

Suites et Séries – TD₁₆

26-27 décembre 2022

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{1}{(\sqrt{n})^n} z^n$
2. $\sum_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n$
3. $\sum_n n z^{n^2}$
4. $\sum_n \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^{3n}$
5. $\sum_n \left(\frac{2 + (-1)^n}{(3 + (-1)^n)}\right)^n z^n$
6. $\sum_n \tan(\pi\sqrt{n^2 + 1}) z^n$

Exercice 2

1. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Comparer R avec le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_n a_n^2 z^n$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Donner en fonction de a le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_n \frac{a^{n^2}}{(2n)!} z^n$$

Exercice 3

Soit la série entière $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ de rayon de convergence R . On définit sa fonction somme :

$$S : \begin{cases}]-R, R[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \end{cases}$$

1. Trouver le rayon de convergence R .
2. Étudier la convergence de la série numérique $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ pour $x = R$ et pour $x = -R$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$.
4. On considère la série entière $\sum_n \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] z^n$. On note R' son rayon de convergence et g sa fonction somme.
 - (a) Montrer que $R' = 1$.
 - (b) Montrer que g se prolonge par continuité en $x = 1$.
 - (c) En déduire que $(1-x)S(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe un unique couple de suites réelles $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 \\ a_n + b_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n \end{cases}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n$$

3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n , pour tout n dans \mathbb{N} .

4. Déterminer le rayon de convergence des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.