Table des matières

Chapitre 1

Compléments de topologie

1.1 Connexité

1.1.1 Connexité par arcs

Définition 1.1 – Chemin

Soit x et y deux points de (E, d). On appelle *chemin (continu)* de x à y dans E toute application $p : [0, 1] \longrightarrow E$ continue telle que $p(0) = x$ et $p(1) = y$. On dit alors que x est relié à y dans E.

Définition 1.2 – Connexe par arcs

Soit $A \subset (E, d)$, on dit que A est *connexe par arc*, si pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe un chemin de x à y dans A. Cela s'écrit encore

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \exists p \in \mathscr{C}([0, 1], A),\ \ p(0) = x \text{ et } p(1) = y$$

Exemple 1.1 – Connexes par arcs

Dans $\mathbb{R}$

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Dans les matrices

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc, mais $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ le sont.

Propriété 1.1 – Image d'un connexe par arcs par une application continue

L'image d'un connexe par arc par une application continue est encore un connexe par arc (généralise le théorème des valeurs intermédiaires).

Démonstration

Soit E un connexe par arcs, E' un espace métrique et $f : E \longmapsto E'$ une application continue. Montrons que $f(E)$ est connexe par arcs.
Soit $(x', y') \in f(E)^2$, alors il existe $(x, y) \in E^2$, tels que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. Mais, comme E est connexe par arcs, il existe un chemin p allant de x à y dans E. En ce cas, $f \circ p$ est un chemin allant de x' à y' dans $f(E)$.

Exemple 1.2

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. (Ils sont cependant équipotents !)

Démonstration du non-homéomorphisme

S'il existait ϕ un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\mathbb{R} \setminus \left\{\phi\left((0,0)\right)\right\}$ seraient homéomorphes, mais le premier est connexe par arcs, le deuxième ne l'est pas.

Remarque 1.1

1. Les convexes et les étoilés sont connexes par arc. (Voir les définitions 1.30, page 58 de MATH2308P).
2. Une réunion de connexes par arcs *d'intersection non vide* est un connexe par arc
   si pour tout $i \in I$, C_i est un connexe par arc d'un espace métrique (E, d) et $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est un connexe par arc.

Définition 1.3 – Composante connexe par arcs

Soit $A \subset (E, d)$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $A \times A$ par

$$\forall (x, y) \in A \times A, \left[x\mathcal{R}y\right] \overset{\text{Def}}{\iff} \left[x \text{ est relié à } y\right]$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A. Ces classes d'équivalence sont appelées les *composantes connexes par arcs de* A et forment une partition de A. La classe d'équivalence de $x \in A$ est appelée la composante connexe par arcs de x dans A

Remarque 1.2

La composante connexe par arcs de x dans A est la plus grande partie connexe par arcs de A contenant x.

Propriété 1.2 – Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Démonstration

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et notons $(E_i)_{i\in I}$ indexé par un ensemble I les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}$. On a alors

1. *$\forall i \in I$, E_i est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.* En effet, pour $i \in I$ fixé, E_i est connexe par arc donc E_i est un intervalle. Supposons qu'il ne soit pas ouvert, alors on a, par exemple que

$$]a, b] \subset E_i \text{ et } \exists \varepsilon > 0,\ ]b, b+\varepsilon[\cap E_i = \varnothing$$

Ceci est impossible, car $\mathcal{O}$ est ouvert, donc comme $b \in \mathcal{O}$, il existe un $\delta > 0$, $[b, b+\delta[\subset \mathcal{O}$.

2. *Les intervalles sont disjoints.* Par définition d'une partition.
3. *I est dénombrable.* On a une application injective de I dans $\mathbb{Q}$ (qui est dénombrable)

$$i \longmapsto x_i \in E_i \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

1.1.2 Connexité

Définition 1.4 – Connexe

Soit $A \subset (E, d)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Si $B \subset A$ est un ouvert et un fermé de A, alors $B = \varnothing$ ou $B = A$.
2. $\forall (O_1, O_2)$ ouverts de A, $A = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$.
3. Toute fonction continue $f : A \longrightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, on dit que A est *connexe*.

Remarque 1.3

Un connexe n'est donc jamais réunion de deux ouverts disjoints, ni, d'ailleurs, réunion de fermés disjoints. En gros, il est en un seul morceau !

Proposition 1.1

Un connexe par arc est connexe. La réciproque est fausse en général.

Démonstration

Soit E un connexe par arcs, et soit deux ouverts O_1 et O_2 tels que $E = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, supposons que $O_1 \neq \varnothing$ et $O_2 \neq \varnothing$, soit $a \in O_1$ et $b \in O_2$ et $\varphi : [0,1] \longrightarrow E$ continue, telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. On a alors

$$[0,1] = \varphi^{-1}(O_1) \cup \varphi^{-1}(O_2) \text{ et } \varphi^{-1}(O_1) \cap \varphi^{-1}(O_2) = \varnothing$$

et $\varphi^{-1}(O_1)$ et $\varphi^{-1}(O_2)$ sont des ouverts non vides de $[0,1]$. Ceci est impossible, en considérant $\sup \varphi^{-1}(O_1)$ par exemple.

Exemple 1.3 – Connexe non connexe par arcs

$$\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right),\ x \in \mathbb{R}^* \right\} \bigcup \{0\} \times [-1,1]$$

est connexe, non connexe par arcs.

Théorème 1.1 – Ouverts connexes d'un espace vectoriel normé

Dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs (voir la figure 1.1, page 55).

Démonstration

Soit O un ouvert connexe non vide de E, soit $(x,y)\in O^2$, considérons

$$\Delta=\left\{x'\in O,\ \exists\varphi\in\mathscr{C}([0,1],O),\ \varphi(0)=x \text{ et } \varphi(1)=x'\right\}$$

— On a $\Delta\neq\varnothing$, car $x\in\Delta$;
— Δ est ouvert dans O, car si $x'\in\Delta$, il existe $r>0$, $BO(x',r)\subset O$, et tout point $x''\in BO(x',r)$ peut être relié à Δ par le segment $[x',x'']$ et x à x' à l'aide d'une fonction $\varphi\in\mathscr{C}([0,1],O)$, alors $x''\in\Delta$ avec la fonction ψ définie par

$$\forall t\in[0,1],\ \psi(t)=\begin{cases}\varphi(2\,t) & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ x'+(2\,t-1)\,.(x''-x') & \text{si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

— Δ est fermé dans O, par le même raisonnement que ci-dessus (la boule est convexe, donc connexe par arcs).

Donc, comme O est connexe, $\Delta=O$, en particulier $y\in\Delta$, ce qui montre la connexité par arcs de O.

Propriété 1.3 – Image d'un connexe par une application continue

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

Démonstration

Soit $f:E\longrightarrow E'$ où E est connexe, alors si O'_1 et O'_2 sont deux ouverts de $f(E)$ tels que $f(E)=O'_1\cup O'_2$ et $O'_1\cap O'_2=\varnothing$, alors $O_1=f^{-1}(O'_1)$ et $O_2=f^{-1}(O'_2)$ sont deux ouverts de E qui vérifient

$$E=O_1\cup O_2 \text{ et } O_1\cap O_2=\varnothing$$

Comme E est connexe, on trouve que soit O_1 (et donc O'_1), soit O_2 (et donc O'_2) est vide.

Propriété 1.4

Si A est connexe dans E, alors $\overline{A}$ est aussi connexe, ainsi que tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$.

Démonstration

Soit $f : B \longrightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue, alors f est continue sur A, qui est connexe. Donc f est constante sur A donc sur B car $B \subset \overline{A}$.

Propriété 1.5

Une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur $\cup_{i\in I} A_i$, où les A_i sont des connexes. f est donc continue sur chaque A_i et donc constante sur chaque A_i (soit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ la valeur prise sur A_i), alors si $i \neq j$, comme $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, on a $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Remarque 1.4

On a même montré qu'une réunion de connexes qui se rencontrent 2 à 2 est connexe.

Propriété 1.6

Soit (A, d) un ensemble connexe et (X, d') un espace métrique discret, c'est-à-dire dont tous les points sont isolés. Alors toute fonction continue $f : A \longrightarrow X$ est constante.

Définition 1.5 – Composante connexe

Soit $A \subset (E, d)$, $a \in A$, on appelle *composante connexe de a dans A* le plus grand connexe de A contenant a. On la notera $C_A(a)$.

Remarque 1.5

La relation

$$[x\mathcal{R}y] \iff \big[x \in C_A(y)\big]$$

est clairement une relation d'équivalence sur A, elle induit une partition de A. Ainsi, tout sous-ensemble A de E est réunion disjointe de ses composantes connexes.

Remarque 1.6

De plus, $C_A(a)$ est toujours fermé dans A. (C'est faux pour les composantes connexes par arcs).

Démonstration

$C_A(a)$ est un connexe, donc $\overline{C_A(a)}$ est aussi connexe, or $C_A(a)$ est le plus grand des connexes contenant A, donc

$$C_A(a) = \overline{C_A(a)}$$

Remarque 1.7

Une partition de A en ouverts connexes est la partition en composantes connexes de A. (C'est faux pour les fermés, les singletons sont fermés !)

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Préciser les composantes connexes (par arcs) des ensembles suivants

(a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(b) Les matrices de rang r de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, celles de rang $\geqslant r$ et celles de rang $\leqslant r$.

(c) $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$.

1.1.2 Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 - x_n^2$$

Quelles sont les composantes connexes de $E = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \neq 0\}$?

1.1.3 Montrer que $[0, 1]$ n'est pas réunion dénombrable de fermés disjoints non vides.

1.1.4 Soit Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^3$, et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de droites de $\mathbb{R}^3$, montrer que

$$\Omega\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) \text{ est connexe par arcs}$$

1.1.5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que

$$[f \text{ continue}] \iff \big[E\backslash \operatorname{Ker} f \text{ non connexe par arcs}\big]$$

1.1.6 Soit X une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contenant strictement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que X est connexe par arcs.

1.1.7 Soit (E, N) un espace vectoriel de dimension infinie, et soit K un compact de E. Montrer que

$$E\backslash K \text{ est connexe par arcs}$$

1.1.8 Soit K une partie convexe et bornée de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le complémentaire de K est connexe par arcs.

1.1.9 Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.10 Existe-t-il $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall c \in \mathbb{R},\ f^{-1}(\{c\}) \text{ est compact non vide ?}$$

1.1.11 Soit (E, N) un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E.

(a) On suppose que A et B sont connexes par arcs, montrer que $A + B$ est connexe par arcs.

(b) On suppose que A et B sont connexes, que peut-on dire de $A + B$?

1.2 Complétude

1.2.1 Suites de Cauchy

Définition 1.6 – Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique, on appelle *suite de Cauchy* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$$

Propriété 1.7

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, N associé, posons

$$R = \max(d(u_0, u_N), \ldots, d(u_{N-1}, u_N), \varepsilon)$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in BF(u_N, R)$$

Propriété 1.8

Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\lambda \in E$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors on fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[d(u_n,\lambda) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

Soit alors $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$, on a

$$d(u_p,u_q) \leqslant d(u_p,\lambda) + d(\lambda,u_q) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Proposition 1.2

Soit u une suite de Cauchy. Alors u est convergente si, et seulement si, $\mathrm{Adh}(u) \neq \varnothing$.

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Si u converge vers λ, alors
$$\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\} \neq \varnothing$$
2. $(\Leftarrow)$ Soit $\lambda \in \mathrm{Adh}(u)$, il existe alors une sous-suite
$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on a un N_1 associé tel que

$$\forall n \geqslant N_1,\ d(u_{\varphi(n)}, \lambda) \leqslant \varepsilon$$

On a aussi l'existence d'un N_2 tel que

$$\forall p \geqslant q \geqslant N_2,\ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$$

Finalement, si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$, on a

$$\forall n \geqslant N,\ d(u_n, \lambda) \leqslant d(u_{\varphi(n)}, \lambda) + d(u_n, u_{\varphi(n)}) \leqslant 2\,\varepsilon$$

Ce qui montre la convergence de u vers λ.

Propriété 1.9

Toute suite de Cauchy **à valeurs réelles est convergente.**

Démonstration

Soit u une suite de Cauchy réelle, elle est donc bornée. On peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß. Donc $\mathrm{Adh}(u) \neq \varnothing$, ce qui nous permet d'affirmer que u est une suite convergente.

Exemple 1.4 – Suites de Cauchy

Non convergente (cas métrique)

Dans $(\mathbb{Q}, |\ |)$, la suite

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$$

est une suite de Cauchy, mais elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Non convergente (cas normé)

Dans $\mathrm{Vect}(\{x \longmapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\})$, muni de la norme $\|P\|_\infty = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.(x \longmapsto x^k) \text{ est de Cauchy, mais n'est pas convergente !}$$

Remarque importante 1.8

En gros, une suite de Cauchy converge, mais la limite est éventuellement *en dehors* de l'espace où on se trouve. Ainsi, pour construire une suite de Cauchy non-convergente, on part d'un objet en dehors de l'espace et on l'approche (pour la norme ou la distance concernée) par des éléments de l'espace.

Exemple 1.5

Dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, une suite de Cauchy divergente pour la norme $\|\ \|_{1,[0,1]}$ est donnée figure 1.2, page 56.

Définition 1.7 – Espace complet

Un espace (E, d) où toute suite de Cauchy converge est dit *complet*. Dans le cas des espaces vectoriels normés complets, on parle d'espace *de Banach*.

Exemple 1.6 – Espaces complets

Cas élémentaire

$(\mathbb{K}, |\ |)$ est un espace de Banach.

Espace fonctionnel

$$(\mathscr{C}(I, \mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est un espace de Banach. En revanche, cet espace (noté E) n'est pas complet pour la norme $\|\ \|_1$.

Démonstration du cas élémentaire

On utilise comme dans $\mathbb{R}$, le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Démonstration dans l'espace fonctionnel

1. *Il est complet pour la (pseudo-)norme infinie.*

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme infinie. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \big[p \geqslant q \geqslant N\big] \implies \left[\underbrace{\|f_p - f_q\|_{\infty,I} \leqslant \varepsilon}_{\text{ou } \forall x\in I,\ |f_p(x)-f_q(x)|\leqslant\varepsilon}\right]$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, N associé. Soit $x \in I$, alors la suite

$$\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy de } \mathbb{K}$$

Elle est donc convergente, notons $f(x)$ sa limite.

- *Il reste à montrer que $f \in E$ et que la suite converge vers f.*

f est dans $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ ensemble sur lequel on peut encore parler de norme infinie. On a, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$\forall q \geqslant N,\ \underbrace{\forall x \in I,\ |f(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon}_{\text{ou } \|f-f_q\|_{\infty,I}\leqslant\varepsilon}$$

f est continue, car, si $x_0 \in I$, alors f_N étant continue, on a un $\eta > 0$ associé à ε, le pas de continuité de f_N en x_0, alors, si $x \in I$, avec $|x - x_0| \leqslant \eta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leqslant\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{\leqslant\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant 3\,\varepsilon$$

2. *Il n'est pas complet pour la (pseudo-)norme* 1.

Voir l'exemple 1.5, page 19.

Pour montrer qu'un espace est complet, on prend une suite de Cauchy et

1. on construit la limite dans un espace plus gros ;
2. on montre qu'il y a convergence dans cet espace plus gros (compatible en distance ou norme avec celui de départ) ;
3. on montre que la limite est dans l'espace de départ.

Propriété 1.10

Un sous-ensemble fermé d'un espace complet est lui-même complet.

Démonstration

Si F est un fermé dans un espace complet E, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F. C'est aussi une suite de Cauchy de E qui est complet, elle converge donc vers $\lambda \in E$. Mais, comme F est fermé dans E, $\lambda \in F$.

Remarque 1.9

Un espace compact est complet.

Démonstration

Soit E un espace compact, alors soit x une suite de Cauchy de E. Comme E est compact, $\mathrm{Adh}(x) \neq \emptyset$, donc x est une suite convergente.

Propriété 1.11

Si E' est un espace de Banach, $(\mathscr{L}\mathscr{C}(E,E'), \|\!|\ \|\!|_{N,N'})$ est aussi un espace de Banach.

Démonstration

On suit le plan

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}\mathscr{C}(E,E')^{\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy pour la norme $\|\!|\ \|\!|_{N,N'}$. Alors, on a
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in E,\ N'\left(u_p(x) - u_q(x)\right) \leqslant \|\!| u_p - u_q \|\!|_{N,N'}\ N(x)$$
La suite $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E' complet. Elle converge donc. Notons $u(x)$ sa limite.
De plus, soit $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$
$$\forall x \in E,\ N'\left(u_q(x) - u_p(x)\right) \leqslant \varepsilon\, N(x)$$
et donc, puisque $u_q(x) \xrightarrow[q\to+\infty]{N'} u(x)$
$$\forall x \in E,\ N'\left(u(x) - u_p(x)\right) \leqslant \varepsilon\, N(x)$$
Ici on ne peut pas en déduire que $\|\!| u - u_n \|\!|_{N,N'} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisqu'on n'a pas encore montré que $u \in \mathscr{L}\mathscr{C}(E,E')$!
2. *u est linéaire,* puisque les u_n le sont.
3. *u est continue,* car elle est lipschitzienne au voisinage de 0_E. En effet, soit $p \in \mathbb{N}$ assez grand pour que
$$\forall x \in E,\ N'\left(u(x) - u_p(x)\right) \leqslant N(x)$$
alors
$$\forall x \in E,\ N'\left(u(x)\right) \leqslant N'\left(u(x) - u_p(x)\right) + N'\left(u_p(x)\right) \leqslant \left(1 + \|\!| u_p \|\!|_{N,N'}\right)\ N(x)$$

4. Ainsi, $u \in \mathscr{L}\mathscr{C}(E, E')$ et la dernière inégalité du premier point se ré-écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \left\| u - u_p \right\|_{N,N'} \leqslant \varepsilon$$

ce qui conclut la démonstration.

Propriété 1.12

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration

Si $(b_1 \ldots, b_p)$ est une base de E, alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est donc bornée. Et les boules fermées sont des compacts. Elle admet donc au moins une valeur d'adhérence ; c'est une suite convergente.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il est souvent beaucoup plus simple d'utiliser des arguments de compacité plutôt que des arguments de complétude. La complétude sert essentiellement à travailler « comme en dimension finie » dans des espaces vectoriels normés de dimension infinie.

Exercice(s) 1.2

1.2.1 On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p} \left(1 + \frac{x}{p\,n}\right)^n, \; n \geqslant 1$$

(a) Soit $a > 0$, montrer que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_{\infty,[-a,+a]}$. *On pourra couper la somme en deux morceaux judicieusement choisis.*

(b) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ vers une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Soit E l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$.

(a) Montrer que

$$\|f\| = \left(\left|f(0)\right|^2 + \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur E.

(b) Est-elle équivalente à la norme infinie ?

(c) E muni de cette norme est-il complet ?

1.2.3 Soit (E,N) un espace de Banach et Ω un ouvert borné de E, tel que

$$\forall (x,y) \in \Omega^2,\ \exists \omega \in E,\ \exists r > 0,\ x \text{ et } y \in BO(\omega, r) \subset \Omega$$

Montrer que Ω est une boule.

1.2.4 Le plan peut-il être recouvert par des cercles de rayons non nuls disjoints ?

1.2.5 Soit E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in F+G,\ \exists (f,g) \in F \times G,\ \begin{cases} x = f + g \\ \|f\| \leqslant C\,\|x\| \\ \|g\| \leqslant C\|x\| \end{cases}$$

Montrer que la somme $F+G$ est fermée.

1.2.6 Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathscr{L}$ on pose

$$m(f) = \sup_{0 \leqslant x < y \leqslant 1} \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \right\} \text{ et } M(f) = m(f) + |f(0)|$$

Montrer que M est une norme sur $\mathscr{L}$. E, muni de la norme M, est-il complet ? Comparer M et la norme infinie de $\mathscr{L}$.

1.2.2 Théorèmes

Remarque 1.10

Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une fonction. Si f est continue, alors on sait que

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \left[\forall a \in E, \ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} a \right] \Longrightarrow \left[f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{d'} f(a) \right]$$

C'est la caractérisation séquentielle des applications continues.

Remarque 1.11

Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une fonction. Si f est uniformément continue, alors, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy de } E'$$

Remarque 1.12 –

Si f est seulement continue, l'image par f d'une suite de Cauchy *n'est pas nécessairement* une suite de Cauchy !

Exemple 1.7

Prenons E un espace non complet (sinon les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes...), par exemple $E =]0, 1]$, muni de $|\ |$. Prenons une suite de Cauchy de E qui ne converge pas dans E, par exemple [a]

$$x_n = \frac{1}{n+1}$$

Prenons une application continue sur E non uniformément continue. Par exemple

$$f \ : \ x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = n+1, \text{ et } (n+1)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas une suite de Cauchy}$$

---

a. Comme elle converge dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc dans E.

Théorème 1.2 – Point fixe

Soit (E,d) un espace complet et f une application de E dans E contractante *(i.e. $\exists k \in]0,1[,\ \forall (x,y) \in E^2$, $d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k\, d(x,y)$.), alors :*

$$\exists! a \in E,\ f(a) = a$$

Démonstration

1. *Existence.*

   Soit $x_0 \in E$ quelconque. On pose

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$$

   C'est une suite de Cauchy. En effet, si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, alors (pour $p > q$)

   $$d(x_p, x_q) \leqslant \sum_{j=q}^{p-1} d(x_j, x_{j+1}) \leqslant \sum_{j=q}^{p-1} k^j\, d(x_0, x_1) \leqslant \frac{k^q}{1-k}\, d(x_0,x_1) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$$

   Elle est donc convergente vers $\alpha \in E$, et comme f est continue, on a $\alpha = f(\alpha)$.
2. *Unicité*

   Si $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$, alors

   $$d(\alpha,\beta) = d\big(f(\alpha), f(\beta)\big) \leqslant k\, d(\alpha,\beta)$$

   d'où, comme $k < 1$, $d(\alpha,\beta) = 0$, soit $\alpha = \beta$.

Remarque 1.13

Ce théorème est un résultat extrêmement intéressant ; il permet notamment de prouver l'existence de nombreux objets mathématiques. Citons entre autres le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui donne l'existence et l'unicité d'une solution à une équation différentielle avec une condition initiale, sous certaines conditions de régularité), le théorème des fonctions implicites (qui donne l'existence et l'unicité d'une courbe implicite définie par $f(x,y) = 0$, sous certaines conditions de régularité), etc.

Exemple 1.8 – Utilisation du théorème du point fixe

Reprenons le *théorème des fonctions implicites* dans le cas des courbes du plan. [a] Un plan de démonstration peut-être le suivant

1. Si on considère l'application ($\lambda \in \mathbb{R}^*$)

$$\Phi \,:\, \varphi \longmapsto \Big(x \longmapsto \varphi(x) + \lambda\, f\,\big(x, \varphi(x)\big)\Big)$$

   on voit que trouver la fonction du théorème des fonctions implicites revient à trouver un point fixe de Φ. Si J est un segment, voisinage de a, alors *tant que l'on est sûr que* $\big(x,\varphi(x)\big)$ *reste dans* Δ, Φ envoie toute application de

$$E = \Big\{\psi \in \mathscr{C}^1(J,\mathbb{R}),\ \psi(a) = b\Big\}$$

   dans E.

2. *Partie très technique de la démonstration...* On munit E d'une distance issue de la norme $\psi \longmapsto \|\psi\|_{\infty,J} + \|\psi'\|_{\infty,J}$ qui le rend complet. On montre alors, qu'en précisant les dérivées partielles en x_0 de φ, on peut trouver un intervalle J, une constante λ et un sous-espace affine F de E fermé dans E (donc complet), telle que l'application $\Phi_{|F}$ est contractante de F dans F.

a. L'énoncé est *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\Delta, \mathbb{R})$*, où* Δ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, on suppose connu un* $\overrightarrow{x_0} = (a,b) \in \Gamma_f$ *tel que*

$$\boxed{\partial_2 f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x_0}) \neq 0}$$

alors, il existe un intervalle ouvert I *autour de* a*, un intervalle* J *autour de* b *et une unique application* $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, J)$ *tels que*

$$\forall (x,y) \in I \times J, \qquad (x,y) \in \Gamma_f \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

Définition 1.8 – Séries absolument convergentes

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $\sum x_n$ une série à termes dans E. On dit que la série $\sum x_n$ est *absolument convergente* si la série à termes réels positifs $\sum N(x_n)$ est convergente.

Théorème 1.3 – Séries et espaces de Banach

Soit (E, N) *un espace vectoriel normé. Alors* (E, N) *est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de* E *est convergente dans* E*.*

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que (E, N) est un espace de Banach. Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} N(x_k)$. Alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \geqslant p$,

$$N(S_q - S_p) \leqslant \sum \sum_{k=p+1}^{q} N(x_k) \leqslant T_q - T_p$$

Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme (E, N) est un espace de Banach, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum x_n$ est convergente.
($\Leftarrow$) On suppose que toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente dans E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On construit par récurrence une extraction φ.

— Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N_1, \forall q \geqslant N_1, N(x_p - x_q) \leqslant 1$. On pose $\varphi(1) = N_1$.
— Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N_2, \forall q \geqslant N_2, N(x_p - x_q) \leqslant \frac{1}{2}$. On pose $\varphi(2) = \max(\varphi(1) + 1, N_2)$.
— Supposons $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ construits. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, N(x_p - x_q) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. On pose $\varphi(n+1) = \max(\varphi(n) + 1, N)$.

On a ainsi construit une extraction telle que $N(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Ainsi la série $\sum(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ est absolument convergente, donc elle converge dans E par hypothèse. Par conséquent, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ a donc une valeur d'adhérence, donc elle converge.

Remarque 1.14

Ce résultat est particulièrement utile pour montrer la convergence de séries dans les espaces de fonctions.

Proposition 1.3 – Prolongement des applications uniformément continues

Soit (E,d) *et* (E',d') *deux espaces métriques, tels que* E' est complet, *soit* $A \subset E$

$$f \;:\; A \longrightarrow E' \text{ uniformément continue sur } A$$

Alors, il existe une unique fonction $\tilde{f}$ *définie et continue sur* $\overline{A}$ *telle que*

$$\forall a \in A,\ \tilde{f}(a) = f(a)$$

On l'appelle prolongement de f à $\overline{A}$. *De plus,* $\tilde{f}$ *est uniformément continue sur* $\overline{A}$.

Démonstration

1. *Existence.* Soit $\alpha \in \overline{A} \backslash A$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \alpha$$

Cette suite est convergente, donc de Cauchy. Comme f est supposée uniformément continue sur A, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E' qui est complet, elle converge donc vers un élément $\alpha' \in E'$. On pose alors

$$\tilde{f}(\alpha) = \alpha'$$

- *C'est typiquement une fonction mal définie ! Que se passe-t-il si on change la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* α. Il nous faut donc montrer

$\boxed{\alpha' \textit{ ne dépend pas de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ choisie.}}$

Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de A qui converge vers α, alors le même raisonnement nous dit que la suite $\big(f(b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur $\beta' \in E'$. Prenons alors la suite obtenue en mélangeant les deux premières suites

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_{2\,n} = a_n \text{ et } c_{2\,n+1} = b_n$$

La suite c converge vers α et la suite $\big(f(c_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur $\gamma' \in E'$. Mais les suites $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $\big(f(c_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient donc $\alpha' = \gamma' = \beta'$.

$\boxed{\widetilde{f} \textit{ est uniformément continue sur } \overline{A}.}$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, $\eta > 0$ associé à ε, alors, si $(x, y) \in A^2$, sont tels que $d(x, y) \leqslant \eta$, on a $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \varepsilon$. Prenons maintenant deux éléments $(\alpha, \beta) \in \overline{A}^2$, tels que $d(\alpha, \beta) \leqslant \eta/2$, et prenons deux suites de A telles que

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \alpha \text{ et } b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \beta$$

Si n est assez grand, on a simultanément

$$d(a_n, b_n) \leqslant \eta,\ d'\Big(f(a_n), \widetilde{f}(\alpha)\Big) \leqslant \varepsilon \text{ et } d'\Big(f(b_n), \widetilde{f}(\beta)\Big) \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$d'\Big(\widetilde{f}(\alpha), \widetilde{f}(\beta)\Big) \leqslant d'\Big(\widetilde{f}(\alpha), f(a_n)\Big) + d'\big(f(a_n), f(b_n)\big) + d'\Big(f(b_n), \widetilde{f}(\beta)\Big) \leqslant 3\,\varepsilon$$

2. *Unicité.*

Si g et h sont deux prolongements de f à $\overline{A}$ continus, alors g et h coïncident sur A qui est dense dans $\overline{A}$, donc par continuité g et h sont égaux.

Exemple 1.9 – Prolongements utiles

Fonction réelle

Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, uniformément continue, alors f admet une limite en a^+.

Intégrale

On a construit l'intégrale sur les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit

$$\Phi : \begin{cases} \left(\mathscr{C}^0_{\text{p.m.}}([a, b], \mathbb{K}), \| \ \|_{\infty,[a,b]}\right) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

alors, Φ est uniformément continue (car elle est linéaire, lipschitzienne en 0) d'après l'inégalité

$$\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{p.m.}}([a, b], \mathbb{K}),\ |\Phi(f)| \leqslant (b - a) \|f\|_{\infty,[a,b]}$$

Elle peut donc se prolonger à l'adhérence de $\mathscr{C}^0_{\text{p.m.}}([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme $\| \ \|_{\infty,[a,b]}$ dans $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Remarque 1.15

On peut montrer que c'est l'ensemble des fonctions ayant en tout point de $]a, b[$ une limite à gauche et à droite... Nous sommes loin d'avoir la puissance de l'intégrale de Lebesgue que nous allons voir au chapitre suivant.

Théorème 1.4 – Fermés emboîtés, version complète

Soit (E, d) *un espace complet,* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des fermés non vides de* E *tels que*

$$\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \subset F_n$$

Alors

$$\exists! \alpha \in E, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\alpha\}$$

Démonstration

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_n$$

Cette suite est de Cauchy car

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ [p \geqslant q] \implies \left[d(x_p, x_q) \leqslant \operatorname{diam}(F_q) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0 \right]$$

Elle converge donc vers un élément $\alpha \in E$. Mais comme, pour $p \in \mathbb{N}$, la suite

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p} \in F_p^{\mathbb{N}} \text{ et que } F_p \text{ est fermé dans } E\ \alpha \in F_p$$

L'unicité est évidente d'après la propriété du diamètre.

Remarque 1.16

La propriété sur les diamètres (inexistante dans la version compacte) est indispensable, comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}$ suivant

$$F_n = [n, +\infty[$$

Remarque 1.17

On peut même donner des exemples de F_n de diamètres finis qui fournissent un contre-exemple. Prenons la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue dans la démonstration du théorème de Riesz (MATH2308P, théorème 1.5, page 69) E étant supposé ici un espace vectoriel de dimension infinie de Banach, et posons, pour $p \in \mathbb{N}$

$$F_p = \{x_n,\ n \geqslant p\}$$

Comme x n'a pas de valeur d'adhérence, F_p est fermé, non vide. Ils sont clairement emboîtés et

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p = \mathrm{Adh}(x) = \varnothing$$

Mais

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{diam}(F_p) \leqslant 1$$

Théorème 1.5 – Baire

Si (E,d) est complet, alors

$$\forall (O_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ouverts denses de } E,\ \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E$$

Démonstration

C'est une application du résultat précédent.
Soit $x \in E$, soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que

$$BO(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \neq \varnothing$$

— O_0 est dense, donc

$$BO(x,\varepsilon) \cap O_0 \neq \varnothing, \text{ soit } x_0 \in BO(x,\varepsilon) \cap O_0 \text{ ouvert de } E$$

On sait alors qu'il existe une boule de rayon $r_0 > 0$ telle que

$$BF(x_0, r_0) \subset BO(x,\varepsilon) \cap O_0$$

— On construit de proche en proche (donc cela se démontre par récurrence) une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ BF(x_n, r_n) \subset BO(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \text{ et } r_n \leqslant \frac{r_{n-1}}{2}$$

Les boules $BF(x_n, r_n)$ sont donc des fermés non vides emboîtés de diamètre $\leqslant 2\,r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Leur intersection est non vide, réduite à un point $\alpha \in E$. Or

$$\alpha \in BO(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right)$$

Remarque 1.18

Ou encore, un espace complet ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Exemple 1.10 – Utilisation du théorème de Baire

Fonctions polynomiales

$(\mathrm{Vect}(\{x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}), N)$ n'est jamais complet, quelle que soit N.

Une fonction dérivable est-elle lipschitzienne ?

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, alors il existe un intervalle non trivial sur lequel f est lipschitzienne.

Limite à l'infini

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0,\ f(n\,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1. Si f est continue, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Le résultat devient faux si f n'est plus continue.
3. Lorsque l'on a l'uniforme continuité la démonstration est facile.

Démonstration de la non complétude des fonctions polynomiales

$\text{Vect}(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, \ldots, x \longmapsto x^n)$ est un fermé d'intérieur vide... En effet, on a Comme

$$\text{Vect}(\{x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Vect}(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, \ldots, x \longmapsto x^n)$$

le théorème de Baire nous permet de conclure.

Proposition 1.4

Dans un espace vectoriel normé, toute boule ouverte non vide est une partie génératrice !

Démonstration de la proposition

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et $B = BO(x_0, r)$ une boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$. Soit $E_1 = \text{Vect}(B)$. On a

- $BO(0_E, r) \subset E_1$, car si $x \in BO(0_E, r)$, $x + x_0 \in BO(x_0, r) \subset E_1$, et comme $x_0 \in E_1$, on obtient $x \in E_1$.
- $E_1 = E$. En effet, soit $x \in E\backslash\{0_E\}$, alors

$$\frac{r}{2\,N(x)}.x \in BO(0_E, r) \subset E_1 \text{ donc } x \in E_1$$

Démonstration de la fonction dérivable « un peu » lipschitzienne

La suite définie par

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \text{ converge simplement vers } f'$$

$$F_p = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x,\ |f_n(x)| \leqslant p\} \text{ est fermé}$$

Démonstration de la limite à l'infini dans la cas continu

$\varepsilon > 0$ fixé.

$$F_p = \bigcap_{n\geqslant p} \{x,\ |f(n\,x)| \leqslant \varepsilon\} \text{ est un fermé}$$

Définition 1.9 – Partie précompacte

Un ensemble (E, d) est dit *précompact*, si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un ensemble fini de points x_1, …, x_p tels que

$$E = \bigcup_{k=1}^{p} BO(x_k, \varepsilon)$$

Proposition 1.5

Soit (E, d) un espace métrique, alors

$$[E \textit{ compact}\,] \iff [E \textit{ précompact et complet}]$$

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Par l'absurde, si E n'est pas précompact, on construit une suite sans valeur d'adhérence.
2. $(\Leftarrow)$ On construit de manière itérative une suite $(x_{\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans une boule de rayon $1/2^k$. La suite extraite $(x_{\varphi_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy...

Exemple 1.11 – Complétude indispensable

Le caractère complet est indispensable comme le montre l'exemple

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ précompact et non compact}$$

Théorème 1.6 – Borel–Lebesgue

Soit (E, d) un espace métrique, alors

$$[E \text{ compact}] \iff \left[\forall (O_i)_{i\in I} \text{ ouverts de } E, \left(\bigcup_{i\in I} O_i = E\right) \implies \left(\exists J \subset I \text{ fini}, \bigcup_{j\in J} O_j = E\right)\right]$$

(On parle de recouvrement d'ouverts.*)*

Démonstration

1. ($\Leftarrow$) Si on a une suite sans valeur d'adhérence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $F_n = \{x_p,\ p \geqslant n\}$ est une suite de fermés non vides d'intersection vide, ce qui est absurde.
2. ($\Rightarrow$) Si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de E compact, on montre

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \exists i \in I,\ BO(x, \varepsilon) \subset O_i$$

La précompacité permet de conclure.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Soit K un compact d'un espace de Banach, on considère l'enveloppe convexe de K (plus petit convexe contenant K dont on montrera l'existence) que l'on notera $C(K)$

(a) Montrer que

$$\overline{C(K)} \text{ est compact}$$

(b) Montrer qu'en dimension finie $C(K)$ est compact.

(c) Donner un exemple de compact d'un Banach dont l'enveloppe convexe ne soit pas fermée.

1.3.2 Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui est de Banach pour $\| \|_\infty$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Omega_n = \left\{ f \in \mathcal{C},\ \forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1], \middle|\ \text{et} \quad \begin{array}{c} |x-y| < 1/n \\ \\ |f(x) - f(y)| > n\,|x-y| \end{array} \right\}$$

(a) Montrer que Ω_n est un ouvert dense de $\mathcal{C}$. Attention, même *ouvert* mérite une démonstration.

(b) Montrer que si $f \in \cap_{n \geqslant 1} \Omega_n$, f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$. Conclure.

1.3.3 Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. On se propose de montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans $[a,b]$. Quitte à remplacer $[a,b]$ par un sous-intervalle, il suffit de montrer que f a un point de continuité dans $[a,b]$; c'est ce que l'on va faire.

(a) Pour $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, soit

$$F_{N,\varepsilon} = \{x \in [a,b],\ \forall p, q \geqslant N,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon\}$$

Vérifier, si $\varepsilon > 0$ est fixé, que l'un des $F_{N,\varepsilon}$ est d'intérieur non vide.

(b) Construire une suite de segments emboîtés $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs non vides, et une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement croissante telles que

$$\forall p, q \geqslant N_n, \quad \forall x \in [a_n, b_n], \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

(c) Conclure.

(d) Si g est une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que g' est limite simple sur $[a, b]$ de fonctions continues ; qu'en déduit-on ?

1.3.4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet, B le boule unité fermée, et $T : B \longrightarrow B$ telle que

$$\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

(a) Montrer que si $r > 0$, $T_r = \dfrac{1}{r+1}.T$ a un unique point fixe dans B, noté $x(r)$.

(b) En déduire que

$$\inf_{y\in B} \|T(y) - y\| = 0$$

(c) Que peut-on en déduire en dimension finie ?

1.3.5 Soit E un espace vectoriel normé et A une partie complète de E. Soit $f \in \mathscr{C}^0(A, A)$ telle que $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p fois) soit contractante, pour un entier $p \geqslant 2$. Montrer que f possède un point fixe et un seul.

1.3.6 (a) Soit E un espace vectoriel normé complet, et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées telle que $B_{n+1} \subset B_n$. Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \neq \varnothing$$

(b) On note $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On considère une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels dense dans $[0,1]$. On note également

$$C_n = \left\{ f \in E \quad \|f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant 2,\ f(r_0) = f(r_1) = \ldots = f(r_n) = 0,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}$$

Montrer que C_n est convexe, fermé, borné non vide et que $C_{n+1} \subset C_n$. Calculer

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$$

1.3.7 Soit f_n des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $M \geqslant 0$ tels que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant M$$

1.3 Applications aux espaces pré-hilbertiens

Les espaces vectoriels préhilbertiens, sont des espaces vectoriels normés (donc le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont la norme est définie à l'aide d'un produit scalaire. On a plusieurs cas

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle d'*espace préhilbertien réel* (le produit scalaire est alors *bilinéaire* et *symétrique*) ;
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle d'*espace préhilbertien complexe* (le produit scalaire est alors *sesqui-linéaire* [linéaire à droite, semi-linéaire à gauche] et *hermitien*) ;
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la dimension est finie, on parle d'*espace euclidien* ;
4. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et la dimension est finie, on parle d'*espace hermitien*.

1.3.1 Systèmes totaux

Définition 1.10 – Système total d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie, I un ensemble dénombrable infini, une famille $(x_n)_{n\in I}$, est dite *système total de E*, si elle vérifie

1. $(x_n)_{n\in I}$ est orthonormée ;
2. le sous-espace vectoriel engendré par les $(x_n)_{n\in I}$ est *dense* dans E, pour la norme associée au produit scalaire.

Théorème 1.7 – Formule de Parseval

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormée dénombrable infinie d'un espace préhilbertien de dimension infinie, alors*

$$\forall x \in E,\ \sum \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 \text{ converge et } \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2}$$

(Cette inégalité s'appelle inégalité de Bessel.*)*
De plus, si les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment un système total, on a* la formule de Parseval

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 = \|x\|^2}$$

Démonstration

1. *Inégalité de Bessel.* Posons
$$E_n = \text{Vect}\left(\{x_0, \dots, x_n\}\right)$$
C'est bien sûr un espace vectoriel de dimension finie $(n+1)$, on peut donc projeter orthogonalement sur E_n et
$$\forall x \in E,\ p_{E_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x_k, x\rangle.x_k$$

puisque $(x_0, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E_n. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|p_{E_n}(x)\|^2 + \|x - p_{E_n}(x)\|^2 \geqslant \|p_{E_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k, x\rangle|^2$$

La série $\sum |\langle x_n, x\rangle|^2$ est à termes positifs, de somme partielle majorée, elle converge donc et on a

$$\forall x \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_n, x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Notons ici que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement un système total.

2. *Formule de Parseval* Ici, le système est total, donc si $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe

$$y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\left(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}\right),\ \|x - y_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

Mais, toute combinaison linéaire est une somme *finie*, donc il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$y_\varepsilon \in E_n,\ \text{ et en ce cas } \varepsilon^2 \geqslant \|x - y_\varepsilon\|^2 \geqslant d(x, E_n)^2 = \|x - p_{E_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{E_n}(x)\|^2$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x_k, x\rangle|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k, x\rangle|^2 \geqslant \|x\|^2 - \varepsilon^2$$

D'où le résultat.

Remarque 1.19

Ces propriétés sont encore valables lorsque l'on perd le caractère défini (semi-norme).

Remarque 1.20

I sera parfois égal à $\mathbb{Z}$, en ce cas nous noterons

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 \overset{\text{Not}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\langle x_{-n}, x\rangle\right|^2$$

Exemple 1.12 – Séries de Fourier

Soit E l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, alors

1. Le produit

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

munit E d'une structure d'espace préhilbertien complexe (avec une semi-norme).

2. Si l'on pose $\forall n \in \mathbb{Z},\ e_n : x \longmapsto \exp(i\, n\, x)$, alors [a]

$$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est un système total de } E$$

Si l'on pose

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\, n\, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

appelé n-ième coefficient de Fourier de f, la formule de Parseval donne

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t}$$

---

a. Nous admettrons ce résultat pour le moment, nous le démontrerons ultérieurement de plusieurs manières.

Exemple 1.13 – Applications de Parseval

On peut calculer ainsi, quelques sommes de séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Démonstration

Prenons la fonction $2\,\pi$-périodique, définie sur $[0, 2\,\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\,\pi[\end{cases}$$

Alors

$$c_n(f) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{\pi} \exp(-i\,n\,t)\;\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{i}{n\,\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La formule de Parseval nous donne alors

$$\frac{1}{4} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2\,(2\,n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Et, finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque 1.21

En prenant, f $2\,\pi$-périodique, définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$, on trouve facilement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Voir la session `Wxmaxima` A.1, page 387.

Remarque 1.22

La fonction ζ est définie pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 1$ par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

— Nous l'étudierons plus précisément dans le cours sur les séries de fonctions.
— Elle joue un rôle très important en mathématiques, notamment, à cause de la conjecture de Riemann.
— On sait calculer les valeurs de la fonction ζ pour les entiers pairs ($\geqslant 2$).

1.3.2 Projection sur un convexe

Proposition 1.6 – Projection sur un convexe

Soit E un espace préhilbertien, et C un convexe de E, non vide, complet, alors

1. *On a*
$$\forall x \in E,\ \exists! x_0 \in C,\ d(x, C) = \|x - x_0\|$$
On parle de projection sur un convexe (voir la figure 1.3, page 57).
2. *La projection de x sur le convexe C est caractérisée comme étant l'unique vecteur x_0 de C tel que (voir la figure 1.4, page 58)*
$$\forall y \in C,\ \mathrm{Re}\left(\langle y - x_0, x - x_0\rangle\right) \leqslant 0$$

3. *De plus, l'application qui à un vecteur associe sa projection sur C est 1-lipschitzienne.*

Démonstration

1. *Existence et unicité de x_0*

   Posons $\delta = d(x, C)$.

   — *Unicité de x_0*

   Si x_1 et x_2 vérifient
   $$\delta = \|x - x_1\| = \|x - x_2\|$$
   alors, comme C est convexe, $1/2.(x_1 + x_2) \in C$, en utilisant l'identité du parallélogramme
   $$\delta^2 \leqslant \left\|x - \frac{1}{2}.(x_1 + x_2)\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{1}{2}.(x - x_1)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}.(x - x_2)\right\|^2\right) - \left\|\frac{1}{2}.(x_1 - x_2)\right\|^2 = \delta^2 - \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|^2$$
   donc $x_1 = x_2$.

   — *Existence de x_0*

   Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta \leqslant \|x - y_n\| \leqslant \delta + \frac{1}{n+1}$$
   Il est facile de voir que la suite est de Cauchy (toujours grâce à l'identité du parallélogramme et le fait que $1/2.(y_p + y_q) \in C$), car si $p \geqslant q$, on a
   $$\|y_p - y_q\|^2 = 2\left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2\right) - \|2.x - (y_p + y_q)\|^2 \leqslant$$
   $$2\left(2\,\delta^2 + 2\,\delta\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^2}\right) - 4\,\delta^2 \leqslant$$

$$4\,\delta\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}\right)+\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{2}{(q+1)^2}\xrightarrow[p,q\to+\infty]{}0$$

Elle converge donc vers un $x_0\in C$, car C est complet. Alors $\delta=\|x-x_0\|$.

2. *Caractérisation angulaire de x_0*

   Nous calculons dans le cas complexe, le cas réel s'obtient en supprimant la partie réelle. La convexité de C nous assurant que si x_0 et y sont dans C, alors $x_0+\lambda.(y-x_0)$ reste dans C quand λ varie dans $[0,1]$

   $$\forall y\in C,\ \forall\lambda\in[0,1],\|x-x_0\|\leqslant\left\|x-\big(x_0+\lambda.(y-x_0)\big)\right\|$$

   soit en élevant au carré et en développant

   $$\|x-x_0\|^2\leqslant\|x-x_0\|^2-2\,\lambda\,\mathrm{Re}\left(\langle x-x_0,y-x_0\rangle\right)+|\lambda|^2\,\|y-x_0\|^2$$

   soit, pour $\lambda\in]0,1]$

   $$0\leqslant-2\,\mathrm{Re}\left(\langle x-x_0,y-x_0\rangle\right)+|\lambda|\,\|y-x_0\|^2$$

   Donc

   $$\mathrm{Re}\left(\langle x-x_0,y-x_0\rangle\right)\leqslant 0$$

   Réciproquement, si x_0 vérifie la propriété ci-dessus, alors le même calcul nous assure que x_0 réalise la distance de x à C.

3. *Lipschitziennité de la projection*

   Prenons les notations de la figure ci-dessus. On a alors

   $$\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|^2-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2=\left\|x^{(1)}-x_0^{(1)}+x_0^{(1)}-x^{(2)}\right\|^2-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2$$

   que l'on peut développer

$$=\underbrace{\left\|x^{(1)}-x_0^{(1)}\right\|^2}_{\geqslant 0}+\left\|x_0^{(1)}-x^{(2)}\right\|^2+\underbrace{2\,\mathrm{Re}\left(\left\langle x^{(1)}-x_0^{(1)},x_0^{(1)}-x^{(2)}\right\rangle\right)}_{\geqslant 0}-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2\geqslant\left\|x_0^{(1)}-x^{(2)}\right\|^2-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2$$

   En recommençant suivant le même principe ($x_0^{(1)}-x^{(2)}=x_0^{(1)}-x_0^{(2)}+x_0^{(2)}-x^{(2)}$)

   $$\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|^2-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2\geqslant\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2-\left\|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right\|^2=0$$

Figure 1.1 – Ouvert connexe (par arcs)

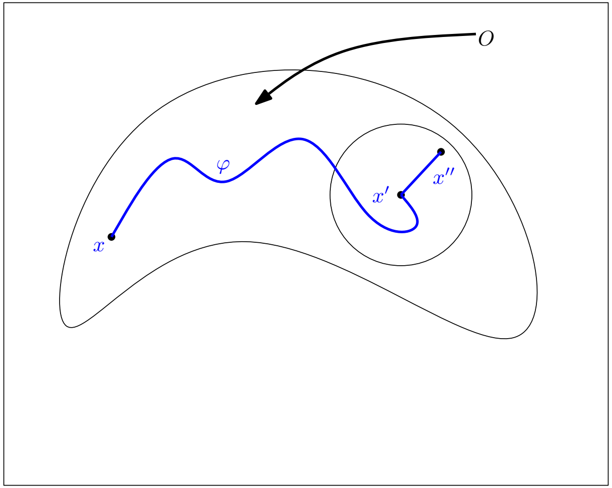


Figure 1.2 – Suite de Cauchy divergente

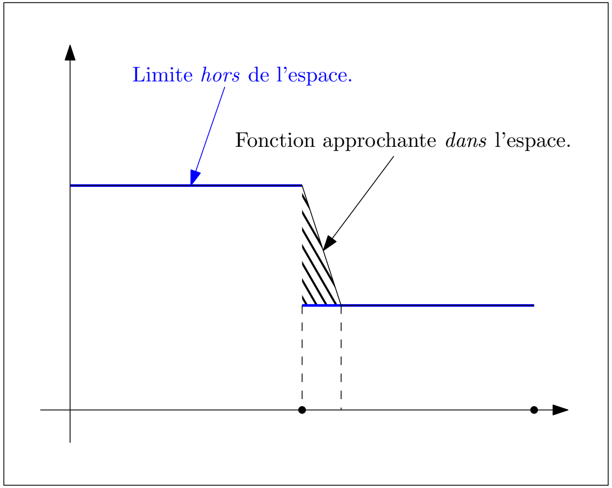


Figure 1.3 – Projection sur un convexe

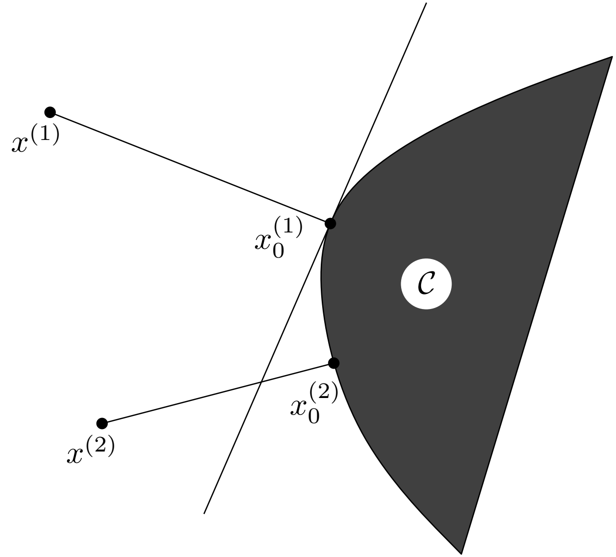
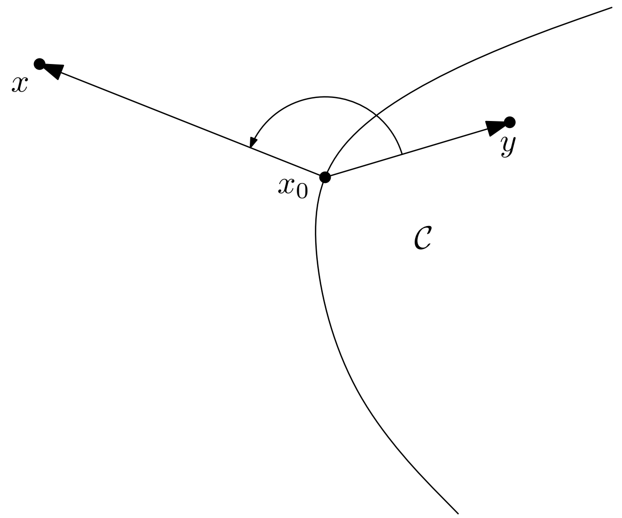


Figure 1.4 – Caractérisation angulaire



Remarque 1.23 –

Cette projection en général *n'est pas une application linéaire* (son image n'est pas un sous-espace vectoriel de E), mais si C est un sous-espace vectoriel E_1 de E, alors c'est bien la projection orthogonale sur E_1, car si $z \in E_1$, en prenant $y = x_0 + z$, puis $y = x_0 - z$ tous deux dans E_1, on a

$$\operatorname{Re}\left(\langle x - x_0, z\rangle\right) = 0$$

Ce qui montre que $x - x_0 \in E_1^{\perp}$. et donc

$$x = x_0 + (x - x_0) \text{ se traduit par } E = E_1 \oplus E_1^{\perp}.$$

Définition 1.11 – Espace de Hilbert

Soit (E, N) un espace préhilbertien complet, on dit que c'est un *espace de Hilbert*.

Remarque 1.24

On rappelle qu'un fermé dans un complet est complet, donc lorsque E est un Hilbert, il suffit d'avoir le convexe C fermé.

Remarque 1.25

Donc, si E_1 est un sous-espace vectoriel complet de E, on a

$$E_1 \oplus E_1^{\perp} = E$$

On a toujours

$$\left[E_1 \oplus E_1^{\perp\cdot} = E\right] \implies [E_1 \text{ fermé}]$$

Démonstration

On a toujours $E_1 \subset \overline{E_1}$ et $E_1^{\perp\cdot} = \overline{E_1}^{\perp\cdot}$, donc $E_1^{\perp\cdot}$ a deux supplémentaires E_1 et $\overline{E_1}$, l'un contenant l'autre, finalement

$$E_1 = \overline{E_1}$$

Théorème 1.8 – Représentation des formes linéaires

Soit E un espace de Hilbert, et $\varphi \in E^\star$, alors

$$[\varphi \text{ est continue}] \iff \left[\exists a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle\right]$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Si φ est continue, alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan fermé. Fermé dans un complet, il est aussi complet, donc, d'après ce qui précède

$$E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right)^{\perp\cdot}$$

Comme tout hyperplan est de codimension 1, on sait qu'il existe un vecteur $b \neq 0_E$ tel que

$$\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right)^{\perp\cdot} = \mathbb{K}.b$$

Mais, en ce cas

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} \langle b, x\rangle$$

— $(\Leftarrow)$ φ est linéaire et lipschitzienne en 0_E, car

$$|\langle a, x\rangle| \leqslant \|a\| \, \|x\|$$

Remarque 1.26

Ceci permet d'étendre, dans un Hilbert, la notion d'adjoint aux applications linéaires continues.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit E un espace de Hilbert réel, C_1 et C_2 deux convexes disjoints de E, C_1 étant fermé et C_2 étant compact, montrer qu'il existe un hyperplan affine fermé de E qui sépare les deux convexes, (i.e. il existe un vecteur a de E et une constante $\alpha \in \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in C_1,\ \langle a, x\rangle < \alpha$ et $\forall x \in C_2,\ \langle a, x\rangle > \alpha$). (On n'hésitera pas à faire un dessin !) *On parle de* séparation *des deux convexes.*

1.4.2 Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé de dimension finie, et si C est un convexe de E distinct de E, montrer qu'il existe un demi-espace affine fermé de E contenant C.

1.4.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, K un compact convexe de E. On appelle *point extrémal* de K tout point c de K tel que

$$\forall (a, b) \in K^2,\ \big[c \in [a, b]\big] \implies [c = a \text{ ou } c = b]$$

(a) En considérant un point x de K tel que $\|x\|$ soit maximal, où $\| \ \|$ est la norme euclidienne, montrer que K admet au moins un point extrémal. On note $\operatorname{Ext} K$ l'ensemble des points extrémaux de K.

(b) Montrer (Conv désigne l'enveloppe convexe) [a]

$$K = \overline{\text{Conv } (\text{ Ext } (K))}$$

(c) Trouver les points extrémaux de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour $\| \|_1$. En déduire les applications T de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\forall x \in E,\ ||T(x)||_1 = ||x||_1$.

1.4.4 Soit $\phi_1, \cdots \phi_n, \phi$ des formes linéaires sur l'espace de dimension finie E. On suppose que

$$\forall x \in E,\ \left[\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \phi_i(x) \geqslant 0\right] \implies \left[\phi(x) \geqslant 0\right]$$

On veut montrer que ϕ est combinaison linéaire positive de $\phi_1, \cdots, \phi_n$, la réciproque étant évidente. À cet effet, on munit E d'un produit scalaire euclidien $< \, , \, >$, et on représente ϕ_i par v_i si $1 \leqslant i \leqslant n$ et ϕ par v. Tout revient à prouver

$$v \ \in \ \mathbb{R}^+ v_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ v_n$$

(a) Montrer que $C = \mathbb{R}^+ v_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ v_n$ est un convexe fermé de E. [b]

(b) Conclure en utilisant la séparation.

1.4.5 Soit E un espace de Hilbert et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si F et G sont fermés et orthogonaux alors la somme $F \oplus G$ est fermée.

1.4.6 Soit E un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Montrer que u est continue.

1.4.7 Soit $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\| \ \|_{\infty,[-1,1]}$. On pose

$$F = \left\{ f \in E,\ f \text{ impaire, et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

(a) Montrer que F est fermé dans E.

(b) Montrer que F est convexe, complet.

(c) Soit $f_0 : x \longmapsto x$, montrer que la distance de f_0 à F n'est pas réalisée.

1.4.8 Soit E un espace préhilbertien non complet, montrer qu'il existe un hyperplan H fermé dans E et dont l'orthogonal est réduit à $\{0_E\}$. Que se passe-t-il si E est complet ?

---

a. Pour l'inclusion de K dans $\overline{\text{Conv}\ (\ \text{Ext}\ (K))}$, raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de séparation.

b. Pour la fermeture, on essaiera de se ramener au cas où les v_i sont linéairement indépendants.

Chapitre 2

Intégration

2.1 Intégrabilité

2.1.1 Mesure positive

Rappel 2.1

Si Ω est un ensemble, on appelle *topologie sur* Ω la donnée d'une partie $\mathcal{TO}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie (les éléments de $\mathcal{TO}$ s'appellent des *ouverts de* Ω *pour la topologie* $\mathcal{TO}$)

1. $\varnothing \in \mathcal{TO}$ et $\Omega \in \mathcal{TO}$.

2. *Stabilité par réunion quelconque des ouverts*

$$\forall (O_i)_{i\in I} \in \mathcal{TO}^I,\ \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{TO}$$

3. *Stabilité par intersection finie des ouverts*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (O_1, \dots, O_n) \in \mathcal{TO}^n,\ \bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{TO}$$

Rappel 2.2

Soit Ω un ensemble, on appelle *tribu* ou *σ-algèbre* sur Ω la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$.
2. *Stabilité par passage au complémentaire*

$$\forall A \in \mathcal{T},\ A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{T}$$

3. *Stabilité par réunion dénombrable*

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$$

Un ensemble muni d'une tribu est dit *espace mesurable*, les parties de $\mathcal{T}$ sont dites *parties mesurables*. On le note $(\Omega, \mathcal{T})$.

Exemple 2.1

1. *Tribu borélienne* Si Ω est un espace muni d'une topologie (des ouverts), on appelle *tribu borélienne sur E*, la plus petite tribu contenant tous les ouverts. Elle est notée $\mathcal{BO}(\Omega)$.
2. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, les intervalles ouverts engendrent les ouverts, donc la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
3. Dans $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ (toutes les normes sont équivalentes), les boules ouvertes engendrent les ouverts, donc aussi la tribu borélienne $\mathcal{BO}(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ sont deux espaces mesurables, alors on appelle *tribu produit* sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, la plus petite tribu de $\Omega_1 \times \Omega_2$ contenant
$$\{T_1 \times T_2,\ T_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } T_2 \in \mathcal{T}_2\}$$
Elle se notera $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Rappel 2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, on appelle *mesure positive sur* Ω, toute application μ de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, vérifiant

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est une famille de parties mesurables 2 à 2 disjointes, alors [a]
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-}\textit{additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

a. Lorsque l'un des A_n est de mesure infinie ou lorsque la série $\sum \mu(A_n)$ diverge, nous conviendrons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty$$

sinon, nous poserons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Rappel 2.4

On a les propriétés bien connues démontrées dans le cours MATH2305P

- Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on a alors [a]

1. *la croissance*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ [A \subset B] \implies \big[\mu(A) \leqslant \mu(B)\big]$$

2. de plus

$$\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$$

3. *limite croissante*

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \big[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}\big] \implies \left[\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Not}}{=} \lim_{n\to+\infty}\uparrow \mu(A_n)\right]$$

4. *limite décroissante*

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \left[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \mu(A_0) \neq +\infty\right] \Longrightarrow \left[\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Not}}{=} \lim_{n\to+\infty}\downarrow \mu(A_n)\right]$$

5. *sous-additivité*

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

---

a. On convient que

$$\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$

Exemple 2.2

1. *Mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$
   Nous noterons λ cette mesure, il suffit de la définir sur les intervalles ouverts (ou fermés) par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ [a \leqslant b] \Longrightarrow \left[\lambda\left(]a,b[\right) \overset{\text{Def}}{=} b - a\right]$$

2. *Mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de* $\mathbb{R}^n$ On peut définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ en la définissant

sur les pavés ouverts par

$$\lambda\left(\prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\right) \overset{\text{Def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

où on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k \leqslant b_k$$

3. *Mesure de comptage sur les parties de* $\mathbb{R}$

   Elle est définie par

$$\forall A \subset \mathbb{R},\ \mu(A) \overset{\text{Def}}{=} \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \\ \operatorname{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \end{cases}$$

4. *Mesure de comptage des entiers sur les parties de* $\mathbb{R}$

   Elle est définie par

$$\forall A \subset \mathbb{R},\ \mu(A) \overset{\text{Def}}{=} \begin{cases} +\infty & \text{si } A \cap \mathbb{N} \text{ est infini} \\ \operatorname{Card}(A \cap \mathbb{N}) & \text{si } A \cap \mathbb{N} \text{ est fini} \end{cases}$$

Rappel 2.5

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré, soit $A \subset \Omega$, on dit que A est *μ-négligeable*, si

$$\exists T \in \mathcal{T},\ A \subset T \text{ et } \mu(T) = 0$$

Exemple 2.3

1. $\mathbb{Q}$ est un ensemble λ-négligeable de $\mathbb{R}$ (dénombrabilité).
2. K l'ensemble de Cantor défini par

$$K = \left\{ x \in [0,1],\ \exists (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}},\ x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^{k+1}} \right\}$$

   est λ-négligeable mais pas dénombrable.

Définition 2.1

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et P une propriété définie sur Ω, on dit que P *est vraie (μ-)presque partout* si

$$\big\{\omega \in \Omega,\ P(\omega) \text{ fausse}\big\} \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

   On écrira

$$P \text{ vraie } \ (\mu-)\mathbf{p.p.}$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et P une propriété définie sur Ω, on utilisera alors l'expression *($\mathbb{P}$-)presque sûrement* à la place de « presque partout ».
   On écrira

$$P \text{ vraie } \ (\mathbb{P}-)\,\mathbf{p.s.}$$

Exemple 2.4

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une `v.a.r.` suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$, alors

$$X \in [0,1] \textbf{ p.s.}$$

On peut même dire que

$$X \in [0,1] \cap \left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right) \textbf{ p.s.}$$

Définition 2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on pose

$$\mathcal{N} = \{A \subset \Omega,\ A\ \mu\text{-négligeable}\}$$

On appelle *tribu μ-complétée de $\mathcal{T}$* la tribu définie par

$$\mathcal{T}^* \stackrel{\text{Not}}{=} \{T \cup N,\ T \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}\}$$

La mesure μ se prolonge à $\mathcal{T}^*$ par

$$\forall A \in \mathcal{T}^*,\ \mu^*(A) = \mu(T) \text{ où } A = T \cup N,\ T \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Montrer que si Ω_1 et Ω_2 possèdent des topologies (des ouverts), alors

$$\mathcal{BO}(\Omega_1) \otimes \mathcal{BO}(\Omega_2) \subset \mathcal{BO}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

2.1.2 Démontrer les résultats énoncés à l'exemple 2.3, page 71.

2.1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, montrer que

$$\forall A \subset \Omega,\ \left[A \in \mathcal{T}^*\right] \iff \left[\exists (T_1, T_2) \in \mathcal{T}^2,\ T_1 \subset A \subset T_2 \text{ et } \mu(T_2 \backslash T_1) = 0\right]$$

2.1.4 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, montrer que

$$\forall A \in \mathcal{T}^*,\ \mu^*(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{T} \\ B \subset A}} \big(\mu(B)\big)$$

2.1.2 Intégrabilité

Définition 2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$.

1. On dit que f est *mesurable* si
$$\forall A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

2. On dit que f est *étagée* si, f est mesurable, à valeurs réelles et
$$\operatorname{card}\left(f(\Omega)\right) \text{ est fini}$$

3. On dit que f est *positive* si
$$f(\Omega) \subset [0, +\infty]$$

Proposition 2.1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, toute fonction positive et mesurable est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives.

Remarque 2.1

Ici la fonction peut prendre la valeur $+\infty$. Il faut donc modifier ce que nous avons vu précédemment.

Démonstration

Posons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = \{\omega \in \Omega,\ f(\omega) \geqslant n\}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n\,2^n - 1]\!],\ F_{k,n} = \left\{\omega \in \Omega,\ \frac{k}{2^n} \leqslant f(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\right\}$$
E_n et $F_{k,n}$ sont des ensembles mesurables. Leurs fonctions indicatrices le sont donc aussi.
On pose alors
$$f_n = n.\,\mathbb{1}_{E_n} + \sum_{k=0}^{n\,2^n-1} \frac{k}{2^n}.\,\mathbb{1}_{F_{k,n}}$$
f_n est mesurable, comme combinaison linéaire de fonctions mesurables à valeurs finies (les fonctions mesurables à valeurs finies forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. La fonction f_n est étagée. Et
$$f_n(\Omega) \subset \left\{\frac{k}{2^n},\ k \in [\![0, n\,2^n]\!]\right\}$$
2. La fonction f_n est clairement positive.
3. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Car si $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   — Si $f(\omega) \in]n+1, +\infty]$, alors $f_n(\omega) = n < f_{n+1}(\omega) = n+1$.
   — Si $f(\omega) = \alpha \in [0, n]$, alors
   $$f_n(\omega) = \frac{\lfloor \alpha\,2^n \rfloor}{2^n} \leqslant f_{n+1}(\omega) = \frac{\lfloor \alpha\,2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}}$$
   — Si $f(\omega) = \alpha \in]n, n+1]$, alors
   $$f_n(\omega) = n \leqslant f_{n+1}(\omega) = \frac{\lfloor \alpha\,2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}}$$
4. La suite $\left(f_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(\omega)$.

— Si $f(\omega) = +\infty$, alors

$$f_n(\omega) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

— Si $f(\omega) = \alpha \in \mathbb{R}_+$, alors, pour n assez grand, on a

$$f_n(\omega) = \frac{\lfloor \alpha\, 2^n \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$$

Définition 2.4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré

1. Soit f une fonction étagée, positive, définie sur Ω, on pose alors

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Def}}{=} \sum_{\alpha \in f(\Omega)} \alpha\, \mu\left(f^{-1}(\{\alpha\})\right) \in [0, +\infty]$$

avec la convention que si $\alpha = 0$ et $\mu\left(f^{-1}(\{0\})\right\} = +\infty$, alors

$$\alpha\, \mu\left(f^{-1}(\{\alpha\})\right) = 0$$

2. Soit f une fonction positive, mesurable définie sur Ω, on pose alors

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Def}}{=} \sup_{g \in \Gamma_f} \left(\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu\right) \in [0, +\infty]$$

où

$$\Gamma_f = \left\{g \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ \ g \text{ étagée et } g \leqslant f\right\}$$

Définition 2.5

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, mesurable sur Ω.

1. Si f est positive et vérifie
$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$
on dit que f est *intégrable sur* Ω.
2. Si f vérifie
$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$
on dit aussi que f est *intégrable sur* Ω et on pose
$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Not}}{=} \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu$$
où
$$\forall \omega \in \Omega, \;\; f^+(\omega) = \max\big(0, f(\omega)\big) \;\text{ et }\; f^-(\omega) = \max\big(0, -f(\omega)\big)$$

Exemple 2.5

1. Si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et f est continue par morceaux sur un intervalle I alors
$$f \text{ est intégrable sur } I \iff \int_a^b \left|f(t)\right| \, \mathrm{d}t \text{ est convergente}$$
où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.
2. Si μ est la mesure de comptage des entiers sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction alors
$$\begin{aligned} f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} &\iff \big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille sommable} \\ &\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| \text{ est convergente} \end{aligned}$$

Propriété 2.1

On rappelle les propriétés suivantes

1. *Linéarité*

   Si f et g sont intégrables sur Ω et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $\alpha.f + \beta.g$ est intégrable sur Ω et
$$\int_\Omega (\alpha.f + \beta.g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$$
2. *Croissance*

Si f et g sont intégrables sur Ω et si $f \leqslant g$ **p.p.**, alors

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$$

3. *Restriction*

Si f est intégrable sur Ω et si $A \in \mathcal{T}$, alors $f_{|A}$ est intégrable sur A et

$$\int_A f_{|A} \, \mathrm{d}\mu_{|A} = \int_\Omega \mathbb{1}_A \, f \, \mathrm{d}\mu$$

où $\mu_{|A}$ est la restriction de la mesure μ à la tribu

$$\mathcal{T}_{|A} = \{T \cap A, \ T \in \mathcal{T}\}$$

Dans la pratique, nous noterons de manière simplifiée

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \textit{ au lieu de } \int_A f_{|A} \, \mathrm{d}\mu_{|A}$$

4. *Relation de Chasles*

Si $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ sont tels que $\mu(A \cap B) = 0$, alors

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Montrer les propriétés 2.1, page 78.

2.2.2 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f et $g : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$, (elles sont donc positives) mesurables sur Ω. Montrer que

(a) *Intégrabilité*

$$[f \text{ intégrable sur } \Omega] \implies [f < +\infty \ \mathbf{p.p.}]$$

(b) *Nullité*

$$\left[\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0\right] \iff [f = 0 \ \mathbf{p.p.}]$$

(c) *Égalité*

$$[f = g \ \mathbf{p.p.}] \implies \left[\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu\right]$$

2.2.3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, intégrable sur Ω, montrer que

$$\left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$$

2.2.4 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur $\left([a, b], \mathcal{BO}([a, b]), \lambda_{|_{[a,b]}}\right)$ et que

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$$

2.1.3 Convergence monotone

Théorème 2.1 – de convergence monotone

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions positives, mesurables sur* Ω

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega,\ f_n(\omega) \leqslant f_{n+1}(\omega)$$

Alors

1. *Il existe une fonction* f*, positive, mesurable sur* Ω *telle que*

$$\forall \omega \in \Omega,\ f(\omega) = \lim_{n\to+\infty}\uparrow\ f_n(\omega)$$

2. *Et on a*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\uparrow \left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right)$$

Démonstration

1. *f existe et est mesurable sur Ω*

   Si $\omega \in \Omega$, la suite $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, croissante, elle converge donc dans $[0,+\infty]$.

   Si $a \in \mathbb{R}$, on a immédiatement
   $$f^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{T}$$
   Et la tribu $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$ est engendrée par les $(]a,+\infty[)_{a\in\mathbb{R}}$.

2. *L'intégrale de f est la limite (croissante) des intégrales des f_n*

   On a pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leqslant f$. La croissance de l'intégrale, nous donne alors
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$
   À la limite, on obtient
   $$\lim_{n\to+\infty}\uparrow \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$
   Pour obtenir l'autre inégalité, prenons g une fonction étagée, positive, vérifiant $g \leqslant f$. Soit de plus un $\varepsilon \in]0,1[$, on va comparer les f_n à $(1-\varepsilon).g$... Pour chaque $\omega \in \Omega$, si n est assez grand, on a $f_n(\omega) \geqslant (1-\varepsilon)\,g(\omega)$, on a donc en posant pour $n \in \mathbb{N}$
   $$A_n = \big\{\omega \in \Omega,\ (1-\varepsilon)\,g(\omega) \leqslant f_n(\omega)\big\} \text{ alors } \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
   On a alors
   $$\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{A_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant (1-\varepsilon) \int_{A_n} g \,\mathrm{d}\mu$$
   En passant aux limites croissantes, on obtient
   $$\lim_{n\to+\infty}\uparrow \left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right) \geqslant (1-\varepsilon) \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$$

Puis, en faisant tendre ε vers 0^+

$$\lim_{n\to+\infty}\uparrow\left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right) \geqslant \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$$

Enfin, en prenant la borne supérieure sur tous les g possibles.

$$\lim_{n\to+\infty}\uparrow\left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right) \geqslant \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Exemple 2.6

1. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)\,(x^2+a^2)}} \,\mathrm{d}x$$

Elle vérifie

$$F(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty \text{ et } F(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{a}$$

Démonstration

Remarquons que la fonction F est bien définie sur $]0,+\infty[$, car la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a^2)}} \text{ est définie, continue sur le segment } [0,1]$$

(a) *Comportement en* 0^+

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$, décroissante et convergeant vers 0. Posons alors

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a_n^2)}} \end{cases} \quad \text{et } f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow]0,+\infty] \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a clairement

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \lim_{n\to+\infty}\uparrow f_n(x)$$

Comme f n'est pas intégrable sur $[0,1]$ (minorée par $x \longmapsto 1/(2\,x)$), on en déduit que

$$F(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc [a]

$$F(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$$

(b) *Comportement en* $+\infty$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$, croissante et convergeant vers $+\infty$. Posons alors

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{a_n}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a_n^2)}} \end{cases} \quad \text{et } f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow]0,+\infty[\\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir la session `Wxmaxima` A.2, page 389), et on a clairement

Remarque 2.2

On a déjà vu la discrétisation de la limite d'une fonction en un point. Soit $f : I \longrightarrow E$, où (E,d) est un espace métrique, soit $a \in \overline{I}$, et $\lambda \in E$, alors

$$\left[f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\right] \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right]\right]$$

Si l'on veut rajouter la monotonie de la suite, on obtient

$$\left[f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\right] \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ \text{monotone},\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right]\right]$$

On parle alors de *discrétisation monotone*.

Démonstration

— (⇒) La propriété étant vraie pour toutes les suites, elle l'est pour les suites monotones.
— (⇐) Par contraposition (on va toujours du continu vers le discret). Si

$$f(x) \text{ ne tend pas vers } \lambda \text{ quand } x \to a$$

on a

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } f(x_n) \text{ ne tend pas vers } \lambda$$

1. On commence par extraire une sous-suite « loin de λ ». On sait en effet, qu'il existe un $\delta > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$d\left(\lambda, f(x_{\varphi(n)})\right) \geqslant \delta$$

2. Ensuite, on extrait de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, une sous-suite monotone (proposition 3.1.19 de M211 page 120).

Rappel 2.6

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, nous noterons $\mathrm{Adh}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$, [a] on pose alors

$$\limsup u_n \overset{\text{Not}}{=} \max\left(\mathrm{Adh}(u)\right) \in [-\infty, +\infty]$$

et on l'appelle *limite supérieure de la suite u.*
De même, on peut définir la *limite inférieure* par

$$\liminf u_n = \min\left(\mathrm{Adh}(u)\right) \in [-\infty, +\infty]$$

On note aussi parfois

$$\underline{\lim} u_n \text{ et } \overline{\lim} u_n \text{ au lieu de } \liminf u_n \text{ et } \limsup u_n$$

a. Cela signifie que si une suite extraite de u converge vers $+\infty$, alors $+\infty \in \mathrm{Adh}(u)$. Notons qu'en ce cas, $\mathrm{Adh}(u)$ est toujours non vide, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Remarque 2.3

On peut transformer une limite inférieure (resp. supérieure) en limite croissante (resp. décroissante), en remarquant que

$$\liminf u_n = \lim_{n \to +\infty} \uparrow \left(\inf_{k \geqslant n} u_k \right)$$

Démonstration

— La suite

$$\left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est clairement croissante}$$

La limite croissante existe bien dans $[-\infty, +\infty]$.

— Si $\lambda = \liminf u_n$, on sait qu'il existe une sous-suite telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

Comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

il vient,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \geqslant \inf_{k\geqslant n} u_k$$

donc, en passant à la limite

$$\lambda = \liminf u_n \geqslant \lim_{n\to+\infty}\uparrow \left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right)$$

— Si $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que [a]

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \lambda - \varepsilon$$

en passant à la limite croissante, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\uparrow \left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right) \geqslant \lambda - \varepsilon$$

Il reste à faire tendre ε vers 0^+ pour obtenir le résultat voulu.

---

a. Sauriez-vous le justifier ?

Une conséquence en est que

1. Toute limite inférieure d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.
2. De même, toute limite supérieure d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.
3. En particulier, si une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ converge vers une fonction f, alors cette fonction est mesurable sur Ω.

Proposition 2.2 – Lemme de Fatou

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives définies sur Ω (donc à valeurs dans $[0, +\infty]$), alors

$$\int_\Omega \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n$, alors

$$f_p \geqslant \inf_{k\geqslant n} f_k \text{ donc } \int_\Omega f_p \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_\Omega \inf_{k\geqslant n} f_k \, \mathrm{d}\mu$$

Donc

$$\inf_{p\geqslant n} \int_\Omega f_p \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_\Omega \inf_{k\geqslant n} f_k \, \mathrm{d}\mu$$

En passant à la limite (croissante) lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\liminf \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \lim_{n\to+\infty} \left(\int_\Omega \inf_{k\geqslant n} f_k \, \mathrm{d}\mu \right)$$

Le théorème de convergence monotone permet d'obtenir finalement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega \inf_{k\geqslant n} f_k \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_\Omega \liminf f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Exercice(s) 2.3

2.3.1 En utilisant le fait que

$$\forall x\in[0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

2.3.2 Calculer un équivalent lorsque ε tend vers 0^+ de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)+\varepsilon\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}x$$

2.3.3 Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+a^2}} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,a}$$

2.3.4 Limite lorsque $a \to 0^+$ de

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\ ?$$

2.3.5 Équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \frac{x^n\,\ln(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ ?$$

2.3.6 Équivalent lorsque a tend vers 0^+ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)\,(a^2+x^2)}\ ?$$

2.3.7 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n\,\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda$$

2.3.8 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Pour un $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = \mu\Big(\big\{\omega \in \Omega,\ f(\omega) > x\big\}\Big)$$

Montrer que

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi\,\mathrm{d}\lambda$$

2.3.9 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, positives qui converge en tout point de Ω vers une fonction f. On suppose de plus que la suite

$$\left(\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est majorée par une constante } M$$

Montrer que f est intégrable sur Ω et que

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leqslant M$$

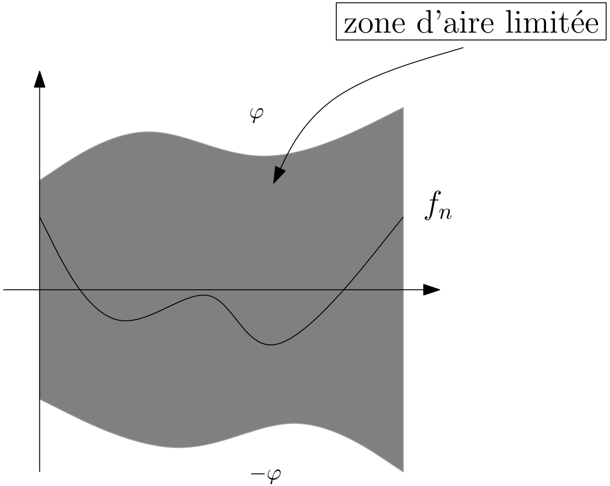
2.3.10 Peut-on comparer pour une suite de fonctions positives

$$\int_\Omega \limsup f_n \, \mathrm{d}\mu \text{ et } \limsup \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \text{ ?}$$

2.2 Théorèmes d'inversion de limites

2.2.1 Convergence dominée

Le théorème de convergence monotone a des hypothèses très fortes, notamment la monotonie. On a vu que la discrétisation monotone permettait de l'utiliser parfois. Nous avons besoin d'un théorème plus fort (donc, dont les hypothèses sont plus faibles !). C'est le théorème de convergence dominée.



Théorème 2.2 – de convergence dominée

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *des applications* $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, *mesurables sur* Ω *et vérifiant les hypothèses suivantes*

1. Convergence simple de la suite *Il existe une fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, *mesurable telle que, pour* $\omega \in \Omega$, *on ait*

$$f_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\omega) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

2. Domination uniforme *Il existe une fonction* $\varphi : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$, intégrable sur Ω, *telle que, pour* $\omega \in \Omega$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(\omega)\right| \leqslant \varphi(\omega) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

Alors, on a

(a) *Toutes les fonctions* f_n *sont intégrables sur* Ω *;*

(b) f *est intégrable sur* Ω *;*

(c) *et de plus*

$$\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Démonstration

— D'abord, débarrassons-nous de ces $\mu - \mathbf{p.p.}$. Pour cela, transformons Ω en

$$\Omega' = \left\{ \omega \in \Omega,\ \begin{cases} f_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(\omega)\right| \leqslant \varphi(\omega) \\ \varphi(\omega) \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \right\}$$

Comme φ est intégrable sur Ω, elle est finie $\mathbf{p.p.}$ et, donc

$$\mu\left(\Omega \backslash \Omega'\right) = 0$$

Pour alléger les écritures, nous ne noterons pas les restrictions à Ω' de manière particulière.

— Montrons les résultats énoncés

1. Comme φ est intégrable sur Ω, elle l'est aussi sur Ω' et l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega',\ \left|f_n(\omega)\right| \leqslant \varphi(\omega)$$
nous assure l'intégrabilité des f_n sur Ω' donc sur Ω.
2. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient
$$\forall \omega \in \Omega',\ \left|f(\omega)\right| \leqslant \varphi(\omega)$$
ce qui nous assure aussi l'intégrabilité de f sur Ω', et donc, sur Ω.
3. On a de plus,
$$\forall \omega \in \Omega',\ \left|f_n(\omega) - f(\omega)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et
$$\forall \omega \in \Omega',\ \left|f_n(\omega) - f(\omega)\right| \leqslant 2\,\varphi(\omega)$$
Le lemme de Fatou nous donne immédiatement
$$\liminf \int_{\Omega'} \left(2\,\varphi - \left|f_n - f\right|\right)\ \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\Omega'} \liminf \left(2\,\varphi - \left|f_n - f\right|\right)\ \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega'} 2\,\varphi\ \mathrm{d}\mu$$
On en déduit immédiatement que
$$\int_{\Omega'} \left|f_n - f\right|\ \mathrm{d}\mu = 0 \text{ et donc } \left|\int_{\Omega'} f_n\ \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega'} f\ \mathrm{d}\mu\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On passe à Ω sans difficulté.

Remarque 2.4

1. Lorsque f est intégrable, on peut déduire le théorème de convergence monotone du théorème de convergence dominée, en l'appliquant à la suite croissante

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dont tous les termes sont dominés par } f$$

Ce n'est donc qu'un cas particulier...

2. En revanche, le théorème de convergence monotone fonctionne encore dans les cas de non intégrabilité de f comme le montre l'exemple 2.6, page 83.

Exemple 2.7

1. Soit l'intégrale I_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Cherchons-en son comportement asymptotique. Le premier problème est que l'intervalle d'intégration dépend de n, pour éviter ce problème posons

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On a successivement

— f_n est mesurable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue par morceaux.

— *Convergence simple*

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2\,x} = f(x)$$

et f est mesurable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue.

— *Domination*

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n(x)\right| \leqslant f(x)$$

par concavité du logarithme.

— *Intégrabilité de la dominante*

$$f \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[$$

car sa primitive a une limite en $+\infty$.

— *Conclusion* Le théorème de convergence dominée nous assure que

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[0,+\infty[} f\ \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-2\,x}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-2\,x}}{x}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2}$$

2. De même

$$I_n = \int_1^{+\infty} n\,e^{-x^n}\ \mathrm{d}x$$

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [1,+\infty[,\ f_n(x) = n\,e^{-x^n}$$

On a successivement

(a) f_n est mesurable sur $[1, +\infty[$, car elle est continue.

(b) *Convergence simple*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \; f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ mais } f_n(1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

(c) *Domination* Le comportement en 1 nous empêche de trouver une dominante intégrable ! Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas !

- Mais, si l'on effectue le changement de variable $u = x^n$, il vient

$$I_n = \int_1^{+\infty} u^{1/n-1}\, e^{-u} \, \mathrm{d}u$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour trouver que

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u$$

et non 0, comme on aurait pu penser à tort avant le changement de variable !

Remarque 2.5

Dans le premier exemple, on aurait pu aussi essayer de fixer les bornes en utilisant le changement de variable $x = n\,u$, on obtient

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 n\,(1-u)^n\,e^{-n\,u}\,\mathrm{d}u$$

Mais, le théorème de convergence dominée ne s'applique plus.

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

2.4.2 Donner un développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}$ lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

2.4.3 Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sin(t)\,\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

2.4.4 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n\,\ln(x)}{x^n-1}\,\mathrm{d}x \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n^2\,x^n\,\ln(x)}{x^n-1}\,\mathrm{d}x$$

2.4.5 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, calculer

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{x\, f(t)}{x^2 + t^2}\, \mathrm{d}t$$

2.4.6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, vérifiant de plus $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

2.4.7 En écrivant (après avoir justifié) que

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, \mathrm{d}x = \lim_{\xi \to 1^-} \int_\xi^{\xi^2} \frac{1}{\ln(x)}\, \mathrm{d}x$$

donner la valeur de I.

2.4.8 *Méthode de Laplace*

(a) Soit l'intégrale dépendant de x

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t^2 + t + 1)^x}\, \mathrm{d}t$$

Montrer son existence, pour $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = \ln(t^2 + t + 1)$, montrer que

$$I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

(b) Soit l'intégrale dépendant de x

$$J(x) = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t^2 - t + 1)^x} \,\mathrm{d}t$$

Montrer son existence, pour $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable

$$t^2 - t + 1 = \frac{3}{4}\, e^{u^2}, \; u \geqslant 0$$

montrer que

$$J(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{3}\right)^x \frac{\sqrt{3\,\pi}}{4\,\sqrt{e\,x}}$$

(c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t^2 - t + 1)^x} \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{3}\right)^x \frac{\sqrt{3\,\pi}}{2\,\sqrt{e\,x}}$$

2.4.9 En utilisant la méthode de Laplace, donner des équivalents au voisinage de $+\infty$ des intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1 + t^2} \,\mathrm{d}t \\
J(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{t\,\ln(t)}{(1 + t^2)^x} \,\mathrm{d}t \\
K(x) &= \int_0^1 \left(1 - t^3\right)^x \tan^2(t) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

2.4.10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout intervalle de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{]-\infty,x]} f \, \mathrm{d}\lambda$$

Montrer que F est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = f(x) \quad \lambda - \mathbf{p.p.}$$

2.4.11 Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}, \mu) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda\big)$, intégrable. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{T},\ [\mu(A) \leqslant \eta] \implies \left[\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon\right]$$

2.2.2 Théorèmes de Fubini

Définition 2.6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est *une mesure σ-finie sur* Ω si, il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+ \text{ (c'est-à-dire finie), et } \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Remarque 2.6

Quitte à remplacer A_n par $\cup_{k=0}^{n} A_k$, on peut supposer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

Exemple 2.8

1. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est σ-finie, car
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, +n] \text{ et } \lambda\left([-n, +n]\right) = 2\,n \in \mathbb{R}_+$$
2. De même, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$ est σ-finie.
3. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}$ est bien évidemment σ-finie.
4. La *mesure de comptage* sur $\mathbb{R}$ n'est pas σ-finie, elle est définie sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par
$$\mu \; : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ A \longmapsto \operatorname{card}(A). \end{cases}$$

Remarque 2.7

À quoi sert cette notion de mesure σ-finie ? Elle va nous permettre de reproduire le raisonnement que nous avons eu dans $\mathbb{R}$ « pour montrer telle propriété de la mesure, il suffit souvent de le montrer sur les intervalles ». On obtient

Proposition 2.3

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont σ-finies, alors il existe une unique mesure μ définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2,\ \mu\left(A_1 \times A_2\right) = \mu_1\left(A_1\right) \times \mu_2\left(A_2\right)$$

ce produit étant nul, dès que l'un de ses termes est nul. Cette mesure μ sera notée $\mu_1 \otimes \mu_2$. μ est une mesure σ-finie.

Démonstration

Admis. En fait, il y a toujours existence, mais le caractère σ-fini des mesures en assure l'unicité.

Les théorèmes de Fubini s'intéressent à la capacité d'intervertir deux intégrales (c'est donc bien un problème d'interversion de limites). On a deux versions différentes. L'une pour les fonctions positives, qui nous permettre aussi de montrer facilement qu'une fonction est intégrable par rapport à la tribu produit, et l'autre, plus générale, qui nous donnera une condition suffisante pour pouvoir intervertir.

Théorème 2.3 – Fubini-Tonelli

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, les mesures étant σ-finies, *soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$, une application mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, alors*

1. *L'application*

$$F_1 \ : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [0,+\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x,\bullet)\, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$

   est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_1$.

2. *L'application*

$$F_2 \ : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [0,+\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(\bullet,y)\, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$

   est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_2$.

3. *On a de plus*

$$\boxed{\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\ \mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1\ \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2\ \mathrm{d}\mu_2}$$

Démonstration

Admis.

Exemple 2.9

1. Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[\times[a,b]$, où $0<a<b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\forall (x,y)\in[0,+\infty[\times[a,b],\ f(x,y)=e^{-x\,y}$$

Cette fonction est mesurable positive, et les mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $[a,b]$ sont σ-finies. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}\times[a,b]} f\ \mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$

En effectuant les calculs, il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a\,x}-e^{-b\,x}}{x}\ \mathrm{d}x=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2. L'hypothèse des mesures σ-finies est indispensable. En effet, prenons $\Omega_1=\Omega_2=[a,b]$ où $a<b$, $\mathcal{T}_1=\mathcal{BO}\left([a,b]\right)$, $\mu_1=\lambda$ et $\mathcal{T}_2=\mathcal{P}\left([a,b]\right)$ et μ_2 la mesure de comptage sur $[a,b]$ (qui n'est donc pas σ-finie). Soit, de plus, f la fonction caractéristique de la diagonale de $[a,b]^2$. Cette fonction est positive, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{BO}\left([a,b]\right)\otimes\mathcal{P}\left([a,b]\right)$, et on a

$$\int_{\Omega_1} F_1\ \mathrm{d}\mu_1=\int_a^b \mathrm{d}\lambda=b-a \text{ et } \int_{\Omega_2} F_2\ \mathrm{d}\mu_2=0$$

Théorème 2.4 – Fubini-Lebesgue

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ *deux espaces mesurés. On suppose que* μ_1 *et* μ_2 *sont* σ*-finies. Soit* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, $\mu_1 \otimes \mu_2$*-intégrable sur* $\Omega_1 \times \Omega_2$*, alors*

1. *La fonction*

$$F_1 \ : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$

   est définie $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$ *et intégrable sur* Ω_1.

2. *La fonction*

$$F_2 \ : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(\bullet, y) \, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$

   est définie $\mu_2 - \mathbf{p.p.}$ *et intégrable sur* Ω_2.

3. *On a de plus*

$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right) = \int_{\Omega_1} F_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, \mathrm{d}\mu_2}$$

Démonstration

Les mesures sont σ-finies. La mesure produit est alors unique (c'est $\mu_1 \otimes \mu_2$) et nous pouvons utiliser Fubini-Tonelli.

1. Par hypothèse, $|f|$ est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable et d'après Fubini-Tonelli, nous avons en notant

$$G_1 : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} |f(x, \bullet)| \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$

   G_1 est μ_1-intégrable sur Ω_1, elle est donc en particulier finie $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$, ce qui montre que la fonction $f(x, \bullet)$ est intégrable $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$. La fonction F_1 est donc bien définie $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$, et, (en mettant n'importe quelle valeur, là où elle n'est pas définie) elle est intégrable sur Ω_1, car

$$\int_{\Omega_1} |F_1| \, \mathrm{d}\mu_1 \leqslant \int_{\Omega_1} G_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, \mathrm{d}\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right)$$

2. On effectuant le même raisonnement, on obtient le résultat similaire pour F_2.
3. On obtient le résultat en appliquant ce qui précède à f^+ et f^-.

Remarque 2.8

On voit donc les rôles différents des deux théorèmes

1. Fubini-Tonelli nous servira à montrer l'intégrabilité de la fonction f.
2. Fubini-Lebesgue à faire les calculs.

Exemple 2.10

1. Lorsque la fonction f n'est plus positive, il faut *avant toutes choses* s'assurer de son intégrabilité ! En effet, posons

$$\forall (x,y) \in]0,1]^2,\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Elle est non intégrable sur $]0,1]^2$ comme le montre la session `Wxmaxima` A.3, page 390.

Exercice(s) 2.5

2.5.1 Dans les situations suivantes,

(a) la fonction est-elle intégrable ?

(b) calculer les intégrales de F_1 et F_2 (notations des théorèmes du cours).

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{(1+x)\,(1+x\,y^2)} && \text{sur} \quad \big(\mathbb{R}_+\big)^2 \\
f(x,y) &= \frac{1}{1+y\,\cos(x)} && \text{sur} \quad \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,a],\ \text{où } a \in]0,1[\\
f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} && \text{sur} \quad \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 \leqslant 2\,x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\Big\} \\
f(x,y) &= 2\,e^{-2\,x\,y} - e^{-x\,y} && \text{sur} \quad]0,\infty[\times]0,1] \\
f(x,y) &= e^{-y}\,\sin(2\,x\,y) && \text{sur} \quad [0,1]\times]0,+\infty[
\end{aligned}
$$

2.5.2 Soit f et g deux fonctions positives, continues, de carrés intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

(a) En étudiant

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \left(\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x\,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

montrer que

$$\iint\limits_{(\mathbb{R}_+)^2} \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \pi \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

(b) Prouver que π est la meilleure constante.

2.5.3 On pose

$$\Delta_n = \big[n\pi,(n+1)\pi\big] \times \mathbb{R}_+$$

En calculant de deux manières

$$I_n = \iint\limits_{\Delta_n} e^{-x\,y}\, \sin(x)\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\; \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

2.5.4 Soit $a < b$ et f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ (pour la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne). On pose

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_{[a,x]} f\; \mathrm{d}\lambda \text{ et } G(x) = \int_{[a,x]} g\; \mathrm{d}\lambda$$

Montrer que

$$F(b)\,G(b) = \int_{[a,b]} f\,G\; \mathrm{d}\lambda + \int_{[a,b]} F\,g\; \mathrm{d}\lambda$$

Remarque 2.9

On peut décliner le théorème en prenant $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage, on obtient alors un résultat d'interversion sur les séries doubles (déjà vu dans le cours sur les familles sommables)

Proposition 2.4

Soit $(u_{n,p})$ *une suite double de complexes, telle que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_p |u_{n,p}|$ *converge ;*
2. *la série*

$$\sum_n \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \text{ converge}$$

Alors les séries

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_p u_{n,p},\ \sum_n u_{n,p},\ \sum_n \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \text{ et } \sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \text{ convergent}$$

et de plus

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}}$$

Exemple 2.11

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}, \ \forall t \in]-1,+1[$$

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

2.2.3 Changement de variable

Propriété 2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, Ω' un ensemble et $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. On appelle *tribu image de* Ω' *par* f la tribu définie par

$$\mathcal{T}'_f \overset{\text{Not}}{=} \left\{A' \subset \Omega',\ f^{-1}\left(A'\right) \in \mathcal{T}\right\}$$

On appelle *mesure image de μ par f* la mesure définie μ'_f définie sur $\mathcal{T}'_f$ par

$$\forall A' \in \mathcal{T}'_f,\ \mu'_f\left(A'\right) \overset{\text{Not}}{=} \mu\left(f^{-1}\left(A'\right)\right)$$

Remarque 2.10

Si au départ $\left(\Omega', \mathcal{T}'\right)$ est un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application mesurable, alors

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}'_f$$

Théorème 2.5 – changement de variable

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\left(\Omega', \mathcal{T}'\right)$ un espace mesurable, $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application mesurable, on a

1. Cas positif. *Si $f : \Omega' \longrightarrow [0, +\infty]$ est une application mesurable, positive, alors*

$$\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\left(\mu'_\varphi\right) = \int_{\Omega} f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

2. Cas général. *Si* $f : \Omega' \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *est une application mesurable alors*

$$\left[f \textit{ est } \mu'_{\varphi}\textit{-intégrable sur } \Omega'\right] \iff [f \circ \varphi \textit{ est } \mu\textit{-intégrable sur } \Omega]$$

et, si elles sont intégrables, on a encore

$$\boxed{\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\left(\mu'_{\varphi}\right) = \int_{\Omega} f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu}$$

Démonstration

1. *Cas positif.*
   — Si f est une fonction positive, étagée, alors, par linéarité, on peut se contenter de considérer le cas où f est une fonction indicatrice d'une partie A' de $\mathcal{T}'$. En ce cas,

$$\int_{\Omega'} \mathbb{1}_{A'} \,\mathrm{d}\left(\mu'_{\varphi}\right) = \mu'_{\varphi}\left(A'\right) = \mu\left(\varphi^{-1}\left(A'\right)\right) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A'} \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

   — On passe aux fonctions mesurables positives par limite croissante de fonctions étagées et théorème de convergence monotone.
2. *Cas général.* On écrit comme d'habitude $f = f^{+} - f^{-}$ et $|f| = f^{+} + f^{-}$...

Le théorème précédent est très général. Il prend un aspect plus précis lorsque $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^n$, munis des tribus boréliennes, avec un changement de variable de type particulier ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme).

Remarque 2.11

On présente rapidement la notion de difféomorphisme qui sera vu en détail dans un prochain cours.

Définition 2.7 – Difféomorphisme

Soit $f \in \mathscr{C}^k(\Delta, \mathbb{R}^p)$, où Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on dit que f *est un* ($\mathscr{C}^k$*-)difféomorphisme de* Δ si on a

1. f est injective ;
2. $f(\Delta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$;
3. f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$.

Exemple 2.12 – Difféomorphismes

1. L'application
$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$$
est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. L'application
$$x \longmapsto x^3$$
est $\mathscr{C}^\infty$, injective, mais *n'est pas* un difféomorphisme de $\mathbb{R}$, car sa réciproque n'est pas dérivable en 0. En revanche, c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^*$.

Propriété 2.3

Si $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme, alors

1. La dimension de l'espace d'arrivée est égale à la dimension de l'espace de départ, soit $\boxed{n = p}$.
2. La `jacobienne` de f au point $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$J_f(\underline{x}) = \left[\partial_j f_i(\underline{x})\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Théorème 2.6 – Caractérisation globale des difféomorphismes

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, Δ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a

$$f \text{ est un } \mathscr{C}^1\text{-difféomorphisme} \iff \begin{cases} & f \text{ est injective} \\ \text{et} & \\ & \forall \overrightarrow{x} \in \Delta,\ J_f(\underline{x}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Théorème 2.7 – changement de variable $\mathscr{C}^1$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Soit de plus une fonction $f : \varphi(U) \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable (pour les tribus boréliennes) et intégrables sur $\varphi(U)$ (pour les mesures de Lebesgue), alors

$\left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right|.(f\circ\varphi)$ *est intégrable sur* U *et*

$$\boxed{\int_{\varphi(U)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_U \left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right|.(f\circ\varphi)\,\mathrm{d}\lambda}$$

Démonstration

[a]

1. *Simplification de la situation* la propriété se montre sur les fonctions f positives, puis sur toutes les fonctions (en utilisant $f = f^+ - f^-$). On commence par les fonctions étagées et on passe aux fonctions positives par limite croissante et convergence monotone. La formule étant linéaire en f, on peut se restreindre à une fonction indicatrice d'un borélien de $\varphi(U)$. Elle devient alors
$$\forall A \in \mathcal{BO}(\varphi(U)),\ \int_{\varphi(U)} \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\lambda = \int_U \left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right|.\mathbb{1}_A \circ\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$
Comme φ est bi-continue, on a une bijection entre les boréliens de U et ceux de $\varphi(U)$, il vient donc
$$\forall B \in \mathcal{BO}(U),\ \lambda\left(\varphi(B)\right) = \int_U \left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right|.\mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\lambda. \qquad (*)$$
2. *Démonstration de* $(*)$. Nous allons procéder par récurrence sur n.
   — *Initialisation.* Pour $n = 1$, $(*)$ devient, en se limitant aux intervalles $[a,b]$, $a < b$
   $$\lambda\left(\varphi([a,b])\right) = \int_a^b \left|\varphi'(x)\right| \,\mathrm{d}x$$
   Ce qui est immédiat d'après le théorème fondamental de l'analyse que φ soit croissant ou décroissant.

— *Hérédité.* Supposons la propriété vraie pour $n = p$, et prenons un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{p+1}$.

(a) *Cas où φ échange deux coordonnées. (Type 1)* Par exemple, φ est de la forme

$$(x_1, \ldots, x_{p+1}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{p+1}, x_p)$$

On a alors

$$\left|\det\left(J_\varphi\right)\right| = 1$$

la relation $(*)$ est alors immédiate (on a une isométrie, qui conserve donc les mesures des boréliens, puisqu'elle conserve celle des pavés).

(b) *Cas où φ laisse invariant la dernière coordonnée. (Type 2)* Par exemple, φ est de la forme

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_{p+1}) \longmapsto \big(\varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_p(\underline{x}), x_{p+1}\big)$$

On peut alors utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour diminuer la dimension, en écrivant

$$\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$$

Cela revient à fixer la $p+1$-ième coordonnée $x_{p+1} = h$ et à considérer la section

$${}^hU = \big\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ (x_1, \ldots, x_p, h) \in U\big\}$$

En ce cas, $\varphi_{|_{{}^hU}}$ induit un difféomorphisme de ${}^hU$ sur ${}^h\varphi(U)$, le déterminant de la jacobienne restant inchangé. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous permet de conclure

(c) *Cas général (version locale).* Soit $\underline{x}^0 \in U$, $h = x^0_{p+1}$. Comme φ est un difféomorphisme, on sait qu'il existe un indice j tel que

$$\partial_{p+1}\varphi_j(\underline{x}^0) \neq 0$$

Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $j = p+1$. Cela revient à composer par un difféomorphisme de type 1. Posons

$$\psi\ :\ \underline{x} \longmapsto \big(x_1, \ldots, x_p, \varphi_{p+1}(\underline{x})\big)$$

On peut alors appliquer le théorème d'inversion locale à ψ en $\underline{x}^0$, ce qui nous donne que

$$\exists V_{\underline{x}^0} \text{ un voisinage de } \underline{x}^0,\ \psi_{|V_{\underline{x}^0}} \text{ difféomorphisme}$$

En ce cas, on a

$$\varphi = \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi$$

où les deux difféomorphismes ψ et $\varphi \circ \psi^{-1}$ sont de type 2. On obtient donc le résultat suivant

$$\forall \underline{x} \in U,\ \exists V_{\underline{x}} \text{ voisinage de } \underline{x},\ \forall B \in \mathcal{BO}\left(V_{\underline{x}}\right),\ \lambda\left(\varphi\left(V_{\underline{x}}\right)\right) = \int_{V_{\underline{x}}} \left|\det\left(J_{\varphi}\right)\right| . \mathbb{1}_B \ \mathrm{d}\lambda$$

(d) *Cas général (version globale).* Lorsque $B \in \mathcal{O}(U)$ est compact, on écrit

$$B = \bigcup_{\underline{x} \in U} \left(B \cap V_{\underline{x}}\right)$$

par compacité (propriété de Borel-Lebesgue), on trouve un nombre fini de $p+1$-uplets de U, $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_s)$ tels que

$$B = \bigcup_{k=1}^{s} \left(B \cap V_{\underline{x}_k}\right)$$

ce qui permet de recouvrir B de boréliens disjoints sur lesquels $(*)$ est vérifiée. Par relation de Chasles, on obtient le résultat pour B. Il est facile de conclure pour tout borélien de U.

---

a. Tirée du polycopié « *Intégration et analyse de Fourier* » de Cédric Villani.

Remarque 2.12

Dans la pratique, φ n'est pas toujours un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et U n'est pas toujours un ouvert. On peut, la plupart du temps, se ramener à cette situation en enlevant un ensemble λ-négligeable, pour respecter les hypothèses.

Exemple 2.13

1. *Coordonnées polaires.* On a le changement de variable bien connu

$$\varphi \ : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, \pi] \\ (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)). \end{cases}$$

   qui vérifie les hypothèses du théorème si l'on se restreint à $\mathbb{R}^* \times]0, \pi[$, ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on a bien un difféomorphisme. $\{0\} \times [0, \pi] \cup \mathbb{R} \times \{0, \pi\}$ est λ-négligeable.
   On peut, bien sûr, prendre aussi (pour avoir $\rho \geqslant 0$) $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$. La formule devient

$$\iint\limits_{\varphi(U)} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint\limits_{U} |\rho| \, f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

2. *Coordonnées cylindriques.*

$$\varphi \ : \ (\rho, \theta, z) \longmapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

   On obtient

$$\iiint\limits_{\varphi(U)} f(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{U} |\rho| \, f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$$

3. *Coordonnées sphériques.*

$$\varphi \,:\, (r,\theta,\phi) \longmapsto (r\,\sin(\theta)\,\cos(\phi), r\,\sin(\theta)\,\sin(\phi), r\,\cos(\theta))$$

On obtient

$$\iiint_{\varphi(U)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{U} |r^2\,\sin(\theta)|\,f(r\,\sin(\theta)\,\cos(\phi), r\,\sin(\theta)\,\sin(\phi), r\,\cos(\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Exercice(s) 2.7

2.7.1 Justifier proprement les changements de variables cylindriques et sphériques.

2.7.2 Reprendre les calculs demandés page 106 de M211, en les justifiant proprement. À savoir le calcul de

$$\int_D f\,\mathrm{d}\lambda$$

pour les cas suivants

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+a^2} \quad \text{et} \quad D = \left\{y \geqslant 0,\ 0 \leqslant \rho \leqslant a\,(1+\cos(\theta))\right\}, \quad (a>0) \tag{2.1}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad D = \left\{\frac{a}{2+\cos(\theta)} \leqslant \rho \leqslant a\right\}, \quad (a>0) \tag{2.2}$$

$$f(x,y,z) = 1 \quad \text{et} \quad D = \left\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a \text{ et } x^2+y^2 \leqslant z^2\right\}, \quad (a>0) \tag{2.3}$$

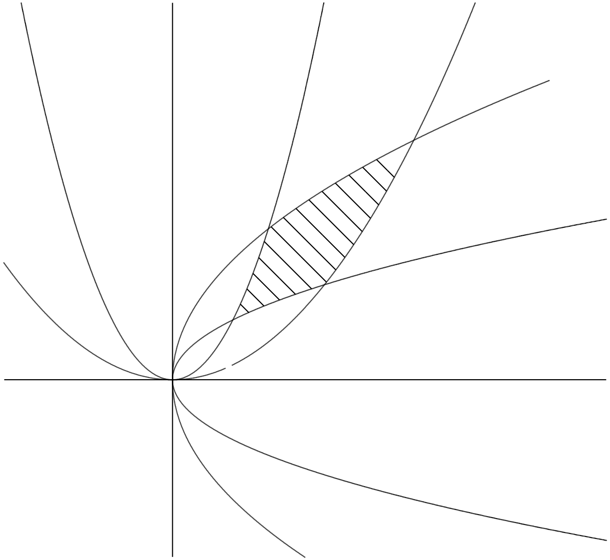
$$f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+1} \quad \text{et} \quad D = \left\{z \in [0,1] \text{ et } x^2+y^2 \leqslant z^2\right\} \tag{2.4}$$

2.7.3 Soit $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$, calculer l'aire du domaine délimité par les paraboles

$$y^2 = 2\,p_1\,x,\ y^2 = 2\,p_2\,x \text{ et } x^2 = 2\,q_1\,y,\ x^2 = 2\,q_2\,y.$$

On pourra utiliser le changement de variable

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{y^2}{2\,x}, \frac{x^2}{2\,y}\right).$$



2.7.4 Soit la fonction définie par

$$f \ : \begin{cases}]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{1-x\,y} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est intégrable sur $]0,1[^2$.

(b) Effectuer le changement de variable

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.7.5 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit, de plus, deux variables aléatoires sur Ω, suivant des lois normales centrées, réduites. On suppose de plus que ces `v.a.r.` sont indépendantes. Montrer que les `v.a.r.` U et V sont indépendantes, où

$$U = X^2 + Y^2 \text{ et } V = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

2.7.6 Calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$BF(\underline{0}, 1) = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\right\}$$

2.7.7 Soit f et g dans $\mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda; \mathbb{R}\right)$, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. On pose

$$\Delta = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(z) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant g(z)\right\}$$

Montrer que Δ est mesurable et a un volume fini égal à

$$\lambda(\Delta) = \pi\left(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\lambda - \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda\right)$$

2.7.8 En utilisant le théorème général de changement de variable, montrer le théorème de changement de variable $\mathscr{C}^1$ lorsque φ est dans $\mathscr{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Modes de convergence

3.1.1 Convergences simple et uniforme

Définition 3.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,E)^{\mathbb{N}}$, où A est un ensemble et E un espace métrique, alors on dit que

1. La suite *converge simplement sur A* vers une application $f \in \mathscr{F}(A, E)$, si

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

on notera

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s} f,\ \text{sur } A$$

2. La suite *converge uniformément sur A* vers f, si

$$\sup_{a \in A} \Big(d\left(f_n(a), f(a)\right) \Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Lorsque E est un espace vectoriel normé, on notera abusivement [a]

$$\forall f \in \mathscr{F}(A, E),\ \|f\|_{\infty, A} \overset{\text{Not}}{=} \sup_{x \in A} \|f(x)\| \in [0, +\infty]$$

On écrit

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f \text{ sur } A$$

---

a. Ce n'est pas une norme, car elle peut prendre la valeur $+\infty$.

Remarque 3.1 – Uniforme ?

Uniforme en mathématiques signifie « indépendant d'un paramètre ». Pourquoi utilise-t-on ce terme ici ? Traduisons syntaxiquement les deux convergences.

Convergence simple

La convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,E)^{\mathbb{N}}$ vers $f \in \mathscr{F}(A,E)$ s'écrit

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[d\left(f_n(x), f(x)\right) \leqslant \varepsilon\right]$$

Le paramètre N dépend de x et ε.

Convergence uniforme

Elle s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ [n \geqslant N] \implies \left[d\left(f_n(x), f(x)\right) \leqslant \varepsilon\right]$$

Le paramètre N dépend de ε, mais *ne dépend plus de* x.

Propriété 3.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{F}(A,E)$, alors

$$\boxed{\left[f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } A\right] \Longrightarrow \left[f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f \text{ sur } A\right]}$$

Démonstration

C'est de la logique !

Exemple 3.1 – Convergences simples

1. La suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par
$$f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$$
converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
2. La suite de fonctions définie sur $\mathbb{C}$ par
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers la fonction $z \longmapsto \exp z$.

3. La suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$P_0 = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Démonstration

1. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right) = \exp\left(n\ln(4) + 2^n\ \ln(x) + \ln\left(1 - x^{2^n}\right)\right) =$$

$$\exp\left(n\ \ln(4) + 2^n\ \ln(x) + o(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par ailleurs, pour les valeurs 0 et 1, la suite est stationnaire en 0. On a bien

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Posons $z = x + i\,y$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x}{n} + i\,\frac{y}{n} = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}}\, e^{i\,\theta_n}$$

où θ_n est un argument de $1 + z/n$. Mais, *pour n assez grand*, $1 + x/n > 0$, donc on peut prendre

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{y/n}{1 + x/n}\right) = \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)$$

En ce cas

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} \exp\left(i\,n \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)\right)$$

Or,

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$$

et

$$n \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

donc

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{x+i\,y} = e^z$$

3. En posant, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n(x)$, on est ramené à l'étude de la suite récurrente définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - u_n^2\right)$$

On montre donc successivement que

(a) *Stabilité de l'intervalle* $\left[0, \sqrt{x}\right]$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \sqrt{x}\right]$$

(b) La fonction $\psi : t \longmapsto t + \frac{1}{2}\left(x - t^2\right)$ est croissante sur $\left[0, \sqrt{x}\right]$, donc la suite est monotone.

(c) Comme $u_{\geqslant} u_0$ la suite est croissante, majorée par $\sqrt{x}$ elle converge vers une limite ℓ et comme ψ est continue, $f(\ell) = \ell$, ce qui nous donne $\ell = \sqrt{x}$.

La démarche est illustrée à la figure 3.1, page 157, pour $x = 2/3$.

Exemple 3.2 – Convergences uniformes

1. La suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par
$$f_n(x) = 4^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$$
ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Elle converge cependant uniformément sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ où $a \in]0,1[$. Voir la figure 3.2, page 158, à gauche.
2. La suite de fonctions définie sur $\mathbb{C}$ par
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
converge uniformément sur $\left\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant R\right\} = C_R$, mais pas sur tout $\mathbb{C}$. Voir la figure 3.2, page 158, à droite.
3. La suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par
$$P_0 = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$$
converge uniformément sur $[0,1]$. Voir la figure 3.3, page 159, à gauche.
Il est souvent plus clair de visualiser la différence avec la limite potentielle. Voir la figure 3.3, page 159, à droite.

Ces trois exemples présentent les techniques usuelles pour étudier la convergence uniforme
1. étude de fonction et tableau de variations ;

2. majoration *uniforme* de l'écart entre la fonction et sa limite, à l'aide des formules de Taylor ;
3. majoration *uniforme* de l'écart entre la fonction et sa limite, par une propagation des inégalités dans la récurrence.

Démonstration du premier exemple 3.2, page précédente

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $(0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_n'(x) = 4^n \left(2^n \, x^{2^n - 1} - 2^{n+1} \, x^{2^{n+1}-1}\right)$$

elle s'annule dans $]0,1[$ en

$$a_n = \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}$$

On a alors $(f = 0)$

$$f_n(a_n) - f(a_n) = 4^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui suffit à montrer la non convergence uniforme sur $[0,1]$.

Étudions cependant le tableau de variations (pour $n \geqslant 1$) de la figure 3.4, page 160, à gauche. On constate alors sur la même figure, à droite, que, puisque

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

si $a < 1$, à partir d'un certain rang $a < a_n$, mais comme la fonction f_n est croissante sur $[0,a]$, on obtient

$$\forall a \in]0,1[, \sup_{x \in [0,a]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'après la convergence simple en a. Ceci exprime la convergence uniforme sur $[0,a]$.

La convergence uniforme est une propriété *globale* ! Alors que la convergence simple est une propriété locale.

Démonstration

Le premier cas des exemples 3.1, page 130 et 3.2, page 133 nous fournit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall a \in]0,1[,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} 0 \text{ sur } [0,a], \text{ et } f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} 0 \ \text{ sur } [0,1[$$

Remarque importante 3.2

Pour montrer la non convergence uniforme d'une suite de fonctions, il faut montrer que

$$\sup_{a\in A}\Big(d\left(f_n(a), f(a)\right)\Big) \text{ ne tend pas vers } 0$$

Il suffit donc de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\boxed{d\left(f_n(a_n), f(a_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0}$$

Démonstration du deuxième exemple 3.2, page 133

1. *Il n'y a pas convergence uniforme sur* $\mathbb{C}$

   Si on prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = n$, on a

$$f_n(z_n) - f(z_n) = 2^n - e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{0} -\infty$$

2. *Il y a convergence uniforme sur* C_R. Nous allons montrer la convergence uniforme des module et argument.
3. Pour $z \in C_R$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $z = x + i\,y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient, en utilisant les inégalités issues du théorème de Taylor-Lagrange (voir MATH1302P, théorème 3.7, page 144)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\arctan(x) - x\right| \leqslant |x|^3,\ \left|e^x - 1\right| \leqslant |x|\,e^{|x|}$$

   et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \left|\ln(1+x) - x\right| \leqslant \frac{|x|^2}{2\,(1-|x|)^2}$$

   Pour l'argument

   quand $n > R$

$$\left|n \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right) - y\right| \leqslant \left|n \left(\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right) - \frac{y}{x+n}\right)\right| +$$
$$n \left|\frac{y}{x+n} - \frac{y}{n}\right| \leqslant n \left|\frac{y}{x+n}\right|^3 + \frac{|x\,y|}{n\,(x+n)} \leqslant n \left(\frac{R}{n-R}\right)^3 + \frac{R^2}{n\,(n-R)}$$

   Et donc

$$\sup_{z \in C_R} \left(\left|n \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right) - y\right|\right) \leqslant n \left(\frac{R}{n-R}\right)^3 + \frac{R^2}{n\,(n-R)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   ce qui montre la convergence uniforme de l'argument.

Pour le module

toujours quand $n > R$

$$\left|\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2}-e^x\right| =$$

$$e^x \left|\exp\left(\frac{n}{2}\,\ln\left(1+\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)-x\right)-1\right| \leqslant$$

$$e^R \underbrace{\left|\frac{n}{2}\,\ln\left(1+\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)-x\right|}_{=①} \times$$

$$\underbrace{\exp\left(\frac{n}{2}\,\ln\left(1+\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)-x\right)}_{②}$$

où

$$② = e^{-x}\,\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant e^R\,\left(1+\frac{R}{n}\right)^n \leqslant e^{2\,R}$$

et

$$\textcircled{1} \leqslant \frac{n}{2}\left|\ln\left(1+\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)-\left(\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right| +$$

$$\frac{n}{2}\left|\frac{x^2+y^2}{n^2}\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^2 \frac{1}{\left(1-\left|\frac{2\,x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right|\right)^2}+\frac{x^2+y^2}{2\,n} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,R}{n}+\frac{R^2}{n^2}\right)^2 \frac{1}{\left(1-\frac{2\,R}{n}-\frac{R^2}{n^2}\right)^2}+\frac{R^2}{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet de conclure à la convergence uniforme du module.

Conclusion

En notant ρ_n et θ_n les module et argument de $(1+z/n)^n$, et $\rho : z \longmapsto e^x$ et $\theta : z \longmapsto y$, on a montré que

$$\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \rho \text{ et } \theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \theta \qquad \text{sur } C_R$$

en utilisant l'inégalité

$$\left|\rho_n\, e^{i\,\theta_n}-\rho\, e^{i\,\theta}\right| \leqslant \left|\rho_n-\rho\right|+\rho\left|e^{i\,\theta_n}-e^{i\,\theta}\right| \leqslant \left|\rho_n-\rho\right|+\rho\left|\theta_n-\theta\right|$$

on conclut (enfin) à la convergence uniforme annoncée.

Pour montrer une convergence uniforme, on ne peut pratiquement *jamais* utiliser des développements limités, car le o (en fonction de n) ne nous dit pas comment il se comporte en fonction des autres paramètres.

Il faut maîtriser les o en utilisant des inégalités de Taylor-Lagrange ou avec un reste intégral !

Démonstration du o proscrit

Soit la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

On a

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

car, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Mais, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, car $f_n(n) - f(n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Démonstration du troisième exemple 3.2, page 133

Rappelons que pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, il nous faut étudier la borne supérieure de l'écart entre f_n et f. C'est donc, la nouvelle fonction $f_n - f$ qui nous intéresse !

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n = P_n - \left(x \longmapsto \sqrt{x}\right), \text{ sur } [0,1]$$

On a alors, pour $x \in [0,1]$

$$g_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) - \sqrt{x} = g_n(x)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right)$$

Or, on sait, puisque la suite récurrente était croissante que $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$, donc

$$\left|g_{n+1}(x)\right| \leqslant \left|g_n(x)\right| \left|1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right|$$

ce qui nous donne facilement

$$\left|g_n(x)\right| \leqslant \left|g_0(x)\right| \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = \underbrace{\sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}_{=w_n(x)}$$

Il est facile de montrer la convergence uniforme de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$

$$w_n(x) = \varphi_n\left(\sqrt{x}\right), \text{ où } \varphi_n(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$$

et, comme

$$\varphi_n'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n - \frac{n}{2}\,x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{(n+1)\,x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

s'annule en $a_n = 2/(n+1)$, on a

$$\left\|\varphi_n\right\|_{\infty,[0,1]} = \max\left(\left|\varphi_n(0)\right|, \left|\varphi_n(a_n)\right|, \left|\varphi_n(1)\right|\right) = \varphi_n(a_n) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{e\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Plan d'étude de la convergence uniforme d'une suite de fonctions

1. Étude de la convergence simple et expression de la fonction limite f.
2. Calcul (ou majoration/minoration) de
$$\|f_n - f\|_{\infty,A}$$
3. Conclusion.
4. S'il n'y a pas convergence uniforme sur A, recherche éventuelle des sous-ensembles simples où il y a convergence uniforme.

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Montrer que la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [-n, 0] \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -n[\end{cases}$$

converge uniformément sur $]-\infty, 0]$.

3.1.2 Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n\left(\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge simplement sur tout $\mathbb{R}$ vers $x \longmapsto \frac{2}{1+x^2}$. Étudier la convergence uniforme de la suite.

3.1.3 Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ g_n(x) &= \begin{cases} f_n(x) & \forall x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ h_n(x) &= \begin{cases} f_n(x) & \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}, \dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.4 On définit sur $\mathbb{R}_+$ la suite de fonctions par

$$f_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

Étudier ses convergences simple et uniforme.

3.1.5 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \neq 0 \ \left|f(x)\right| < |x|$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1.6 Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}$$

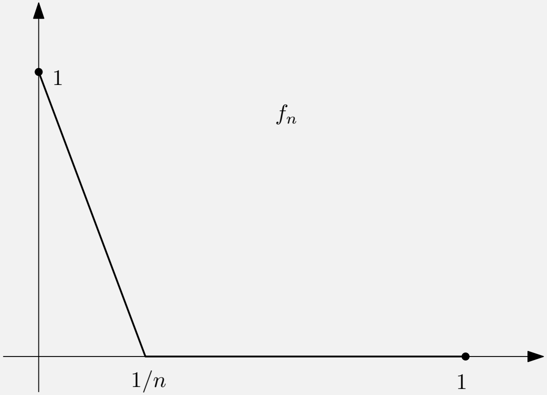
converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(1+\sqrt{2}) & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Étudier sa convergence uniforme.

3.1.2 Interversions de limites

En général, il est impossible d'intervertir des limites, ainsi, la fonction « demi-chapeau »



vérifie

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{p}\right) \neq \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{p}\right)$$

Heureusement, la convergence uniforme apporte une réponse à ces problèmes d'interversion.

Remarque 3.3

Nous avons rencontré ou allons rencontrer des théorèmes d'interversions, notamment dans le cours d'intégration (chapitres 2, page 65 et 4, page 223)

1. théorème de convergence monotone (suite [convergence simple et croissance] et intégrale) ;
2. théorème de convergence dominée (suite [convergence simple et domination] et intégrale) ;
3. théorème de Fubini (intégrale et intégrale ou suite et suite) ;
4. théorème de continuité sous le signe $\int$ (continuité et intégrale) ;
5. théorème de dérivabilité sous le signe $\int$ (dérivation et intégrale).

Toute interversion de limites DOIT être justifiée !

Proposition 3.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A, E)^{\mathbb{N}}$, où A est un ensemble quelconque et E un espace métrique, $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite tels que

1. *il existe $f \in \mathscr{F}(A, E)$ telle que*
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } A$$
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in E$ tel que*
$$\ell_n = \lim_{p\to+\infty} f_n(a_p)$$

3. et il existe $L \in E$ tel que

$$\ell_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$$

Alors

$$\boxed{f(a_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} L}$$

Ce qui peut se traduire par

$$\lim_{p \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(a_p) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} f_n(a_p)$$

Démonstration

On utilise l'inégalité triangulaire suivante, pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$

$$d(f(a_p), L) \leqslant d\left(f(a_p), f_n(a_p)\right) + d(f_n(a_p), \ell_n) + d(\ell_n, L)$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors, il existe un N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ d(\ell_n, L) \leqslant \varepsilon$$

Par ailleurs, il existe un N' tel que

$$\forall n \geqslant N',\ \forall a \in A,\ d\left(f_n(a), f(a)\right) \leqslant \varepsilon$$

Remarquons que N et N' ne dépendent que de ε et prenons $n = \max(N, N')$. On a alors l'existence d'un P tel que

$$\forall p \geqslant P,\ d\left(f_n(a_p), \ell_n\right) \leqslant \varepsilon$$

En conclusion, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant P,\ d\left(f(a_p), L\right) \leqslant 3\,\varepsilon$$

Remarque 3.4

A priori, il n'y a pas de propriété particulière autre que celles énoncées sur la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$, elle n'est donc pas nécessairement convergente (d'ailleurs, A n'a pas forcément de structure...).

Proposition 3.2

Soit A et E deux espaces métriques et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans E continues sur A *(resp. continues en $a \in A$), qui converge uniformément vers une fonction $f : A \longrightarrow E$, alors*

$$f \text{ est continue sur } A \text{ (resp. est continue en } a\text{)}$$

Démonstration

Soit $a \in A$, et soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a, alors

1. *Convergence uniforme.* Par hypothèse
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } A$$
2. f_n étant continue en a, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$
$$f_n(a_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f_n(a) = \ell_n$$
3. De plus
$$\ell_n = f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L = f(a)$$

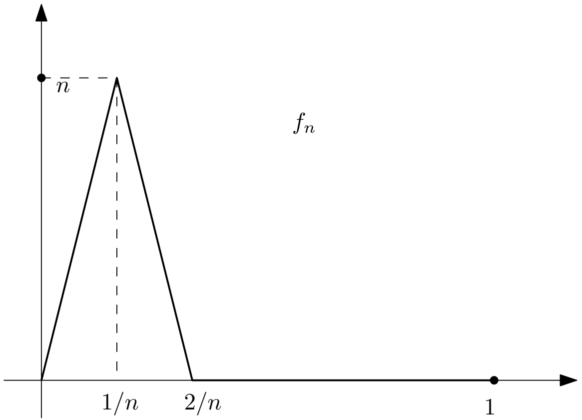
La proposition précédente nous permet de conclure que

$$f(a_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} L = f(a)$$

ce qui exprime (caractérisation séquentielle) la continuité de f en a.

Remarque 3.5

La réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que chaque f_n est continue et que f est continue, que la convergence est uniforme, comme le montre la fonction « chapeau » suivante



Démonstration

On a immédiatement

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f = 0 \text{ sur } [0,1] \quad \text{et} \quad (f_n - f)\left(\frac{1}{n}\right) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et, donc, il n'y a pas convergence uniforme.

Proposition 3.3

Soit A et E deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur A (resp. continues en $a \in A$) et f une application de A dans E, telles que

$$\forall K \text{ compact inclus dans } A,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } K$$

alors f est continue sur A (resp. en a).

Démonstration

On utilise la proposition de localisation de la continuité de [1].

Proposition 3.4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur toute partie Ω à *valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ ou $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $[-\infty, +\infty]$ ou $\mathbb{C}$, telles que*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \Omega$$

Alors f est intégrable sur toute partie $A \in \mathcal{T}$ et

$$\forall A \in \mathcal{T}, \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

Démonstration

1. On sait déjà que f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables.
2. Comme A est de mesure finie, car $\mu(\Omega) < +\infty$ on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A |f_n| \, \mathrm{d}\mu + \int_A |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A |f_n| \, \mathrm{d}\mu + \|f - f_n\|_{\infty,\Omega} \, \mu(A) < +\infty$$

   Donc, f est intégrable sur A.
3. De plus,

$$\left| \int_A (f_n - f) \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_A |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,\Omega} \, \mu(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 3.6

1. Si $\Omega = \mathbb{R}$, alors on a

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R},\ \int_{[a,b]} f_n \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

   L'inégalité de la démonstration nous donne même la convergence uniforme de la suite des « primitives » des f_n s'annulant en a, soit

$$\left(x \longmapsto \int_{[a,x]} f_n \,\mathrm{d}\lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \left(x \longmapsto \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda\right) \text{ sur } [a,b]$$

2. ⚠ Le résultat n'est plus vrai sur un ensemble de mesure infinie. On peut avoir la convergence uniforme et ne pas pouvoir intervertir limite et intégrale !

Démonstration

Prenons la suite de fonctions définie à la figure 3.5, page 160. On a alors facilement

1. *(Convergence uniforme)*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

   car $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 1/n$.

2. *(Non interversion)* (car l'intervalle n'est pas de mesure (longueur) finie).

$$\int_{\mathbb{R}_+} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}_+} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

Proposition 3.5

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de A dans $\mathbb{K}$ telles que

1. *la suite $\big(f_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\delta \in \mathbb{K}$;*
2. *la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément sur tout segment inclus dans *A vers une fonction g.*

Alors

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers une fonction f ;*
2. *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, $f' = g$ et*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur tout segment inclus dans } A$$

Démonstration

1. Comme les fonctions f_n' sont continues sur A, la fonction g est continue sur A, d'après la proposition 3.3, page 149.
2. De plus, si nous prenons $x \in A$, contenant a, on peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\ \mathrm{d}t$$

La proposition précédente (appliquée sur le segment $[a, x]$) nous permet de passer à la limite pour obtenir

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta + \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$$

On a donc

$$\forall x \in A,\ f(x) = \delta + \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$$

La fonction f est manifestement de classe $\mathscr{C}^1$, puisque g est continue et le théorème fondamental de l'analyse (voir [3], théorème 3.3, page 114) nous permet d'affirmer que $f' = g$. La convergence est uniforme sur tout segment inclus dans A d'après la proposition précédente.

Proposition 3.6

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

1. *les suites $\left(f_n^{(j)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des valeurs δ_j, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$;*
2. *la suite $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans A vers une fonction g_k.*

Alors

1. *les suites $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur A vers des fonctions g_j, $j \in [\![0, k-1]\!]$;*
2. *$f = g_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et*
$$\forall j \in [\![1, k]\!],\ f^{(j)} = g_j$$
et, de plus
$$\forall j \in [\![0, k-1]\!],\ f_n^{(j)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g_j \text{ sur tout segment inclus dans } A$$

Démonstration

Simple récurrence sur $j \in [\![0,k]\!]$, avec la relation

$$\forall j \in [\![1,k]\!]\,,\ \forall x \in A,\ g_{j-1}(x) = \delta_{j-1} + \int_a^x g_j(t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque 3.7

Dans la pratique, ces théorèmes (continuité et dérivation) ne sont intéressants que lorsque l'on ne connaît pas f. On les utilisera donc surtout lorsque la fonction f est inconnue (limite de suite de Cauchy, limite de suite implicite, somme de séries, etc.)

Exemple 3.3

On s'intéresse à la résolution du système suivant

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f'(x) = f\left(x - x^2\right)$$

Pour cela, on construit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante

$$f_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n\left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une solution du système.

Démonstration

Ce qui est intéressant dans cet exemple, c'est qu'on ne connaît pas la fonction limite.

Construction de la limite

Soit $x \in [0,1]$, il nous faut étudier la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, nous allons étudier sa série dérivée (voir la remarque importante 2.2, page 58 de MATH2305P) définie par

$$u_0(x) = f_0(x) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \int_0^x f_n\left(t - t^2\right)\,\mathrm{d}t\right) - \left(1 + \int_0^x f_{n-1}\left(t - t^2\right)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$\int_0^x \left(f_n\left(t - t^2\right) - f_{n-1}\left(t - t^2\right)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^x u_n\left(t - t^2\right)\,\mathrm{d}t$$

Nous n'obtenons pas clairement une récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais nous allons en profiter pour montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

(*Initialisation*) C'est vrai pour $n = 0$, car $u_0 = 1$;

(*Hérédité*) Supposons l'inégalité vraie au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors, pour $x \in [0,1]$, on a

$$\left|u_{n+1}(x)\right| \leqslant \int_0^x \left|u_n\left(t - t^2\right)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^x \left(t - t^2\right)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme la série $\sum x^n/n!$ est convergente, on en déduit que $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente et donc, que la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, notons f sa limite (qui est dans $\mathscr{F}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$). On a de plus

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

Vérification de la convergence uniforme

On peut remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{n!}, \text{ donc } \sum \|u_n\|_{\infty,[0,1]} \text{ converge}$$

(on parlera plus tard de convergence normale, voir la définition 3.2, page 176). Donc, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,[0,1]}$$

donc, en passant à la borne supérieure

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Vérification des propriétés de f

Comme toutes les f_n sont continues sur $[0,1]$, la proposition 3.2, page 147 nous permet d'affirmer que f est continue sur $[0,1]$. Mais la proposition 3.4, page 149 et la remarque 3.6, page 151, nous permettent de dire que

$$\forall x \in [0,1],\ \int_0^x f_n\left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x f\left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

puisque la convergence est uniforme. En passant, à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la formule initiale, on obtient

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1 + \int_0^x f\left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

On en déduit, en appliquant le théorème fondamental de l'analyse que, puisque f est continue, il est possible de dériver le terme de droite de l'égalité, donc f est dérivable et

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f'(x) = f\left(x - x^2\right)$$

Figure 3.1 – Une suite récurrente associée à la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

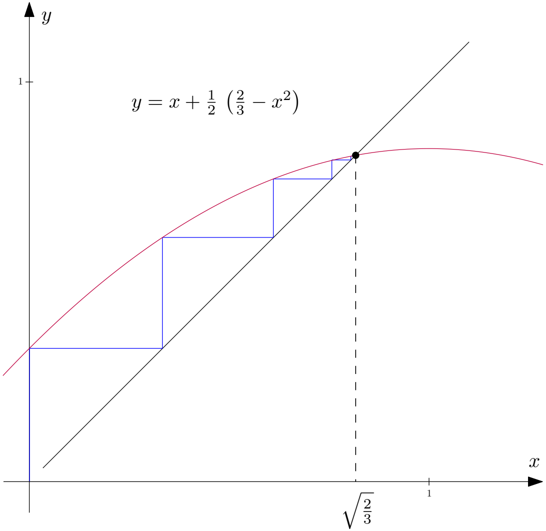


Figure 3.2 – Exemples sur la convergence uniforme

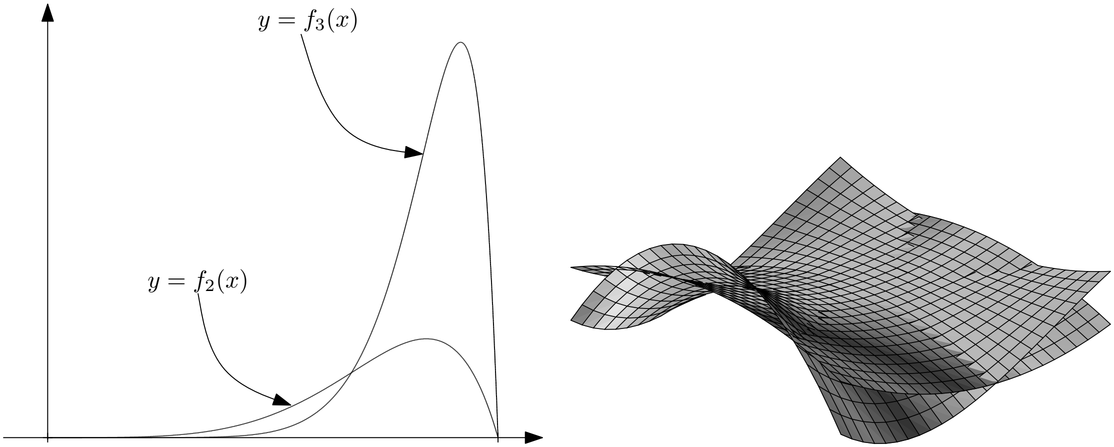


Figure 3.3 – Visualisation d'une convergence uniforme

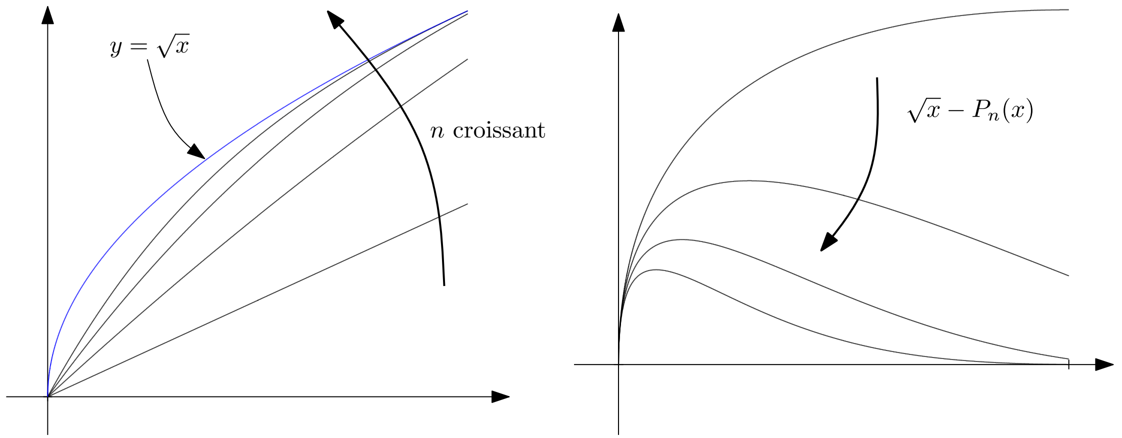


Figure 3.4 – Tableaux de variations et convergence uniforme

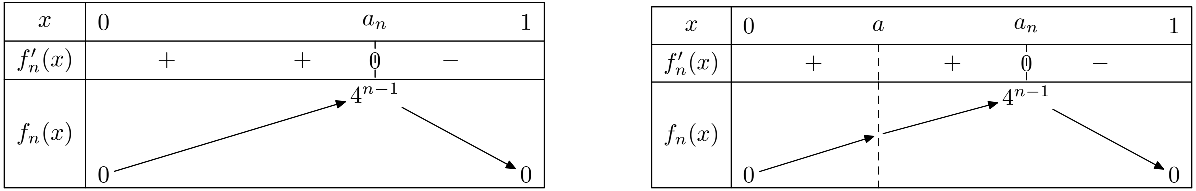
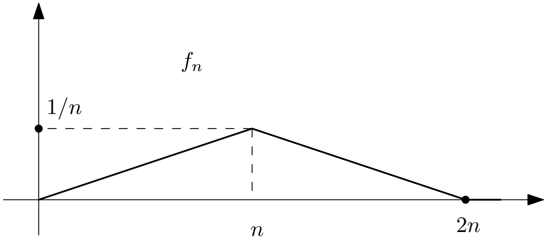


Figure 3.5 – Contre-exemple à l'interversion limite et intégrale avec convergence uniforme



Exercice(s) 3.2

3.2.1 Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \frac{x^n\, e^{-x}}{n!}$$

(a) Étudier ses convergences simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$;

(b) comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Conclure.

3.2.2 On considère la suite de fonctions donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_0(x) = 1$$

et

$$\forall n \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) Même question en prenant pour f_0 une fonction continue quelconque > 0 sur $\mathbb{R}^+$.

3.2.3 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite P est un polynôme.

3.2.4 Soit $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, nulle en 0 uniquement. Si $\phi \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, soit

$$\begin{array}{rccc} T_g(\phi) & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\big(\phi(s)+g(s-t)\big) \end{array}$$

L'application T_g envoie $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sur lui-même.

(a) Justifier.

(b) Montrer que si $\phi \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\big(T_g \circ \cdots T_g(\phi)\big)$ (n fois) converge uniformément vers une fonction de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(c) Que dire si $g(u) = |u|$ pour tout u de $[-1,1]$?

(d) Que dire si $g(u) = o(u)$ quand $u \to 0$?

3.2.5 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ par $f_0(x) = x$; f_{n+1} est affine sur chacun des intervalles

$$\left[\frac{k}{3^{n+1}},\frac{k+1}{3^{n+1}}\right],\ \forall k \in \{0,\ldots,3^{n+1}-1\}$$

et vérifie

$$\begin{aligned} f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) \\ f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right) \\ f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f et f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

3.1.3 Limites et approximation

Quand on a une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,E)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathscr{F}(A,E)$, il est naturel de s'intéresser à sa convergence uniforme. Mais, y a-t-il des cas où cette convergence uniforme est automatique ? Ce paragraphe propose quelques conditions suffisantes pour pouvoir passer de la convergence simple à la convergence uniforme.

3.1.3.1 Propriétés de Montel

Proposition 3.7 – Dini

Soit K un compact, et $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\left[\forall x \in K,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} \geqslant f_n \text{ et } f \text{ continue}$$

alors la convergence est uniforme, c'est-à-dire

$$\|f_n - f\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

Voir [1].

Soit $\varepsilon > 0$, considérons

$$\forall p \in \mathbb{N},\ F_p = \{x \in K,\ |f_p(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

1. *F_p est un fermé de K*, car f et f_p sont continues et

$$F_p = (f_p - f)^{-1}\left(\mathbb{R} \backslash] - \varepsilon, +\varepsilon[\right)$$

2. *Ils sont emboîtés*, car si $x \in F_{p+1}$, on a

$$f(x) - f_p(x) \geqslant f(x) - f_{p+1}(x) \geqslant \varepsilon$$

   donc $x \in F_p$.

3. *L'intersection des F_p est vide*, car

$$\forall x \in K,\ f_p(x) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(x)$$

Donc, (voir le théorème des fermés emboîtés [1]) ils sont tous vides à partir d'un certain rang P, soit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left[p \geqslant P\right] \implies \left[\underbrace{\forall x \in K,\ |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\text{ou encore } \|f_p - f\|_{\infty,K} < \varepsilon}\right]$$

Proposition 3.8 – Dini

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions* croissantes *définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, si*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f \text{ sur } I \text{ où } f \text{ est continue sur } I$$

alors

$$\forall [a,b] \subset I,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } [a,b]$$

Démonstration

1. *La fonction* f *est elle aussi croissante.* Il suffit de passer à la limite pour $x < y$ dans l'expression
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_n(y)$$
2. *La fonction* f *est uniformément continue sur* $[a,b]$. On applique le théorème de Heine (voir [1]).
3. *Découpage en tranches.* Soit $\varepsilon > 0$ fixé et η associé (pas de l'uniforme continuité de f sur $[a,b]$), alors si l'on pose
$$N = \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor \text{ et } \forall k \in [\![0,N]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{N},\ \text{et } a_{N+1} = b$$
(on découpe le segment $[a,b]$ en petits segments de longueur $\leqslant \eta$), on peut écrire la convergence des suites $\left(f_n(a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui donne l'existence d'un entier P tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,N+1]\!],\ [n \geqslant P] \implies \left[\left|f_n(a_k) - f(a_k)\right| \leqslant \varepsilon\right]$$
4. *Bilan.* Soit $x \in [a,b]$, il existe un indice k tel que
$$x \in [a_k, a_{k+1}]$$

donc, pour $n \geqslant P$, on a

$$f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(a_{k+1}) - f(a_k) \leqslant |f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1})| + |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \leqslant 2\,\varepsilon$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geqslant f_n(a_k) - f(a_{k+1}) \geqslant \; - |f_n(a_k) - f(a_k)| - |f(a_k) - f(a_{k+1})| \geqslant -2\,\varepsilon$$

Comme P est indépendant de x, on a la convergence uniforme.

Proposition 3.9

Soit I un intervalle ouvert *de $\mathbb{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes, qui converge vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors*

$$\forall [a,b] \subset I,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } [a,b]$$

Démonstration

1. La fonction f, limite simple de fonctions convexes est convexe. Elle est donc continue sur l'intervalle ouvert I.
2. Soit $[a,b] \subset I$, et $\alpha \in I \backslash [a,b]$, $\alpha < a$, alors les fonctions

$$\varphi_n \ : \begin{cases} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha} \end{cases}$$

sont croissantes et convergent simplement vers la fonction continue

$$\varphi \ : \begin{cases} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \end{cases}$$

3. D'après la proposition précédente, la convergence est uniforme sur $[a,b]$.
4. Finalement, si $x \in [a,b]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(\alpha) + (x-\alpha)\,\varphi_n(x) - f(\alpha) - (x-\alpha)\,\varphi(x)\right| \leqslant$$
$$|f_n(\alpha) - f(\alpha)| + (b-\alpha)\,\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,[a,b]}$$

D'où la convergence uniforme.

Proposition 3.10

Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes de E dans E' qui converge vers une fonction $f : E \longrightarrow E'$, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur tout compact de } E$$

Démonstration

1. La fonction f est aussi k-lipschitzienne, en effet, soit $(x,y) \in E^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors
$$d'\left(f_n(x), f_n(y)\right) \leqslant k\,d(x,y)$$
donc à la limite
$$d'\left(f(x), f(y)\right) \leqslant k\,d(x,y)$$
2. Soit K un compact de E, soit $\varepsilon > 0$, alors on peut trouver un nombre fini d'éléments de K, $(x_1,\dots,x_p)$ tels que (précompacité de K) [a].
$$K \subset \bigcup_{j=0}^{p} BF\left(x_j, \frac{\varepsilon}{k}\right)$$

3. On écrit alors la convergence des suites $\left(f_n(x_j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $j \in [\![1,p]\!]$. Il existe donc un N entier tel que

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[d'\left(f_n(x_j), f(x_j)\right) \leqslant \varepsilon\right]$$

4. On conclut pour $x \in K$, $n \geqslant N$, en notant j l'indice pour lequel $x \in BF(x_j, \varepsilon/k)$, par

$$d'\left(f_n(x), f(x)\right) \leqslant d'\left(f_n(x), f_n(x_j)\right) + d'\left(f_n(x_j), f(x_j)\right) + d'\left(f(x_j), f(x)\right) \leqslant 3\,\varepsilon$$

---

a. Petit exercice sur la compacité.

Proposition 3.11

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions développables en série entière (variable complexe, valeurs complexes) avec des rayons de convergences $R_n > 0$, telle que

1. *il existe $R > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n \geqslant R$,*
2. *il existe $M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty, BO(0,R)} \leqslant M$;*
3. *il existe $f : BO(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$ sur $BO(0,R)$.*

Alors f est développable en série entière sur $BO(0,R)$ et

$$\forall r \in]0,R[,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } BF(0,r)$$

Démonstration

On notera

$$f_n(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_n^{(p)}\, z^p \qquad R_n \geqslant R$$

1. On commence par montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0, R[,\ \forall p \in \mathbb{N},\ a_n^{(p)} = \frac{1}{2\,\pi\, r^p} \left(\int_0^{2\,\pi} f_n\left(r\, e^{i\,\theta}\right) e^{-i\,p\,\theta}\, \mathrm{d}\theta \right)$$

2. On en déduit que (par théorème de convergence dominée, par exemple), pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall r \in]0, R[,\ a_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^{(p)} = \frac{1}{2\,\pi\, r^p} \left(\int_0^{2\,\pi} f\left(r\, e^{i\,\theta}\right) e^{-i\,p\,\theta}\, \mathrm{d}\theta \right)$$

3. On montre que la série entière

$$\sum a^{(p)}\, z^p \text{ a un rayon de convergence } \geqslant R$$

4. On montre que (convergence uniforme des coefficients)

$$\forall r \in]0, R[,\ \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\left| a_n^{(p)} - a^{(p)} \right| r^p \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

5. Il est facile de conclure que, pour tout $z \in BO(0, R)$

$$f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a^{(p)}\, z^p \text{ et } \forall r \in]0, R[,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } BF(0, r)$$

3.1.3.2 Approximation

Proposition 3.12

Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$, où (E,d) est un espace métrique, continue par morceaux sur $[a,b]$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \text{ en escalier },\ \forall x \in [a,b],\ d\left(f(x), \varphi(x)\right) \leqslant \varepsilon$$

Démonstration

1. *Si f est continue.* Alors, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue ($[a,b]$ est compact), si $\varepsilon > 0$ est fixé, η associé, on pose
$$N = \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor,\ \forall k \in [\![0,N]\!],\ a_k = a + k\,\frac{b-a}{N} \text{ et } a_{N+1} = b$$
La fonction définie pour $x \in [a,b]$ par
$$\varphi(x) = f(a_k),\ \text{où } k = \left\lfloor \frac{N\,(x-a)}{b-a} \right\rfloor \text{ convient}$$
2. *Si f est continue par morceaux.* On travaille sur chaque morceau.

Théorème 3.1 – Weierstraß

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

On a vu ou on verra une démonstration basée sur la convolution. Bernstein a proposé une démonstration donnant une suite explicite réalisant l'approximation. La voici (résumée).

1. On se ramène au cas où $[a,b] = [0,1]$ en posant
$$g(t) = f\left(a + t\,(b-a)\right)$$
2. On introduit les fonctions polynomiales de Bernstein
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_{n,k}(x) = \binom{n}{k}.x^k\,(1-x)^{n-k}$$
3. On montre successivement, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes [a]
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) &= 1\\ \sum_{k=0}^{n} (k - n.x)^2\, B_{n,k}(x) &= n.x\,(1-x)\end{aligned}$$
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1[$
$$A_{n,\alpha} = \left\{k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right\}$$

On a alors [b]

$$\sum_{k\in A_{n,\alpha}} B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in A_{n,\alpha}} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha^2\,n^2}\left(k-n\,x\right)^2 B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{\alpha^2\,n^2}\,n\,x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4\,n\,\alpha^2}$$

5. On pose enfin

$$P_n(g)=\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right).B_{n,k}$$

Et on a alors, pour $x\in[0,1]$, $\varepsilon>0$ et $\alpha>0$ le pas de l'uniforme continuité de g sur $[0,1]$ (théorème de Heine)

$$\left|g(x)-P_n(g)(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(g\left(\frac{k}{n}\right)-g(x)\right)B_{n,k}(x)\right| \leqslant$$

$$\sum_{k\in A_{n,\alpha}}\left|\left(g\left(\frac{k}{n}\right)-g(x)\right)B_{n,k}(x)\right| +$$

$$\sum_{k\notin A_{n,\alpha}}\left|\left(g\left(\frac{k}{n}\right)-g(x)\right)B_{n,k}(x)\right| \leqslant$$

$$2\,\|g\|_{\infty,[0,1]} \underbrace{\sum_{k\in A_{n,\alpha}} B_{n,k}(x)}_{\leqslant 1/4\,n\,\alpha^2} + \varepsilon \underbrace{\sum_{k\notin A_{n,\alpha}} B_{n,k}(x)}_{\leqslant 1} \leqslant$$

$$2\,\|g\|_{\infty,[0,1]}\,\frac{1}{4\,n\,\alpha^2}+\varepsilon$$

Le majorant obtenu *ne dépend pas de x*, on peut donc passer à la borne supérieure dans le terme de gauche, on obtient

$$P_n(g) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g \text{ sur } [0,1]$$

---

a. Simples calculs. On peut aussi y voir une interprétation probabiliste, car si $X \sim \mathcal{B}(n,x)$, loi binomiale de paramètres (n,x), alors la première formule énonce que la loi de X est une loi de probabilité, et la deuxième formule donne la valeur de sa variance.

b. On pourrait aussi, avec l'interprétation probabiliste précédente, trouver cette inégalité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Proposition 3.13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, 2π-périodique et $\varepsilon > 0$, alors il existe une expression polynomiale en sinus et cosinus (i.e. de la forme $\sum a_{k,l}.\sin^k \cos^l$ – somme finie), P_ε telle que

$$\|f - P_\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \varepsilon$$

Démonstration

Ce sera une conséquence du théorème de Fejér (théorème 5.5, page 272).
On verra aussi une démonstration dans le cours sur la convolution (exercice 5.3.6, page 306).

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha > 0$, on dit que f est *α-hölderienne*, si elle vérifie

$$\exists C_f \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant C_f\, |x-y|^\alpha$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions α-hölderiennes telle que

$$\left(C_{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée et } \exists f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f \text{ sur } I$$

Montrer que

$$\forall [a,b] \subset I,\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } [a,b]$$

3.3.2 Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$, trouver une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f^{(k)} \text{ sur } [a,b]$$

3.3.3 (a) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, montrer que

$$\left[\forall p \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)\, t^p \,\mathrm{d}t = 0\right] \Longrightarrow [f = 0]$$

(b) Que peut-on dire sur f si elle n'est que dans $\mathscr{L}^1$? $\mathscr{L}^2$?

3.3.4 Soit f une fonction $[a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, et soit a_1, ..., a_p des points fixés de $[a,b]$, montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$, convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$ et interpolant f aux points a_1, ..., a_p (i.e. $\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(a_k) = P_n(a_k)$).

3.3.5 Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on pose

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

(a) Trouver toutes les fonctions polynomiales P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ P(a_k) = f(a_k)$$

(b) Montrer qu'il existe une unique telle fonction polynomiale dont le degré est $\leqslant n$. On l'appelle *fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange* et on le notera $L_n(f)$.

(c) On suppose f de classe $\mathscr{C}^\infty$ et telle que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a,b],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M$$

Montrer alors que

$$L_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } [a,b]$$

(d) On prend maintenant

$$f_0 \ :\ x \longmapsto |x| \text{ sur } [-1,1]$$

Montrer en calculant $L_n(f_0)(1)$ que $\big(L_n(f_0)\big)$ ne converge pas (simplement) vers f_0 (on enlève -1 et 1 des points qui servent à l'interpolation).

3.2 Séries de fonctions

3.2.1 Modes de convergence

Rappel 3.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $A \longrightarrow E$ où E est un espace vectoriel normé. On sait qu'étudier la série de terme général $\sum u_n$ revient à étudier la suite

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition 3.2

On dira que

la série converge uniformément (CU) sur A

si

$$S_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} S(u) \text{ sur } A$$

ou

$$\left\|S(u) - S_n(u)\right\|_{\infty,A} = \left\|R_n(u)\right\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

la série converge absolument (CA) sur A

si

$$\forall x \in A,\ \sum \|u_n(x)\|_E \text{ converge}$$

la série converge normalement (CN) sur A

si

$$\sum \|u_n\|_{\infty,A} \text{ converge}$$

Remarque 3.8

On a besoin de deux noms différents car

1. la convergence absolue (CA) désigne la convergence des séries $\sum u_n(x)$ dans E, où $x \in A$;
2. la convergence normale (CN) désigne la convergence des séries $\sum \|u_n\|_{\infty,A}$, c'est donc un certain type de convergence absolue dans l'espace

$$\left(\mathscr{F}(A,E), \|\ \|_{\infty,A}\right)$$

Rappel 3.2

Un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ est dit *de Banach*, s'il est complet pour la norme $\|\ \|_E$, c'est-à-dire, de manière équivalente

1. toute suite de Cauchy est convergente [a] ;
2. toute série absolument convergente est convergente.

De plus, si $(E, \| \ \|_E)$ est un espace de Banach, alors

$$\left(\mathscr{F}(A, E), \| \ \|_{\infty, A}\right)$$

vérifie aussi les deux propriétés ci-dessus.

---

a. Une suite de Cauchy de E est une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ [p \geqslant q \geqslant N] \implies \left[\left\|u_p - u_q\right\|_E \leqslant \varepsilon\right]$$

Démonstration

Équivalence des deux propriétés

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

1. $(\Rightarrow)$ On suppose que $\sum \|u_n\|_E$ converge, on a alors pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, où $p \geqslant q$

$$\left\|S_p(u) - S_q(u)\right\|_E = \left\|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right\|_E \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|u_k\|_E \leqslant R_q\left(|u|\right) \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$$

ce qui montre que $\left(S_n(u)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle converge donc.

2. $(\Leftarrow)$ On suppose que u est une suite de Cauchy
   (a) on commence par extraire une sous-suite de u qui vérifie [a]

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\|_E \leqslant \frac{1}{2^n}$$

La série

$$\sum \Big(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\Big)$$

est alors absolument convergente, donc convergente. Ce qui montre que (série dérivée, voir la remarque importante 2.2, page 58 de MATH2305P) la suite

$$\Big(u_{\varphi(n)}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}$$

(b) Notons $\ell \in E$ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$ et N associé dans la définition de u suite de Cauchy. Alors pour $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant N$ il existe un $n \in \mathbb{N}$, tel que $q \leqslant \varphi(n)$ et on peut choisir n assez grand pour que $\left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\|_E \leqslant \varepsilon$, on a

$$\left\|u_q - \ell\right\|_E \leqslant \left\|u_q - u_{\varphi(n)}\right\|_E + \left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\|_E \leqslant 2\,\varepsilon$$

$$\Big[(E, \|\ \|_E) \text{ espace de Banach}\Big] \implies \Big[\Big(\mathscr{F}(A,E), \|\ \|_{\infty,A}\Big) \text{ espace de Banach}\Big]$$

Notons qu'on autorise la « norme » à prendre la valeur $+\infty$.
Soit $\sum u_n$ une série de $\mathscr{F}(A,E)$ telle que

$$\sum \|u_n\|_{\infty,A} \text{ converge}$$

1. *Construction de la somme* Soit $x \in A$, alors la série $\sum \left\|u_n(x)\right\|_E$ converge et, comme E est un espace de Banach, $\sum u_n(x)$ converge.
   Notons classiquement $S(u)$ sa somme.
2. *Vérification de la convergence uniforme* Soit $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\left\|R_n(u)(x)\right\|_E = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left\|u_k(x)\right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty,A}$$

donc

$$\left\|R_n(u)\right\|_{\infty,A} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

a. φ se construit facilement par itération à l'aide de la définition d'une suite de Cauchy, en prenant successivement ε dans la suite $\left(1/2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.14

Lorsque E est un espace de Banach, on a alors les implications suivantes, toutes les réciproques étant en général fausses

$$\begin{tikzcd}
 & \forall x \in A,\ \sum \|u_n(x)\|_E \text{ converge} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum \|u_n\|_{\infty,A} \text{ converge} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \forall x \in A,\ \sum u_n(x) \text{ converge} \\
 & \left(S_n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

En particulier, il n'y a en général aucune relation logique entre convergence absolue (CA) et convergence uniforme (CU).

Démonstration

1. (CN $\Rightarrow$ CA) est immédiat (et vraie sans hypothèse sur E) car, si $x \in A$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|u_n(x)\right\|_E \leqslant \|u_n\|_{\infty,A}$$
2. (CA $\Rightarrow$ CS) est la propriété 2 du rappel dans les espaces de Banach. [a]
3. (CN $\Rightarrow$ CU) est vrai pour un espace de Banach, car, si $x \in A$, et si la convergence est normale, d'après ce qui précède, il y a convergence absolue et simple. On a donc [b]
$$\left\|R_n(u)(x)\right\|_E = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left\|u_n(x)\right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
4. (CU $\Rightarrow$ CS) est toujours vraie sans hypothèse sur E.

Par ailleurs, on a les contre-exemples immédiats suivants

— Si on prend la série de fonctions de terme général
$$u_n\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+1} \end{cases}$$
alors, il y a convergence uniforme et pas convergence normale, ni convergence absolue.

— Si on prend la série de fonctions de terme général
$$u_n\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{(n+1)^2} \end{cases}$$
alors, il y a convergence absolue et pas convergence normale, ni convergence uniforme.

---

a. Si l'espace n'est pas de Banach, il peut y avoir convergence absolue, sans convergence simple, voir l'exemple 3.4, page suivante.

b. Pour pouvoir parler de convergence uniforme, il faut déjà avoir la convergence simple !

Exemple 3.4 – Une convergence absolue sans convergence simple

La série

$$\sum \frac{1}{n!} \cdot \left(x \longmapsto x^n\right)$$

dans l'espace vectoriel des fonctions polynomiales

$$E = \mathrm{Vect}\left(\left\{x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

muni de la norme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(x \longmapsto x^k\right) \right\|_\infty \overset{\text{Def}}{=} \max_{k \in [\![0,n]\!]} \left(|a_k|\right)$$

converge absolument, mais ne converge pas simplement.

Démonstration

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(x \longmapsto x^n\right)$$

1. *Convergence absolue*
   On a immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|P_n\|_\infty = \frac{1}{n!}$$

   et la série $\sum 1/n!$ converge.
2. *Non convergence simple*

Supposons que la suite converge (pour la norme $\| \|_\infty$) vers $Q \in E$, où Q s'écrit

$$Q = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k . \left(x \longmapsto x^k\right)$$

alors, pour tout $n > q$, on a

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{n} P_k\right) - Q \right\|_\infty \geqslant \frac{1}{(q+1)!} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Remarque 3.9

Lorsque E n'est pas un espace de Banach, les propriétés

$$CN \Rightarrow CA \text{ et } CU \Rightarrow CS \text{ sont encore valables}$$

On a donc seulement

$$\begin{tikzcd}
 & \forall x \in A,\ \sum \left\|u_n(x)\right\|_E \text{ converge} \arrow[dr, Rightarrow, "/" marking] & \\
\sum \|u_n\|_{\infty,A} \text{ converge} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "/" marking] & & \forall x \in A,\ \sum u_n(x) \text{ converge} \\
 & \left(S_n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Propriété 3.2

Une condition nécessaire de convergence uniforme

Soit une série de fonctions $\sum u_n$, définies sur A à valeurs dans (E', N') un espace vectoriel normé, alors

$$\left[\sum u_n \text{ converge uniformément sur } A\right] \implies \left[u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} 0 \text{ sur } A\right]$$

La réciproque est fausse.

Démonstration

On a

$$u_n = R_{n-1}(u) - R_n(u) \text{ et } R_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} 0$$

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 3.5, de la présente page.

Exemple 3.5 – Contre-exemple à la réciproque de la propriété 3.2, page précédente

La série de fonctions définie par

$$u_n \;:\begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+n^2\,x^2}\end{cases}$$

vérifie

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} 0 \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad R_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{u\!\!\!\!\!\not\,\,\,\,} 0$$

Démonstration

Convergence uniforme de u_n

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n'(x) = \frac{1}{1+n^2\,x^2} - \frac{2\,n^2\,x^2}{\left(1+n^2\,x^2\right)^2} = \frac{1-n^2\,x^2}{\left(1+n^2\,x^2\right)^2}$$

On obtient le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ (la fonction étant impaire), pour $n \geqslant 1$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\,n}$	$\searrow$	0

Donc

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Non convergence uniforme de $\sum u_n$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|R_n(x)\right| \geqslant \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{x}{1+k^2\,x^2} \geqslant \frac{n\,x}{1+n^2\,x^2}$$

En particulier

$$R_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre la non-convergence uniforme annoncée.

Propriété 3.3 – Propriétés de la somme d'une série absolument convergente

Soit une série de fonctions $\sum u_n$, définies sur A à valeurs dans (E', N') un espace vectoriel normé, où A est une sous-partie d'un espace métrique (E, d), telle que

$$\sum u_n \text{ converge uniformément sur } A$$

Continuité

$$[\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ continue sur } A] \implies [S(u) \text{ continue sur } A]$$

Limite

soit $a \in \overline{A}$ et $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\left[\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_n \\ \sum \ell_n \text{ converge} \end{array}\right] \implies \left[S(u)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n\right]$$

Démonstration

Ce sont les théorèmes d'interversion de limites appliqués à la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque importante 3.10 – Applications aux séries entières

On pourrait utiliser ce résultat pour montrer la continuité de la somme d'une série entière sur $BO(0, R_a)$ (théorème 3.3, page 98 de MATH2305P), en utilisant la convergence normale de la série sur $BF(0, r) \subset BO(0, R_a)$ pour $r < R_a$ et, lorsque $\sum |a_n| R_a^n$ converge, la continuité sur $BF(0, R_a)$ (théorème 3.4, page 98 de MATH2305P), en utilisant la convergence normale de la série sur $BF(0, R_a)$.

Propriété 3.4 – Primitivation

Soit une série de fonctions $\sum u_n$, définies sur A à valeurs dans (E', N') un espace vectoriel normé, où $A = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que

$$\sum u_n \text{ converge uniformément sur tout segment } [a, b] \subset I$$

Primitivation et intégration

alors, si $[a, b] \subset I$ et si tous les u_n sont intégrables sur $[a, b]$, $S(u)$ est alors intégrable sur $[a, b]$ et

$$\left(x \longmapsto \int_a^x S_n(u)(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers

$$\left(x \longmapsto \int_a^x S(u)(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

En particulier

$$\boxed{\int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} u_n\ \mathrm{d}\lambda}$$

Démonstration

C'est le théorème d'interversion issu de la convergence uniforme.

La convergence uniforme est souvent délicate à montrer. On a d'autres conditions suffisantes d'interversion, en particulier le théorème 3.2, de la présente page.

Théorème 3.2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* Ω *valeurs dans* $[-\infty, +\infty]$ *ou* $\mathbb{C}$, intégrables sur Ω *telle que*

$$\sum u_n \textit{ converge } \text{simplement } \textit{sur } \Omega$$

On a alors

$$\boxed{\left[\sum \int_\Omega |u_n| \, \mathrm{d}\mu \textit{ converge}\right] \Longrightarrow \left[\begin{cases} S(u) \textit{ est intégrable sur } \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu \end{cases}\right]}$$

Démonstration

1. *Intégrabilité de* $S(u)$ On applique le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \min\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|, \left|S(u)\right|\right)$$

Cette suite est croissante, intégrable sur Ω et vérifie

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \left|S(u)\right|$$

et

$$\left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est majorée par} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu$$

Ce qui nous montre que $S(u)$ est intégrable sur Ω.

2. *Interversion* Pour $n \in \mathbb{N}$, on recommence la technique ci-dessus, mais pour $R_n(u)$. On obtient, en posant pour $p \geqslant n+1$

$$g_p = \inf\left(\sum_{k=n+1}^{p} |u_k|, \left|R_n(u)\right|\right)$$

l'intégrabilité de $R_n(u)$ et

$$\int_\Omega g_p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_\Omega \left|R_n(u)\right| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_\Omega |u_k| \,\mathrm{d}\mu$$

On obtient alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\int_\Omega u_k \,\mathrm{d}\mu\right) - \int_\Omega S(u) \,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_\Omega R_n(u) \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_\Omega \left|R_n(u)\right| \,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_\Omega |u_k| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque importante 3.11

Il n'y a pas dans les hypothèses la convergence absolue de la série $\sum u_n$. On ne peut donc pas (en général) parler de la somme de la série $\sum |u_n|$...

Exemple 3.6

On a en fait trois situations différentes où l'on peut intervertir série et intégrale.

1. *Maîtrise du reste*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

2. *Convergence uniforme sur un segment*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{12}\right)$$

3. *Utilisation du théorème*

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\,\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Démonstration

Maîtrise du reste

(déjà rencontré). La série converge d'après la proposition des séries alternées (proposition 2.5, page 74 de MATH2305P). Soit $n \in \mathbb{N}$, alors (voir la session Python B.1, page 397)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3\,k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, x^{3\,k}\, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-x^3\right)^k \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\left(-x^3\right)^{n+1}}{1+x^3}\, \mathrm{d}x =$$

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, \mathrm{d}x}_{=\frac{\ln(2)}{3}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}} + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{3\,n+3}}{1+x^3}\, \mathrm{d}x}_{=O(1/n)}$$

car

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3} \left(\int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{x-1/2}{x^2-x+1} + \frac{3}{4}\, \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3} \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\, \ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{3}{4}\, \frac{2}{\sqrt{3}}\, \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\, \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$\frac{1}{3} \left(\ln(2) + \sqrt{3}\, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{x^{3\,n+3}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 x^{3\,n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\,n+4} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Convergence uniforme sur un segment

On sait que pour $x \in]-1, +1[$ (voir la propriété 3.6, page 104 de MATH2305P)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^n$$

et ce développement est aussi valable en 0 et en 1 (d'après le théorème 3.5, page 98 de MATH2305P). Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$

$$u_n(x) = (-1)^n\,\frac{x^n}{n+1}$$

Comme la série est alternée, on obtient immédiatement

$$\left|R_n(u)(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+2},\ \text{donc}\ \left\|R_n(u)\right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui montre la convergence uniforme de la série $\sum u_n$ sur $[0, 1]$. La propriété 3.4, page 188, nous permet de dire alors que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour conclure, il suffit de calculer

$$\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

Remarquons qu'on aurait pu appliquer le théorème 3.2, page 189, car $\sum 1/n^2$ converge.

Utilisation du théorème 3.2, page 189

Ici, nous ne sommes plus sur un segment, la propriété 3.4, page 188 ne s'applique plus !
On procède comme à la question précédente et on obtient, pour $x \in]0, 1[$

$$\frac{\ln(x)\ \ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\ x^n\ \ln(x)$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1]$

$$u_n(x) = -\frac{1}{n+1}\ x^n\ \ln(x)$$

on a alors, par une intégration par parties (il faudrait la justifier)

$$\int_0^1 u_n(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\ \ln(x)\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^3}$$

Comme $\sum 1/n^3$ converge, il reste à vérifier les autres hypothèses du théorème et à l'appliquer.

Propriété 3.5 – Dérivation

Soit une série de fonctions $\sum u_n$ où les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{K}$ et telles que

1. La série $\sum u'n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$.
2. La série $\sum u_n(a)$ converge pour un $a \in I$.

Alors

Caractère $\mathscr{C}^1$

1. La série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$.
2. $S(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'}$$

Démonstration

C'est l'application de la proposition 3.5, page 152 à la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.7

1. La fonction définie par

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(n\, x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. La fonction définie par

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n\,(1+x)}\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(n\,x)$$

cette fonction est définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et impaire.

(a) $\sum u_n$ converge normalement, car pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2\,n^2}$$

ce qui nous permet d'obtenir (par application de la propriété 3.3, page 186) que $S(u)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et impaire, nous l'étudierons donc sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$

$$u_n'(x) = \frac{1}{n\,\left(1+n^2\,x^2\right)}$$

Donc, si $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n\,\left(1+n^2\,a^2\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2\,n^3}$$

ce qui montre la convergence normale (donc uniforme) de la série des dérivées, la propriété 3.5, page 194 nous permet de conclure que $S(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc, par parité sur $\mathbb{R}^*$).

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n\,(1+x)}\right)$$

cette fonction est définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$u_n'(x) = (-1)^n \frac{1}{(x+1)\,\left(n + (n+1)\,x\right)}$$

et

$$u_n''(x) = (-1)^{n+1} \frac{(1+2\,n) + (2+2\,n)\,x}{(x+1)^2\,\left(n + (n+1)\,x\right)^2}$$

On va utiliser la proposition 3.6, page 153 qui se généralise aisément aux séries de fonctions et montrer que

(a) $\sum u_n$ converge en un $x \in \mathbb{R}_+$;

(b) $\sum u_n'$ converge en un $x \in \mathbb{R}_+$;

(c) $\sum u_n''$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

Cela nous permettra de montrer que $S(u)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

(a) La série $\sum u_n(x)$ converge pour $x = 0$.

(b) La série $\sum u_n'(x)$ converge pour $x = 0$.

(c) La fonction $|u_n''|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (voir les calculs à la session `Python` B.2, page 399). On a donc, pour $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ (on prendra bien sûr $a = 0$)

$$\left\|u_n''\right\|_{\infty,[0,b]} = \left|u_n''(0)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\,n+1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

On a bien convergence uniforme de la suite $\left(u_n''\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, mais la série $\sum u_n''$ ne converge pas normalement. Mais, on peut constater (en `Out[11]`) que la suite $\left(\left|u_n''(x)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est, *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, décroissante en n. Donc, pour $x \in [a, b]$, la série $\sum u_n''(x)$ converge, car elle vérifie la proposition des séries alternées (proposition 2.5, page 74 de MATH2305P) et, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|R_n\left(u''\right)(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}''(x)\right| \leqslant \left\|u_{n+1}''\right\|_{\infty,[a,b]}$$

donc

$$\left\|R_n\left(u''\right)\right\|_{\infty,[0,b]} \leqslant \left\|u''_{n+1}\right\|_{\infty,[0,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui montre la convergence uniforme de $\sum u''_n$ sur tout $[0,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Plan d'étude de la convergence uniforme d'une série de fonctions

En conséquence, pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum u_n$ définie sur A, on procède comme suit

1. On calcule $\|u_n\|_{\infty,A}$, deux cas simples se présentent alors
   (a) $\|u_n\|_{\infty,A}$ ne tend pas vers 0, il ne saurait y avoir convergence uniforme de la série, car le terme général ne converge pas uniformément vers 0 ;
   (b) $\sum \|u_n\|_{\infty,A}$ converge, il y a alors convergence normale donc uniforme.
2. Lorsque $\sum \|u_n\|_{\infty,A}$ diverge et que $\|u_n\|_{\infty,A}$ tend vers 0, la situation est plus compliquée. On essaye alors de montrer que

$$R_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} 0 \text{ sur } A$$

   en le majorant, ce qui se passe par exemple pour les séries alternées. En fait, on essaye d'adapter la méthode issue de l'étude de la convergence simple (développements limités, asymptotiques, séries alternées)...

1. Pour les séries alternées à partir d'un certain rang, il est fondamental de s'assurer que le rang à partir duquel on observe une décroissance est *uniforme* en x ! Sinon, la majoration du reste est injustifiée !
2. Lorsque l'on a étudié la converge simple à l'aide d'un développement asymptotique, Il faut maîtriser le reste du développement ! (Voir le deuxième exemple 3.2, page 133).

Exemple 3.8 – De l'étude de la convergence simple à la convergence uniforme

1. La série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n\,x + (-1)^n} \text{ où } n \geqslant 2,\ x \geqslant 1$$
converge uniformément sur $[1, +\infty[$.
2. La série
$$\sum \frac{e^{i\,n\,x}}{n} \text{ où } n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R}$$
converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\,\pi - \varepsilon]$, lorsque $0 < \varepsilon < \pi$.
3. La série
$$\sum (-1)^n \, \frac{x^n}{n!} \, e^{-x}$$
n'est pas étudiable (en ce qui concerne sa convergence uniforme) à l'aide de la majoration du reste des séries alternées sur $\mathbb{R}_+$, car la décroissance n'est valide que pour $n \geqslant x$. [a]

a. Ici, le plus simple est d'exprimer sous forme intégrale le reste de la série de fonctions et de montrer qu'il converge uniformément vers 0.

Démonstration

1. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $x \in [1, +\infty[$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n\,x + (-1)^n}$$

   (a) *Étude de la convergence simple* On écrit

$$u_n x() = \frac{(-1)^n}{n\,x} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   c'est donc la somme d'un terme vérifiant la proposition des séries alternées (proposition 2.5, page 74 de MATH2305P) et d'un terme absolument convergent.

   (b) *Étude de la convergence uniforme : maîtrise du reste* On ne peut *jamais* raisonner avec le O (voir l'encadré de la page 139). On écrit donc

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n\,x} + \left(\frac{(-1)^n}{n\,x + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n\,x}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\,x}}_{=v_n(x)} - \underbrace{\frac{1}{n\,x\,\left(n\,x + (-1)^n\right)}}_{=w_n(x)}$$

   — La série $\sum v_n$ converge uniformément, car elle est alternée (à partir de $n = 2$ qui ne dépend pas de x) et donc

$$\left|R_n(v)(x)\right| \leqslant \left|v_{n+1}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\,n}$$

   donc

$$\left\|R_n(v)\right\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant \frac{1}{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— La série $\sum w_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[1,+\infty[$, car

$$\|w_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant \frac{1}{2\,n\,(2\,n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2}$$

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u_n(x) = \frac{e^{i\,n\,x}}{n}$$

(a) *Convergence simple* Cette série a été étudiée précédemment.

(b) *Étude de la convergence uniforme : suivre la même méthode que la convergence simple* On a trouvé, en passant à la limite que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash 2\,\pi.\mathbb{Z},\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \exp\left(i\,\frac{n\,x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

mais cette nouvelle série, qui converge normalement sur $[\varepsilon, 2\,\pi-\varepsilon]$, ne nous assure pas la convergence uniforme de la série initiale ! Il faut travailler sur le reste. En posant, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \exp\left(i\,\frac{n\,x}{2}\right)$$

et en reprenant la méthode pour évaluer le reste d'ordre n, on obtient

$$R_n(u)(x) = -\frac{\Gamma_n(x)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Gamma_k(x)\ \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Si $x \in [\varepsilon, 2\pi\,\varepsilon]$, on obtient

$$\left|R_n(u)(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)\ \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\ \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

majorant qui est indépendant de x, donc

$$\left\| R_n(u) \right\|_{\infty,[\varepsilon,2\,\pi\,\varepsilon]} \leqslant \frac{1}{(n+1)\,\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3. Posons, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = (-1)^n \, \frac{x^n}{n!} \, e^{-x}$$

(a) *Étude de la convergence simple* Pour $x \geqslant 0$ fixé, la série converge de manière évidente, car (si $x > 0$, pour $x = 0$, la série est facile à étudier)

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et le critère de d'Alembert (propriété 2.8, page 69 de MATH2305P) nous permet de conclure.

(b) *Étude de la convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}_+$: maîtrise du reste* Remarquons d'abord que

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \left|u_n\,(n)\right| = \frac{n^n\,e^{-n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n}}$$

d'après la formule de Stirling (exemple 2.6, page 65 de MATH2305P) et le tableau de variation (pour $n \geqslant 1$)

x	0		n		$+\infty$
$\lvert u_n\rvert'(x)$		$+$	0	$-$	
$\lvert u_n\rvert(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{n^n\,e^{-n}}{n!}$	$\searrow$	0

— Le critère de d'Alembert n'est pas *uniforme*, le rang à partir duquel $|x|/(n+1) < 1$ dépend de x ! On ne peut donc rien en conclure !

— La série est-elle alternée ? Oui, mais le rang à partir duquel le terme est décroissant en valeur absolue dépend de x ! On ne peut donc rien en conclure !

— On va revenir à des choses plus sûres, l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|R_n(u)(x)\right| = e^{-x}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \underset{t=x\,u}{=} \frac{x^{n+1}\,e^{-x}}{n!}\left|\int_0^1 (1-u)^n\,e^{-x\,u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{x^{n+1}\,e^{-x}}{n!}\left|\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u\right| = \frac{x^{n+1}\,e^{-x}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(n+1)}}$$

donc

$$\left\|R_n(u)\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(n+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour montrer la non-convergence uniforme, lorsqu'il n'y a pas convergence normale mais qu'il y a convergence uniforme vers 0 du terme général, on essaye de minorer le reste par quelque chose qui ne tend pas uniformément vers 0. Voir l'exemple 3.5, page 185.

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Soit la fonction définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

(a) Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

(b) Montrer que ζ est développable en série entière au voisinage de tout point $x_0 \in]1, +\infty[$.

On étend la fonction ζ de la manière suivante

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1,\ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

(c) Est-elle toujours de classe $\mathscr{C}^\infty$?

(d) Est-elle développable en série entière au voisinage de tout z_0, tel que $\mathrm{Re}(z_0) > 0$?

3.4.2 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^2 \exp\left(-x\sqrt{n}\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3.4.3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels $\geqslant 0$. Soit, pour $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 0$

$$f_n(x) = a_n\, x^n\, (1 - x)$$

(a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

(c) À quelle condition nécessaire et suffisante $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

3.4.4 (a) Construire une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

i. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

ii. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[|x| \geqslant 1\big] \implies \big[g(x) = 0\big]$.

iii. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[|x| \leqslant 1/2\big] \implies \big[g(x) = 1\big]$.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes quelconques, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

i. $\lambda_n = 1$ si $|a_n| \leqslant 1$.

ii. $\lambda_n = 1/|a_n|$ sinon.

Étudier la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\, g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

Observer ses dérivées en 0. Conclusion ? Unicité ?

3.4.5 Soit $n \longmapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, telle que la série

$$\sum \frac{|r_n|}{2^n} \text{ converge}$$

(a) On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\, |x - r_n|$$

i. Montrer que F est partout dérivable à droite et à gauche.

ii. Montrer que F est convexe.

iii. Montrer que F est dérivable en x si, et seulement si, $x \notin \mathbb{Q}$.

(b) Montrer l'existence d'une telle bijection.

3.4.6 Montrer que

$$\int_0^1 x^{-x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

3.4.7 Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,t}}{1+e^{-b\,t}} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+n\,b}$$

Où a et $b > 0$.

3.4.8 Soit q un réel de $]-1,1[$, $z \in \mathbb{C}$. On pose

$$u_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k\, z)$$

(a) Montrer que la suite $\big(u_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge.
On note $u(z)$ sa limite.

(b) Étudier la continuité et les zéros de la fonction u.

(c) Montrer que u est développable en série entière au voisinage de 0.

3.2.2 Limites

Remarque 3.12

Fondamentalement, la somme d'une série de fonctions est une intégrale à paramètre où la variable d'intégration n est dans $\mathbb{N}$. C'est pourquoi on peut utiliser le cours sur les intégrales à paramètres (chapitre 4, page 223). Cependant, l'hypothèse d'intégrabilité de la fonction f_n se traduit par

$$\forall x \in A,\ \sum \left|f_n(x)\right| \text{ converge}$$

Et, si l'on veut appliquer le théorème de convergence dominée, il faut trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *indépendante de x* telle que

$$\forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(x)\right| \leqslant v_n \text{ et } \sum v_n \text{ converge}$$

On retrouve la convergence normale (CN) !

Exemple 3.9 – Utilisation de la convergence uniforme

Lorsque l'on veut passer à la limite dans une série de fonctions, le plus simple est de chercher une convergence uniforme au voisinage de la valeur limite.

Ainsi la fonction

$$S(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x}{1+n^2\,x^2}}_{\overset{\text{Not}}{=} f_n}$$

vérifie-t-elle

$$S(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} x \text{ et même } x + o(1)$$

car on peut écrire

$$S(f)(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2\,x^2}$$

et, comme pour $a > 0$, on a pour n assez grand le tableau de variations (voir l'exemple 3.5, page 185)

x	0		$\frac{1}{n}$		a		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\,n}$	$\searrow$		$\searrow$	0

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \left|\frac{a}{1+n^2\,a^2}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En utilisant la propriété 3.3, page 186, on conclut que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^2\,x^2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+n^2\,x^2}\right)=0$$

Exemple 3.10 – Utilisation de minorations

Lorsque la convergence uniforme n'existe plus, on peut essayer de simples minorations. La fonction définie par

$$S(f)(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\arctan(n\,x)$$

vérifie

$$S(f)'(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$$

Démonstration

Analyse

On a [a]

$$S(f)'(x)\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\,(1+n^2\,x^2)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$$

Synthèse

Soit $A > 0$, choisissons N tel que $\sum_{1}^{N} 1/n \geqslant A$, puis η tel que pour tout $x \in]0, \eta[$, on ait, par continuité de la fonction

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,(1+n^2\,x^2)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{A}{2}$$

Alors, pour $x \in]0, \eta[$, on a

$$S(f)'(x) \geqslant \frac{A}{2}$$

ce qui nous permet d'affirmer que

$$S(f)'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

---

a. C'est une interversion de limite à valider !

Remarque 3.13

C'est fondamentalement le théorème de convergence monotone.

Exemple 3.11 – Utilisation d'une comparaison série/intégrale

La fonction définie par

$$S(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2\,x^2}$$

vérifie

$$S(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$$

Démonstration

La fonction

$$\varphi_x \quad t \longmapsto \frac{x}{1+t^2\,x^2}$$

est clairement décroissante, on a alors par comparaison série/intégrale

$$S(f)(x) - x \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(f)(x)$$

Il reste à calculer, pour $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^2\,x^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan(t\,x)\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

En reportant dans l'inégalité, on a

$$\frac{\pi}{2} \leqslant S(f)(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + x, \text{ donc } S(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$$

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Soit ζ la fonction définie dans l'exercice 3.4.1, page 204. Calculer les limites de la fonction en 1^+ et en $+\infty$.

3.5.2 Trouver les limites en 0^+ et $+\infty$ des fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(n\,x)} \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh^2(n\,x)}$$

3.5.3 Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{rll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-n\,x}\right) & \text{en} & +\infty \\
 & \text{en} & 0^+ \\
\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha\,x}\ (\alpha > 0) & \text{en} & +\infty \\
 & \text{en} & 0^+ \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + x}} & \text{en} & 0^+ \\
 & \text{en} & +\infty \\
\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + n^2\,x}\ (\alpha > 0) & \text{en} & 0^+
\end{array}$$

3.2.3 Équivalents

Pour trouver des équivalents de sommes de séries de fonctions (ou de séries entières), on a deux techniques principales

1. La comparaison série/intégrale (voir l'exemple 3.12, de la présente page) ;
2. Lorsque c'est possible (séparation asymptotique des comportements en x et en n), utilisation de la convergence uniforme. Voir l'exemple 3.13, page suivante.

3.2.3.1 Généralités

Exemple 3.12 – Comparaison série/intégrale

La dérivée de la fonction

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(n\,x)$$

a pour équivalent au voisinage de 0^+

$$S(f)'(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$$

On retrouve en particulier le fait que la limite en 0^+ est $+\infty$.

Exemple 3.13 – Factorisation asymptotique

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions à étudier. Si, pour x au voisinage de $a \in [-\infty, +\infty]$, on a

$$u_n(x) \underset{a}{\sim} \alpha(x)\, v_n, \text{ avec } \sum v_n \text{ qui converge}$$

On va étudier la série

$$\frac{S(u)(x)}{\alpha(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{\alpha(x)}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + n^2\, x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Démonstration

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$

$$u_n(x) = \frac{x}{1 + n^2\, x^2}$$

On a immédiatement, lorsque x tend vers $+\infty$

$$u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \frac{1}{n^2}$$

On étudie donc le comportement asymptotique de $x\, S(u)(x)$ au voisinage de $+\infty$

Clairement, pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n(x) \stackrel{\text{Not}}{=} x\, u_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^2\, x^2} \quad \text{et} \quad \|v_n\|_{\infty,[a,+\infty]} = \frac{a^2}{1 + n^2\, a^2}$$

La série $\sum v_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc on peut passer à la limite sous la somme (propriété 3.3, page 186) et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Finalement

$$S(u)(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)$$

3.2.3.2 Équivalents de séries entières

Proposition 3.15

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul $R_a \in]0, +\infty[$ et de somme S_a, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \ \textit{et} \ \sum a_n\, R_a^n \ \textit{diverge}$$

alors

1. *On a*

$$S_a(x) \xrightarrow[x \to R_a^-]{} +\infty$$

2. *Si de plus* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite vérifiant*

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$$

alors

$$S_a(x) \underset{x\to R_a^-}{\sim} S_b(x)$$

Démonstration

$$S_a(x) \xrightarrow[x\to R_a^-]{} +\infty$$

On raisonne comme pour l'exemple 3.10, page 209. Soit $A>0$, il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ [n\geqslant N] \implies \left[\sum_{k=0}^{n} a_n\, R_a^n \geqslant A\right]$$

On a alors, par continuité de la fonction, qu'il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall x\in[R_a-\eta|,\ \left|\sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{N} a_k\, R_a^k\right| \leqslant \frac{A}{2}$$

On a alors, pour $x\in[R_a-\eta, R_a[$

$$S_a(x) \geqslant \sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k \geqslant -\frac{A}{2} + \sum_{k=0}^{N} a_k\, R_a^k \geqslant \frac{A}{2}$$

ce qui montre que

$$S_a(x) \xrightarrow[x\to R_a^-]{} +\infty$$

Équivalents

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[(1-\varepsilon)\, a_n \leqslant b_n \leqslant (1+\varepsilon)\, a_n\right]$$

Soit $x \in]0, R_a[$ on a alors

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{k=N}^{+\infty} a_k\, x^k\right) \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} b_k\, x^k \leqslant (1+\varepsilon)\left(\sum_{k=N}^{+\infty} a_k\, x^k\right)$$

et, finalement

$$\frac{S_{b,N}(x) + (1-\varepsilon)\,(S_a(x) - S_{a,N}(x))}{S_a(x)} \leqslant \frac{S_b(x)}{S_a(x)} \leqslant \frac{S_{b,N}(x) + (1+\varepsilon)\,(S_a(x) - S_{a,N}(x))}{S_a(x)} \tag{3.1}$$

les termes de gauche et de droite ont pour limites respectives $(1-\varepsilon)$ et $(1+\varepsilon)$ lorsque x tend vers R_a, donc pour x assez proche de R_a, on a

$$(1 - 2\,\varepsilon) \leqslant \frac{S_b(x)}{S_a(x)} \leqslant (1 + 2\,\varepsilon)$$

ce qui montre que

$$S_a(x) \underset{+\infty}{\sim} S_b(x)$$

Exemple 3.14

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}},\ \text{où } p \in \mathbb{N}$$

Démonstration

Le rayon de convergence de la série entière est clairement $R = 1$. On a, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$n^p \underset{+\infty}{\sim} \binom{n}{p} p!$$

D'après la proposition précédente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p \, x^p \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} p! \binom{n}{p} x^n$$

et

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

.

Proposition 3.16

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme S_a, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$$

alors

1. *On a*

$$S_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

2. *Si de plus $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant*

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$$

alors

$$S_a(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} S_b(x)$$

Démonstration

C'est à peu près la même démonstration que pour la proposition 3.15, page 215.

$S_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$S_a(x) > a_1\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \text{ car } a_1 > 0$$

Équivalents

Reprenant les mêmes notations, et notamment les inégalités 3.1, page 217, les termes de gauche et de droite ont toujours les mêmes limites, car

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ \frac{x^k}{S_a(x)} \leqslant \frac{x^k}{a_{n+1}\, x^{N+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On obtient donc la même conclusion.

Exemple 3.15

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}}\, x^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi}\, e^{\frac{x}{e}}$$

Démonstration

On utilise la formule de Stirling

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi\,n} \underset{+\infty}{\sim} n! \text{ donc } \frac{1}{n^{n+1/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{e^n\, n!}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}}\, x^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{e}\right)^n \right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi}\, \exp\left(\frac{x}{e}\right)$$

Exercice(s) 3.6

3.6.1 Donner un développement asymptotique à deux termes de la fonction ζ (exercice 3.4.1, page 204)

(a) au voisinage de 1^+ ;

(b) au voisinage de $+\infty$.

3.6.2 Trouver les équivalents des fonctions suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(n\,x)} \quad \text{en} \quad 0^+$$
$$\text{en} \quad +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh^2(n\,x)} \quad \text{en} \quad 0^+$$
$$\text{en} \quad +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-n\,x}\right) \quad \text{en} \quad 0^+$$
$$\text{en} \quad +\infty$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + x}} \quad \text{en} \quad 0^+$$
$$\text{en} \quad +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + n^2\,x} \ (\alpha > 0) \quad \text{en} \quad 0^+$$

Pour la dernière, donner le deuxième terme du développement asymptotique.

3.6.3 (a) Montrer que la formule

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\,x}}{n^2 + 1}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

(c) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

(d) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

(e) Trouver un équivalent de $f(x) - f(0)$ quand $x \to 0$.

3.6.4 Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

Chapitre 4

Intégrales à paramètres

On s'intéresse dans ce chapitre aux fonctions définies par des intégrales. Elles sont de la forme

$$x \longmapsto \int_\Omega f(\bullet, x)\,\mathrm{d}\mu, \text{ où } (\Omega, \mathcal{T}, \mu) \text{ est un espace mesuré}$$

Nous allons nous intéresser successivement à

1. leur continuité éventuelle ;
2. leur dérivabilité (différentiabilité) éventuelle ;
3. leur comportement asymptotique ;
4. leur utilité.

4.0.1 Continuité

Théorème 4.1 – continuité sous le signe $\int$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, (Λ, d) un espace métrique (espace des paramètres) et $\lambda_0 \in \Lambda$, soit $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{K}$ (ou $[-\infty, +\infty]$), vérifiant

1. Mesurabilité

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ f(\bullet, \lambda) \textit{ est mesurable sur } \Omega$$

2. Continuité

$$f(x, \bullet) \textit{ est continue en } \lambda_0 \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

3. Domination uniforme *Il existe une fonction* $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \left|f(x,\lambda)\right| \leqslant \varphi(x) \quad \mu - pp$$

Alors, la fonction

$$F\ :\begin{cases} \Lambda \to \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega} f(\bullet, \lambda)\ \mathrm{d}\mu, \end{cases}$$

est définie sur Λ *et est continue en* λ_0*.*

Démonstration

— L'inégalité 3., nous assure la bonne définition de F.

— La continuité en λ_0 s'obtient à l'aide du théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions

$$f_n = f(\bullet, \alpha_n)$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers λ_0.

Exemple 4.1

Fonction Γ Soit $\Omega =]0, +\infty[$, $\Lambda =]0, +\infty[+ i\,\mathbb{R}$, on peut alors définir la fonction Γ par

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \Gamma(a+i\,b) \overset{\text{Def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{a+i\,b-1}\,e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Γ est *continue sur* Λ.

Démonstration

La continuité est une propriété locale*, on peut donc se ramener à la situation où* $a \in [\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$.
En ce cas, on a, posons

$$f \ : \begin{cases} \Omega \times \Lambda \to \mathbb{C} \\ (t, a + i\, b) \longmapsto t^{a+i\,b-1}\, e^{-t}. \end{cases}$$

1. *Mesurabilité* pour $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\bullet, \lambda)$ est mesurable (pour les tribus boréliennes), car continue.
2. *Continuité* pour $t \in \Omega$, la fonction $f(t, \bullet)$ est continue sur Λ.
3. *Domination* Comme on a imposé $a \in [\alpha, \beta]$ on a

$$\forall t \in \Omega,\ \forall a \in [\alpha, \beta],\ \forall b \in \mathbb{R},\ \left|f(t, a + i\, b)\right| \leqslant \underbrace{\max\left(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1}\right)\, e^{-t}}_{=\varphi(t)}$$

La fonction φ est clairement intégrable sur $]0, +\infty[$, car elle est continue et elle vérifie

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} t^{\alpha-1} \text{ et } \varphi(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Le théorème s'applique et nous donne la continuité de Γ sur $[\alpha, \beta] + i\,\mathbb{R}$ quel que soit $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, on a donc la continuité sur Λ.

Remarque 4.1

La localisation (choix de $a \in [\alpha, \beta]$) est ici indispensable, car si on autorise a à être dans $]0, +\infty[$, la dominante φ vérifierait

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

elle ne serait plus intégrable.

Exemple 4.2

Si $g : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ mesurable pour les tribus boréliennes, vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \text{ est intégrable sur }]-\infty, x]$$

alors la fonction

$$G \ : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{]-\infty,x]} g \, \mathrm{d}\lambda \end{cases} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}$$

Démonstration

Nous allons à nouveau localiser. Si $x \in]a, b[$, alors on peut prendre la fonction

$$f \ : \begin{cases}]-\infty, b] \times]a, b[\to \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto g(t)\ \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(t) \end{cases}$$

Elle vérifie

1. *Mesurabilité* c'est le produit de deux fonctions mesurables.
2. *Continuité* si $t \in]-\infty, b]$, alors la fonction $f(t, \bullet)$ est continue sur $]a, b[\setminus \{t\}$ (donc $\lambda - \mathbf{p}.\mathbf{p}.$).
3. *Domination*
$$\forall t \in]-\infty, b],\ \forall x \in]a, b[,\ \left|f(t, x)\right| \leqslant |g(t)|$$
et, par hypothèse, g est intégrable sur $]-\infty, b]$.

D'après le théorème, la fonction G est donc continue sur tout intervalle $]a, b[$, donc sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante 4.2

Une version courante de ce théorème est la suivante
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ vérifiant

1. $\forall t \in I,\ f(\bullet, t)$ est continue par morceaux sur J ;
2. $\forall x \in J,\ f(x, \bullet)$ est continue sur I ;
3. il existe une fonction φ positive et intégrable sur J telle que
$$\forall (x, t) \in J \times I,\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(x) \ (\textbf{hypothèse de domination})$$

alors
$$F : t \longmapsto \int_J f(x, t)\, \mathrm{d}x \text{ est continue sur } I.$$

4.0.2 Dérivabilité

Théorème 4.2 – dérivation sous le signe $\int$

Soit $\Lambda = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times I \to \mathbb{K}$ (ou $[-\infty, +\infty]$), une fonction mesurable. Soit, de plus, $\lambda_0 \in I$. On suppose que

1. Intégrabilité
$$\forall \lambda \in I,\ f(\bullet, \lambda) \text{ est intégrable sur } \Omega$$
2. Dérivée partielle *L'application $f(x, \bullet)$ est $\mu - \mathbf{p.p.}$ dérivable en λ_0. Nous noterons cette dérivée*
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$$
3. Domination *Il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}_+)$, telle que*
$$\left| f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0) \right| \leqslant \varphi(x) \left| \lambda - \lambda_0 \right| \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

Alors, la fonction
$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f(\bullet, \lambda) \, \mathrm{d}\mu \end{cases}$$
est définie sur I, et dérivable en λ_0 de dérivée
$$F'(\lambda_0) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bullet, \lambda_0) \, \mathrm{d}\mu$$

Démonstration

Soit $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(I\backslash\{\lambda_0\}\right)^{\mathbb{N}}$, une suite qui converge vers λ_0, posons alors

$$g_n = \frac{f(\bullet,\alpha_n) - f(\bullet,\lambda_0)}{\alpha_n - \lambda_0}$$

Cette suite vérifie

— *Convergence simple* on a, d'après 2.

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

— *Domination* d'après 3., on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|g_n(x)\right| \leqslant \varphi(x) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

— *Existence de F* d'après 1., la fonction F existe sur I.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui nous donne

$$\frac{F(\alpha_n) - F(\lambda_0)}{\alpha_n - \lambda_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\bullet,\lambda_0)\,\mathrm{d}\mu$$

Dans la pratique, les hypothèses sont souvent plus simples

Proposition 4.1

Soit $\Lambda = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega\times I \to \mathbb{K}$ (ou $[-\infty,+\infty]$), une fonction mesurable. On suppose que

1'. Intégrabilité

$$\forall\lambda\in I,\ f(\bullet,\lambda) \textit{ est intégrable sur } \Omega$$

2'. Dérivée partielle *L'application* $f(x, \bullet)$ *est* $\mu - \mathbf{p.p.}$ *dérivable* sur I. *Nous noterons cette dérivée*

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$$

3'. Domination *Il existe une fonction* $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}_+)$, *telle que*

$$\forall \lambda \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leqslant \varphi(x) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

Alors, la fonction

$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f(\bullet, \lambda) \, \mathrm{d}\mu \end{cases}$$

est définie sur I, *et dérivable* sur I *de dérivée*

$$F'(\lambda) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bullet, \lambda) \, \mathrm{d}\mu$$

Démonstration

Soit $\lambda_0 \in I$, montrons que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

1. L'hypothèse 1'. est la même que 1.
2. L'hypothèse 2'. implique aisément l'hypothèse 2.

3. L'hypothèse 3'. implique l'hypothèse 3. en utilisant le théorème des accroissements finis (quand la fonction est dérivable, ce qui n'est vrai que $\mu - pp$).

Exemple 4.3

La fonction $f : (a,b) \longmapsto \Gamma(a+i\,b)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et on a

$$\forall (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ \partial_1^{n_1}\partial_2^{n_2} f(a,b) = \int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^{n_1+n_2}\ i^{n_2}\, t^{a+i\,b-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

En particulier la restriction de la fonction Γ à $]0,+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad \boxed{\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^{n}\ t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t}$$

Démonstration

Par récurrence sur n_1 ou n_2. La localisation est indispensable ici, en prenant $a \in [\alpha,\beta]$, on a

$$\left|\big(\ln(t)\big)^{n_1+n_2}\ i^{n_2}\, t^{a+i\,b-1}\, e^{-t}\right| \leqslant |\ln(t)|^{n_1+n_2}\ \max\left(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1}\right)\, e^{-t}$$

Propriété 4.1

La fonction Γ est une fonction très importante en mathématiques, il est bon d'en connaître les propriétés.

1. On a vu qu'elle était continue, de classe $\mathscr{C}^\infty$ (vue comme une fonction de deux variables) sur $]0,+\infty[+i\,\mathbb{R}$.
2. On a de plus
$$\forall (a,b)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \Gamma(a+1+i\,b)=(a+i\,b)\,\Gamma(a+i\,b)$$
ou, en posant $\Lambda=]0,+\infty[+i\,\mathbb{R}$
$$\forall z\in\Lambda,\ \Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$$
3. On en déduit que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1)=n!$$
Cette fonction généralise la notion de factorielle.
4. *Formule d'Euler* Soit $x\in]0,+\infty[$, alors [a]
$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\right)$$
5. *Lien avec la constante γ d'Euler* On a de plus
$$\Gamma'(1)=-\gamma$$
6. *Formule de Stirling* On a
$$\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\,\pi\,x}$$

7. On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}\,n!}\sqrt{\pi}$$

---

a. Cette formule est encore valable pour $z \in \Lambda =]0+, \infty[+i\,\mathbb{R}$. (Le montrer).

Démonstration de la propriété 2

Une intégration par parties.

Démonstration de la propriété 4

On a immédiatement (exercice facile)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)$$

Et, en posant, $t = n\,u$

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t = n^x \int_0^1 (1-u)^n\, u^{x-1}\, \mathrm{d}u$$

On obtient le résultat à l'aide de n intégrations par parties successives, pour faire disparaître le terme en $(1-u)^n$.

Démonstration de la propriété 5

De la formule précédente, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\Gamma(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$$

En dérivant [a], on obtient

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)$$

En particulier, pour $x = 1$, il vient

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)$$

qui tend vers $-\gamma$ d'après la formule d'Euler bien connue

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

a. Pourquoi a-t-on le droit ? Voir l'exercice 4.1.2, page 239.

Démonstration de la propriété 6

On a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{t=x\,u}{=} x^{x+1}\int_0^{+\infty}\left(u\,e^{-u}\right)^x\,\mathrm{d}u$$

La fonction $u \longmapsto u\,e^{-u}$ est positive, maximale en $u = 1$, on va donc utiliser une méthode de Laplace (voir exercice 2.4.8, page 100). Les deux intégrales

$$\int_0^1 \left(u\,e^{-u}\right)^x \,\mathrm{d}u \text{ et } \int_1^{+\infty} \left(u\,e^{-u}\right)^x \,\mathrm{d}u$$

vont apporter la même contribution. Il suffit donc d'en calculer l'équivalent d'une. Pour cela, on fait le changement de variable

$$u\,e^{-u} = \frac{1}{e}\,e^{-v^2},\ v \in [0, +\infty[$$

que l'on écrit $u = \psi(v)$. On obtient

$$\int_1^{+\infty} \left(u\,e^{-u}\right)^x \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}\,\psi'(v)\,e^{-x\,v^2}\,\mathrm{d}v$$

Un petit changement de variable $w = \sqrt{x}\,v$ nous donne

$$\int_1^{+\infty} \left(u\,e^{-u}\right)^x \,\mathrm{d}u = \frac{1}{e^x}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \psi'\left(\frac{w}{\sqrt{x}}\right) e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

On conclut par un théorème de convergence dominée qui nous donne

$$\int_0^{+\infty} \psi'\left(\frac{w}{\sqrt{x}}\right) e^{-w^2}\,\mathrm{d}w \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} \psi'(0)\,e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

Et, finalement

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} 2\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\,\psi'(0) \int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \text{(intégrale de Gauss)}$$

et on peut trouver la valeur de $\psi'(0)$ en écrivant des développements limités

$$u\,e^{-u} \underset{u=1+h}{=} \frac{1}{e}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{v^2}{2} + o(v^2)\right)$$

ce qui nous permet de dire que

$$\psi'(0) = \sqrt{2}$$

Démonstration de la propriété 7

On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{t=u^2}{=} \int_0^{+\infty} 2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

La formule au rang $n + 1/2$ se déduit par récurrence.

Remarque importante 4.3

Pour montrer la régularité $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser les deux théorèmes précédents.
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ vérifiant

1. $\forall t \in I,\ f(\bullet, t)$ est intégrable sur J ;
2. $\forall x \in J,\ f(x, \bullet)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
3. il existe une fonction φ positive et intégrable sur J telle que
$$\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\partial_2 f(x,t)\right| \leqslant \varphi(x) \ (\textbf{hypothèse de domination})$$

alors
$$F : t \longmapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}x \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ et}$$

$$F'(t) = \int_J \partial_2 f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Remarque importante 4.4

Pour montrer la régularité $\mathscr{C}^k$ ou $\mathscr{C}^\infty$, on utilise une récurrence.

Exercice(s) 4.1

4.1.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En considérant l'application

$$f \ : \begin{cases} \mathbb{N} \times I \to \mathbb{R} \\ (n, x) \longmapsto f_n(x), \end{cases}$$

où $\mathbb{N} = \Omega$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage. Donner un ensemble de conditions suffisantes simples (issues du théorème de dérivation sous le signe $\int$), permettant d'affirmer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est définie sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et de dérivée

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

4.1.2 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la dérivation utilisée dans la démonstration de la formule

$$\Gamma'(1) = -\gamma \text{ est légitime}$$

4.1.3 Montrer que si $h : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$, $(k \geqslant 1)$ alors la fonction définie $(x_0 \in I)$ par

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ h'(x_0) & \text{en } x_0. \end{cases} \quad \text{est de classe } \mathscr{C}^{k-1}$$

4.1.4 Montrer que si φ et ψ deux applications définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, si f est définie sur $I \times A$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $\varphi(A)$ et $\psi(A)$ continue sur $I \times A$, dérivable par rapport à la deuxième variable, de dérivée partielle par rapport à la deuxième variable $\partial_2 f$ continue sur $I \times A$, alors, la fonction définie par

$$\forall x \in A,\ g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x)\, \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in A, \boxed{g'(x) = \psi'(x).f(\psi(x), x) - \varphi'(x).f(\varphi(x), x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_2 f(t, x)\, \mathrm{d}t}$$

4.1.5 Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss en étudiant la fonction

$$g(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{e^{-x^2\,(1+t^2)}}{1 + t^2}}_{f(t,x)}\, \mathrm{d}t$$

4.1.6 On pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-t\,x}\, \mathrm{d}t$$

(a) Domaine de définition ? Continuité et dérivabilité ?

(b) Calculer $g'(x)$, et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(On fera attention au fait que la fonction $x \longmapsto \sin(x)/x$ *n'est pas* intégrable sur $[0, +\infty[$.)

4.1.7 Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

(a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer $f(x) + f''(x)$ pour $x > 0$ et la limite de f en $+\infty$.

(c) Montrer que

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, \mathrm{d}t$$

(d) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

4.1.8 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\cos(t\,x)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t\,x)}{t^2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+x\,\sin^2(t)\right)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{\pi/2} \ln(t^2-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2-\frac{a^2}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\,t-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a-\cos(x)}{b-\cos(x)}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad (a,b)\in]1,+\infty[^2,$$
$$\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2-2\,x\,\cos(t)+1\right)\,\mathrm{d}t.$$

4.0.3 Comportement asymptotique

On a souvent besoin d'évaluer des comportements asymptotiques de fonctions définies par des intégrales. Nous avons déjà vu plusieurs méthodes

1. Estimation de l'ordre de l'équivalent et utilisation des théorèmes de convergence

Exemple 4.4

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{(x^2+t^2)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,x}$$

2. Localisation de la masse et comparaison au comportement dominant

Exemple 4.5

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)\,(x^2+t^2)}} \underset{x\to0+}{\sim} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{x\to0+}{\sim} -\ln(x)$$

3. Fixation des bornes

Exemple 4.6

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2\,u^2}{1-u^2}}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}.$$

4. *A contrario* sortie du paramètre

Exemple 4.7

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2\,t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2\,x^2}$$

5. Utilisation d'un changement de variable plus ou moins sophistiqué (méthode de Laplace)

Exemple 4.8

(a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t^2+t+1)^x}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

à l'aide du changement de variable $u = \ln(t^2+t+1)$ qui nous ramène au cas académique

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{x}$$

lorsque f est continue au voisinage de 0 et que $f(0) \neq 0$.

Remarque 4.5

Si $f(0) = 0$, on développe jusqu'au premier terme non nul.

(b)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(t^2 - t + 1)^x} \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^x \sqrt{\frac{3\,\pi}{e\,x}}$$

sauf erreur de calcul... à l'aide du découpage de l'intégrale en $1/2$ (maximum de la fonction à la puissance x) suivi du changement de variable

$$t^2 - t + 1 = \frac{3}{4} \, e^{-u^2} \text{ !!!!}$$

qui nous ramène au cas académique

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2} \, f(t) \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

lorsque $f(0)$ est non nul.

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Reprendre les exercices 2.3.2 à 2.3.6, page 90.

4.2.2 Reprendre les exercices 2.4.1 à 2.4.9, page 99.

Chapitre 5

Analyse de Fourier et applications

5.1 Séries de Fourier

Notation 5.1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,

$$\mathscr{L}^2(\Omega) \overset{\text{Not}}{=} \left\{ f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}),\ f \text{ mesurable},\ \int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour les séries de Fourier, nous travaillerons avec

$$(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda\big)$$

où $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ la mesure usuelle, définie par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ [a < b] \implies \Big[\lambda\big([a,b]\big) = b - a\Big]$$

et

$$E = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f \ 2\,\pi\text{-périodique et } f_{|_{[0,2\,\pi]}} \in \mathscr{L}^2\big([0, 2\,\pi]\big) \right\}$$

Remarque 5.1

Si $T \in \mathbb{R}_+^*$ et f T-périodique, alors

$$g\ :\ x \longmapsto f\left(\frac{T}{2\,\pi}\,x\right) \text{ est } 2\,\pi\text{-périodique}$$

Démonstration

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x+2\,\pi) = f\left(\frac{T}{2\,\pi}\,(x+2\,\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\,\pi}\,x+T\right) = f\left(\frac{T}{2\,\pi}\,x\right) = g(x)$$

5.1.1 Convergence $\mathscr{L}^2$

Définition 5.1

1. On munit E du « produit scalaire hermitien » suivant [a]

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\,\pi}\int_{[0,2\,\pi]} \overline{f}\,g\ \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} \overline{f(t)}\,g(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{i\,n\,x} \end{cases}$$

Clairement, $e_n \in E$ et pour $f \in E$, on appelle *n-ième coefficient de Fourier de f* l'expression

$$\boxed{c_n(f) \overset{\text{Not}}{=} \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\, \mathrm{d}t}$$

---

a. Ce n'est pas réellement un produit scalaire, car il n'est pas défini ! En effet, si $f \in E$, alors

$$[\langle f, f\rangle = 0] \iff [f(x) = 0 \quad \mathbf{p.p.}]$$

Voir la démonstration de la propriété 5.2, page 257.

Démonstration

Bonne définition de $\langle\ ,\ \rangle$

1. Comme f et g sont de carrés intégrables sur $[0, 2\,\pi]$, $\overline{f}\,g$ sur $[0, 2\,\pi]$ est intégrable sur $[0, 2\,\pi]$.
2. $\langle\ ,\ \rangle$ est clairement linéaire à droite et hermitien.

Propriété 5.1

La fonction définie sur E, par

$$f \longmapsto \sqrt{\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t)\right|^2\ \mathrm{d}t}$$

---

est une semi-norme sur E, notée $\|f\|_{2,[0,2\pi]}$.

Démonstration

Elle vérifie donc

1. bonne définition, car $f \in E$;
2. positivité, évident ;
3. homogénéité, si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a immédiatement $\|\lambda.f\|_{2,[0,2\pi]} = |\lambda| \, \|f\|_{2,[0,2\pi]}$;
4. inégalité triangulaire, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir [5]).

Mais, ce n'est pas une norme (on parle de *semi-norme*) d'après la note de la définition 5.1, page 249.

Proposition 5.1 – Système total

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système total de E, c'est-à-dire

1. *elle est orthonormée ;*
2. *le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est* dense *dans E pour la semi-norme $\| \ \|_{2,[0,2\pi]}$.*

Démonstration

1. Il est facile de calculer, pour $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} e^{i\,m\,x}\, e^{-i\,n\,x}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ \left[\dfrac{1}{2\,\pi\, i\,(m-n)}\, e^{i\,(m-n)\,x} \right]_{x=0}^{x=2\,\pi} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Posons

$$F = \mathrm{Vect}\left(\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}\right)$$

Si $(f, g) \in \left(E \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})\right)^2$, on a

$$\|f - g\|_{2,[0,2\,\pi]} \leqslant \|f - g\|_{\infty,[0,2\,\pi]}$$

donc, en appliquant le théorème de Weierstraß trigonométrique (proposition 3.13, page 173), conséquence du théorème de Fejér (théorème 5.5, page 272) ou qui sera démontré directement dans le cours sur l'intégration ([2]), on en déduit que

$$\overline{F} \supset E \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$$

mais, toujours dans le cours sur l'intégration, on a démontré

$$\overline{\mathscr{C}([0, 2\,\pi], \mathbb{K})} = \mathscr{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{K})$$

pour la norme $\|\ \|_{2,[0,2\,\pi]}$. Ce qui nous donne l'égalité cherchée

$$\overline{F} = E$$

Théorème 5.1 – Inégalité de Bessel et formule de Parseval

Soit $f \in E$, on a alors

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \left|f(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t}$$

Démonstration

Inégalité de Bessel

Comme la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p < q$, on a, d'après le théorème de Pythagore

$$\sum_{k=p}^{q} \left|c_k(f)\right|^2 = \left\|\sum_{k=p}^{q} c_k(f)\, e_k\right\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 \leqslant \|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2$$

la famille $\left(\left|c_n(f)\right|^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2 \leqslant \|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \left|f(x)\right|^2 \,\mathrm{d}x$$

cette inégalité s'appelle *inégalité de Bessel*, elle n'utilise pas la densité de la famille, elle sera donc vérifiée dès que la famille sera orthonormée.

Formule de Parseval

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la densité de F (notation de la démonstration 5.1, page 251), pour tout $f \in E$, il existe $g_\varepsilon \in F$, telle que

$$\left\|f - g_\varepsilon\right\|_{2,[0,2\,\pi]} \leqslant \varepsilon$$

mais g_ε est une combinaison linéaire des $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (voir MATH2306P, définition 1.2, page 4), il existe $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tels que

$$g_\varepsilon \in \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\left\{e_n,\ n\in [\![p,q]\!]\right\}\right)}_{\overset{\mathrm{Not}}{=} F_{p,q}}$$

alors, par définition de la projection orthogonale sur $F_{p,q}$, on a

$$\left\| f - p_{F_{p,q}(f)} \right\|_{2,[0,2\,\pi]} \leqslant \| f - g_\varepsilon \|_{2,[0,2\,\pi]}$$

et, par application du théorème de Pythagore

$$\|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 = \left\| f - p_{F_{p,q}}(f) \right\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 + \left\| p_{F_{p,q}}(f) \right\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{k=p}^{q} |c_k(f)|^2$$

Finalement

$$\sum_{k=p}^{q} |c_k(f)|^2 \geqslant \|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 - \varepsilon^2$$

et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \geqslant \|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2 - \varepsilon^2$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \geqslant \|f\|_{2,[0,2\,\pi]}^2$$

Ce qui, conjugué avec l'inégalité de Bessel, nous permet de conclure.

Exemple 5.1

En utilisant la formule de Parseval pour la fonction $2\,\pi$-périodique définie par

$$\forall x \in [0, 2\,\pi[,\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient la fameuse somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$c_n(f) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\,n\,x}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2.\mathbb{Z}^* \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{-i}{\pi\,n} & \text{sinon} \end{cases}$$

La formule de Parseval nos donne alors

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \left|f(x)\right|^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2\,(2\,n+1)^2}$$

Et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi^2}{8}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque 5.2 – Complément de l'exemple 3.6, page 191

On a aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4\,n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Remarque importante 5.3 – Interprétation de la formule de Parseval

On a donc un deuxième produit sesqui-linéaire, hermitien, positif sur E, défini par

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}\, c_n(g)}$$

qui coïncide avec le précédent sur E.

Propriété 5.2 – Unicité des coefficients de Fourier pour les applications continues

L'application

$$\begin{cases} E \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \longmapsto \big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est injective.

Plus généralement, pour tout $f \in E$

$$\left[\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}}\right] \iff \left[\lambda\Big(\big\{x \in [0, 2\pi],\ f(x) \neq 0\big\}\Big) = 0\right]$$

Démonstration

L'application est clairement linéaire, calculons son noyau. Soit $f \in E$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = 0$$

alors la formule de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Cas où f est continue

Comme la fonction $t \longmapsto |f(t)|^2$ est positive, continue, on en déduit que $f = 0$.

Cas où f est quelconque dans E

1. $(\Rightarrow)$ Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$A_n = \left\{x \in [0, 2\,\pi],\ \left|f(x)\right|^2 \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$
alors
$$0 \leqslant \frac{1}{n}\,\lambda(A_n) \leqslant \int_{A_n} |f|^2\ \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{[0,2\,\pi]} |f|^2\ \mathrm{d}\lambda = 0$$
donc $\lambda(A_n) = 0$. Mais en ce cas
$$\Delta = \{x \in [0, 2\,\pi],\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$
réunion dénombrable d'ensembles de λ-mesure nulle est de λ-mesure nulle, ou encore $\lambda(\Delta) = 0$.
2. $(\Leftarrow)$ Par définition de l'intégrale, on a
$$\int_{[0,2\,\pi]} |f|^2\ \mathrm{d}\lambda = \underbrace{\int_{[0,2\,\pi]\setminus\Delta} |f|^2\ \mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } f \text{ est nulle en dehors de } \Delta} + \underbrace{\int_{\Delta} |f|^2\ \mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } \lambda(\Delta)=0} = 0$$

Théorème 5.2 – Riemann-Lebesgue

Soit $f \in E$, alors
$$\boxed{c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0}$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe alors $g_\varepsilon \in F$ (voir les notations de la proposition 5.1, page 251) telle que

$$\left\|f - g_\varepsilon\right\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir [5]) nous assure alors que, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|\left\langle e_n, f\right\rangle - \left\langle e_n, g_\varepsilon\right\rangle\right| \leqslant \left\|f - g_\varepsilon\right\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

Mais

$$\left|\left\langle e_n, f\right\rangle - \left\langle e_n, g_\varepsilon\right\rangle\right| = \left|c_n(f) - c_n(g_\varepsilon)\right|$$

et, comme $g_\varepsilon \in F$, pour $|n|$ assez grand, $c_n(g_\varepsilon) = 0$ (une combinaison linéaire est une somme finie, voir [4], définition 1.2, page 4). Ce qui montre le résultat.

Proposition 5.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ et de classe $\mathscr{C}^p_{\text{p.m.}}$, alors

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^p}\right) \text{ au voisinage de } \pm\infty$$

Démonstration

Cas $p = 1$

La fonction étant de classe $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$

$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_q = 2\pi$$

telle que, pour $k \in [\![1, q]\!]$, il existe une fonction $g_k \in \mathscr{C}^1\left([a_{k-1}, a_k], \mathbb{K}\right)$ telle que

$$\forall x \in]a_{k-1}, a_k[,\ f(x) = g_k(x)$$

On alors, par relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$2\pi\, c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{q} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{k=1}^{q} \int_{a_{k-1}}^{a_k} g_k(x)\, e^{-i\,n\,x}\, \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\left[-\frac{1}{i\,n}\, e^{-i\,n\,x}\, g_k(x) \right]_{x=a_{k-1}}^{x=a_k} + \frac{1}{i\,n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} g_k'(x)\, e^{-i\,n\,x}\, \mathrm{d}x \right)$$

Ce qui donne, en notant *abusivement* f' la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 2\pi[,\ \forall k \in [\![1, q]\!],\ \left[x \in [a_{k-1}, a_k]\right] \implies \left[f'(x) = g_k'(x)\right]$$

et, à nouveau par relation de Chasles

$$2\pi\, c_n(f) = \frac{1}{i\,n} \left(2\pi\, c_n\left(f'\right) + \sum_{k=1}^{q} \left(g_k\left(a_{k-1}\right) - g_k\left(a_k\right) \right) \right) =$$

$$\frac{1}{i\,n} \left(2\pi\, c_n\left(f'\right) + \sum_{k=1}^{q} \left(f\left(a_{k-1}^{+}\right) - f\left(a_k^{-}\right) \right) \right)$$

et, par périodicité

$$c_n(f) = \frac{1}{i\,n}\left(c_n\left(f'\right) + \sum_{k=1} q\left(f\left(a_k^+\right) - f\left(a_k^-\right)\right)\right) \tag{5.1}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction f étant supposée continue, on obtient [a]

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \boxed{c_n(f) = \frac{1}{i\,n}\,c_n\left(f'\right)}$$

Cas général

Il suffit de faire une récurrence sur p.

---

a. On fera attention à cette formule.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la formule est exacte ;
2. si f est de classe $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est exacte, mais la fonction f' n'est pas réellement la dérivée de f ;
3. si f est de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est *fausse*, car la formule (5.1), page 261 nous donne en général $i\,n\,c_n(f) \neq c_n\left(f'\right)$!

Exemple 5.2 – Inégalité isopérimétrique

Soit Γ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$, fermée simple, de longueur ℓ et délimitant une surface d'aire $\mathcal{A}$, alors

$$4\,\pi\mathcal{A} \leqslant \ell^2, \text{ avec égalité si, et seulement si, } \Gamma \text{ est un cercle}$$

Démonstration

1. Quitte à faire une homothétie de rapport $2\,\pi/\ell$, on peut supposer que la longueur est $2\,\pi$. L'aire $\mathcal{A}$ est alors modifiée en $\mathcal{A}' = 4\,\pi^2\,\mathcal{A}/\ell^2$.
2. On peut supposer que Γ est paramétrée par un abscisse curviligne s, on a alors
$$\forall s \in \mathbb{R},\ x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$$
donc
$$\int_0^{2\,\pi} \left(\overline{x'(s)}\,x(s) + \overline{y'(s)}\,y(s)\right)\,\mathrm{d}s = 2\,\pi$$
3. L'aire $\mathcal{A}'$ est donnée par (formule de Green-Riemann, voir la proposition 2.19, page 119 de MATH2308P)
$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\,\pi}\left(x(s)\,y'(s) - y(s)\,x'(s)\right)\,\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\,\pi}\left(\overline{x(s)}\,y'(s) - \overline{y(s)}\,x'(s)\right)\,\mathrm{d}s\right)$$
4. En interprétant cela comme un produit scalaire hermitien et en utilisant la remarque importante 5.3, page 256, il vient
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(|c_n(x')|^2 + |c_n(y')|^2\right) = 1$$
et
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\overline{c_n(x)}\,c_n(y') - c_n(x')\,\overline{c_n(y)}\right) = \frac{\mathcal{A}'}{\pi}$$
5. Donc
$$1 - \frac{\mathcal{A}'}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left|c_n(x) - i\,n\,c_n(y)\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}(n^2-1)\,|c_n(y)|^2 \geqslant 0$$
Ce qui montre l'inégalité isopérimétrique.
6. Le cas d'égalité s'obtient avec
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(x) = i\,n\,c_n(y) \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z},\ \left[|n| \geqslant 2\right] \implies \left[c_n(y) = 0\right]$$
Il est facile de reconnaître un cercle.

Définition 5.2

La projection de f sur l'espace vectoriel engendré par les $(e_p)_{p\in[\![-n,n]\!]}$ est appelée[a] *série de Fourier complexe de f*, en écrivant chaque $e_p(t)$ sous forme trigonométrique, il vient

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ S_n(f)(t) &= \sum_{p=-n}^{+n} c_p(f)\,e_p(t)\\ &= a_0(f)+\sum_{p=1}^{n} a_p(f)\,\cos(p\,t)+b_p(f)\,\sin(p\,t)\end{aligned}$$

Les coefficients $\big(a_p(f)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\big(b_p(f)\big)_{p\in\mathbb{N}*}$ s'appellent les *coefficients de Fourier trigonométriques de f* et la série

$$a_0(f)+\sum a_p(f)\,\cos(p\,t)+b_p(f)\,\sin(p\,t)$$

s'appelle *série de Fourier trigonométrique de f*. On a de plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(t)\,\cos(n\,t)\;\mathrm{d}t \text{ et } b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(t)\,\sin(n\,t)\;\mathrm{d}t}$$

et

$$\boxed{a_0(f)=\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f(t)\;\mathrm{d}t}$$

a. Ce n'est pas une série, la terminologie est abusive.

Démonstration

En écrivant, pour $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$c_n(f)\, e_n(x) + c_{-n}\, e_{-n}(x) = c_n(f)\ \big(\cos(n\,x) + i\ \sin(n\,x)\big) + c_{-n}(f)\ \big(\cos(n\,x) - i\ \sin(n\,x)\big) = \big(c_n(f) + c_{-n}(f)\big)\ \cos(n\,x) + i\ \big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big)\ \sin(n\,x)$$

On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\,\pi} f(x)\ \cos(n\,x)\ \mathrm{d}x$$

et

$$b_n(f) = i\ \big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\,\pi} f(x)\ \sin(n\,x)\ \mathrm{d}x$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n(f) = \frac{a_n(f) - i\,b_n(f)}{2} \text{ et } c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i\,b_n(f)}{2}$$

Remarque 5.4

1. En général, la famille $(c_n(f).e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ne définit pas des séries convergentes, en tous cas ponctuellement*, attention donc au fait que la somme s'effectue de $-n$ à $+n$

   On a en fait
$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_{2,[0,2\pi]}} f$$
   mais on ne sait *rien* sur la sommabilité de la famille $\left(c_n(f)\, e^{i\,n\,x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $x\in\mathbb{R}$.
2. Lorsque f est paire, on a $b_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Lorsque f est impaire, on a $a_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. Lorsque f est réelle, on a
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(f)\in\mathbb{R}$$
   Et, plus généralement
$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_{-n}(f)=\overline{c_n(f)}$$
5. La formule de Parseval devient alors
$$\left|a_0(f)\right|^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|a_n(f)\right|^2+\left|b_n(f)\right|^2\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\left|f(t)\right|^2\,\mathrm{d}t$$

5.1.2 Convergence ponctuelle

Lorsque l'on a une série de fonctions (en l'occurrence la série de Fourier d'une fonction f), il est légitime de s'intéresser à la convergence ponctuelle, uniforme, etc. et à la nature de la somme de la série de Fourier.

Propriété 5.3

Soit $f \in E$, si $\sum \left|a_n(f)\right|$ et $\sum \left|b_n(f)\right|$ convergent, on a convergence uniforme de la série de Fourier trigonométrique.

Démonstration

On a même une convergence normale sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \left\| x \longmapsto a_p(f)\ \cos(p\,x) + b_p(f)\ \sin(p\,x) \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant |a_p(f)| + |b_p(f)|$$

Propriété 5.4

Soit $f \in E$, si la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la famille $\big(c_n(f).e_n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable et on a aussi convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Démonstration

Car, pour $J \subset \mathbb{Z}$, fini et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n\in J} |c_n(f)\, e_n(x)| \leqslant \sum_{n\in J} |c_n(f)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$$

donc

$$\sum_{n\in J} \|c_n(f).e_n\|_{\infty,[0,2\,\pi]} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

ce qui montre la sommabilité de la famille $\left(c_n(f).e_n\right)$ dans E, pour la norme $\| \|_{\infty,[0,2\,\pi]}$.
Pour conclure, pour $n \in \mathbb{N}$, on remarque qu'on a une convergence normale de la série de Fourier trigonométrique.

Théorème 5.3 – Convergence normale pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$

Si $f \in E$ est continue, de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, alors

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Démonstration

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on peut définir f' **p.p.** et $f' \in E$. Donc, en particulier

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') \text{ existe dans } \mathbb{C}$$

Comme f est continue, on a, pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$c_n(f) = \frac{c_n\left(f'\right)}{i\,n} \text{ donc } |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|c_n\left(f'\right)\right|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Les séries $\sum \left| c_n\left(f'\right) \right|^2$ et $\sum \left| c_{-n}\left(f'\right) \right|^2$ convergent (Parseval) et la série $\sum 1/n^2$ converge, on est dans le deuxième cas ci-dessus.

Exemple 5.3

La fonction continue, de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, $2\,\pi$-périodique, définie par

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[,\ f(x) = |x|$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi\,(2\,n+1)^2} \cos\big((2\,n+1)\,x\big)$$

Voir, à la figure 5.1, page ci-contre, le graphique de S_{10}.

Démonstration

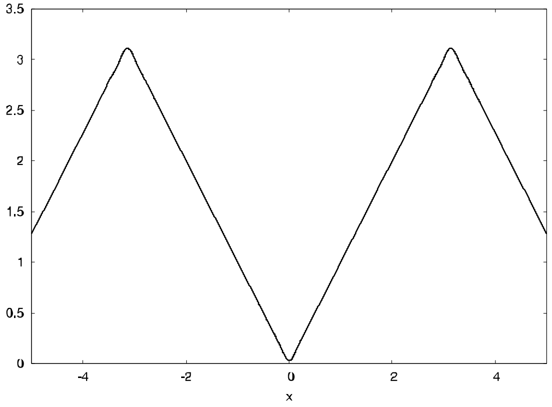
La fonction f étant manifestement continue, $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, le théorème 5.3, page précédente nous assure que f est somme de sa série de Fourier trigonométrique. il suffit donc de calculer les familles $\big(a_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(b_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mais la fonction est paire donc, d'après la remarque 5.4, page 265, tous les $b_n(f)$ sont nuls. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\,\pi} f(x)\, \cos(n\,x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, \cos(n\,x)\, \mathrm{d}x$$

d'après [3] (propriété 3.9, page 136). Alors

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2.\mathbb{N}^* \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ -\dfrac{4}{\pi\,n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Figure 5.1 – Approximation par une série de Fourier



Théorème 5.4 – Dirichlet

Si $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, [a] *alors la série de Fourier de f converge* simplement *vers la fonction*

$$S(f)\ :\ x \longmapsto \frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}$$

a. f n'est plus nécessairement continue.

Démonstration

Noyau de Dirichlet

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k(f)\, e^{i\,k\,x} = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} f(t)\, e^{i\,k\,(x-t)} \right) \mathrm{d}t$$

Or, pour $u \notin 2\,\pi.\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i\,k\,u} = e^{-i\,n\,u}\, \frac{1-e^{i\,(2\,n+1)\,u}}{1-e^{i\,u}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \overset{\text{Not}}{=} \pi\, D_n(u)$$

où D_n s'appelle le *noyau de Dirichlet* (il se prolonge facilement sur tout $\mathbb{R}$).

Convergence

Par ailleurs, pour une fonction g continue par morceaux, 2π-périodique, on a évidemment [a]

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \big(g(t)+g(-t)\big)\,\mathrm{d}t$$

donc, après le changement de variable $u = x - t$

$$\boxed{S_n(f)(x) = \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\right) D_n(u)\,\mathrm{d}u} \tag{5.2}$$

Remarquons ensuite que, pour $f = 1$, on obtient

$$1 = \int_0^{\pi} D_n(u)\,\mathrm{d}u$$

puis

$$S_n(f)(x) - S(f)(x) = \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{2}\right) + \left(\frac{f(x-u)-f\left(x^-\right)}{2}\right)\right) D_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Mais, les fonctions

$$u \longmapsto \frac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{2\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \text{ et } u \longmapsto \frac{f(x-u)-f\left(x^-\right)}{2\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

se prolongent par continuité en 0^+, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$. En conséquence, l'expression $S_n(f)(x) - S(f)(x)$ peut être considéré comme une combinaison linéaire de coefficients de Fourier de fonctions et le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 5.2, page 258) nous permet alors d'affirmer que

$$S_n(f)(x) - S(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est exactement

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{s} S(f) \text{ sur } \mathbb{R}$$

---

a. On se souvient que pour une fonction f T-périodique intégrable sur une période, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\, \mathrm{d}x$$

Voir la propriété 3.9, page 136 de MATH1302P.

Exemple 5.4

La non convergence uniforme s'observe à travers le phénomène de Gibbs (il y a une bosse incompressible !). Ainsi prenons la fonction de E définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

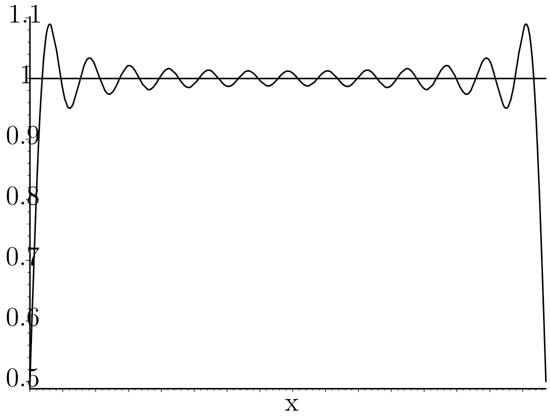
On observe alors une oscillation de la somme partielle au voisinage des points de discontinuités. Ce phénomène, très gênant dans la pratique, peut être naturellement évité en moyennant les sommes partielles, on obtient même un résultat important (théorème 5.5, de la présente page). Voir la figure 5.2, page suivante.

Théorème 5.5 – Fejér

Soit $f \in E$, continue alors

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Figure 5.2 – Phénomène de Gibbs



où $S_n(f)$ désigne la somme partielle de la série de Fourier de f.

Démonstration

Noyau de Fejér

On repart de l'équation (5.2), page 271. On a alors, pour $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \left(\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} D_k(u) \right) \mathrm{d}u \right)$$

or, pour $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(u) = \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)u} \right)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)u} = e^{i\frac{u}{2}} e^{i\frac{n}{2}u} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}u} - e^{-i\frac{n+1}{2}u}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} = e^{i\frac{n+1}{2}u} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right)$$

Finalement (on l'appelle *noyau de Fejér*)

$$\Sigma_n(f)(u) \overset{\text{Not}}{=} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} D_k(u) \right) = \frac{1}{n+1} \left(D_n(u)\right)^2$$

Convergence

Comme f est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue (théorème de Heine, voir le théorme 1.2, page 53 de MATH2308P). Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left[|x-y| \leqslant \eta\right] \implies \left[\left|f(x)-f(y)\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

On obtient donc

$$\left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \underbrace{\int_0^\eta \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - f(x)\right| \Sigma_n(u)\,\mathrm{d}u}_{=①} +$$

$$\underbrace{\int_\eta^\pi \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - f(x)\right| \Sigma_n(u)\,\mathrm{d}u}_{=②}$$

Or

$$① \leqslant \varepsilon \int_0^\eta \Sigma_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon \int_0^\eta \Sigma_n(u)\,\mathrm{d}u = \varepsilon$$

et

$$② \leqslant 2\,\left\|f\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \int_\eta^\pi \Sigma_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{2\,\pi\,\left\|f\right\|_{\infty,\mathbb{R}}}{(n+1)\,\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, il existe un $N \in \mathbb{N}$ (*indépendant de* x), tel que

$$\frac{2\,\pi\,\left\|f\right\|_{\infty,\mathbb{R}}}{(N+1)\,\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)} \leqslant \varepsilon$$

on obtient

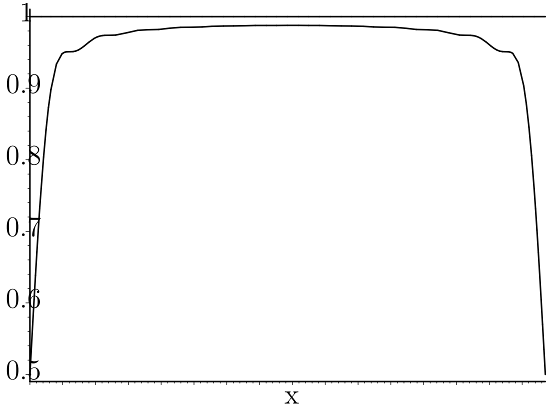
$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant 2\,\varepsilon\right]$$

c'est la convergence uniforme annoncée.

Exemple 5.5

Reprenons l'exemple ci-dessus, en moyennant, on obtient la figure 5.3, de la présente page.

Figure 5.3 – Sommes de Fejér



Remarque 5.5

On en déduit un théorème d'approximation de Weierstraß trigonométrique. Toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques (voir la proposition 3.13, page 173).

Démonstration 1

Les sommes de Fejér sont des sommes finies de $\alpha_{p,q}\cos^p\sin^q$.

Exercice(s) 5.1

5.1.1 Soit $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

(a) Donner la série de Fourier de la fonction de E définie par

$$\forall x\in]-\pi,+\pi[,\ f(x)=\cos(\alpha\,x)$$

(b) En déduire que

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\ \pi\ \mathrm{cotan}(\pi\,z)=\frac{1}{z}+2\,z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$$

(c) Exprimer de même les fonctions $1/\sin(\pi\,z)$ et $1/\sin^2(\pi\,z)$ comme séries de fonctions rationnelles.

5.1.2 f est intégrable sur $[a,b]$ bornée. Développer en série de Fourier, la fonction $g(x)=|\sin x|$, sur $[0,\pi]$. Démontrer que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,|\sin(\lambda\,x)|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b\frac{f(x)\,\cos(2\,n\,\lambda\,x)}{4\,n^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Que dire de

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin(\lambda\,x)|\,\mathrm{d}x \text{ ?}$$

5.1.3 Exprimer à l'aide des fonctions usuelles la fonction

$$f_a(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2\,n\,\pi)^2},\ \text{ où } a>0$$

5.1.4 Trouver toutes les fonctions f $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, telles que $f(2\,x)=2\,\sin(x)\,f'(x)$.

5.1.5 Soit f continue, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\gamma\in[0,2\pi[\backslash\pi.\mathbb{Q}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+k\,\gamma)=\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$$

5.1.6 Soit

$$E_1=\left\{f\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=f(1)=0 \text{ et } \int_{[0,1]}f''^2\,\mathrm{d}\lambda=1\right\}$$

Trouver

$$\inf_{f\in E_1}\int_{[0,1]}f^2\,\mathrm{d}\lambda \text{ et } \sup_{f\in E_1}\int_{[0,1]}f^2\,\mathrm{d}\lambda$$

5.1.7 Soit

$$E_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

Montrer l'existence de constantes C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leqslant C_1 \left\| f' \right\|_2, \quad \|f\|_\infty \leqslant C_2 \left\| f'' \right\|_2 \text{ et } \|f\|_2 \leqslant C_3 \left\| f' \right\|_2$$

Trouver, dans chaque cas, les meilleurs constantes possibles.

5.1.8 Dans la remarque 5.4, page 265, montrer les réciproques des points 2., 3. et 4. lorsque f est continue.

5.1.9 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum \frac{\sin(n\,x)}{n}\ (n \geqslant 1), \text{ converge}$$

On note $f(x)$ sa somme au point x. En calculer ses coefficients de Fourier. Quelle est la somme de la série de Fourier de f ?

5.1.10 Soit S_α la somme d'une série entière $\sum \alpha_n\, z^n$ de rayon de convergence $R_\alpha > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall r \in]0, R_\alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{1}{2\,\pi\, r^n} \int_0^{2\,\pi} S_\alpha(r\, e^{i\,\theta})\, e^{-i\,n\,\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

(b) En déduire, lorsque $R_\alpha = +\infty$ que

$$[S_\alpha \text{ bornée sur } \mathbb{C}] \iff [S_\alpha \text{ constante}]$$

5.1.11 On considère l'équation de la chaleur dans la situation suivante

— La chaleur se diffuse dans un tuyau de longueur π.

— L'état initial est décrit par une fonction

$$u_0 \ : \ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1$$

— L'état à l'instant $t \geqslant 0$ est décrit par une fonction u définie sur $[0,\pi]\,\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in [0,\pi],\ \forall t > 0,\ \partial_1\partial_1 u(x,t) = \partial_2 u(x,t) \text{ et } u(x,0) = u_0(x)$$

Trouver, à l'aide des séries de Fourier, une solution de ce problème.

5.1.12 Montrer que, dans les hypothèses du théorème de Dirichlet (thér me 5.4, page 270), soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$[a,b] \subset]c,d[\text{ et } f \text{ continue sur }]c,d[$$

on a

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } [a,b]$$

5.2 Espaces $\mathscr{L}^p$

5.2.1 Généralités

Définition 5.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K}) = \left\{ f \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ mesurable, } |f|^p \text{ est intégrable sur } \Omega \right\}$$

Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous noterons simplement $\mathscr{L}^p$.

Rappel 5.1

1. *Inégalité de Hölder* Si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors $f\, g \in \mathscr{L}^1$ et

$$\int_\Omega |f\, g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu} \sqrt[q]{\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu}$$

2. On en déduit l'inégalité de Minkowski.

$$\forall (f,g) \in \left(\mathscr{L}^p\right)^2, \ \sqrt[p]{\int_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} + \sqrt[p]{\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu}$$

3. $\mathscr{L}^p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. L'application définie par

$$\begin{cases} \mathscr{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \end{cases}$$

est une semi-norme sur $\mathscr{L}^p$ (notée $\| \ \|_p$) et on a

$$\forall f \in \mathscr{L}^p, \ \left[\|f\|_p = 0\right] \implies [f = 0 \quad \mu - \mathbf{p.p.}]$$

Théorème 5.6 – Riesz

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $p \in [1, +\infty[$*, alors toute suite de Cauchy de* $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K})$ *pour la semi-norme* $\| \ \|_p$ *converge pour la semi-norme* $\| \ \|_p$.

Démonstration

- *Idée de la démonstration* Si on prend une suite de Cauchy de $\mathscr{L}^p$, on va réutiliser ce que nous avons fait pour montrer qu'un espace vectoriel normé est de Banach si, et seulement si, toutes les séries absolument convergentes sont convergentes, accélérer la suite !

— *Construction de la limite.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}^p$ pour la semi-norme $\| \ \|_p$, on peut alors en extraire une sous-suite $\left(f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leqslant \frac{1}{2^k}$$

En ce cas, la série

$$\sum_k \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \text{ converge}$$

Soit $x \in \Omega$, nous allons alors montrer que la suite

$$\left(f_{n_k}(x)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge presque partout}$$

Pour cela, nous allons étudier la série dérivée définie par

$$v_k(x) = \begin{cases} f_{n_0}(x) & \text{si } k = 0 \\ f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x) & \text{si } k \geqslant 1. \end{cases}$$

On a alors, d'après le théorème de convergence monotone

$$\sqrt[p]{\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|\right)^p \mathrm{d}\mu} = \lim_{n\to+\infty}\uparrow \sqrt[p]{\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|\right)^p \mathrm{d}\mu}$$

Or, pour n fixé, on a, par inégalité de Minkowski

$$\sqrt[p]{\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|\right)^p \mathrm{d}\mu} = \left\|\sum_{k=0}^{n} |v_k|\right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|v_k\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|v_k\|_p < +\infty$$

La fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|$ est donc presque partout finie, ce qui nous montre la convergence absolue de la série $\mu - \mathbf{p}.\mathbf{p}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, posons

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x) & \text{si la série converge absolument} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— *Montrons que f est dans $\mathscr{L}^p$.* On a immédiatement

$$\|f\|_p \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k| \right\|_p < +\infty$$

— *Montrons que f est une valeur d'adhérence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.* En effet,

$$\left\| f - f_{n_k} \right\|_p = \left\| \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_j \right\|_p \leqslant \sum_{j=k+1}^{+\infty} \|v_j\|_p \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

où

$$\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_j \text{ existe } \mu - \mathbf{p}.\mathbf{p}.$$

— *La suite converge pour la semi-norme.* Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, on obtient

$$\left\| f - f_n \right\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 5.6

1. Le cas particulier $p = 2$, où la semi-norme découle d'un semi-produit scalaire défini par

$$\forall (f, g) \in \mathscr{L}^2,\ \langle f, g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_\Omega f\, g \,\mathrm{d}\mu$$

   a la même propriété que toute suite de Cauchy converge pour la semi-norme $\|\ \|_2$. En particulier, on peut lui appliquer le théorème de représentation sous la forme suivante Comme nous n'avons qu'une semi-norme, la fonction f n'est plus unique, mais deux fonctions f_1 et f_2 représentant ψ seront égales $\mu - \mathbf{p.p.}$

2. On peut généraliser à $p = +\infty$ de la manière suivante

$$\mathscr{L}^\infty\left(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}\right) \overset{\text{Def}}{=} \{f\ :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{mesurable}, \exists K \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}$$

   La semi-norme est alors la semi-norme infinie définie par

$$\forall f \in \mathscr{L}^\infty,\ \|f\|_\infty = \inf\left(\{K \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}\right)$$

   On a toujours le fait qu'une suite de Cauchy pour la semi-norme $\|\ \|_\infty$ converge pour la semi-norme $\|\ \|_\infty$.

Proposition 5.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* μ *étant* σ*-finie, on note*

$$\mathcal{T}_0 = \{A \in \mathcal{T},\ \mu(A) < +\infty\}$$

Alors

$$\Delta = \operatorname{Vect}\left(\left\{\mathbb{1}_{A_0},\ A_0 \in \mathcal{T}_0\right\}\right) \text{ est dense dans } \mathscr{L}^p \text{ pour la semi-norme } \| \ \|_p$$

Démonstration

1. *Les indicatrices des parties de* $\mathcal{T}_0$ *sont dans* $\mathscr{L}^p$. En effet, si $A_0 \in \mathcal{T}_0$
$$\int_\Omega \mathbb{1}_{A_0}^p \ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{A_0} \ \mathrm{d}\mu = \mu(A_0) < +\infty$$
2. *Cas des fonctions positives.* Si $f \in \mathscr{L}^p$ est positive, elle est en particulier mesurable. Comme la mesure est σ-finie, f limite croissante de fonctions positives, nulles en dehors d'un ensemble de $\mathcal{T}_0$, en effet, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, où les B_n sont dans $\mathcal{T}_0$ et tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B_{n+1}$, et donc
$$f = \lim_{n\to+\infty}\uparrow \left(f\ \mathbb{1}_{B_n}\right)$$
Posons $f_n = f\ \mathbb{1}_{B_n}$. f_n est limite croissante d'une suite de fonctions étagées $\left(\varphi_{s,n}\right)_{s\in\mathbb{N}}$, nulles en dehors de B_n. Le théorème de convergence monotone nous assure alors que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \overline{\Delta}, \qquad \text{(adhérence pour la semi-norme } \| \ \|_p)$$
Et, de même, comme f est limite croissante des f_n
$$f \in \overline{\Delta}$$
3. *Cas général.* On écrit comme d'habitude, $f = f^+ - f^-$.

Exercice(s) 5.2

5.2.1 Soit $(p, q, r) \in]1, +\infty[^3$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Montrer que, si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, alors $f\,g \in \mathscr{L}^r$.

5.2.2 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, et une fonction

$$f \in \mathscr{L}^\infty \cap \mathscr{C}^0$$

Comparer la semi-norme $\|f\|_\infty$ et la norme infinie $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}}$. Refaire la comparaison lorsque f est continue par morceaux.

5.2.3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant +\infty$, montrer alors que

$$\mathscr{L}^{p1} \supset \mathscr{L}^{p2}$$

Montrer que cela devient faux en général lorsque $\mu(\Omega) = +\infty$.

5.2.4 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, montrer que

$$\forall f \in \mathscr{L}^\infty,\ \|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$$

Montrer que cela devient faux en général lorsque $\mu(\Omega) = +\infty$.

5.2.5 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $p \in [1, +\infty[$, $r > p$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{L}^r$ et f : $\Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ telles que

— *Convergence simple*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \quad \mu - \mathbf{p.p.}$$

— Et, de plus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right) < +\infty$$

Montrer que

$$f \in \mathscr{L}^p$$

5.2.6 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant r \leqslant +\infty$, montrer que

$$\mathscr{L}^p \cap \mathscr{L}^r \subset \mathscr{L}^q$$

5.2.2 Convolution

Définition 5.4

Soit $f : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est *à support compact* si

$$\exists K \text{ compact}, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \backslash K, \ f(\underline{x}) = 0$$

On note $\mathscr{C}_c$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.

Proposition 5.4

Si $p \in [1, +\infty[$, alors $\mathscr{C}_c$ est dense dans $\mathscr{L}^p$ pour $\| \ \|_p$.

Démonstration

1. *Montrons que les indicatrices d'ouverts bornés sont limites de fonctions continues à support compact.* Soit O un ouvert borné, on peut poser pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{x} \in \mathbb{R}^s$
$$\psi_n(\underline{x}) = \min\Big(1, n\, d\left(\underline{x}, O^c\right)\Big)$$
Ces fonctions sont clairement continues, à support compact. Elles forment une suite croissante convergeant pour $\| \ \|_p$ vers $\mathbb{1}_O$.
2. *Montrons que les indicatrices de boréliens bornés sont limites de fonctions continues à support compact.* Pour tout borélien $A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s)$, on pose
$$\mu(A) = \inf\Big(\{\lambda(O),\ O \text{ ouvert et } O \supset A\}\Big)$$
Il est facile de vérifier que c'est une mesure sur la tribu borélienne, qui coïncide avec λ sur la tribu borélienne, par unicité de la mesure de Lebesgue (admise), on obtient $\mu = \lambda$. Soit A un borélien borné, $\varepsilon > 0$, O un ouvert borné contenant A tel que
$$\lambda\left(O \backslash A\right) \leqslant \varepsilon^{1/p}$$
alors
$$\left\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_O\right\|_p \leqslant \varepsilon$$
Il suffit alors d'utiliser la première question pour trouver une fonction $\psi \in \mathscr{C}_c$ telle que
$$\left\|\mathbb{1}_A - \psi\right\|_p \leqslant 2\,\varepsilon$$
3. En utilisant la linéarité et la proposition 5.3,page ??, nous obtenons la densité voulue.

Remarque 5.7

Comme une limite uniforme (pour la norme infinie) de fonctions continues est continue, ce résultat devient faux lorsque $p = +\infty$.

Rappel 5.2

Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, X et Y deux `v.a.r.` absolument continues, indépendantes, alors la densité de $X + Y$ est la fonction définie par

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x - t)\, \mathrm{d}t$$

Définition 5.5

Soit f et g deux fonctions mesurables (pour les tribus boréliennes) de $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$, l'application (lorsqu'elle a un sens)

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{x})\, \mathrm{d}\lambda, \end{cases}$$

où ϕ est l'application

$$(\underline{t}, \underline{x}) \longmapsto f(\underline{t})\;\; g(\underline{x} - \underline{t})$$

Propriété 5.5

On a toujours

$$\boxed{f * g = g * f}$$

Démonstration

Il suffit de faire le changement de variable $\underline{u} = \underline{x} - \underline{t}$ dans l'intégrale.

Propriété 5.6

Si f et g sont dans $\mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda\right)$, alors $f * g$ est défini $\lambda - \mathbf{p}.\mathbf{p}.$ et, de plus, $f * g \in \mathscr{L}^1$.

Démonstration

1. *Définition presque partout.* On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} |\phi| \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^s} |f| \, \mathrm{d}\lambda\right) \left(\int_{\mathbb{R}^s} |g| \, \mathrm{d}\lambda\right) < +\infty$$

   Ceci nous permet de dire que la fonction

$$\underline{x} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^s} |\phi(\bullet, \underline{x})| \, \mathrm{d}\lambda$$

   est finie λ-presque partout, la fonction $\phi(\bullet, \underline{x})$ est donc $\lambda - \mathbf{p}.\mathbf{p}.$ intégrable sur $\mathbb{R}^s$. En ce cas, la fonction $f * g$ est bien définie (elle est donc définie $\lambda - \mathbf{p}.\mathbf{p}.$).

2. *$f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^s$.* On a immédiatement

$$\int_{\mathbb{R}^s} |f * g| \,\mathrm{d}\lambda = \left\|f * g\right\|_1 \leqslant \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1$$

Propriété 5.7

Si $f \in \mathscr{C}_c$ et $g \in \mathscr{L}^p$ $(p \in [1, +\infty])$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^s$.

Démonstration

Comme f est continue, à support compact, elle est uniformément continue (Heine). Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (\underline{x}, \underline{x}') \in \mathbb{R}^{s\,2},\ \left[\left\|\underline{x} - \underline{x}'\right\| \leqslant \eta\right] \implies \left[\left|f\left(\underline{x}\right) - f\left(\underline{x}'\right)\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

Nous supposerons $s = 1$ pour simplifier les écritures. Quitte à grossir K, nous pouvons le supposer sous la forme d'un intervalle $[a, b]$. Clairement $\lambda(K) < +\infty$.

1. *Existence de $f * g$.* Soit $q \in [1, +\infty]$, tel que $1/p + 1/q = 1$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)\, g(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \begin{cases} \|f\|_\infty \|g\|_1 & \text{si } p = 1, \\ \|f\|_1 \|g\|_\infty & \text{si } p = +\infty \\ \|f\|_q \|g\|_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $f * g$ est manifestement borné car

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f * g(x)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)\, g(t)| \,\mathrm{d}t$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ et η associé, alors, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $|x-y| \leqslant \eta$, on a alors

$$\left|f * g(x) - f * g(y)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \begin{cases} \varepsilon\,\|g\|_1 & \text{si } p = 1 \\ \|g\|_\infty\,\varepsilon\,(\lambda(K) + 2\,\eta) & \text{si } p = \infty \\ \varepsilon\,\left(\lambda(K) + 2\,\eta\right)^{1/q}\,\|g\|_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriété 5.8

Si $f \in \mathscr{L}^p$ $(p > 1,\ 1/p + 1/q = 1)$, alors l'application $g \longmapsto f * g$ est lipschitzienne sur $\mathscr{L}^q$.

Démonstration

Nous supposerons $s = 1$.

1. *Existence de $f * g$.* On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)\,g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q$$

2. *Lipschitziennité.* On a

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

Soit g_1 et g_2 dans $\mathscr{L}^q$, alors

$$\left\|f * g_1 - f * g_2\right\|_q$$

Propriété 5.9

Si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, où $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, +\infty[$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée.

Démonstration

Nous nous limiterons au cas où $s = 1$. La généralisation est aisée.

1. L'existence et le caractère borné de $f * g$ se fait de la même manière que ci-dessus.
2. Soit x et y dans $\mathbb{R}$, alors

$$\left|f * g(x) - f * g(y)\right| \leqslant \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|^p \, \mathrm{d}t} \, \left\|g\right\|_q$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x-t) - f(y-t)\right|^p \, \mathrm{d}t \underset{u=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(u) - f\left(u - (y-x)\right)\right|^p \, \mathrm{d}t$$

Ce qui nous permet d'obtenir, par convergence dominée, la propriété voulue lorsque $f \in \mathscr{C}_c$. Si f n'est plus continue, à support compact, alors on peut trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}_c$ telle que

$$\left\|f_n - f\right\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a alors

$$\left|f * g(x) - f * g(y)\right| \leqslant \underbrace{\left|f_n * g(x) - f * g(x)\right|}_{=\delta_1} + \underbrace{\left|f_n * g(x) - f_n * g(y)\right|}_{=\delta_2} + \underbrace{\left|f_n * g(y) - f * g(y)\right|}_{=\delta_3}$$

Comme on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|f_n * g(x) - f * g(x)\right| \leqslant \left\|f_n - f\right\|_p \, \left\|g\right\|_q$$

on peut trouver un n assez grand (qui ne dépend ni de x ni de y) pour que ($\varepsilon > 0$ donné)

$$\delta_1 \leqslant \varepsilon \text{ et } \delta_3 \leqslant \varepsilon$$

Ce n étant fixé, on peut utiliser l'uniforme continuité de $f_n * g$ et donc trouver un $\eta > 0$ (qui ne dépend donc ni de x ni de y), tel que

$$\left[|x-y| \leqslant \eta\right] \implies \left[\delta_2 \leqslant \varepsilon\right]$$

Remarque 5.8

En adaptant légèrement la démonstration, on peut obtenir le cas où $p = 1$ et $q = +\infty$.

La convolution est très utile pour fabriquer des approximations ayant de bonnes propriétés. Le principe en est l'utilisation de *suites régularisantes*.

Définition 5.6

1. On appelle *approximation de Dirac* toute suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^s$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que
   (a) *Régularité* les φ_n sont continues sur $\mathbb{R}^s$.
   (b) *Support compact* il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^s$, tel que
   $$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \backslash K_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(\underline{x}) = 0$$
   (c) *Normalisation*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$$
   (d) *Convergence*
   $$\forall \delta > 0,\ \int_{BF(\underline{0},\delta)^c} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. On appelle *suite régularisante* toute approximation de Dirac qui vérifie de plus
   (a) *Régularité* les φ_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(b) *Convergence* il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$, tels que

$$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^s,\ \varphi_n(\underline{x}) \neq \underline{0}\right\} \subset BF(\underline{0}, r_n)$$

Exemple 5.6

Supposons $p = 1$. Prenons φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ \left(1 - x^2\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n(x) = c_n \left[\varphi(x)\right]^n,\ \text{où } c_n \text{ est défini par } \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$$

On obtient une approximation de Dirac. (Voir la figure 5.4, page suivante).

Démonstration

La seule propriété à montrer est la convergence. Soit $1 > \delta > 0$, alors

$$I(n,\delta) = \int_{\delta}^{+1} c_n \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \leqslant c_n \left(1 - \delta^2\right)^n$$

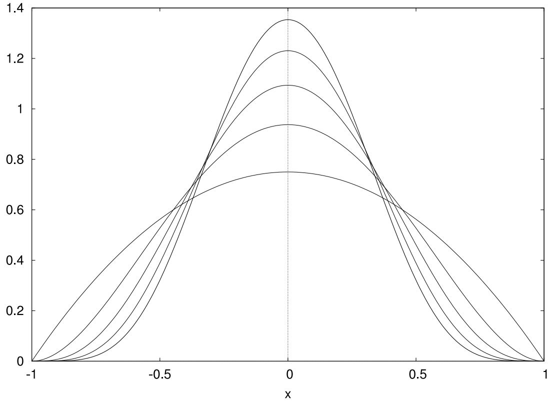
Or

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \geqslant \delta \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^n$$

Finalement

$$I(n,\delta) \leqslant \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta\,(1-\delta^2/4)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Figure 5.4 – Approximation de Dirac



Exemple 5.7

On peut même avoir facilement des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ Prenons φ définie par

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s,\ \varphi\left(\underline{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\underline{x}\|_2 \geqslant 1 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|\underline{x}\|_2^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n\left(\underline{x}\right) = c_n\,\varphi(n.\underline{x}),\ \text{où } c_n \text{ est défini par } \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_n\ \mathrm{d}\lambda = 1$$

On obtient une suite régularisante.

Propriété 5.10

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$, si K est un compact de $\mathbb{R}^s$, alors

$$\boxed{\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Démonstration

Pour simplifier les écritures, nous prendrons $s = 1$. La démonstration ne change pas lorsqu'on revient au cas général. Comme on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$$

on a, pour $x \in K$,

$$\Delta_n(x) = \left|\varphi_n * f(x) - f(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \, \big(f(x-t) - f(x)\big) \, \mathrm{d}t\right|$$

Comme K est compact, l'ensemble

$$K_1 = \Big\{y \in \mathbb{R}, \; d\big(y, K\big) \leqslant 1\Big\} \text{ est aussi compact}$$

Le théorème de Heine nous assure alors que f est uniformément continue sur K_1. Soit donc un $\varepsilon > 0$, il existe alors un pas $\delta > 0$ (que l'on peut supposer inférieur à 1), tel que

$$\forall x \in K, \; \forall t \in \mathbb{R}, \; \big[|t| \leqslant \delta\big] \implies \Big[\big|f(x-t) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big]$$

car $x - t$ reste dans K_1, lorsque x reste dans K. Finalement, comme f est bornée sur les compacts K_0 (où varie t) et $K - K_0$ (où varie $x - t$)

$$\Delta_n(x) \leqslant 2 \, \|f\|_{\infty, K_0 \cup (K - K_0)} \int_{\{t, \; |t| > \delta\}} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda + \varepsilon \int_{\{t, \; |t| \leqslant \delta\}} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda \leqslant 2\,\varepsilon, \text{ si } n \text{ est assez grand}$$

Comme il n'y a plus de x dans le dernier terme et que δ ne dépend pas de x (continuité *uniforme*), la convergence est *uniforme*, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon' > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; [n \geqslant N] \implies \Big[\|\varphi_n * f - f\|_{\infty, K} \leqslant \varepsilon'\Big]$$

Remarque 5.9

Si f est continue à support compact, on obtient alors

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,\mathbb{R}^s} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème 5.7 – Weierstraß

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

1. On peut se ramener au cas où $[a,b] \subset]0,+1[$, en posant

$$g(x) = f\left(a + (4\,x - 1)\,(b-a)\right) \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ par exemple}$$

2. On prolonge la fonction à tout $\mathbb{R}$, pour obtenir une fonction $\tilde{g}$ continue, nulle en dehors de $[0,1]$. Voir la figure 5.6, page 317.
3. En appliquant ce qui précède avec φ_n définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) = c_n\,(1-x^2)^n\ \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$$

   où c_n est choisi pour obtenir une approximation de Dirac. Il vient

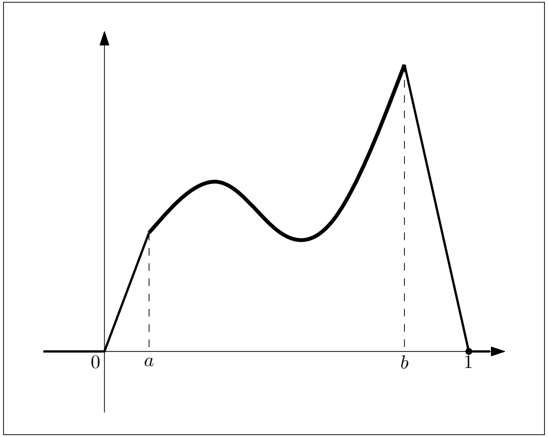
$$\|\varphi_n * g - g\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or, pour $x \in [a, b]$, on a

$$\varphi_n * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-t)\, g(t)\ \mathrm{d}t$$

Et cette expression est polynomiale en x, car $x - t \in [a-b, b-a] \subset]-1, 1[$.

Figure 5.5 – Prolongement par 0



Proposition 5.5

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $p \in [1, +\infty[$ (ici, $p \neq +\infty$), et si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$, alors $\varphi_n * f$ est dans $\mathscr{L}^p$ et

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

Pour simplifier l'écriture, nous prendrons $s = 1$.

1. *On reste dans $\mathscr{L}^p$.*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t \right|^p \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \,\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

donc (Fubini-Tonelli)

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f|^p \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \|f\|_p^p < +\infty$$

2. *Convergence dans $\mathscr{L}^p$.*

— Lorsque f est dans $\mathscr{C}_c$, elle est donc uniformément continue et bornée, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n * f(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, et $\eta > 0$ associé pour l'uniforme continuité de f, alors

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \ \big(f(x-t) - f(x)\big) \ \mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \, \|f\|_\infty \left(\int_{\{t \in \mathbb{R}, \ |t| > \eta\}} \varphi_n \ \mathrm{d}\lambda \right) + \varepsilon$$

Ce qui montre que, pour n assez grand (indépendant de x), on a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \ \big(f(x-t) - f(x)\big) \ \mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \, \varepsilon$$

Soit

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \ \big(f(x-t) - f(x)\big) \ \mathrm{d}t \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par ailleurs, comme f et φ_n sont à supports compacts (indépendants de n), la fonction $\varphi_n * f - f$ l'est aussi, elle est de plus continue donc bornée sur son support compact. Le TCD permet alors de conclure.

— La partie 1 de cette démonstration nous montre que $f \longmapsto \varphi_n * f$ est 1-lipschitzienne pour $\| \ \|_p$. La densité de $\mathscr{C}_c$ nous permet de conclure (car $p \neq +\infty$).

Propriété 5.11

Si $f \in \mathscr{L}^1$ et si $\varphi \in \mathscr{C}_c$ est de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), alors $\varphi * f$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
On a de plus

$$\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!] \, , \ \partial_i(\varphi * f) = (\partial_i \varphi) * f}$$

Démonstration

Nous nous limiterons, comme d'habitude, au cas $s = 1$. De plus, il suffit de montrer le résultat pour $k = 1$, puis de faire une récurrence évidente.
On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction

$$g(t, x) = \varphi(x - t)\, f(t)$$

— *Intégrabilité.* On a f et φ dans $\mathscr{L}^1$, donc $\varphi * f$ est définie $\lambda - \mathbf{p.p.}$ et dans $\mathscr{L}^1$. Comme, de plus, $\varphi \in \mathscr{C}_c$, $\varphi * f$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.
— *Dérivabilité.* On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \partial_2 g(t, x) = \varphi'(x - t)\, f(t)$$

— *Domination.* φ' étant continue à support compact, elle est bornée. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\partial_2 g(t, x)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty\, |f(t)|$$

On a donc la dérivabilité de $\varphi * f$ et sa dérivée est $\varphi' * f$. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ nous permet aussi de dire que $\varphi' * f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5.6

Soit $p \in [1, +\infty[$, *alors l'ensemble des fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *à support compact (que nous noterons* $\mathscr{C}_c^\infty$*) est dense dans* $\mathscr{L}^p$ *pour* $\|\ \|_p$.

Démonstration

Il nous suffit de montrer que $\mathscr{C}_c^\infty$ est dense dans $\mathscr{C}_c$. Si on prend $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante, alors, pour $f \in \mathscr{C}_c$

1. On a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi_n * f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty$$
2. Et de plus,
$$\left\|\psi_n * f - f\right\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice(s) 5.3

5.3.1 Montrer que la convolution est associative dans $\mathscr{L}^1$.

5.3.2 Montrer que si f et g sont dans $\mathscr{L}^2$ alors $f * g$ est définie sur tout $\mathbb{R}^s$, est continue et de limite nulle lorsque $\|\underline{x}\|_2$ tend vers $+\infty$.

5.3.3 Montrer que si $p \in [1, +\infty[$, si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^1$, alors $f * g$ existe $\lambda - \mathbf{p.p.}$ et est dans $\mathscr{L}^p$. Montrer aussi que
$$\left\|f * g\right\|_p \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_1$$

5.3.4 Soit $A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s)$, tel que $\lambda(A) > 0$. En utilisant la fonction $f * \widetilde{f}$, où
$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s,\ \widetilde{f}(\underline{x}) = f(-x)$$
montrer que
$$\left\{\underline{x} - \underline{x}',\ (\underline{x}, \underline{x}') \in A^2\right\} \text{ est un voisinage de } \underline{0}$$

5.3.5 Soit $(p, q, r) \in [1, +\infty]^3$, tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

et soit $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, montrer que $f * g$ existe $\lambda - \mathbf{p.p.}$, est dans $\mathscr{L}^r$ et vérifie

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$$

5.3.6 Soit les fonctions définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-\pi, \pi] \\ c_n \, \big(1 + \cos(x)\big)^n & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c_n est choisi pour que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$$

(a) Montrer que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une approximation de Dirac.

(b) Est-ce une suite régularisante ?

(c) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, $2\,\pi$-périodique. Montrer que

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(d) Que peut-on dire si $f \in \mathscr{L}^p$ et $2\,\pi$-périodique ?

5.3 Transformées de Fourier

5.3.1 Théorie

Définition 5.7

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda; \mathbb{C})$, on appelle *transformée de Fourier de f* l'application

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, \mathrm{d}t. \end{cases}$$

On dit souvent que t varie dans le domaine *temporel* et que ω varie dans le domaine *fréquentiel*.

Remarque 5.10

On a clairement

$$\forall f \in \mathscr{L}^1,\ \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Exemple 5.8

1. Soit la fonction (densité d'une gaussienne) f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

   cette fonction est clairement $\mathscr{L}^1$, calculons sa transformée de Fourier (voir la session `Wxmaxima` A.5, page 392). Mathématiquement, le calcul se fait en dérivant par rapport à ω et, après une intégration par parties, en résolvant une équation différentielle satisfaite par $\widehat{f}$ (nous verrons plus loin que ce calcul peut être facilité).

2. Soit la fonction définie par

$$f(x) = e^{-|x|} \text{ alors } \widehat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

   Le calcul est donné à la session `Wxmaxima` A.6, page 392.

Propriété 5.12

$f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire.

Propriété 5.13

L'application $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On applique le théorème de continuité sous le signe $\int$ à la fonction

$$g \; : \; (t, \omega) \longmapsto f(t)\, e^{i\,t\,\omega}$$

Elle vérifie

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $g(\bullet, \omega)$ est mesurable, car f l'est.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t, \omega)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Et on a
$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \; \left|g(t, \omega)\right| \leqslant |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

Proposition 5.7 – (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Si $f \in \mathscr{L}^1$, on a

$$\widehat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$$

Démonstration

1. C'est vrai si $f \in \mathscr{C}_c^\infty$, avec une intégration par parties. En effet, pour $\omega \neq 0$
$$\widehat{f}(\omega) = \left[f(t)\, \frac{e^{-i\,\omega\,t}}{-i\,\omega} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + \frac{1}{i\,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\,\omega\,t} \,\mathrm{d}t$$
Donc
$$\left|\widehat{f}(\omega)\right| \leqslant \frac{1}{|\omega|} \left\| f' \right\|_1 \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$$

2. On généralise à $\mathscr{L}^1$ en utilisant la densité de $\mathscr{C}_c^\infty$ dans $\mathscr{L}^1$ pour $\| \ \|_1$. Soit $f \in \mathscr{L}^1$, $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathscr{C}_c^\infty$, telle que

$$\left\|f - g\right\|_1 \leqslant \varepsilon, \text{ on a alors } \left\|\widehat{f} - \widehat{g}\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En ce cas, pour $|\omega|$ assez grand, on a

$$\left|\widehat{f}(\omega)\right| \leqslant \left|\widehat{f}(\omega) - \widehat{g}(\omega)\right| + |\widehat{g}(\omega)| \leqslant \left\|\widehat{f} - \widehat{g}\right\|_\infty + |\widehat{g}(\omega)| \leqslant 2\,\varepsilon$$

Propriété 5.14

1. Si f est réelle, alors
$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$$
2. Si f est paire, alors $\widehat{f}$ est paire.
3. Si f est impaire, alors $\widehat{f}$ est impaire.

Propriété 5.15

Translation temporelle

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, et $f_{x_0} : x \longmapsto f(x + x_0)$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f_{x_0}}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\, e^{i\,\omega\,x_0}}$$

Translation fréquentielle

Si $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $g_{\omega_0} : x \longmapsto f(x)\, e^{-i\,\omega_0\,x}$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\omega + \omega_0) = \widehat{g_{\omega_0}}}$$

Lien avec le produit de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{L}^1$, alors

$$\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}}$$

Démonstration

On sait que $f * g$ est définie $\lambda - \mathbf{p.p.}$ et dans $\mathscr{L}^1$, on peut donc définir sa transformée de Fourier, si $\omega \in \mathbb{R}$, alors

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x)\, g(x)\ \mathrm{d}x \right)\, e^{-i\,\omega\,t}\ \mathrm{d}t$$

En intervertissant les intégrales (théorème de Fubini-Lebesgue), il vient

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\, e^{-i\,\omega\,t}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &\underset{u=t-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\,\omega\,(x+u)}\, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Proposition 5.8

Si $f \in \mathscr{L}^1$, et soit

$$g \;:\; \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -i\,x\,f(x) \end{cases}$$

Si $g \in \mathscr{L}^1$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et

$$\left(\widehat{f}\right)' = \widehat{g}$$

Démonstration

On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction

$$\phi \;:\; (t, \omega) \longmapsto f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}$$

Elle vérifie

1. *Intégrabilité.*

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \left|\phi(t,\omega)\right| = |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

2. *Dérivabilité.*

$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 \phi(t, \omega) = -i\, t\, f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}$$

3. *Domination.*

$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\partial_2 \phi(t, \omega)\right| = |g(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

Proposition 5.9

Soit $f \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{C}^1$ telle que $f' \in \mathscr{L}^1$, alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{(f')}(\omega) = i\, \omega\, \widehat{f}(\omega)$$

Démonstration

On a par définition, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, \mathrm{d}t$$

on a envie de faire une IPP, mais quel est le comportement de f au voisinage de $\pm\infty$?

1. *Sous les hypothèses données,* $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. En effet, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, \mathrm{d}t$$

donc

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \int_{[x,y]} |f'|\, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[x \to \infty,\ y \to \infty]{} 0$$

2. *Intégration par parties.* On a alors, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \Big[f(t)\,(-i\,\omega)\,e^{-i\,\omega\,t}\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\,\omega\,f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\;\mathrm{d}t = i\,\omega\,\hat{f}(\omega)$$

Remarque 5.11

On n'a pas besoin de $\mathscr{C}^1$, on a utilisé seulement le fait que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\;\mathrm{d}t \quad \lambda - \mathbf{p.p.}$$

ce qui se produit lorsque f est continue, dérivable, de dérivée dans $\mathscr{L}^1$ (voir l'exercice 2.2.1, page 99). En particulier, cela sera vrai pour les fonctions continues, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur tout segment.

Théorème 5.8 – Inversion de Fourier

Si $f \in \mathscr{L}^1$ continue est telle que $\hat{f} \in \mathscr{L}^1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{+i\,x\,\omega}\;\mathrm{d}\omega\right)$$

Remarque 5.12

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{L}^1$ était nécessairement continue, donc si $\widehat{f}$ est dans $\mathscr{L}^1$, alors $\widehat{\left(\widehat{f}\right)}$ doit être continue, si on veut avoir l'expression de f comme dans l'énoncé, il faut supposer f continue...

Démonstration

Il est naturel, vu l'hypothèse $\widehat{f}$ intégrable, de se demander que vaut $\widehat{\left(\widehat{f}\right)}$. Par définition, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{-i\,x\,\omega}\, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, \mathrm{d}t \right) e^{-i\,x\,\omega}\, \mathrm{d}\omega$$

Malheureusement, le théorème de Fubini est inapplicable ! On va donc réduire l'intervalle d'intégration en écrivant

$$\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, \mathrm{d}t \right) e^{-i\,x\,\omega}\, \mathrm{d}\omega$$

et étudier l'expression, pour $A > 0$

$$I(A) = \int_{-A}^{+A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, \mathrm{d}t \right) e^{-i\,x\,\omega}\, \mathrm{d}\omega$$

Le théorème de Fubini nous permet d'écrire alors

$$I(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-A}^{+A} e^{-i\,\omega\,(x+t)}\, \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, 2\, \frac{\sin\left(A\,(x+t)\right)}{x+t}\, \mathrm{d}t$$

- *Supposons dans un premier temps que* $f \in \mathscr{C}^1$. Le changement de variable $u = x + t$, nous donne

$$I(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(-x+u)\ 2\ \frac{\sin(A\,u)}{u}\, \mathrm{d}u$$

Or la fonction ψ_x définie par

$$u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(-x+u)-f(-x)}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ f'(-x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est alors bien définie et le lemme de Riemann-Lebesgue nous permet d'affirmer que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\psi_x(u)\,\sin(A\,u)\,\mathrm{d}u = 0$$

soit (après le changement de variable $v = A\,u$)

$$I(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 2\,f(-x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v}\,\mathrm{d}v = 2\,\pi\,f(-x)$$

▸ Si $f \in \mathscr{L}^1$, soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\varphi_n * f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n * f(x) = \frac{1}{2\,\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_n * f}(\omega)\,e^{+i\,\omega\,x}\,\mathrm{d}\omega \right) = \frac{1}{2\,\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(\omega)\,\widehat{f}(\omega)\,e^{+i\,\omega\,x}\,\mathrm{d}\omega \right)$$

On sait alors que $\varphi_n * f(x)$ tend vers $f(x)$, puisque f est continue. Il nous reste à regarder comment se comporte $\widehat{\varphi_n}$. On peut choisir notre suite... Prenons φ de classe $\mathscr{C}^1$, positive, $\|\varphi\|_1 = 1$, à support inclus dans $[-1,+1]$ (elle est donc nulle en dehors de $[-1,+1]$), on prend alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = n\,\varphi(n\,x)$$

On a alors

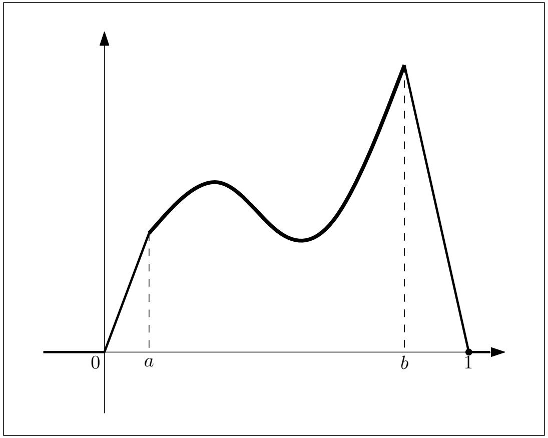
$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi_n}(\omega) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\varphi}(0) = 1$$

Le TCD permet alors de conclure, puisque $\widehat{f}$ est supposée $\mathscr{L}^1$.

Remarque 5.13

L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ définie sur $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{C}^0$ est injective.

Figure 5.6 – Prolongement par 0



Remarque 5.14

Transformée de Fourier en dimension s. Il est facile de généraliser la notion de transformée de Fourier aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^s$, en introduisant la fonction

$$\phi(\underline{x}, \underline{\omega}) = f(\underline{x})\, e^{-i\,\langle \underline{x}, \underline{\omega}\rangle} \text{ où } \langle \underline{x}, \underline{\omega}\rangle = \sum_{k=1}^{s} x_k\, \omega_k$$

On définit alors $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^s$ par

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s,\; \widehat{f}\,(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(\underline{x}, \bullet)\, \mathrm{d}\lambda$$

La formule d'inversion pour $f \in \mathscr{L}^1$ et $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$ devient

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s,\; f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\,\pi)^s} \int_{\mathbb{R}^s} \psi(\underline{x}, \bullet)\, \mathrm{d}\lambda$$

où

$$\psi(\underline{x}, \underline{\omega}) = \widehat{f}(\underline{\omega})\, e^{+i\,\langle \underline{\omega}, \underline{x}\rangle}$$

Exercice(s) 5.4

5.4.1 Exprimer la transformée de Fourier de $x \longmapsto f(a\,x)$ $(a > 0)$ en fonction de $\widehat{f}$ (changement d'unité).

5.4.2 Justifier les résultats de l'exemple 5.8, page 308.

5.4.3 Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^1$, sont telles que $f\,g \in \mathscr{L}^1$, montrer alors que $\widehat{f} * \widehat{g}$ a un sens et comparer

$$\widehat{f} * \widehat{g} \text{ et } \widehat{f\,g}$$

5.4.4 Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in]-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
f_2(x) &= \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ce n'est pas du calcul !} \\
f_3(x) &= \mathbb{1}_{[a,b]} \\
f_4(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \text{ce n'est pas du calcul !.}
\end{aligned}$$

5.4.5 Résoudre dans $\mathscr{L}^1$ l'équation

$$f * f = f$$

5.4.6 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1$ défini par

$$E = \left\{ f \in \mathscr{L}^1,\ \exists g \in \mathscr{L}^1,\ \widehat{g} = f \right\}$$

(a) Montrer que

$$[f \in E] \iff \left[f \in \mathscr{L}^1 \text{ et } \widehat{f} \in \mathscr{L}^1 \right]$$

(b) Montrer que

$$[f \in E] \iff \left[\widehat{f} \in E\right]$$

(c) Montrer que

$$[f \in E] \implies \left[\forall p \in [1, +\infty],\ f \in \mathscr{L}^p\right]$$

(d) Montrer que (E, N) est un espace de Banach, où

$$\forall f \in E,\ N(f) \overset{\text{Def}}{=} \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$$

(e) Montrer que E est dense dans $\mathscr{L}^p$ ($p \in [1, +\infty[$) pour $\| \ \|_p$.

(f) Montrer que E est dense dans $\mathscr{C}_c$ pour $\| \ \|_\infty$.

5.3.2 Applications aux EDP

Exemple 5.9 – L'équation de la « chaleur »

Comme la transformée de Fourier transforme la dérivation en multiplication, elle va nous être utile pour résoudre des équations différentielles. Nous allons ici nous limiter à un exemple historique, l'équation dite de la chaleur.
On étudie la diffusion thermique dans un tuyau de longueur infinie, ayant une situation initiale déterminée par une fonction u_0 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que nous supposerons continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. L'équation sus-nommée vérifiée par la fonction

u en fonction du temps est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

où t désigne le temps et x la position sur l'axe. La condition initiale est donc $u(0,x) = u_0$.

1. *Analyse* Si on suppose que tous les calculs suivants sont licites, on peut faire une transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x ($\widehat{u}$ dépend donc de deux variables t et ω). On obtient

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

soit (sous la réserve d'une justification ultérieure)

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,+\infty[,\ -\omega^2\, \widehat{u}(t,\omega) = \partial_1 \widehat{u}(t,\omega)$$

Ce qui nous donne immédiatement

$$\widehat{u}(t,\omega) = \widehat{u_0}(\omega)\, e^{-\omega^2\, t}$$

en tenant compte de la condition initiale à l'instant $t = 0$.
Si la formule d'inversion est applicable, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,+\infty[,\ u(t,x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u_0}(\omega)\, e^{-\omega^2\, t}\, e^{+i\,x\,\omega}\, \mathrm{d}\omega$$

Ce qui donne, si le théorème de Fubini s'applique

$$u(t,x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2\, t + i\,x\,\omega - i\,\omega\,\tau}\, \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}\tau$$

Le calul est fait à la session `Wxmaxima` A.7, page 393.

Finalement

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)\, \exp\left(-\frac{(x-\tau)^2}{4\,t}\right)\, \mathrm{d}\tau$$

2. *Synthèse.* Plutôt que de valider toutes les étapes faites dans l'analyse, il est plus simple de prendre la fonction u définie ci-dessus et de vérifier que
   (a) Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à x, pour $(t,x) \in]0,+\infty[\,\mathbb{R}$.
   (b) Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à t, pour $(t,x) \in]0,+\infty[\,\mathbb{R}$.
   (c) Elle vérifie l'équation différentielle

$$\forall (t,x) \in]0,+\infty[\,\mathbb{R},\ \partial^2_{2,2} u(t,x) = \partial_1 u(t,x)$$

   (d) Et, pour la condition initiale en $t = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{t \to 0^+} u(t,x) = u_0(x)$$

Exercice(s) 5.5

5.5.1 Faire la synthèse ci-dessus.

5.5.2 Résoudre l'équation différentielle à l'aide d'une transformée de Fourier

$$y'' + x\,y = e^{-x^2}$$

(On donnera la solution sous forme d'une intégrale).

5.5.3 Exprimer ce que donne la solution de l'équation de la chaleur lorsque

$$u_0(x) = e^{-x^2}$$

Regarder l'évolution de $u(t, \bullet)$ en fonction de t (utiliser un logiciel type `Wxmaxima` ou `Matlab`).

5.5.4 Résoudre l'équation de la chaleur lorsque

$$u_0(x) = 0 \text{ et } \forall t \in]0, +\infty[,\ u(t, 0) = \sin(t)$$

Chapitre 6

Applications aux probabilités

6.1 Variables aléatoires absolument continues

6.1.1 Généralités

Définition 6.1

Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et F_X sa fonction de répartition. Si F_X est continue, on dit que X est une `v.a.r.` *continue*.
Néanmoins, l'étude des `v.a.r.` continues nécessite des notions mathématiques plus complexes et on doit se restreindre aux `v.a.r.` absolument continues (ou à densité). Pour cela, on commence par des rappels d'intégration.

Définition 6.2

Une `v.a.r.` X est dite *absolument continue*, si il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, mesurable, f_X appelée *densité de* X telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette densité n'a aucune raison d'être unique.

Remarque importante 6.1

1. Si F_X est une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ alors X est absolument continue et une densité de X est donnée par la fonction dérivée de F_X (définie sauf, peut-être sur un ensemble dont l'intersection avec tout segment est fini).
2. Si X est une `v.a.r.` absolument continue et f_X est une densité de X alors f_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

3. Si X est une `v.a.r.` absolument continue et f_X est une densité de X, on peut changer f_X en un nombre fini de points (et même sur un ensemble négligeable), ce sera toujours une densité de X.

Définition 6.3 – Espérance d'une `v.a.r.` absolument continue

Soit X une `v.a.r.` absolument continue et f_X une densité de X

— on dit que X *admet une espérance* lorsque $x \longmapsto |x|\, f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;

— on appelle alors *espérance de X* ou *valeur moyenne de X* la valeur

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x$$

Théorème 6.1 – Formule de transfert

Soit X une `v.a.r.` absolument continue, f_X une densité de X et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable

1. *$\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si $x \longmapsto \varphi(x)\, f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
2. *et, dans ce cas*

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x$$

Démonstration

Admis.

Rappel 6.1

Soit X une `v.a.r.` et $p \in \mathbb{N}^*$

— on dit que X *admet un moment d'ordre p* lorsque X^p admet une espérance ;

— on appelle alors *moment d'ordre p de X*, la valeur

$$m_p(X) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\left(X^p\right)$$

Remarque 6.2

1. L'espérance est le moment d'ordre 1.
2. On utilise généralement la formule de transfert pour montrer que X admet un moment d'ordre k et le déterminer.

Propriété 6.1 – Moment d'ordre 2

1. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si X^2 admet une espérance.
   Notamment

(a) Si X est finie alors X admet un moment d'ordre 2 et, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$$m_k(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \, \mathbb{P}(X = x_k)$$

(b) Si X est discrète alors, en notant $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in I}$

$$[X \text{ admet un moment d'ordre 2}] \iff \left[\left(x_k^2 \, \mathbb{P}(X = x_k)\right)_{k \in I} \text{ est sommable}\right]$$

et alors

$$m_k(X) = \sum_{k \in I} x_k^2 \, \mathbb{P}(X = x_k)$$

(c) Si X est absolument continue alors, en notant f_X une densité de X

$$[X \text{ admet un moment d'ordre 2}] \iff \left[x \longmapsto x^2 \, f_X(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\right]$$

et alors

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

2. Si X admet un moment d'ordre 2 alors X admet un moment d'ordre 1.

Définition 6.4

Si X admet un moment d'ordre 2, on définit *la variance de* X par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

C'est un *moment centré d'ordre* 2.

Remarque 6.3

La propriété 6.1, page 328 se généralise au moment d'ordre p quelconque. De plus

1. si X possède un moment d'ordre p, alors elle possède un moment d'ordre k pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$;
2. de manière équivalente, si X ne possède pas de moment d'ordre k avec $k \leqslant p$, alors elle ne possède pas de moment d'ordre p ;
3. si X admet un moment d'ordre p alors on définit son *moment centré d'ordre* p par $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^p\right)$.

Exercice(s) 6.1

6.1.1 Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([0,1],\mathbb{R})$, montrer que la fonction f est toujours mesurable (pour les tribus boréliennes au départ et à l'arrivée).

6.1.2 Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé, telle que F_X soit $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. On définit « une » densité f_X de X par $f_X(x) = F'_X(x)$ si F_X est dérivable en x, et 0 sinon.

(a) Montrer que f_X est intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$ ($a \in \mathbb{R}$).

(b) Comparer pour $a \in \mathbb{R}$,

$$F_X(a) \text{ et } \int_{]-\infty,a]} f_X \, \mathrm{d}\lambda$$

6.1.3 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition F. Trouver, en fonction de F, la fonction de répartition de la `v.a.r.` Y lorsque

(a) $Y = X^2$;

(b) $Y = \lfloor X \rfloor$;

(c) $Y = X - \lfloor X \rfloor$;

(d) $Y = 1/X$, lorsque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$;

(e) $Y = e^X$.

On suppose maintenant que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer les densités (si elles existent) de Y dans les cas précédents, en fonction de la densité F_X de X.

6.1.4 Pour les variables aléatoires suivantes (définies par leurs fonctions de répartition F_X ou leurs densités f_X).

Sont-elles bien définies ? Sont-elles intégrables ? Quels sont leurs espérances ?

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}\, x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2+2} & \text{sinon} \end{cases}$$

6.1.5 Soit X une `v.a.r.` de loi de probabilité

$$F_X \;:\; x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp(-x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $M > 0$, calculer l'espérance (si elle existe) de la `v.a.r.` définie par

$$Y = \min(X, M)$$

Puis, faire le lien avec l'exercice précédent.

6.1.6 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition (loi de Cauchy)

$$F_X \ : \ x \longmapsto \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Montrer qu'elle n'a pas d'espérance.

6.1.7 Soit X une `v.a.r.` de fonctions de répartition

$$F_X \ : \ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) En utilisant la formule de transfert, calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Calculer la densité de X^2.

(c) Refaire le calcul directement.

6.1.8 Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X.

(a) Montrer que

$$[X \text{ intégrable sur } \Omega] \iff \left[\int_{[0,+\infty[} \phi(t) \ \mathrm{d}t < +\infty\right]$$

où l'application ϕ est définie par

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \phi(t) = \mathbb{P}(|X| > t)$$

(b) En déduire, lorsque X est intégrable sur Ω, que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \Big(1 - F_X(t) + F_X(t^-)\Big) \ \mathrm{d}t$$

6.1.9 Calculer les variances (si elles existent) pour les `v.a.r.` données dans l'exercice 6.1.4, page 332.

6.1.10 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition

$$F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{1+2\,x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Calculer, si elles existent, les espérance et variance de X.

(b) Soit $M > 0$ donné, on pose $Y = \min(X, M)$. Calculer, si elles existent, les espérance et variance de Y.

6.1.2 Sommes, etc.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes (définies sur le même espace probabilisé) et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour déterminer la loi de $g(X, Y)$, on utilisera

1. la formule des probabilités totales lorsque (X, Y) est discrètes ;
2. la méthode de la fonction bornée lorsque (X, Y) est absolument continue.

Exemple 6.1 – Somme de binomiales indépendantes

Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Propriété 6.2 – Somme de deux v.a.r. absolument continues indépendantes

Soit X et Y deux v.a.r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, absolument continues, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y, alors $X+Y$ a pour densité

$$\boxed{x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t}$$

Cette fonction s'appelle *produit de convolution de f_X et f_Y* et se notera $f_X * f_Y$.

Démonstration

Puisque X et Y sont indépendantes alors (X,Y) admet une densité et on peut prendre

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

D'après le cas général (propriété 6.9, page 370), $X+Y$ admet pour densité la fonction définie par

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t, x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

où la dernière égalité provient d'un changement de variable.

Exemple 6.2 – Justification du modèle de la loi de Poisson

Soit un corps radioactif, qui émet à partir de tout instant t_0 une particule avec une loi de probabilité $\mathcal{E}(1/\tau)$, où $\tau > 0$. Pour $A > 0$, on veut compter le nombre N de particules émises par ce corps radioactif pendant la période de temps $[0, A]$.

- *Modélisation*
  - Le temps d'émission de la première particule suit une loi $\mathcal{E}(1/\tau)$.
  - Le temps d'émission de la deuxième particule suit une loi $\mathcal{E}(1/\tau)$, indépendante de la première...
  - Etc.

  Notons donc, T_n le temps d'émission de la n-ième particule à partir du temps d'émission de la $(n-1)$-ième. Les $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite de `v.a.r.` indépendantes, suivant toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/\tau$. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N \geqslant k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} T_j \leqslant A\right)$$

- *Calcul*

  Il nous faut donc calculer la loi de $S_k = \sum_{j=1}^{k} T_j$. Nous allons procéder par récurrence, en notant f_k une densité de S_k. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  puis (pour $x > 0$)

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_1(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \lambda^2\, e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}t = \lambda^2\, x\, e^{-\lambda\, x}$$

Puis (par récurrence)

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda^k\, x^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(N \geqslant k) = \int_0^A \frac{\lambda^k\, x^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda\, x}\, \mathrm{d}x$$

Donc

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N \geqslant k) - \mathbb{P}(N \geqslant k+1) = \cdots = \frac{(A\,\lambda)^k}{k!}\, e^{-A\,\lambda}$$

Donc

$$\boxed{N \sim \mathcal{P}(A\,\lambda)}$$

Exemple 6.3 – Passage en coordonnées polaires

On a une cible (représentée par un plan) sur laquelle on envoie des fléchettes, en essayant d'arriver au centre. On suppose que la position d'arrivée est, dans le repère orthonormé centré sur la cible, représenté par les coordonnées (X, Y) où X et Y sont deux **v.a.r.**. On cherche à évaluer les lois de

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ et } \Theta \in [0, 2\,\pi[\,,\ \text{l'argument}$$

- *Modélisation*

Il est naturel de supposer que X et Y sont deux `v.a.r.` indépendantes, de même loi, et, comme on vise le centre de la cible, on peut modéliser X et Y par des lois normales centrées. En choisissant l'unité convenablement, nous allons prendre des lois normales centrées réduites. Donc

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ indépendantes}$$

- *Calcul*

  On va utiliser la méthode de la fonction bornée. Comme X et Y sont supposées indépendantes, on a la densité de (X,Y) qui est le produit des densités de X et de Y, soit

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\,\pi}\,\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

  Soit $g : (x,y) \longmapsto (\rho,\theta)$, où l'on impose à ρ de rester positive et à θ de varier dans $[0, 2\,\pi[$. Et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, mesurable, bornée. On a alors, en passant en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \phi\circ g(x,y)\,\frac{1}{2\,\pi}\,\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\rho=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\,\pi} \phi(\rho,\theta)\,\frac{1}{2\,\pi}\,\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)\,|\rho|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\\ &= \int_{\rho=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\,\pi} \phi(\rho,\theta)\,f_{(R,\Theta)}(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho,\end{aligned}$$

  et (R,Θ) admet une densité, par exemple

$$f_{(R,\Theta)}(\rho,\theta) = \frac{\rho}{2\,\pi}\,\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)$$

Il est alors immédiat que [a]

$$\Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \text{ et } f_R(\rho) = \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)$$

a. On pourra remarquer que $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$.

Exercice(s) 6.2

6.2.1 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, quelle est la loi de $X + Y$?

6.2.2 Dans un magasin, pendant une journée, chaque client a une probabilité p de se faire voler son portefeuille.

(a) Soit N le nombre de client dans la journée, quelle loi peut-on supposer être celle de N ?

(b) Soit P le nombre de portefeuilles volés dans la journée. Calculer les lois de $(P, N - P)$, P et $N - P$.

(c) Les variables P et $N - P$ sont-elles indépendantes ?

6.2.3 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, positives, de fonctions de répartition F_X et F_Y, quelle est la fonction de répartition de $X\,Y$?

6.2.4 Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des `v.a.r.` indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $S = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Soit $s \in [\![0, n]\!]$, calculer la loi de $X_1/(S = s)$.

On note

$$\mathbb{E}(X_1/S) \;:\; s \longmapsto \mathbb{E}\left(X_1/(S = s)\right)$$

(b) Calculer la loi de $\mathbb{E}(X_1/S)$.

(c) Que peut-on dire de l'espérance de cette loi ?

6.2.5 Est-il possible de truquer deux dés (aux lancers indépendants) de telle sorte que la somme des dés suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

6.2.6 Une marque de bonbons place dans chaque paquet une pièce d'un puzzle de n morceaux distincts. Soit N le nombre de paquets de bonbons qu'un client doit acheter pour avoir un puzzle complet.

(a) Calculer $\mathbb{E}(N)$.

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(c) Proposer une méthode d'analyse pour redémontrer l'égalité précédente.

6.2.7 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, suivant des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$. On pose

$$U=\min(X,Y) \text{ et } V=|X-Y|$$

Les `v.a.r.` U et V sont-elles indépendantes ?

6.2.8 On a un circuit électronique composé de n composants ayant une durée de vie suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_k)$ indépendantes.

(a) On suppose le circuit monté en parallèle, quelle est la durée de vie du circuit ?

(b) On suppose le circuit monté en série, quelle est la durée de vie du circuit ?

6.2.9 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$Y_1=X_1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ Y_{n+1}=Y_n+\frac{1}{n+1}.X_{n+1}$$

(a) Reconnaître la loi de X_n/n.

(b) Calculer la densité de la loi de Y_2.

(c) Les variables aléatoires Y_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

(d) Montrer, par récurrence, qu'une densité de la loi de Y_n peut être

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\, e^{-x}\,(1-e^{-x})^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6.2.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, et $(X_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` définies sur un même espace probabilisé Ω, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0,n]$. Soit, de plus, une `v.a.r.` définie sur le même Ω, indépendante des X_q, et suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On pose

$$Y_n = \max(X_0,\ldots,X_n),\ Z_n = \min(X_0,\ldots,X_n) \text{ et } T_n = \min(X_0,\ldots,X_{N_n})$$

(a) Quelle est la loi de Y_n ? Son espérance ? Sa variance ?

(b) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

(c) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(t)$$

Que peut-on en déduire ? Interpréter.

(d) Calculer la fonction de répartition de T_n.

(e) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(t)$$

Que peut-on en déduire ? Interpréter.

6.2 Lois usuelles absolument continues

6.2.1 Loi uniforme sur un segment

Définition 6.5 – Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ *(*$a < b$*)* intervient pour modéliser une expérience aléatoire dont le résultat varie dans $[a, b]$ et pour laquelle on n'a pas d'information autre sur le résultat. Si X est une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ (ou de paramètres a et b), on écrit

$$X \sim \mathcal{U}(a, b), \text{ et on a } \forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b[\\ 1 & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$$

Remarque 6.4

C'est une loi absolument continue de densité (par exemple)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Remarque 6.5

Voir la session **`Python`** B.3, page 402, permettent de produire les figures 6.1, page 380 et 6.2, page 381.

Propriété 6.3

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur $[a,b]$. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration

1. On a immédiatement
$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \, \frac{1}{b-a} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\,(b-a)} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$
2. De même
$$\int_a^b x^2 \, \frac{1}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{a^2 + a\,b + b^2}{3}$$
donc
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + a\,b + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2\,a\,b + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Remarque 6.6

En `Wxmaxima`, on peut utiliser la fonction `random`. Voir le code `Wxmaxima` A.8, page 394.

Exercice(s) 6.3

6.3.1 Un bus passe toutes les 10 minutes à l'arrêt près de chez moi. Quel va être mon temps d'attente moyen ?

6.3.2 Soit U une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{U}(0,1)$, et soit $q \in]0,1[$. Quelle est la loi de
$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(q)} \right\rfloor \; ?$$

6.3.3 Soit φ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{d}t$$

Soit, de plus, U_0 une `v.a.r.` de loi $\mathcal{U}(0,1)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \varphi(U_n)$$

(a) Montrer que l'on définit ainsi des lois à densité.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \leqslant x)$$

(c) Conclusion ?

6.3.4 Soit U une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{U}(0,1)$. On pose

$$X = -\ln\left(\frac{2\,U}{1+U}\right)$$

(a) Calculer la fonction de répartition de X. X est-elle une `v.a.r.` absolument continue ?

(b) Existence et calcul de $\mathbb{E}(X)$.

6.3.5 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition F_X. On pose $Y = F_X(X)$.

(a) On suppose F_X continue, quelle est la loi de Y ? Que se passe-t-il si F_X n'est plus continue ?

(b) Lorsque F_X est strictement croissante, continue, que peut-on dire de la `v.a.r.` $Z = F_X^{-1}(U)$ où U suit une loi $\mathcal{U}(0,1)$?

(c) Dans le cas général, on pose

$$\forall x \in]0,1[,\ G(x) = \inf \left\{ u \in \mathbb{R},\ F_X(u) \geqslant x \right\}$$

Quelle est la loi de $G(U)$, lorsque U suit une loi $\mathcal{U}(0,1)$?

6.3.6 On a un feu de circulation qui fonctionne de la manière suivante. Il est vert pendant un temps $v > 0$ et rouge pendant un temps $r > 0$. Un automobiliste arrive à ce feu. On appelle T le temps d'attente au feu de cet automobiliste.

(a) Comment modéliser le temps d'arrivée U de l'automobiliste au feu ?

(b) Exprimer T en fonction de U.

(c) Calculer $\mathbb{P}(T = 0)$ et pour $t \neq 0$, $\mathbb{P}(T = t)$.

(d) Quelle est la loi de T ? Son espérance $\mathbb{E}(T)$?

6.2.2 Loi exponentielle

Définition 6.6 – Loi exponentielle

La loi exponentielle intervient pour modéliser une expérience aléatoire dont le résultat est un réel $\geqslant 0$ et qui ne tient pas compte du passé (on dit que la loi est *sans mémoire*). Si X est une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on écrit

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \text{et on a } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Remarque 6.7

C'est une loi absolument continue de densité (par exemple)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Remarque 6.8

Pourquoi cette loi est-elle sans mémoire ? Parce que l'on a

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \mathbb{P}(X > x + y / X > y) = \mathbb{P}(X > x)$$

Démonstration

En effet, si x et y sont > 0

$$\mathbb{P}(X > x + y / X > y) = \frac{\mathbb{P}\left((X > x + y) \cap (X > y)\right)}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{e^{-\lambda (x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x)$$

Remarque 6.9

Réciproquement, si X est une `v.a.r.` *continue*, qui vérifie la relation ci-dessus, alors c'est une loi exponentielle.

Démonstration

Soit la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

elle vérifie donc l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x + y) = f(x)\, f(y)$$

Elle est de plus continue, on a vu que cela caractérisait une exponentielle.

Remarque 6.10

Voir la session `Python` B.4, page 404, permettent de produire les figures 6.3, page 382 et 6.4, page 383.

Propriété 6.4

Soit X est une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration

1. La fonction $x \longmapsto |x|\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est, par exemple, un $o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$) et

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

Par une simple intégration par parties... (Voir le code `Wxmaxima` A.9, page 395.

2. De même, la fonction $x \longmapsto x^2\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et (voir le code `Wxmaxima` A.10, page 395)

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_0^{+\infty} x^2\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^{+\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice(s) 6.4

6.4.1 Un commerçant dispose d'un stock égal à s. La demande qu'il prévoit est une `v.a.r.` X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Il se pose la question de savoir combien acheter de quantité q pour augmenter son stock. Le prix d'achat est a, le prix de vente est $v > a$. Quelle est la commande qui optimisera son bénéfice ?

6.4.2 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Quelles sont les lois de

(a) $Y = X^2$?

(b) Z définie par

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } 0 \leqslant X \leqslant 1 \\ 2\,X & \text{sinon ?} \end{cases}$$

6.4.3 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, suivant des lois exponentielles de paramètre λ.

(a) Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

(b) Montrer que

$$\min(X, Y) \text{ et } \mathbb{1}_{X \leqslant Y} \text{ sont indépendantes}$$

(c) Interpréter.

(d) Le résultat est-il encore valable si les `v.a.r.` suivent des lois exponentielles de paramètres différents ?

6.2.3 Loi normale

Définition 6.7 – Loi normale

La loi normale intervient pour modéliser une expérience aléatoire dans de nombreux cas (notamment, certains phénomènes naturels). Si X est une `v.a.r.` suivant une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (où $\sigma > 0$), on écrit

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), \text{ et on a } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t$$

On a souvent affaire au cas $m = 0$, $\sigma = 1$. On dit alors que la loi est *centrée, réduite*. On la note, bien sûr

$$\mathcal{N}(0, 1)$$

Démonstration de la bonne définition de la loi normale

C'est bien une loi de probabilité car

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right)\,\mathrm{d}t \underset{u=(t-m)/\sigma}{=} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\,\mathrm{d}u = 1$$

on reconnaît une intégrale de Gauss. On peut vérifier le calcul avec `Wxmaxima` (voir le code A.11, page 396).

Remarque 6.11

C'est clairement une loi absolument continue de densité (par exemple)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

Remarque 6.12

On se sert souvent des lois normales pour modéliser les bruits, etc.

Remarque 6.13

Voir la session `Python` B.5, page 406, permettent de produire les figures 6.5, page 384 et 6.6, page 385.

Propriété 6.5

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi normale de paramètres m et σ^2. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2$$

Démonstration

1. On a, par définition

$$\mathbb{E}\left(X-m\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)\right) \mathrm{d}x}_{=0}$$

or

$$\mathbb{E}\left(X-m\right) = 0 = \mathbb{E}(X) - m$$

2. De même, par une intégration par parties (IPP), on a

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x}_{=\sigma^2}$$

Propriété 6.6 – Comportement asymptotique d'une loi binomiale

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres (n,p) avec $p\in]0,1[$ et $Y_n=\dfrac{X-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}$ alors Y_n tend vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ dans le sens suivant

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y_n\leqslant t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 6.14

voir la session `Python` B.6, page 408 qui permet d'obtenir le figure 6.7, page 386.

Exercice(s) 6.5

6.5.1 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Calculer la loi de $Y=e^X$.

6.5.2 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour $x>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geqslant x) &\leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\,\pi}}\\ \mathbb{P}(|X|\geqslant x) &\leqslant 2\,\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\,\pi}}\end{aligned}$$

6.5.3 (Exercice avec `R`). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi. On suppose qu'elles ont une espérance $m = \mathbb{E}(X_0)$ et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_0)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{X_0 + \cdots + X_{n-1}}{n} \text{ et } T_n = \sqrt{n}\,(S_n - m)$$

On pourra taper `help(distributions)` dans `R`.

(a) On prend des lois exponentielles de paramètre λ. Simuler le comportement, pour un λ pris quelconque, de S_n et de T_n, pour n « grand ». Qu'observe-t-on ?

(b) Reprendre l'exercice avec des lois uniformes $\mathcal{U}(0,1)$.

(c) Reprendre l'exercice avec des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour une valeur de λ pris quelconque.

(d) On prend maintenant une loi de Cauchy, dont la densité est

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Que peut-on observer sur le comportement de S_n ?

(e) On prend maintenant une loi uniforme U sur $]0,1[$, et on pose $X_0 = 1/\sqrt{U}$. Que peut-on observer sur le comportement de S_n et de T_n ?

6.2.4 Loi du χ^2

Définition 6.8 – Loi du χ^2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des lois normales centrées, réduites, indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, on appelle « loi du χ^2 à n degrés de liberté », la loi de la `v.a.r.` définie par

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

C'est une variable absolument continue, sa densité peut être

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{m_n}\, t^{n/2-1}\, e^{-t/2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où m_n est un réel strictement positif, tel que

$$m_n = \int_0^{+\infty} t^{n/2-1}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t$$

On note

$$X \sim \chi_n^2$$

Cette loi intervient beaucoup en statistiques.

Démonstration de la bonne définition de la loi du χ^2

C'est bien une loi de probabilité, par définition de m_n.

Démonstration de la densité de la loi du χ^2

La densité se calcule par récurrence sur n. Notons f_n la densité de la loi du χ^2 à n degrés de liberté, et F_n sa fonction de répartition.

▸ Pour $t \geqslant 0$

$$F_1(t) = \mathbb{P}\left(Y_1^2 \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(Y_1 \in \left[-\sqrt{t}, \sqrt{t}\right]\right) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u$$

D'où, en dérivant, pour $t > 0$

$$\boxed{f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

On en déduit aussi que $m_1 = \sqrt{2\,\pi}$. [a]

▸ Il est facile alors de trouver les autres densités, si $t > 0$

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t f_n(u)\, f_1(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{1}{m_1\, m_n}\, u^{n/2-1}\, e^{-u/2}\, \frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-(t-u)/2}\,\mathrm{d}u$$

Donc

$$f_{n+1}(t) = \frac{e^{-t/2}}{m_1\, m_n} \int_0^t \frac{u^{n/2-1}}{\sqrt{t-u}}\,\mathrm{d}u \underset{u=t\,v}{=} \frac{e^{-t/2}}{m_1\, m_n}\, t^{n/2-1+1-1/2} \int_0^1 \frac{v^{n/2-1}}{\sqrt{1-v}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{m_{n+1}}\, t^{(n+1)/2-1}\, e^{-t/2}$$

---

a. On peut aussi faire le calcul avec la méthode de la fonction bornée.

Remarque 6.15

On peut même calculer les m_n. Car

— On a vu que $m_1 = \sqrt{2\,\pi}$.

— Il est évident que

$$m_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = 2$$

— Si $n \geqslant 3$, alors

$$m_n = \int_0^{+\infty} t^{n/2-1}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\text{IPP}\\ u' = e^{-t/2}\\ v = t^{n/2-1}}}{=} (n-2)\int_0^{+\infty} t^{(n-2)/2-1}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = (n-2)\,m_{n-2}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, par récurrence les formules suivantes (voir le code `Wxmaxima` A.12, page 396)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ m_{2\,p} = 2^p\,(p-1)! \text{ et } m_{2\,p+1} = \sqrt{2\,\pi}\,\frac{(2\,p-1)!}{2^{p-1}\,(p-1)!}$$

Propriété 6.7

Et on a, si $X \sim \chi^2_n$

$$\mathbb{E}(X) = n \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 2\,n$$

Démonstration

— On a immédiatement

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_k\right) = n$$

— Pour la variance de X, on a

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_k^2\right) = n\ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_1^2\right)$$

Or

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_1^2\right) = \mathbb{E}\left(X_1^4\right) - \underbrace{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)^2}_{=1}$$

Et

$$\mathbb{E}\left(X_1^4\right) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

qui se calcule avec une intégration par parties, et vaut 3. Voir le code `Wxmaxima` A.13, page 396.

Exercice(s) 6.6

6.6.1 Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des `v.a.r.` indépendantes ($n \geqslant 2$), définies sur un même espace probabilisé, et suivant toutes une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},\ S_n = \sqrt{\frac{(X_1 - m)^2 + \cdots + (X_n - m)^2}{n}} \text{ et } T_n = \sqrt{\frac{(X_1 - \overline{X}_n)^2 + \cdots + (X_n - \overline{X}_n)^2}{n-1}}$$

(a) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right), \ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\overline{X}_n\right)$$

(b) Calculer de même

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right) \ \text{ et } \ \mathbb{E}\left(T_n^2\right)$$

(c) Trouver les lois de probabilités que suivent

$$\overline{X}_n, \ S_n^2 \text{ et } T_n^2$$

6.3 Compléments sur les variables aléatoires

Définition 6.9 – et propriété

— Un *vecteur aléatoire réel* sur Ω est une fonction mesurable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\forall B \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^p),\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$$

— Ses applications composantes $X = (X_1, \ldots, X_p)$ sont alors des variables aléatoires réelles.

— La loi de X s'appelle la *loi conjointe* des variables $(X_1, \ldots, X_p)$.

— Les lois des variables X_1, …, X_p s'appellent les *lois marginales*.

Remarque 6.16

Si $X_1, \ldots, X_p$ sont des variables aléatoires alors $X = (X_1, \ldots, X_p)$ est un vecteur aléatoire.

Définition 6.10

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \ldots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées.
La *fonction de répartition* de X est définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$F_X : (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \mathbb{P}\left((X_1 \leqslant x_1) \cap (X_2 \leqslant x_2) \cap \cdots \cap (X_p \leqslant x_p)\right)$$

Remarque 6.17 – Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe (méthode générale)

Pour déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe, on peut utiliser la fonction de répartition soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et F_X sa fonction de répartition. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$

— $(X_1 \leqslant x_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant y_n)$;

— la suite $\big((X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion) ;

— par continuité croissante $\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant y_n)$.

— Par caractérisation séquentielle on retrouve la fonction de répartition de X_1

$$F_{X_1}(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1) = \lim_{x_2\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2) = \lim_{x_2\to+\infty} F_X(x_1, x_2)$$

Exemple 6.4

Soit $\Omega = [0,1]^2$, on choisit (de manière uniforme) un point sur le carré de coordonnées données par les `v.a.r.` (X_1, X_2).

1. *Quelle est la loi de* (X_1, X_2) *?* Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la valeur de la fonction de répartition $F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$ est

donnée par l'aire de l'intersection de Ω avec $]-\infty, x_1]\times]-\infty, x_2]$. C'est donc

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leqslant 0 \text{ ou } x_2 \leqslant 0 \\ x_1\,x_2 & \text{si } x_1 \in]0,1] \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ x_1 & \text{si } x_2 > 1 \text{ et } x_1 \in]0,1] \\ x_2 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *A-t-elle une densité ?* On trouve facilement

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1,x_2) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Quelle est la loi marginale de X_1 ?* On obtient immédiatement

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leqslant 0 \\ x_1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \end{cases}$$

on a donc clairement (ce qui était assez évident dès le départ)

$$X_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Exemple 6.5

Reprenons le même problème lorsque Ω est

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [0,1],\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\right\}$$

(c'est donc un triangle rectangle).

1. *Quelle est la loi de* (X_1, X_2) *?* On obtient, par le même raisonnement sur les aires que

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leqslant 0 \text{ ou } x_2 \leqslant 0 \\ 2\,x_1\,x_2 & \text{si } x_1 \in]0,1],\ x_2 \in]0,1] \text{ et } x_1+x_2 \leqslant 1 \\ 2\,x_1\,x_2 - (x_1+x_2-1)^2 & \text{si } x_1 \in]0,1],\ x_2 \in]0,1] \text{ et } x_1+x_2 > 1 \\ 2\,x_2 - x_2^2 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ 2\,x_1 - x_1^2 & \text{si } x_2 > 1 \text{ et } x_1 \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 > 1 \end{cases}$$

2. *A-t-elle une densité ?* On trouve facilement

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(X_1,X_2)}(x_1 x_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x_1,x_2) \in \Omega \text{ (c'est l'inverse de l'aire de } \Omega) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Quelle est la loi marginale de X_1 ?* On obtient immédiatement

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leqslant 0 \\ 2\,x_1 - x_1^2 & \text{si } x_1 \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \end{cases}$$

6.3.0.1 Cas particulier. Vecteur aléatoire discret

Définition 6.11

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \ldots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées.
Si X_1, ..., X_p sont des variables aléatoires discrètes, on dit que X est un *vecteur aléatoire discret.*

Remarque 6.18

1. Si X est discret alors la famille $\left(\mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_p = x_{i_p})\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p}$ est sommable, positive et de somme 1.
2. Dans la pratique, on commence par écrire un tableau de loi conjointe.

Exemple 6.6

On lance plusieurs fois une pièce qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur « pile », on note X la variable aléatoire égale au rang du premier tirage donnant « pile » et Y celui du second tirage. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Remarque 6.19 – Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe (cas discret)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales

$$\sum P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

est sommable et

$$P(X = x_i) = \sum_{j\in J} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{j\in J} P(X = x_i, Y = y_j)$$

6.3.0.2 Cas particulier. Vecteur aléatoire absolument continu

Exemple 6.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{e^{-|x\,y^{1/3}|}}{1+y^2}$$

▷ Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto f(x,y) = \dfrac{e^{-|x\,y^{1/3}|}}{1+y^2} = C(y)\,e^{-\lambda(y)\,|x|}$ (avec $C(y)$ et $\lambda(y) = |y|^{1/3} > 0$ indépendant de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$, paire et, par les intégrales de références

$$\forall \lambda > 0, \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,x}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

▷ On a alors, pour tout $y \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y^{1/3}|\,x}}{1+y^2}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y^{1/3}|\,x}}{1+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{|y|^{1/3}\,(1+y^2)}$$

▷ La fonction $\varphi\,:\,y \longmapsto \dfrac{2}{|y|^{1/3}\,(1+y^2)}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a $|\varphi(y)| \underset{y\to 0^+}{\sim} \dfrac{2}{y^{1/3}}$ et, par les intégrales de Riemann, $y \longmapsto \dfrac{2}{y^{1/3}}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc φ est intégrable sur $]0,1]$.

De manière similaire, $|\varphi(y)| \underset{y\to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{y^{7/3}}$ et, par les intégrales de Riemann, $y \longmapsto \dfrac{2}{y^{7/3}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et, par parité (φ est paire), φ est intégrable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.
Par le Théorème de Fubini-Tonelli, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante 6.20

1. Si $C \subset \mathbb{R}^p$ est mesurable et bornée alors $\mathbb{1}_C$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.
2. Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et bornée alors $f\,g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.
3. En conséquence, si $C \subset \mathbb{R}^p$ est mesurable et bornée et si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $f\,\mathbb{1}_C$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple 6.8

On reprend l'exemple précédent et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \frac{e^{-|x\,y^{1/3}|}}{1 + y^2}$$

On a montré que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors, par le Théorème de Fubini-Lebesgue

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(1 + y^2)\,|y|^{1/3}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{4}{(1 + y^2)\,|y|^{1/3}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{6}{1 + t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{3}\,\pi}{3}
\end{aligned}$$

après avoir réalisé le changement de variable $t = y^{2/3} = \varphi(y)$ où φ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Définition 6.12

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \ldots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées. On dit que X est *absolument continue* ou *admet une densité* lorsqu'il existe $f_X : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable vérifiant

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ F_X(x_1, \ldots, x_p) = \iiint\limits_{\prod_{k=1}^{p}]-\infty, x_k]} f_X(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}$$

Remarque 6.21

1. On note aussi
$$(X_1 \leqslant x_1) \cap (X_2 \leqslant x_2) \cap \cdots \cap (X_p \leqslant x_p) = (X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_p \leqslant x_p)$$
2. Si X admet une densité alors f_X est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, positive et d'intégrale 1.

Remarque 6.22 – Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe (cas absolument continu)

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire absolument continu et

$$(x, y) \longmapsto f_{(X,Y)}(x, y) \text{ une densité de } (X, Y)$$

Par le théorème de fubini

- $x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\, \mathrm{d}y$ est défini (presque partout) ;
- f_X, la fonction prolongée par 0 ailleurs, est une densité de X.

Remarque importante 6.23

Si (X_1, X_2) a une densité, on montre que X_1 et X_2 aussi mais si X_1 et X_2 ont une densité, il se peut que $X = (X_1, X_2)$ n'en ait pas.

Remarque 6.24

De manière plus générale, la méthode de la fonction bornée permet de montrer qu'une variable aléatoire (ou qu'un vecteur aléatoire) est absolument continue et d'en déterminer une densité.

Propriété 6.8 – Méthode de la fonction bornée

Si

1. X est un vecteur aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ qui admet une densité ;
2. $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est mesurable et $Y = g(X)$;
3. $\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que

$$\forall \phi \text{ mesurable et bornée }, \iiint\limits_{\mathbb{R}^q} \phi(\underline{y})\, \psi(\underline{y})\, \mathrm{d}\underline{y} = \iint\limits_{\mathbb{R}^p} \phi \circ g(\underline{x})\, f_X(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}\,;$$

alors

$$Y \text{ admet une densité et on peut prendre } f_Y = \psi$$

Propriété 6.9 – Somme de deux `v.a.r.` absolument continues

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire absolument continue de densité $f_{(X,Y)}$, alors $X + Y$ a pour densité

$$\boxed{x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t, x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x-t, t)\, \mathrm{d}t}$$

Démonstration

La fonction $g : (X,Y) \longmapsto X+Y$ est mesurable et, pour toute fonction ϕ mesurable et bornée

1. comme $\left|\phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\right| \leqslant M\, f_{(X,Y)}(x,y)$ et $x \longmapsto f_{(X,Y)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour presque tout y) alors $x \longmapsto \phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour presque tout y) et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\right| \mathrm{d}x \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x$$
2. De même, la fonction $y \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\right| \mathrm{d}x$ (prolongée par 0 quand l'intégrale est divergente) est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le Théorème de Fubini-Tonelli, $(x,y) \longmapsto \phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et, par le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \phi \circ g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\, f_{(X,Y)}(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}y \text{ en posant } u = x+y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u-y,y)\,\mathrm{d}y}_{=\psi(u)}\right) \mathrm{d}u \text{ par Fubini} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\,\psi(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Par la méthode de la fonction bornée $X + Y$ admet une densité, par exemple

$$f_{X+Y}(u) = \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u - y, y)\,\mathrm{d}y$$

et on retrouve l'autre formulation par changement de variable.

Exercice(s) 6.7

6.7.1 Démontrer les résultats des exemples 6.4, page 361 et 6.5, page 363.

6.7.2 En reprenant l'exemple 6.6, page 365.

(a) La loi marginale de Y.

(b) Les lois de $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$

(c) Les lois de $X + Y$ et $Y - X$.

6.7.3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et un couple de `v.a.r.` (X, Y) de densité conjointe

$$f_{(X,Y)} \;:\; (x, y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } y \leqslant 0 \\ \lambda^2 \exp\left(-\lambda\,(x + y)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la loi de

$$(X + Y, X - Y)\ ?$$

6.4 Fonctions caractéristiques

Définition 6.13

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une `v.a.r.` définie sur Ω, on appelle *fonction caractéristique de X* la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\,t\,X}\right)$$

Remarque 6.25

Si X a une densité f_X, alors

$$\phi_X(t) = \widehat{f_X}(-t)$$

Exemple 6.9

1. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$\phi_X(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{i\,t} - 1\right)\right)$$
2. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors
$$\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$$

3. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$\phi_X(t) = \exp\left(i\,m\,t - \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right)$$

Propriété 6.10

ϕ_X existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Car

$$\mathbb{E}\left(\left|e^{i\,t\,X}\right|\right) = \mathbb{E}(1) = 1$$

Propriété 6.11

ϕ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\left|\phi_X(x) - \phi_X(y)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|e^{i\,x\,X} - e^{i\,y\,X}\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|e^{i\,(x-y)\,X} - 1\right|\right)$$

Il reste à appliquer le TCD, pour obtenir que

$$\left|\phi_X(x) - \phi_X(y)\right| \xrightarrow[x-y\to 0]{} 0$$

Propriété 6.12

Si X et Y sont deux `v.a.r.` indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, alors

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \, \phi_Y$$

Démonstration

Les `v.a.r.` $e^{i\,t\,X}$ et $e^{i\,t\,Y}$ sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{i\,t\,(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\,t\,X}\, e^{i\,t\,Y}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\,t\,X}\right)\, \mathbb{E}\left(e^{i\,t\,Y}\right)$$

Théorème 6.2 – Formule d'inversion

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace mesuré de fonction caractéristique ϕ_X, alors la probabilité image par X peut-être obtenue par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\; a < b,\; \frac{1}{2\,\pi}\left(\int_{-T}^{+T} \frac{e^{-i\,t\,a} - e^{-i\,t\,b}}{i\,t}\, \phi_X(t)\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}_X\left(\left]a,b\right[\right) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_X\left(\{a,b\}\right)$$

Démonstration

Laissé en exercice. Essayer d'adapter la démonstration du théorème d'inversion de Fourier...

Remarque 6.26

Il ressort de ce théorème que la fonction caractéristique de X caractérise la loi de X (d'où son nom) !

Remarque 6.27

Si X est une `v.a.r.` absolument continue de fonction caractéristique dans $\mathscr{L}^1$, alors on retrouve le théorème d'inversion de Fourier à partir de la formule précédente, soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t)\, e^{-i\,x\,t}\, \mathrm{d}t\right)$$

On peut en déduire une démonstration du *Théorème Central Limite* ou TCL, qui a une importance très grande en probabilités et statistiques

Théorème 6.3 – Théorème Central Limite – TCL

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ des ***v.a.r.*** indépendantes, de même loi *et de carré intégrable (dans $\mathscr{L}^2$), si $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$, supposée dans $]0, +\infty[$, si ϕ_0 désigne la fonction caractéristique d'une loi* *normale, centrée, réduite* ($\mathcal{N}(0,1)$)*, alors*

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}.\left((X_1 + \cdots + X_n) - n\,m\right) \text{ vérifie } \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_0(t)}$$

Démonstration

1. Quitte à remplacer les X_k par $X_k - m$, on peut supposer $m = 0$.
2. En ce cas, on a

$$\phi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i\,t\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

   Par ailleurs,

$$\phi_{X_1}(t) = 1 - \sigma^2\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

   d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Exercice(s) 6.8

6.8.1 Calculer la fonction caractéristique des lois suivantes

(a) Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(b) Loi de Bernoulli de paramètre p.

(c) Loi binomiale de paramètres (n, p).

(d) Loi uniforme de paramètre (a, b).

(e) Loi de Cauchy, c'est-à-dire de densité

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

6.8.2 Soit X une `v.a.r.` telle que ϕ_X soit une fonction réelle, montrer que X et $-X$ ont même loi.

6.8.3 Justifier le développement limité

$$\phi_{X_1}(t) = 1 - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

dans la démonstration du TCL.

6.8.4 Soit X_1, ..., X_n des `v.a.r.` indépendantes ayant pour fonction caractéristique commune la fonction

$$\phi(t) = \exp\left(-|t|^\alpha\right), \quad (\alpha \in]0, 1])$$

(a) Montrer que ϕ est bien la fonction caractéristique d'une loi.

(b) Montrer que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/\alpha}} \text{ a même loi que } X_1$$

6.8.5 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de `v.a.r.` indépendantes, de même loi, telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) \in]0, +\infty[$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{2\,(\sqrt{S_n}-\sqrt{n})}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_0(t)$$

Figure 6.1 – Fonction de répartition et densité d'une loi uniforme continue

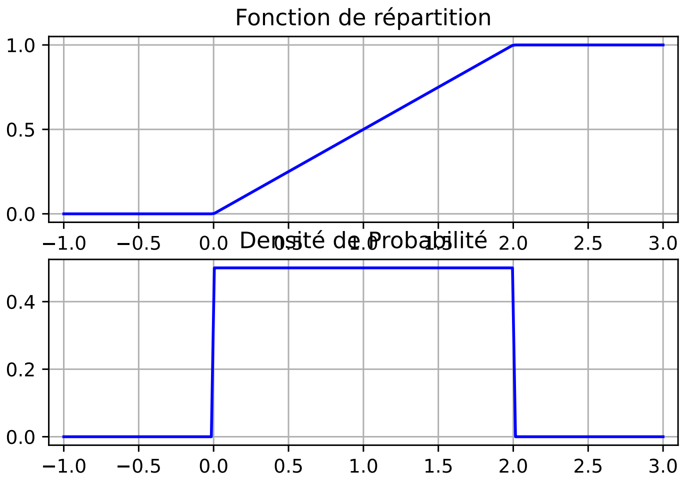


Figure 6.2 – Comparaison simulation/théorie pour une loi uniforme

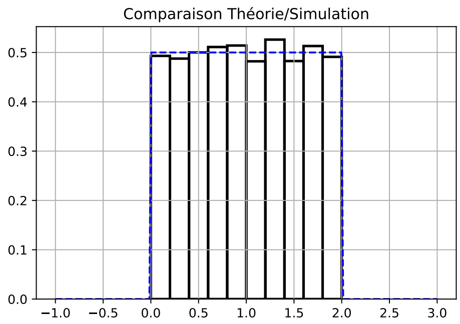


Figure 6.3 – Fonction de répartition et densité d'une loi exponentielle

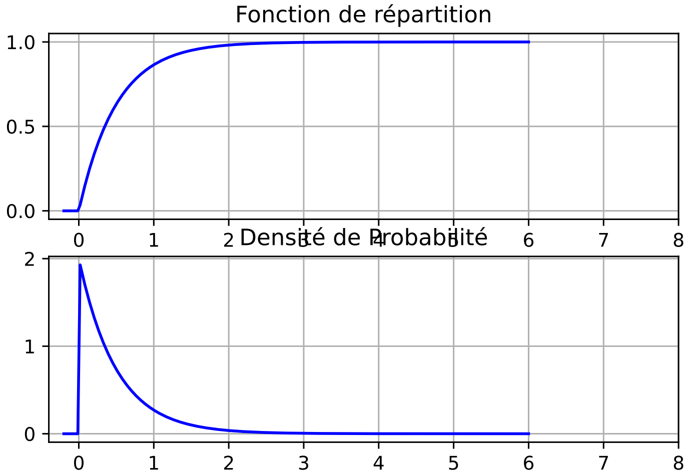


Figure 6.4 – Comparaison simulation/théorie pour une loi exponentielle

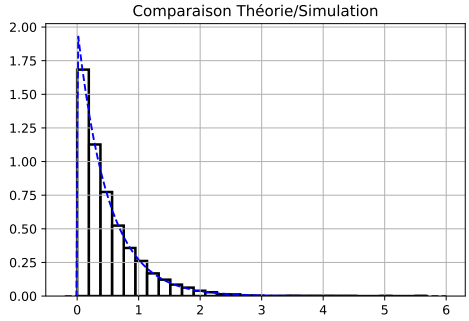


Figure 6.5 – Fonction de répartition et densité d'une loi normale

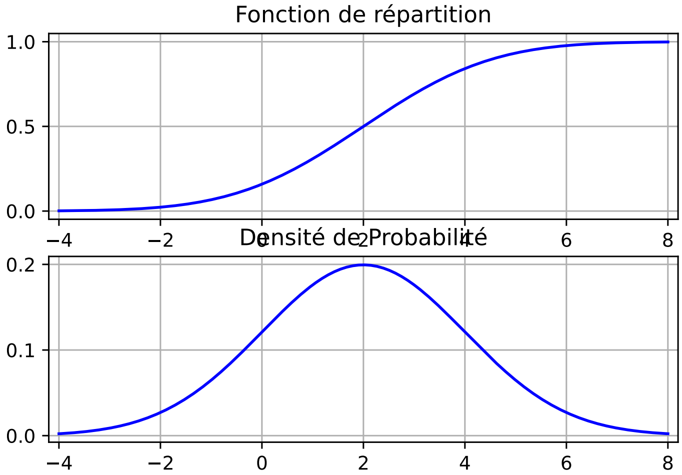


Figure 6.6 – Loi normale

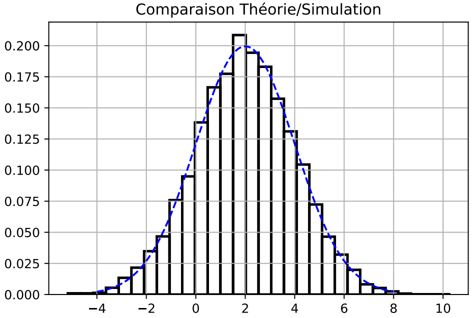
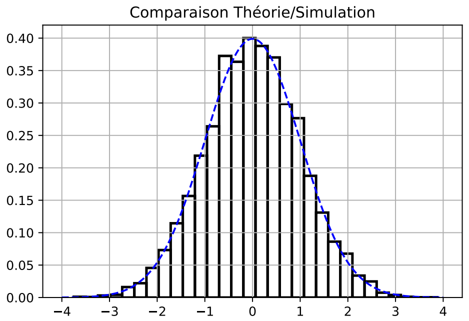


Figure 6.7 – Comportement asymptotique d'une binomiale vers la loi normale



Annexe A

Codes Wxmaxima

A.1 Compléments de topologie

A.1.1 Applications aux espaces préhilbertiens

Session Wxmaxima A.1 – Somme de série, utilisation de Parseval

```
(%i1) declare(n,integer);
(%o1) done
```

```
(%i2) integrate(exp(-%i*n*x)*x^2,x,-%pi,%pi)/(2*%pi);
```

(%o2) $$\frac{\frac{\left(i\,\pi^2\,n^2+2\,\pi\,n-2\,i\right)\,e^{-i\,\pi\,n}}{n^3}-\frac{\left(i\,\pi^2\,n^2-2\,\pi\,n-2\,i\right)\,e^{i\,\pi\,n}}{n^3}}{2\,\pi}$$

```
(%i3) rectform(%);
```

(%o3) $$\frac{2\,(-1)^n}{n^2}$$

```
(%i4) integrate(x^2,x,-%pi,%pi)/(2*%pi);
```

(%o4) $$\frac{\pi^2}{3}$$

```
(%i5) integrate(x^4,x,-%pi,%pi)/(2*%pi);
```

(%o5) $$\frac{\pi^4}{5}$$

```
(%i6) (%o5-%o4^2)/8;
```

(%o6) $$\frac{\pi^4}{90}$$

```
(%i7) sum(1/n^4,n,1,inf);
```

(%o7) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

```
(%i8) %,simpsum;
```

(%o8) $\frac{\pi^4}{90}$

```
(%i9) zeta(4);
```

(%o9) $\frac{\pi^4}{90}$

A.2 Intégrabilité

A.2.1 Convergence monotone

Session `Wxmaxima` A.2 – Croissance de f_n

```
(%i1) diff(a/sqrt((1+x^2)*(x^2+a^2)),a);
```

(%o1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+1}\,\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

```
(%i2) ratsimp(%);
```

(%o2) $$\frac{x^2\sqrt{x^2+1}\,\sqrt{x^2+a^2}}{x^6+\left(2\,a^2+1\right)\,x^4+\left(a^4+2\,a^2\right)\,x^2+a^4}$$

A.2.2 Théorèmes de Fubini

Session `Wxmaxima` A.3 – Non intégrabilité de f

```
(%i1) f(x,y) := (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2;
```

(%o1) $$\mathrm{f}\left(x,y\right):=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

```
(%i2) integrate(f(x,y),x,0,1);
```

(%o2) $$-\frac{1}{y^2+1}$$

```
(%i3) integrate(%,y,0,1);
```

(%o3) $$-\frac{\pi}{4}$$

```
(%i4) integrate(f(x,y),y,0,1);
```

(%o4) $$\frac{1}{x^2+1}$$

```
(%i5) integrate(%,x,0,1);
```

(%o5) $\dfrac{\pi}{4}$

Le théorème d'interversion de Fubini-Lebesgue ne s'applique donc pas ! On peut vérifier la non-intégrabilité de la fonction f.

Session Wxmaxima A.4 – Non intégrabilité (suite)

```
(%i6) assume(x>0,x<1);
```

(%o6) $[x > 0, x < 1]$

```
(%i7) integrate(f(x,y),y,0,x)+
      integrate(-f(x,y),y,x,1);
```

(%o7) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2+1}$

La fonction obtenue n'est clairement pas intégrable sur $]0,1]$, car elle est équivalente à $1/x$ au voisinage de 0^+.

A.3 Analyse de Fourier et applications

A.3.1 Transformée de Fourier

A.3.1.1 Théorie

Session `Wxmaxima` A.5 – Transformée de Fourier

```
(%i1) f(x) := 1/(sigma*sqrt(2*%pi))*exp(-(x-m)^2/(2*sigma^2));
```

(%o1) $$\mathrm{f}\left(x\right) := \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\exp\left(\frac{-\left(x-m\right)^{2}}{2\,\sigma^{2}}\right)$$

```
(%i2) assume(sigma>0)$
```

```
(%i3) integrate(f(t)*exp(-%i*omega*t),t,minf,inf);
```

(%o3) $$\exp\left(\frac{-\omega^{2}\,\sigma^{2}-2\,i\,m\,\omega}{2}\right)$$

Session `Wxmaxima` A.6 – Autre transformée de Fourier

```
(%i1) f(t) := exp(-abs(t));
```

(%o1) $$\mathrm{f}\left(t\right) := \exp\left(-\left|t\right|\right)$$

```
(%i2) integrate(f(t)*exp(-%i*omega*t),t,0,inf)+
      integrate(f(t)*exp(-%i*omega*t),t,minf,0);
```

Is ω positive, negative, or zero ? p ;

(%o2) $$\frac{2}{\omega^2+1}$$

```
(%i3) integrate(f(t)*exp(-%i*omega*t),t,0,inf)+
      integrate(f(t)*exp(-%i*omega*t),t,minf,0);
```

Is ω positive, negative, or zero ? n ;

(%o3) $$\frac{2}{\omega^2+1}$$

A.3.1.2 Applications aux EDP

Session Wxmaxima A.7 – Petit calcul intermédiaire

```
(%i1) assume(t>0)$

(%i2) integrate(exp(-omega^2*t+%i*omega*(x-tau)),omega,minf,inf);
```

(%o2) $$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{-x^2+2\,\tau\,x-\tau^2}{4\,t}}}{\sqrt{t}}$$

A.4 Applications aux probabilités

A.4.1 Lois usuelles absolument continues

A.4.1.1 Loi uniforme

Session `Wxmaxima` A.8 – Loi uniforme

```
(%i1) makelist(random(1.0),k,1,20);
```

(%o1) [0.9138095996129, 0.19518461779779, 0.48239052485162, 0.35544005715929, 0.25223887668538, 0.41556272272148, 0.61257388925382, 0.84181265533592, 0.50558944464381, 0.67846199501851, 0.036393315899922, 0.62529751834181, 0.99373145786948, 0.04158924615445, 0.6326253893666, 0.59315218151698, 0.65465776611451, 0.47071067403366, 0.051923553664518, 0.002327880375314]

```
(%i2) a : 2$
      b : 4$
      makelist(a+(b-a)*random(1.0),k,1,20);
```

(%o4) [2.631215392571823, 3.720459052489623, 2.084130953081714, 3.697339885698787, 2.465955121488873, 3.382228389244319, 3.223111616387312, 3.742283615545531, 2.303489027934825, 3.272335379002933, 3.317065631954353, 3.181243957200707, 2.936893991323437, 3.54169472917822, 3.40910548616748, 3.031545302310609, 3.497207059533352, 2.640102991293867, 2.905412579006282, 2.256424015895997]

A.4.1.2 Loi exponentielle

Session Wxmaxima A.9 – Espérance d'une loi exponentielle

```
(%i1) integrate(x*a*exp(-a*x),x,0,inf);
```

Is a positive, negative, or zero ?p ;

(%o1) $\frac{1}{a}$

Session Wxmaxima A.10 – Variance d'une loi exponentielle

```
(%i1) integrate(x^2*a*exp(-a*x),x,0,inf)-(integrate(x*a*exp(-a*x),x,0,inf))^2;
```

Is a positive, negative, or zero ?p ;

(%o1) $\frac{1}{a^2}$

A.4.1.3 Loi normale

Session Wxmaxima A.11 – Loi normale

```
(%i1) integrate(exp(-u^2/2),u,minf,inf);
```

(%o1) $\sqrt{2}\sqrt{\pi}$

A.4.1.4 Loi du χ^2

Session Wxmaxima A.12 – Densité de la loi du χ^2

```
(%i1) makelist(ev(integrate(t^(k/2-1)*exp(-t/2),t,0,inf),k=2*p+1)-
      sqrt(2*%pi)*(2*p-1)!/2^(p-1)/(p-1)!,p,1,6);
```

(%o1) $[0,0,0,0,0,0]$

Session Wxmaxima A.13 – Espérance et variance d'une loi du χ^2

```
(%i1) integrate(x^4*exp(-x^2/2),x,minf,inf);
```

(%o1) $3\sqrt{2}\sqrt{\pi}$

Annexe B

Codes `Python`

B.1 Suites et séries de fonctions

B.1.1 Modes de convergence

Session `Python` B.1 – Un petit calcul de primitive

Pour vérifier les calculs...

In[1] – Chargement des bibliothèques

```
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

In[2] – Déclaration de x

```
x = sp.symbols('x', real=True)
```

In[3] – Décomposition en éléments simples

```
F = 1/(1+x**3)
F.apart()
```

Out[3]

$$-\frac{x-2}{3\left(x^2-x+1\right)}+\frac{1}{3\left(x+1\right)}$$

In[4] – Primitive

```
F.integrate(x)
```

Out [4]

$$\frac{\log (x+1)}{3} - \frac{\log \left(x^2 - x + 1\right)}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{3}$$

In [5] – Intégrale

```
F.integrate((x, 0, 1))
```

Out [5]

$$\frac{\log (2)}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

Session Python B.2 – Les calculs du deuxième exemple 3.7, page 195

Quand les calculs sont compliqués, on est bien content d'utiliser la machine...

In [6] – Déclaration de n

```
n = sp.symbols('n', interger=True, positive=True)
```

In [7] – $|u_n(x)|$

```python
aun = sp.log(1+x/(n*(1+x)))
```

In [8] – $|u_n'(x)|$

```python
aun.diff(x).simplify().factor(x)
```

Out [8]

$$\frac{1}{\left(n + x\left(n+1\right)\right)\left(x+1\right)}$$

In [9] – $|u_n''(x)|$

```python
-aun.diff(x, 2).simplify().factor(x)
```

Out [9]

$$\frac{2n + x\left(2n+2\right)+1}{\left(n + x\left(n+1\right)\right)^2\left(x+1\right)^2}$$

In[10] – La décroissance en x

```
sp.diff(_, x).simplify().factor(x)
```

Out[10]

$$-\frac{2\left(3n^2+3n+x^2\left(3n^2+6n+3\right)+x\left(6n^2+9n+3\right)+1\right)}{\left(n+x\left(n+1\right)\right)^3\left(x+1\right)^3}$$

In[11] – La décroissance en n (on dérive comme si n était réel)

```
__.diff(n).simplify().factor()
```

Out[11]

$$-\frac{2\left(n+1\right)}{\left(nx+n+x\right)^3}$$

B.2 Applications aux probabilités

B.2.1 Lois usuelles absolument continues

B.2.1.1 Loi uniforme

Session `Python` B.3 – Fonction de répartition et densité d'une loi uniforme

On peut utiliser la bibliothèque `scipy.stats`.

In[1]

```python
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

In[2]

```python
a, b = 0, 2  # bornes
N = 200  # nombre de points
x = np.linspace(a-1, b+1, N)
```

In [3]

```
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x, uniform.cdf(x, loc=a, scale=b-a), 'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(a-1.1, b+1.1)
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(x, uniform.pdf(x, loc=a, scale=b-a), "b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(a-1.1, b+1.1)
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.1, page 380

In [4] – Comparaison

```
NN = 10000  # nombre d'échantillons

plt.hist(uniform.rvs(loc=a, scale=b-a, size=NN),
         linewidth=2, fill=False, density=True)
plt.plot(x, uniform.pdf(x, loc=a, scale=b-a), "b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
```

```python
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.2, page 381

B.2.1.2 Loi exponentielle

Session `Python` B.4 – Fonction de répartition et densité d'une loi exponentielle

De même pour la loi exponentielle...

In[1]

```python
from scipy.stats import expon
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

In[2]

```python
L = 2   # paramètre
N = 200  # nombre de points
x = np.linspace(-0.2, L+4, N)
```

In [3]

```
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x, expon.cdf(x, scale=1/L), 'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(-0.4, L+6)
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(x, expon.pdf(x, scale=1/L), "b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(-0.4, L+6)
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.3, page 382

In [4] – Comparaison

```
NN = 10000  # nombre d'échantillons

x = np.linspace(-0.2, L+4, N)

plt.hist(expon.rvs(scale=1/L, size=NN), 30,
         linewidth=2, fill=False, density=True)
```

```
plt.plot(x, expon.pdf(x, scale=1/L), "b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.4, page 383

B.2.1.3 Loi normale

Session Python B.5 – Fonction de répartition et densité d'une loi normale

De même...

In[1]

```
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

In[2]

```
m = 2  # moyenne
s = 2  # écart-type
N = 200  # nombre de points
```

```
x = np.linspace(m-3*s, m+3*s, N)
```

In [3]

```
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x, norm.cdf(x, loc=m, scale=s), 'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(m-3*s-0.2, m+3*s+0.2)
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(x, norm.pdf(x, loc=m, scale=s), "b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(m-3*s-0.2, m+3*s+0.2)
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.5, page 384.

In [4] – Comparaison

```
NN = 10000  # nombre d'échantillons

x = np.linspace(m-3*s, m+3*s, N)
```

```python

plt.hist(norm.rvs(loc=m, scale=s, size=NN), 30,
         linewidth=2, fill=False, density=True)
plt.plot(x, norm.pdf(x, loc=m, scale=s), "b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.6, page 385

Session `Python` B.6 – Comportement asymptotique d'une binomiale vers la loi normale

La simulation permet de constater facilement le résultat théorique.

In[1]

```python
from scipy.stats import norm, binom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

In[2]

```python
n = 10000  # nombre de tirage
p = 0.2  # probabilité de succès
```

```
N = 200  # nombre de points (graphique)
NN = 10000  # nombre d'échantillons
```

In[3]

```
eb = binom.rvs(n, p, size=NN)  # échantillon de la loi binomiale
e = (eb-n*p)/np.sqrt(n*p*(1-p))  # normalisation
```

In[4]

```
x = np.linspace(-4, 4, N)

plt.hist(e, 30, linewidth=2, fill=False, density=True)
plt.plot(x, norm.pdf(x), "b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
```

Voir la figure 6.7, page 386.

Bibliographie

[1] A. Chillès, *Topologie et calcul différentiel*. Polycopié interne à Speit, 2022.

[2] A. Chillès, 吉宏俊, *Intégration, séries de fonctions et analyse de fourier*. Polycopié interne à Speit, 2022.

[3] A. Chillès, 吉宏俊, V. Vinoles, 欧亚飞, A. Joseph, *Mathématiques II. Nombres complexes et calcul infinitésimal*, Shanghai Jiao Tong University Press, 2022.

[4] A. Chillès, 吉宏俊, 欧亚飞, V. Vinoles, A. Joseph, *Algèbre linéaire*, Shanghai Jiao Tong University Press, 2021.

[5] ——, *Algèbre linéaire et bilinéaire avancée*. Polycopié interne à Speit, 2022.

Figure B.1 – Courbe de Peano