上 海 交 通 大 学 试 卷 （考试 卷）
（ 2022 至 2023 学年第1学期 ）

班级号________________ 学号__________ 姓名(中&法)______________

课程名称 : Algèbre linéaire et bilinéaire I 成绩__________________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

Avertissements :

1. *Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
   各个题目是不相关的，可以按照任何顺序来完成。
2. *Tous les documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone, smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.*
   不能使用任何参考资料和电子设备包括手机、翻译器和计算器。
3. *Toutes vos réponses doivent être justifiées.*
   所有解答需要证明或说明理由。

1 Question de cours (20 Points)

1. Énoncer la définition d'une application linéaire f de E dans E' . (Entierèment)

Réponse

Voir le cours

2. Énoncer le théorème du rang et le démontrer.

Réponse

Voir le cours

2 Exercice : (20 points)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 2), \quad v_3 = (1, -2, 3)$$

1. La partie $\{v_1, v_2, v_3\}$ est elle libre ?

Réponse

La partie $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas libre, car $v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

2. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la partie $\{v_1, v_2, v_3\}$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

Réponse

(a) Montrons que $\{v_1, v_2\}$ est une partie libre.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.v_1 + b.v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire,

$$a.(1, -1, 1) + b.(0, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

On déduit trivialement $a = b = 0$. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une partie libre.

(b) Montrons que $\{v_1, v_2\}$ est une partie génératrice de F.
D'une part, on a $\mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\}) \subset \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\}) = F$.
D'autre part, si $x \in F$, il existe des nombres réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = a.v_1 + b.v_2 + c.v_3$.
Or $v_1 + v_2 = v_3$ on a $x = (a+c).v_1 + (b+c).v_2 \in \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$

(c) Finalement $F = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. La partie. $\{v_1, v_2\}$ étant à la fois libre et génératrice, c'est donc une base de F.
Par conséquent, $\dim(F) = 2$.

3. On considère la partie

$$G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + 2b + c = 0\}.$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Réponse

(Méthode 1) On montre par définition

(a) Il est clair que G n'est pas vide puisque $(0, 0, 0) \in G$.

(b) Stable par l'addition, car soit $(v, v') \in G^2$, on a $v + v' \in G$

(c) Stable par la multiplication par un scalaire , car soit $v \in G$ et soit $a \in \mathbb{R}$, on a $a.v \in G$

Ainsi G est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(Méthode 2) : G représente aussi un noyau d'une application linéaire .

4. Comparer F et G

Réponse

On voit facilement que $v_1 = (1, -1, 1)$ et $v_2 = (0, -1, 2)$ sont des éléments de G.
Par suite, la relation $\{v_1, v_2\} \subset G$ implique la relation $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subset \mathrm{Vect}(G) = G$. et aussi $G \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
Par les questions précédentes, nous pouvons donc conclure à $F = G$.

3 Exercice : (30 points)

1. Soit
$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\},$$
F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergeant vers 0. Trouver les relations entre E, F et G puis le démontrer.

Réponse

On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.
- Montrons que $F \cap G = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
- Montrons que $F + G = E$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{not}}{=} (u_n) \in E$. Notons l la limite de (u_n). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{not}}{=} (v_n)$ la suite définie par
$$v_n = u_n - l,$$
alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$.
Notons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{not}}{=} (w_n)$ la suite constante égale à l. Alors nous avons
$$u_n = l + u_n - l,$$
ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne
$$(u_n) = (w_n) + (v_n).$$
Ce qui donne $E \subset F + G$. Et aussi $F + G \subset E$.
- Finalement : F et G sont en somme directe dans E :
$$E = F \oplus G.$$

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on note $E_{a,b}=\{(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$.
Soit l'application définie par :

$$\phi\ :\begin{cases}E_{a,b}\to\mathbb{R}^2\\ x\mapsto(u_0,u_1)\end{cases}$$

(i) Montrer que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $E_{a,b}$ et $\mathbb{R}^2$.

(iii) Déterminer la dimension de $E_{a,b}$

Réponse

(i) On vérifie la définition d'un sous-espace vectoriel. On a $E_{a,b}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- On a bien $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\in E_{a,b}}$.
- Stable par l'addition, car soit $(x,y)\in(E_{a,b})^2$, on a $x+y\in E_{a,b}$
- Stable par la multiplication par un scalaire , car soit $x\in E_{a,b}$ et soit $a\in\mathbb{R}$, on a $a.x\in E_{a,b}$

Finalement, $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Montrons que $\phi\in\mathscr{L}(E_{a,b},\mathbb{R}^2)$.
Soit $(x,y)\in E_{a,b}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, On a bien $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ et $y_{n+2}=ay_{n+1}+by_n$, en particulier $(\lambda x_0+\mu y_0,x_1+\mu y_1)=\lambda.(x_0,x_1)+\mu(y_1,y_2)$. Ainsi

$$\phi(\lambda.x+\mu.y)=\lambda.\phi(x)+\mu.\phi(y)$$

Donc ϕ est bien une application linéaire.
Montrons que ϕ est injective.
On suppose $x\in E_{a,b}$telle que $\phi(x)=0_{\mathbb{R}^2}$ i.e. $x_0=x_1=0$. On obtient par une récurrence élémentaire, $x=0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ Donc on a

$$\ker(\phi)=0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

donc ϕ est injective.
Montrons que ϕ est surjective.
Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On doit trouver un antécédent par ϕ à ce couple de réels. On pose x la suite de $E_{a,b}$ telle que $x_0=\lambda$ et $x_1=\mu$ (cela définit bien une suite de $E_{a,b}$, encore par une récurrence élémentaire .)
Par construction même,

$$\phi(x)=(\lambda,\mu)$$

donc ϕ est surjective.
D'où ϕ bijective.
En conclusion, l'application ϕ est un isomorphisme entre $E_{a,b}$ et $\mathbb{R}^2$.

(iii) Comme $\mathbb{R}\,2$ est de dimension 2, et ϕ est un isomorphisme entre $E_{a,b}$ et $\mathbb{R}^2$, Donc la dimension de $E_{a,b}$ égale 2.

4 Exercice : (30 points)

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Montrer que si $p \circ q = q \circ p$, alors $p \circ q$ est un projecteur.

Réponse

Supposons que$p \circ q = q \circ p$. On a :

$$p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$$

ce qui prouve que $p \circ q$ est un projecteur.

(b) Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

$$p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad p + q \text{ est un projecteur.}$$

Réponse

i. Supposons que

$$p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Nous en déduisons, en composant à gauche par p :

$$p \circ (p \circ q + q \circ p) = p \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

puis, p étant un projecteur, on a

$$p \circ q + p \circ q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad (1)$$

Composons de nouveau par p, mais cette fois à droite. Il vient :

$$(p \circ q + p \circ q \circ p) \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

puis, p étant toujours un projecteur, on a

$$2p \circ q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

En portant ce résultat dans (1), on obtient $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$ puis, $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, il est claire $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

ii. L'application $p + q$ étant un endomorphisme, pour que $p + q$ soit un projecteur, il faut et il suffit que $(p + q) \circ (p + q) = p + q$, soit :

$$p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q.$$

Puisque par hypothèse p et q sont des projecteurs,

$$p + p \circ q + q \circ p + q = p + q,$$

soit, après simplification,

$$p \circ g + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Nous pouvons donc conclure, en utilisant la question précédente que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

(c) Montrer que si $p+q$ est un projecteur, alors

$$\mathrm{I}m(p+q) = \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}er(p+q) = \mathrm{K}er(p) \cap \mathrm{K}er(q).$$

Réponse

Supposons maintenant que $p+q$ soit un projecteur.

i. Montrons que $\mathrm{I}m(p+q) = \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q)$. - Soit $x \in \mathrm{I}m(p+q)$. Il existe alors $t \in \mathrm{I}m(p+g)$ tel que l'on ait $x = (p+q)(t) = p(t) + q(t)$, ce qui montre clairement que $x \in \mathrm{I}m(p) + Im(q)$. Par suite,

$$\mathrm{I}m(p+g) \subset \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q).$$

- D'autre part, si $x \in \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q)$, il existe $y \in \mathrm{I}m(p)$ et $z \in \mathrm{I}m(q)$ tels que $x = y + z$ et par conséquent, il existe $t \in E$ tel que $y = p(t)$ ainsi que $u \in E$ tel que $z = q(u)$. Par suite,

$$x = p(t) + q(u)$$

On en déduit

$$p(x) = p(t) + (p \circ q)(u).$$

Or, par hypothèse, $p+q$ est un projecteur.
Donc d'après cequi précède, $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$
Finalement, $p(x) = pt)$. De même, on a $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc

$$q(x) = (p \circ q)(t) + q(u).$$

Comme on a aussi $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ on en déduit $q(x) = qu)$. Alors $x = (p+q)(x)$ et donc $x \in \mathrm{I}m(p+q)$. Par suite,

$$\mathrm{I}m(p+q) \subset \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q)$$

Finalement

$$\mathrm{I}m(p+q) = \mathrm{I}m(p) + \mathrm{I}m(q)$$

ii. Montrons que $\mathrm{K}er(p+q) = \mathrm{K}er(p) \cap \mathrm{K}er(q)$.
- Soit $x \in \mathrm{K}er(p) \cap \mathrm{K}er(q)$. On a donc $p(x) = 0_E$ et $g(x) = 0_E$, d'où

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0_E,$$

ce qui implique $x \in \mathrm{K}er(p+q)$, et donc

$$\mathrm{K}er(p) \cap \mathrm{K}er(q) \subset \mathrm{K}er(p+q)$$

- D'autre part, si $x \in \mathrm{K}er(p+q)$, on a $(p+g)(x)=0_E$, soit :

$$p(x)+g(x)=0_E \quad (2)$$

Nous en déduisons
$$p[p(x)+q(x)]=p(0_E)=0_E,$$
soit encore $(p\circ p)(x)+(p\circ q)(x)=0_E$. Or, puisque $p+q$ est un projecteur, $p\circ q=0_{\mathscr{L}(E)}$ - Par suite, $(p\circ p)(x)=0_E$, soit $p(x)=0_E$, ce qui montre que $x\in \mathrm{K}er(p)$.
La relation (2) entraîne également

$$q[p(x)+q(x)]=q(0_E)=0_E,$$

soit
$$(q\circ p)(x)+(q\circ q)(x)=0_E$$
Compte tenu de $q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$, on obtient $(g\circ q)(x)=0_E$
soit $q(x)=0_E$, ce qui montre que $x\in \mathrm{K}er(q)$. Ainsi, x est élément de Ker(p) $\cap \mathrm{K}er(q)$. et donc
$$\mathrm{K}er(p+q)\subset \mathrm{K}er(p)\cap \mathrm{K}er(q).$$
Nous pouvons donc conclure à

$$\mathrm{K}er(p+q)=\mathrm{K}er(p)\cap \mathrm{K}er(q)$$

(d) Montrer que si $p\circ q=q\circ p$, alors
$$\mathrm{I}m(p\circ q)=\mathrm{I}m(p)\cap \mathrm{I}m(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}er(p\circ q)=\mathrm{K}er(p)+\mathrm{K}er(q).$$

Réponse

Supposons maintenant que $p\circ q=q\circ p$.

i. Montrons que $\mathrm{I}m(p\circ q)=\mathrm{I}m(p)$

- Soit $x\in \mathrm{I}m(p\circ q)$. Par conséquent, Il existe $t\in E$ tel que

$$x=(p\circ)(t)=p[q(t)],$$

et il est clair que $x\in \mathrm{I}mp)$. Puisque $p\circ q=q\circ p$, on a aussi

$$x=(g\circ p)(x)=q[p(t)],$$

ce qui montre que $x\in \mathrm{I}m(q)$.
Finalement,$x\in \mathrm{I}m(p)\cap \mathrm{I}m(q)$ et

$$\mathrm{I}m(p\circ q)\subset \mathrm{I}m(p)\cap \mathrm{I}m(q)$$

- D'autre part, si $x\in \mathrm{I}m(p)\cap \mathrm{I}m(q)$, on déduit de la Question précédente que

$p(x) = x$ et $q(x) = x$.
Par suite, $p[q(x)] = p(x)$, soit $(p \circ q)(x) = p(x) = x$. Donc, $x \in \mathrm{I}m(p \circ q)$ et l'inclusion

$$\mathrm{I}m(p) \cap \mathrm{I}m(q) \subset \mathrm{I}m(p \circ q)$$

est vérifiée. Nous pouvons donc conclure à

$$\mathrm{I}m(p \circ q) = \mathrm{I}m(p) \cap \mathrm{I}m(q)$$

ii. Montrons que $\mathrm{K}er(p \circ q) = \mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q)$. - Soit $x \in \mathrm{K}er(p \circ q)$, on a donc $(p \circ q)(x) = 0_E$, on a aussi $q(x) \in \mathrm{K}er(p)$.
Ecrivons

$$x = q(x) + x - q(x)$$

on a $x - q(x) \in \mathrm{K}er(q)$. Il en résulte que x est la somme d'un élément de $\mathrm{K}er(p)$ et d'un élément de $\mathrm{K}er(q)$. Donc, x appartient à $\mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q)$, d'où :

$$\mathrm{K}er(p \circ q) \subset \mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q).$$

- D'autre part, soit $a \in Ker(p) + Ker(q)$, il existe $y \in Ker(p) etz \in Ker(q)$, tels que $x = y + z$. On a donc $p(y) = 0_E$ et $qz) = 0_E$- Calculons maintenant

$$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p[q(y+z)] = p[q(y) + q(z)] \\ &= p[q(y) + 0_E] = (p \circ q)(y) \\ &= (q \circ p)(y) = q[q(y)] = q(0_E) = 0_E \end{aligned}$$

Par suite, $x \in \mathrm{K}er(p \circ q)$ et $\mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q) \subset \mathrm{K}er(p \circ q)$. Nous pouvons donc conclure à

$$\mathrm{K}er(p \circ q) = \mathrm{K}er(p) + \mathrm{K}er(q).$$