Faire attention à la rédaction.

Problème 1 : Filtre d'un signal

Dans un système de détection d'ondes gravitationnelles, un détecteur reçoit un signal ayant la forme suivante : $V_d(t) = V_0[m + \varepsilon \cos(\Omega t) + m \cos(2\Omega t)]$ où $V_0, m, \varepsilon, \Omega$ sont des constantes. m et ε ont le même ordre de grandeur.
Le terme proportionnel à ε est le terme utile, qui permet d'analyser les ondes étudiées.

1. On veut garder le terme utile et éliminer les deux autres. Quel type de filtre faut-il utiliser ? Justifier.

Pour filtrer ce signal, on utilise le montage représenté sur la figure 1, dans lequel l'amplificateur opérationnel (AO) est idéal. On note V_e et V_s les tensions d'entrée et de sortie.

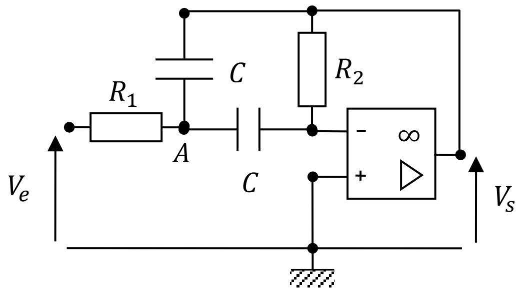

Figure 1. Filtre utilisé.

2. Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ de ce montage en RSE.

On la mettra sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Déterminer les expressions de H_0, ω_0 et Q.

On met en entrée de ce montage la tension donnée :

$$V_d(t) = V_0[m + \varepsilon \cos(\Omega t) + m \cos(2\Omega t)]$$

3. Quelle doit être la relation entre Ω et ω_0, et comment doit-on choisir la valeur de Q, pour que le filtre sélectionne la composante utile de $V_d(t)$? Justifier.

4. La condition de la question **3** est supposée remplie. Déterminer l'expression des amplitudes des deux composantes sinusoïdales du signal de sortie $V_s(t)$. Comparez les. On note A_1 l'amplitude de la composante de pulsation Ω et A_2 l'amplitude de la composante de pulsation 2Ω.

Problème 2 : Vibrations longitudinales d'une chaîne d'atomes

Un modèle très simple permet de comprendre la propagation de certaines ondes dans les solides.

On modélise les atomes dans un solide comme des masses ponctuelles séparées de ressorts identiques. On note γ la raideur des ressorts et m la masse des atomes. La longueur à l'équilibre de chaque ressort est notée a (voir figure 2).

Les mouvements sont tous horizontaux. Toute autre force est négligée : en particulier, on néglige tout frottement.

Nous allons étudier les mouvements longitudinaux des masses : ces mouvements sont analogues aux oscillations d'un fluide soumis à une onde sonore. Il s'agit donc d'un modèle d'ondes sonores dans les solides.

Nous numérotons les masses avec un entier n. La masse n se trouve en $x = na$ à l'équilibre. Lorsqu'elle est déplacée, sa position devient : $x_n(t) = na + \psi_n(t)$.

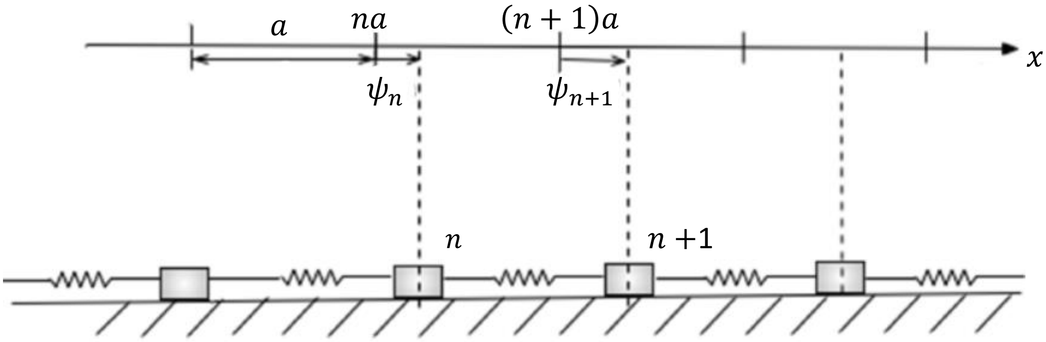

Figure 2. Chaîne d'atomes.

1. Montrer que $m\dfrac{\partial^2\psi_n}{\partial t^2} = -\gamma(\psi_n - \psi_{n-1}) + \gamma(\psi_{n+1} - \psi_n)$ (1) en appliquant le PFD.

2. On fait l'approximation des milieux continus : on définit une fonction $\psi(x,t)$ telle que $\psi(x = na, t) = \psi_n(t)$ à tout instant t.

2.a. Faire des développements limités au deuxième ordre pour $\psi_{n+1}(t)$ et $\psi_{n-1}(t)$.

2.b. En déduire l'équation aux dérivées partielles dont $\psi(x,t)$ est solution. Nommer cette équation et faire apparaître une constante c. Nommer c.

3. Est-ce que c'est une onde transversale ou longitudinale ? Justifier.

4.a. Calculer la constante c pour une onde sonore qui se propage dans le fer.

Données :

masse molaire de fer $M = 56\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; nombre d'Avogadro $\mathrm{N_A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$;

$a = 250\ \mathrm{pm}$; $\gamma = 52\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

4.b. Pourquoi Averell Dalton colle-t-il son oreille sur les rails pour détecter l'arrivée d'un train (voir figure 3) ?

Figure 3. Averell Dalton colle son oreille sur les rails.
(Image tirée de la bande dessinée Lucky Luke, par Morris et Goscinny)