Suites et Séries – TD$_8$

31 octobre - 1 novembre 2021

Exercice 1. (Nature de séries à termes quelconques)
Donner la nature de la série $\sum_n u_n$, avec :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$
2. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$
3. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
4. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1!-2!+3!-\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^s}$ où $s \in \mathbb{C}$

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, et la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Donc d'après le critère des séries alternées :

   $$\boxed{\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \text{ converge.}}$$

   Dans la suite, pour faciliter l'écriture, on va formuler cette réponse comme suit :
   La suite $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère des séries alternées $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

2. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Comme $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit que :

   $$\boxed{\sum_n \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n} \text{ diverge}}$$

3. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

   Pour tout $n \geqslant 1$, on a

   $$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \frac{(-1)^n}{16n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{=a_n} - \underbrace{\frac{1}{8n}}_{=b_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{16n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{=c_n} \end{aligned}$$

▷ La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_n a_n$ converge.

▷ $|c_n| = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série à termes positifs convergente, donc par critère de comparaison, $\sum_n c_n$ converge absolument, donc converge.

▷ Puisque $\sum_n a_n$ converge, $\sum_n c_n$ converge et $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{8n}$ diverge :

$$\boxed{\sum_n \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right) \text{ diverge.}}$$

On peut se contenter du développement de u_n à l'ordre $\frac{1}{n}$:

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{=a_n} \underbrace{- \frac{1}{8n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{=b_n}$$

Dans ce cas on a :

— $\sum_n a_n$ *converge, d'après le critère des séries alternées.*

— $b_n = -\frac{1}{8n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n}$

Par équivalence des séries à termes positifs, $-\sum_n b_n$ diverge, donc $\sum_n b_n$ diverge.

On en déduit que $\sum_n u_n$ diverge.

4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

▷ Si $\alpha \leqslant 0$, le terme u_n n'est pas bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ Si $\alpha > 0$, alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{=b_n}$.

La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. Comme :

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2\alpha}},$$

alors par comparaison de séries à termes positifs :

$$\sum_n b_n \text{ converge si et seulement si } \sum_n \frac{1}{2n^{2\alpha}} \text{ converge, si et seulement si } 2\alpha > 1.$$

Par somme :

$$\boxed{\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

5. $u_n = \dfrac{1!-2!+3!-\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!}$.

   On a, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1!-2!+3!-\cdots(-1)^{n-3}(n-2)!}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!} \\ &= \underbrace{\frac{1!-2!+3!-\cdots(-1)^{n-3}(n-2)!}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n(n+1)}}_{a_n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}}_{b_n}. \end{aligned}$$

   $\triangleright$ On a alors

$$|a_n| \leqslant \frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!}{(n+1)!} + \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{(n-2)\times(n-2)!}{(n+1)!} + \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{2}{n(n+1)},$$

   donc la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente.

   $\triangleright$ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_n b_n$ converge.

   $\triangleright$ Par somme,

$$\boxed{\sum_n \frac{1!-2!+3!-\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!} \text{ converge.}}$$

6. $u_n = \dfrac{1}{n^s}$ où $s \in \mathbb{C}$.

   Calculons le module de u_n :

$$|u_n| = \frac{1}{\left|n^{\mathrm{Re}(s)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(s)}\right|} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

   — Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\sum_n \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ est une série de Riemann convergente. La série $\sum_n u_n$ converge absolument, elle est donc convergente.

   — Si $\mathrm{Re}(s) \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe qui ne tend pas vers 0, la série $\sum_n u_n$ est donc grossièrement divergente.

   Supposons maintenant que $\mathrm{Re}(s) \in]0,1]$.

   — Si $\mathrm{Im}(s) = 0$, s est un nombre réel, la série $\sum_n u_n$ diverge (série de Riemann).

   — Si $\mathrm{Im}(s) \neq 0$. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

L'objectif premier est de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On va obtenir cela par critère de domination.

On a :

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^s} - \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k^s} - \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s}\right)\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

On pose : $h:\ z\mapsto \dfrac{1}{z^s}$. Alors $h':\ z\mapsto \dfrac{-s}{z^{s+1}}$, et on peut écrire :

$$\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} = h(k) - h(t) = \int_t^k h'(u)\mathrm{d}u = \int_k^t \frac{s}{u^{s+1}}\mathrm{d}u$$

Cela veut dire :

$$\begin{aligned}
|v_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1}\left(\int_k^t \frac{s}{u^{s+1}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\int_k^t \left|\frac{s}{u^{s+1}}\right|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|s|}{k^{\mathrm{Re}(s)+1}}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Re}(s) > 0$, alors $\mathrm{Re}(s)+1 > 1$, la série $\displaystyle\sum_k \frac{|s|}{k^{\mathrm{Re}(s)+1}}$ est donc convergente (série de Riemann). Cela veut dire, par domination, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est absolument convergente, donc convergente. Notons ℓ sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Maintenant, par l'absurde on va montrer que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^s}$ est divergente.

Supposons que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^s}$ est convergente vers une limite ℓ' dans $\mathbb{R}$. Alors, d'après la définition de v_n :

$$\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} - v_n$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \ell' - \ell \in \mathbb{R}$$

Or, $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{(n+1)^{1-s}-1}{1-s}$ n'admet pas de limite finie dans $\mathbb{R}$ lorsque $n\to+\infty$, car $\mathrm{Im}(s)\neq 0$. Absurde.

On en déduit que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^s}$ diverge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{1}{n^s},\ s \in \mathbb{C} \text{ converge si, et seulement si, } \mathrm{Re}(s) > 1}$$

Exercice 2. (Avec calcul de somme)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

略. C'est une série de Riemann alternée.

2. En utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Soit $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
S_{2n}(u) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Le développement asymptotique de la série harmonique s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
S_{2n}(u) &= \ln(2n) - \ln n + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\
&= \ln 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_{2n+1}(u) = S_{2n}(u) + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 + 0 = \ln 2$$

Conclusion : la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln 2$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$$

3. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

La série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ converge absolument, donc converge. (On peut aussi appliquer le critère des séries alternées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{k}}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}
\end{aligned}$$

On retrouve alors les sommes partielles de la série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont la somme est égale à $\ln 2$.

On a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 2\ln 2 - 1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 2\ln 2 - 1}$$

Exercice 3. (Produit de Cauchy)

1. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même diverge.

2. Pour un nombre complexe z tel que $|z| < 1$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$. (Il faut d'abord justifier l'existence de ces deux sommes).

1. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Alors, pour tout entier non nul n, le terme général du produit de Cauchy est :

$$\begin{aligned}
v_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} \\
&= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}
\end{aligned}$$

Or $k(n-k) = -k^2 + nk = -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} \leqslant \frac{n^2}{4}$. Donc,

$$|v_n| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n^2/4)}} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = 2\frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0,

$$\boxed{\text{La série } \sum_n v_n \text{ est grossièrement divergente.}}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
   — $\sum_n nz^n$:

   Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'une part, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente (série géométrique), avec $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

   D'autre part, le terme général du produit de Cauchy de $\sum_n u_n$ par elle-même s'écrit :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} z^n = (n+1)z^n = nz^n + z^n$$

   Comme $\sum_n u_n$ est absolument convergente, alors, par théorème, la série $\sum_n v_n$ converge absolument, de plus :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(nz^n + z^n)$$

   Par convergence de $\sum_n z^n$, on peut déduire que $\sum_n nz^n$ converge, et sa somme est donnée par :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}}$$

   — $\sum_n n^2 z^n$:

   On considère les deux suites $u_n = z^n$ et $v_n = nz^n$. Le terme général du produit de Cauchy de $\sum_n u_n$ par $\sum_n v_n$ s'écrit :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} z^k (n-k) z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2} z^n = \frac{1}{2}n^2 z^n + \frac{1}{2}nz^n$$

   Comme $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_n w_n$ est aussi absolument convergente, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{z}{(1-z)^3}$$

D'autre part :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2 z^n + nz^n)$$

Comme la série $\sum_n nz^n$ converge, alors on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$$

Ce qui donne

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}}$$

Exercice 4. (Exercice de synthèse)

On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

1. Étudier, suivant la valeur de α, la nature de la série $\sum_n u_n$.

▷ Si $\alpha = 0$, la série est mal définie car $n^\alpha + (-1)^n = 0$ quand n est impair.
▷ Si $\alpha < 0$, la série est grossièrement divergente.
▷ Si $\alpha > 0$, on effectue un développement asymptotique pour étudier la nature de la série. On a

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}}_{=v_n} + \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{=w_n}$$

$\sum_n v_n$ converge d'après le critère des séries alternées. De plus, on a

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\sum_n w_n \text{ converge } \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

▷ Puisque $\sum_n v_n$ converge, on a : $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\sum_n w_n$ converge. Finalement,

$$\boxed{\sum_n u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

2. Pour $\alpha = 1$, donner un équivalent de $R_n(u)$.

Le terme u_n change de signe. Il n'est donc pas possible d'utiliser les théorèmes sur la sommation terme par terme, ou l'équivalence entre reste et intégrale, qui ne sont valables que pour les séries à termes positifs (ou à termes de signe constant). On va donc réécrire le reste en utilisant une sommation par paquet de longueur 2 afin de trouver un terme positif, dont on peut donner un équivalent par intégrale.

Soit $n \geqslant 2$. Comme $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a par sommation par paquets de longueur bornée :

$$R_{2n}(u) = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{2k+1} + u_{2k+2})$$

$\triangleright$ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ posons $x_k = u_{2k+1} + u_{2k+2}$. On a

$$x_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4k^2}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_k x_k$ est convergente et

$$R_{2n}(u) = R_{n-1}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{4k^2}$$

$\triangleright$ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ici on va s'inspirer de la preuve du théorème de comparaison série-intégrale pour donner un équivalent à $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$

Pour tout $k \geqslant n$ on a :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Donc par sommation terme par terme pour k allant de n jusqu'à $+\infty$ (ce qu'on a le droit de faire, car $\sum\limits_k \dfrac{1}{k^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ convergent) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$, alors on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

D'où, en divisant par $\dfrac{1}{n}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve d'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

On en déduit :

$$R_{2n}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4n}$$

▷ On a donc aussi

$$R_{2n+1}(u) = R_{2n}(u) - \frac{1}{2n} = \frac{3}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$$

▷ Finalement, on peut regrouper les deux expressions sous la forme :

$$\boxed{R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n + 2}{2n}}$$

On peut se référer au polycopié p.63 pour plus de détails sur l'obtention d'un équivalent du reste par comparaison série-intégrale.

Exercice 5. (Sommation par paquets)

Étudier la nature de la série $\sum_n u_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + \sin(2n\pi/3)}.$$

Indication : faire une sommation par paquets de longueur 3.

Lorsqu'une partie du terme général est périodique de période p, il est souvent intéressant de faire une sommation par paquets de longueur p.

▷ Pour $n \geqslant 1$, On a

$$\begin{aligned} u_{3n} &= \frac{(-1)^n}{\ln(3n)}\,; \\ u_{3n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(3n+1) + \sqrt{3}/2}\,; \\ u_{3n+2} &= \frac{(-1)^n}{\ln(3n+2) - \sqrt{3}/2}\,. \end{aligned}$$

Les suites $\left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)_{n\geqslant 1}$, $\left(\frac{1}{\ln(3n+1)+\sqrt{3}/2}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{\ln(3n+2)-\sqrt{3}/2}\right)_{n\geqslant 1}$ sont décroissantes et tendent vers 0, donc d'après le critère des séries alternées les séries $\sum_n u_{3n}$, $\sum_n u_{3n+1}$ et $\sum_n u_{3n+2}$ sont convergentes.

▷ Par somme, la série $\sum_n (u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2})$ est convergente.

▷ De plus, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par sommation par paquets **de longueur bornée** :

$$\boxed{\sum_n u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 6. (Une inégalité célèbre)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Quel est le nom de cette inégalité ?

Cette formule est très utile pour trouver des inégalités entre séries. Il faut bien la connaître !

Il s'agit de **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictements positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $a_k = \sqrt{u_k}$ et $b_k = \dfrac{1}{k\sqrt{u_k}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k}}.$$

▷ Supposons que $\sum_n u_n$ converge. D'après l'inégalité précédente, si $\sum_n v_n$ converge, alors la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Si } \sum_n u_n \text{ converge, alors } \sum_n v_n \text{ diverge.}}$$

3. Étudier le cas où $\sum_n u_n$ diverge.

▷ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors $\sum_n u_n$ diverge et $\sum_n v_n = \sum_n \dfrac{1}{n^2}$ converge.

▷ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors $\sum_n u_n$ diverge et $\sum_n v_n = \sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge.

$$\boxed{\text{L'hypothèse "}\sum_n u_n \text{ diverge" ne permet pas de conclure sur la nature de } \sum_n v_n.}$$

Exercice 7. (Famille sommable)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la famille suivante n'est pas sommable :

$$(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2},\ a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2} \text{ si } n \neq p \text{ et } a_{n,n} = 0$$

2. Montrer l'existence et calculer la valeur de la somme :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

3. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ n'est pas sommable.

1. On procède par l'absurde. Supposons que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable, alors toute sous-famille est sommable. Considérons l'ensemble :

$$I = \{(n+1,n);\ n\in\mathbb{N}\}$$

Par l'hypothèse ci-dessus, la sous-famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in I} = (a_{n+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. Ceci est équivalent à dire que la série suivante est convergente :

$$\sum_n a_{n+1,n} = \sum_n \frac{1}{2n+1}$$

Or, cette série n'est pas convergente (son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$) : absurde.
On conclut alors que

$$\boxed{\text{La famille } (a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \text{ n'est pas sommable.}}$$

2. On doit montrer la sommabilité de la famille, puis calculer sa somme. On considère la partition suivante :

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* = \underset{q\in\mathbb{N}^*}{\cup} \mathbb{N}\times\{q\}$$

Pour montrer que la famille est sommable, il suffit de montrer que, pour q fixé dans $\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, ensuite que la série $\displaystyle\sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ aussi converge.

Soit $q\in\mathbb{N}^*$. On a pour tout entier p :

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

Donc pour tout entier N (somme téléscopique) :

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$ on trouve que la série $\displaystyle\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, et sa somme vaut :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}$$

Le résultat sur les séries de Riemann permet de conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable, et sa somme vaut } \frac{\pi^2}{6}}$$

3. L'ensemble $I = \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$ est dénombrable, car $I \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

L'idée ici, pour montrer que la famille n'est pas sommable, est d'utiliser le fait qu'il y a une infinité d'éléments de I compris entre 1 et 2. Faisons cela par l'absurde :

Supposons que la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in I}$ soit sommable. Alors, pour tout $J \subset I$ fini on a :

$$0 \leqslant \sum_{x\in J} \frac{1}{x^2} \leqslant \underbrace{\sum_{x\in I} \frac{1}{x^2}}_{S} < +\infty$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$J_n = \left\{1 + \frac{1}{k},\ k \in \{1, \dots, n\}\right\} \subset \mathbb{Q} \cap [1, 2] \subset I$$

J_n est un ensemble fini : $\mathrm{card}(J_n) = n$. De plus, comme $x \leqslant 2$ pour tout x dans J_n, alors :

$$S \geqslant \sum_{x\in J_n} \frac{1}{x^2} \geqslant \sum_{x\in J_n} \frac{1}{2^2} = \frac{\mathrm{card}(J_n)}{4} = \frac{n}{4}$$

Cela donne $n \leqslant 4S$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \text{ n'est pas sommable.}}$$