TdTp-3_cor

September 27, 2023

1 TP-TD n°3 : Complétude

1.1 Exercice 1

L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
2. $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$
3. $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$

Correction de 1.

une suite de Cauchy

Soit (u_n) une suite de Cauchy pour d. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ d(u_p, u_q) = |u_p^3 - u_q^3| \leq \varepsilon$$

Donc la suite (u_n^3) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle $|\ |$. Comme $(\mathbb{R}, |\ |)$ est complet alors (u_n^3) converge pour la la valeur absolue, notons α la limite, nous avons $|u_n^3 - \alpha|$ qui tend vers 0. Donc pour $u = \alpha^{\frac{1}{3}}$, nous avons $d(u_n, u) = |u_n^3 - u^3| = |u_n^3 - \alpha|$ qui tend vers 0, donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} u$. **Donc $\mathbb{R}$ est complet pour d.**

Correction de 2.

une suite définie par $u_n = -n$

Montrons que d ne définit pas une distance complète. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -n$, $(n \in \mathbb{N})$. Alors $d(u_p, u_q) = |\exp(-p) - \exp(-q)|$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\exp(-N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $\forall p, q \geq N$, on a $d(u_p, u_q) = |\exp(-p) - \exp(-q)| \leq \exp(-p) + \exp(-q) \leq 2\exp(-N) \leq \varepsilon$. Donc (u_n) est de Cauchy.

Supposons que (u_n) converge, notons $u \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $d(u_n, u) = |\exp(-n) - \exp(u)|$ tend vers 0 d'une part et vers $\exp(u)$ d'autre part. Donc $\exp(u) = 0$ ce qui est absurde pour $u \in \mathbb{R}$. **Donc $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour d.**

Correction de 3.

une suite de Cauchy

La fonction $\ln(1 + u)$ est continue et ne s'annule qu'en $u = 0$. Donc pour $\ln(1 + u)$ suffisamment petit nous avons u suffisamment petit et donc nous avons

$$\frac{1}{2}u \leq \ln(1 + u) \leq 2u$$

Donc pour (u_n) une suite de Cauchy pour d, la première inégalité prouve que (u_n) est une suite de Cauchy ce qui converge pour $|\ |$. La deuxième inégalité montre que (u_n) converge pour d. **Donc d définit une distance complète.**

2 Théorème du point fixe

2.1 Exercice 2

Soit $a_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application pour laquelle $\forall (x, y) \in E^2$ et $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq a_n \, d(x, y)$$

1. Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in E$. 1. Montrer que pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n\geq 0}$ converge vers p. 1. Montrer que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p, x_n) \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right) d(x_1, x_2)$$

Correction de 1.

Commençons par l'unicité, si x et y sont deux points fixes alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc la relation pour f s'écrit

$$d(x, y) \leq a_n \, d(x, y), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors (a_n) tend vers 0, donc il existe N assez grand avec $a_N < 1$, la relation devient

$$d(x, y) \leq a_N \, d(x, y) < d(x, y)$$

ce qui est contradictoire.

Correction de 2.

Soit $x_0 \in E$, notons $x_n = f^n(x_0)$. Alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a_n \, d(x_1, x_0), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On va montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq q \geq N, \ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Pour N fixés, évaluons $d(x_p, x_q)$.

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{k=q}^{p-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=q}^{p-1} a_k \, d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{k=q}^{p-1} a_k$$

De plus la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge donc la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ est de Cauchy et donc il existe N tel que pour tout $p \leq q \leq N$ on a

$$\sum_{k=q}^{p-1} a_k = S_{p-1} - S_{q-1} \leq \varepsilon$$

Donc

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_1, x_0)\varepsilon$$

Quitte à poser $\varepsilon_0 = d(x_1, x_0)\varepsilon$, ceci prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace est complet alors cette suite converge, notons α sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

À la limite, la suite (x_{n+1}) tend vers α, et comme f est continue (elle est M-lipschitziènne : $d(f(x), f(y)) \leq M\, d(x, y)$) alors $(f(x_n))$ converge vers $f(\alpha)$. Par unicité de la limite nous obtenons $\alpha = f(\alpha)$.

Donc f possède un point fixe, qui est unique et est obtenu en partant d'un point quelconque $x_0 \in E$ comme limite de $(f^n(x_0))$.

Correction de 3.

Il reste à estimer la vitesse de convergence, nous avons vu

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=q}^{p-1} a_k$$

On fait tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité alors

$$d(\alpha, x_q) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=q}^{+\infty} a_k$$

Ce qui était l'estimation recherchée.

2.2 Exercice 3

Soit (E, d) un espace métrique *complet* et (Λ, δ) un espace métrique et soit $f : E \times \Lambda \longrightarrow E$ une application *continue* telle qu'il existe $k \in [0, 1[$

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ d\left(f(x, \lambda), f(y, \lambda)\right) \leq k\, d(x, y)$$

1. Montrer que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \exists! x_\lambda \in E,\ f\left(x_\lambda, \lambda\right) = x_\lambda$$

1. Soit φ l'application définie sur Λ par

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \varphi(\lambda) = x_\lambda$$

montrer que φ est continue.

Correction de 1.

Soit $\lambda \in \Lambda$, l'application $f(\bullet, \lambda)$ est contractante. On peut donc appliquer le théorème du point fixe.

Correction de 2.

Soit $\lambda \in \Lambda$, en écrivant la continuité de f en (x_λ, λ), on obtient pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $\eta > 0$ tel que

$$\forall \mu \in \Lambda,\ [\delta(\lambda, \mu) \leq \eta] \implies \left[d\left(f\left(x_\lambda, \mu\right), f\left(x_\lambda, \lambda\right)\right) \leq \varepsilon\right]$$

En ce cas, pour μ vérifiant $\delta(\mu,\lambda)\leq\eta$, on obtient

$$d\left(\varphi(\mu),\varphi(\lambda)\right)=d\left(x_\mu,x_\lambda\right)=d\left(f\left(x_\mu,\mu\right),f\left(x_\lambda,\lambda\right)\right)\leq d\left(f\left(x_\mu,\mu\right),f\left(x_\lambda,\mu\right)\right)+d\left(f\left(x_\lambda,\mu\right),f\left(x_\lambda,\lambda\right)\right)\leq k\,d\left(x_\mu,x_\lambda\right)$$

et, donc

$$d\left(\varphi(\mu),\varphi(\lambda)\right)=d\left(x_\mu,x_\lambda\right)\leq\frac{\varepsilon}{1-k}$$

Ce qui montre la continuité de φ.

2.3 Exercice 4

On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue $f\in\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$

$$f(0)=\alpha \text{ et } \forall x\in[0,1],\ f'(x)=2\,f\left(x^3\right) \qquad (*)$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$.

On considère l'espace $E=\mathscr{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$, muni de la norme ($\beta>0$)

$$\forall f\in E,\ \|f\|_\beta\overset{\text{Def}}{=}\sup_{x\in[0,1]}\left(e^{-\beta\,x}\,|f(x)|\right)$$

1. Montrer que E est complet pour cette norme. 1. On considère l'application $\phi\,:\,E\longrightarrow E$ définie par

$$\forall f\in E,\ \phi(f)\ :\ x\longmapsto\alpha+\int_0^x 2\,f\left(t^3\right)\,\mathrm{d}t$$

Montrer, en choisissant bien β que ϕ est contractante pour la norme $\|\,\|_\beta$. 1. Montrer que $(*)$ admet une unique solution.

Correction de 1.

On a évidemment

$$\forall f\in E,\ e^{-\beta}\,\|f\|_{\infty,[-1,1]}\leq\|f\|_\beta\leq\|f\|_{\infty,[0,1]}$$

La norme β est équivalente à la norme $|\,\|_{\infty,[0,1]}$ pour laquelle E est complet. Donc, E est aussi complet pour la norme $\|\,\|_\beta$.

Correction de 2.

Soit $(f,g)\in E^2$, on a alors, pour $x\in[0,1]$

$$|\phi(f)(x)-\phi(g)(x)|=2\left|\int_0^x\left(f\left(t^3\right)-g\left(t^3\right)\right)\,\mathrm{d}t\right|\leq 2\,\|f-g\|_\beta\int_0^x e^{\beta\,t^3}\,\mathrm{d}t\leq 2\,\|f-g\|_\beta\int_0^x e^{\beta\,t}\,\mathrm{d}t$$

car $\beta>0$ et pour tout $t\in[0,1]$, $t^3\leq t$. Et, finalement

$$|\phi(f)(x)-\phi(g)(x)|\,e^{-\beta\,x}\leq 2\,\|f-g\|_\beta\int_0^x e^{-\beta\,(x-t)}\,\mathrm{d}t=2\,\|f-g\|_\beta\left[\frac{1}{\beta}\,e^{-\beta\,(x-t)}\right]_{t=0}^{t=x}\leq\frac{2}{\beta}\,\|f-g\|_\beta$$

D'où, en passant à la borne supérieure dans le terme de gauche

$$\|\phi(f)-\phi(g)\|_\beta\leq\frac{2}{\beta}\,\|f-g\|_\beta$$

N'importe quel $\beta > 2$ convient.

Correction de 3.

En prenant $\beta > 2$, ϕ est contractante et E est complet, le théorème du point fixe nous assure de l'existence et de l'unicité d'un $\psi \in E$, tel que

$$\forall x \in [0,1],\ \psi(x) = \alpha + 2\int_0^x \psi\left(t^3\right)\,\mathrm{d}t$$

Le théorème fondamental de l'analyse nous permet de dire que 1. ψ est de classe $\mathscr{C}^1$; 1. $\psi(0) = \alpha$; 1. et

$$\forall x \in [0,1],\ \psi'(x) = 2\,\psi\left(x^3\right)$$

C'est bien une solution de $(*)$. Cette solution est unique, car toute solution de $(*)$ sera un point fixe de ϕ.

3 Théorème de Baire

3.1 Exercice 5

Montrer qu'un fermé dénombrable non vide F de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *On pourra considérer* $\Delta_x = F \backslash \{x\}$.

Correction.

Montrer que Δ_x *est un ouvert dense.*

Par l'absurde supposons que F n'a aucun point isolé. Comme $\{x\}$ est un fermé alors $\Delta_x = F\backslash\{x\}$ est un ouvert de F. De plus comme le point x n'est pas isolé alors Δ_x est dense dans F. Maintenant on peut appliquer le théorème de Baire à F qui est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$. Donc une intersection dénombrable d'ouverts denses dans F est encore dense. Mais ici nous obtenons une contradiction car les Δ_x sont des ouverts denses, F est dénombrable mais

$$\bigcap_{x\in F} \Delta_x = \emptyset$$

Et l'ensemble vide n'est pas dense dans F.