Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD révision

13 Septembre 2022

Exercice 1

Quelques règles de rédaction : Voir ensemble sur Moodle !

Exercice 2 : ($\mathbb{R}^n$ euclidien)

L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère P et P' d'équation respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $3x + 4y - 2z + 5 = 0$.

1. Montrer que les plans P et P' sont sécants selon une droite d.

   D'une part, le plan P a pour équation $x + 2y - z + 1 = 0$, donc le vecteur $(1, 2, -1)$ est un vecteur normal au plan P.
   D'autre part, le plan P' a pour équation $3x + 4y - 2z + 5 = 0$, donc le vecteur $(3, 4, -2)$ est un vecteur normal au plan P'. Comme les deux vecteur ne sont pas proportionnels. Autrement dit, les vecteur nornaux ne sont pas colinéaires. Il vient que les plans P et P' sont sécants selon une droite d.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d, droite d'intersection des plans P et P'.

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) \in P \cap P' &\iff \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ 3(-2y + z - 1) + 4y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \frac{z}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \frac{t}{2} \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}
\end{aligned}
$$

   Finalement, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et P' est :

$$
\boxed{\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \frac{t}{2} \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}}
$$

3. En déduire un vecteur directeur et un point de la droite d.

   D'après la question précédente, une représentation paramétrique de d est

$$
\begin{cases} x = -3 + 0t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 + 1t \end{cases}
$$

   Par conséquent, il vient que le vecteur $(0, \frac{1}{2}, 1)$ est un vecteur directeur de d.

Par ailleurs, le point de coordonnées $(-3, 1, 0)$ appartient à d

4. Montrer que la droite d est contenue dans le plan d'équation cartésienne $2x + 6y - 3z = 0$

D'après la question précédente, $M = (x, y, z)$ appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -3 + 0t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 + 1t \end{cases}$

Pour tout point $M = (x, y, z)$ de d, on a : $2 \times (-3) + 6 \times (1 + \frac{1}{2}t) - 3z = -6 + 6 + 3t - 3t = 0$.
Par conséquent, tout point $M = (x, y, z)$ de d appartient au plan d'équation $2x + 6y - 3z = 0$.
Autrement dit, la droite d est contenue dans le plan d'équation $2x + 6y - 3z = 0$.

Exercice 3

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}, \qquad (S_2) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}, \qquad (S_3) \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases},$$

$$(\mathrm{S}_4) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}.$$

La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :
1. échange de deux lignes. 2. multiplication d'une ligne par un nombre non nul. 3. addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

En notant L_1, L_2, L_3, L_4 les lignes successive $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, $(S4)$.

▷
Pour system (S_1), on écrit

$$(S_1) \iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y - 3z = -6 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -4z = -8 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (S_1) est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \{(1, 0, 2)\}.}$$

▷

Pour system (S_2), on écrit

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ -2y - 2z = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ -4z = -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (S_2) est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \{(-1, -1, 1)\}.}$$

▷
Pour system (S_3), on écrit

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -y - 3z + 7t = -3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

Il y a plus d'inconnues que d'équations. On va donc exprimer certaines inconnues en fonctions des autres. Par exemple, ici, on peut exprimer x et y en fonction de z et t. Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -y - 3z + 7t = -3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ z = z \\ t = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z - 4t - 2 \\ y = -3z + 7t + 3 \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{S}_3$ des solutions de (S_3) est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \{(2z - 4t - 2, -3z + 7t + 3, z, t); (z, t) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

▷
Pour system (S_4), on écrit

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = 5 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 2y + 4z = 14 \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ -z = -2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 0 = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

La dernière relation de compatibilité est vérifiée. On en déduit alors facilement que l'ensemble $\mathcal{S}_4$ des solutions de (S_4) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_4 = \{(4, 3, 2)\}.}$$

Exercice 4

Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre le système d'équation, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Utiliser méthode du pivot de Gauss pour se ramener à un système équivalent plus simple.

En notant L_1, L_2, L_3 les lignes successive (S), en effectuant $L_1 \leftarrow L_3$ et $L_3 \leftarrow L_1$, on a :

$$\begin{aligned} (S) \iff & \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = 1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m(1-m) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 1 - m^3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m(1-m) \\ (2-m-m^2)z = 1 - m^3 + m - m^2 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m(1-m) \\ (m+2)(m-1)z = (m-1)(m+1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Séparons en deux cas :
$\triangleright 1^{er}$ cas : $m \neq 1$:
Alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = -m \\ (m+2)z = (m+1)^2 \end{cases}$$

Si $m \neq -2$, alors : $z = \frac{(m+1)^2}{m+2}$, puis on obtient : $y = \frac{1}{m+2}$ et $x = -\frac{m+1}{m+2}$.

Si $m = -2$, alors : $(E) \iff 0_z - 1 = 0$, qui n'a pas de solution.

$\triangleright 2^e$ cas : $m = 1$:
Alors :

$$(S) \iff x + y + z = 1$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \begin{cases} \{(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2})\} \quad \text{si } m \neq 1 \text{ et } m \neq 2 \\ \varnothing \quad \text{si } m = -2 \\ \{(x, y, 1 - x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{si } m = 1 \end{cases}}$$