Topologie et Calcul différentiel – TD 2: Théorème des fonctions implicites

10 mars 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à appliquer le théorème des fonctions implicites, et à reconnaître les problèmes dans lesquels il intervient.

Exercice 1 :

On considère la fonction de deux variables $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$\psi(x, y) = x \exp(y) + \sin(\log(y)) \exp(x)$$

1. Calculer les dérivées partielles de ψ.
2. Démontrer qu'il existe un voisinage de 0 noté $\mathscr{V}(0) \subseteq \mathbb{R}$ et une unique fonction ϕ de classe $\mathscr{C}^1(\mathscr{V}(0); \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathscr{V}(0)$, $\psi(x; \phi(x)) = 0$
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de ϕ en 0.

Exercice 2 :

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x, y) = 2e^{x+y} + y - x$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I au voisinage de 1 et une unique fonction $\phi \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ tels que

$$\phi(1) = -1 \text{ et } \forall x \in I,\ H(x, \phi(x)) = 0 \text{ et } \partial_2 H(x, \phi(x)) \neq 0$$

Exercice 3 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \sin(y) + x \times y^4 + x^2.$$

1. Montrer que $(0, 0) \in \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 0\}$ et que au voisinage de ce point la courbe peut s'écrire sous la forme $y = \varphi(x)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ en 0.

Exercice 4 :

On rappelle que la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \theta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(0) = 0$. On pose $f(x, y) = \sin(\theta(y)) - \tan(4\,\theta(x))$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 0\}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f. Quelle est la classe de f ?

2. Étudier les extremums locaux de f.
3. Quels sont les points de Γ où le théorème des fonctions implicites s'applique ?
4. Soit le point $(a,b) = \left(\sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{-1}, 0\right)$, montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique. On notera φ la fonction implicite. Quelle est la classe de φ ? Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de (a,b).
5. Trouver l'expression explicite de φ, au voisinage de (a,b).

Exercice 5 :

▶ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5\,x^3 - 27\,x \times y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (justifier votre réponse).

▶ On s'intéresse maintenant aux *lignes de niveaux* de la fonction f. Pour cela, étant donné un réel $a \in \mathbb{R}^*$, on va étudier la fonction :

$$g_a(x,y) = (5\,x^3 - 27\,x \times y^2) - a \times (x^2+y^2).$$

5. Déterminer les extrémums locaux de g_a.

▶ On pose :

$$\Gamma_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g_a(x,y) = 0\right\}.$$

6. En quels points de Γ_a est-il impossible d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a ?
7. En quels points de Γ_a est-il impossible d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a sous la forme $y = \varphi(x)$?
8. Utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a, en fonction de x au voisinage du point :

$$\left(a, \frac{a}{\sqrt{7}}\right),$$

et donner un développement limité à l'ordre 1 de la fonction implicite trouvée.

Exercice 6 :

Soit F et g deux fonctions réelles définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$. On note

$$\Gamma = \{(x,y) \in U,\ F(x,y) = 0\}.$$

On cherche les extremums de la fonction g restreinte à l'ensemble Γ.

1. Soit $(a,b) \in \Gamma$ un extremum de g sur Γ. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que $\mathrm{grad}_{(a,b)}F$ et $\mathrm{grad}_{(a,b)}g$ sont colinéaires.
2. Quel est le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (on admet que le maximum existe) ? Un triangle rectangle est un triangle dont deux côtés sont orthogonaux.

Exercice 7 :

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 = 1$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1, 1)$.
2. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente. On pourra appliquer la théorème des fonctions implicites et effectuer un développement limité en 1 de la fonction φ obtenue.

Exercice 8 :

Étudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes. On pourra essayer de les visualiser avec des courbes de niveau.

1. $f(x, y) = (x - y)^3 - 6\,x \times y$
2. $f(x, y) = x^3 + x \times y^2 - x^2 \times y - y^3$
3. $f(x, y) = (x^2 - y^2) \times \exp(x^2 - y^2)$.

Exercice 9 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2\,z \times (x + y) - 2\,x + y - 2\,z + 1.$$

1. Déterminer l'existence et l'unicité d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans un voisinage V de $(0, 0)$ vérifiant :

$$\varphi(0, 0) = 1 \text{ et } \forall (x, y) \in V,\ f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 10 :

Pour chacune des fonctions suivantes, les tracer sur leur ensemble de définition, puis répondre aux questions.

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$.
   (a) Visualiser l'intersection de la courbe représentative de f et du plan d'équation $z = 0$.
   (b) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(1, 0)$?
2. $g(x, y) = y^2 - 1 + \sin(\pi \times x)$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$.
   (a) Visualiser la ligne de niveau $z = 0$.
   (b) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
   (c) Superposer les courbes de φ est de f.
   (d) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(\frac{1}{2}, 0)$?
3. $h(x, y) = \operatorname{sinc}(x) - \operatorname{sinc}(y)$ pour $(x, y) \in [-3\pi, 3\pi]$, où $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Visualiser h et la ligne de niveau correspondant à $z = 0$.
(b) Vérifier que $h(\pi, 2\pi) = 0$.
(c) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
(d) Effectuer un développement limité de φ à l'ordre 1 en π.
(e) Faire apparaître la tangente à φ au point $(\pi, 2\pi)$ sur le dessin.