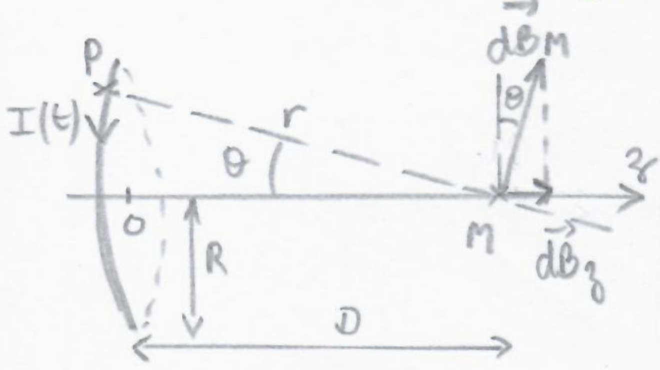
Exercice 3.1 - Courants induits



1) D'après la loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \int \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I(t)\, \vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \right)$$

Pour des raisons de symétrie, le champ $\vec{B}$ résultant sera dirigé selon l'axe z.

$\vec{dB_M}$ fait un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ avec l'axe (Oz)

$$dB_z = dB_M \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \vec{dB_M} \cdot \vec{e_z}$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I(t)\, dl\, \vec{e_\theta} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \frac{dl}{r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \frac{dl}{r^2} \sin\theta$$

$$B_z = \int dB_z = \oint \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2}\, dl$$

Lorsque P décrit le circuit fermé, l'angle θ, le rayon r et l'intensité $I(t)$ sont constants.

$$B_z = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I(t) R \sin\theta}{2 r^2}$$

ici, $\sin\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \sin^2\theta$

avec $K = \frac{\mu_0 \sin^3\theta}{2R}$

et $\boxed{B_z = \frac{\mu_0 I(t)}{2R} \sin^3\theta} = K\, I(t) = K I_0 \cos(\omega t)$

ici, $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + D^2}} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I(t)}{2R} \frac{R^3}{(R^2+D^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I(t) R^2}{2(R^2+D^2)^{3/2}}}$

B_z dépend du temps $\Rightarrow \Phi_B(t)$ dans le disque et une variation de flux induit un champ $\vec{E}$.

Localement, pour $\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{e_\theta}$, en 1 point M du disque,

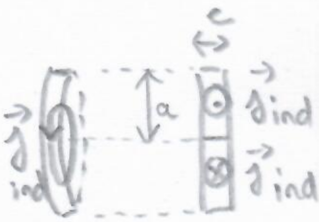
$$\oint \vec{E}_{ind}(r) \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{rot}\, \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

$$= -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt}$$

$E_{ind}(r)\, 2\pi r$ champ local $= -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{ind}(r) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt} \vec{e_\theta}}$

2) Absence d'un champ $\vec{E}$ électrostatique,
la loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j}_{ind} = \gamma \vec{E}_{ind}$

$$\vec{j}_{ind} = -\frac{\gamma}{2} r \frac{dB_z}{dt} \vec{e_\theta}$$



Par définition, $I_{ind} = \iint \vec{j}_{ind} \cdot \vec{dS}$

$$I_{ind} = \int_0^a \left[\int_0^e j_{ind} \times dz \right] dr =$$

$$= \int_0^a -\frac{\gamma e r}{2} \frac{dB_z}{dt} dr = -\frac{\gamma e}{2} \frac{dB_z}{dt} \frac{a^2}{2}$$

$$= -\frac{\gamma e}{4} a^2 K I_0 (-\omega \sin(\omega t)) = \boxed{\frac{\gamma e a^2}{4} K I_0 \omega \sin(\omega t) = I_{ind}}$$

3) Puissance volumique dissipée dans le disque

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}_{ind} = \gamma (E_{ind})^2$$

Pour l'ensemble du barreau, la puissance totale dissipée dans le disque a pour expression :

$d\tau = dr\, rd\theta\, dz$
coord. cylindriques

$$\mathcal{P} = \iiint p_v \, dr \times r d\theta \times dz$$

$$= \int_{r=0}^a \gamma \frac{r^2}{4} \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{e} dz$$

$$= \frac{\gamma}{4} \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 \frac{a^4}{4} 2\pi e.$$

avec
$$\left| \begin{array}{l} B_z = K I_0 \cos(\omega t) \\ \dfrac{dB_z}{dt} = -K I_0 \omega \sin(\omega t) = -\dfrac{\mu_0 \sin^3\theta}{2R} I_0 \omega \sin(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{4} \left(\frac{\mu_0^2 \sin^6\theta}{4R^2} I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \right) \frac{a^4}{4} 2\pi e.$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\gamma \mu_0^2 \sin^6\theta I_0 \omega^2 a^4 \pi e}{32 R^2} \langle \sin^2(\omega t) \rangle$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\gamma \mu_0^2 \sin^6\theta I_0 \omega^2 a^4 \pi e}{64 R^2}}$$

Ex 3.3 - Induction créée par un moment magnétique

L'aimant en rotation crée dans la spire un champ $\vec{B}$ variable. Le flux dans la bobine varie donc création d'une fém induite (loi de Faraday) et d'un courant induit dans la spire. La bobine crée à son tour un champ $\vec{B}_{\substack{propre\\bobine}}$ et l'aimant tournant placé dans ce champ subit un moment

$$\vec{m}(O) = \vec{\Gamma}(O) = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\substack{propre\\bobine}}(O)$$

s'opposant à la rotation.

1) Expression du champ $\vec{B}$ créé par un dipole magnétique.

<u>Rappel</u> : l'expression est analogue au champ électrique créé par un dipole électrique

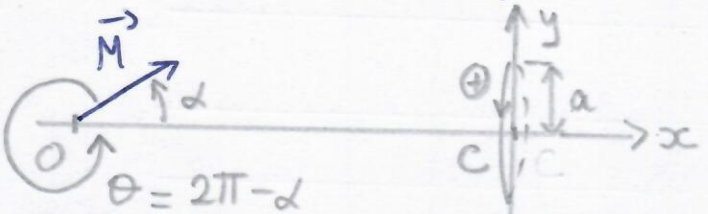
$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

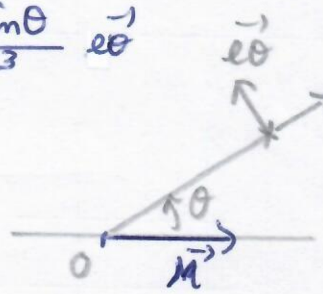
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$$

$$= \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e_r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e_\theta}$$

Pour un dipole magnétique, on a :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta}$$





Ici, $\theta = 2\pi - \alpha$ et $\alpha = \omega t$

$$\vec{B}_{dipole}(C) = \boxed{\vec{B}_{\text{créé par l'aimant tournant en C}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos(\omega t)}{r^3}\vec{e_x} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin(\omega t)}{r^3}\vec{e_y}}$$

Calculons le flux du champ créé par l'aiguille à travers la spire.

$$\phi_{dipole \to spire} = \iint \vec{B}_{dipole} \cdot \vec{dS} \quad \text{avec } \begin{cases} \vec{dS} = dS\,\vec{e_x} \\ \vec{B}_{dipole} \simeq \vec{B}_{dipole}(C) \\ \text{car } a \ll r \end{cases}$$

$$\phi_{dipole \to spire} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos(\omega t)}{r^3}\pi a^2$$

$$\boxed{\phi_{dipole \to spire} = \frac{\mu_0}{2}\frac{M\cos(\omega t)}{r^3}a^2}$$

2) Pour évaluer le courant induit dans la spire, on néglige le champ magnétique propre.

$$\phi_{total} = \phi_{dipole \to spire} + \underset{(=Li)}{\phi_{propre}}$$

$$e \simeq -\frac{d\phi}{dt}_{dipole \to spire} = Ri$$

$$i = \frac{1}{R}\left(-\frac{\mu_0}{2}\frac{M\omega(-\sin(\omega t))}{r^3}a^2\right)$$

$$\boxed{i = \frac{\mu_0 M\omega a^2}{2Rr^3}\sin(\omega t)}$$

On en déduit le couple subi par la spire car le courant induit i est à l'origine d'un moment magnétique $\vec{M}_s$ de la boucle de courant tel que $\vec{M}_s = i \times \underbrace{\pi a^2}_{\text{surface de la spire}} \vec{e_x}$.

$$\vec{\Gamma}_s = \vec{M}_s \wedge \vec{B}_{dipole}$$

$$= i\pi a^2 \vec{e_x} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos(\omega t)}{r^3}\vec{e_x} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin(\omega t)}{r^3}\vec{e_y}\right)$$

$$= -\left(\frac{\mu_0 M\omega a^2}{2Rr^3}\sin(\omega t)\right)\pi a^2 \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin(\omega t)}{r^3}\vec{e_z}$$

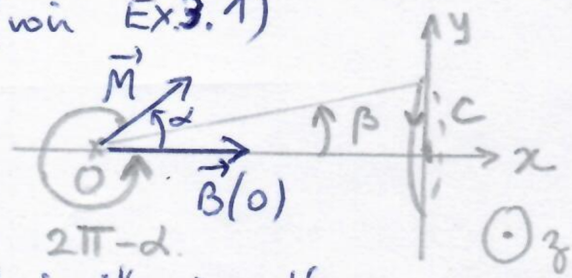
$$\boxed{\vec{\Gamma}_s = -\frac{\mu_0^2 M^2 \omega a^4 \sin^2(\omega t)}{8Rr^6}\vec{e_z}}$$

3) Le champ $\vec{B}(0)$ créé par la spire en O a pour expression

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i \sin^3\beta}{2a}\vec{e_x} \quad \text{(voir Ex 3.1)}$$

Or $a \ll r$, $\sin\beta \simeq \tan\beta = \frac{a}{r}$

$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3\vec{e_x}}$$



On en déduit le couple subi par l'aiguille aimantée.

$$\vec{m}_{dipole}(0) = \vec{\Gamma}(0) = \vec{M} \wedge \vec{B}(0)$$

$$= M \times B(0) \times \sin(2\pi - \alpha)\vec{e_z}$$

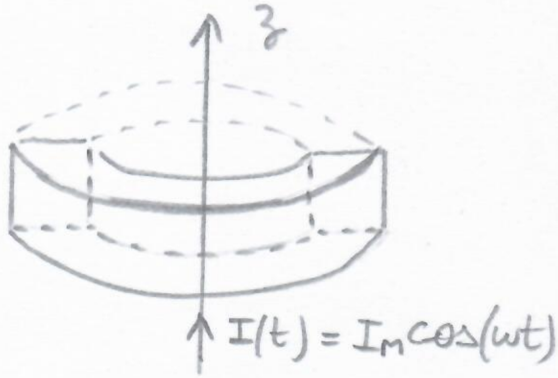
$$= -M\frac{\mu_0 i a^2}{2r^3}\sin\alpha\,\vec{e_z}$$

$$= -\frac{M\mu_0}{2r^3}\left(\frac{\mu_0 M\omega a^2}{2Rr^3}\sin(\omega t)\right)a^2\sin(\omega t)\vec{e_z}$$

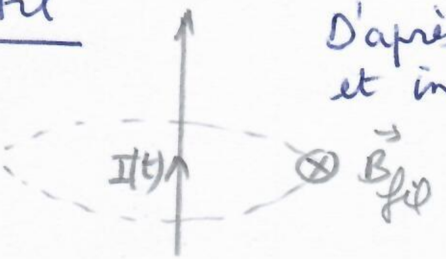
$$\boxed{\vec{\Gamma}(0) = -\frac{\mu_0^2 M^2 \omega a^4 \sin^2(\omega t)}{4Rr^6}\vec{e_z}}$$

Ex 3.4 - Pince ampèremétrique

1) Soit $\vec{B}$ le champ magnétique total
$\vec{B} = \vec{B}_{fil} + \vec{B}_{pince}$



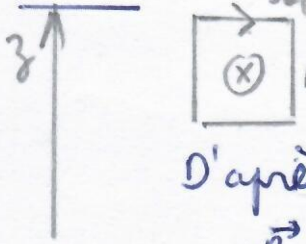
Fil



D'après les symétries et invariances
$\vec{B}_{fil} = B(r)\vec{u_\theta}$

Pince

$i(t) = i_M \cos(\omega t + \varphi)$

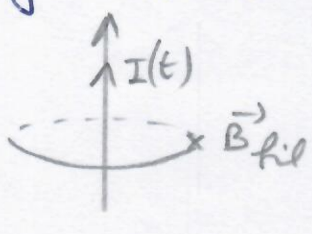


D'après les symétries et invariances
$\vec{B}_{pince} = B(r,z)\vec{u_\theta}$. Par le principe de superposition
$\vec{B} = \vec{B}_{fil} + \vec{B}_{pince} = \underline{\underline{B(r,z)\vec{u_\theta}}}$.

Fil : D'après le théorème d'Ampère :
$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$. Pour tout point intérieur au tore
Contour d'Ampère centré sur l'axe Oz, de rayon $a \leq r \leq 2a$

$B_{fil} \times 2\pi r = \mu_0 I(t)$

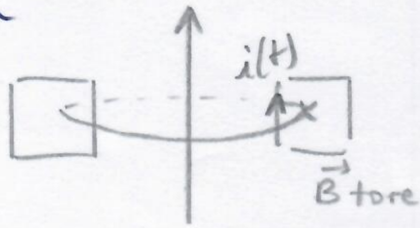
$$\boxed{B_{fil} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}}$$



Pince Pour tout point intérieur au tore, on choisi un contour d'Ampère centré sur l'axe Oz de rayon $a \leq r \leq 2a$.

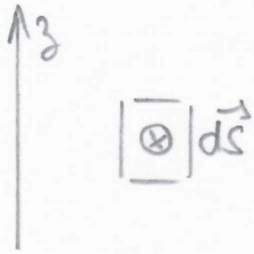
$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$

$B_{pince} \times 2\pi r = \mu_0 N i(t)$



$$\boxed{B_{pince} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 (I(t) + N i(t))}{2\pi r}\vec{u_\theta}}$$



2) $\phi_B = \iint \vec{B'} \cdot \vec{dS}$

$$= \iint \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi r} \vec{e_\theta} \cdot dr\, dz\, \vec{e_\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi} \int_{r=a}^{2a} \frac{dr}{r} \int_{0=z}^{a} dz$$

$$= \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi} \ln\left(\frac{2a}{a}\right) a$$

$$\boxed{\phi_B = \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))\, a}{2\pi} \ln 2}$$

En notation complexe, $\begin{cases} \underline{I}(t) = I_M\, e^{j\omega t} \\ \underline{i}(t) = i_M\, e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 N \underline{i}(t)}{2\pi} a \ln 2 + \frac{\mu_0\, a \ln 2}{2\pi} \underline{I}(t) = L\, \underline{i}(t) + M \underline{I}(t)$$

où L est le coefficient d'auto-inductance

et M est le coefficient de mutuelle inductance.

D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} - M \frac{d\underline{I}(t)}{dt}$

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega\, \underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{I}(t)}{dt} = j\omega\, \underline{I}(t)$$

La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{I}(t)}$

et $\underline{e} = -j\omega \left[L\, \underline{i}(t) + M\, \underline{I}(t) \right]$

le circuit électrique équivalent $e = R\, i(t)$

$$R\, \underline{i}(t) = -j\omega L\, \underline{i}(t) - j\omega M\, \underline{I}(t)$$

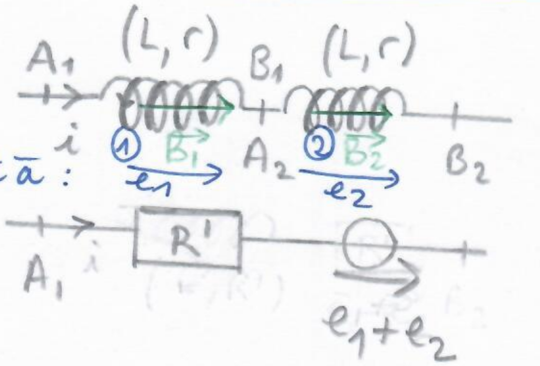
$$\underline{i}(t) \left[R + j\omega L \right] = -j\omega M\, \underline{I}(t)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{-j\omega M}{R + j\omega L}$$

$$|\underline{H}| = \left| \frac{\underline{i}(t)}{\underline{I}(t)} \right| = \left| \frac{-j\omega M}{R + j\omega L} \right| = \frac{\omega M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{i_M}{I_M} = \frac{M}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega}\right)^2 + L^2}}$$

Si $\omega \to +\infty$, alors $|\underline{H}| \to \frac{M}{L} = \frac{\mu_0\, a \ln 2 / 2\pi}{\mu_0\, N a \ln 2 / 2\pi} = \boxed{\frac{1}{N}}$.

1) Cas n°1



$i_1 = i_2 = i$

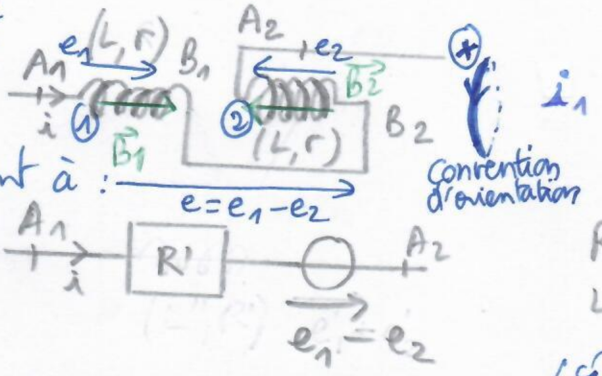
$R' = 10\,\Omega$
$L' = 90\,mH$

Expérimentalement

- On mesure $r_{éq}$ directement à l'ohmètre car courant continu.
- on mesure $Z_{éq}$

$Z_{éq} \simeq L_{éq}\cdot\omega$ (Ex : fréquence $f = 1\,kHz$)

Cas n°2



$i_1 = -i_2 = i$

$R' = 10\,\Omega$
$L'' = 70\,mH.$

Dans les 2 cas, on a $R' = 10\,\Omega = r + r$ (série) $\Rightarrow r = \frac{R'}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5\,\Omega = r}$

Dans les 2 cas, l'inductance équivalente est différente selon l'association série.

Cas n°1 : $\phi_{total} = \phi_1 + \phi_2$

avec $\phi_1 = \phi_{1P} + \phi_{2\to 1} = L_1 i_1 + M i_2 = (L+M)\,i$

$\phi_2 = \phi_{2P} + \phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i_1 = (L+M)\,i$

$e = -\frac{d\phi_{TOTAL}}{dt} = -2(L+M)\frac{di}{dt} = -L'\frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{L' = 2(L+M)}$

Cas n°2 : $\phi_{total} = \phi_1 - \phi_2 \iff e = e_1 - e_2 = -\frac{d}{dt}\left[\phi_1 - \phi_2\right] = -\frac{d\phi}{dt}$ $\quad i_1 = -i_2 = i$

avec $\phi_1 = \phi_{1P} + \phi_{2\to 1} = L_1 i_1 + M i_2 = (L-M)\,i$

$\phi_2 = \phi_{2P} + \phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i_1 = (-L+M)\,i$

$e = -\frac{d\phi_{TOTAL}}{dt} = -2(L-M)\,i = -L''\frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{L'' = 2(L-M)}$

$$\begin{cases} L' = 2L + 2M \\ L'' = 2L - 2M \end{cases} \Rightarrow L' = 2L + (2L - L'')$$

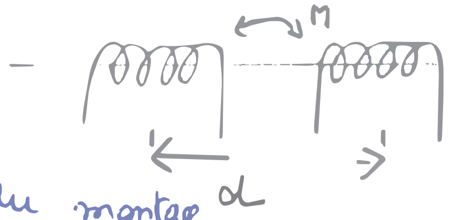
$L' = 4L - L''$

$\boxed{L = \frac{L' + L''}{4}}$ or $L = \frac{90+70}{4} = \underline{\underline{40\,mH}}$

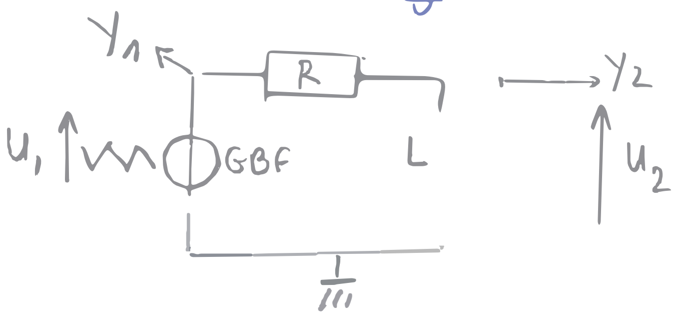
On peut mesurer la mutuelle inductance

$\boxed{M = \frac{L'}{2} - L = -\frac{L''}{2} + L}$ or $\begin{cases} M = \frac{90}{2} - 40 = 5\,mH \\ M = -\frac{70}{2} + 40 = 5\,mH \end{cases}$

Ex 3.7 - Bobines couplées par inductance mutuelle



1) Schéma du montage

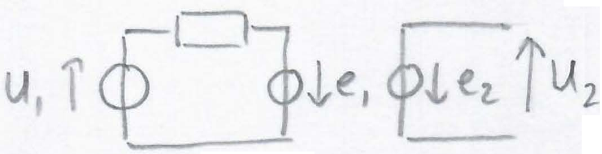


$u_{1max} = 1{,}41\ V$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1ms$

$\frac{R}{L\omega} \gg 1 \iff R \gg L\omega$

montage équivalent



2) $u_2 = -e_2$

$= -\left[-\frac{d\phi_2}{dt}\right]$

$= \frac{d}{dt}\left[\phi_{22} + \phi_{1\to 2}\right]$

$= \frac{d}{dt}\left[L i_2 + M i_1\right] = \frac{d}{dt}(M i_1)$ car circuit ouvert $i_2 = 0$.

$= M \frac{di_1}{dt}$

$u_1 = R i_1 - e_1 = R i_1 + \frac{d}{dt}\left[L i_1 + M i_2\right] = R i_1 + L\frac{di_1}{dt}$

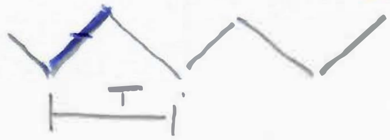
u_1 est une tension triangulaire

Notation complexe

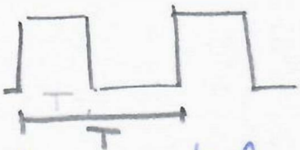
$$\underline{u_1} = R\,\underline{i_1} + j\omega L\,\underline{i_1} = \underline{i_1}\,(R + j\omega L)$$

Or $R \gg \omega L$ donc $\underline{u_1} \simeq \underline{i_1} R \Rightarrow \underline{i_1} = \dfrac{\underline{u_1}}{R}$.

u_1 est une tension triangulaire



→ voie 2



Sur 1/2 période, $u_1 = at + b$ où a est la pente de la droite

$$\frac{du_1}{dt} = a = \frac{2U_1}{\frac{1}{2}T} = \frac{4U_1}{T}$$

$$u_2 = M\frac{di_1}{dt} = \frac{M}{R}\frac{du_1}{dt} = \boxed{\frac{M\,4U_1}{RT} = U_2} \Rightarrow \boxed{M = \frac{U_2 RT}{4U_1}}$$

AN $M = \dfrac{0{,}043 \times R \times 1 \times 10^{-3}}{4 \times 1{,}41} = 7{,}6 \times 10^{-6} \times R$

Si $R = 100\,\Omega$, $M = 0{,}76$ mH.

Ex 3.9 - Anneau supraconducteur

1. Le solénoïde, parcouru par un courant $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ crée un champ $\vec{B}(t)$ identique en tout p^t de l'espace intérieur d'expression $\vec{B}(t) = \mu_0 n\, i(t) = \mu_0 n I_m \sin(\omega t)$

2. On place 1 anneau filiforme à l'intérieur du solénoïde $(R=0, L\neq 0)$.
Le flux du champ $\vec{B}$ à travers l'anneau :

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

$$= \iint \mu_0 n\, i(t)\, \vec{e_z} \cdot dr\, r d\theta\, \vec{e_z} \quad (\text{coord cyl.})$$

$$= \mu_0 n\, i(t) \int_{r'=0}^{r} r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \mu_0 n\, i(t) \frac{r^2}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi$$

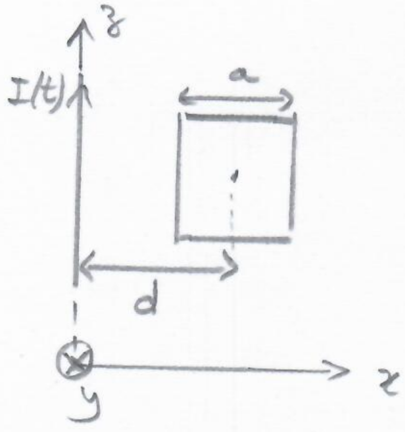
$$= \mu_0 n \pi r^2 I_m \sin(\omega t)$$

3. L'anneau, d'inductance L, est parcouru par un flux

$$\phi = L\, i'(t) = \phi_{propre}$$

$$i'(t) = \frac{\phi}{L} = \boxed{\mu_0 \frac{n \pi r^2}{L} I_m \sin(\omega t) = i'(t)}$$

Ex 3.10 - Spire carrée au voisinage d'1 fil



1- Invariances et sym.

$$\vec{B}(r) = B(r)\,\vec{e}_\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$

2- Flux de $\vec{B}$ à travers la spire carrée

$$\phi = \iint \vec{B}(r)\cdot \vec{dS}$$

$$= \iint \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}\,\vec{e_y}\cdot dx\,dz\,\vec{e_y}$$

À travers la spire $\vec{B} = B\vec{e_\theta} = B\vec{e_y}$. et $r = x$.

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\int_{x=d-\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} \frac{dx}{x}\int_{z=0}^{a} dz$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\ln\left(\frac{d+\frac{a}{2}}{d-\frac{a}{2}}\right) a$$

3. $$e_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+\frac{a}{2}}{d-\frac{a}{2}}\right)\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\boxed{e_{ind} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+\frac{a}{2}}{d-\frac{a}{2}}\right)\frac{dI(t)}{dt}}$$