上海交通大学巴黎卓越工程师学院
Ecole d'Ingénieurs Paris SJTU

Bases scientifiques pour ingénieur (Mathématiques)

Adrien Joseph, 欧亚飞, Alain Chillès (祁冲), Rémi Weidenfeld

Programme

L'objectif de ce cours est, d'une part, d'initier les étudiants au langage mathématique, d'autre part, de commencer l'apprentissage de la formalisation mathématique.

1. Langage des ensembles : $\in$, $\subset$; opérations sur les ensembles : $\cap$, $\cup$, $\times$; ensemble des parties ; notions sur les familles $\prod$.
2. Langage de la logique (et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, non) ; quantificateurs $\forall$, $\exists$, manipulation, négation ; lien avec les notations ensemblistes.
3. Notions sur les fonctions, lien avec les familles : injectivité, surjectivité, bijectivité.
4. Quelques techniques de démonstrations (sur exemples) : démonstration par inférence, par l'absurde, par contraposition, par récurrence ; analyse/synthèse.
5. Traduction de situations mathématiques simples en phrases logiques syntaxiques, et interprétation de phrases syntaxiques en situations mathématiques (lien syntaxe/sémantique [sans rentrer dans des considérations formelles]).
6. Introduction aux probabilités élémentaires.

Table des matières

Liste des codes `Python`

Liste des codes Maxima

Liste des figures

Chapitre 1

Les ensembles

1.1 Méthodologie

Définition 1.1 – Nom de l'objet défini

L'objet défini est en *italiques*. Une définition est à savoir par cœur !

Notation 1.1 – Manière d'écrire

Une *notation* est une manière d'écrire mathématique pour que les choses soient précises, rigoureuses et synthétiques. Une notation est à savoir par cœur.

Remarque 1.1

Une *remarque* sert à illustrer quelque chose de simple qui aide à mieux comprendre. Une remarque est à méditer !

Remarque importante 1.2

Une *remarque importante* illustre une propriété très importante qu'il faut garder à l'esprit.

Exemple 1.1 – Exemple

Un *exemple* sert à illustrer une définition ou un résultat. On peut essayer de le refaire pour s'entraîner.

Théorème 1.1 – Très important

Un théorème *est un résultat très important ! Un théorème est à savoir par cœur. Si, de plus, le théorème porte un nom, il est inadmissible de ne pas le connaître !*

Proposition 1.1 – Important

Une proposition *est un résultat important qu'il faut savoir.*

Propriété 1.1 – Résultats divers

Une *propriété* est un résultat qu'il faut méditer et, si possible, le connaître.

Démonstration d'un théorème, d'une proposition, d'une propriété, etc.

Une *démonstration* est une preuve d'un résultat. En général, sauf si le professeur le signale, il n'est pas utile de la connaître. En revanche, il peut être très utile de la résumer en quelques points forts ou étapes qu'on réutilisera pour résoudre les exercices.

Exercice(s) 1.1

Un *exercice* est un moyen indispensable de s'entraîner. Après avoir refait les exemples, on peut chercher les exercices. Il y a plusieurs types d'exercices :

(a) Les exercices qu'on sait faire immédiatement. C'est rassurant, mais cela ne fait pas progresser.

(b) Les exercices qu'on pense savoir faire. On essaye de le faire pour confirmer ou infirmer notre capacité à faire. Pour commencer, c'est le bon type d'exercice à travailler !

(c) Les exercices où on a une idée. On regarde si cette idée mène quelque part. Dans un deuxième temps, c'est aussi un type d'exercice à travailler !

(d) Les exercices où on n'a pas d'idée. Ne pas perdre son temps à les regarder, cela ne fait pas progresser.

Rappel 1.1 Pour se rafraîchir la mémoire

Un *rappel* est un résultat qui a déjà été vu et qu'on va réutiliser.

Figure 1.1 – Illustration

Une figure est un dessin qui illustre une situation particulière. Un dicton français est :

Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours !

Session `Wxmaxima` 1.1 – Du code (Wxmaxima)

On peut utiliser un langage informatique pour faire des calculs. `Wxmaxima` permet de faire du *calcul formel ou symbolique*.

Session `Python` 1.1 – Du code (Python)

Python (ou Matlab) permettent de faire des calculs numériques et des calculs formels ou symboliques.

1.2 Définition d'un ensemble

Il s'agit ici d'une présentation très simplifiée des ensembles, considérés comme des objets naturels.

Définition 1.2 – Ensemble

Un *ensemble* est une collection d'objets. Les objets qui appartiennent à un ensemble sont appelés les *éléments* de cet ensemble.

Notation 1.2 – $\mathbb{N}$

On note $\boxed{\mathbb{N}}$ l'ensemble de tous les *entiers naturels* (positifs).

Exemple 1.2

1. Notons E est l'ensemble des nombres entiers pairs compris entre 0 et 10. Alors les éléments de E sont 0, 2, 4, 6, 8 et 10. On écrit
$$\boxed{E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}}$$
2. Ainsi,
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Théorème 1.2

$\mathbb{N}$ *est un ensemble* infini *(无穷集)*

Démonstration

Admis.

Notation 1.3 – Intervalle d'entier

Les *intervalles d'entiers* seront notés, pour a et b deux entiers tels que $a \leq b$:
$$[\![a, b]\!] \overset{\text{Not}}{=} \{a, a+1, \ldots, b\}$$

Exemple 1.3

Ainsi $[\![3, 5]\!] = \{3, 4, 5\}$, $[\![-3, 3]\!] = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $[\![4, 4]\!] = \{4\}$.

Notation 1.4

Pour dire qu'un objet x est un élément d'un ensemble A, on écrit (signe $\boxed{\in}$) :
$$\boxed{x \in A, \text{ on lit : « } x \text{ appartient à } A \text{ »}}$$
Lorsque x n'est pas un élément de A, on écrit (signe $\boxed{\notin}$) :
$$\boxed{x \notin A, \text{ on lit : « } x \text{ n'appartient pas à } A \text{ »}}$$

Exemple 1.4

Avec $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, on a : $4 \in E$ et $5 \notin E$.

Définition 1.3 – Partie d'un ensemble

Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est *une partie de* B ou un *sous-ensemble de* B lorsque tous les éléments de A sont des éléments de B. On écrit :

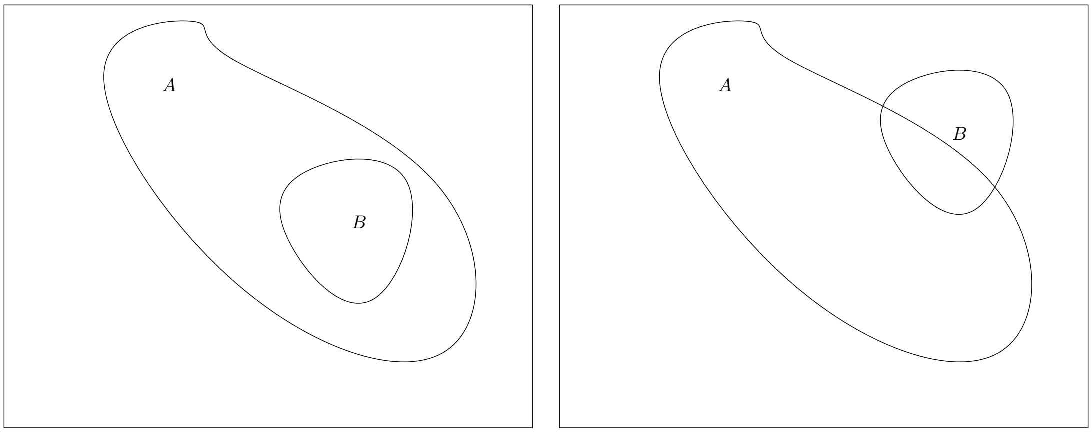
$$\boxed{A \subset B, \text{ on lit : « } A \text{ (est) inclus dans } B \text{ »}}$$

Si A n'est pas inclus dans B, on écrit :

$$\boxed{A \not\subset B, \text{ on lit : « } A \text{ non inclus dans } B \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.2, de la présente page).

Figure 1.2 – $B \subset A$ – $B \not\subset A$



Exemple 1.5

Avec $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{10, 2, 8\}$, on a : $F \subset E$. En effet, $10 \in E$, $2 \in E$ et $8 \in E$.
Mais, $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{2, 8, 4, 12\}$, on a : $F \not\subset E$.

Définition 1.4

Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments. On écrit :

$$\boxed{A = B, \text{ et on lit : « } A \text{ est égal à } B \text{ »}}$$

Remarque importante 1.3

Si A et B sont deux ensembles, pour montrer que $A = B$, on montre :

$$A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Exemple 1.6

Si $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{6, 8, 10, 0, 2, 4, 6, 8\}$, on a : $E = F$.

Notation 1.5 – Ensemble vide

L'ensemble qui ne contient pas d'éléments est noté $\boxed{\emptyset}$. Il s'appelle *l'ensemble vide*.

Exemple 1.7

Si E est un ensemble, on a toujours $\emptyset \subset E$. Donc, $\emptyset$ est une partie de E.

Notation 1.6 – Ensemble des parties

- Si A est un ensemble, l'ensemble de ses parties est noté $\boxed{\mathscr{P}(A)}$. On dit et on écrit :

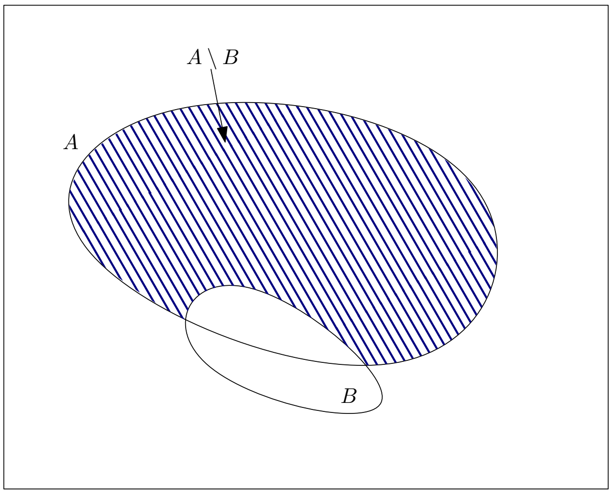
$$\boxed{\mathscr{P}(A) \text{ est « l'ensemble des parties de } A \text{ », on lit aussi « P de A »}}$$

- Si A et B sont deux ensembles, on écrit (signe $\boxed{\setminus}$) :

$$\boxed{B \setminus A = \{x \in B,\ x \notin A\}\,,\ \text{on lit « } B \text{ privé de } A \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.3, de la présente page).

Figure 1.3 – $A \setminus B$



Proposition 1.2

« B partie de A » peut donc s'écrire :

$$B \subset A \text{ ou } B \in \mathscr{P}(A)$$

Démonstration

— $B \subset A$ est la définition de « B partie de A ».
— $B \in \mathscr{P}(A)$ veut dire que B est un élément de l'ensemble des parties de A, c'est donc une partie de A.

Exemple 1.8

Si $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{10, 2, 8\}$, on a : $E \setminus F = \{0, 4, 6\}$.

Remarque 1.4

On peut utiliser un logiciel (`Wxmaxima` ou `Python`) pour calculer $\mathscr{P}(E)$ et $E \setminus F$:

Session `Wxmaxima` 1.2 – Parties, etc. (Wxmaxima)

(%i1) `E : {1,2,3,4};`

(%o1) $\{1, 2, 3, 4\}$

(%i2) `powerset(E);`

(%o2) $\{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$

(%i3) `setdifference(E,{2,4,6});`

(%o3) $\{1, 3\}$

Session `Python` 1.2 – Parties, etc.

On peut travailler en `Python`, soit directement, mais alors, il faut reprogrammer la fonction `PowerSet`, soit utiliser la bibliothèque de `Sympy` pour les ensembles (`sets`).

`In[1]` – Avec `Sympy`

```
import sympy as sp
```

`In[2]` – Création d'un ensemble fini

```
S0 = sp.FiniteSet(1, 2, 3, 4)
```

`In[3]` – Ensemble des parties

```
sp.sets.PowerSet(S0)
```

`Out[3]`

$\mathit{PowerSet}\left(\{1, 2, 3, 4\}\right)$

`In[4]` – Écriture de cet ensemble

```
_.rewrite(sp.FiniteSet)
```

Out [4]

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

In [5] – Différence

```
sp.Complement(S0, sp.FiniteSet(2, 4, 6))
```

Out [5]

$\{1, 3\}$

In [6] – *Sans* Sympy

```
S1 = {1, 2, 3, 4}
S1.difference({2, 4, 6})
```

Out [6]

```
{1, 3}
```

In [7] – Type du résultat *avec* Sympy

```
type(__)
```

Out [7]

```
sympy.sets.sets.FiniteSet
```

In [8] – Type du résultat *sans* Sympy

```
type(__)
```

Out [8]

```
set
```

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Retrouvez les bonnes définitions :

0, 2, 4, 6, 8 et 10	a	1	x n'appartient pas à A
$x \in A$	b	2	E est l'ensemble des nombres entiers pairs compris entre 0 et 10
$A = B$	c	3	A est inclus dans B car tous les éléments de A sont des éléments de B
$E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$	d	4	x appartient à A
$\mathscr{P}(A)$	e	5	l'ensemble vide
$B \setminus A$	f	6	les éléments de E
$x \notin A$	g	7	l'ensemble des parties de A
$\emptyset$	h	8	A est égal à B
$A \subset B$	i	9	B privé de A

1	2	3	4	5	6	7	8	9

1.2.2 Écoutez et écrivez les énoncés en langage mathématique : 听吧！

1 :	6 :
2 :	7 :
3 :	8 :
4 :	9 :
5 :	10 :

1.2.3 On note E l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Donner tous les ensembles qui sont des parties de E. En déduire $\mathscr{P}(E)$.

1.2.4 On suppose que E est un ensemble qui a n éléments. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble qui a un nombre fini d'éléments. Calculer ce nombre.

1.3 Opérations sur les ensembles

Notation 1.7 – Intersection

Si A et B sont deux ensembles, on note $\boxed{A \cap B}$ l'ensemble des objets mathématiques qui appartiennent à A et à B.

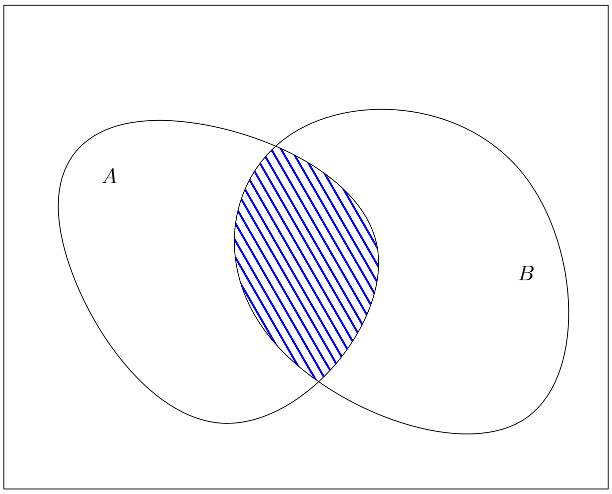
$A \cap B$, se lit « A inter B » ou « l'intersection de A et de B »

On remarque que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. (Voir la figure 1.4, page ci-contre).

Exemple 1.9

Si $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{3, 10, 2, 8, 8, 5\}$, alors $E \cap F = \{2, 8, 10\}$ et $E \cap \emptyset = \emptyset$.

Figure 1.4 – $A \cap B$



Notation 1.8 – Réunion

Si A et B sont deux ensembles, on note $\boxed{A \cup B}$ l'ensemble des objets mathématiques qui appartiennent à A ou à B.

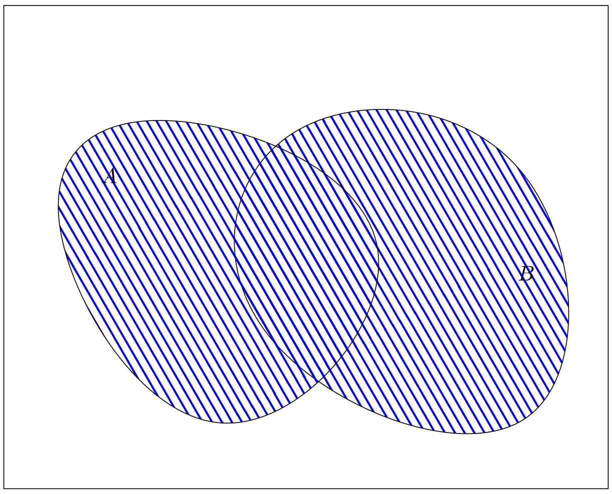
$$\boxed{A \cup B, \text{ se lit « } A \text{ union } B \text{ » ou « la réunion de } A \text{ et de } B \text{ »}}$$

On remarque que A et B sont des parties de $A \cup B$. (Voir la figure 1.5, de la présente page).

Exemple 1.10

Si $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{3, 10, 2, 8, 8, 5\}$, alors $E \cup F = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ et $E \cup \emptyset = E$.

Figure 1.5 – $A \cup B$



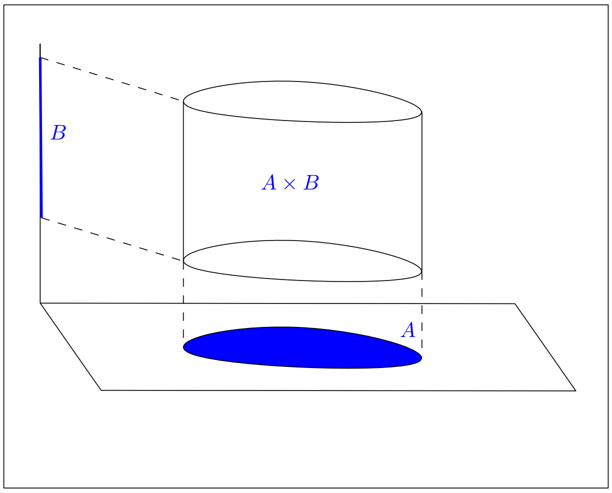
Notation 1.9 – $A \times B$

Si A et B sont des ensembles, on note $\boxed{A \times B}$ l'ensemble dont les éléments sont les *couples* (x, y), où $x \in A$ et $y \in B$.

$$\boxed{A \times B, \text{ se lit « } A \text{ croix } B \text{ » ou « le produit de } A \text{ par } B \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.6, de la présente page.

Figure 1.6 – $A \times B$



Exemple 1.11

Si $E = \{2, 8, 10\}$ et $F = \{3, 8\}$, alors $E \times F = \{(2, 3), (2, 8), (8, 3), (8, 8), (10, 3), (10, 8)\}$.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 (a) Écoutez l'énoncé 听吧！.

(b) Écrivez en langage mathématiques l'énoncé.

....

(c) Dessinez l'énoncé.

1.3.2 Montrer que $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$.

1.3.3 Montrer que $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

1.3.4 On suppose que E est un ensemble qui a n éléments et que F est un ensemble qui a p éléments. Montrer que $E \times F$ est un ensemble qui a un nombre fini d'éléments. Calculer ce nombre.

1.4 Familles d'ensembles

Définition 1.5

Soit I un ensemble. Pour tout élément i de I, on suppose qu'on a un ensemble noté E_i. On dit qu'on a une *famille d'ensembles* $(E_i)_{i \in I}$.

Notation 1.10 – Opérations sur les familles d'ensembles

1. On note $\boxed{\bigcap_{i \in I} E_i}$ l'ensemble des objets mathématiques qui appartiennent à tous les ensembles E_i (pour tout i appartenant à I).

$$\boxed{\bigcap_{i \in I} E_i, \text{ se lit « l'intersection des } E_i \text{ pour } i \text{ dans } I \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.7, page suivante).

2. On note $\boxed{\bigcup_{i \in I} E_i}$ l'ensemble des objets mathématiques qui appartiennent à au moins un ensemble E_i (pour au moins un élément i de I).

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} E_i, \text{ se lit « la réunion des } E_i \text{ pour } i \text{ dans } I \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.8, page suivante).

3. On dit que la famille $\boxed{(x_i)_{i\in I}}$ appartient à l'ensemble $\boxed{\prod_{i\in I} E_i}$ si pour tout $i \in I$, x_i appartient à E_i.

$$\boxed{\prod_{i\in I} E_i, \text{ se lit « le produit des } E_i \text{ pour } i \text{ dans } I \text{ »}}$$

(Voir la figure 1.9, page suivante).

Figure 1.7 – Intersections d'une famille d'ensembles

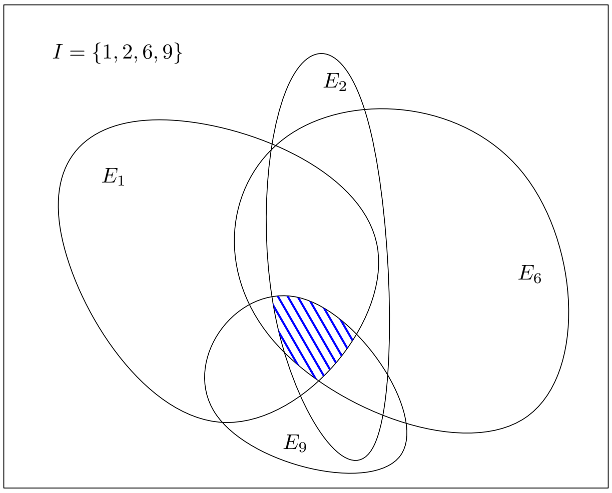


Figure 1.8 – Réunion d'une famille d'ensembles

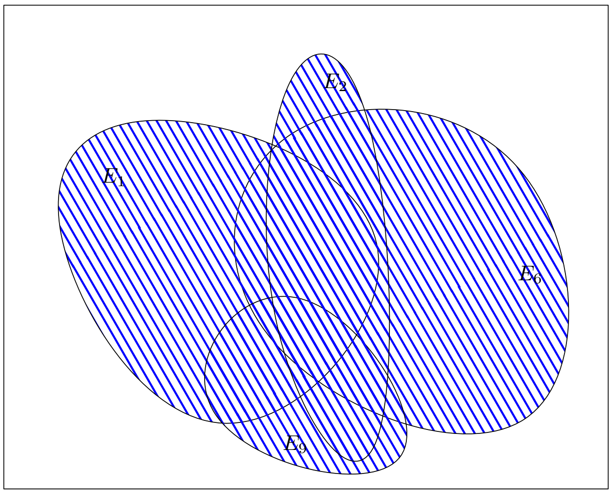
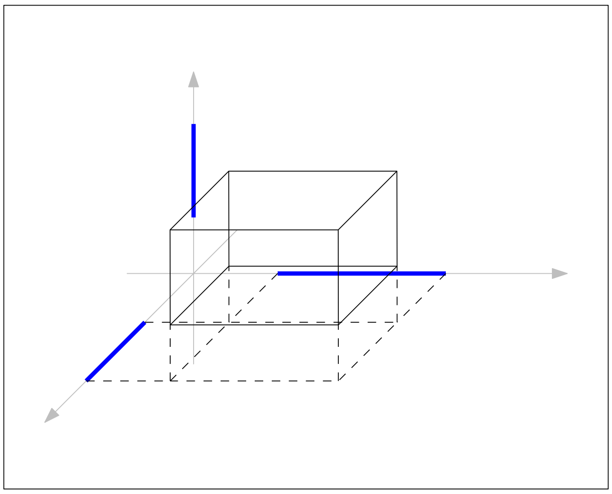


Figure 1.9 – Produits de trois segments



Exemple 1.12

Si $I=\{1,2,3\}$, $E_1=\{8,3,5\}$, $E_2=\{7,3\}$ et $E_3=\{3,5\}$, alors :

$$\bigcap_{i\in I} E_i=\{3\}, \qquad \bigcup_{i\in I} E_i=\{8,3,5,7\},$$

$$\prod_{i\in I} E_i=\Big\{(8,7,3),(8,7,5),(8,3,3),(8,3,5),(3,7,3),(3,7,5),$$
$$(3,3,3),(3,3,5),(5,7,3),(5,7,5),(5,3,3),(5,3,5)\Big\}$$

Remarque 1.5

Les éléments ne sont pas tous nécessairement de même type (entier, réel, etc.)
Tous ces calculs peuvent se faire avec un logiciel (`Wxmaxima` ou `Python`)). Voir les sessions `Wxmaxima` 1.3, de la présente page et `Python` 1.3, page suivante

Session `Wxmaxima` 1.3 – Opérations sur les ensembles (Wxmaxima)

```
(%i1) E[1] : {8,3,5}$
      E[2] : {7,3}$
      E[3] : {3,5}$
(%i4) union(E[1],E[2],E[3]);
```
(%o4) $\{3,5,7,8\}$
```
(%i5) intersection(E[1],E[2],E[3]);
```
(%o5) $\{3\}$
```
(%i6) cartesian_product(E[1],E[2],E[3]);
```
(%o6) $\{[3,3,3],[3,3,5],[3,7,3],[3,7,5],[5,3,3],[5,3,5],[5,7,3],[5,7,5],[8,3,3],[8,3,5],[8,7,3],[8,7,5]\}$

Session Python 1.3 – Opérations sur les ensembles

Toujours avec la bibliothèque `sets`...

In[1] – Chargement de Sympy

```
import sympy as sp
```

In[2]

```
E1 = sp.FiniteSet(8,3,5)
E2 = sp.FiniteSet(7,3)
E3 = sp.FiniteSet(3,5)
```

In[3] – Union

```
sp.sets.Union(E1,E2,E3)
```

Out[3]

$\{3, 5, 7, 8\}$

In[4] – Intersection

```
sp.sets.Intersection(E1,E2,E3)
```

Out[4]

$\{3\}$

In[5] – Produit cartésien

```
sp.sets.ProductSet(E1,E2,E3)
```

Out[5]

$\{3, 5, 8\} \times \{3, 7\} \times \{3, 5\}$

In[6] – ... pour le lire

```
set(_)
```

Out[6]

```
{(3, 3, 3), (3, 3, 5), (3, 7, 3), (3, 7, 5), (5, 3, 3), (5, 3, 5), (5, 7, 3), (5, 7, 5), (8, 3, 3), (8, 3,
    5), (8, 7, 3), (8, 7, 5)}
```

Notation 1.11

1. Lorsque tous les E_i sont égaux à un même ensemble E, on note :

$$\boxed{E^I = \prod_{i \in I} E_i}$$

2. Lorsque tous les E_i sont égaux à un même ensemble E et que $I = [\![1, n]\!]$ on note :

$$\boxed{E^n = E^I}$$

Exemple 1.13

$E \times E \times E$ est noté E^3. Ainsi, le plan usuel est noté $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit les ensembles $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ et $E_3 = \{1, 3, 4\}$.

(a) Comparer pour $\subset$ les ensembles :

$$(E_1 \cup E_2) \times (E_1 \cup E_3) \text{ et } (E_1 \times E_1) \cup (E_2 \times E_3)$$

(b) Comparer pour $\subset$ les ensembles :

$$(E_1 \cap E_2) \times (E_1 \cap E_3) \text{ et } (E_1 \times E_1) \cap (E_2 \times E_3)$$

1.4.2 Soit E un ensemble, on définit pour A et B deux parties de E (Δ se prononce « grand delta ») :

$$A \Delta B \overset{\text{Def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(a) Dessiner $A \Delta B$.

(b) Vérifier sur un dessin que, si A, B et C sont trois parties de E :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Travail à faire à la maison

► *Auto-évaluation.* Répondez aux questions suivantes :

1. Savez-vous lire à haute voix la phrase : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$? . . . . oui ☐ non ☐
2. Savez-vous dessiner le résultat ci-dessus ? . . . . oui ☐ non ☐
3. Savez-vous lire à haute voix la phrase :
$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (E_i \cap A)$? . . . . oui ☐ non ☐
4. Savez-vous dessiner le résultat ci-dessus ? . . . . oui ☐ non ☐
5. Savez-vous lire à haute voix la phrase : $(a, b, c) \notin A \times B \times C$? . . . . oui ☐ non ☐

6. Savez-vous lire à haute voix la phrase :

   $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$? .... oui ☐ non ☐

7. Savez-vous lire l'énoncé de l'exercice 1.4.2 ? .... oui ☐ non ☐
8. Savez-vous faire la question (a) de l'exercice 1.4.2 ? .... oui ☐ non ☐
9. Savez-vous faire la question (b) de l'exercice 1.4.2 ? .... oui ☐ non ☐
10. Comprenez-vous l'énoncé que vous écoutez ? 听吧！........ oui ☐ non ☐
11. Savez-vous écrire l'énoncé que vous venez d'écouter ? .... oui ☐ non ☐
12. Savez-vous répondre à la question posée dans cet énoncé ? .... oui ☐ non ☐

Chapitre 2

Logique

2.1 Signes mathématiques

1. $a + b$ se lit « *a plus b* » (on dit que l'on fait une *addition*)
2. $a - b$ se lit « *a moins b* » (on dit que l'on fait une *soustraction*)
3. $a \times b$ (qui sera noté $a\,b$) peut se dire (on dit que l'on fait une *multiplication*) :
   — « *a fois b* » (par exemple lorsque a et b sont des nombres), on dit aussi parfois « *a b* » (et on peut écrire $a\,b$)
   — « *a croix b* » (lorsque a et b sont des ensembles)
4. a/b peut se dire (on dit que l'on fait une *division*) :
   — « *a sur b* »
   — « *a divisé par b* »
5. x^2 peut se dire :
   — « *x au carré* »
   — « *x puissance 2* »
   — « *x deux* »
6. x^3 peut se dire :
   — « *x au cube* »
   — « *x puissance 3* »
   — « *x trois* »
7. x^4 peut se dire :
   — « *x puissance 4* ».
   — « *x quatre* »
8. $\sqrt{x}$ peut se dire :
   — « *racine carrée de x* »
   — « *racine de x* »
9. (x, y) se lit « *le couple x, y* ».
10. $>$ se lit « *strictement supérieur à* »
11. $\geq$ se lit « *supérieur (ou égal) à* »
12. $<$ se lit « *strictement inférieur à* »
13. $\leq$ se lit « *inférieur (ou égal) à* »
14. $|x|$ se lit « *valeur absolue de x* »
15. $(x + y)$ se lit « ouvrez la parenthèse, x plus y, fermez la parenthèse ».

Remarque 2.1

Bien faire la différence entre :

1. $\sqrt{x+1}$ 听吧！
2. $\sqrt{x}+1$ 听吧！
3. $a+\dfrac{b}{c}$ 听吧！
4. $\dfrac{a+b}{c}$ 听吧！ou 听吧！

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Reliez le symbole mathématique au nom de l'opération :

$-$	☐	☐	une multiplication
x^2	☐	☐	une division
$\sqrt{x}$	☐	☐	une addition
$/$	☐	☐	une soustraction
$+$	☐	☐	une racine
$\times$	☐	☐	une puissance

2.1.2 Écrire les formules entendues 听吧！

(a) ....

(b) ....

(c) ....

2.1.3 Écoutez les phrases mathématiques suivantes et écrivez-les en langage mathématiques. 听吧！

(a) ....

(b) ....

(c) ....

2.2 Langage de la logique

Définition 2.1

On appelle *assertion* une phrase mathématique qui peut être vraie ou fausse.

Exemple 2.1

1. « $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ ».
2. « $\left(\sqrt{2}\right)^2 \in \mathbb{N}$ ».

Notation 2.1 – Vrai/Faux

Nous noterons $\boxed{V}$ (pour « vraie ») et $\boxed{F}$ (pour « fausse ») les valeurs possibles d'une assertion.

Définition 2.2

On appelle *table de vérité de* P, une table qui contient toutes les valeurs possibles des assertions que l'on utilise (assertions de départ) et qui donne le résultat d'une assertion P dépendant de ces assertions de départ.

Exemple 2.2

A, B et C sont trois assertions de départ, voici des exemples de tables de vérité de P :

Une assertion A

A	P
V	F
F	V

Deux assertions A et B

A	B	P
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Trois assertions A, B et C

A	B	C	P
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Remarque 2.2

Si on a n assertions de départ, alors il y aura 2^n lignes dans la table de vérité de P.

Définition 2.3 – Négation d'une assertion

Soit A et B deux assertions, on peut définir « non A », « A ou B » et « A et B », de manière naturelle par les tables de vérité suivantes :

non A

A	non A
V	F
F	V

A ou B

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A et B

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

« non A » s'appelle *la négation de* A.

Définition 2.4

Soit A et B deux assertions, on peut définir $A \Rightarrow B$, qui se lit « A implique B » et $A \iff B$, qui se lit « A est équivalent à B » ou « A et B sont équivalents » par les tables de vérité :

A implique *B*

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A est équivalent à *B*

A	B	$A \iff B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposition 2.1

Si A et B sont deux assertions, alors[a] *:*

$$\Big[\text{non } (\text{non } A)\Big] \iff A \tag{2.1}$$

$$\Big[\text{non } (A \text{ ou } B)\Big] \iff \Big[(\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)\Big] \tag{2.2}$$

$$\Big[\text{non } (A \text{ et } B)\Big] \iff \Big[(\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B)\Big] \tag{2.3}$$

[a] Dans les implications et les équivalences, on mettra des crochets ([]) pour bien séparer les assertions

Remarque 2.3

On peut voir $A \Rightarrow B$ comme un raisonnement du genre :

Si A est vraie, *alors* B est vraie

Supposons « $A \Rightarrow B$ vraie ». En mathématiques, si A est fausse, alors B peut être vraie ou fausse.

1. (« Paris est en Chine » $\Rightarrow$ « Shanghai est en Chine ») est vraie.
2. (« Paris est en Chine » $\Rightarrow$ « Shanghai est en France ») est vraie.
3. (« Paris est en France » $\Rightarrow$ « Shanghai est en Chine ») est vraie.
4. (« Paris est en France » $\Rightarrow$ « Shanghai est en France ») est fausse.

Dans l'assertion $A \Rightarrow B$, on appelle A *l'hypothèse* et B *la conclusion*. Si l'hypothèse est fausse, on peut avoir des conclusions vraies et des conclusions fausses.

Définition 2.5

Si $(A \Rightarrow B)$ est une assertion vraie, on dit que :

1. « A est une condition *suffisante* (充分条件) de B », ou « il *suffit* que A vraie, pour que B vraie »
2. « B est une condition *nécessaire* (必要条件) de A », ou « il *faut* que B vraie, pour que A vraie ».

Si $(A \iff B)$ est une assertion vraie, on dit que :

1. « A est une condition *nécessaire et suffisante* (充要条件) de B », ou « il *faut et il suffit* que A vraie, pour que B vraie ». On écrit souvent :

$$\boxed{A \text{ est une CNS de } B}$$

Proposition 2.2

Si A et B sont deux assertions, alors :

$$\boxed{\Big[A \Rightarrow B\Big] \iff \Big[(\text{ non } A) \text{ ou } B\Big]}$$

et, par négation :

$$\boxed{\Big[\text{non } (A \Rightarrow B)\Big] \iff \Big[(A \text{ et } (\text{non } B)\Big]}$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Démontrer la proposition 2.1, page ci-contre.

2.2.2 Démontrer la proposition 2.2, de la présente page.

2.2.3 Démontrer les assertions suivantes (où A et B sont deux assertions) :

$$\Big[A \text{ et } (A \Rightarrow B)\Big] \Rightarrow B \tag{2.4}$$

$$\Big[A \Rightarrow B\Big] \iff \Big[(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)\Big] \tag{2.5}$$

2.3 Les quantificateurs

Notation 2.2

1. On note $\boxed{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (\text{se lit « N étoile »})$$

2. On note $\boxed{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des *entiers relatifs* :

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

et

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (\text{se lit « Z étoile »})$$

3. On note $\boxed{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des *nombres rationnels* :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

et

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\},\quad \underbrace{\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0\}}_{\text{se lit « Q plus »}} \text{ et } \underbrace{\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}}_{\text{se lit « Q plus étoile »}}$$

4. On note $\boxed{\mathbb{R}}$ l'ensemble des *réels* (les nombres usuels). Par exemple :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R},\ \left\{\sqrt{2}, \pi, e, e^\pi, ...\right\} \subset \mathbb{R}$$

et, de même :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\} \text{ et } \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

Notation 2.3

Quelques symboles mathématiques usuels :

1. *Quantificateur universel* :

   $\boxed{\forall}$ se lit « pour tout » ou « quel que soit »

2. *Quantificateur existentiel* :

   $\boxed{\exists}$ se lit « il existe »

3. On a aussi :

   $\boxed{\nexists}$ (« il n'existe pas ») et $\boxed{\exists!}$ (« il existe un unique »)

Remarque 2.4

— $x \in E$ se lit « x appartient à E ».
— $\forall x \in E$ se lit « pour tout x appartenant à E »

Proposition 2.3

Si E est un ensemble, P une assertion dépendant d'un élément $x \in E$, ce que l'on note $P(x)$. On a alors :

1. Négation du quantificateur universel

$$\boxed{\Big[\text{non } \big(\forall x \in E,\ P(x)\big)\Big] \iff \Big[\exists x \in E,\ \text{non } \big(P(x)\big)\Big]}$$

2. Négation du quantificateur existentiel

$$\boxed{\Big[\text{non } \big(\exists x \in E,\ P(x)\big)\Big] \iff \Big[\forall x \in E,\ \text{non } \big(P(x)\big)\Big]}$$

Exercice(s) 2.3

2.3.1 (a) Lire les assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \tag{2.6}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x \tag{2.7}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists! y \in \mathbb{R},\ \Big[(y > 0) \text{ et } (y^2 = x)\Big] \tag{2.8}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big[(x \leq y) \text{ ou } (y \leq x)\Big] \tag{2.9}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big[x \neq y\Big] \iff \Big[(x < y) \text{ ou } y < x\Big] \tag{2.10}$$

(b) Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses ?

2.3.2 Écoutez et écrire les assertions suivantes : 听吧！

(a) ....

(b) ....

(c) ....

(d) ....

(e) ....

Plus rapide ! 听吧！

2.3.3 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2\,x = y \tag{2.11}$$
$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 2\,x = y \tag{2.12}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 2\,x = y \tag{2.13}$$
$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2\,x = y \tag{2.14}$$

2.3.4 Écrivez les négations des assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R}_+,\ y^2 = x \tag{2.15}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0 \text{ et } y^2 = x \tag{2.16}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Big[x \geq 0\Big] \ \Rightarrow\ \Big[\exists y \in \mathbb{R}_+,\ y^2 = x\Big] \tag{2.17}$$
$$\exists! x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \Big[y^2 = x\Big] \ \Rightarrow\ \Big[y \geq 0\Big] \tag{2.18}$$

Travail à faire à la maison

► *Auto-évaluation.* Répondez aux questions suivantes :

	oui	non
1. Savez-vous lire à haute voix les énoncés des exercices 2.2, page 33 ?	☐	☐
2. Comprenez-vous ces énoncés ?	☐	☐
3. Savez-vous faire ces deux exercices ?	☐	☐
4. Savez-vous lire l'énoncé de l'exercice 2.3.3 ?	☐	☐
5. Savez-vous répondre aux questions posées dans cet exercice ?	☐	☐
6. Savez-vous lire à haute voix l'énoncé de l'exercice 2.3.4 ?	☐	☐
7. Comprenez-vous l'énoncé de cet exercice ?	☐	☐
8. Savez-vous faire cet exercice ?	☐	☐

9. Savez-vous lire à haute voix
« Soit I un ensemble, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensemble, alors

$$\left[x \in \bigcap_{i\in I} E_i\right] \iff \left[\forall i \in I,\ x \in E_i\right] \tag{2.19}$$

$$\left[x \in \bigcup_{i\in I} E_i\right] \iff \left[\exists i \in I,\ x \in E_i\right] \tag{2.20}$$

$$\left[(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i\right] \iff \left[\forall i \in I,\ x_i \in E_i\right] \text{ »} \tag{2.21}$$

oui ☐ non ☐

....

Chapitre 3

Les fonctions

3.1 Applications et fonctions

Définition 3.1 – Application

Soit A et B deux ensembles. On dit que f est une *application* de A dans B lorsqu'à tout élément x de A on associe un unique élément $f(x)$ (se lit « f de x ») de B.

Notation 3.1

Une application f de A dans B se note

$$f \ : \ x \in A \mapsto f(x) \in B$$

ou

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit : « f est l'application qui, à tout élément x de A, associe l'élément $f(x)$ de B ».

Exemple 3.1

1. L'application qui à tout élément x de $\mathbb{R}$ associe l'élément x^3 de $\mathbb{R}$ se note :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

2. Si $A = B$, l'application qui à tout élément x de A associe l'élément x de A est notée id_A :

$$\mathrm{id}_A \ : \ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

   Id_A se lit « l'identité de A ».

Remarque 3.1

Soit f une application de A dans B, on appelle *graphe* de f le sous-ensemble :

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in A\} \subset A \times B$$

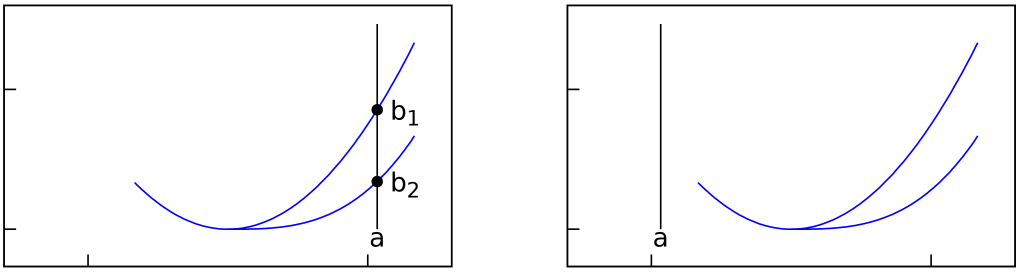
Γ vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ (a, b) \in \Gamma$$

Cette propriété n'est pas vérifiée lorsque (voir figure 3.1) :

1. soit il existe $a \in A$ tel qu'il existe au moins deux $b_1, b_2 \in B$ distincts ($b_1 \neq b_2$) vérifiant $(a, b_1) \in \Gamma$ et $(a, b_2) \in \Gamma$;
2. soit il existe $a \in A$ tel qu'il n'existe pas de $b \in B$ vérifiant $(a, b) \in \Gamma$.

Figure 3.1 – Ce n'est pas le graphe d'une application



Remarque 3.2

Dans la pratique, on ne donne souvent que l'association $x \mapsto f(x)$ et on doit commencer par déterminer l'ensemble D des valeurs de x telles que $f(x)$ a un sens (on peut l'exprimer ou le calculer). On dit alors que f est une *fonction de A vers B* et que D est son *ensemble de définition.*

Cela revient à donner un ensemble :

$$\Gamma \subset A \times B$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in A,\ \forall (b_1, b_2) \in B^2,\ \Big[(a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma\Big] \implies \Big[b_1 = b_2\Big]$$

D est alors caractérisé par :

$$\Big[a \in D\Big] \iff \Big[\exists b \in B,\ (a, b) \in \Gamma\Big]$$

et on a alors $b = f(a)$.

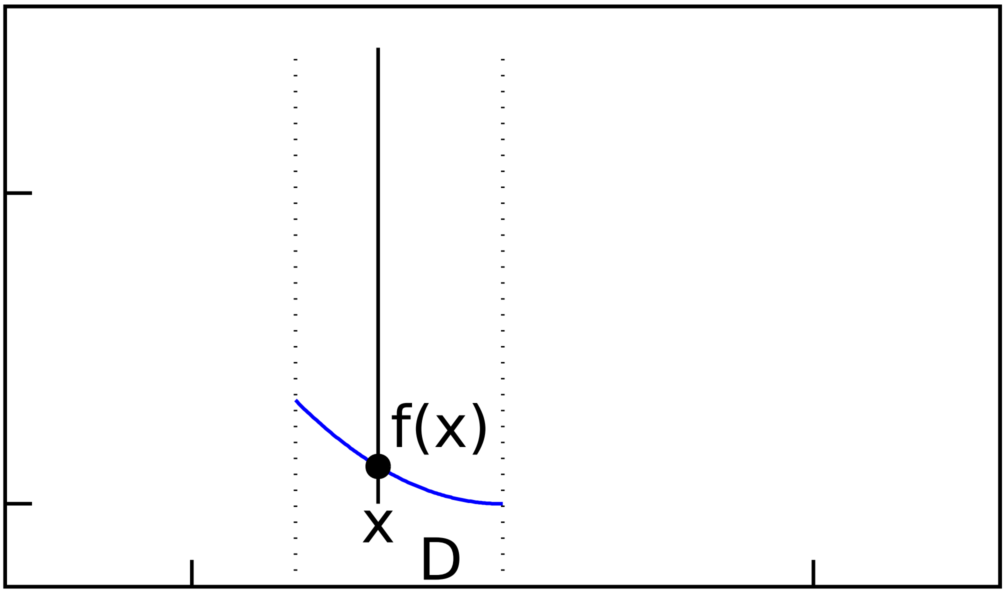
Cette distinction entre *application* et *fonction* est la plupart du temps inutile, car une fonction est une application telle qu'on connaît son domaine de définition.

Exemple 3.2

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{1}{x^3 - 8}$ se note :

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{1}{x^3 - 8}$$

Figure 3.2 – Ensemble de définition



et a pour domaine de définition :

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Ainsi, on a l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3 - 8} \end{array}$$

Notation 3.2

On note $\mathscr{F}(A, B)$ l'ensemble des applications de A dans B.

Définition 3.2

Soit A et B deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(A, B)$.

1. Pour tout élément x de A, on appelle *image de x par f* l'élément $f(x)$ de B. On dit aussi : « $f(x)$ est l'image de x par f ».
2. Pour tout élément y de B, on appelle *antécédent de y par f* tout élément x de A tel que $y = f(x)$.

Dans ce cas, on dit : « x est **un** antécédent de y par f ».

Remarque importante 3.3

Un élément x de A a une seule image mais un élément y de B peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Définition 3.3

Soit A, B et C trois ensembles, $f \in \mathscr{F}(A, B)$ et $g \in \mathscr{F}(B, C)$. Alors l'application qui, à tout élément x de A, associe l'élément $g(f(x))$ de C est notée $g \circ f$, elle s'appelle *la composée de g et de f* :

$$g \circ f \ : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarquons que $g \circ f \in \mathscr{F}(A, C)$. $g \circ f$ se lit : « g rond f ».

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Trouver une application $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que 0 admette exactement p antécédents par f.

3.1.2 Les ensembles suivants sont-ils des graphes de fonction ? Si l'ensemble est un graphe de fonction, donner son ensemble de définition.

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y^2\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+,\ x = y^2\right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \ln x\right\}, \quad \Gamma_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \tan x\right\}$$

3.2 Images directes, images réciproques par une application

Définition 3.4

Soit f une application de A dans B.

1. Pour toute partie E de A, on note $f(E)$ l'ensemble :

$$\boxed{f(E) = \{f(x),\ x \in E\}}$$

   On lit : « $f(E)$ est *l'image directe* de E par f ».

2. Pour toute partie F de B, on note $f^{-1}(F)$ l'ensemble :

$$\boxed{f^{-1}(F) = \{x \in A,\ f(x) \in F\}}$$

   On lit : « $f^{-1}(F)$ est *l'image réciproque* de F par f ».

Remarque 3.4

Pour tout $y \in B$, l'ensemble des antécédents de y par f est $f^{-1}(\{y\})$.

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Montrer que $f(E)$ est une partie de B et que $f^{-1}(F)$ est une partie de A.

3.2.2 Montrer que pour tout $y \in B$,

$$\left[y \in f(E)\right] \iff \left[\exists x \in E, y = f(x)\right]$$

3.2.3 Montrer que pour tout $x \in A$,

$$\left[x \in f^{-1}(F)\right] \iff \left[f(x) \in F\right]$$

3.2.4 Remplir le tableau suivant (on pourra faire des dessins). On cherchera la plus grande partie A de $\mathbb{R}$ telle que $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

Application f	Ensemble A	Ensemble E	Ensemble $f(E)$	Ensemble F	Ensemble $f^{-1}(F)$
$x \mapsto 1$		$]1, 4]$		$[-3, 6]$	
$x \mapsto 1$		$[-3, 6]$		$]1, 4]$	
$x \mapsto x$		$[-3, 6]$		$]1, 4]$	
$x \mapsto x^2$		$[-3, 6]$		$]1, 4]$	
$x \mapsto \ln x$		$]1, 4]$		$[-3, 6]$	
$x \mapsto e^x$		$]1, 4]$		$[-3, 6]$	
$x \mapsto \sin x$		$]1, 4]$		$[-3, 6]$	
$x \mapsto \tan x$		$[0, \pi/4]$		$\{\sqrt{3}\}$	

3.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3.5

Soit f une application de A dans B.

1. On dit que f est *injective* lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in A^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$. On dit aussi : « f est une *injection* ».
2. On dit que f est *surjective* lorsque pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. On dit aussi : « f est une *surjection* ».

Remarque 3.5

Remarquons que f est injective lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in A^2$ tel que $x_1 \neq x_2$, on a : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Remarque 3.6

Remarquons que f est surjective lorsque $f(A) = B$.

Proposition 3.1

Soit f une application de A dans B alors :

1. *f est injective si et seulement si :*

$$\exists g \in \mathscr{F}(B, A),\ g \circ f = \mathrm{id}_A$$

2. *f est surjective si et seulement si :*

$$\exists g \in \mathscr{F}(B, A),\ f \circ g = \mathrm{id}_B$$

3. *f est bijective si et seulement si :*

$$\exists g \in \mathscr{F}(B, A),\ g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ et } f \circ g = \mathrm{id}_B$$

Définition 3.6

Soit f une application de A dans B. On dit que f est *bijective* lorsque f est injective et surjective. On dit aussi : « f est une *bijection* de A **sur** B ».

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Écrire l'injectivité et la surjectivité avec des symboles mathématiques.

3.3.2 Montrer que f est injective lorsque tous les éléments de B admettent au plus un antécédent par f.

3.3.3 Montrer que f est surjective lorsque tous les éléments de B admettent au moins un antécédent par f.

3.3.4 Montrer que f est bijective lorsque pour tout $y \in B$, il existe un unique $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

3.3.5 On suppose que f est une bijection. Pour tout $y \in B$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Montrer que f^{-1} est une bijection de B sur A. f^{-1} se lit : « f^{-1} est l'application réciproque de l'application bijective f ».

3.3.6 Les applications $f : A \to B$ suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Dans ce dernier cas, donner la réciproque de l'application. On justifiera à chaque fois la réponse.

f	A	B	injective ?	surjective ?	bijective ?	si bijective, f^{-1}
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$				
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$\{1\}$				
$x \mapsto x$	$[-3, 6]$	$\mathbb{R}$				
$x \mapsto x^2$	$[-3, 6]$	$\mathbb{R}$				
$x \mapsto x^2$	$[-3, -1[$	$]1, 9]$				
$x \mapsto e^{-x}$	$\mathbb{R}_+$	$[0, 1]$				

$x \mapsto e^{-x}$	$\mathbb{R}_+$	$]0,1]$				
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$				

3.3.7 Trouver une bijection de $\mathscr{F}(A,B)$ sur B^A.

Chapitre 4

Les démonstrations

4.1 Structure d'une démonstration

Le symbole $\sum_{k=i}^{j}$ se lit « somme de k égal i à k égal j ».
Énoncé : Montrez que, si n est un entier naturel non nul on a :

$$\frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \overset{\text{Not}}{=} \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$$

Énoncé : (version mathématique) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n^2 + 1 \leq k \leq n^2 + n$$

On a alors :

$$k \geq n^2 > 0$$

Or, on sait que :

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \left[x \leq y\right] \Rightarrow \left[\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right]$$

Donc :

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or, on sait que :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \left[x \leq z \text{ et } y \leq t\right] \Rightarrow \left[x + y \leq z + t\right]$$

Donc :

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{n^2}$$

Finalement :

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k} \leq n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

On a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}}$$

Remarque importante 4.1

Étapes d'une démonstration :

1. Traduction de l'énoncé en langage mathématique.
2. Utilisation d'un vocabulaire simple et précis pour rédiger la démonstration.
3. Encadrement du résultat prouvé écrit en langage mathématiques.

4.2 Différents cas

4.2.1 Comment prouver une assertion qui commence par « pour tout x » ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que pour tout $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie »

Il faut alors faire comme suit.

1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. On écrit donc *toujours* au début de la preuve : « Soit x un élément de E ».
2. On démontre que $P(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par « Donc » ou « Or ».
   (a) Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
   (b) Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
      i. soit une hypothèse de l'énoncé,
      ii. soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.
3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « Finalement, $P(x)$ est vraie. On en déduit que pour tout $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie ».

Exercice(s) 4.1

4.1.1 Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -2\,n & \text{si } n \leq 0 \\ \\ 2\,n-1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est injective (on pourra commencer par transformer l'assertion « f est injective » en une assertion commençant par « $\forall$ »).

4.2.2 Comment prouver une unicité ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'assertion $P(x)$ est vraie pour un unique $x \in E$ »

On fait comme suit : on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$ sont vraies et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ».

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que f admet λ comme limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big[x \geq A\Big] \implies \Big[|f(x) - \lambda| \leq \varepsilon\Big]$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$$

Montrer que $x = 0$.

(b) Établir l'unicité de la limite de f en $+\infty$ (*on pourra utiliser la question précédente*).

4.2.3 Comment prouver une assertion qui commence par « il existe x » ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que l'assertion $P(x)$ est vraie »

On peut faire comme suit : on trouve un élément x de E qui vérifie $P(x)$. Il s'agit souvent d'une question difficile !

Remarque 4.2

On verra une autre méthode dans le paragraphe 4.3.1.

Exercice(s) 4.3

4.3.1 Montrer que l'application $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 + n$ n'est pas injective (on pourra commencer par transformer l'assertion « f n'est pas injective » en une assertion commençant par « $\exists$ »).

4.3.2 On reprend l'exercice 4.1.1. Montrer que f est bijective.

4.2.4 Comment prouver une implication ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'assertion P implique l'assertion Q, c'est-à-dire montrer que $P \Longrightarrow Q$ »

1. On commence par écrire au début de la preuve : « Supposons que P est vraie ».
2. On démontre que Q est vraie par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ».
3. On conclut en écrivant à la fin de la preuve : « Finalement, l'assertion P implique l'assertion Q ».

Remarque 4.3

Souvent, on vous demandera : « Montrer que *si* on a P, *alors* on a Q ». Cela signifie exactement qu'on vous demande de montrer que l'assertion P implique l'assertion Q.

Remarque importante 4.4

Parfois, après vous avoir demandé de prouver $P \Rightarrow Q$, on vous demandera : « La réciproque est-elle vraie ? ». Cela signifie que vous devez dire si l'assertion $Q \Rightarrow P$ est vraie ou fausse. Deux cas se présentent :

1. Si vous pensez que l'implication $Q \Rightarrow P$ est vraie, vous devez appliquer la méthode qu'on vient de voir pour prouver une implication.
2. Si vous pensez que l'implication $Q \Rightarrow P$ est fausse, c'est-à-dire si vous pensez que non $(Q \Rightarrow P)$ est vraie, vous devez prouver qu'on a : Q et (non P).

Remarque importante 4.5

On a vu trois sens au mot « réciproque » en mathématiques. Cela peut désigner :

1. un ensemble, lorsqu'on parle de $f^{-1}(F)$, qui est l'image réciproque de l'ensemble F par l'application f,
2. une application, lorsqu'on parle de f^{-1}, qui est l'application réciproque de l'application bijective f,
3. une assertion, lorsqu'on parle de $Q \Rightarrow P$, qui est l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Exercice(s) 4.4

4.4.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors n^2 est pair.

4.4.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone [a], alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?

a. On dit que f est strictement monotone si f est strictement croissante ou si f est strictement décroissante.

4.2.5 Comment prouver une équivalence ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'assertion P est équivalente à l'assertion Q, c'est-à-dire montrer que $P \Leftrightarrow Q$ »

Très souvent, on prouve que l'assertion P implique l'assertion Q puis que l'assertion Q implique l'assertion P, c'est-à-dire on montre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On appelle cette méthode « la double implication ». Il faut donc appliquer deux fois la méthode vue dans le paragraphe 4.2.4.

Remarque 4.6

L'implication $P \Rightarrow Q$ s'appelle le *sens direct*. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle le *sens indirect* ou le *sens réciproque*.

Remarque 4.7

Souvent, on vous demandera : « Montrer qu'on a P *si et seulement si* on a Q ». Cela signifie exactement qu'on vous demande de montrer que l'assertion P est équivalente à l'assertion Q.

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$ si et seulement si $x = -\dfrac{7}{4}$.

4.2.6 Comment prouver l'inclusion d'un ensemble dans un autre ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, c'est-à-dire montrer que $A \subset B$ »

Pour montrer que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on revient à la définition donnée par le cours (voir définition 1.3) : « $A \subset B$ si et seulement si pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ ». Comme expliqué dans le paragraphe 4.2.1, il faudra commencer la preuve par : « Soit $x \in A$ ». Il faudra ensuite prouver, à l'aide d'un raisonnement, que $x \in B$.

4.2.7 Comment prouver l'égalité entre deux ensembles ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'ensemble A est égal à l'ensemble B, c'est-à-dire montrer que $A = B$ »

D'après le cours (voir définition 1.4), « des ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$ ». Ainsi, si on nous demande de montrer que $A = B$, on prouve que $A \subset B$ et $B \subset A$. On appelle cette méthode « la double inclusion ». Il faut donc appliquer deux fois la méthode vue dans le paragraphe 4.2.6.

Exercice(s) 4.6

4.6.1 On se donne des ensembles I, E et F et une famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$. On suppose que $F \subset E$ et que pour tout $i \in I$, $E_i \subset E$.

(a) Montrer que

$$F \cap \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) = \bigcup_{i \in I} (F \cap E_i)$$

(b) Montrer que

$$E \setminus \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus E_i)$$

4.2.8 Comment prouver l'égalité entre deux applications ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'application $f : A \to B$ est égale à l'application $g : A \to B$ »

D'après le cours, des applications $f \in \mathscr{F}(A, B)$ et $g \in \mathscr{F}(A, B)$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$. Ainsi, si on nous demande de montrer que $f = g$, on fixe un élément x de A (en commençant la preuve par : « Soit $x \in A$ ») et on prouve avec une suite de déductions que $f(x) = g(x)$.

Exercice(s) 4.7

4.7.1 Soit E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E, E)$. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que :

(a) si f est injective, alors $f = \mathrm{id}_E$,

(b) si f est surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.

4.2.9 Comment résoudre une équation ?

Imaginons qu'on nous demande :

« Résoudre l'équation $(E) : \mathcal{E}(x)$ d'inconnue $x \in A$ »

Il s'agit ici de donner l'ensemble $\mathcal{S}$ de tous les éléments x de l'ensemble A tels que l'assertion $\mathcal{E}(x)$ soit vraie. Remarquons que $\mathcal{S}$ est une partie de A. $\mathcal{S}$ est appelé « l'ensemble des solutions de l'équation (E) ».

Remarque 4.8

Ainsi, on a, pour tout $x^i nA$:

$$x \in \mathcal{S} \text{ si, et seulement si, } \mathcal{E}(x) \text{ est vérifiée}$$

Exemple 4.1

1. L'équation $(E_1) : x^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour ensemble de solutions $\{-2, 2\}$.
2. L'équation $(E_2) : x^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ a pour ensemble de solutions $\{2\}$.
3. L'équation $(E_3) : x^2 + 4 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour ensemble de solutions $\emptyset$.
4. L'équation $(E_4) : x^2 + 4 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ a pour ensemble de solutions $\{-2\,i, 2\,i\}$.

Remarque importante 4.9

Pour résoudre l'équation (E), on peut raisonner par analyse/synthèse (voir le paragraphe 4.3.4), qui consiste ici à faire comme suit.

1. *Première étape : analyse.* On prend un élément x de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire on prend un élément x de l'ensemble A tel que $\mathcal{E}(x)$ soit vraie. On fait des calculs, un raisonnement, et on trouve que x appartient nécessairement à une partie B de A. Ceci prouve que $\mathcal{S} \subset B$.
2. *Deuxième étape : synthèse.* On vérifie que pour tout $x \in B$, $\mathcal{E}(x)$ est vraie (**si ce n'est pas le cas, il faut revenir à la première étape et la poursuivre**). Ceci prouve que $B \subset \mathcal{S}$.
3. *Troisième étape : conclusion.* On en déduit que $\mathcal{S} = B$: l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est B.

Exercice(s) 4.8

4.8.1 Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnues $x \in [-2, +\infty[$.

$$(E_1) \ : \ \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1, \qquad (E_2) \ : \ \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$$

4.8.2 Résoudre l'équation $\sqrt{2\,x-1} = x-2$ d'inconnue $x \geq 1/2$.

4.2.10 Exemple de rédaction

On va voir ici comment bien rédiger une démonstration. On veut résoudre l'exercice suivant.

Exercice(s) 4.9

Soit A et B deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(A, B)$. On pose

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array}$$

Montrer que f est injective si, et seulement si, φ est injective.

On propose ici une manière de rédiger la solution de cet exercice. Vous devez remplir les cases vides avec les mots suivants.

On sait que	Donc	Comme
Soit	tel que	Or
Finalement	On conclut que	Supposons que
Montrons que	Alors	On a
Remarquons que	D'où	On en déduit que

► *Comme on me demande de montrer une équivalence, je vais faire une double implication. Je commence par le sens direct.*

Montrons que si f est injective, alors φ est injective.

[ ] f est injective.

[ ] φ est injective.

[ ] $(X, Y) \in \mathscr{P}(A)^2$ [ ] $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

$\boxed{\quad}$ $X = Y$.

$\boxed{\quad}$ $f(X) = f(Y)$.

▶ *Comme je dois montrer que $X = Y$, je vais faire une double inclusion. Je commence par montrer que $X \subset Y$.*

$\boxed{\quad}$ $x \in X$.

$\boxed{\quad}$ $f(x) \in f(X)$.

$\boxed{\quad}$ $f(X) = f(Y)$.

$\boxed{\quad}$ $f(x) \in f(Y)$.

$\boxed{\quad}$ il existe $y \in Y$ $\boxed{\quad}$ $f(x) = f(y)$.

$\boxed{\quad}$ f est injective.

$\boxed{\quad}$ $x = y$.

$\boxed{\quad}$ $y \in Y$.

$\boxed{\quad}$ $x \in Y$.

$\boxed{\quad}$ pour tout $x \in X$, $\boxed{\quad}$ $x \in Y$.

$\boxed{\quad}$ $X \subset Y$.

▶ *Je montre maintenant l'autre inclusion, c'est-à-dire que $Y \subset X$.*

$\boxed{\quad}$ $y \in Y$.

$\boxed{\quad}$ $f(y) \in f(Y)$.

$\boxed{\quad}$ $f(X) = f(Y)$.

$\boxed{\quad}$ $f(y) \in f(X)$.

$\boxed{\quad}$ il existe $x \in X$ $\boxed{\quad}$ $f(y) = f(x)$.

$\boxed{\quad}$ f est injective.

$\boxed{\quad}$ $y = x$.

$\boxed{\quad}$ $x \in X$.

$\boxed{\quad}$ $y \in X$.

$\boxed{\quad}$ pour tout $y \in Y$, $\boxed{\quad}$ $y \in X$.

$\boxed{\quad}$ $Y \subset X$.

$\boxed{\quad}$ $X \subset Y$ et $Y \subset X$, $\boxed{\quad}$ $X = Y$.

$\boxed{\quad}$ pour tout $(X, Y) \in \mathscr{P}(A)^2$ $\boxed{\quad}$ $\varphi(X) = \varphi(Y)$,

$\boxed{\quad}$ $X = Y$.

$\boxed{\quad}$ φ est injective.

$\boxed{\quad}$ si f est injective, alors φ est injective.

▶ *Le sens direct est prouvé. Je montre maintenant le sens indirect.*

Montrons que si φ est injective, alors f est injective.

$\boxed{\quad}$ φ est injective.

$\boxed{\quad}$ f est injective.

$\boxed{\quad}$ $(x, y) \in A^2$ $\boxed{\quad}$ $f(x) = f(y)$.

$\boxed{\quad}$ $x = y$.

$\boxed{\quad}$ $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$ et que $\{y\} \in \mathscr{P}(A)$.

$\boxed{\quad}$ $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$ et $\varphi(\{y\}) = \{f(y)\}$.

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $f(x) = f(y)$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $\{f(x)\} = \{f(y)\}$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$ et $\varphi(\{y\}) = \{f(y)\}$, $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $\varphi(\{x\}) = \varphi(\{y\})$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ φ est injective.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $\{x\} = \{y\}$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $x = y$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ pour tout $(x, y) \in A^2$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $f(x) = f(y)$,
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $x = y$.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ f est injective.
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ si φ est injective, alors f est injective.

► *Je peux maintenant conclure.*
$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ f est injective si et seulement si φ est injective.

4.3 Les différents types de démonstrations en mathématiques

4.3.1 Démonstration par l'absurde

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'assertion P est vraie »

Le raisonnement par l'absurde consiste à faire comme suit.

1. On suppose au début de la preuve que P est fausse. On commence donc par écrire : « Supposons par l'absurde que P est fausse ».
2. On fait un raisonnement pour avoir, à la fin, une assertion Q à la fois vraie et fausse.
3. On conclut que P ne peut pas être fausse, donc que P est vraie. On écrit donc à la fin : « On aboutit à une contradiction, donc l'assertion P est vraie ».

Exercice(s) 4.10

4.10.1 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Que dire de l'équation $x^2 = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{Q}$?

4.10.2 Soit A un ensemble et $f : A \to \mathscr{P}(A)$. On note $B = \{x \in A,\ x \notin f(x)\}$.

(a) Montrer que $B \notin f(A)$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de surjection de A sur $\mathscr{P}(A)$.

4.3.2 Démonstration par contraposition

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que l'assertion P implique l'assertion Q »

Le raisonnement par contraposition consiste à montrer que [non Q] $\Longrightarrow$ [non P] (pour prouver une implication, voir le paragraphe 4.2.4). Ceci prouve $P \Longrightarrow Q$.

Exercice(s) 4.11

4.11.1 Montrer que $\left[x^2 \neq 4\right] \implies [x \neq 2]$.

4.11.2 Soit j le nombre complexe $j = e^{2\,i\,\pi/3}$ et n un entier naturel. Montrer que :

$$\left[j^{2\,n} + j^n + 1 = 0\right] \implies \left[\exists k \in \mathbb{N},\ n = 3\,k + 1 \text{ ou } n = 3\,k + 2\right]$$

4.11.3 Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

4.3.3 Démonstration par récurrence

On se donne une famille d'énoncés mathématiques $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai »

Le raisonnement par récurrence consiste à faire comme suit.

1. On montre que H_0 est vrai.
2. On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n \implies H_{n+1}$.
3. On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

Remarque 4.10

Vous ne devez pas, à chaque fois que vous voyez : « Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai », faire une démonstration par récurrence. On choisit de faire une récurrence seulement lorsqu'on voit un lien entre H_n et H_{n+1}, c'est-à-dire lorsque $H_n \implies H_{n+1}$ semble naturel. Parfois, on pourra établir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est vrai}$$

de manière simple, sans faire de récurrence, directement en suivant le paragraphe 4.2.1 : on commence par « Soit $n \in \mathbb{N}$ » et on prouve, via un raisonnement, que H_n est vrai. C'est ce que nous avions fait par exemple dans l'exercice 4.1.1.

Exercice(s) 4.12

4.12.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

4.12.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq \dfrac{4\,n+3}{6}\sqrt{n}$.

4.12.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$.

4.3.4 Démonstration par analyse/synthèse

Imaginons qu'on nous demande :

« Montrer qu'il existe un unique élément x de l'ensemble A qui vérifie une condition $C(x)$ »

Le raisonnement par analyse/synthèse consiste à faire comme suit.

1. *Analyse.* On prend un élément x de A qui vérifie la condition $C(x)$. On fait des calculs, un raisonnement, et on trouve que x est nécessairement égal à un élément x_0 de A.

2. *Synthèse.* On vérifie que x_0 satisfait la condition $C(x_0)$.
3. *Conclusion.* On en déduit que x_0 est l'unique élément de A qui vérifie la condition C.

Exercice(s) 4.13

4.13.1 Montrer la proposition 3.1.

4.13.2 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire.

4.13.3 Montrer qu'il existe une unique bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(n) - n| = 1$$

Et si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

Remarque importante 4.11

On peut aussi nous demander :

« Déterminer l'ensemble des éléments x de l'ensemble A qui vérifient une condition $C(x)$ »

Dans ce cas, on peut encore faire un raisonnement par analyse/synthèse.

1. *Analyse.* On prend un élément x de A qui vérifie la condition $C(x)$. On fait des calculs, un raisonnement, et on trouve que x appartient nécessairement à une partie B de A. Ceci prouve que $\{x \in A;\ C(x) \text{ est vrai}\} \subset B$.
2. *Synthèse.* On vérifie que tous les éléments x de B satisfont la condition $C(x)$ (**si ce n'est pas le cas, il faut revenir à l'analyse et la poursuivre**). Ceci prouve que $B \subset \{x \in A;\ C(x) \text{ est vrai}\}$.
3. *Conclusion.* On en déduit que B est l'ensemble des éléments x de A qui vérifient $C(x)$.

Exercice(s) 4.14

4.14.1 Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tels que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto a\,x^2 + b\,x + 2$ admette un maximum en -1.

4.4 Quelques exercices

Exercice(s) 4.15

4.15.1 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Résoudre les équations
(a) $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$,
(b) $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

4.15.2 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(3\,k) = 2\,k,\ f(3\,k+1) = 4\,k+1,\ f(3\,k+2) = 4\,k+3$$

Après avoir vérifié que f appartient bien à $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, montrer que f est bijective.

4.15.3 Soit f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On pose

$$s : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x)+g(y) \end{array} \quad \text{et} \quad p : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x)\,g(y) \end{array}$$

(a) s est-elle surjective ?

(b) s est-elle injective ?

(c) p est-elle surjective ?

(d) p est-elle injective ?

Si la réponse est oui, on fera une preuve, si la réponse est non, on donnera un contre-exemple en choisissant f et g.

4.15.4 La fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

4.15.5 Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer $f(f^{-1}([-1,1]))$ et $f^{-1}(f([1,4]))$.

4.15.6 Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - x \end{array}$$

f est-elle injective ? surjective ? Calculer $f(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}([-1,1])$.

4.15.7 Soit $f \ : \ X \to Y$. Prouver les assertions suivantes.

(a) $\forall A \subset X,\ A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) $\forall B \subset Y,\ B \supset f(f^{-1}(B))$.

(c) $f^{-1}(f(X)) = X$.

(d) $\forall A \subset B \subset Y,\ f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.

(e) $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

(f) f est surjective si et seulement si $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$.

(g) f est injective si et seulement si $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

(h) f est bijective si et seulement si $\forall A \subset X,\ f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

4.15.8 Soit $f \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(f(n))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{p \in \mathbb{N},\ p \geq n\}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(E_n) \subset E_n$ (on pourra faire une récurrence).

(b) Montrer que f est strictement croissante.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < n + 1$.

(d) Déterminer f.

Chapitre 5

Syntaxe et sémantique

5.1 Généralités

Nous avons vu deux manières d'écrire des mathématiques :

1. *Avec les quantificateurs.* Nous appellerons cette manière *écriture syntaxique* (qui respecte une grammaire).
2. *En manipulant des objets.* « Soit $x \in E$,... ». Nous appellerons cette manière *écriture sémantique* (qui est porteuse de sens).

Remarque importante 5.1

Nous avons vu aussi que

1. L'écriture syntaxique sert à écrire précisément des *énoncés* et des *résultats.*

   Jamais à écrire des raisonnements !

2. L'écriture sémantique sert à décrire les objets mathématiques, les raisonnements et à les manipuler... Cela peut être aussi des dessins qui illustrent la situation.

Exemple 5.1

— $P \Rightarrow Q$ est une écriture syntaxique.
— Si P est vraie, alors Q est vraie est une écriture sémantique.

Quelle est la différence ?

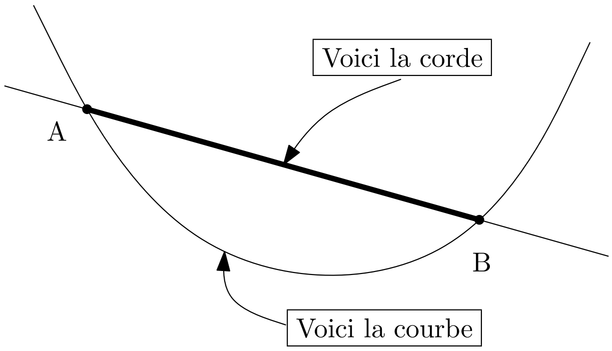
Exemple 5.2 – Fonction convexe

Une fonction convexe est une fonction dont le graphe est *au dessous* de sa corde, comme sur la figure 5.1, page suivante. Ce dessin est la définition *sémantique d'une fonction convexe.*
Pour être facilement exploitable et généralisable, on peut la mettre sous la forme syntaxique suivante :

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que f est convexe si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

Figure 5.1 – Fonction convexe



5.2 Utilisation

Il faut savoir passer d'une représentation syntaxique à une représentation sémantique ! Et, de même, savoir passer d'une représentation sémantique à une représentation syntaxique.

Exercice(s) 5.1

5.1.1 Trouver des représentations graphiques des propriétés suivantes :

(a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est *concave*, si $-f$ est convexe.

(b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f n'est ni concave, ni convexe.

(c) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(d) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Conclusion ?

5.1.2 Dans l'exercice précédent, montrer que la propriété 4 implique la propriété 3, mais que la réciproque est fausse.

5.1.3 Traduire syntaxiquement les figures suivantes :

(a) Comportement d'une fonction convexe en dehors de la corde. Figure 5.2, page ci-contre.

(b) Positions respectives de trois cordes pour une fonction convexe. Figure 5.3, page suivante.

Figure 5.2 – Fonction convexe : extérieur de la corde

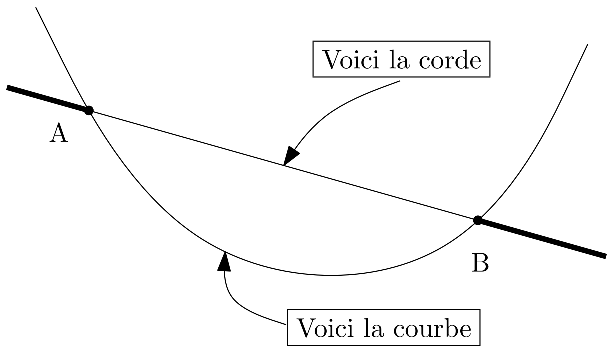
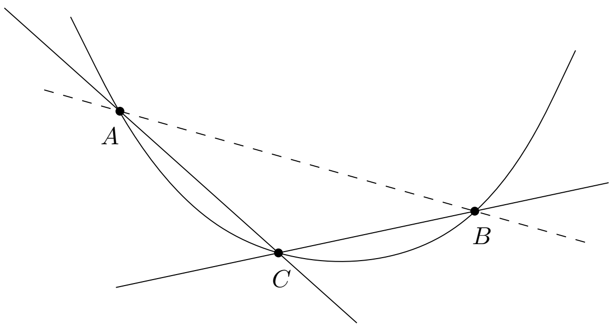


Figure 5.3 – Fonction convexe : trois cordes



Chapitre 6

Langage des probabilités

6.1 Introduction

Quand on veut mettre en équations un phénomène observé, on peut procéder de plusieurs manières :

1. On connaît les relations entre les *causes* et les *effets* (exemple de la mécanique classique). On obtient un modèle parfois *prédictif* qui décrit le phénomène. On dit que l'on a un *modèle déterministe*. Ce modèle peut ne pas être prédictif (incapacité à étudier les équations) ou être trop sensible aux approximations, ce qui en rend l'évaluation numérique impossible (*système chaotique ou chaos*).
2. On ne (re)connaît pas les relations entre les causes et les effets : on a l'impression d'avoir des effets du *hasard*. On produit souvent en ce cas un *modèle probabiliste* qui va essayer de décrire ce hasard.

Remarque 6.1

L'opposition apparente entre modèle déterministe et modèle probabiliste se situe au niveau des modèles. C'est notre approche mathématique qui est différente. Qu'en est-il des phénomènes observés ? Sont-ils déterministes ou probabilistes ? Ce débat appartient plus à la philosophie qu'aux mathématiques, mais il est toutefois très intéressant.

Exemple 6.1 – Modèle déterministe

Un ressort avec un coefficient de raideur k a son déplacement décrit par une équation différentielle :

$$x''(t) + k\,x(t) = 0$$

C'est un modèle déterministe : on a pu écrire cette équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

Exemple 6.2 – Modèle probabiliste

Je jette manuellement un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (et que je suppose bien équilibré), je pense que j'ai une chance sur 6 d'obtenir le nombre 3. Je ne suis (en ce qui me concerne) pas capable d'écrire les équations permettant en fonction des données initiales de prévoir le résultat et je ne suis pas capable d'être suffisamment précis dans mon geste pour obtenir le résultat que je veux. Je choisis donc un modèle qui décrit le résultat (ou plutôt la *chance* d'obtenir le résultat 3). C'est un modèle probabiliste.

Remarque 6.2

Pour l'exemple du dé, la question qui pourrait se poser est : ne pourrait-on pas imaginer la possibilité d'avoir un modèle déterministe (équations du mouvement, précision suffisante du lancer), pour prévoir le résultat ? Je ne sais pas. Mais la réponse du modélisateur est : a-t-on besoin d'une telle précision ? Ne peut-on pas se satisfaire de l'information probabiliste pour jouer aux dés ?

Remarque 6.3

Certains phénomènes déterministes peuvent avoir une apparence probabiliste. Ainsi, si l'on regarde les décimales de π (on connaît des algorithmes exacts permettant de calculer ces décimales), elles *semblent* se répartir entre 0 et 9 de manière égale...
L'objet de la modélisation probabiliste est de donner un sens précis à cette notion de *chance* d'obtenir un résultat.

Exercice(s) 6.1

6.1.1 Pour les phénomènes suivants, quel type de modèle choisiriez-vous ? et pourquoi ?
   (a) le tir au fusil ;
   (b) la météorologie ;
   (c) l'erreur d'approximation d'un ordinateur ;
   (d) l'émission d'une particule par radioactivité ;
   (e) le comportement d'un gaz.

6.2 Langage des probabilités

Définition 6.1 – Vocabulaire des probabilités

Soit un phénomène que l'on veut modéliser de manière probabiliste.
1. On appelle *expérience aléatoire* une expérience dont on connaît toues les résultats possibles mais dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.
2. On appelle *univers* l'ensemble des résultats possibles.
3. On appelle *événement* certaines parties de l'univers, correspondant à ce qui peut se produire.
4. On appelle *probabilité d'un événement* la chance de réalisation de cet événement.

Exemple 6.3

1. Si on lance un dé à 6 faces équilibré, alors :
   — L'univers peut-être :
   $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   — Les événements sont alors les parties de l'univers.
   — On a par exemple :
   $$\mathbb{P}\left(\{3\}\right) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}\left(\{2, 4, 6\}\right) = \frac{1}{2}, \dots$$
2. On attend l'émission d'une particule par un corps radioactif. Soit T le temps de cette attente.
   — L'univers peut-être $\mathbb{R}_+$.
   — Nous nous intéresserons surtout à des événements du type :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ T \leq t$$
   — Les physiciens (je crois) nous disent que :
   $$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Mais on pourrait aussi s'intéresser au nombre N de particules émises avant un instant t_0. On aurait alors :

— L'univers pourrait être $\mathbb{N}$.

— Nous nous intéresserions surtout à des événements du type :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ N = k \text{ ou } N \leq k$$

— Les probabilités seraient... nous le ferons plus tard.

Remarque 6.4

Nous pouvons constater que ce vocabulaire est trop imprécis pour faire des mathématiques correctement. Nous avons donc besoin de définir précisément l'ensemble des événements et ce qu'est une probabilité, ce sont les notions d'espace *probabilisé*. Ce sera fait dans un autre cours.

Remarque importante 6.5

Un cas important qu'on rencontre souvent est (voir la définition 6.6, page 65)

1. Ω est de cardinal fini ;
2. toutes les parties de Ω sont des événements ;
3. on définit la *probabilité uniforme sur* Ω par, pour tout $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Remarque 6.6

Dans le raisonnement probabiliste naïf, nous utilisons souvent le « ou » et le « et », de même que le « non ». Il est alors immédiat que si A et B sont deux événements, alors :

$$(A \text{ et } B) \text{ correspond à } A \cap B$$

$$(A \text{ ou } B) \text{ correspond à } A \cup B$$

$$(\text{non } A) \text{ correspond à } A^c \overset{\text{Not}}{=} \Omega \setminus A, \text{ où } \Omega \text{ est l'univers}$$

Définition 6.2

1. L'événement $\emptyset$ est dit *événement impossible*.
2. L'événement Ω est dit *événement certain*.
3. Si A et B sont deux événements, $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits *événements incompatibles*.

Remarque 6.7

Pour résumer, on a les correspondances suivantes :

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Univers	Ω
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	A
Événement contraire	$\overline{A}$ ou A^c
Événement « A ou B »	$A \cup B$
Événement « A et B »	$A \cap B$
Événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A implique B	$A \subset B$
Événement impossible	$\emptyset$
Événement certain	Ω

Propriété 6.1

Si on a une probabilité sur Ω :

1. On a :
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
2. Si A et B sont des événements disjoints (donc incompatibles), on a :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
3. Si A est un événement, on a :
$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Définition 6.3

On dit qu'une partie A de Ω est négligeable si :
$$\mathbb{P}(A) = 0$$

Remarque 6.8

On peut compléter les correspondances :

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Événement négligeable	$\mathbb{P}(A) = 0$
Événement presque certain	$\mathbb{P}(A) = 1$

Exercice(s) 6.2

6.2.1 (a) Soit A et B deux événements, montrer que :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

(b) Généraliser lorsque $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont des événements, calculer :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

6.3 Probabilité conditionnelle

Remarque 6.9

Il arrive que l'on possède quelque information sur le résultat. Par exemple : quelle probabilité ai-je que le dé donne 5 *sachant que l'on sait* que le résultat est impair ? La réponse est ici simple : 1/3.

Définition 6.4

Soit B un événement *de probabilité non nulle*, on appelle *probabilité conditionnelle sachant* B et on note pour A événement :

$$\mathbb{P}_{B}(A) = \mathbb{P}\left(A|B\right) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ se lit « probabilité de } A \text{ sachant } B \text{ »}$$

Remarque 6.10

On a envie de dire que « A ne dépend pas de B », si :

$$\left[\mathbb{P}_{B}(A) = \mathbb{P}(A)\right] \iff \left[\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)\right]$$

Définition 6.5

1. Deux événements A et B sont dits *indépendants* si, l'on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)$$

2. Plus généralement, les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont dits *indépendants* si :

$$\forall k \in [\![2,n]\!]\,,\ \forall (j_1, \ldots, j_k) \in [\![1,n]\!]^k\,,\ \text{distincts, } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{j_i})$$

Remarque 6.11

1. L'indépendance est souvent une hypothèse de l'énoncé.
2. Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Définition 6.6

Il arrive souvent que l'univers Ω soit fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et que chaque élément de Ω ait une probabilité égale $1/n$ de se réaliser. On dit que la probabilité est *uniforme*. Les événements considérés sont alors les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ (donc, toutes les parties de Ω) et on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple 6.4

Quand on lance un dé à 6 faces équilibré. Le mot *équilibré* signifie que tous les résultats ont même probabilité de réalisation soit 1/6. Si $B = \{1,3,5\}$ et $A = \{5\}$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Exemple 6.5

On tire 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes, la probabilité qu'elles soient de même couleur est :

$$\mathbb{P}(\text{« les trois cartes de même couleur »}) = \frac{1144}{\binom{52}{3}} = \frac{22}{425} = 0,052 \pm 10^{-3}$$

6.4 Calcul des probabilités

Remarque 6.12

Pour calculer une probabilité, on peut établir un *arbre des probabilités* mais on doit justifier rigoureusement les calculs.
Il y a deux utilisations majeures d'un arbre des probabilités : déplacement le long d'une branche et sommation des feuilles.

Proposition 6.1 – Formule des probabilités composées

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements ($n \geq 2$) avec $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ alors :

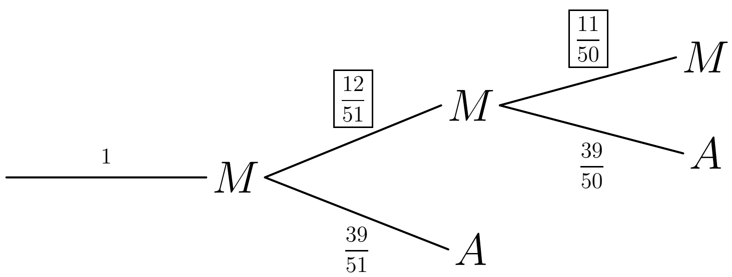
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 6.6 – Arbre de probabilité

Reprenons l'exemple 6.5, de la présente page. Notons M l'événement « on a tiré la même couleur », et A « on a tiré une autre couleur ». Cela donne l'arbre de la figure 6.1, de la présente page La formule des probabilités composées nous permet d'obtenir que

$$\mathbb{P}(\text{« les trois cartes de même couleur »}) = \frac{12}{51}\frac{11}{50} = \frac{22}{425}$$

Figure 6.1 – Un exemple d'arbre de probabilités



Proposition 6.2 – Formule des probabilités totales

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une partition finie (ou dénombrable) de Ω d'événements de probabilités non nulles et si A est *un événement, alors :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{E_i}(A)\ \mathbb{P}(E_i)$$

Remarque importante 6.13

La formule des probabilités totales est utile pour traduire des situations avec des conditions.

Exemple 6.7 – Formule des probabilités totales

On joue avec un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le dé est supposé *équilibré*. La règle du jeu est la suivante :

1. si on obtient un chiffre dans $[\![1, 5]\!]$, on lit le résultat ;
2. si on obtient un 6, on recommence.

Le jeu s'arrête donc *dès qu'*un chiffre entre 1 et 5 est obtenu. Calculons

$$\forall k \in [\![1, 5]\!]\,,\ \mathbb{P}\,(\text{« le résultat est } k \text{ »})$$

Notons, pour $k \in [\![1, 5]\!]$, A_k l'événement « le résultat est k » et pour $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'événement « le jeu s'arrête au $n^{\text{ième}}$ coup ». On a alors

$$\forall k \in [\![1, 5]\!]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{5}{6} \text{ et } \mathbb{P}\,(A_k | E_n) = \frac{1}{5}$$

La formule des probabilités totales nous permet alors d'affirmer que, pour $k \in [\![1, 5]\!]$ [a]

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\, \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{1}{5}$$

a. On doit calculer la limite d'une somme géométrique ! Si $q \in]-1, +1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \overset{\text{Def}}{=} \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=0}^{p} q^n = \lim_{p \to +\infty} \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Proposition 6.3 – Formule de Bayes ou *probabilité des causes*

Si A et B sont des événements de probabilités non nulles, alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Cette formule nous donne, sachant que A est réalisé, la probabilité que B en soit la cause...

Exercice(s) 6.3

6.3.1 Re-démontrer le résultat de l'exemple 6.7, de la présente page par récurrence sur n et en utilisant la formule des probabilités composées.

6.3.2 Si on tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes (comme au poker) quelle est la probabilité pour qu'on obtienne :

(a) 5 cartes de la même couleur ?

(b) 3 cartes d'un même niveau (3 Rois par exemple) et deux autres cartes d'un même autre niveau (*full*) ?

(c) 5 cartes dont les niveaux se suivent (suite) ?

6.3.3 Soit deux événements A et B tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calculer

$$\mathbb{P}_{A \cup B^c}(A \cap B^c)$$

6.3.4 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que deux événements soient indépendants est :

$$\mathbb{P}(A \cap B)\ \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A \cap B^c)\ \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

6.3.5 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on effectue des tirages *avec* remise. Quelle est la probabilité que sur n tirages consécutifs, il existe au moins un tirage numéroté k où l'on a tiré la boule numérotée k ?

6.3.6 n convives se placent au hasard autour d'une table ronde, Alice et Bernard, deux des convives regardent le nombre minimum de personnes assises entre eux deux. Quelle est la probabilité que ce nombre vaille k ?

6.3.7 On dispose de n urnes notées de $U_1, \ldots, U_n$ telles que l'urne U_i contient 1 boule noire et i boules blanches.
On choisit une boule au hasard dans l'urne U_1, si elle est noire on s'arrête, sinon on recommence avec l'urne U_2 et ainsi de suite jusqu'à l'urne U_n. Calculer les probabilités :

(a) d'effectuer un tirage dans l'urne U_i ;

(b) de tirer la boule noire à un moment du jeu (on utilisera deux méthodes différentes) ;

(c) sachant que l'on a tiré la boule noire, que ce soit lors du i-ème tirage.

6.3.8 Une usine possède 4 chaînes de production, les deux premières produisent des pièces défectueuses à raison de 1%, la troisième 2% et la quatrième 3%. On tire au hasard deux pièces provenant d'une même chaîne de production, elles sont toutes les deux défectueuses, calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'une des deux premières chaînes de production.

6.3.9 Un avion a n places numérotées de 1 à n. Les n places sont attribuées aux n passagers. Malheureusement, le premier passager s'assoit n'importe où. Chaque autre passager procède ainsi :

(a) si leur place est libre, il s'y assoit

(b) si elle est déjà occupée, il choisit au hasard une place libre.

Quelle est la probabilité que le $n^{\text{ième}}$ passager s'assoit à sa place ?

Figure 6.2 – Publicité