Suites et Séries – TD$_7$

24-25 octobre 2022

Exercice 1. (séries de Bertrand)

Étudier la convergence des séries $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ en fonction des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Le terme général de la série est positif, et contient $\frac{1}{n^\alpha}$, on peut donc avoir l'idée de comparer avec les séries de Riemann en distinguant les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Pour alléger les notations, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ et } v_n = \frac{1}{n^\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R}$$

- Premier cas : $\alpha > 1$

  On a :

  $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln(n)^\beta}$$

  D'une part, si $\gamma < \alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, cela veut dire que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

  D'autre part, la série $\sum_n v_n$ converge si, et seulement si, $\gamma > 1$. Cela veut dire que si on choisit γ tel que $1 < \gamma < \alpha$, alors par comparaison de séries à termes positifs on conclut que $\sum_n u_n$ converge. Par exemple $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$ convient.
- Deuxième cas : $\alpha < 1$

  On a :

  $$\frac{v_n}{u_n} = n^{\alpha-\gamma} \ln(n)^\beta$$

  D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ si $\alpha < \gamma$, ceci veut dire que $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ (cela peut s'écrire comme $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang).

  D'autre part, $\sum_n v_n$ diverge si $\gamma \leqslant 1$. En choisissant $\gamma = 1$ on peut conclure alors que $\sum_n u_n$ diverge.
- Troisième cas : $\alpha = 1$
  - Si $\beta < 0$:

    On a $\frac{v_n}{u_n} = n^{1-\gamma} \ln(n)^\beta$. Pour $\gamma = 1$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Comme $\sum_n v_n$ diverge pour $\gamma = 1$ alors $\sum_n u_n$ diverge aussi.
  - Si $\beta > 0$:

    Ici le théorème de comparaison des séries positives ne permet pas d'obtenir le résultat. Il faut donc changer de stratégie, en utilisant par exemple une comparaion série/intégrale.

    La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ est positive et décroissante sur $]e = \exp(1), +\infty[$. La série $\sum_n u_n$ et l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^\beta} dx$ sont donc de la même nature.

En utilisant le changement de variable généralisé $u = \ln(x) = \phi(x)$ (où la fonction ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective), on déduit que les intégrales

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\mathrm{d}x \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}\mathrm{d}u$$

sont de la même nature.
Le résultat sur les intégrales de Riemann permet de conclure, on a convergence si, et seulement si, $\beta > 1$.

$$\boxed{\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge } \iff [\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)]}$$

Exercice 2. (autour de la série géométrique)

1. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_k kx^k$ converge et calculer sa somme.

Attention, on n'a pas le droit d'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ (somme de la série) avant d'avoir montré que la série est convergente !
L'idée ici est de remarquer que le terme kx^k « fait penser » à la dérivée de $x \mapsto x^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

En dérivant cette égalité par rapport à x (les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ et $x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ sont dérivables sur $]-1,1[$), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)(1-x)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

En multipliant des deux côtés par x, on obtient en utilisant le fait que $|x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\,\frac{-(n+1)(1-x)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_k kx^k \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Attention à ne pas dériver directement la somme de la série géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Cela donne le bon résultat mais il n'est pas justifié (il faudrait montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que sa dérivée est $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$). Vous *apprendrez avec Professeur François des théorèmes pour cela, mais pour l'instant vous ne pouvez pas.*

2. Montrer que la série $\sum_n \frac{\cos(n)}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour les séries avec du "$\cos(kx)$" ou du "$\sin(kx)$", il est souvent intéressant d'utiliser l'exponentielle complexe pour faire apparaître une série géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}}{2^k}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n+1}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}}\right)$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}}\right) = \frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{\cos(n)}{2^n} \text{ est convergente et sa somme vaut } \frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}.}$$

Exercice 3. (séries télescopiques)

Étudier la nature des séries suivantes et calculer leur somme quand elles convergent :

$$(a)\ \sum_k \frac{1}{k(k+1)}; \quad (b)\ \sum_k \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}; \quad (c)\ \sum_n \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

温馨提示

Attention ! On n'écrit JAMAIS "$\sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_n \frac{1}{n} - \sum_n \frac{1}{n+1}$" ! La série de gauche est convergente, alors que les séries de droite sont divergentes : le membre de droite n'a aucun sens !

On n'écrit JAMAIS : "$\sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$". Le n du membre de gauche correspond à l'indice de sommation (variable, qui vaut 1, 2, 3, ...) ; le n du membre de droite correspond au dernier indice, c'est-à-dire uniquement au dernier terme de la somme. Ce n'est donc pas le même n.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La série $\sum_n \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

On peut penser à la quantité conjuguée ici.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1} = \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ est divergente.

Pour faire apparaître des séries téléscopiques (ou des produits téléscopiques) avec le logarithme, on essaye de factoriser le terme à l'intérieur du logarithme.

(c) Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3).
\end{aligned}$$

La série $\sum_n \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ est convergente et sa somme vaut $\ln(3)$.

Exercice 4. (critères de comparaison pour les séries positives)

Dans chacun des cas, étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ avec :

$$(a)\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}; \quad (b)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad (c)\ u_n = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(d)\ u_n = e^{-n^2}; \quad (e)\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}.$$

On cherche souvent à comparer avec des séries connues (séries géométriques, séries de Riemann, etc.)
Attention, les critères de comparaison ne sont valables que pour des séries ***à termes***

***positifs**, il faut donc vérifier que c'est le cas et l'indiquer sur votre copie !*
Les techniques sont assez similaires à celles du chapitre sur les intégrales généralisées.

(a) Puisque $n^2 + \sqrt{n} \sim n^2$ quand $n \to +\infty$ (factoriser par n^2 pour le montrer), on a

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_n \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ et $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ ont même nature. Comme $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann) :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

(b) En utilisant le fait que $\ln(1 + x) \sim x$ quand $x \to 0^+$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum_n \frac{1}{n}$ ont même nature. Comme $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann) :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ diverge.}}$$

(c) On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \to 0$. On a donc

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}$$

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et $\sum_n \frac{\pi^2}{2n^2}$ ont même nature. Comme $\sum_n \frac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente (série de Riemann) :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \text{ converge.}}$$

(d) On a $n^2 e^{-n^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire que

$$e^{-n^2} \underset{n \to \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n e^{-n^2} \text{ converge.}}$$

(e) On a

$$n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = e^{2\ln n}e^{\sqrt{n}\ln(1/2)} = \exp\left(-\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

Exercice 5. (avec des paramètres)

Dans chacun des cas, étudier la convergence de la série $\sum\limits_n u_n$ en fonction des paramètres, avec :

1. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
2. $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$ avec $a \in \mathbb{R}$;
3. $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$.

(a) On fait un développement limité :

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a \neq 1$, alors

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - a \neq 0$$

donc la série $\sum\limits_n e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ diverge grossièrement.

- Si $a = 1$ et $b \neq 1$ alors

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-b}{n}$$

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum\limits_n e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ et $\sum\limits_n \frac{1}{n}$ ont même nature. Comme $\sum\limits_n \frac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann), la série $\sum\limits_n e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ diverge aussi.

- Si $a = 1$ et $b = 1$ alors

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et comme $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), on en déduit par critère de comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum\limits_n e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ converge.

(b) On fait un développement limité :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2} \\ &= n\left(1+\frac{a}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n\left(1+\frac{3}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right) + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

- Si $a \neq \dfrac{9}{2}$, alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)$$
donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)$ ont même nature. Comme $\sum_n \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)$ est divergente (série de Riemann), la série $\sum_n u_n$ diverge aussi.
- Si $a = \dfrac{9}{2}$, alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
et comme $\sum_n \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann), on en déduit par critère de comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum_n u_n$ converge.

(c) En faisant un développement limité, on obtient après les calculs que

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)\right).$$

- Si $a < 2$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^{2-\alpha}} = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$ ce qui montre que la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a = 2$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1/6} \neq 0$ ce qui montre que la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a > 2$, on a
$$n^2 u_n = \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}}\left(1 - 12\frac{\ln n}{n^{\alpha-2}} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
c'est-à-dire que
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
et comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), on en déduit par critère de comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 6. (comparaison série-intégrale)

1. Montrer que la série $\sum_n \ln(n)$ diverge.

Le terme général $\ln(n)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \ln(n) \text{ diverge grossièrement.}}$$

2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent quand $n \to \infty$ de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Attention, la fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas décroissante, on ne peut pas utiliser la proposition 1.2 mais on peut s'inspirer de la démonstration.

▷ Comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante, on a, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(x)\mathrm{d}x\,.$$

Comme $\ln(1) = 0$, on obtient pour $n \geqslant 2$:

$$\int_{1}^{n} \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x$$

Comme $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$, cela fournit

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2)\,. \qquad (*)$$

▷ On a $n\ln(n) - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$ (factoriser par $n\ln n$ pour le voir). De plus,

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2) &= n\ln(n+1) + \ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2)\\
&= n\ln(n) + n\ln(1+\tfrac{1}{n}) + \ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2)\\
&= n\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(n\ln(n))\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).
\end{aligned}$$

▷ Ainsi, en divisant par $n\ln(n)$ dans $(*)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{S_n}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)\,.}$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de S_n, a, b et n ; la seule somme à intervenir dans l'expression doit être S_n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + a\sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) + b\sum_{k=3}^{n+2} \ln(k)\\ &= (1+a+b)S_n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) + b\ln(n+1) - b\ln(2)\end{aligned}$$

4. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum_n u_n$ est convergente, et déterminer la valeur de sa somme dans ces cas-là.

▷ On a $a\ln(n+1)+b\ln(n+2)+b\ln(n+1)-b\ln(2) = o(n\ln(n))$. Par conséquent, si $1+a+b \neq 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+a+b)n\ln(n)$ et la série ne converge pas.

▷ Supposons maintenant $1+a+b=0$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= a\ln(n+1) + b\ln(n+2) + b\ln(n+1) - b\ln(2)\\ &= (a+2b)\ln(n+1) + b\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - b\ln(2).\end{aligned}$$

Dans ce cas, si $a+2b \neq 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} (a+2b)\ln(n+1)$ et la série ne converge pas.

▷ Supposons enfin $1+a+b=0$ et $a+2b=0$, ce qui équivaut à $b=1$ et $a=-2$. Alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = b\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - b\ln(2)$ et odnc la série converge vers $-\ln(2)$.

La série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si $a=-2$ et $b=1$, et dans ce cas sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 7. (DS de 2020)

1. Montrer que la série $\sum_n \exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right)$ converge.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Par croissance comparée, on a

$$n^2\exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), on en déduit par le critère de domination des séries à termes positifs que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right) \text{ converge.}}$$

2. Pour tout $t>1$, on pose : $f(t) = \exp\left(-t^2\sqrt{\ln t}\right)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{-2t\sqrt{\ln t}}$

Montrer que :

$$g'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(t)$$

Les fonctions f et g sont dérivables sur $]1,+\infty[$ par composition de fonctions dérivables. Soit $t>1$. On a :

$$f'(t) = f(t)\left(-2\,t\,\sqrt{\ln(t)} - \frac{t}{2\,\sqrt{\ln(t)}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} -2\,t\,\sqrt{\ln(t)}\,f(t)$$

donc

$$g'(t) = \underbrace{-\frac{f'(t)}{2\,t\,\sqrt{\ln(t)}}}_{\underset{t\to+\infty}{\sim} f(t)} + \underbrace{\frac{f(t)(2\ln t+1)}{4\,t^2\,\ln(t)^{\frac{3}{2}}}}_{=\underset{t\to+\infty}{o}(f(t))}$$

donc

$$\boxed{g'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(t)}$$

3. En déduire un équivalent du reste de la série $\displaystyle\sum_n \exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right)$.

48 Soit $n \geqslant 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \exp\left(-t^2\sqrt{\ln t}\right)$ est strictement décroissante et positive donc par une comparaison-série intégrale et en notant R_n le reste de la série :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a, par intégration des équivalents (les fonctions considérées sont positives) :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(n)}{2\,n\,\sqrt{\ln(n)}} = \underset{n\to+\infty}{o}(f(n))$$

Puisque $R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$R_n = \underset{n\to+\infty}{o}(f(n))$$

On en déduit que

$$R_n = R_{n+1} + f(n+1) = f(n+1) + \underset{n\to+\infty}{o}(f(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n+1)$$

Conclusion :

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-(n+1)^2\sqrt{\ln(n+1)}\right)}$$

Exercice 8. (2020年期末考试)

Soit $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue qui admet un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - a\,x^p + \underset{x\to0^+}{o}(x^p), \quad a>0,\ p>1$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0>0$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que : si $u_0 \in \,]0,\eta]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Puisque f est continue en 0 on a $f(0)=0$. Le développement asymptotique montre qu'il existe $\eta>0$ tel que $f(x)<x$ pour tout $x\in\,]0,\eta]$. En particulier, $[0,\eta]$ est stable par f et si $u_0\in\,]0,\eta]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est positive (car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), on en déduit qu'elle converge. Puisque que f est continue sur $[0,\eta]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car c'est l'unique point fixe de f sur $[0,\eta]$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } \eta>0 \text{ tel que si } u_0\in\,]0,\eta] \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

2. On suppose dans la suite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Déterminer un équivalent simple de

$$(u_{n+1})^{1-p}-(u_n)^{1-p}$$

quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 on a

$$f(u_n)=u_n-a\,(u_n)^p+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^p\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(u_{n+1})^{1-p}-(u_n)^{1-p} &= f(u_n)^{1-p}-(u_n)^{1-p}\\
&=\left(u_n-a\,(u_n)^p+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^p\right)\right)^{1-p}-(u_n)^{1-p}\\
&=(u_n)^{1-p}\Big(1-\underbrace{a\,(u_n)^{p-1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^{p-1}\right)}_{\text{tend vers 0 quand } n\to+\infty}\Big)^{1-p}-(u_n)^{1-p}\\
&=(u_n)^{1-p}\Big(1-a\,(1-p)(u_n)^{p-1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^{p-1}\right)\Big)-(u_n)^{1-p}\\
&=-a\,(1-p)+\underset{n\to+\infty}{o}(1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{(u_{n+1})^{1-p}-(u_n)^{1-p}\underset{n\to+\infty}{\sim}a\,(p-1)}$$

3. En déduire que

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(n\,a\,(p-1)\right)^{\frac{1}{1-p}}$$

On a $a\,(p-1)>0$ donc la série $\sum_n a\,(p-1)$ est grossièrement divergente. On en déduit par sommation d'équivalent de séries à termes positifs que

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left((u_{k+1})^{1-p}-(u_k)^{1-p}\right)}_{=(u_n)^{1-p}-(u_0)^{1-p}}\underset{n\to+\infty}{\sim}n\,a\,(p-1)$$

Comme $(u_0)^{1-p}=\underset{n\to+\infty}{o}(n)$, on a $(u_n)^{1-p}\underset{n\to+\infty}{\sim}n\,a\,(p-1)$ donc

$$\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(n\,a\,(p-1)\right)^{\frac{1}{1-p}}}$$

4. On suppose que $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un reste en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc on est dans le cas $p = 2$ et $a = \frac{1}{2}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{n}{2}$$

donc

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{n+1}{2} - \frac{1}{u_n} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{u_n - \dfrac{(u_n)^2}{2} + \dfrac{(u_n)^3}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^3\right)} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{u_n}\frac{1}{1 - \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{(u_n)^2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^2\right)} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{u_n}\left(1 + \frac{u_n}{2} - \frac{(u_n)^2}{12} + \underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n)^2\right)\right) - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{u_n}{12} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)
\end{aligned}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{12} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6n}$$

Par sommation des équivalents de séries à termes constants divergentes (série harmonique à droite) et par téléscopage, on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln n}{6}$$

On a donc

$$u_n = \frac{1}{\frac{n}{2} + v_n} = \frac{1}{\frac{n}{2} - \frac{\ln n}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)} = \frac{2}{n}\frac{1}{1 - \frac{\ln n}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$$

d'où

$$\boxed{u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}$$