Mathématiques II – TD$_6$

16-17 mai 2022

Exercice 1

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y' + y = \sin(x)$ et $y(0) = 1$

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \sin(x)$

(a) **Résolution de l'équation homogène**

$$(H) \qquad y'(x) + y(x) = 0$$

Les solutions de (H) sont les fonctions

$$y_h : t \mapsto C\,e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) **Recherche d'une solution particulière**
Deux méthodes possibles :

— On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto a\cos x + b\sin x$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On trouve après calculs que $a = \frac{-1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ donc $y_p : x \mapsto \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$.

— On applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p : x \mapsto C(x)\,e^{-x}$$

avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On a alors

$$\begin{aligned} y_p \text{ est une solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)\,e^{-x} - C(x)\,e^{-x} + C(x)\,e^{-x} = \sin(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = \sin(x)\,e^{x} \end{aligned}$$

On doit donc trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)\,e^x$. La méthode naturelle est de faire une intégration par parties (on verra cela plus tard dans le cours) ou on peut aussi passer par les nombres complexes car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

On trouve alors que $x \mapsto \frac{e^x\,(\sin(x)-\cos(x))}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \sin(x)\,e^x$ ce qui donne comme solution particulière de (E) la fonction $y_p : x \mapsto \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$.

(c) Finalement, les solutions de (E) sont :

$$y : x \longmapsto y_p(x) + y_h(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + C\,e^{-x}$$

(d) **Prise en compte de la condition initiale**
$y(0) = 1$ donne $C = \frac{3}{2}$ donc l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$ est donnée par :

$$\boxed{x \longmapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x}}$$

On peut vérifier avec Sympy :

```python
from sympy import *
x = symbols('x')
y = Function('y')
dsolve(diff(y(x),x) + y(x) - sin(x), y(x), ics={y(0):1})
```

Résultat : $y(x) = \left(\frac{e^x \sin(x)}{2} - \frac{e^x \cos(x)}{2} + \frac{3}{2}\right) e^{-x}$

2. $(1 + x^2)\, y' + x\, y = x + x^3$

Pour se ramener à une équation différentielle linéaire, on commence par diviser par $1 + x^2$ (on a le droit, car $1 + x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On est donc ramené à l'étude de

$$(E) \qquad y'(x) + \frac{x}{1 + x^2}\, y(x) = x$$

(a) **Résolution de l'équation homogène**

$$(H) \qquad y'(x) + \frac{x}{1 + x^2}\, y(x) = 0$$

La fonction $x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ donc (H) a pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto C \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1 + x^2)\right) = \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) **Recherche d'une solution particulière**

Pour trouver une solution particulière de (E), on procède par variation de la constante. On trouve :

$$x \mapsto \frac{C(x)}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ est une solution } \iff \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = x\sqrt{1 + x^2}$$

On peut alors prendre

$$C : x \longmapsto \frac{1}{3}\,(1 + x^2)^{3/2}$$

donc une solution particulière de (E) est

$$x \longmapsto \frac{\frac{1}{3}\,(1 + x^2)^{3/2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + x^2}{3}$$

(c) **Conclusion**

Finalement, l'ensemble des solutions de $(1 + x^2)\, y' + x\, y = x + x^3$ est :

$$\boxed{\left\{x \longmapsto \frac{1 + x^2}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}}$$

On peut vérifier avec Sympy :

```python
dsolve((1+x**2)*diff(y(x),x) + x*y(x) - (x+x**3), y(x))
```

Résultat : $y(x) = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1-x^2)\,y' + x\,y = 0$

On veut diviser par $1-x^2$ pour obtenir une équation différentielle linéaire. Il faut cependant faire très attention car il faut que $1-x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \pm 1$. On résout donc cette équation sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ puis on étudie ensuite le recollement (car on veut une solution dérivable sur $\mathbb{R}$).

Sur $I_1 = \,]-\infty,-1[$, $I_2 = \,]-1,1[$ et $I_3 = \,]1,+\infty[$, l'équation différentielle s'écrit :

$$(E) \qquad y'(x) + \frac{x}{1-x^2}\,y(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation homogène et une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$ est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(|x^2-1|\right) = \begin{cases} \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) & \text{sur } I_1 \text{ et } I_3 \\ \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right) & \text{sur } I_2 \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont donc, sur chaque intervalle, les fonctions :

$$\begin{array}{lll} \text{sur } I_1 & y_1 : x \longmapsto C_1\sqrt{x^2-1}, & C_1 \in \mathbb{R} \\ \text{sur } I_2 & y_2 : x \longmapsto C_2\sqrt{1-x^2}, & C_2 \in \mathbb{R} \\ \text{sur } I_3 & y_3 : x \longmapsto C_3\sqrt{x^2-1}, & C_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Pour déterminer les solutions y dérivables de $(1-x^2)\,y' + x\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$, on procède par analyse-synthèse.

— Analyse : si y est une solution de $(1-x^2)\,y' + x\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $y\big|_{I_k} = y_k$ pour $k \in \{1,2,3\}$ (la restriction de y à I_k est y_k).
La continuité de y en 1 et -1 donne

$$y(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} y_1(x) = \lim_{x\to(-1)^+} y_2(x) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = \lim_{x\to 1^-} y_2(x) = \lim_{x\to 1^+} y_3(x) = 0$$

ce qui est toujours vérifiée quelque soient C_1, C_2 et C_3.
La dérivabilité de y en 1 et -1 donc

$$y'(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} y_1'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} y_2'(x) \quad \text{et} \quad y'(1) = \lim_{x\to 1^-} y_2'(x) = \lim_{x\to 1^+} y_3'(x)$$

Mais y_1 est dérivable en $(-1)^-$ seulement si $C_1 = 0$. De même, on obtient $C_2 = C_3 = 0$.
On en déduit que y est la fonction nulle.

— Synthèse : la fonction nulle est une solution de $(1-x^2)\,y' + x\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La seule solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (1-x^2)\,y' + x\,y = 0 \text{ est la solution nulle.}}$$

2. $x\,y' - (1+x)\,y = -x^2$

— Sur $I_1 =]-\infty, 0[$, l'équation différentielle $x\,y' - (1+x)\,y = -x^2$ est équivalente à

$$(E) \qquad y'(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y(x) = -x$$

Une primitive de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -x - \ln|x| = -x - \ln(-x)$ donc les solutions de l'équation homogène $y'(x) - (1+\frac{1}{x})y(x) =$ sont donc de la forme

$$x \longmapsto -\lambda\, x\, e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto x$ est une solution particulière de (E) (on peut le deviner, sinon on peut faire la méthode de variation de la constante).
Les solutions sur I_1 de (E) sont donc :

$$x \longmapsto x - \lambda\, x\, e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

— On reprend le même raisonnement sur $I_2 =]0, +\infty[$, les solutions de (E) sur I_2 sont les fonctions :

$$x \longmapsto x + \lambda\, x\, e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

— Analyse : soit y une solution de $x\,y' - (1+x)\,y = -x^2$ sur $\mathbb{R}$.
  - En particulier y est solution sur I_1 et I_2 de (E) donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \forall x < 0, & y(x) = x - \lambda_1\, x\, e^x \\ \forall x > 0, & y(x) = x + \lambda_2\, x\, e^x \end{cases}$$

  - y est continue en 0 et

$$y(0) = \lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$$

  - y est dérivable en 0 et

$$y'(0) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} y'(x) = 0$$

    donc

$$1 - \lambda_1 = 1 + \lambda_2$$

    d'où $\lambda_1 = -\lambda_2$

— Synthèse : soit y de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = x + \lambda\, x\, e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une telle fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de $x\,y' - (1+x)\,y = -x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de $x\,y' - (1+x)\,y = -x^2$ sont :

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \longmapsto x + \lambda\, x\, e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. $x\,y' + (1-x)\,y = e^{2x}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin I$. Sur I, l'équation différentielle $x\,y' + (1-x)\,y = e^{2x}$ est équivalente à

$$(E) \qquad y'(x) + \frac{1-x}{x} y(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

- Puisqu'une primitive de $x \mapsto \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$ est $x \mapsto -\ln|x| + x$, les solutions de l'équation homogène
$$y'(x) + \frac{1-x}{x} y(x) = 0$$
sont
$$y : x \longmapsto \lambda \frac{e^x}{|x|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
Comme $0 \notin I$, x ne change pas de signe sur I donc, quitte à changer λ en $-\lambda$, les solutions de (E) sur I sont
$$y : x \longmapsto \lambda \frac{e^x}{x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
- On applique la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E) : on la cherche sous la forme $x \mapsto \lambda(x) \dfrac{e^x}{x}$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. On obtient alors que $\lambda'(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on choisit $\lambda = \exp$ et une solution particulière de (E) est alors $x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$.
Finalement, les solutions de E sur I sont
$$x \longmapsto \lambda \frac{e^x}{x} + \frac{e^{2x}}{x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
- Analyse : soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x \in I, \quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{x} + \lambda \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{2x}}{x} + \mu \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
Un développement limité en 0 donne :
$$y(x) = \frac{1 + \lambda + 2x + \lambda x + o_{0^-}(x)}{x} = \frac{1+\lambda}{x} + 2 + \lambda + \underset{x \to 0^+}{o}(1)$$
et
$$y(x) = \frac{1 + \mu + 2x + \mu x + o_{0^-}(x)}{x} = \frac{1+\mu}{x} + 2 + \mu + \underset{x \to 0^+}{o}(1)$$
Puisque y est continue en 0, on a $\lambda = \mu = -1$.
- Synthèse : soit y définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
y est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après ce qui précède), dérivable car
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y'(x) = \frac{2x\, e^{2x} - e^{2x} - x\, x^x + e^x}{x^2} = \frac{3}{2} + \underset{x \to 0}{o}(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$
et solution de $x\, y' + (1-x)\, y = e^{2x}$.

Conclusion : l'unique solution de $x\, y' + (1-x)\, y = e^{2x}$ est donnée par
$$\boxed{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + y' + y = \cos^3(x)$

   (a) **Résolution de l'équation homogène**

   $$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$

   L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$, dont les racines sont $j = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \overline{j} = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc les solutions de l'équation homogène sont

   $$x \longmapsto e^{-x/2}\left(\lambda\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \mu\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right), \qquad (\lambda,\,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

   (b) **Recherche d'une solution particulière**
   On va linéariser le second membre : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\,e^{i\,3x} + \frac{1}{8}\,e^{-i\,3x} + \frac{3}{8}\,e^{i\,x} + \frac{3}{8}\,e^{-i\,x}\\ &= \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3\cos x}{4}\end{aligned}$$

   D'après le principe de superposition (l'équation est linéaire), il suffit de trouver des solutions pour chacune des 2 équations correspondantes :

   — La première est
   $$y''(x) + y'(x) + y(x) = \frac{\cos(3x)}{4}$$
   On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto a\cos(3x) + b\sin(3x)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On trouve
   $$x \longmapsto \frac{3}{292}\sin(3x) - \frac{2}{73}\cos(3x)$$

   — La seconde est
   $$y''(x) + y'(x) + y(x) = \frac{3\cos x}{4}$$
   On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On trouve
   $$x \longmapsto \frac{3}{4}\sin(x)$$

   D'après le principe de superposition,

   $$x \longmapsto \frac{3}{292}\sin(3x) - \frac{2}{73}\cos(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

   est une solution particulière.

   Conclusion, les solutions sont

   $$\boxed{\begin{aligned}x \longmapsto e^{-x/2}&\left(\lambda\,\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \mu\,\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)\\ &+ \tfrac{3}{292}\sin(3x) - \tfrac{2}{73}\cos(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}}$$

   Vérifions avec Sympy :

```
dsolve(diff(y(x),x,x) + diff(y(x),x) + y(x) - cos(x)**3, y(x))
```

Si on fait cela, on s'aperçoit que Sympy n'y arrive pas. Mais si on linéarise :

```
dsolve(diff(y(x),x,x)+diff(y(x),x)+y(x)-(cos(3*x)/4+3*cos(x)/4), y(x))
```

Résultat : $y(x) = \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3\sin(x)}{4} + \frac{3\sin(3x)}{292} - \frac{2\cos(3x)}{73}$

2. $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

(a) **Résolution de l'équation homogène**
L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$, les racines sont 1 et -1, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad (\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

(b) **Recherche d'une solution particulière** Comme 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve $x \mapsto -x^2 - 3$.

(c) **Recherche d'une solution particulière de l'équation :**

$$y'' - y = e^x$$

1 est racine simple de l'équation caractéristique donc on cherche donc une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax+b)\, e^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Après calculs, on trouve

$$x \longmapsto -x^2 - 3 + \frac{x\, e^x}{2}$$

(d) **Conclusion :**
Finalement, l'ensemble des solutions de $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ est :

$$x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu\, e^{-x}, \quad (\lambda,\, \mu)^2 \in \mathbb{R}^2$$

(e) **Conditions initiales**
$y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent comme conditions $\lambda + \mu - 3 = 0$ et $\lambda - \mu - \frac{1}{2} = 0$ donc $\lambda = \frac{9}{4}$ et $\mu = \frac{3}{4}$.

Finalement, l'unique solution y de $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est

$$\boxed{x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{2}\right) e^x + \frac{3}{4}\, e^{-x}}$$

Vérifions avec Sympy :

```
dsolve(diff(y(x),x,x) - y(x) - (x**2+1-exp(x)),
y(x), ics = {y(0):0, diff(y(x),x).subs(x,0):1})
```

Résultat : $y(x) = -x^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{2}\right) e^x - 3 + \frac{3e^{-x}}{4}$

3. $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0$.
Les solutions de l'équation homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (C_1 x + C_2)e^{-3x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto \lambda\, x^2\, e^{-3x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y_p'(x) = \lambda(2x - 3x^2)e^{-3x}$$
$$y_p''(x) = \lambda(2 - 12x + 9x^2)e^{-3x}$$

donc

$$y_p''(x) + 6y_p'(x) + 9y_p(x) = 2\lambda e^{-3x}$$

On en déduit que y_p est solution si et seulement si $\lambda = 4$.
Finalement, les solutions de $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}$ sont

$$\boxed{x \longmapsto (4x^2 + C_1 x + C_2)e^{-3x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Vérifions avec Sympy :

```
dsolve(diff(y(x),x,x) + 6*diff(y(x),x) + 9*y(x) - 8*exp(-3*x), y(x))
```

Résultat : $y(x) = (C_1 + x\,(C_2 + 4x))\,e^{-3x}$

Exercice 4

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(-x) = x \qquad (E)$$

Attention (E) n'est pas une équation différentielle car il y a un terme $f(-x)$.

— Analyse : soit f une solution de (E). En changeant x en $-x$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(-x) + f(x) = -x$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f''(x) + f(-x) = x \\ f''(-x) + f(x) = -x \end{cases}$$

En faisant la somme puis la différence de ces deux équations, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f''(x) + f''(-x) + f(x) + f(-x) = 0 \\ f''(x) - f''(-x) - (f(x) - f(-x)) = 2x \end{cases}$$

En posant $g : x \mapsto f(x) + f(-x)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(-x)$ (qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$), on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) + g(x) = 0 \\ h''(x) - h(x) = 2x \end{cases}$$

La première équation admet pour solution les fonctions :

$$x \mapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

La seconde équation admet pour solution les fonctions :

$$x \mapsto -2x + D_1 \cosh x + D_2 \sinh x, \qquad (D_1, D_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, il existe $(C_1, C_2, D_1, D_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + h(x)) = -x + \frac{1}{2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + D_1 \cosh x + D_2 \sinh x)$$

— Synthèse : soit f une fonction telle qu'il existe $(C_1, C_2, D_1, D_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + h(x)) = -x + \frac{1}{2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + D_1 \cosh x + D_2 \sinh x)$$

Une telle fonction est solution de (E) seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_2 \sin x + D_1 \cosh x = 0$$

donc seulement si $C_2 = D_1 = 0$.

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \longmapsto -x + \frac{1}{2}(C_1 \cos x + D_2 \sinh x), \qquad (C_1, D_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Exercice 5

1. Sur l'intervalle $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, donner une primitive des fonctions :

(a) $f_1 : x \longmapsto -\dfrac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}$

On écrit pour $x \in I$

$$-\frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)} = \left(1 - \frac{1}{\cos^2(x)}\right) \sin(x)$$

donc une primitive sur I de cette fonction est la fonction F_1 définie par :

$$\boxed{F_1 : x \longmapsto -\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}}$$

(b) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$

On écrit pour $x \in I$

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x).$$

Il s'agit alors de trouver une primitive de $1/\cos(x)$, ce qui se fait en utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \int_{a'}^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_{a'}^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{|1+\tan(\frac{x}{2})|}{|1-\tan(\frac{x}{2})|}\right) + C$$

il reste à utiliser la formule $\tan(a+b) = (\tan(a)+\tan(b))/(1-\tan(a)\,\tan(b))$ pour trouver pour primitive de f_2 sur Ila fonction :

$$\boxed{F_2 : x \longmapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin(x)}$$

On a bien $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$ *pour tout* $x \in I$.

2. Donner les solutions de l'équation $y'' + y = 0$.

Les solutions sont

$$\boxed{x \longmapsto A\,\sin(x) + B\,\cos(x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

3. En utilisant la méthode de la variation des deux constantes, trouver une solution particulière définie sur I de l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2(x)$$

On cherche une solution du type :

$$\varphi : x \longmapsto A(x)\,\sin(x) + B(x)\,\cos(x)$$

En imposant

$$\forall x \in I, \quad A'(x)\,\sin(x) + B'(x)\,\cos(x) = 0$$

on obtient que φ est solution de l'équation si et seulement si pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} A'(x)\,\sin(x) + B'(x)\,\cos(x) = 0 \\ A'(x)\,\cos(x) - B'(x)\,\sin(x) = \tan^2(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire pour tout $x \in I$

$$A'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad B'(x) = -\frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}$$

D'après la première question, les fonctions :

$$A : x \longmapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin(x) \quad \text{et} \quad B : x \longmapsto -\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

conviennent. On en déduit qu'une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \sin(x)\,\left(\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin(x)\right) - (\cos^2(x) + 1)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\boxed{\varphi : x \longmapsto \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2}$$

4. En déduire toutes les solutions sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \tan^2(x)$$

Il suffit d'utiliser les deux questions précédentes. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto A\,\sin(x) + B\,\cos(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

5. Donner un développement limité à l'ordre 1 en 0 des solutions que vous avez trouvées dans la question précédente. En déduire la solution sur I de :

$$\begin{cases} y'' + y = \tan^2(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Commençons par remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ donc

$$\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

On en déduit :

$$\sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\,\ln\left(1+\underset{x\to 0}{o}(1)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Le développement limité recherché est donc :

$$B - 2 + A\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Par la formule de Taylor, la solution est donc :

$$\boxed{x \longmapsto 2\,(\cos(x)-1) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Exercice 6

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 4t\,y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$$

1. Déterminer les solutions de (E) sur $I =]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $t = x^2$.

Soit y une solution de (E) sur I. Posons $z : x \mapsto y(x^2)$ qui est deux fois dérivable sur I. On a alors pour tout $x > 0$:

$$z'(x) = 2xy'(x^2) \quad \text{et} \quad z''(x) = 2y'(x^2) + 4x^2y''(x^2)$$

Mais y est solution de (E) sur I si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad 4x^2y''(x^2) + 2y'(x^2) - y(x^2) = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad z''(x) - z(x) = 0$$

On en déduit que z est de la forme

$$z : x \longmapsto \lambda\cosh(x) + \mu\sinh(x), \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

On en déduit donc que les solutions de (E) sur I sont :

$$\boxed{t \longmapsto \lambda\cosh(\sqrt{t}) + \mu\sinh(\sqrt{t}), \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

2. Déterminer les solutions de (E) de (E) sur $I' =]-\infty, 0[$.

Par analogie avec la question précédente, on effectue le changement de variable $t = -x^2$.

Soit y une solution de (E) sur I'. Posons $z : x \mapsto y(-x^2)$ qui est deux fois dérivable sur I (attention, pas I'). On a alors pour tout $x > 0$:

$$z'(x) = -2xy'(-x^2) \quad \text{et} \quad z''(x) = -2y'(-x^2) + 4x^2y''(-x^2)$$

Or y est solution de (E) sur I' si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad -4x^2y''(-x^2) + 2y'(-x^2) - y(-x^2) = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall x > 0,\ -z''(x) - z(x) = 0$$

On en déduit que z est de la forme

$$z : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

On en déduit donc que les solutions de (E) sur I' sont :

$$\boxed{t \longmapsto \lambda\cos(\sqrt{-t}) + \mu\sin(\sqrt{-t}), \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

Exercice 7

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, soit $I = \mathbb{R}_+^*$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = f$$

se ramène, par le changement de variable $t = \ln x$, à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in I$ et soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Posons $t = \ln x$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $z(t) = y(x) = y(e^t)$.

Attention, il est faux que $z'(t) = y'(x)$. En effet t est une fonction de x : $t : x \mapsto \ln x$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $y'(x) = z'(t(x))t'(x)$ pour tout $x \in I$.

On a donc pour tout $x \in I$

$$y'(x) = z'(t)\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y''(t) = z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2}$$

donc

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \text{ sur I} &\iff \forall x \in I, \quad x^2\left(z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2}\right) + ax\frac{z'(t)}{x} + bz(t) = f(x) \\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = f(e^t) \end{aligned}$$

$$\boxed{(E) \text{ se ramène à l'équation différentielle } z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = f(e^t) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur I :

$$(E) \qquad x^2\,y'' + x\,y' + y = x^2 + x + 1$$

On applique la méthode de la question précédente, on se ramène à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(F) \qquad z'' + z = e^{2t} + e^t + 1$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont $t \mapsto A\cos t + B\sin t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 0, 1 et 2 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, on cherche une solution particulière de F sous la forme $z : t \mapsto ae^{2t} + be^t + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Après calculs, on trouve $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 1$, c'est-à-dire que $t \mapsto \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + 1$ est une solution particulière de (F).
Les solutions de (F) sont donc

$$t \longmapsto \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + 1 + A\cos t + B\sin t, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{x \longmapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) : (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$