par passage à la borne supérieure sur $b \in B$, $\sup(B) \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$, c'est-à-dire, $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$.
On conclut donc par double inégalité que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

— Soit $(a, b) \in A \times B$. On a $a + b \in A + B$ donc $a + b \geqslant \inf(A + B)$ et donc $a \geqslant \inf(A + B) - b$. Par passage à la borne inférieure sur $a \in A$, $\inf(A) \leqslant \inf(A + B) - b$. On a donc $b \geqslant \inf(A + B) - \inf(A)$ donc, par passage à la borne inférieur sur $b \in B$, $\inf(B) \geqslant \inf(A + B) - \inf(A)$, c'est-à-dire, $\inf(A) + \inf(B) \geqslant \inf(A + B)$.
On conclut donc par double inégalité que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Conclusion :

$$\boxed{\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \text{ et } \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)}$$

5. On pose
$$A\,B = \left\{a\,b,\ a \in A \text{ et } b \in B\right\}$$
Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+^*$ et $B \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $A\,B$ est borné et
$$\sup(A\,B) = \sup(A)\ \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A\,B) = \inf(A)\ \inf(B)$$
Est-ce encore vrai dans le cas général $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$?

Comme $A \subset \mathbb{R}_+^*$ et $A \neq \emptyset$, on a $\sup(A) > 0$ et $\inf(A) \geqslant \inf(\mathbb{R}_+^*) = 0$. De même, $\sup(B) > 0$ et $\inf(B) \geqslant 0$.

— Soit $x \in A \times B$. On a $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Comme $0 \leqslant \inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A)$ et $0 \leqslant \inf(B) \leqslant b \leqslant \sup(B)$, on a
$$\inf(A)\inf(B) \leqslant x\,y \leqslant \sup(A)\sup(B)$$
On en déduit que $A\,B$ est borné et que
$$\inf(A)\inf(B) \leqslant \inf(A\,B) \quad \text{et} \quad \sup(A\,B) \leqslant \sup(A)\sup(B)$$

— Soit $(a, b) \in A\times B$. On a $a\,b \in A\,B$ donc $a\,b \leqslant \sup(A\,B)$. Comme $b > 0$, on a $a \leqslant \frac{\sup(A\,B)}{b}$. Par passage à la borne supérieure sur $a \in A$, $\sup(A) \leqslant \frac{\sup(A\,B)}{b}$ donc $b \leqslant \frac{\sup(A\,B)}{\sup(A)}$ car $\sup(A) > 0$. Par passage à la borne supérieure sur $b \in B$, $\sup(B) \leqslant \frac{\sup(A\,B)}{\sup(A)}$ d'où $\sup(A)\sup(B) \leqslant \sup(A\,B)$.
On conclut donc par double inégalité que $\sup(A)\sup(B) = \sup(A\,B)$.

— Soit $(a, b) \in A \times B$. On a $a\,b \in A\,B$ donc $a\,b \geqslant \inf(A\,B)$. Comme $b > 0$, on a $a \geqslant \frac{\inf(A\,B)}{b}$. Par passage à la borne inférieure sur $a \in A$, $\inf(A) \geqslant \frac{\inf(A\,B)}{b}$. Si $\inf(A) = 0$, on a bien $\inf(A)\inf(B) = 0 \leqslant \inf(A\,B)$ car $A\,B \subset \mathbb{R}_+^*$. Si $\inf(A) > 0$, on a $b \geqslant \frac{\inf(A\,B)}{\inf(A)}$. Par passage à la borne supérieure sur $b \in B$, $\sup(B) \leqslant \frac{\sup(A\,B)}{\sup(A)}$ d'où $\sup(A)\sup(B) \leqslant \sup(A\,B)$.
Dans les deux cas, on conclut par double inégalité que $\inf(A)\inf(B) = \inf(A\,B)$.

— Ce n'est pas vrai dans le cas général. Si on prend $A = B =]-1, 0[$, alors $\sup(A) = \sup(B) = 0$, d'où $\sup(A) \times \sup(B) = 0$. Cependant, $A\,B =]0, 1[$ donc $\sup(A\,B) = 1$.

Conclusion :

Si $A \subset \mathbb{R}_+^*$ et $B \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $A\,B$ est borné, $\sup(A\,B) = \sup(A)\ \sup(B)$ et $\inf(A\,B) = \inf(A)\ \inf(B)$ mais ce n'est plus vrai dans le cas général $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$