Suites et Séries – TD$_2$

19-20 septembre 2022

Exercice 1

Dans chacun des cas, donner un exemple d'une suite réelle qui est :

1. décroissante, positive et qui ne tend pas vers 0 ;
2. bornée et non convergente ;
3. positive, non bornée et ne tendant pas vers $+\infty$;
4. non monotone et qui tend vers 0 ;
5. positive, qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

1. La suite de terme général $1+\frac{1}{n}$;
2. la suite de terme général $(-1)^n$;
3. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{2n}=0$ et $u_{2n+1}=2n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;
4. la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$;
5. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{2n}=\frac{1}{n}$ et $u_{2n+1}=\frac{2}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer un équivalent le plus simple possible quand $n\to+\infty$ de la suite de terme général :

1. $5n^3-2n+4$;
2. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$;
3. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;
4. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
5. $\cos\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$.

1. On factorise par le terme de plus haut degré ($n\geq 1$) :

$$5n^3-2n+4=5n^3\left(1-\underbrace{\frac{2}{5n^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\underbrace{\frac{4}{5n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}\right)=5n^3\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

d'où

$$\boxed{5n^3-2n+4\underset{n\to+\infty}{\sim}5n^3.}$$

2. On a ($n\geq 2$) :

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}=\frac{-2}{(n+1)(n-1)}=\frac{-2}{n^2-1}.$$

Or, en factorisant par le terme de plus haut degré comme précédemment,

$$n^2 - 1 = n^2\Bigg(1 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\Bigg) = n^2\Big(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2.$$

Puisque $n^2 - 1$ et n^2 ne sont pas nuls pour n assez grand, on peut passer à l'inverse et multiplier par -2 :

$$\frac{-2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2}{n^2}$$

et donc

$$\boxed{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2}{n^2}.}$$

3. On factorise par le terme de plus haut degré ($n \geq 1$) :

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

On a le développement limité

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

d'où

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

De même, on trouve

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left[1 - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

d'où

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\Big)$$

et donc

$$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

4. On a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right].$$

On a le développement limité

$$\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

d'où

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\left[\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

On a le développement limité

$$\exp(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

d'où

$$\exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right] = \exp(1)\exp\left[\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right] = e\Big(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\Big).$$

Finalement,

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e.}$$

Autrement dit $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ quand $n \to +\infty$.

5. En factorisant par le terme de plus haut degré
$$\sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}.$$
On a le développement limité
$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)$$
d'où
$$\sqrt{n^2+1} = n\left[1+\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = n+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
et donc
$$\cos\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = \cos\left[n\pi+\frac{\pi}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = (-1)^n\cos\left[\frac{\pi}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$
On a le développement limité
$$\cos x = 1+\underset{x\to 0}{o}(1)$$
d'où
$$\cos\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = (-1)^n\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$
et donc
$$\boxed{\cos\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n.}$$

Exercice 3

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\frac{1}{n^2}.$$
En revenant à la définition de la limite d'une suite, montrer que u converge vers 0.

On veut montrer que :
$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N \Longrightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{n^2}-0\right|}_{=\frac{1}{n^2}}\leq\varepsilon. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon>0$ **quelconque**.

- *Analyse.* Si un tel $N\in\mathbb{N}^*$ existe, alors
$$\frac{1}{N^2}\leq\varepsilon$$
d'où
$$N\geq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$
- *Synthèse.* Posons
$$N=\left\lfloor\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right\rfloor+1\in\mathbb{N}^*.$$
Alors
$$N\geq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

d'où

$$\frac{1}{N^2} \leq \varepsilon.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon.$$

On a donc montré (1), donc par définition u converge vers 0.

Exercice 4

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que si

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

alors u et v convergent vers 1 (*indication : on pourra raisonner par l'absurde).*

Supposons que u ne converge pas vers 1.

- Faisons la négation de « u converge vers 1 » :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon.$$

  Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n = n_N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n_N \geq N \quad \text{et} \quad |u_{n_N} - 1| > \varepsilon.$$

  Comme $0 \leq u_{n_N} \leq 1$, on a $|u_{n_N} - 1| = 1 - u_{n_N}$ donc

$$u_{n_N} < 1 - \varepsilon.$$

- Comme uv converge vers 1, on sait qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N' \Longrightarrow |u_n v_n - 1| \leq \varepsilon$$

  donc en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N' \Longrightarrow 1 - \varepsilon \leq u_n v_n.$$

- On a alors, pour $N = N'$,

$$1 - \varepsilon \leq u_{n_N} \underbrace{v_{n_N}}_{\leq 1} \leq u_{n_N} < 1 - \varepsilon$$

  donc $1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon$ ce qui est absurde.

Finalement, u converge vers 1. On montre exactement de même que v converge vers 1.

Exercice 5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

La suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle la *suite des moyennes de Cesàro* de u.

1. (a) Montrer que si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors v converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Remarque : la raison d'avoir pris $\varepsilon/2$ apparaîtra plus tard dans les calculs.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$$

d'où par inégalité triangulaire

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|.$$

Si $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &\leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell|}_{=A_N} + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leq \frac{A_N}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{A_N}{n} + \underbrace{\frac{n+1-N}{n}}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{A_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Comme N est fixé et que A_N ne dépend pas de n, on a

$$\frac{A_N}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N' \Longrightarrow \left|\frac{A_N}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Remarque : la raison d'avoir pris $\varepsilon/2$ apparaît plus bas.
Posons $N'' = \max(N, N') \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq N''$, comme $n \geq N$ et $n \geq N'$, on a

$$|v_n - \ell| \leq \frac{A_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Remarque : c'est pour avoir ε qu'on a pris $\varepsilon/2$ dans (2) et (3).
Finalement, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N'' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N'' \Longrightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que v converge vers ℓ.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

Si $u_n = (-1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

d'où

$$|v_n| = \frac{1}{n}\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc v converge vers 0, alors que u n'est pas convergente.

(c) Montrer que si

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) + \frac{u_0}{n}.$$

On reconnaît pour le terme de gauche le terme général de la suite des moyenne de Cesàro de la suite $(u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers ℓ par hypothèse. D'après la question 1 on a donc

$$\frac{u_n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell} + \underbrace{\frac{u_0}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

2. (a) Dans cette question on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer que si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0,$$

alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Puisque $\ell > 0$, par continuité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell.$$

En appliquant la question 1(c), nous obtenons

$$\frac{\ln u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$$

donc, par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln u_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\ln \ell) = \ell.$$

(b) En déduire la limite de la suite $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \times \frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} = 4 - \frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$$

donc d'après la question précédente,

$$p_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

3. (a) Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} w_k}.$$

Montrer que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que

$$w_{n+1} = \sqrt{w_n + \sum_{k=0}^{n-1} w_k} = \sqrt{w_n + w_n^2}$$

On a donc

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{w_n}}.$$

Or, puisque $w_n > 0$,

$$w_{n+1} = \sqrt{w_n + w_n^2} \geq \sqrt{w_n^2} = w_n$$

donc w est croissante, d'où

$$w_n \geq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} w_k} \geq \sqrt{n w_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc par continuité de la racine carrée en 1,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{w_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1.$$

(b) En déduire un équivalent de w.

On a

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(w_{n+1} - w_n)(w_{n+1} + w_n)}{w_{n+1} + w_n} = \frac{w_{n+1}^2 - w_n^2}{w_{n+1} + w_n} = \frac{w_n}{w_{n+1} + w_n} = \frac{1}{1 + \frac{w_{n+1}}{w_n}}$$

donc d'après la question précédente

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

La question 2(a) montre alors que

$$\frac{w_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

Exercice 6

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que les suites a et b sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geq 0$$
d'où $a_n \geq b_n$ pour tout entier $n \geq 1$.
- On a
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$
et par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, puisque $b_n > 0$:
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{(b_n)^2} = b_n$$
donc a est décroissante et b est décroissante.
- De plus, si $n \geq 1$,
$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} \leq \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{b_n b_n}}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}$$
donc par une récurrence immédiate, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < a_n - b_n \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^n}.$$
Comme $\frac{|a_0-b_0|}{2^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, la suite $a - b$ tend vers 0.

La suite a est décroissante, la suite b est croissante et la suite $a - b$ tend vers 0, donc les suites a et b sont adjacentes.

Remarque : la limite commune de a et b s'appelle moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.