Mathématiques II – TD$_7$

23-24 mai 2022

Exercice 1

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \Longleftrightarrow f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0$$

1. ($\Leftarrow$) c'est évident. (略！)
2. ($\Rightarrow$)

   $\triangleright$ Si $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, alors $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ nous donne $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$, donc :

   $$\int_a^b \big(|f(t)| - f(t)\big)\mathrm{d}t = 0$$

   Or, la fonction $|f| - f$ est continue et positive. Donc

   $$\int_a^b \big(|f(t)| - f(t)\big)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow |f| - f = 0$$

   D'où, $f = |f|$, c'est-à-dire $f \geqslant 0$.

   $\triangleright$ Si $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, on obttient : $f \leqslant 0$.

   $\triangleright$ Finalement :

   $$\boxed{\text{Si } \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \text{ alors } f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0}$$

Exercice 2

Soit $f, g \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\mathrm{d}t = f(l) \times \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

1. Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $g = 0$, car g est continue et positive. Donc, on a la conclusion.
2. Sinon, puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, d'après le théorème des fonctions continues sur un segement, on a que f admet un minimum et maximum en des points c et d.
   Posons $m = f(c)$ et $M = f(d)$.
   Puisque $g > 0$, on a

   $$m \times g(t) \leqslant f(t) \times g(t) \leqslant M \times g(t)$$

   donc

   $$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t) \times g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \leqslant M$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a qu'il existe $l \in [c,\, d] \in [a,\, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\mathrm{d}t = f(l) \times \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 3

Soit f et g deux fonctions continues, sur $[a, b]$ $(a < b)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}.$$

Notez que toutes les fonctions que nous écrirons sont continues sur $[a, b]$, elles sont donc intégrables sur ce segment. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)\times g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f(x)\times g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc, par Cauchy-Schwarz, en posant $I = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}$ et $J = \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant I^2 + 2\,I\times J + J^2 = (I+J)^2 = \left(\sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}\right)^2.$$

D'où l'inégalité recherchée.

2. Préciser les cas d'égalité.

Pour que l'inégalité devienne une égalité, il faut être dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire que f et g soient proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $f = \lambda.g$ ou $\lambda.f = g$. Mais ceci suffit-il ? Il faut également que :

$$\int_a^b |f(x)\times g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\times g(x)\,\mathrm{d}x$$

donc que $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Il y a donc égalité si et seulement si :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}_+, f = \lambda.g \text{ ou } \lambda.f = g$$

Exercice 4

Soit $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x$$

où $f^2(x) = f(x)\times f(x)$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1];\ f(x) = 0 \text{ ou } \forall x \in [0,1];\ f(x) = 1$$

Déductions sur une fonction à partir de renseignements sur des intégrales. Attention : si le produit de deux fonctions continues est la fonction nulle, on ne peut pas déduire que l'une des deux fonctions est la fonction nulle.

▷ Comme on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f-f^2)^2(x)\,dx &= \int_0^1 (f^2(x)-2f^3(x)+f^4(x))\,dx \\ &= \int_0^1 f^2(x)\,dx - 2\int_0^1 f^3(x)\,dx + \int_0^1 f^4(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

La fonction $(f-f^2)^2$ est continue et positive, on déduit $(f-f^2)^2=0$, c'est-à-dire, $f(1-f)=0$.
Ceci montre : $\forall x\in[0,1], (f(x)=0 \text{ ou } f(x)=1)$.

▷ Pour montrer $\forall x\in[0,1], f(x)=0$ ou $\forall x\in[0,1], f(x)=1$, raisonnons par l'absurde :
Supposons $f\neq 0$ et $f\neq 1$, alors il existe donc $a\in[0,1]$ tel que $f(a)\neq 0$ et il existe $b\in[0,1]$ tel que $f(b)\neq 1$, on a alors $f(a)=1$ et $f(b)=0$.
Comme f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend, par exemple la valeur $\frac{1}{2}$, contradiction. On conclut :

$$\boxed{\forall x\in[0,1], f(x)=0 \text{ ou } \forall x\in[0,1], f(x)=1.}$$

Exercice 5

Soit $f,g:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ continues telles que : $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ et $f\times g\geqslant 1$. Montrer :

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant 1$$

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Comme les applications $\sqrt{f}, \sqrt{g}, \sqrt{f\times g}$, sont continues sur : $[0,1]$.
On a, en appliquant l'inégalité Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\geqslant\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)\times g(x)}\,dx\right)^2.$$

Comme $f\times g\geqslant 1$, on a $\sqrt{f\times g}\geqslant 1$, puis

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)\times g(x)}\,dx \geqslant \int_0^1 1\,dx = 1,$$

On en déduit que

$$\boxed{\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\geqslant 1}$$

Exercice 6

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que :

$$\sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{dx}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

1. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée et les bornes sont atteintes. Posons
$$M = \max_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|.$$
2. On a alors :
$$\forall x \in [a, b],\ 0 \leq f(x) \leq M.$$
Donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{d}x} \leq M \times \sqrt[n]{b-a}.$$
3. Soit $x_0 \in [a, b]$, tel que $f(x_0) = M$ et soit $\epsilon > 0$, la continuité de f nous assure qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ $(\alpha < \beta)$, tel que :
$$x_0 \in [\alpha, \beta] \text{ et } \forall x \in [\alpha, \beta],\ M - \epsilon \leq f(x).$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{d}x} \geq (M - \epsilon) \times \sqrt[n]{\beta - \alpha}.$$
4. On a $\lim_{n\to+\infty} M \times \sqrt[n]{b-a} = M$. Donc :
$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \Rightarrow M \times \sqrt[n]{b-a} \leqslant M + 2\epsilon.$$
De même, $\lim_{n\to+\infty}(M - \epsilon) \times \sqrt[n]{\beta - \alpha} = M - \epsilon$. Donc :
$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \Rightarrow M \times (M - \epsilon) \times \sqrt[n]{\beta - \alpha} \geqslant M - 2\epsilon.$$
Soit un tel N_1 et un tel N_2. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geqslant N$ on a :
$$M - 2\epsilon \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{d}x} \leqslant M + 2\epsilon.$$
Ceci démontre que
$$\sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{d}x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} M.$$

Exercice 7

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue pas morceaux sur $[0, 1]$ mais est intégrable sur $[0, 1]$.

f n'admet pas de limite en 0^+ donc elle n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$. Montrons qu'elle est intégrable sur $[0, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$.

— La restriction $\widetilde{f}$ de la fonction f à $[\varepsilon, 1]$ est continue par morceaux donc intégrable. Donc $\inf A_+(\widetilde{f}) = \sup A_-(\widetilde{f})$. Notons I_ϵ cette valeur commune :

$$\inf A_+(\widetilde{f}) = \sup A_-(\widetilde{f}) = I_\epsilon$$

— Pour toute fonction φ_1 en escalier sur $[\varepsilon, 1]$ telle que $\varphi_1 \geqslant f$, la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, \varepsilon], \\ \varphi_1(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et est telle que $\varphi \geqslant f$. On a donc

$$\inf A_+(f) \leqslant I_\epsilon + \varepsilon.$$

— De même, pour toute fonction φ_2 en escalier sur $[\varepsilon, 1]$ telle que $\varphi_2 \leqslant f$, la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in [0, \varepsilon], \\ \varphi_2(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et est telle que $\varphi \leqslant f$. On a donc

$$\sup A_-(f) \geqslant I_\epsilon - \varepsilon.$$

— Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$I_\varepsilon - \varepsilon \leqslant \sup A_-(f) \leqslant \inf A_+(f) \leqslant I_\varepsilon + \varepsilon.$$

Donc

$$|\inf A_+(f) - \sup A_-(f)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc

$$\inf A_+(f) = \sup A_-(f).$$

Donc f est intégrable.