Mathématiques II – TD$_8$

30-31 mai 2022

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} t\,|t|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Calculer des primitives des fonctions suivantes en precisant sur quel intervalle la primtive est valable :

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^6+1}$

Exercice 3

Pour chaque fonction, déterminer une primitive sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cosh(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto (x^2+2x+2)\cos(2x)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+e^{2x}}$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(2x)+\sin(x)}$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\,(1+\ln(t)^2)}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^e t^n\,\ln(t)\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)-\cos^3(t)}\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\,\ln(1+\cos(u))\,\mathrm{d}u$

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, x f(y) + y f(x) \leqslant 1$$

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $f(x)$ pour $x > 0$.
3. Montrer que pour tous $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a < b$,

$$\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + a\,g(a)^2 - b\,g(b)^2$$

Exercice 8

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue et soient $u\colon J \to I$ et $v\colon J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que la fonction $\phi\colon x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et calculer sa dérivée ϕ'.

Application : étudier le sens de variation de la fonction $\psi\colon x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 9

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique (c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ de deux façons : (1) en utilisant la fonction $g\colon x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$; (2) par un changement de variable.

Exercice 10

Calculer les integrales multiples suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y), x \leqslant 1, y \leqslant 1, x + y \geqslant 1\}$
2. $\displaystyle\int\int_{[-1,1]^2} |x+y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. $\displaystyle\int\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
   où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$
4. $\displaystyle\int\int\int_{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$