

MA3305P – Semaine 01

24 février 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manipuler des calculs de différentielles.
On rappelle le résultat suivant du cours d'algèbre linéaire :

Théorème : Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On définit les applications suivantes :

$$\|M\|_F = \text{Tr}({}^tM \cdot M), \quad \|M\|_2 = \sup_{|x|=1} |Mx|$$

Alors ces deux applications sont des normes d'algèbre. C'est-à-dire que ce sont des normes sur l'espace des matrices, et qu'elles satisfont de plus la propriété suivante :

$$\forall (M, N) \in M_n(\mathbb{R})^2, \quad \|MN\| \leq \|M\| \times \|N\|$$

On admet aussi le théorème de topologie que nous montrerons à la fin de l'année :

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

En particulier, on peut écrire les $o(|h|)$ pour n'importe quelle norme.

Exercice 1 :

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) et φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ A \mapsto {}^tA \cdot A \end{cases}$$

1. Montrer que l'application φ est de classe \mathcal{C}^∞ .

C'est le produit d'applications de classe \mathcal{C}^∞ qui sont :

$$A \mapsto {}^tA \text{ et } A \mapsto A,$$

qui sont toutes deux linéaires, donc de classe \mathcal{C}^∞ .

2. Calculer la différentielle de φ en A_0 .

On fait un développement limité au voisinage de A_0 . Soit $H \in E$, on a :

$$\varphi(A_0 + H) = {}^t(A_0 + H) \cdot (A_0 + H) = \varphi(A_0) + \underbrace{{}^tH \cdot A_0 + A_0 \cdot H}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{{}^tH \cdot H}_{=o(|H|)}.$$

Finalement :

$$d\varphi_{A_0}(H) = {}^tH \cdot A_0 + A_0 \cdot H.$$

3. Calculer la différentielle seconde de φ en A_0 .

Soit H et K dans E , on a alors :

$$d\varphi_{A_0+H}(K) = {}^tK \cdot (A_0 + H) + {}^t(A_0 + H) \cdot K = d\varphi_{A_0}(K) + {}^tK \cdot H + {}^tH \cdot K.$$

Finalement :

$$d^2\varphi_{A_0}(H, K) = {}^tH \cdot K + {}^tK \cdot H.$$

Exercice 2 :

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Faisons un développement limité de f au voisinage de A . On obtient pour $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$(A + H)^3 = \underbrace{A^3}_{=f(A)} + \underbrace{H \cdot A^2 + A \cdot H \cdot A + A^2 \cdot H}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{H^2 \cdot A + H \cdot A \cdot H + A \cdot H^2 + H^3}_{=R(H)=o(|H|)}.$$

En effet, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes, choisissons une norme d'algèbre. On a alors :

$$|R(H)| \leq 3|A| \times |H|^2 + |H|^3 = O(|H|^2) = o(|H|).$$

On a donc la différentiabilité de f en A et :

$$\boxed{df_A : H \mapsto H \cdot A^2 + A \cdot H \cdot A + A^2 \cdot H.}$$

2. Montrer que f est deux fois différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle seconde en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Faisons un développement limité de $A \mapsto df_A$, on a donc, pour $(H, K) \in M_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned} df_{A+H}(K) &= K \cdot (A + H)^2 + (A + H) \cdot K \cdot (A + H) + (A + H)^2 \cdot K \\ &= df_A(K) + \underbrace{K \cdot H \cdot A + K \cdot A \cdot H + H \cdot K \cdot A + A \cdot K \cdot H + H \cdot A \cdot K + A \cdot H \cdot H}_{\text{partie linéaire en } K \text{ et en } H} + \\ &\quad \underbrace{K \cdot H^2 + H \cdot K \cdot H + H^2 \cdot K}_{=o(|H|)}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{d^2f_A : (H, K) \mapsto H \cdot K \cdot A + H \cdot A \cdot K + K \cdot H \cdot A + A \cdot H \cdot K + K \cdot A \cdot H + A \cdot K \cdot H.}$$

3. Vérifier vos résultats avec Python (voire le Notebook sur Moodle).

Voir le notebook sur Moodle.

Exercice 3 :

L'application suivante est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ? De classe \mathcal{C}^1 ?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right), y^2 \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(On pourra s'aider de Python pour le calcul des dérivées partielles de f).

- ▷ L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car ses fonctions coordonnées le sont.
- ▷ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$. Donc $f(x, y) = (0, 0) + o(|(x, y)|)$.
Donc f est différentiable en 0 et $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.
- ▷ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(2x \cos\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right) + \frac{2x^3}{(x^2+y^4)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right), -\frac{4x^3y^2}{(x^4+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) \right).$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \left(2x \cos\left(\frac{1}{x^2+x^4}\right) + \frac{2}{x(1+x^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+x^4}\right), \frac{-4x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{1}{x^4+x^2}\right) \right).$$

Le terme $2x \cos\left(\frac{1}{x^2+x^4}\right)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$, et le terme $\frac{2}{x(1+x^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+x^4}\right)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue en $(0, 0)$.
Donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4 :

Soit $f : E \rightarrow E$ bijective telle que f et f^{-1} soient différentiables. Pour $x \in E$, déterminer $d(f^{-1})_x$ en fonction de df .

On a $f \circ f^{-1} = \text{Id}_E$. D'après la formule de différentiation des composées, on a pour $x \in E$:

$$df_{f^{-1}(x)} \circ d(f^{-1})_x = d(\text{Id}_E)_x = \text{Id}_E$$

De même, avec $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, on obtient pour tout $y \in E$:

$$d(f^{-1})_{f(y)} \circ df_y = \text{Id}_E$$

Donc, pour $y = f^{-1}(x)$, on a

$$d(f^{-1})_x \circ df_{f^{-1}(x)} = \text{Id}_E.$$

Ces deux différentielles sont donc inversibles et on a

$$d(f^{-1})_x = (df_{f^{-1}(x)})^{-1}.$$

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . En admettant que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, calculer la différentielle du déterminant sur l'ensemble

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$ des matrices inversibles. (On pourra commencer par calculer la différentielle de la matrice identité).

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, de colonnes (H_1, \dots, H_n) . Alors par n -linéarité du déterminant,

$$\begin{aligned} \det(I_n + H) &= \det(e_1 + H_1, \dots, e_n + H_n) \\ &= \det(e_1, \dots, e_n) + \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, e_{i-1}, H_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i < j} \det(e_1, \dots, e_{i-1}, H_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, H_j, e_{j+1}, \dots, e_n) + \dots}_{\text{terme contenant plusieurs colonnes}} \\ &= \det I_n + \sum_{i=1}^n h_{i,i} + O(|H|^2) \\ &= \det I_n + \text{tr}(H) + o(|H|). \end{aligned}$$

L'application trace étant linéaire, on a :

$$\det \text{ est différentiable en } I_n \text{ et } d(\det)_{I_n} = \text{tr}.$$

▷ Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) \\ &= \det(A) (\det(I_n) + \text{tr}(A^{-1}H) + o(|A^{-1}H|)) \\ &= \det(A) + \text{tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(|H|) \\ &= \det(A) + \text{tr}((\text{com}(A))^T H) + o(|H|) \end{aligned}$$

Comme l'application $H \mapsto \text{tr}((\text{com}(A))^T H)$ est linéaire, l'application \det est différentiable en A de différentielle $H \mapsto \text{tr}((\text{com}(A))^T H)$. On a :

$$d(\det)_A : H \mapsto \text{tr}((\text{com}(A))^T H).$$

Remarque : comme dans la question 2.(a), on aurait pu voir que si les colonnes de A sont A_1, \dots, A_n et les colonnes de H sont H_1, \dots, H_n , alors

$$d(\det)_A(H) = \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, A_{i-1}, H_i, A_{i+1}, \dots, A_n).$$

Il est cependant difficile d'en déduire l'expression de $d(\det)_A$ qui utilise la trace.

Exercice 6 :

Soit E un espace euclidien. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $|\cdot|$ sa norme. Soit O un ouvert de E et soit f et $g : O \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables sur O , soit enfin φ une application dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On rappelle le théorème de représentation de Riesz (Théorème 4.3 page 31 du poly d'algèbre linéaire du S1) :

Théorème 2 (de représentation de Riesz). *Soit E un espace euclidien, et soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur E . Alors,*

$$\exists! v \in E, \forall x \in E, f(x) = \langle v, x \rangle$$

Dans le cas où la forme linéaire est la différentielle d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (pas forcément linéaire), on note $\text{grad}_x f$ le vecteur v dans le théorème de représentation de Riesz, que l'on

appelle gradient de f au point x . On a donc :

$$\forall x \in O, \forall h \in E, df_x(h) = \langle \text{grad}_x f, h \rangle.$$

4. Calculer pour $x \in O$:

$$\text{grad}_x(f \times g).$$

On sait (différentielle du produit scalaire) que l'on a pour $x \in O$ et $h \in E$:

$$d(f \times g)_x(h) = f(x) \times dg_x(h) + df_x(h) \times g(x)$$

En remplaçant par les gradients, on a :

$$\text{grad}_x(f \times g) = f(x) \cdot \text{grad}_x g + g(x) \cdot \text{grad}_x f$$

5. Calculer pour $x \in O$:

$$\text{grad}_x(\varphi \circ f).$$

On a pour $x \in O$ et $h \in E$:

$$d(\varphi \circ f)_x(h) = d\varphi_{f(x)}(df_x(h)).$$

Par ailleurs, comme φ est une fonction de la variable réelle (il n'y a qu'une variable), on a pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$:

$$d\varphi_t(k) = k \times \varphi'(t)$$

Finalement :

$$\text{grad}_x(\varphi \circ f) = \varphi'(f(x)) \cdot \text{grad}_x f$$

On suppose dans la suite de cet exercice que $E = M_n(\mathbb{R})$.

On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A \cdot B).$$

6. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in GL_n(\mathbb{R})$.

On a montré en cours que :

$$d(\det)_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com}(A) \cdot H).$$

Le gradient est donc immédiatement :

$$\text{grad}_A \det = \text{Com}(A).$$

► On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par ($S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$) :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A \cdot S \cdot B).$$

7. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in M_n(\mathbb{R})$.

Le calcul de la différentielle ne change pas, mais le calcul du gradient, lui, dépend du choix du produit scalaire. En reprenant la formule et en écrivant :

$$d(\det)_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com}(A) \cdot S^{-1} \cdot S \cdot H),$$

et en utilisant

$${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A,$$

il vient

$$\text{grad}_A \det = S^{-1} \cdot \text{Com}(A).$$

Exercice 7 :

Soit E un espace euclidien, nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $|\cdot|$ sa norme associée. Soit $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle sur E . On considère l'application :

$$g : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \times \exp(-|x|^2). \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur E .

Nous sommes en dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues. Par ailleurs, la norme est toujours continue par rapport à elle-même, l'exponentielle est aussi continue, donc g , produit et composée de fonctions continues est continue sur E .

2. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $x_0 \in E$.

Calculons pour $x \in E$ et $h \in E$, $g(x+h)$ et faisons un développement limité au voisinage de $h = 0_E$.

$$g(x+h) = f(x+h) \times \exp(-|x+h|^2) = (f(x) + f(h)) \times \exp(-|x|^2 - 2\langle x, h \rangle - |h|^2).$$

Or, on connaît un développement limité de l'exponentielle au voisinage d'un point $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{t+\delta} = e^t \times e^\delta = e^t \times (1 + \delta + o(\delta)).$$

Finalement :

$$g(x+h) = g(x) + f(h) \times \exp(-|x|^2) - 2f(x) \times \exp(-|x|^2) \times \langle x, h \rangle + o(|h|).$$

Soit

$$\text{dg}_x : h \mapsto f(h) \times \exp(-|x|^2) - 2f(x) \times \exp(-|x|^2) \times \langle x, h \rangle.$$

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , croissante et vérifiant $f(0) = 1$. On considère \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $|\cdot|$. On pose $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x) = f(|x|) \cdot x$$

1. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et déterminer sa différentielle.

▷ L'application $x \mapsto |x|$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . Par produit et composée d'applications de classe \mathcal{C}^1 ,

$$F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

▷ Comme $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, la différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ de la

norme $|\cdot|$ est

$$h \mapsto \frac{2\langle x, h \rangle}{2\sqrt{\langle x, x \rangle}} = \frac{\langle x, h \rangle}{|x|}.$$

▷ On en déduit, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$:

$$dF_x : h \mapsto \frac{\langle x, h \rangle}{|x|} f'(|x|).x + f(|x|).h$$

2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et déterminer sa différentielle en $0_{\mathbb{R}^n}$.

▷ Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$F(h) = f(|h|).h = (f(0) + o_{h \rightarrow 0}(1)).h = h + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Comme l'application $h \mapsto h$ est linéaire,

$$F \text{ est différentiable en } 0 \text{ et } dF_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

▷ Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors

$$\begin{aligned} |dF_x(h) - dF_0(h)| &= \left| \frac{\langle x, h \rangle}{|x|} f'(|x|).x + (f(|x|) - 1).h \right| \\ &\leq |x| \times |f'(|x|)| \times |h| + |f(|x|) - 1| \times |h| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc la différentielle de F est continue en 0. D'après la question précédente,

$$F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

3. Montrer que

$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle dF_x(h), h \rangle \geq f(|x|) \times |h|^2.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

▷ Si $x = 0$, alors $\langle dF_x(h), h \rangle = |h|^2$ et $f(|x|) \times |h|^2 = |h|^2$, donc l'inégalité est vraie.

▷ Si $x \neq 0$, comme f est croissante, $f'(|x|)$ est positif et on a :

$$\langle dF_x(h), h \rangle = \underbrace{\frac{(\langle x, h \rangle)^2}{|x|} f'(|x|).x + f(|x|)|h|^2}_{\geq 0},$$

d'où

$$\langle dF_x(h), h \rangle \geq f(|x|) \times |h|^2.$$

4. Montrer que $t \mapsto t \times f(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , puis montrer que F est injective.

▷ Posons $g : t \mapsto t \times f(t)$, définie sur \mathbb{R}^+ . L'application g est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Comme f est croissante, on a $f(t) \geq 1$ et $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$g'(t) = f(t) + t \times f'(t) \geq 1 > 0.$$

g est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $F(x) = F(y)$.

▷ Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $F(x) = F(y) = 0$. Comme la fonction f n'est jamais nulle, on en déduit $x = y = 0$.

▷ Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$: On a $F(x) = |x|f(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} = g(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$. Donc $g(|x|) = |F(x)|$. De même on obtient

$$g(y) = |F(y)| = |F(x)| = g(x).$$

Comme g est strictement croissante, on a $|y| = |x|$, et donc, f ne s'annulant pas :

$$y = \frac{1}{f(|y|)} \cdot F(y) = \frac{1}{f(|x|)} \cdot F(x) = x$$

F est injective sur \mathbb{R}^n .

5. Soit $y \in \mathbb{R}^n$; on définit l'application $\psi : t \mapsto |F(t.y)|$. Montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\psi(t) = |y|$, puis montrer que F est surjective.

▷ On a $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = |f(|y|)| \times |y|$. Comme f est croissante, on obtient $\psi(1) \geq |y|$. Comme ψ est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\psi(t) = |y|$.

▷ On a alors $F(t.y) = (f(|t.y|) \times t).y$ et donc, comme f est positive,

$$|y| = |F(t.y)| = f(|t.y|) \times t \times |y|.$$

▷ Si $y \neq 0$, cela fournit $f(|t.y|) \times t = 1$ et donc $F(t.y) = y$. Si $y = 0$, alors $F(0) = 0 = y$.

f est surjective.