Topologie et Calcul différentiel – TD 7: Topologie : convexes, compacts, espaces vectoriels normés

19 mai 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à savoir utiliser les ensembles compacts pour des problèmes d'analyse, de savoir montrer si deux normes sont équivalentes, et faire quelques rappels sur les ensembles convexes.

Exercices sur les ensembles compacts

Exercice 1 :

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère $f : K \to K$ une application ρ-lipschitzienne, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leqslant \rho ||x - y||$$

1. On suppose que $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

> La fonction f est continue car lipschitzienne. Considérons $g : x \mapsto ||f(x) - x||$. La fonction g est réelle, continue et définie sur un compact non vide, elle admet donc un minimum en un certain $x_0 \in K$. Puisque
>
> $$g(x_0) \leqslant g(f(x_0)) = ||f(f(x_0)) - f(x_0)|| \leqslant \rho ||f(x_0) - x_0|| = \rho g(x_0) \text{ avec } \rho < 1$$
>
> alors on a nécessairement $g(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$ ce qui fournit un point fixe pour f.

2. On suppose que $\rho = 1$ et K étoilé en a, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$, $[x, a] \subset K$. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. *On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions*

$$f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x).$$

> Par le caractère étoilé de K en a on peut affirmer que f_n est une application de K vers K. De plus,
>
> $$||f_n(y) - f_n(x)|| = \frac{n-1}{n} ||f(y) - f(x)|| \leqslant \rho_n ||y - x|| \text{ avec } \rho_n < 1.$$
>
> D'après la question 1, la fonction f_n admet un point fixe x_n. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact K, il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$. La relation $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$ donne $\frac{a}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(n)-1}{\varphi(n)} f(x_\varphi(n)) = x_{\varphi(n)}$ et donc à la limite $f(x_\infty) = x_\infty$.

Exercices sur les ensembles convexes

Exercice 2 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que la boule unité fermée B est strictement convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in B^2,\ \ ]x,y[\subset \overset{\circ}{B}$$

Soit $(x,y) \in B$ avec $x \neq y$. Soit $z \in]x,y[$. Il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda) y$.

Montrons que $z \in \overset{\circ}{B}$, c'est-à-dire que $||z|| < 1$. On a que $||z|| = ||\lambda x + (1-\lambda) y|| \leqslant \lambda ||x|| + (1-\lambda)||y||$. Donc si $||x|| < 1$ ou $||y|| < 1$, on a que $||z|| < 1$. Supposons désormais que $||x|| = ||y|| = 1$. Graphiquement, on voit que le milieu du segment est intéressant et on a envie d'utiliser un argument d'orthogonalité. On remarque alors que $\langle x-y, x+y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2 = 1 - 1 = 0$ donc les vecteurs $x-y$ et $x+y$ sont orthogonaux. Par le théorème de Pythagore, on a que

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2 = 1^2 - \left|\left|x - \frac{x+y}{2}\right|\right|^2 < 1$$

Comme $z \in \left[x, \frac{x+y}{2}\right]$ ou $z \in \left[y, \frac{x+y}{2}\right]$, en remplaçant x ou y par $\frac{x+y}{2}$ on en clonclut, d'après ce qu'on démontré au tout début, que $||z|| < 1$.

Exercice 3 :

1. Soit C un convexe fermé non borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que C contient une demi-droite. (On admet dans cette question que les ensembles fermés et bornés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts).

   Soit $x \in C$. Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite satisfant $||x_n|| \to \infty$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ le point $y_n = S(x,1) \cap [x, x_n)$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans $S(x,1)$ compacte, donc on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\lambda \in S(x,1)$. Montrons que $[x,\lambda) \subset C$. Soit $z \in [x,\lambda)$. On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = S(x, ||z||) \cap [x, x_n)$. Comme $x_n \in C$ et que $||x_n|| \to \infty$, alors $z_n \in C$ pour tout n assez grand (à partir du moment où $||x_n|| \geqslant ||z||$). De plus, $z_n \to z$. Comme C est fermé, alors $z \in C$. Donc $[x,\lambda) \subset C$.

2. Même question sans supposer C fermé.

   C'est encore vrai. Et c'est beaucoup plus difficile à montrer.

   Comme C n'est plus supposé fermé, on peut par exemple considérer le cas où l'intérieur de C est non vide. Soit donc $x \in C$ et $\varepsilon > 0$ tels que $BO(x,\varepsilon) \subset C$. Il devient alors naturel d'étudier l'ensemble $C_\epsilon = \{y \in C,\ d(y, E\backslash C) \geqslant \varepsilon\}$. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient x, et on peut vérifier (exercice) que c'est un convexe, qu'il est fermé et qu'il est borné. Donc d'après la question précédente, il admet une demi-droite.

   Ce serait évidemment trop beau si on pouvait s'arrêter là. En réalité, un convexe non fermé n'est pas forcément d'intérieur non vide. On peut par exemple considérer $C = \{0\} \times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$. Et dans ce cas, l'ensemble C_ε est vide. Oui mais, en même temps, l'ensemble $]0,+\infty[$, quand on se place dans $\mathbb{R}$, il est d'intérieur non vide, et $C_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$. On voit donc bien que c'est un problème de dimension.

   On va se ramener au cas où C est d'intérieur non vide, en se plaçant dans l'espace affine le plus petit qui contient C (on appelle ça l'enveloppe affine de C, et que l'on note $Aff(C)$).

Soit $x \in C$. Alors $C - x = \{y - x,\ y \in C\}$ est encore convexe, comme ensemble translaté d'un ensemble convexe. Alors $F = Vect(C - x)$ est un espace vectoriel de dimension $k \leqslant n - 1$.

Montrons que C est d'intérieur non vide dans F. Soit $(x_1, x_2) \in C^2$. Si $k \geqslant 2$, alors il existe $x_3 \in C$ tel que $x_3 \notin (x_2, x_2)$ (sinon C est une droite et $Vect(C - x)$ est de dimension 1). Itérativement, on peut construire $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in C$ tels que pour tout $i \in \{2, \ldots, k-1,\}$, $x_i \notin Vect(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$. Par cette construction, $\dim(\text{Vect}(x_1, \ldots, x_{k+1})) = k = \dim(F)$. Il est également clair que l'isobarycentre des points $x_1, \ldots, x_{k+1}$ est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $x_1, \ldots, x_{k+1}$, lui-même inclus dans C. Donc C est d'intérieur non vide dans F.

On peut alors conclure en se ramenant au cas précédent où C est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$.

Exercices sur les normes équivalentes

Exercice 4 :

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit les normes N et N' par

$$N(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty,\ N'(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.

Remarquons d'abord que N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et prenons $(f, g) \in E^2$. Alors on a $N(f) = 0$ si et seulement si $f(0) = 0$ et que f est constante. Ceci implique que $f = 0$. L'homogénéité est facile à vérifier. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on remarque que

$$N(f + g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N(f) + N(g).$$

Donc N est une norme. La preuve est identique pour N'.

2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.

Comme $|f(0)| \leqslant ||f||_\infty$, on a que $N(f) \leqslant N'(f)$ (avec égalité si f est constante). De plus, si $x \in [0,1]$, alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

il vient

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt \leqslant |f(0)| + \int_0^x ||f'||_\infty dt \leqslant |f(0)| + ||f'||_\infty = N(f)$$

(avec égalité si f' est constante et que $f(0) = 0$, donc si f est linéaire). On en déduit que $||f||_\infty \leqslant N(f)$, puis que $N'(f) \leqslant 2N(f)$.

3. Sont-elles équivalentes à $||\cdot||_\infty$?

La forme des normes nous incite à considérer une suite de fonctions avec norme infinie bornée, mais ayant une grande dérivée, par exemple à considérer pour $n \geqslant 1$, $f_n(x) = x^n$. Alors $||f_n||_\infty = 1$ tandis que $N(f_n) = n$. Les normes $||\cdot||_\infty$ et N ne sont pas équivalentes. De même, $||\cdot||_\infty$ et N' ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + t \times y}{1 + t^2} \right|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction N vérifie :

(a) N est bien définie, car la fonction $\phi : t \mapsto \frac{|x+t\times y|}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie

$$\phi(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0.$$

Elle est donc bornée.

(b) N est homogène :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda.(x, y)) = |\lambda| \times N(x, y).$$

(c) N est définie, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{|x + t \times y|}{1 + t^2} = 0,$$

alors $(t = 0)$ $x = 0$ et $(t = 1)$ $y = 0$.

(d) N vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,\ N(x + x', y + y') \leq N(x, y) + N(x', y'),$$

car

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,\ |x + x' + t \times (y + y')| \leq |x + t \times y| + |x' + t \times y'|.$$

2. Tracer la sphère unité (de centre 0 et de rayon 1).

(a) Il nous faut calculer la norme plus précisément. Pour cela, remarquons que la fonction $\psi : t \mapsto \frac{x+t\times y}{1+t^2}$, a une dérivée qui s'annule en deux points (si $y \neq 0$). On trouve que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0\ \Rightarrow \boxed{N(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{2}}.$$

Cette formule est encore valide si $y = 0$.

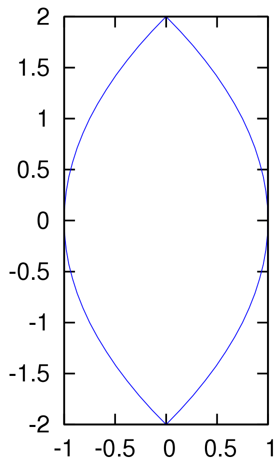
(b) On a donc, pour $x \geq 0$ et $N(x, y) = 1$ (sphère unité !) :

$$y^2 + 4\,x - 4 = 0,$$

et pour $x < 0$:

$$y^2 - 4\,x - 4 = 0.$$

Ce qui nous donne le dessin suivant :

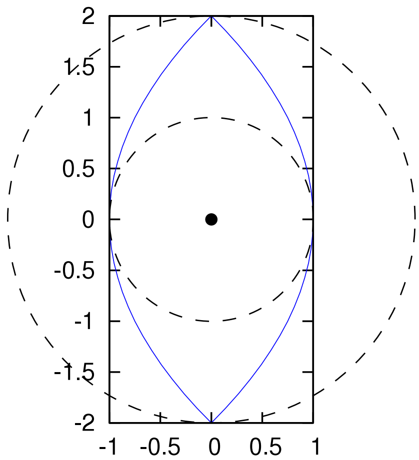


3. Montrer que la norme N est équivalente à la norme euclidienne, et trouver des constantes $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ optimales telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \times \sqrt{x^2 + y^2} \leq N(x, y) \leq \beta \times \sqrt{x^2 + y^2}.$$

à l'aide d'un dessin.

Sur le dessin suivant, le rayon du petit cercle est $1/\beta$ et le rayon du grand cercle est $1/\alpha$. On voit sur le dessin que $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$.



(a) On a immédiatement :

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ avec égalité pour } (x, y) = (1, 0) \text{ donc } \boxed{\beta = 1}.$$

(b) De même,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{2} \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}, \text{ avec égalité pour } (x, y) = (0, 1) \text{ donc } \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}.$$