Convergence monotone et dominée
Td-Tp 8

Novembre 2023

Exercice 1 : Théorème de Fubini

Soit la fonction

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}_+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{(1+x)\,(1+x\,y^2)}\end{array}\right.$$

1. f est-elle intégrable sur $(\mathbb{R}_+)^2$?

On applique Fubini-Tonelli.

(a) Pour $x>0$, la fonction $f(x,\bullet)$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) De plus, elle est positive et pour $Y \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{[0,Y]} f(x,\bullet)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^Y \frac{1}{(1+x)\,(1+x\,y^2)}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\arctan\left(\sqrt{x}\,y\right)\right]_{y=0}^{y=Y} \xrightarrow[Y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2\,\sqrt{x}\,(1+x)}$$

(c) La fonction

$$F_1\ :\ x \longmapsto \frac{\pi}{2\,\sqrt{x}\,(1+x)}$$

est continue, *positive* sur $]0,+\infty[$, donc mesurable sur $]0,+\infty[$ et comme

$$F_1(x) \underset{x\to0^*}{\sim} \frac{\pi}{2\,\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad F_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,x^{3/2}}$$

La fonction F_1 est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc f est intégrable sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^2} f\,\mathrm{d}\lambda\otimes\lambda = \int_{]0,+\infty[} F_1\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2\,\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

intégrale qui se calcule avec le changement de variable $t=\sqrt{x}$.

```
# Calculer F1
import sympy as sp
sp.init_printing()
x, y = sp.symbols(x y, positive=True)
# Facon 1
sp.integrate(1/((1+x)*(1+x*y**2)), (y, 0, sp.oo))
sp.integrate(_, (x, 0, sp.oo))
# Facon 2
sp.Integral(sp.pi/(2*sp.sqrt(x)*(1+x)), (x, 0, sp.oo)).transform(x, y**2)
_.doit()
```

2. Calculer F_1 et F_2 (notations du cours). Quel résultat obtient-on ?

Dans l'autre sens, on obtient successivement.

```
# Calculer F2
```

```
(1/((1+x)*(1+x*y**2))).apart(x)
sp.integrate(y**2/((y-1)*(y+1)*(x*y**2+1)), x)-sp.integrate(1/((x+1)*(y-1)*(
sp.limit(_, x, sp.oo)-sp.limit(_, x, 0)
```

Ainsi,

$$F_2 = \frac{2\,\ln(y)}{y^2-1}$$

On trouve donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\,\ln(y)}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 2 : Théorème de Fubini

1. Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$.

Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0,1]\times]0,+\infty[} |e^{-y}\sin(2xy)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \int_0^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y = 1 < +\infty$$

ce qui prouve que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$.

2. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}\sin^2(y)e^{-y}\,\mathrm{d}y$$

Par question 1, on sait que F_1est définie et intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_{[0,1]} F_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]}\int_{]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \frac{2x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 5}{4}$$

F_2 est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$, et on a

$$\int_{]0,+\infty[} F_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[}\int_{[0,1]} e^{-y}\sin(2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\int_{[0,1]} \sin(2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\frac{\sin(y)^2}{y}\,\mathrm{d}y$$

Le théorème de Fubini-Lebesgue donne alors la valeur de l'intégrale de cette fonction :

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-y}\frac{\sin(y)^2}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\ln(5)}{4}$$

Exercice 3 : Changement de variable

Justifier proprement les changements de variables cylindriques et sphériques.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe.

   L'application φ :

$$\begin{cases} \mathbb{R}\times[0,\pi]\times\mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta,z) & \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

On vérifie le calcul du jacobien. Alors, le determinant de φ est

$$\det\left(\mathrm{J}_\varphi(\rho,\theta,z)\right) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \neq 0$$

φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Alors pour toute fonction f continue sur $U = \mathbb{R}^* \times]0,\pi[\times \mathbb{R}$, on a

$$\iiint_{(x,y,z)\in\varphi(U)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{(\rho,\theta,z)\in U} |\rho|\, f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche $T(z)$.

2. Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.
   L'application φ :

$$\begin{cases} \mathbb{R}\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi] & \to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) & \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

   ou

$$\begin{cases} \mathbb{R}\times[-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) & \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \end{cases}$$

   On vérifie le calcul du jacobien. On a

$$\det\left(\mathrm{J}_\varphi(r,\theta,\phi)\right) = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r^2\sin(\theta) \neq 0$$

   pour $(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^* \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$, ou

$$\det\left(\mathrm{J}_\varphi(r,\theta,\phi)\right) = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & r\cos(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin(\phi)\times\left(\cos(\phi)\sin(\phi)+\cos^2(\phi)\right) = r^2\cos(\phi) \neq 0$$

   pour $(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^* \times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Alors l'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

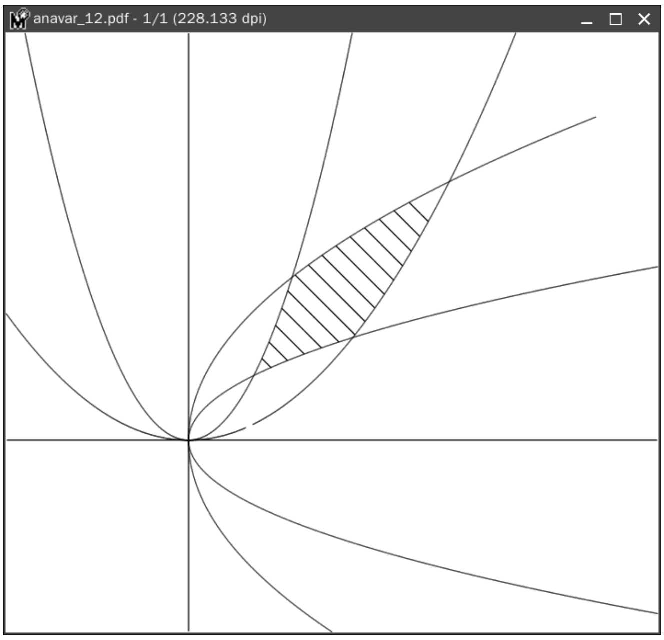
$$\iiint_{(x,y,z)\in\varphi(U)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{(r,\theta,\phi)\in U} |r^2\,\sin(\theta)|\, f(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Exercice 4 : Changement de variable

Soit $0 < p_1 < p_2$ et $0 < q_1 < q_2$ des réels, en utilisant le changement de variable

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x^2}{2\,y}, \frac{y^2}{2\,x}\right)$$

calculer l'aire de la surface comprise entre les paraboles $y^2 = 2\,p_1\,x$, $y^2 = 2\,p_2\,x$ d'une part et $x^2 = 2\,q_1\,y$ et $x^2 = 2\,q_2\,y$.



On pose la fonction

$$\varphi : (q, p) \longmapsto (x, y)$$

et

$$\phi : (x, y) \longmapsto (q, p) = \left(\frac{x^2}{2\,y}, \frac{y^2}{2\,x}\right)$$

1. Le domaine défini est fermé et borné, il est donc mesurable de mesure finie.
2. Montrons d'abord que le changement de variables proposé est un difféomorphisme. Pour cela, il faut montrer qu'en tout point le jacobien est non nul et que si $x > 0$, $y > 0$ il est alors injectif.

```
# Jacobien
phi = sp.Lambda((x,y), sp.Matrix([x**2/(2*y), y**2/(2*x)]))
phi(x,y).jacobian(sp.Matrix([x, y]))
# Determinatnt
sp.det(_).simplify()
```

$$\det\left(\mathrm{J}_\phi(x, y)\right) = \begin{vmatrix} \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2\,y^2} \\ -\frac{y^2}{2\,x^2} & \frac{y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

```
# Injectivite
p, q = sp.symbols(p q, positive=True)
sp.solve(phi(x,y)-sp.Matrix([q, p]), [x, y])
```

$$\begin{cases} x & = 2\,\sqrt[3]{p}\,q^{\frac{2}{3}} \\ y & = 2p^{\frac{2}{3}}\,\sqrt[3]{q} \end{cases}$$

En appliquant le théorème de changement de variables, on obtient immédiatement, en notant

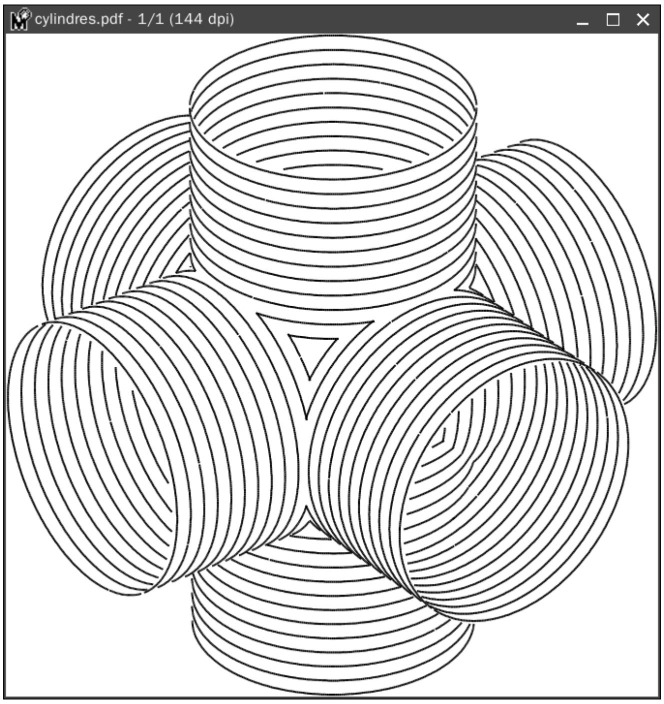
Δ le domaine hachuré sur la figure

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} 1 \, \mathrm{d}\lambda \otimes \lambda &= \int_{[q_1,q_2]\times[p_1,p_2]} 1 \, \left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right| \, \mathrm{d}\lambda \otimes \lambda \\ &= \int_{[q_1,q_2]\times[p_1,p_2]} 1 \, \left|\det\left(J_{\phi^{-1}}\right)\right| \, \mathrm{d}\lambda \otimes \lambda = \frac{4}{3}\left(p_2 - p_1\right)\left(q_2 - q_1\right)\end{aligned}$$

Exercice 5

Calculer le volume de l'intersection des 3 cylindres d'équations

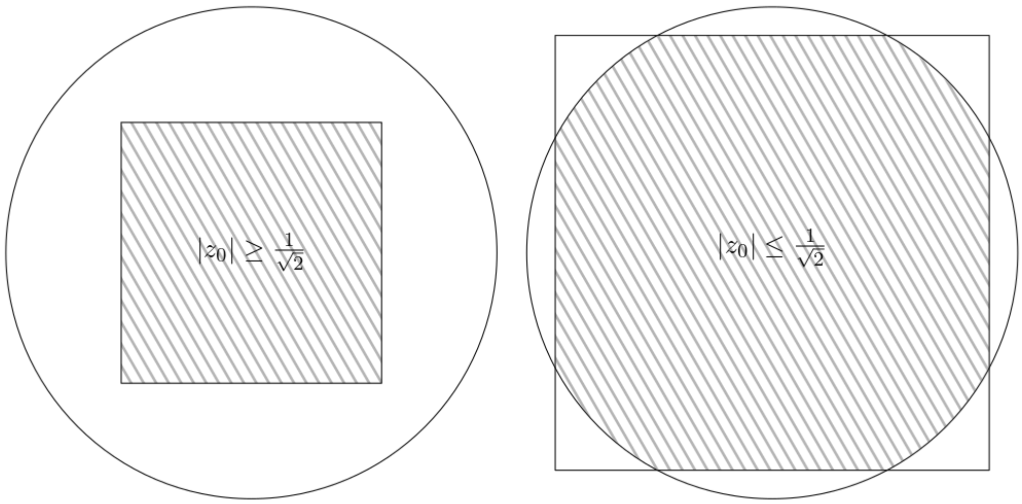
$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad y^2 + z^2 \leq 1$$



1. Le domaine Δ défini est fermé et borné, il est donc mesurable et de mesure finie.
2. On peut alors écrire avec le théorème de Fubini-Tonelli (car $1 > 0$)

$$\int_{\Delta} 1 \, \mathrm{d}\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \int_{z_0=-1}^{z_0=1} \left(\int_{\Delta \cap \{z=z_0\}} 1 \, \mathrm{d}\lambda \otimes \lambda \right) \mathrm{d}z_0$$

   (a) *Observons $\Delta \cap \{z = z_0\}$.* C'est l'intersection du disque $x^2 + y^2 \leq 1$ avec le carré $\left[-\sqrt{1 - z_0^2}, \sqrt{1 - z_0^2}\right]^2$.

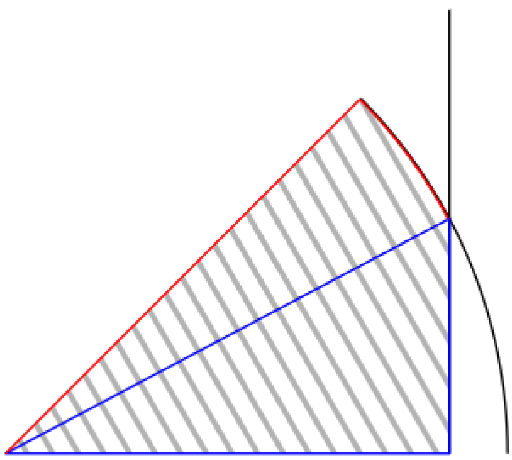


(b) Si $2\,\left(1 - z_0^2\right) \leq 1$, alors (aire du carré)

$$\int_{\Delta \cap \{z = z_0\}} 1 \,\mathrm{d}\lambda \otimes \lambda = 4\,\left(1 - z_0^2\right)$$

(c) Sinon, il faut calculer l'aire de l'intersection du carré et du disque... Pour cela, le plus simple est de découper en 8 morceaux de même aire et de calculer l'aire du morceau défini par

$$(x, y) \in \Delta \cap \{z = z_0\}, \quad x \geq 0, \quad x \leq y$$



qui est la réunion d'un triangle (en bleu) d'aire

$$\frac{1}{2}\,|z_0|\,\sqrt{1 - z_0^2}$$

et d'un secteur (en rouge) d'aire

$$\frac{1}{2}\,\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(|z_0|\right)\right)$$

Le volume cherché est donc (pour $z_0 \in [-1, 1]$)

$$8 \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(z_0\,\sqrt{1 - z_0^2} + \frac{\pi}{4} - \arctan(z_0)\right)\,\mathrm{d}z_0 + 2 \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 4\,\left(1 - z_0^2\right)\,\mathrm{d}z_0$$