Suites et Séries – TD$_7$ – Complément

24-25 octobre 2022

Exercice 1.
Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers ordonnés par ordre croissant. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_k \frac{1}{p_k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

1. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si, et seulement si, la suite $(\ln(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

[$\Rightarrow$] Supposons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant 1$, on en déduit que $V_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $l \geqslant 1$. Par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\ln(V_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(l)$.
[$\Leftarrow$] Supposons que $(\ln(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Par continuité de exp sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^l$.

$$\boxed{(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si } (\ln(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

2. En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum_k \frac{1}{p_k}$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\ln(V_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Comme $p_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

Comme les termes sont positifs, les séries $\sum_k \frac{1}{p_k}$ et $\sum_k -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ sont de même nature. On peut donc conclure grâce à la question précédente :

$$\boxed{(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si la série } \sum_k \frac{1}{p_k} \text{ converge.}}$$

Pour passer d'un produit à une somme (ou d'une somme à un produit), on utilise la fonctions logarithme (ou exponentielle) pour obtenir une série. Il faut alors faire attention au cas où le produit converge vers 0 (le logarithme est alors divergent).

3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j}\right).$$

Comme $p_k \geqslant 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_j \frac{1}{p_k^j}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$. Par conséquent,

$$\boxed{V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} \right).}$$

4. En déduire que :

$$V_n \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Cette question utilise la notion de "produit de Cauchy". Cette notion sera vue pendant la semaine 7.

Les séries $\sum_j \frac{1}{p_k^j}$ sont à termes positifs et convergentes. On obtient donc la convergence et l'égalité suivante par produit de Cauchy de n séries :

$$V_n = \sum_{j_1=0}^{+\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1} \sum_{j_3=0}^{j_2} \cdots \sum_{j_n=0}^{j_{n-1}} \frac{1}{p_1^{j_n}} \frac{1}{p_2^{j_{n-1}-j_n}} \cdots \frac{1}{p_n^{j_1-j_2}}.$$

Chaque entier entre 1 et n s'exprime comme un produit des $p_1, p_2, \ldots, p_n$, donc

$$\boxed{V_n \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.}$$

5. Quelle est la nature de la série $\sum_k \frac{1}{p_k}$?

On sait que la série harmonique $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'après la question précédente,

$$\boxed{\text{la série } \sum_k \frac{1}{p_k} \text{ est divergente.}}$$

6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$?

$\triangleright$ Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\frac{1}{p_k} \leqslant \frac{1}{p_k^\alpha}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme les termes sont positifs et que $\sum_k \frac{1}{p_k}$ diverge, on en déduit

$$\boxed{\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha} \text{ est divergente si } \alpha \leqslant 1.}$$

$\triangleright$ Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme les termes sont positifs et que $\sum_k \frac{1}{k^\alpha}$ converge, on en déduit

$$\boxed{\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha} \text{ est convergente si } \alpha > 1.}$$

Exercice 2. (première série de l'exercice 2.3.1 du polycopié)

Discuter suivant la valeur du paramètre $x > 0$ la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n!} \times \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right).$$

▷ Si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \sqrt{p} \times \pi$ ou $x = -\sqrt{p} \times \pi$, alors à partir d'un certain rang tous les termes de la série sont nuls. Et donc la série converge.

Lorsque le terme général s'écrit sous forme de produit ou de fraction, on commence en général par tester le critère de d'Alembert.

▷ Sinon les termes sont tous non nuls, et la série est de signe constant à partir d'un certain rang. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x$$

Donc d'après le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\text{si } x < 1, \text{ la série converge et si } x > 1 \text{ la série diverge.}}$$

▷ Si $x = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sqrt{k} \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{6k} + \frac{1}{120k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{6k} - \frac{1}{180k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{6k} = -\frac{\ln(n)}{6} + -\frac{\gamma}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(1),$$

et $\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{180k^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc il existe une constante C telle que

$$\ln(u_n) = -\frac{\ln(n)}{6} + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

On a alors, en applicant exponentielle, $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^C}{n^{1/6}} \times \mathrm{e}^{\underset{n\to+\infty}{o}(1)}$, donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^C}{n^{1/6}}.$$

Les signes étant constant à partir d'un certain rang, on en déduit que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{e^C}{n^{1/6}}$ ont même nature. Or la seconde est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/6 < 1$). Donc

$$\boxed{\text{Si } x = 1, \sum_n u_n \text{ diverge.}}$$

Exercice 3. (une série étrange !)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de k. Par exemple, $p_5 = 1$; $p_{31} = 2$, $p_{58472} = 5$,...

Soit $a > 0$. Déterminer, selon $a \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum_k \frac{a^{p_k}}{p_k}$.

La suite $(p_k)_{k \geqslant 1}$ est constante sur de grands ensembles de nombres :

k	*1*	*2*	*3*	$\cdots$	*9*	*10*	*11*	$\cdots$	*37*	*38*	$\cdots$	*98*	*99*	*100*	*101*	$\cdots$
p_k	*1*	*1*	*1*	$\cdots$	*1*	*2*	*2*	$\cdots$	*2*	*2*	$\cdots$	*2*	*2*	*3*	*3*	$\cdots$

On va donc faire une sommation par paquets : chaque paquet sera un intervalle où (p_k) est constante.

▷ Si $|a| \geqslant 1$, la série diverge grossièrement.

▷ Supposons $a \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{a^{p_k}}{p_k}$. On a alors

$$v_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{a^n}{n} = (10^{n+1} - 10^n) \times \frac{a^n}{n} = \frac{9 \times (10a)^n}{n}.$$

- Si $a > \frac{1}{10}$, la série $\sum_n v_n$ diverge grossièrement.
- Si $a = \frac{1}{10}$, la série $\sum_n v_n = \sum_n \frac{9}{n}$ diverge.
- Si $a < \frac{1}{10}$, en posant $b = \frac{1 + 10a}{2}$, on a $|v_n| = o(b^n)$ et $0 < b < 1$, donc $\sum_n v_n$ converge.

Comme les séries sont à termes positifs, par sommation par paquets, $\sum_k \frac{a^{p_k}}{p_k}$ converge si et seulement si $\sum_n v_n$ converge, si et seulement si $a < \frac{1}{10}$.

▷ Supposons $a \in]-1, 0[$. Avec la même notation que précédemment, on a

$$v_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{a^n}{n} = (-1)^n \times \frac{9 \times (10|a|)^n}{n}.$$

- Si $|a| > \frac{1}{10}$: la série $\sum_n v_n$ diverge grossièrement.
- Si $|a| = \frac{1}{10}$: puisque $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_n v_n = \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, donc elle converge.
- Si $|a| < \frac{1}{10}$: en posant $b = \frac{1 + 10|a|}{2}$, on a $|v_n| = \underset{n \to +\infty}{o}(b^n)$ et $0 < b < 1$, donc $\sum_n v_n$ converge absolument.

Par sommation par paquets **de termes de même signe**, $\sum_k \frac{a^{p_k}}{p_k}$ converge si et seulement si $\sum_n v_n$ converge, si et seulement si $|a| \geqslant \frac{1}{10}$.
▷ Finalement,

$$\boxed{\sum_k \frac{a^{p_k}}{p_k} \text{ converge si et seulement si } a \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[.}$$

Exercice 4. (Sommation par parties, aussi appelée transformation d'Abel)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \text{ et } B_0 = 0$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a la *formule de sommation par parties* :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.
\end{aligned}$$

Cette formule est appelée la formule de sommation par parties car, écrite différemment, elle devient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)$$

ce qui correspond à une forme discrète de la formule d'intégration par parties.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.$$

Pour les séries avec du "$\cos(kx)$" ou du "$\sin(kx)$", il est souvent intéressant d'utiliser l'exponentielle complexe pour faire apparaître une série géométrique.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)}{2}x}\sin(\frac{(n+1)}{2}x)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2})}\right) \\
&= \frac{\sin(\frac{(n+2)}{2}x)\sin(\frac{(n+1)}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.}$$

3. Déduire des questions précédentes que pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n}$ est convergente.

Pour utiliser la question 1, on va chercher à écrire $\frac{\sin(nx)}{n}$ *sous la forme* $\frac{\sin(nx)}{n} = a_n b_n$*. La question 2 nous a fait étudier* $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ *et la question 1 utilise* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *: on va donc poser* $b_n = \sin(nx)$ *et* $a_n = \frac{1}{n}$*.*

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \sin(nx)$. Alors d'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{n}B_n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)B_k. \tag{$*$}$$

Comme la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée d'après la question 2, le premier terme du membre de droite tend vers 0. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} |(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k})B_k| &\leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right| \\
&= \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_k |\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)B_k|$ est à termes positifs et majorée, donc elle converge. Par conséquent, la série $\sum_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)B_k$ converge. D'après l'égalité $(*)$,

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \frac{\sin(nx)}{n} \text{ est convergente.}}$$

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sin(kx) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc la série converge également.

Ici, ce qui fait marcher la démonstration, c'est que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. C'est cela qui permet de montrer que la série $\sum_{k=1}^{n-1} |(a_{k+1} - a_k)B_k|$ converge : comme $(a_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $|a_{k+1} - a_k| = a_{k+1} - a_k$ et on peut faire apparaître une série téléscopique. Ce phénomène se retrouve souvent lorsqu'on fait des transformations d'Abel.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{1}{n(n-1)}\right| \leqslant 1$. La série à termes positifs $\sum_n \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ est majorée donc converge. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2} \text{ converge.}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. En utilisant une méthode similaire aux questions précédentes, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{2}{(N+1)^2|\sin(\frac{x}{2})|}.$$

On va refaire une transformation d'Abel (question 1), mais cette fois-ci en commençant à $N+1$. Attention : on n'a pas le droit d'écrire "$\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=N+1}^{M} a_kB_k - \sum_{k=N+1}^{M} a_kB_{k-1}$" sans justifier les convergences des séries de droite !!
Deux méthodes possibles : on peut commencer par justifier les convergences de ces séries et faire le calcul, ou on peut regarder des sommes finies de $N+1$ à M puis faire tendre M vers $+\infty$. Ici on présente la deuxième méthode.
IMPORTANT : Pour écrire une somme infinie, il faut TOUJOURS avoir justifier sa convergence avant !

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $M > N$. En notant $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{M} \frac{\sin(kx)}{k^2} &= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^2}(B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^2}B_k - \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^2}B_{k-1} \\
&= \frac{1}{M^2}B_M - \frac{1}{(N+1)^2}B_N + \sum_{k=N+1}^{M-1}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)B_k.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N+1}^{M} \frac{\sin(kx)}{k^2}\right| &\leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \sum_{k=N+1}^{M-1}\left|\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^2} - \frac{1}{(M-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $N \to \infty$, on obtient

$$\boxed{\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{2}{(N+1)^2|\sin(\frac{x}{2})|}.}$$

6. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour montrer qu'elle n'est pas dérivable en 0, on va montrer que son taux d'accroissement $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite finie quand $x \to 0$. Avec la question précédente, on a l'idée de séparer la somme en deux :

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n^2 x} + \frac{1}{x}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

Quand x est très petit, le premier terme va être proche de $\sum_{n=1}^{N} \frac{nx}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, qui est grand si N est grand. Cependant, si x est très petit, la majoration de " $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ " par la question précédente n'est plus très bien. Si x est petit, il faut donc avoir choisi N gros pour que " $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ " soit petit. On va donc relier x et N pour faire notre calcul.

D'après la question 4, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et posons $x_N = \frac{\pi}{2N}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_N)}{x_N} &= \frac{1}{x_N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx_N)}{n^2} + \frac{1}{x_N}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(nx_N)}{n^2 x_N} \\
&\geqslant \frac{1}{x_N}\sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(nx_N)|}{n^2} - \frac{2}{x_N(N+1)^2|\sin(\frac{x_N}{2})|}.
\end{aligned}$$

On a pris $x_N = \dfrac{\pi}{2N}$ pour pouvoir utiliser l'inégalité qui suit.

Comme pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_N)}{x_N} &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{2\pi}{x_N^2 N^2} \\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{8}{\pi}\end{aligned}$$

Comme la série harmonique diverge, on en déduit $\dfrac{f(x_N)}{x_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ ne converge pas quand $x \to 0$. Comme $f(0) = 0$,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$