Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_{13}$

13 Décembre 2022

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : Complémentaire du cours

Soit $p \in \{1, \dots, n\}$ et soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right]$$

avec $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.

1. En considérant l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \dots, A_p) & \longmapsto & \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \end{array}$$

où $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice ayant pour colonnes $A_1, \dots, A_p$, montrer que

$$\det M = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det A.$$

2. En déduire que $\det M = \det(A) \det(B)$.

1. L'application ϕ est une forme p-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ donc d'après un théorème du cours, en notant $\mathcal{C}_p$ la base canonique de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\phi = \phi(\mathcal{C}_p) \det_{\mathcal{C}_p} = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det_{\mathcal{C}_p}$$

donc

$$\det M = \phi(A_1, \dots, A_p) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det_{\mathcal{C}_p}(A_1, \dots, A_p) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det A.$$

Conclusion : $\det M = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det A.$

2. Considérons l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})^{n-p} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (B_1, \dots, B_{n-p}) & \longmapsto & \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \end{array}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ est la matrice ayant $B_1, \dots, B_{n-p}$ pour colonne. C'est une forme p-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ donc toujours d'après un théorème du cours, en notant $\mathcal{C}_{n-p}$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$:

$$\psi = \psi(\mathcal{C}_{n-p}) \det_{\mathcal{C}_{n-p}} = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array}\right] \det_{\mathcal{C}_{n-p}}$$

donc

$$\begin{aligned}
\det M &= \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right] \det A \\
&= \psi(B_1, \ldots, B_{n-p}) \det A \\
&= \psi(\mathcal{C}_{n-p}) \det_{\mathcal{C}_{n-p}}(B_1, \ldots, B_{n-p}) \det A \\
&= \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array}\right] \det B \det A
\end{aligned}$$

Or

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

car c'est une matrice triangulaire supérieure.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \det M = \det(A) \det(B).}$$

Exercice 2 : Complémentaire du cours

On suppose $n \geq 2$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes. La matrice de Vandermonde associée est la matrice définie par

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Calculer $\det V(a_1, a_2)$ et $\det V(a_1, a_2, a_3)$.
2. Trouver une relation entre $\det V(a_1, \ldots, a_n)$ et $\det V(a_2, \ldots, a_n)$.
3. En déduire l'expression de $\det V(a_1, \ldots, a_n)$.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $V(a_1, \ldots, a_n)$ soit inversible.

1. On a $\det V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ et

$$\begin{aligned}
\det V(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\det V(a_1, a_2) = a_2 - a_1 \text{ et } \det V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).}$

2. On a :

$$
\begin{aligned}
\det V(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ C_2 \leftarrow C_2 - a_1 C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - a_1 C_{n-1} \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\right)\det V(a_2,\dots,a_n)
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\det V(a_1,\dots,a_n) = \left(\prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\right)\det V(a_2,\dots,a_n).}$

3. Par une récurrence sur n on obtient $\boxed{\det V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).}$

4. La matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible si et seulement si $\det V(a_1,\dots,a_n)\neq 0$. D'après la question précédente, on en déduit que
$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } a_1,\dots,a_n \text{ sont deux-à-deux distincts.}}$

Exercice 3

Soit $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que :

$$\forall (A,B)\in(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(A.B) = f(A)f(B)$$

Pour $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$A \text{ inversible} \iff f(A)\neq 0$$

1. Commençons par déterminer $f(I_n)$ et $f(0_n)$ où I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle . On a
$$f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$$
Donc $f(I_n)=0$ ou $f(I_n)=1$.
Si $f(I_n)=0$, alors pour tout $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,
$$f(A) = f(A.I_n) = f(A)\times f(I_n) = 0,$$
donc f est constante ce qui est une contradiction. Ainsi
$$f(I_n) = 1.$$

De même, On a
$$f(0_n) = f(0_n^2) = f(0_n)^2.$$
Donc $f(0_n) = 0$ ou $f(0_n) = 1$.
Si $f(0_n) = 1$, alors pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,
$$f(A) = f(A) \times f(0_n) = f(0_n.A) = f(0_n) = 1,$$
donc f est constante ce qui est une contradiction. Ainsi
$$f(0_n) = 0$$

2. Si A est inversible alors
$$f(I_n) = f(A.A^{-1}) = f(A) \times f(A^{-1}) = 1.$$
Donc $f(A) \neq 0$.
3. Supposons A n'est pas inversible et posons $r = \mathrm{rang}(A)$ avec $r \in [\![1, n-1]\!]$
La matrice A est équivalente à la matrice $J_{n,n,r} \overset{\text{not}}{=} J_r$. (déjà montré aux cours)
ce qui permet d'écrire $A = Q.J_r.P$ avec P, Q inversibles. On a alors
$$f(A) = f(Q) \times f(J_r) \times f(P).$$
et il suffit de montrer $f(J_r) = 0$ pour conclure.
Par permutation des vecteurs de bases, la matrice J_r est semblable à toute matrice diagonale où figure r coefficients 1 et $n-r$ coefficients 0.
En positionnant, pertinemment les coefficients 0, on peut former des matrices $A_1, \ldots, A_p$ toutes semblables à J_r vérifiant
$$A_1 \ldots A_p = 0_n.$$
On a alors
$$f(A_1) \ldots f(A_p) = 0.$$
Or il est facile d'établir que si deux matrices sont semblables, la fonction f prend les mêmes valeurs sur celles-ci. Par suite
$$f(J_r) = f(A_1) = \ldots = f(A_p)$$
et ainsi $f(J_r)^p = 0$ puis enfin
$$f(J_r) = 0.$$
4. Finalement,
$$A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.

On a $\det(A^2) = \det(-I_n)$. Or $\det(A^2) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2$ et $\det(-I_n) = (-1)^n \det I_n = (-1)^n \times 1 = 1$. On a donc $(-1)^n = \det(A)^2 \geq 0$ (car $\det(A) \in \mathbb{R}$), ce qui n'est possible que si n est pair.
Conclusion : $\boxed{n \text{ est pair.}}$

Exercice 5

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ avec :

1. la méthode du pivot de Gauss ;

2. la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Que peut-on en déduire sur la matrice A ?

1. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -21 & -11 \\ 0 & 23 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -21 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{-169}{21} \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{23}{21} L_2 \\
&= 1 \times (-21) \times \frac{-169}{21} \\
&= 169
\end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux de cette matrice.

2. Ici, il y a un zéro sur la deuxième ligne et la deuxième colonne, on va donc développer selon cette ligne ou cette colonne :

$$\begin{aligned}
\det A &= -7 \times \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} \\
&= -7 \times \left[3 \times 1 - (-3) \times (-8)\right] - 2 \times \left[1 \times (-8) - 3 \times 1\right] \\
&= 169
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on trouve $\boxed{\det A = 169.}$

On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ car $\det A \neq 0$.

Exercice 6

Soient a, b et c des nombres réels ou complexes. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{K}).$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+b+2c & a+b+2c & a+b+2c & a+b+2c \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\
&= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c & 0 \\ c & b-c & a-c & 0 \\ b & c-b & c-b & a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{matrix} \\
&= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c & 0 \\ c & b-c & a-c & 0 \\ b & c-b & c-b & a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+2c) \begin{vmatrix} a-c & b-c & 0 \\ b-c & a-c & 0 \\ c-b & c-b & a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+2c)(a-b)\big((a-c)^2 - (b-c)^2\big) = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\det A = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c).}$

Exercice 7

On suppose $n \geq 2$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que

$$\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $A = 0_n$.

1. Soit A une matrice telle que

$$\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

   En prenant $B = A$, on a $\det(A) = \det(A + A)$. D'une part $\det(A+A) = \det(2A) = 2^n \det A$ et d'autre part $\det(A+A) = \det(A) + \det(A) = 2\det(A)$. Comme $n \geq 2$, cela n'est possible que si $\det A = 0$, donc A n'est pas inversible.

2. On propose ici deux méthode.

   Méthode 1

   Supposons $A \neq 0_n$. On note $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A. Comme A n'est pas nulle, il existe une colonne $A_j \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $j \in \{1, \ldots, n\}$, qui n'est pas nulle. Par le théorème de la base incomplète, considérons une base $\mathcal{C} = (B_1, \dots, B_{j-1}, A_j, B_{j+1}, \dots, B_n)$ de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons C la matrice dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{C}$. Alors C est inversible car $\mathcal{C}$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $\det C \neq 0$. La matrice $B = C - A$ n'est pas inversible car la colonne j de B est nulle donc $\det B = 0$. On a donc

$$\underbrace{\det(\underbrace{A+B}_{=C})}_{\neq 0} = \underbrace{\det(A)}_{=0} + \underbrace{\det(B)}_{=0} = 0,$$

c'est absurde.

Méthode 2

Supposons $A \neq 0_n$. Posons $r = \operatorname{rg} A$. On a $1 \leq r \leq n-1$ (car A n'est pas nulle et n'est pas inversible). Il existe deux matrices inversibles $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PJ_{n,r}Q$. Posons $B = P(I_n - J_{n,r})Q$. Alors $A + B = PI_nQ = PQ$ donc $\det(A+B) = \det(PQ) = \det(P)\det(Q) \neq 0$ puisque $\det P \neq 0$ et $\det Q \neq 0$ (P et Q sont inversibles). Mais d'une part $\det A = 0$ et d'autre part $\operatorname{rg} B = n - r < n$ (car $\operatorname{rg}(I_n - J_{n,r}) = n - r$) donc B n'est pas inversible et donc $\det B = 0$. Cela contredit $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Exercice 8

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\det M \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer : [M est inversible et $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$] si et seulement si [$\det M = 1$ ou $\det M = -1$].

1. Si $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$, on a

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in \{-1,1\}} \prod_{j=1}^{n} \underbrace{m_{\sigma(j),j}}_{\in \mathbb{Z}}$$

Puisque $\mathbb{Z}$ est stable par addition et produit, on en déduit que $\boxed{\det M \in \mathbb{Z}.}$

On peut aussi obtenir le résultat par récurrence, en vérifiant d'abord le cas $n = 1$ puis en développant par rapport à une ligne ou une colonne pour l'étape d'hérédité.

2.
   - Supposons que M est inversible et que $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Par le même argument qu'à la question 1, $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Mais $\det(M) = \frac{1}{\det(M^{-1})}$ et les seuls entiers tels que leur inverse est encore un entier sont $+1$ et -1, donc $\det M = 1$ ou $\det M = -1$.
   - Supposons $\det M = 1$ ou $\det M = -1$. En particulier, $\det M \neq 0$ donc M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t(\operatorname{com} M).$$

   D'une part, $\frac{1}{\det M} = 1$ ou $\frac{1}{\det M} = -1$ donc $\frac{1}{\det M} \in \mathbb{Z}$. D'autre part,

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad (\operatorname{com} M)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M(i\,|\,j) \in \mathbb{Z}$$

   car $\det M(i\,|\,j) \in \mathbb{Z}$ par le même argument qu'à la question 1 ($\det M(i\,|\,j)$ est le déterminant obtenu de $\det M$ en rayant la ligne i et la colonne j). Cela montre que $\operatorname{com} M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ donc ${}^t(\operatorname{com} M) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. On a donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\operatorname{com} M) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Conclusion : $\boxed{[\ M \text{ est inversible et } M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})] \text{ si et seulement si } [\det M = 1 \text{ ou } \det M = -1].}$

Exercice 9

On suppose $n \geq 2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \Delta_n = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2.

   On obtient immédiatement :
   $$\Delta_2 = a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$$

2. Calculer Δ_3 (factoriser l'expression).

   On peut développer suivant la première ligne ou utiliser la formule de Sarrus. On obtient :
   $$\Delta_3 = a^3 + 2\,b^3 - 3\,a, b^2 = (a-b)^2\,(a+2\,b)$$

3. Calculer Δ_n pour tout entier $n \geq 2$.

   — On effectue l'opération sur les colonnes $C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} C_k$. On obtient alors :
   $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)\,b & b & \cdots & \cdots & b \\ a+(n-1)\,b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)\,b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \big(a+(n-1)\,b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

   — Puis, on effectue successivement les opérations sur les lignes $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$. On obtient alors :
   $$\Delta_n = \big(a+(n-1)\,b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

   — En développant par rapport à la première colonne, on obtient finalement :
   $$\Delta_n = \big(a+(n-1)\,b\big)\,(a-b)^{n-1}$$

4. Trouver le noyau de A.

   Si $(a, b) = (0, 0)$, on a $A = 0_n$ donc $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Supposons que $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,A$. On a $A\,X = 0_{n,1}$ ce qui donne le système linéaire (en notant x_j les coefficients de X) :
   $$\begin{cases} a\,x_1 + b\,(x_2 + \cdots + x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ b\,(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + a\,x_n = 0 \end{cases}$$

Si on pose $S = x_1 + \cdots + x_n$, on obtient

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad b\, S = (b-a)\, x_k$$

— Si $a = b$, le noyau de A est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

— Si $a \neq b$ et $n\, b \neq (b-a)$, tous les x_k sont égaux à 0, le noyau de A est réduit à $\{0_{n,1}\}$.

— Si $a \neq b$ et $n\, b = (b-a)$, tous les x_k sont égaux, on a donc

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

5. Suivant les valeurs de a et b, donner la valeur du rang de A.

Si $(a, b) = (0, 0)$, on a $A = 0_n$ donc $\operatorname{rang}(A) = 0$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, on utilise le théorème du rang :

— Si $a = b$, on a $\operatorname{rang}(A) = 1$.

— Si $a \neq b$ et $n\, b \neq (b-a)$, on a $\operatorname{rang}(A) = n$.

— Si $a \neq b$ et $n\, b = b - a$, on a $\operatorname{rang}(A) = n - 1$.

6. Montrer que A est semblable à la matrice (donner une matrice de changement de base) :

$$B = \operatorname{Diag}(a-b, \dots, a-b, a+(n-1)b).$$

On voulais chercher une matrice inversible $P \in G_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P\, B\, P^{-1}$. Ceci vaut dire $A\, P = P\, B$.
Comme B est une matrice diagonale, on a $B\, P = P\, B$.
On a alors

$$A\, P = B\, P$$

Le calcul est le même que pour le noyau. On cherche les $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$A\, X = (a-b)\, X \qquad \text{et} \qquad A\, X = \big(a + (n-1)\, b\big) X$$

On trouve n solutions linéairement indépendantes. En écrivant la matrice P dont les colonnes sont ces solutions :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient alors que $A = P\, B\, P^{-1}$. En particulier, A est semblable à B.