Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ des espaces mesurables. Décrire l'ensemble des fonctions mesurables lorsque

1. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(F)$,
2. $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{T}' = \{\Omega', \emptyset\}$,
3. $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(F)$,
4. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{T}' = \{\Omega', \emptyset\}$,
5. $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ et $\mathcal{T}' = \{\Omega', \emptyset, B, B^c\}$ où $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega'$.

Correction.

1. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction f et tout $B \in \Omega'$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega) = \Omega$.
2. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction f, on a $f^{-1}(\Omega') = \Omega$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
3. Seules les fonctions constantes sont mesurables. Si f prend au moins deux valeurs a et b dans Ω', alors $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(a) \neq \Omega$, donc f n'est pas mesurable. En revanche, si f est constante, alors elle est mesurable. En effet, si f prend pour unique valeur $a \in \Omega'$, alors pour tout $A \subset \Omega'$, on a soit $f^{-1}(A) = \Omega$ (si $a \in A$), soit $f^{-1}(A) = \emptyset$ (si $a \notin A$), donc f est mesurable.
4. Toute fonction est mesurable, de même que dans le deuxième cas.
5. Une fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) = A$ ou $f^{-1}(B) = A^c$. En effet, si c'est le cas, on a aussi $f^{-1}(B^c) = A^c$ ou $f^{-1}(B^c) = A$, et on a déjà vu que $f^{-1}(\Omega') = \Omega$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Exercice 2

Soit $a > 0$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_a(x) = \frac{1}{(x+a)\sqrt{x^2+x+a^2}}$$

1. Montrer que f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} f_a \,\mathrm{d}\lambda$$

```
1. Donner les limites de $F(a)$ lorsque $a$ tend vers
$0^+$ et lorsque $a$ tend vers $+\infty$.
1. Donner un équivalent de $F(a)$ au voisinage de
$+\infty$.
```

Correction de 1.

1. f_a est mesurable sur $\mathbb{R}$, car elle est continue.
2. f_a est intégrable sur $[0,1]$, car elle y est continue (Math II).
3. f_a est intégrable sur $[1,+\infty[$, car

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leq f_a(x) \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < +\infty$$

Correction de 2.A.

1. *Limite en* 0^+

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* vers 0^+, on pose $f_n = f_{a_n}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, positive, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le théorème de convergence monotone nous assure qu'alors

$$F(a_n) = \int_{\mathbb{R}_+} f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} f \,\mathrm{d}\mu$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \,\mathrm{d}\mu = +\infty,\ \text{car } \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,\ f(x) \geq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \int_{[0,1/2]} \left(x \longmapsto \frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}\mu = +$$

Le principe de discrétisation monotone nous permet de conclure que

$$F(a) \xrightarrow[a\to0^+]{} +\infty$$

1. *Limite en* $+\infty$

Par le même principe, on sait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les fonctions mesurables $f_n = \frac{1}{(x+a_n)\sqrt{x^2+x+a_n^2}}$. Et on a

$$\begin{cases} \inf f_n = 0 \\ \sup f_n = \frac{1}{a_n^2} \xrightarrow[a_n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

Alors, par lemme de Fatou et son inverse

$$\begin{cases} \int_\Omega \liminf f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \\ \int_\Omega \limsup f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \end{cases}$$

On montre donc que

$$F(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$$

Correction de 2.B.

1. *Équivalent en* $+\infty$

En multipliant pas a, on obtient

$$a\,F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a\,\left(1+\frac{x}{a}\right)\,\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{x}{a^2}+1}}\,\mathrm{d}x \underset{x=a\,u}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)\,\sqrt{u^2+\frac{u}{a}+1}}$$

Il est facile alors de montrer, par le même raisonnement que ci-dessus, que

$$a\,F(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)\,\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$$

In [3]:
```
import sympy as sp
sp.init_printing()

x = sp.symbols('x', real=True)
sp.integrate(1/((1+x)*sp.sqrt(1+x**2)), (x, 0, sp.oo))
```

Out[3]:

$$\frac{G_{3,3}^{3,3}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & \\ 0, 0, \frac{1}{2} & \end{matrix} \middle| {1} \right)}{2\pi^{\frac{3}{2}}}$$

In [9]:
```
sp.Integral(1/((1+x)*sp.sqrt(1+x**2)), (x, 0, sp.oo))
```

Out[9]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x+1)\,\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

In [10]:
```
y = sp.symbols('y', real=True)
_.transform(x, sp.tan(y))
```

Out[10]:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan^2(y)+1}}{\tan(y)+1}\,dy$$

In [11]:
```
sp.integrate(1/(sp.sin(y)+sp.cos(y)), (y, 0, sp.pi/2))
```

Out[11]:

$$\frac{\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}\log\left(-1+\sqrt{2}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}\left(\log\left(\sqrt{2}\right)+i\pi\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}\left(\log\left(1+\sqrt{\right.}\right.}{2}$$

In [12]:
```
_.simplify()
```

Out[12]:

$$\log\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

Exercice 3

On définit pour $a > 0$,

$$F(a) := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)(a^2+x^2)}$$

1. Montrer que F est bien définie pour $a > 0$.
2. Déterminer la limite de F lorsque a tend vers 0^+.
3. Déterminer un équivalent de F en 0^+.

Correction.

Idée : Soit $a \to 0^+$, on a

$$\frac{1}{(1+x^4)(a^2+x^2)} \xrightarrow[a\to 0^+]{} \frac{1}{x^2(1+x^4)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

alors on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)(a^2+x^2)} \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$$

$\int_{[0,+\infty[} f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ n'a pas de sens tant qu'on n'a pas montré son existence.

In [13]:

```
a = sp.symbols('a', real=True)

sp.integrate(1/((1+x**4)*(a**2+x**2)), (x, 0, sp.oo)).simplify()
```

Out[13]:

$$\begin{cases} \frac{\pi\left(\sqrt{2}a^3-\sqrt{2}a+2\right)}{4a(a^4+1)} & \text{for } |\arg(a)| < \frac{\pi}{2} \\ \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)(x^4+1)}\, dx & \text{otherwise} \end{cases}$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* vers 0^+, on pose $f_n = f_{a_n}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, positive, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2\, 1+x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour utiliser le théorème de convergence monotone, on sait maintenant que f est positive, mesurable sur $]0,+\infty[$ car continue. Mais, si on vérifie

$$\int_{[0,+\infty[} f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{[0,1]} \left(x \mapsto \frac{1}{2x^2}\right) \,\mathrm{d}\mu = +\infty$$

Alors, pour $a > 0$ et $x \in [0,+\infty[$, le variable peut être changé comme $x = a\,u$, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)(a^2+x^2)} \xrightarrow{x=a\,u} \int_0^{+\infty} \frac{a\mathrm{d}u}{a^2\,(1+u^2)\,(1+a^4\,u^4)} = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{}{(1+u^2}$$

(*Indication par la résultat de Python*)

Par théorème de convergence monotone

Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : u \mapsto \frac{1}{(1+u^2)\,(1+a_n^4\,u^4)}$

- f_n est mesurable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0^+,
- $\forall u \in [0,+\infty[$, on a $f_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{u^2} = f(u)$.

Appliquons le théorème de convergence monotone,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[0,+\infty[} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+u^2} \,\mathrm{d}\mu = [\arctan(u)]_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Question supplémentaire : Pourquoi on peut faire le changement de variable ici ? À refléchir.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que I_n est bien défini.
2. Montrer que

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

1. Donner un équivalent lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$ de I_n.

Correction de 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. la fonction

$$f_n \ : \ x \longmapsto \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2}$$

est mesurable sur $]0,1[$ (pour la tribu borélienne), car elle est continue.

1. f_n est intégrable sur $[1/2, 1[$ car

$$f_n(x) = O(1) \qquad \left(f_n(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\frac{1}{2} \right)$$

1. f_n est intégrable sur $]0, 1/2]$ car

$$f_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Correction de 2.

La fonction f_n est toujours négative, la suite $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, croissante et

$$\forall x \in]0,1[, \ -f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Le théorème de convergence monotone nous assure que

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_{]0,1[} f_n \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{]0,1[} 0 \, \mathrm{d}t = 0$$

Correction de 3.

Faisons un changement de variable dans l'intégrale (sinon, on est bloqué), pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n \underset{u=x^n}{=} \int_0^1 \frac{u\,\ln\left(u^{1/n}\right)}{1-u^{2/n}}\,\frac{1}{n}\,u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}\,\ln\left(u^{1/n}\right)}{1-u^{2/n}}\,\mathrm{d}u$$

On peut alors raisonnablement penser que

$$n\,I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}$$

Montrons-le

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n\ :\ u \longmapsto \frac{u^{1/n}\,\ln\left(u^{1/n}\right)}{1-u^{2/n}}$$

qui vérifie

1. f_n est mesurable sur $]0,1[$, car continue ;
2. la suite converge

$$\forall u \in]0,1[,\ f_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$$

car

$$\frac{t\,\ln(t)}{1-t^2} = \frac{t}{1+t}\,\frac{\ln(t)}{1-t} \xrightarrow[t\to1^-]{} -\frac{1}{2}$$

1. la suite est dominée par la constante (la fonction admet une limite à droite en 0^+ et une limite à gauche en 1^- et elle est continue sur $]0,1[$)

$$\left\|t \longmapsto \frac{t\,\ln(t)}{1-t^2}\right\|_{\infty,]0,1[} < +\infty$$

qui est clairement intégrable sur $]0,1[$, indépendante de n.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,n}$$

In [14]:
```
t = sp.symbols('t', real=True)
phi = sp.Lambda(t, t*sp.ln(t)/(1-t**2))
phi(t).limit(t, 0, '+'), phi(t).limit(t, 1, '-')
```

Out[14]: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

In [10]:
```
sp.integrate(1/t**6,t)
```

Out[10]: $-\frac{1}{5t^5}$

In [ ]:
```
```