Topologie et Calcul différentiel – TD 5: Topologie : ouvert, intérieur, frontière, voisinages, points isolés

21 avril 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manier les outils de topologie qui nous serviront plus tard.

Exercice 1 :

Soit E un espace-vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que l'intérieur de F est non-vide.

1. Montrer que $F = E$.

Exercice 2 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

1. Montrer que A est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leqslant M$.

   Dans la suite, on suppose que A est bornée.
2. Montrer que $\overline{A}$ et ∂A sont bornées.
3. Lorsque $\mathring{A} \neq \emptyset$, montrer que $\operatorname{diam}(\mathring{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$. Donner un exemple où il n'y a pas égalité.
4. Montrer que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.
5. (a) Montrer que $\operatorname{diam}(\partial A) \leqslant \operatorname{diam}(A)$.
   (b) Soit $x \in A$ et $u \in E \setminus \{0\}$. On considère l'ensemble $X = \{t \geqslant 0,\ x + t.u \in A\}$. Montrer que $t_{x,u} = \sup X \in \mathbb{R}$ est bien défini.
   (c) Montrer que $x + t_{x,u} u \in \partial A$.
   (d) Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer qu'il existe x' et y' alignés avec x et y tels que $x' \in \partial A$, $y' \in \partial A$ et $\|x' - y'\| \geqslant \|x - y\|$.
   (e) Montrer que $\operatorname{diam}(\partial A) = \operatorname{diam}(A)$.

Exercice 3 :

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ **muni de la norme infinie** et $F = \{f \in E,\ f \text{ croissante}\}$.

1. Soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
2. Montrer que F est fermé dans E.
3. Montrer que $\mathring{F} = \emptyset$.

Exercice 4

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $C_1 = \{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+\}$, $C_2 = \{f \in E,\ f(0) = f(1)\}$.

1. On munit E de la norme infinie, préciser alors $\overline{C_k}$ et $\mathring{C}_k$ pour $k \in \{1,2\}$.
2. On munit E de la norme 1, déterminer $\overline{C_2}$ et $\mathring{C}_2$.

Exercice 5

Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites à valeurs réelles bornées. On munit E de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants

1. Les suites presque nulles $\{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\}$.
2. Les suites convergentes.

Exercice 6 :

Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R}, |\ |)$ tel que tous les points de A sont isolés. Montrer que A est au plus dénombrable.