Algèbre linéaire et bilinéaire I
TD$_{13}$
29 Novembre 2022

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : Complémentaire du cours

Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right]$$

avec $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.

1. En considérant l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \ldots, A_p) & \longmapsto & \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \end{array}$$

   où $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice ayant pour colonnes $A_1, \ldots, A_p$, montrer que

$$\det M = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det A.$$

2. En déduire que $\det M = \det(A)\det(B)$.

Exercice 2 : Complémentaire du cours

On suppose $n \geq 2$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes. La matrice de Vandermonde associée est la matrice définie par

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Calculer $\det V(a_1, a_2)$ et $\det V(a_1, a_2, a_3)$.
2. Trouver une relation entre $\det V(a_1, \ldots, a_n)$ et $\det V(a_2, \ldots, a_n)$.
3. En déduire l'expression de $\det V(a_1, \ldots, a_n)$.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $V(a_1, \ldots, a_n)$ soit inversible.

Exercice 3

Soit $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(A.B) = f(A)f(B)$$

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.

Exercice 5

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ avec :

1. la méthode du pivot de Gauss ;
2. la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Que peut-on en déduire sur la matrice A ?

Exercice 6

Soient a, b et c des nombres réels ou complexes. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{K}).$$

Exercice 7

On suppose $n \geq 2$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que

$$\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $A = 0_n$.

Exercice 8

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\det M \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer : [M est inversible et $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$] si et seulement si [$\det M = 1$ ou $\det M = -1$].

Exercice 9

On suppose $n \geq 2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \Delta_n = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2.
2. Calculer Δ_3 (factoriser l'expression).

3. Calculer Δ_n pour tout entier $n \geq 2$.
4. Trouver le noyau de A.
5. Suivant les valeurs de a et b, donner la valeur du rang de A.
6. Montrer que A est semblable à la matrice (donner une matrice de changement de base) :

$$B = \mathrm{Diag}(a-b, \ldots, a-b, a+(n-1)b).$$