Problème 1 : Filtre d'un signal

1. On veut sélectionner le signal de pulsation Ω et éliminer ceux de pulsations 0 et 2Ω. On doit donc utiliser un filtrage passe-bande.

2. Car il y a seulement une rétroaction négative, l'AO se fonctionne en régime linéaire, soit $\underline{V_-} = \underline{V_+} = 0$. On applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse et en A :

$$\underline{V_-} = \frac{\frac{\underline{V_s}}{Z_{R_2}} + \frac{\underline{V_A}}{Z_C}}{\frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_C}} = 0 \Longrightarrow \underline{V_A} = -\frac{Z_C}{Z_{R_2}}\underline{V_s}$$

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{Z_{R_1}} + \frac{\underline{V_s}}{Z_C}}{\frac{1}{Z_{R_1}} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_C}} = -\frac{Z_C}{Z_{R_2}}\underline{V_s}$$

Alors on peut déduire la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-1}{\frac{1}{jR_2C\omega} + \frac{2R_1}{R_2} + jR_1C\omega}}$$

On la reécrit sous la forme canonique donnée :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{2R_1}}{1 - \frac{j}{2R_1c\omega} + \frac{jR_2c\omega}{2}}}$$

Donc on peut déduire les caractéristiques du filtre :

$$\boxed{H_0 = -\frac{R_2}{2R_1}, Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}}$$

3. D'après la question **1**, il faut choisir $\boxed{\omega_0 = \Omega}$. De plus, la pulsation à éliminer 2Ω est proche de la pulsation à garder Ω, donc la bande passante doit être étroite. Cela nécessite $\boxed{Q \gg 1}$.

4. On calcule d'abord le gain et puis des amplitudes :

$$H = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$A_1 = V_0\varepsilon H(\Omega)$, soit $\boxed{A_1 = V_0\varepsilon|H_0|}$

$A_2 = V_0mH(2\Omega) = V_0m\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}}$, soit $\boxed{A_2 = V_0m\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\frac{9}{4}}}}$

Alors on a $A_1 \gg A_2$.

Problème 2 : Vibrations longitudinales d'une chaîne d'atomes

1. – Système : atome n considéré comme un point matériel de masse m.
– Référentiel terrestre (R) supposé galiléen.
– Repère cartésien.
– Bilan des forces : le système subit la force exercée par l'atome $n-1$ notée $\vec{F}_{n-1\to n}$ et celle par l'atome $n+1$ notée $\vec{F}_{n+1\to n}$.

Ici, $\vec{F}_{n-1\to n} = -\gamma(x_n - x_{n-1} - a)\overrightarrow{e_x}$ et $\vec{F}_{n+1\to n} = -\gamma(x_{n+1} - x_n - a)(-\overrightarrow{e_x})$

On applique le PFD au système : $m\vec{a} = \vec{F}_{n-1\to n} + \vec{F}_{n+1\to n}$

On fait la projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = m\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\gamma(x_n - x_{n-1} - a) + \gamma(x_{n+1} - x_n - a)$$
$$= -\gamma(na + \psi_n - (n-1)a - \psi_{n-1}) + \gamma\big((n+1)a + \psi_{n+1} - na - \psi_n\big)$$

On a $\boxed{m\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\gamma(\psi_n - \psi_{n-1}) + \gamma(\psi_{n+1} - \psi_n)}$

2.a. On a $\psi(x = na, t) = \psi_n(t)$ et fait des développements limités au deuxième ordre pour $\psi_{n+1}(t)$ et $\psi_{n-1}(t)$:

$$\boxed{\psi_{n+1}(t) = \psi(x = (n+1)a, t) = \psi_n(t) + a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(na, t)}$$

$$\boxed{\psi_{n-1}(t) = \psi(x = (n-1)a, t) = \psi_n(t) - a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(na, t)}$$

2.b. On injecte les expressions de $\psi_{n+1}(t)$ et $\psi_{n-1}(t)$ dans l'équation (1) pour obtenir l'équation de D'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0}$$

Avec la vitesse de propagation de l'onde, aussi appelée la célérité :

$$\boxed{c = a\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}$$

3. C'est une onde longitudinale car le mouvement local d'atomes est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

4.a. On peut déterminer la célérité de l'onde sonore dans le fer avec des données :

$$\boxed{c = a\sqrt{\frac{\gamma \mathrm{N_A}}{M}}}$$

AN : $c = 250 \times 10^{-12}\sqrt{\frac{52}{56 \times 10^{-3}} \times 6{,}02 \times 10^{23}}$

$$\boxed{c = 5{,}9 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

4.b. La célérité du son dans l'air à 15° est $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Alors le son se propage beaucoup plus rapidement dans le métal que dans l'air.