Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_{10}$

22 Novembre 2022

Exercice 1

Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice :

$$(S_1)\begin{cases} 2x+4y=7 \\ -2x+3y=-14 \end{cases}, \qquad (S_2)\begin{cases} x+z=1 \\ -2y+3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}, \qquad (S_3)\begin{cases} x+t=a \\ x-2y=b \\ x+y+t=2 \\ y+t=4 \end{cases},$$

trivial

Exercice 2

Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

trivial

Exercice 3

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

On applique l'algorithme du pivot de Gauss, on a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \text{ forme échelonnée}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$$\cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] \text{ forme échelonnée réduite}$$

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.}$$

Exercice 4

Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons B la matrice augmentée

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2t & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Si $t = \frac{1}{2}$ alors la matrice à gauche est triangulaire, mais un de ses coefficients sur la diagonale est nulle : la matrice n'est pas inversible.
Sinon, la matrice est inversible. On continue l'application de la méthode du pivot de Gauss pour déterminer son inverse.

$$B \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{1+2t} L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - tL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2tL_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array}\right]$$

On a donc prouvé que la matrice A est inversible si et seulement si $t \neq \frac{1}{2}$.
Si c'est le cas :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+2t} & \dfrac{t}{1+2t} & \dfrac{-t}{1+2t} \\ \dfrac{-2}{1+2t} & \dfrac{1}{1+2t} & \dfrac{2t}{1+2t} \\ \dfrac{2}{1+2t} & \dfrac{-1}{1+2t} & \dfrac{1}{1+2t}. \end{bmatrix}$$

Exercice 5

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

L'idée est que, si $-1 < x < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1}) &= I_n - A + A - A^2 + A^2 + \cdots + A^{p-1} - A^p \\ &= I_n - A^p \\ &= I_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $I_n - A$ est inversible et $A^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{p-1}$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont des matrices de rang 2 vérifiant $(A \cdot B)^2 = A \cdot B$. Montrer que $B \cdot A = I_2$

En effet, on a

$$A \cdot (B \cdot A - I_2) \cdot B = 0_3.$$

Or puisque A est de rang 2, d'après le théorème du rang, on a $\operatorname{Ker} A = \{0_{2,1}\}$, donc

$$(B \cdot A - I_2) \cdot B = 0_{2,3}$$

De plus, puisque B est de rang 2, $\operatorname{Im} B = \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, Soit $y \in \operatorname{Im} B$, donc il existe $x \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = B \cdot x$. On a

$$(B \cdot A - I_2) \cdot y = (B \cdot A - I_2) \cdot B \cdot x = 0_{2,1}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{B} \cdot A = I_2}$$

Exercice 7

Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2$

1. Justifier qu'il existe $(U, V) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que

$$\operatorname{rang}(U \cdot A + B \cdot V) = \min(n, \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B)$$

2. On suppose $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \geq n$. Montrer qu'il existe $(U, V) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que

$$(U \cdot A + B \cdot V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

1. Posons $r = \operatorname{rang} A$ et $s = \operatorname{rang} B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_{n,n,r} \overset{\text{not}}{=} J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}, \qquad J'_s \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} 0_{n-s} & 0_{n-s,s} \\ 0_{s,n-s} & I_s \end{bmatrix}$$

Il existe $(P, Q, R, S) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^4$ tel que

$$P \cdot A \cdot Q = J_r \quad \text{et} \quad R \cdot B \cdot S = J'_s$$

et alors

$$P \cdot A \cdot Q + R \cdot B \cdot S = J_r + J'_s$$

qui est une matrice de rang $\min(n, r + s)$. On peut aussi écrire

$$R^{-1} \cdot P \cdot A + B \cdot S \cdot Q^{-1} = R^{-1} \cdot (J_r + J'_s) \cdot Q^{-1}$$

et en posant $U = R^{-1} \cdot P$ et $V = S \cdot Q^{-1}$, on obtient $(U, V) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que

$$\operatorname{rang}(U \cdot A + B \cdot V) = \min(n, \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B)$$

2. Si $r + s \geq n$ alors $\min(n, r + s) = n$, donc d'après la question précédente, on a

$$\operatorname{rang}(U \cdot A + B \cdot V) = n$$

donc la matrice $U \cdot A + B \cdot V$ est inversible.

Exercice 8

Montrer que les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

sont semblables et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P.B.P^{-1}$.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = A.$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

— *Analyse.* Supposons que A et B sont semblables. Comme elles représent le même endomorphisme u dans des bases différentes, on en déduit qu'il existe une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u) = B,$$

c'est-à-dire
$$u(f_1) = 2f_1, \quad u(f_2) = f_1 + 2f_2 \quad \text{et} \quad u(f_3) = 3f_3.$$

— *Synthèse.* On résout le système linéaire $u(f_1) = 2f_1$ d'inconnue $f_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
u(f_1) = 2f_1 &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u(f_1)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1) \\
&\iff A.\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1) = 2\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1) \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 4x - 3y - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff (x, y, z) \in \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1)\big)
\end{aligned}$$

donc on pose $f_1 = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$.
Suite à des calculs similaires, on pose :

$$f_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 - 2e_2 + 2e_3.$$

On vérifie que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en posant

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et en montrant que $\mathrm{rang}(P) = 3$ avec la méthode du pivot de Gauss (on peut obtenir P^{-1} avec la méthode de la matrice augmentée).
On a donc $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Par la formule du changement de base, on a

$$B = P^{-1} A P,$$

autrement dit $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$

Exercice 9

Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + A = 0_3$. On suppose que A n'est pas inversible.

1. Montrer que A est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Ce résultat est-il encore vrai si $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A,
c'est-à-dire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = A$ où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
En particulier, $f \circ (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

— *Analyse.*
Cherchons une base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a alors $f(e'_1) = 0$, $f(e'_2) = e_3$ et $f(e'_3) = -e'_2$. En particulier $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ et

$$f(f(e'_2)) = f(e'_3) = -e'_2$$

donc $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f^2 + Id)$.

— *Synthèse.*
Puisque A n'est pas inversible, f non plus donc en particulier il existe $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ avec $e'_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
Comme $(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, on a $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$
(car si $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$ donc $(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(y) = (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f(x) = 0_E$).
Mais $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ (car $A \neq 0_3$) donc $\mathrm{Im}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ d'où $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Il existe donc $e'_2 \in \mathbb{R}^3$, $e'_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, c'est-à-dire $f^2(e'_2) = -e'_2$.
On pose enfin $e'_3 = f(e'_2)$.
Montrons que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 \, e'_1 + \lambda_2 \, e'_2 + \lambda_3 \, e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

D'une part en appliquant f à cette égalité on a

$$\lambda_1 \underbrace{f(e'_1)}_{=0_{\mathbb{R}^3}} + \lambda_2 \underbrace{f(e'_2)}_{=e'_3} + \lambda_3 \underbrace{f(e'_3)}_{=-e'_2} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

car $f(e'_3) = f^2(e'_2) = -e'_2$.
D'autre part en appliquant f^2 à cette égalité on a

$$\lambda_1 \underbrace{f^2(e'_1)}_{=0_{\mathbb{R}^3}} + \lambda_2 \underbrace{f^2(e'_2)}_{=-e'_2} + \lambda_3 \underbrace{f^2(e'_3)}_{=-e'_2} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

car $f^2(e'_3) = f^2(f(e'_2)) = f(f^2(e'_2)) = f(-e'_2) = -f(e'_2)$. On a donc

$$\lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{et} \quad -\lambda_2 e'_2 - \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On en déduit que $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) e'_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et comme $e'_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$ donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a finalement $\lambda_1 e'_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et comme $e'_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $\lambda_1 = 0$.
Finalement, (e'_1, e'_2, e'_3) est libre, a 3 éléments et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans cette base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalement, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases de $\mathbb{R}^3$ différentes, elles sont donc semblables.

— Ce résultat est faux si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$$

vérifie $A^3 + A = 0_3$ mais n'est pas semblable à la matrice demandée, car $\mathrm{rang}(A) = 3$ alors que

$$\mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Remarque : pour montrer que A n'est pas inversible, on peut utiliser le déterminant (qui sera vu dans le cours suivant). Comme $A(A^2 + I_3) = 0_3$, si A est inversible, on a $A^2 + I_3 = 0_3$ donc $\det(A^2) = \det(-I_3) = -1$, *mais* $\det(A^2) = \det(A)^2 \geq 0$, *contradiction. Donc A n'est pas inversible.*