Mathématiques I – TD$_8$

2 avril 2022

Exercice 1

Les fonctions suivantes ont-elles une limite au point indiqué ?

- $(x, y) \longmapsto (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ en $(0,0)$
- $(x, y) \longmapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
- $(x, y, z) \longmapsto \dfrac{x\,y+y\,z}{x^2+2y^2+3z^2}$ en $(0,0,0)$
- $(x, y) \longmapsto \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ en $(0,0)$

Essayer, par des majorations, de voir si on peut obtenir une limite. Sinon, regarder la limite sur des droites ou des courbes, et essayer d'obtenir des limites différentes.

On note f la fonction à étudier.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$|f(x,y)| = |x+y|\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

  donc f a une limite en $(0,0)$ qui est égale à 0.

- Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f(t,t) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  et

$$f(t,2t) = -\frac{3}{5} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{3}{5}$$

  Comme $0 \neq -\dfrac{3}{5}$, on en déduit que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

- Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f(t,0,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$f(t,t,t) = \frac{2t2}{6t^2} = \frac{1}{3} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

  Comme $0 \neq \dfrac{1}{3}$, on en déduit que f n'a pas de limite en $(0,0,0)$.

- On peut étudier la limite des deux fonctions coordonnées

$$f_1 \colon \longmapsto \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x \quad \text{et} \quad f_2 \colon (x,y) \longmapsto \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  On a

$$x^2+y^2-1 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} -1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{x} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$$

  donc f_1 a pour limite -1 en $(0,0)$

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f_2(x,y) = \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Puisque $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$, par composition de limites on a

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$$

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$0 \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que

$$\frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1 \times 0 = 0$$

De même, on a

$$\frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que f_2 a pour limite 0 en $(0,0)$
Finalement, f admet une limite en $(0,0)$ qui vaut $(-1,0)$.

Exercice 2

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Déterminer, suivant les valeurs de α et β, si la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$$

admet une limite en $(0,0)$.

On peut penser à aux inégalités

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x^2+y^2)^{1/2} \quad \textit{et} \quad |y| \leqslant (x^2+y^2)^{1/2}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après le commentaire, on a

$$|f(x,y)| \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}$$

- Si $\alpha + \beta > 2$, $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0,0)$.
- Si $\alpha + \beta \leqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et

$$f(t,t) = \frac{1}{2} t^{\alpha+\beta-2} \underset{t\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

car $\alpha + \beta \leqslant 2$. On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on note :

$$g \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(2x-y, 4x+3y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x^2+2y^2, e^{x\,y}) \end{array} \right.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g et de h en fonction de celles de f.

Il s'agit de calculer des dérivées partielles premières de fonctions composées.

- La fonction $(x,y) \mapsto (2x-y, 4x+3y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition. On applique en suite la formule de la dérivée d'une fonction composée.
On pose $\phi \colon (x,y) \mapsto 2x-y$ et $\psi \colon (x,y) \mapsto 4x+3y$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 g(x,y) &= \partial_1 f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\, \partial_1 \phi(x,y) + \partial_2 f(\phi(x,y), \psi(x,y))\, \partial_1 \psi(x,y) \\ &= 2\partial_1 f(2x-y, 4x+3y) + 4\partial_2 f(2x-y, 4x+3y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_2 g(x,y) &= \partial_1 f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\, \partial_2 \phi(x,y)\, \partial_2 f(\phi(x,y), \psi(x,y))\, \partial_2 \psi(x,y) \\ &= -\partial_1 f(2x-y, 4x+3y) + 3\partial_2 f(2x-y, 4x+3y) \end{aligned}$$

Vérifions avec Sympy.

```python
from sympy import *
x,y = symbols('x y')
f = Function('f')
diff(f(2*x-y,4*x+3*y),x)
```

Résultat : $2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_1, 4x+3y)\Big|_{\xi_1 = 2x-y} + 4 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} f(2x-y, \xi_2)\Big|_{\xi_2 = 4x+3y}$

```python
diff(f(2*x-y,4*x+3*y),y)
```

Résultat : $-\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_1, 4x+3y)\Big|_{\xi_1 = 2x-y} + 3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} f(2x-y, \xi_2)\Big|_{\xi_2 = 4x+3y}$

- La fonction $(x,y) \mapsto (x^2+2y^2, e^{x\,y})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc h est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition.
On pose $\phi \colon (x,y) \mapsto x^2+2y^2$ et $\psi(x,y) \mapsto e^{x\,y}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 h(x,y) &= \partial_1 f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\, \partial_1 \phi(x,y)\, \partial_2 f(\phi(x,y), \psi(x,y))\, \partial_1 \psi(x,y) \\ &= 2x\, \partial_1 f(x^2+2y^2, e^{x\,y}) + y\, e^{x\,y}\, \partial_2 f(x^2+2y^2, e^{x\,y}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_2 h(x,y) &= \partial_1 f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\, \partial_2 \phi(x,y)\, \partial_2 f(\phi(x,y), \psi(x,y))\, \partial_2 \psi(x,y) \\ &= 4y\, \partial_1 f(x^2+2y^2, e^{x\,y}) + x\, e^{x\,y}\, \partial_2 f(x^2+2y^2, e^{x\,y}) \end{aligned}$$

Vérifions avec Sympy.

```python
diff(f(x**2+2*y**2,exp(x*y)),x)
```

Résultat : $2x \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_1, e^{xy})\Big|_{\xi_1 = x^2+2y^2} + y e^{xy} \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} f(x^2+2y^2, \xi_2)\Big|_{\xi_2 = e^{xy}}$

```
1 diff(f(x**2+2*y**2,exp(x*y)),y)
```

Résultat : $x e^{xy} \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} f\left(x^2+2y^2, \xi_2\right)\Big|_{\xi_2=e^{xy}} + 4y \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_1, e^{xy})\Big|_{\xi_1=x^2+2y^2}$

Exercice 4

Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ une partie ouverte et *connexe par arcs*, c'est-à-dire :

$$\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in \Delta^2, \exists \overrightarrow{\varphi} \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^2), \begin{cases} \forall t \in [0,1],\ \overrightarrow{\varphi}(t) \in \Delta \\ \overrightarrow{\varphi}(0) = \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{\varphi}(1) = \overrightarrow{b} \end{cases}$$

On admet de plus que pour tout $(\vec{a}, \vec{b}) \in \Delta^2$, il existe un arc $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \Delta$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\vec{\gamma}(0) = \vec{a}$ et $\vec{\gamma}(1) = \vec{b}$.

Soit $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\partial_1 f = \partial_2 f = 0$$

Montrer que f est constante.

On peut démontrer le résultat admis (l'existence de $\overrightarrow{\gamma}$) avec les outils de topologie qui seront vus en deuxième année.

Soit $(\vec{a}, \vec{b}) \in \Delta^2$. On considère l'arc $\vec{\gamma}$ défini dans l'énoncé. Par composition, la fonction

$$F = f \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|F(1) - F(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |F'(t)|\,(1-0) = \sup_{t\in[0,1]} |F'(t)|$$

Mais pour tout $t \in [0,1]$, on a (en notant $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$) :

$$F'(t) = \partial_1 f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \gamma_1'(t) + \partial_2 f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \gamma_2'(t) = 0$$

donc

$$|F(1) - F(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |F'(t)| = 0$$

Cela montre que $F(0) = F(1)$, c'est-à-dire $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$. On en déduit que f est constante.

Exercice 5

Soit f et g définie par $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-x\,y}\right)$ et $g(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y)$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc l'ensemble de définition de f est

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x\,y \neq 1\}$$

La fonction $\phi\colon (x, y) \mapsto \dfrac{x+y}{1-x\,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_f et la fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_f.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et de g.

Pour tout $(x, y) \in D_f$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y) &= \arctan'\big(\phi(x, y)\big)\,\partial_1\phi(x, y) \\
&= \frac{1}{1+\phi(x, y)^2}\,\frac{(1-x\,y)+(x+y)y}{(1-x\,y)^2} \\
&= \frac{1-x\,y+x\,y+y^2}{(1-x\,y)^2+(x+y)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

En remarquant que f est une fonction symétrique, c'est-à-dire $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in D_f$ (on a $(x, y) \in D_f$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_f$), on en déduit que

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{1+y^2}$$

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 g(x, y) = \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2 g(x, y) = \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Vérifions avec Sympy.

```
simplify(diff(atan((x+y)/(1-x*y)),x))
```

Résultat : $\dfrac{1}{x^2+1}$

```
simplify(diff(atan((x+y)/(1-x*y)),y))
```

Résultat : $\dfrac{1}{y^2+1}$

```
diff(atan(x)+atan(y),x)
```

Résultat : $\dfrac{1}{x^2+1}$

```
diff(atan(x)+atan(y),y)
```

Résultat : $\dfrac{1}{y^2+1}$

3. Que peut-on en déduire sur f et g ? (on pourra utiliser l'exercice précédent)

On pose $h = f - g$ donc h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_f. D'après les questions précédentes, on a

$$\partial_1 h = \partial_2 h = 0$$

L'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x\,y \neq 1\right\}$ est l'union de deux courbes disjointes (des hyperboles) donc on a $D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ avec

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 1\right\},\ D_2 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ xy > 1\right\} \text{ et } D_3 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2,\ xy > 1\right\}$$

D_1 est une partie ouverte et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$ donc d'après l'exercice précédent, h est constante sur D_1. On a donc

$$\forall (x,y) \in D_1, \quad h(x,y) = h(0,0) = f(0,0) - g(0,0) = 0$$

De même, h est constante sur D_2 donc

$$\forall (x,y) \in D_2, \quad h(x,y) = h(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -\pi$$

et h est constante sur D_3 donc

$$\forall (x,y) \in D_2, \quad h(x,y) = h(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \pi$$

Conclusion : pour tout $(x,y) \in D_f$,

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-x\,y}\right) & \text{si } x\,y < 1 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-x\,y}\right) & \text{si } x > 0,\ y > 0,\ x\,y > 1 \\ -\pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-x\,y}\right) & \text{si } x < 0,\ y < 0,\ x\,y > 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{array} \right.$$

où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est clairement continue en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$.
On va donc étudier la continuité de f en (a,a) avec $a \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction g' est continue en a donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$ on ait $|g'(x) - g'(a)| \leqslant \varepsilon$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(a,a)\| \leqslant \eta$. On a alors $|x-a| \leqslant \eta$ et $|y-a| \leqslant \eta$.

- Si $x = y$, alors
$$|f(x,y) - f(a,a)| = |g'(x) - g'(a)| \leqslant \varepsilon$$
- Sinon d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \mathbb{R}$ entre x et y tel que
$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(c_{x,y}).$$

On a alors $c_{x,y} \in [a-\eta, a+\eta]$, d'où :

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(a,a)| &= \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y} - g'(a)\right| \\ &= \left|g'(c_{x,y}) - g'(a)\right| \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

La fonction f est donc continue en (a,a).
Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 7

Soit O une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$ et soit $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue. Montrer que $\vec{f}^{-1}(O)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, avec

$$\vec{f}^{-1}(O) = \{x \in A,\ \vec{f}(x) \in O\}$$

Si $\vec{f}^{-1}(O) = \emptyset$, alors $\vec{f}^{-1}(O)$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que $\vec{f}^{-1}(O) \neq \emptyset$. Soit $\vec{x} \in \vec{f}^{-1}(O)$. On a $\vec{f}(\vec{x}) \in O$ et O est un ouvert donc

$$\exists r > 0,\ \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^p, \quad \|\vec{z} - \vec{f}(\vec{x})\| \leqslant r \implies \vec{z} \in O$$

La fonction $\vec{f}$ est continue en $\vec{x}$. D'après la définition de la continuité (avec $\varepsilon = r$) :

$$\exists \eta > 0,\ \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{y} - \vec{x}\| \leqslant \eta \implies \|\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})\| \leqslant r$$

On en déduit que

$$\forall \vec{y} \in A,\ \|\vec{y} - \vec{x}\| \leqslant \eta \implies \vec{f}(\vec{y}) \in O$$

c'est-à-dire

$$\exists \eta > 0,\ \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{y} - \vec{x}\| \leqslant \eta \implies \vec{y} \in \vec{f}^{-1}(O)$$

On a donc montré que $\vec{f}^{-1}(O)$ est une partie ouverte de A.

Exercice 8

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que A est *connexe par arcs* si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \exists \varphi \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \begin{cases} \forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \in A \\ \varphi(0) = x \\ \varphi(1) = y \end{cases}$$

Montrer que A est connexe par arcs si, et seulement si, A est un intervalle.

- Supposons que A soit connexe par arcs et montrons que c'est un intervalle, c'est-à-dire que pour tout $(a,b) \in A^2$ tel que $a \leqslant b$, si $z \in \mathbb{R}$ vérifie $a \leqslant z \leqslant b$ alors $z \in A$.
  Fixons donc $(a,b) \in A^2$ tel que $a \leqslant b$.
  Comme A est connexe par arcs, il existe $\gamma \in \mathscr{C}^0([0,\ 1],\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et pour tout $t \in [0,\ 1]$, $\gamma(t) \in A$.
  Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $a \leqslant z \leqslant b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\phi(t_0) = z$. Mais $\phi(t_0) \in A$ donc $z \in A$.
  Finalement, A est un intervalle.

- Supposons que A soit un intervalle. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $a \leqslant b$. Alors $[a, b] \subset I$ donc si on pose
$$\phi\colon t \in [0,1] \longmapsto a + (b-a)\,t \in [a,b] \subset A$$
La fonction ϕ est continue avec $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On a donc montré que A est connexe par arcs.