上海交通大学巴黎卓越工程师学院 (A)
Devoir surveillé de SPEIT - Sujet A

2023至 2024 学年,第1学期
Année universitaire 2023–2024, 1er semestre
2023年12月1日 1er décembre 2023

课程名称：电磁学基础
Cours : Fondements de l'électromagnétisme

PHY3305P

TD分组 N° de groupe de TD		学号 N° d'étudiant(e)	
中文姓名 Nom, prénom chinois		法文名字 Prénom français	

成绩 Note	

说明
Avertissements

- 考试时间：1小时40分钟。
  Durée de l'examen : 1 heure 40 minutes.
- 可以使用计算器，但不能使用任何其它电子设备（包括手机、平板电脑）和参考资料，也不能带自己的草稿纸。
  L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Les autres outils électroniques (téléphone, tablette, etc.) et tous les documents sur papier sont strictement interdits. Il est également interdit d'apporter son propre papier de brouillon.
- 各个大题是不相关的。请尽量作答所有的大题，至少是其中一部分题目。
  Les exercices sont indépendants. Vous devez traiter tous les exercices, au moins partiellement.
- 请注意书写质量会影响阅卷老师批改试卷：字体不清或者语言表述不清的答案将会被酌情扣分。
  La correction tient compte de la qualité de la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Problème I - (28 points)

I. Propagation d'une onde polarisée à travers un morceau de Scotch®

On désigne par le terme Scotch® un ruban adhésif qui se présente généralement sous forme de rouleau (voir figure 1).

Figure 1 - Scotch de bureau

Le scotch est un milieu biréfringent, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch® assimilé à une lame à faces parallèles, orthogonales à l'axe Oz, d'épaisseur e. On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+Oz$), monochromatique de longueur d'onde λ_0, polarisée rectilignement de la forme :

$$\vec{E} = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_{0y}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

On admet que :
- pour une polarisation rectiligne selon Ox, l'onde se propage à la vitesse $v_0 = \dfrac{c}{n_0}$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon Oy, l'onde se propage à la vitesse $v_e = \dfrac{c}{n_e}$ dans la lame, avec $n_e = n_0 + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation.

L'origine de l'axe Oz est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

I.1 Les axes Ox et Oy sont appelés « *lignes neutres* » ou « *axes* » de la lame.

Préciser l'appellation axe lent et axe rapide.

Selon chaque axe de la lame, l'onde se propage à une vitesse $v = \frac{c}{n}$. Cette vitesse dépend de l'indice n.
Si $n_1 < n_2$ alors $v_1 > v_2$. On parle d'axe rapide selon 1, axe lent selon 2.

Parmi les axes Ox et Oy, quel est l'axe lent ? quel est l'axe rapide ? Justifier.

Ici $n_x = n_0 < n_y = n_0 + \Delta n$ donc $v_x > v_y$.
Ici l'axe Ox est l'axe. et l'axe Oy est l'axe lent.

I.2 En sortie de la lame (c'est-à-dire en $z = e$), on a :

$$\vec{E} = E_{0x}\cos(\omega t - \varphi_x)\vec{e}_x + E_{0y}\cos(\omega t - \varphi_y)\vec{e}_y$$

Pour $z = e$, exprimer φ_x puis φ_y en fonction de n_0, n_e, e et λ_0.

$$\varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 e$$

$$\varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_e e$$

En déduire l'expression de $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ en fonction de n_0, n_e, e et λ_0.

$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

$\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(n_e - n_o\right) e$

I.3 L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes Ox et Oy. On a alors :

$$E_{0x} = E_{0y} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

On considère que la lame se comporte comme une lame quart d'onde.

Etablir une relation entre e, Δn et λ_0.

lame $\dfrac{\lambda}{4}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \dfrac{\pi}{2} = \varphi_y - \varphi_x$

$\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(n_e - n_o\right) e = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta n = \dfrac{\lambda_0}{4e}$

Application numérique

Pour $\Delta n =$ $4{,}87.10^{-3}$ et $\lambda_0 = 546nm$, calculer l'épaisseur e du morceau de scotch.

$e = \dfrac{\lambda_0}{4\,\Delta n}$

an $e = \dfrac{546.10^{-9}}{4 \times 4{,}87.10^{-3}} = 2{,}8\ 10^{-6}\ m = 28\ \mu m$

Quel est l'état de polarisation de l'onde en sortie de la lame ? Expliquer.

A l'entrée $(z = 0)$ $\rightarrow$ En sortie $(z = e)$

$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{E}' = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$

$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = +\dfrac{\pi}{2} > 0$, $E_{0x} = E_{0y} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$

donc c'est une onde polarisée circulaire gauche $(\varphi > 0)$

Problème II - (34 points)

II. Transfert de puissance

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission sans fil. Par exemple, pour recharger son téléphone portable, on utilise un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice. On médélise le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 2.

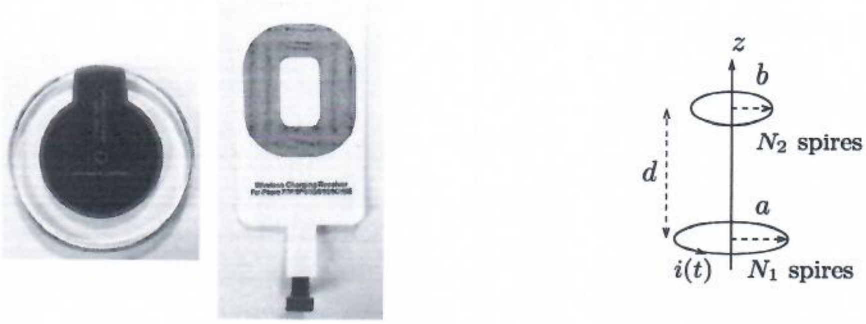

Figure 2 - A gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. A droite : schéma et notations utilisées.

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique R_1 et d'inductance propre L_1, comportant N_1 spires circulaires de rayon a, est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 6).

II.1 On note $P_{\text{reçue}}$ la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur.

Définir et exprimer $P_{\text{reçue}}$ en fonction de L_1, R_1, de l'intensité $i(t)$ et de sa dérivée $\frac{di}{dt}$.

$P_{reçue} = \left(R_1 i + L_1 \frac{di}{dt}\right) i = R_1 i_1^2 + L_1 i \frac{di}{dt}$

En déduire la moyenne temporelle de cette puissance $< P_{\text{reçue}} >$ en fonction de R_1 et I_0.

$P_{reçue} = R_1 I_0^2 \cos^2(wt) + L_1 I_0 \cos(wt) \times I_0(-w \sin wt)$

$\langle P_{reçue} \rangle = R_1 I_0^2 \langle \cos^2 wt \rangle - L_1 I_0^2 w \langle \cos wt \sin wt \rangle$

$\langle P_{recue} \rangle = \frac{R_1 I_0^2}{2}$

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique R_2, d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires circulaires de rayon b, située à une distance d de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point $M(z)$ de l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

II.2 On note Φ le flux du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice.

Exprimer Φ en fonction de $i(t)$, a, b, d, N_1 et N_2.

pour $z = d$.

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}} N_2 \, dS_2$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i(t) a^2 \pi b^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}}$$

II.3 Le courant $i(t)$ étant variable, il apparaît une force électromotrice (fém) $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice.

Quel phénomène est mis en évidence ? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci.

On met en évidence le phénomène d'induction EM.

Equation locale de (M.F) $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fém $e(t)$ en fonction de I_0, ω, t, a, b, d, N_1 et N_2. On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$e(t) = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}} I_0 \omega \sin(\omega t)$$

II.4 On néglige l'inductance propre L_2 de la bobine réceptrice. On note $P_{\text{géné}}$ la puissance reçue par la bobine réceptrice de la part de la bobine émettrice.

En déduire $P_{\text{géné}}$ en fonction de I_0, ω, a, b, d, N_1, N_2 et R_2.

$$P_{\text{géné}} = e(t)\, i_2 = \frac{e^2}{R_2}$$

$$P_{\text{géné}} = \frac{1}{R_2}\left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 I_0 \omega}{2(d^2+a^2)^{3/2}} \sin(\omega t)\right]^2$$

En déduire la moyenne temporelle $< P_{\text{géné}} >$ en fonction de I_0, ω, a, b, d, N_1, N_2 et R_2.

$$\langle P_{géné} \rangle = \frac{1}{R_2}\left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 I_0 \omega}{2(d^2+a^2)^{3/2}}\right]^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle$$

$$\langle P_{géné} \rangle = \frac{1}{2R_2}\left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 I_0 \omega}{2(d^2+a^2)^{3/2}}\right]^2$$

II.5 On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{< P_{\text{géné}} >}{< P_{\text{reçue}} >}$$

Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k\frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 \left(d^2 + a^2\right)^3}$$

avec k un coefficient sans dimension. En déduire l'expression de k.

$$\eta = \frac{\langle P_{géné} \rangle}{\langle P_{reçue} \rangle} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}R_2}\left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 I_0 \omega}{2(d^2+a^2)^{3/2}}\right]^2}{\frac{R_1}{\cancel{2}} I_0^2}$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{4}\frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2+a^2)^3} \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Problème III - (34 points)

III. Protection des données bancaires par conduction

Données générales
Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8$ m.s^{-1}

Données sur l'aluminium métallique
Conductivité en régime permanent $\gamma_0 = 38 \times 10^6$ S.m-1

Pour éviter un piratage des données du téléphone portable, il suffit d'insérer une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone.
On considère l'aluminium comme est un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. Les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}$ soumis à l'action d'un champ électrique variable $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, sont soumis selon le modèle de Drude, à une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\vec{v}(t)$ où τ est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ $1,0 \times 10^{-14}$s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

III.1 Expression du vecteur vitesse

Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ des électrons.

Système étudié : 1 e^-, de masse m, de charge $-e$

Bilan des forces : poids négligé

Force de Drude : $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}(t)$

Force EM : $\vec{F} = (-e)\vec{E} + (-e)\vec{v}\wedge\vec{B}$

(M.F) $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \Leftrightarrow B \sim \frac{E}{v_\varphi}$

$\frac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v}{v_\varphi}$ si $v \ll v_\varphi$ alors on peut négliger la force magnétique devant la force électrique.

$(-e)\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \left(-\frac{e}{m}\right)\vec{E}$.

Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_0 \exp(i\omega t)$ où $\underline{\vec{v}}_0$ est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.

$\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = \underline{\vec{v}_0} \times i\omega \times e^{i\omega t}$

$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{\vec{v}} = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}$

$\underline{\vec{v}} = \frac{-\frac{e}{m}\tau}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}} = -\frac{e\tau}{m}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau}\right)\underline{E_0}\exp(i\omega t)\vec{u_x} = \underline{\vec{v}_0}\exp(i\omega t)$

$\underline{\vec{v}_0} = -\frac{e\tau}{m}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau}\right)E_0\vec{u_x}$

III.2 On note $n*$ la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres.

Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.

$\underline{\vec{j}} = n^* q\underline{\vec{v}} = (-e)n^*\underline{\vec{v}}$ seuls les e^- sont mobiles

III.3 On note γ_0 la conductivité électrique « statique » et $g(\omega)$ une fonction dépendant de la pulsation ω.

Montrer que l'on peut établir une loi d'ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu $\underline{\gamma}$ peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\,g(\omega)}$ ~~où γ_0~~.

$\underline{\vec{j}} = (-e)n^*\left(-\frac{e\tau}{m}\right)\left(\frac{1}{1+i\omega\tau}\right)\underline{E_0}\,e^{i(\omega t)}\vec{u_x}$

$\underline{\vec{j}} = \frac{n^*e^2\tau}{m}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau}\right)\underline{\vec{E}}$

$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$ avec $\underline{\gamma} = \frac{n^*e^2\tau/m}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$

En déduire une expression des grandeurs γ_0 et $g(\omega)$ en fonction des données de l'énoncé.

$$\gamma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

$$g(\omega) = \omega \tau$$

III.~~4 Pour les communications NFC-RFID, on utilise une fréquence de 14MHz.~~

Déterminer la valeur de la fréquence limite f_{lim} en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.

si $\omega\tau \ll 1$, on peut écrire $\vec{\jmath} = \gamma_0 \vec{E}$ (en réel).
c-à-dire $2\pi f \tau \ll 1$

$$f \ll \frac{1}{2\pi\tau} \quad \text{an} \quad f \ll \frac{1}{2\pi . 1,0.10^{-14}} = 1,6.10^{13}\ Hz.$$

Peut-on écrire la loi d'ohm sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ pour les communications NFC-RFID ?

Pour les communications NFC-RFID, la fréquence est égale à 14 MHz. $14.10^6\ Hz \ll 1,6.10^{13}\ Hz$.
Oui, on peut écrire $\vec{J} = \gamma_0 \vec{E}$.

III.5 On note $\vec{j}$ le vecteur densité de courant et $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ le vecteur densité de courant de déplacement.

Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère.

$$(M.A) \quad \vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D)$$

Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre $\|\vec{j}\|$ et $\|\vec{j}_D\|$.

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{J}_D\| \simeq \varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\| \\ \|\vec{J}\| \simeq \gamma_0 \|\vec{E}\| \end{array}\right\} \quad \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}\|} \simeq \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0}$$

$$\text{an} \quad \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}\|} \simeq \frac{8,85.10^{-12} . 2\pi . 14.10^6}{38.10^6} = 2,05.10^{-11} \ll 1$$

on peut négliger le courant de déplacement devant le "vrai" courant dans l'aluminium à 14 MHz.

En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette simplification ?

$$\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \vec{rot}\, \vec{B}_{QS}$$

On est alors dans l'ARQS magnétique