Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_2$

20 Septembre 2022

Exercice 1 : (Exemple 1.1.6 du livre)

Soit X un ensemble non vide et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $\mathcal{F}(X,E) = \{f : X \to E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Faire attention aux l'opérations (écriture) différentes dans des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels différents .

Nous allons prouver que $F = \mathcal{F}(X,E)$ vérifie les axiomes des espaces vectoriels pour les lois suivantes :

$$\forall f, g \in F,\ \forall x \in X,\ (f +_F g)(x) = f(x) +_E g(x) \text{ (addition)}$$

$$\forall f \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda ._F f)(x) = \lambda ._E f(x) \text{ (multiplication par un scalaire).}$$

1. La fonction $f +_F g$ est un élément de F, la loi $+_F$ est donc bien une loi de composition interne. Elle est clairement associative et commutative car la loi $+_E$ l'est. Définissons l'élément 0_F par

   $$\forall x \in X,\ 0_F(x) = 0_E.$$

   C'est l'élément neutre de F car 0_E est l'élément neutre de E. On définit enfin pour une fonction f la fonction $-f$ par

   $$\forall x \in X,\ (-f)(x) = -f(x) \text{ (il y a une différence!).}$$

   On vérifie alors aisément que $-f$ est un opposé de f :

   $$\forall x \in X,\ ((-f) +_F f)(x) = -f(x) +_E f(x) = 0_E = 0_F(x).$$

2. La fonction $\lambda ._F f$ est aussi un élément de F, la loi $._F$ définit donc bien une opération externe de F.

   Les propriétés 2. (a), (b), (c) et (d) de cette opération de F découlent toutes directement de la définition des opérations et du fait qu'elles sont vérifiées par celles de E. Montrons par exemple (b). Soient λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$ et f un élément de F. On a, pour tout x élément de X :

   $$((\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) ._F f)(x) = (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) ._E f(x),$$

   mais $._E$ est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$ donc :

   $$(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) ._E f(x) = \lambda ._E f(x) +_E \mu ._E f(x)$$

   puis, par définition des lois $+_F$ et $._F$:

   $$\lambda ._E f(x) +_E \mu ._E f(x) = (\lambda ._F f)(x) +_E (\mu ._F f)(x) = (\lambda ._F f(x) +_F \mu ._F f)(x).$$

   Ces égalités étant valables pour tous les x de X, on en déduit :

   $$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}, \forall f \in F :\ (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) ._F f = \lambda ._F f +_F \mu ._F f.$$

$$\boxed{\mathcal{F}(X,E) = \{f : X \to E\} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

Exercice 2 : (Exercice 1.1 du livre , important)

Montrer, en utilisant la définition d'un espace vectoriel, que dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel les relations suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x \in E,\ 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$;

   Soit x un élément de E. Comme $0_{\mathbb{K}}$ est un neutre de $\mathbb{K}$ et . est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$, on a :
   $$0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$$
   puis, en ajoutant $-0_{\mathbb{K}}.x$, l'inverse de $0_{\mathbb{K}}.x$ des deux côtés de l'égalité :
   $$0_E = 0_{\mathbb{K}}.x + (-0_{\mathbb{K}}.x) = (0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x) + (-0_{\mathbb{K}}.x)$$
   on conclut alors en utilisant l'associativité de l'addition de E :
   $$0_E = 0_{\mathbb{K}}.x + (0_{\mathbb{K}}.x + (-0_{\mathbb{K}}.x)) = 0_{\mathbb{K}}.x\ .$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$;

   La correction de cette question est très similaire à la question précédente. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On utilise que 0_E est un neutre de E et . est distributive par rapport à l'addition de E :
   $$\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E,$$
   puis, puis on ajoute $-\lambda.0_E$, l'inverse de $\lambda.0_E$ des deux côtés de l'égalité et on conclut en utilisant l'associativité de l'addition de E :
   $$0_E = \lambda.0_E + (-\lambda.0_E) = (\lambda.0_E + \lambda.0_E) + (-\lambda.0_E) = \lambda.0_E.$$

3. $\forall x \in E,\ (-1_{\mathbb{K}}).x = -x$;

   Soit x un élément de E. On a, d'après la première question que $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$. Comme . est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$, on a :
   $$1.x + (-1).x = (1 + (-1)).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E.$$
   On remarque alors que $1.x = x$ (. conserve le 1 de $\mathbb{K}$) et que donc $(-1).x$ est un inverse de x. Mais cet inverse est unique donc $(-1).x = -x$.

4. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda.x = 0_E \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0_{\mathbb{K}} \\ \text{ou} \\ x = 0_E \end{array} \right.$.

   La réciproque de cette implication est exactement les questions 1. et 2.. Montrons le sens direct. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et x un élément de E. Supposons que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ il n'y a rien à prouver. Sinon, en utilisant la distributivité de . par rapport à la multiplication de $\mathbb{K}$ et que $1.x = x$ on a :
   $$x = 1.x = (\lambda^{-1} \times \lambda).x = (\lambda^{-1}).0_E,$$
   et donc par la question 2, $x = 0_E$.

Exercice 3 : Combinaison linéaire

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2, \quad u = (1, 2), \quad u_1 = (1, -2), \quad u_2 = (2, 3)$;

On se demande s'il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=xu_1+yu_2$. On doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 1\\ -2x+3y &=& 2\end{array}\right.$$

On peut résoudre ce système pour $y=\frac{4}{7}$, puis $x=-\frac{1}{7}$: u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2 avec $u=-\frac{1}{7}u_1+\frac{4}{7}u_2$.

2. $E=\mathbb{R}^2,\quad u=(1,2),\quad u_1=(1,-2),\quad u_2=(2,3)\,;\quad u_3=(-4,5)\,;$

D'après la question précédente, u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2. Il est combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3, car $u=-\frac{1}{7}.u_1+\frac{4}{7}.u_2+0.u_3$.

3. $E=\mathbb{R}^3,\quad u=(2,5,3),\quad u_1=(1,3,2),\quad u_2=(1,-1,4)\,;$

L'équation $u=xu_1+yu_2$ équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{rclc} x+y &=& 2 & L_1\\ 3x-y &=& 5 & L_2\\ 2x+4y &=& 3 & L_3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclc} x+y &=& 2 & \\ -4y &=& -1 & L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ 2y &=& -1 & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont incompatibles, u n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

4. $E=\mathbb{R}^3,\quad u=(3,1,m),\quad u_1=(1,3,2),\quad u_2=(1,-1,4)$ (discuter suivant la valeur de m).

On reprend le même raisonnement. L'équation $u=xu_1+yu_2$ équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{rclc} x+y &=& 3 & L_1\\ 3x-y &=& 1 & L_2\\ 2x+4y &=& m & L_3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclc} x+y &=& 3 & \\ -4y &=& -8 & L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ 2y &=& m-6 & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.$$

Le système admet donc une solution si et seulement si $m=10$. Par conséquent, u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $m=10$. Dans ce cas, on trouve $u=u_1+2u_2$.

Exercice 4 : Combinaison linéaire

Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 RMB. Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 RMB.
Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. En utilisant la méthode des combinaisons linéaires, combien va-t-il la payer ?

Le vecteur $(5,12,9)$ est combinaison linéaire de $(2,5,4)$ et $(3,5,1)$. Il s'écrit en effet

$$(5,12,9)=\frac{11}{5}(2,5,4)+\frac{1}{5}(3,5,1).$$

Son coût est donc

$$\frac{11}{5}\times 6200+\frac{1}{5}\times 5300=14700 \text{ RMB}.$$

Exercice 5 : Polynôme

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?

   Analyse : on suppose que ce soit le cas, et écrivons $P = aP_1 + bP_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Si on regarde les termes de degré 3, alors on voit qu'on a nécessairement $a = 2$, Si on regarde ensuite les termes de degré 2, alors on voit qu'on a nécessairement $b = 3$.
   Synthèse : on vérifie qu'on a bien $P = 2P_1 + 3P_2$, et donc P est bien combinaison linéaire de P_1 et P_2.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?

   Faisons d'abord attention ! La formule bien connue $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ ne dit pas que $x \mapsto \sin(2x)$ est combinaison linéaire de sin *et* cos*, puisqu'un produit de ces deux fonctions intervient.*

   On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = a\sin(x) + b\cos(x)$.
   Pour $x = 0$, on trouve $b = 0$. Pour $x = \pi/2$, on trouve $a = 0$.
   Et comme $x \mapsto \sin(2x)$ n'est pas la fonction nulle, on obtient une contradiction .
   La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ n'est pas combinaison linéaire des fonctions sin et cos.

Exercice 6 : Sous-espace vectoriel

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Essayer de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels en utilisant la caractérisation. Si vous ne parvenez pas à prouver que ce sont des sous-espaces vectoriels, essayez de trouver un contre-exemple à une des propriétés requises.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 0\}$.

   D'abord , On a $(0, 0, 0) \in E_1$.
   Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ des éléments de E_1.
   $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$ est aussi un élément de E_1. En effet,

   $$(x + x') + (y + y') + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x + y + 3z') = 0.$$

   De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda.X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ est un élément de E_1 car

   $$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$$

   E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 2\}$.

   E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car élément neutre $(0, 0, 0)$ n'est pas dans E_2.

3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 2y = 4z\}$.

   On a $(0, 0, 0) \in E_3$. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ des éléments de E_3.
   $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$ est aussi un élément de E_3. En effet,

   $$x + x' = 2y + 2y' = 2(y + y')$$

et

$$x + x' = 4z + 4z' = 4(z + z').$$

De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.X$ est un élément de E_3.

$$\boxed{E_3 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.

Posons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Leur intersection $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.

Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre (voir l'exercice 3).

Prenons $(5, 0, 2) \in F \subset F \cup G$ et $(1, 1, 0) \in G \subset F \cup G$.
Alors $(5, 0, 2) + (1, 1, 0) = (6, 1, 2)$ n'est pas un élément de F car $12 + 3 - 10 = 5 \neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6 - 1 + 2 = 5 \neq 0$.
Ainsi, $F \cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.