Suites et Séries – TD$_{15}$

19-20 décembre 2022

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \sqrt{n}\, z^n$
2. $\sum_n z^{n!}$
3. $\sum_n \ln(n)\, z^n$
4. $\sum_n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n$
5. $\sum_n n^{\ln(n)}\, z^n$
6. $\sum_n \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\, z^n$
7. $\sum_n \frac{n!}{n^n}\, z^n$
8. $\sum_n (2+(-1)^n)^n\, z^n$

Exercice 2

Soit $\sum_n a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum_n a_n\, e^{\sqrt{n}}\, z^n$
2. $\sum_n a_n\, z^{2n}$
3. $\sum_n a_n\, z^{n^2}$

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est 1 et que la série $\sum_n a_n$ est divergente. Pour $x \in]-1,1[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

1. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.
2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$. Montrer que la série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} S(x)$$

Exercice 4

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence 1. On pose

$$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

et on suppose de plus qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

Exercice 5

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence 1. On pose

$$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

et on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \ell$. On suppose également que $a_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on note

$$A(x) = S(x) - \ell, \qquad B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1 - x^n) a_n \quad \text{et} \quad C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A(x) + B_N(x) - C_N(x).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_0,\ \forall x \in [0,1[, \quad |C_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Montrer que la série $\sum_n a_n$ est convergente et que sa somme vaut ℓ. On pourra, pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$, utiliser le point $x_N = 1 - \dfrac{1}{N}$.