Table des matières

Notations

Notation	Signification
Lettres grecques	
α	alpha
β	bêta
γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	zêta
η	êta
θ, ϑ, Θ	thêta
κ	kappa
λ, Λ	lambda
μ	mu
ν	nu
ξ, Ξ	xi (prononcé « ksi »)
π	pi
ρ	rhô
σ, Σ	sigma
τ	tau
ϕ, φ, Φ	phi
ψ, Ψ	psi

χ	chi (prononcé « ki »)
$\omega,\ \Omega$	oméga

Ensembles usuels

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$	Ensemble des entiers naturels ou relatifs non nuls
$[\![p, q]\!]$	Ensemble des entiers relatifs compris entre p et q, où p et q sont des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres rationnels ou des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$	Ensemble des nombres rationnels ou des nombres réels ou des nombres complexes non nuls
$\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}_+^*$	Ensemble des nombres rationnels ou des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (dans cet ouvrage seulement)
$\mathbb{K}^n$	Ensemble des n-uplets (si $n = 2$, on parle de *couple* et si $n = 3$, on parle de *triplet*)

Opérateurs

$\int$	Signe intégral
$\sum$	Signe somme
$\prod$	Signe produit

Notations usuelles

$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker (vaut 1, si $i = j$ et 0 sinon)
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière de x, x nombre réel
$\lceil x \rceil$	Partie entière supérieure de x, x nombre réel
$n!$	Factorielle de n, n entier naturel
$\binom{n}{k}$	Coefficient binomial, où n et k sont des entiers naturels

Opérations sur les ensembles

$\mathscr{P}(E)$	Ensemble des parties de E
$E \times F$	Produit cartésien des ensembles E et F
E^2	$E \times E$
E^n	$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)
$E \setminus F$	Ensemble E privé de F
$\emptyset$	Ensemble vide
$\sup A$	Borne supérieure de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$
$\inf A$	Borne inférieure de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$
$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$	Produit cartésien des n ensembles E_1, …, E_n
$\displaystyle\prod_{i \in I} E_i$	Produit cartésien de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble quelconque ; les éléments de $\prod_{i \in I} E_i$ sont notés $(x_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$
E^F	Ensemble des familles d'éléments de l'ensemble E indexées par l'ensemble F (correspond à $\prod_{i \in F} E_i$ où *tous* les E_i sont égaux à E)
$a.X$	Ensemble des éléments de la forme $a\,x$, où $x \in X \subset \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$

Quantificateurs et logique

$\forall \ldots$	« Quel que soit… » (ou « Pour tout »)
$\exists \ldots$	« Il existe… »
$\exists! \ldots$	« Il existe un unique… »
$\nexists \ldots$	« Il n'existe pas… »
$\Longrightarrow$	Implication
$\Longleftrightarrow$	Équivalence

Quantificateurs (usage)

$\forall (x, y) \in E^2$	Signifie $\forall x \in E$, $\forall y \in E$ *L'écriture* $\forall x$, $y \in E$ n'est pas correcte !

Notations de définitions

$\overset{\text{Not}}{=}$	Introduit une nouvelle notation
$\overset{\text{Def}}{=}$	Introduit une nouvelle définition
Fonctions	
id_X	Fonction identité de l'ensemble X
f^{-1}	Fonction réciproque de f, où $f : E \to F$. Désigne aussi bien la fonction $f^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$ que la fonction, uniquement définie lorsque f est bijective, par pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$, tel que $y = f(x)$
$\mathscr{F}(X, Y)$	Ensemble des fonctions définies sur l'ensemble X à valeurs dans l'ensemble Y
$\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$	Ensemble des fonctions continues définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$	Ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$	Ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
f', f"	Fonctions dérivées première, seconde de f
$f^{(n)}$	Fonction dérivée n-ième de f, $n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$	Dérivée de l'expression $f(x)$ (correspond à la notation informatique usuelle `diff(f(x), x)`)
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(f(x)\big)$	Dérivée de n-ième de l'expression $f(x)$ (correspond à la notation informatique usuelle `diff(f(x), x, n)`) ou `diff(f(x), x, ..., x)` (`x` étant répété n fois)
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (ou $\partial_1 f$), $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (ou $\partial_2 f$)	Fonctions dérivées partielles (se lit « d rond f sur d rond x » ou « d rond 1 f »)
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,(ou respectivement $\partial^2_{1,1} f$ ou $\partial_1 \partial_1 f$ d'une part et $\partial^2_{1,2} f$ ou $\partial_1 \partial_2 f$ d'autre part)	Fonction dérivées partielles secondes
Comparaisons et limites	
$o_{x_0}()$, $o()$	Petit-o au voisinage de x_0, au voisinage de 0

$O_{x_0}()$, $O()$	Grand-O au voisinage de x_0, au voisinage de 0
$\underset{x_0}{\sim}$, $\sim$	Équivalent au voisinage de x_0, au voisinage de 0
$\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}$	Limite quand x tend vers x_0
x^+	Par valeurs supérieures de x
x^-	Par valeurs inférieures de x
Nombres complexes	
$\mathrm{Re}(z)$	Partie réelle de z
$\mathrm{Im}(z)$	Partie imaginaire de z
$\lvert z\rvert$	Valeur absolue de z ou module de z
$\overline{z}$	Conjugué de z
$\mathbb{U}_n$	Ensemble des racines n-ième de l'unité
$\mathbb{U}$	Ensemble des nombres complexes de module 1
j	$\exp\left(i\,\frac{2\pi}{3}\right)$

Chapitre 1

Nombres complexes

注释 1.1

复数是实数的拓展，复数的发现源于三次方程根的表达式。复数在物理领域有很多重要的应用，如信号分析，流体力学等。

1.1 Les propriétés de $\mathbb{C}$

1.1.1 Caractéristiques

Définition 1.1 – Nombres complexes

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des *nombres complexes*. Il peut être défini par

$$\mathbb{C} = \left\{a + i\,b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

où i est une racine (imaginaire) de $x^2 + 1 = 0$. Si $z = a + i\,b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a s'appelle la *partie réelle* de z et se note $\mathrm{Re}(z)$, b s'appelle la *partie imaginaire* de z et se note $\mathrm{Im}(z)$ [a].

a. On dit *la* partie réelle et *la* partie imaginaire, car elles sont clairement uniques.

Re(z) 叫做复数z的实部；Im(z)叫做复数z的虚部；当实部为零时，复数 z 叫做纯虚数；复数z也可理解成实数a和b组成的有序对。

Session `Wxmaxima` 1.1 – Opérations dans $\mathbb{C}$

```
(%i5) ratsimp((a+i*b)+(c+i*d));
```

(%o5) $(d+b)\,i+c+a$

```
(%i6) ratsimp((a+i*b)*(c+i*d));
```

(%o6) $(a\,d+b\,c)\,i-b\,d+a\,c$

Session `Python` 1.1 – Opérations dans $\mathbb{C}$

La session couvre tout le chapitre. c'est pourquoi les numéros vont jusqu'à 20. Il faut toujours initialiser `Sympy`. La fonction `init_printing` permet d'avoir un plus joli affichage dans certains cas...

`In[1]` – Initialisation de `Sympy`

```python
from sympy import *
a, b, c, d = symbols('a b c d', real=True)
init_printing()
```

`In[2]`

```python
((a+I*b)+(c+I*d)).collect(I)
```

`Out[2]`

$a+c+i\,(b+d)$

In[3]

```
((a+I*b)*(c+I*d)).expand().collect(I)
```

Out[3]

$ac - bd + i\,(ad + bc)$

Les lois de composition induites sont donc

L'addition.

$$(a + i\,b) + (c + i\,d) \overset{\text{Def}}{=} (a + c) + i\,(b + d)$$

La multiplication.

$$(a + i\,b)\,(c + i\,d) \overset{\text{Def}}{=} (a\,c - b\,d) + i\,(a\,d + b\,c)$$

Propriété 1.1

$\mathbb{C}$ muni de cette *addition* vérifie

— c'est une *opération interne*, soit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ x + y \in \mathbb{C}$$

— elle est *associative*, soit

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ (x + y) + z = x + (y + z) \overset{\text{Not}}{=} x + y + z$$

— elle possède un *élément neutre*, noté 0, soit

$$\forall x \in \mathbb{C},\ x + 0 = 0 + x = x$$

— tout élément x possède un *opposé*, noté $-x$, soit

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \exists! y \in \mathbb{C},\ x + y = y + x = 0,\ (y \text{ est noté } -x)$$

— elle est *commutative*, soit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ x + y = y + x$$

Propriété 1.2

$\mathbb{C}$ muni de cette *multiplication*, notée (espace fine) qui vérifie

— c'est une opération interne, soit
$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ x\,y \in \mathbb{C}$$

— elle est associative, soit
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ (x\,y)\,z = x\,(y\,z) \overset{\text{Not}}{=} x\,y\,z$$

— elle possède un élément neutre, noté 1, soit
$$\forall x \in \mathbb{C},\ x\,1 = 1\,x = x$$

— tout élément $x \neq 0$ possède un *inverse*, noté $1/x$, soit
$$\forall x \in \mathbb{C}^*,\ \exists! y \in \mathbb{C},\ x\,y = y\,x = 1,\ \left(y \text{ est noté } \frac{1}{x}\right)$$

— elle est commutative, soit
$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ x\,y = y\,x$$

— elle est *distributive par rapport à l'addition*, soit
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ x\,(y+z) = x\,y + x\,z$$

On dit alors que $\mathbb{C}$ *est un* corps commutatif*.*

Remarque 1.1

Naturellement, $\mathbb{R}$ peut-être injecté dans $\mathbb{C}$ par l'application
$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ a \mapsto a + i\,0 \end{cases}$$

On appellera toujours $\mathbb{R}$ l'image de cette application, ce sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle. Les nombres complexes de partie réelle nulle s'appellent les *nombres complexes imaginaires purs*, leur ensemble sera noté $i.\mathbb{R}$.

1.1.2 Représentations

Historiquement, l'introduction de ce i imaginaire a posé problème. Aussi a-t-on cherché une autre formulation. On peut en effet remarquer que, si $M = (a, b)$ est un point de $\mathbb{R}^2$, on peut lui associer naturellement le complexe $a + i\,b$, de manière bijective.[a]

[a]. On pourrait donc définir i comme le couple $(0, 1)$, en confondant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. En posant $1 = (1, 0)$, on aurait

$$(a, b) = a\,1 + b\,i \overset{\text{Not}}{=} a + i\,b$$

Nous garderons dans ce cours la séparation formelle entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

平面上的点与复数是一一对应的； 复数不仅可以看作平面上的点，也可以看作成一种向量，从而进行复数的几何加法与乘法运算。

Définition 1.2 – Affixe d'un point du plan

Le nombre complexe $z = a + i\,b$ s'appelle *affixe du point* $M = (a, b)$. Nous noterons parfois $M(z)$ pour signifier cette relation entre M et son affixe. On dit alors que M est l'*image* de z.

Propriété 1.3

Regardons ce qui se passe lorsque nous posons $O = (0, 0)$.
Si z est l'affixe de M et si z' est l'affixe de M', alors

$$z + z' \text{ est l'affixe du point } O + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

Propriété 1.4

On peut alors « transporter » les propriétés de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.

La norme

On a, si $M = (a, b)$ et $z = a + i\,b$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Définition 1.3 – Module de z

Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe, où a et b sont réels, on appelle *module de z* l'expression

$$|z| \overset{\text{Not}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque 1.2

Si nous notons $\overline{z} = a - i\,b$, nous avons

$$\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$$

Définition 1.4 – Conjugué de z

$\overline{z}$ s'appelle le *conjugué* de z et $M(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe Ox (l'axe des réels).

$\overline{z}$ 叫做复数z的共轭。

On a alors les propriétés évidentes, pour z et z' dans $\mathbb{C}$

— $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
— $\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
— et puis

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\left(\overline{z}\right) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = -\,\mathrm{Im}(\overline{z}) = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}$$

— $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ (égalité si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}_+$) et $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$ (égalité si, et seulement si $z \in i.\mathbb{R}_+$)
— $|z| = |\overline{z}|$, $|z\,z'| = |z|\,|z'|$
— si $z \neq 0$, alors

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

— si $z' \neq 0$, alors

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

1.1.3 Exponentielle complexe

Définition 1.5 – Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul, on appelle *argument de z* tout nombre réel θ tel que

$$z = |z|\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

On parle de *représentation module-argument de z*, ou d'*écriture trigonométrique de z*.

熟练掌握复数的三角式，$|z|$表示z的模，θ表示z的辐角。任意一个不为零的复数z有无数个辐角，且辐角相差2π的整数倍, 通常在$(0, 2\pi]$ 间的辐角称为辐角主值。

Remarque importante 1.3

Pour les coordonnées polaires, on autorise le rayon ρ à être négatif ou positif. Pour les nombres complexes, on a choisi de prendre le module de z comme rayon, il est donc strictement positif (puisque $z \neq 0$).

Argument

L'argument θ est défini à $2\,\pi$-près (on dit « un » argument).

Notation 1.1

On note, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^{i\,\theta} \overset{\text{Not}}{=} \cos\theta + i\ \sin\theta}$$

On a donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \exists\theta \in \mathbb{R},\ z = |z|\, e^{i\,\theta}}$$

On peut donc, pour prolonger les propriétés de l'exponentielle réelle, poser

$$\text{Si } z = a + i\,b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(z) = e^z \overset{\text{Not}}{=} e^a\, e^{i\,b} = e^a\ (\cos(b) + i\ \sin(b))$$

Proposition 1.1

On a

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z\, e^{z'}}$$

Démonstration

Si $z = a + i\, b$ et $z' = a' + i\, b'$, avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$, alors, par définition

$$e^{z+z'} = e^{a+a'}\,(\cos(b+b') + i\, \sin(b+b'))$$

Mais

$$\begin{aligned} e^z\, e^{z'} &= e^a\,(\cos(b) + i\, \sin(b))\, e^{a'}\,(\cos(b') + i\, \sin(b')) \\ &= e^a\, e^{a'}\,\big(\cos(b)\, \cos(b') - \sin(b)\, \sin(b') + i\,(\sin(b)\, \cos(b') + \cos(b)\, \sin(b'))\big) \\ &= e^{a+a'}\,\big(\cos(b+b') + i\, \sin(b+b')\big) \end{aligned}$$

On a les propriétés évidentes suivantes, pour s et t des nombres réels et $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} e^{i\,t} = e^{i\,s} &\iff t - s \in 2\,\pi.\mathbb{Z} \\ \overline{e^{i\,s}} &= e^{-i\,s} = \frac{1}{e^{i\,s}} \\ \cos(s) &= \frac{e^{i\,s} + e^{-i\,s}}{2} \quad \text{(Formule d'Euler)} \\ \sin(s) &= \frac{e^{i\,s} - e^{-i\,s}}{2\,i} \quad \text{(Formule d'Euler)} \\ \left(e^{i\,s}\right)^n &= e^{i\,n\,s} \quad \text{(Formule de Moivre)} \end{aligned}$$

Remarque 1.4

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.

Définition 1.6 – $\mathbb{U}$

Nous noterons $\mathbb{U}$ l'image par exp des imaginaires purs. Donc

$$\mathbb{U} = \exp(i.\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$

$\mathbb{U}$ 表示全体模为 1 复数的集合。

Propriété 1.5

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} |e^z| &= e^{\mathrm{Re}(z)} \\ \overline{e^z} &= e^{\overline{z}} \\ \frac{1}{e^z} &= e^{-z} \end{aligned}$$

Utilisation de l'arc-moitié

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} e^{i\,a} + e^{i\,b} &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\,\frac{a+b}{2}\right) \\ e^{i\,a} - e^{i\,b} &= 2\,i\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\,\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemple 1.1

Toutes ces formules permettent de retrouver facilement les formules de trigonométrie.

Développement

Prenons $\cos(3\,x)$, où $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(3\,x) = \operatorname{Re}\left(e^{3\,i\,x}\right) = \operatorname{Re}\left(\left(e^{i\,x}\right)^3\right) = \operatorname{Re}\left((\cos(x) + i\,\sin(x))^3\right)$$

en développant, il vient

$$\cos(3\,x) = \cos^3(x) - 3\,\cos(x)\,\sin^2(x) = 4\,\cos^3(x) - 3\,\cos(x)$$

Réduction

Prenons $\cos^3(x)$

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^3$$

en développant, il vient

$$\cos^3(x) = \frac{e^{3\,i\,x} + 3\,e^{i\,x} + 3\,e^{-i\,x} + e^{-3\,i\,x}}{8} = \frac{\cos(3\,x) + 3\,\cos(x)}{4}$$

Session `Wxmaxima` 1.2 – Calculs trigonométriques

```
(%i1) trigexpand(cos(3*x));
```

(%o1) $\cos(x)^3 - 3\cos(x)\,\sin(x)^2$

```
(%i2) trigsimp(%);
```

(%o2) $4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$

```
(%i3) trigreduce(cos(x)^3);
```

(%o3) $\dfrac{\cos(3\,x) + 3\cos(x)}{4}$

Session `Python` 1.2 – Calculs trigonométriques

Pour bien calculer en trigonométrie avec `Sympy`, il faut bien préciser si les variables sont réelles ou complexes.

In[4]

```
x = symbols('x', real=True)
expand_trig(cos(3*x))
```

Out[4]

$4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

In[5]

```
_.trigsimp()
```

Out[5]

$\cos(3x)$

In[6] – Ne fait rien, car l'expression est déjà simple

```
trigsimp(cos(x)**3)
```

Out[6]

$\cos^3(x)$

In[7]

```
(((exp(I*x)+exp(-I*x))/2)**3).expand()
```

Out[7]

$$\frac{e^{3ix}}{8} + \frac{3e^{ix}}{8} + \frac{3e^{-ix}}{8} + \frac{e^{-3ix}}{8}$$

In[8]

```
_.rewrite(cos)
```

Out[8]

$$\frac{3\cos(x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{4}$$

Proposition 1.2 – Inégalité triangulaire

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, *alors*

$$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

avec égalité (lorsqu'il sont tous les deux non nuls) si, et seulement si, z *et* z' *ont même argument à* 2π *près.*

复数的三角不等式在解题时经常使用到。

Démonstration

Si z ou z' est nul, il n'y a rien à démontrer.
Sinon, ils ont tous les deux un argument (respectivement θ et θ'), alors

$$z + z' = |z|\, e^{i\,\theta} + |z'|\; e^{i\,\theta'}$$

donc

$$\begin{aligned}|z + z'|^2 &= (|z|\,\cos\theta + |z'|\,\cos\theta')^2 + (|z|\,\sin\theta + |z'|\,\sin\theta')^2\\ &= |z|^2 + 2|z|\,|z'|\,\cos(\theta - \theta') + |z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2\end{aligned}$$

Il y a égalité si, et seulement si, $\cos(\theta - \theta') = 1$, soit $\theta - \theta' \in 2\pi.\mathbb{Z}$.

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Représenter sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$$i+i,\ -2-2\sqrt{3}\,i,\ 1+e^{i\,x}\ (x\in\mathbb{R}),\ i+e^{i\,x}\ (x\in\mathbb{R})$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20},\ 1+z+z^2\ (z\in\mathbb{U})$$

1.1.2 Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, montrer que

$$\big||z|-|z'|\big|\leq|z-z'|$$

1.1.3 Soit z_1, …, z_n des nombres complexes non nuls ($n\in\mathbb{N}^*$), montrer que

$$|z_1+\cdots+z_n|\leq|z_1|+\cdots+|z_n|$$

Montrer ensuite qu'il y a égalité si, et seulement si, les arguments sont égaux à 2π près.

1.1.4 Soit $z\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}$, montrer que

$$\exists a\in\mathbb{R},\ z=\frac{1+i\,a}{1-i\,a}$$

1.1.5 Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, montrer que

$$\Big[|z|<1 \text{ et } |z'|<1\Big] \implies \left[\left|\frac{z+z'}{1+z\,\overline{z'}}\right|<1\right]$$

1.1.6 Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, montrer que

$$|z|+|z'|\leq|z+z'|+|z-z'|$$

Étudier le cas d'égalité ?

1.1.7 Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, montrer que

$$\Big[|z|\leq 1 \text{ et } |z'|\leq 1\Big] \implies \Big[|z+z'|\leq\sqrt{2} \text{ ou } |z-z'|\leq\sqrt{2}\Big]$$

1.1.8 Soit $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$), montrer que

$$\frac{|z_1+\cdots+z_n|}{1+|z_1+\cdots+z_n|}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|}{1+|z_k|}$$

1.2 Équations dans $\mathbb{C}$

1.2.1 Racines de l'unité

Définition 1.7 – Racines de l'unité

On appelle *unité* le nombre complexe identifié à 1. Le problème qui va nous intéresser est le suivant étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation

$$z^n = 1$$

Les solutions complexes de cette équation s'appellent *racines n-ième de l'unité.*

n次单位根是n次幂为1的复数；在复数范围内n次单位根正好有n个。

Propriété 1.6

Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si $z^n = 1$, alors $z \in \mathbb{U}$ ($\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$).

Démonstration

En effet, $z \neq 0$, il possède un argument noté θ. On a alors

$$z^n = \left(|z|\, e^{i\,\theta}\right)^n = |z|^n\, e^{i\,n\,\theta} = 1$$

En prenant les modules, on obtient

$$|z|^n = 1, \text{ or } |z| > 0 \text{ donc } |z| = 1$$

Propriété 1.7

Il y a exactement n racines n-ième de l'unité.

Démonstration

En effet, si z est solution de $z^n = 1$, alors on a

$$n\,\theta - 0 \in 2\,\pi.\mathbb{Z}$$

soit

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2\,k\,\pi}{n}$$

Mais, la fonction $x \mapsto e^{i\,x}$ est $2\,\pi$-périodique, il reste donc les solutions

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ z_k = \exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)}$$

Notation 1.2

On note

$$\mathbb{U}_n = \left\{\exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

c'est l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

熟练掌握复数范围内n次单位根的公式及性质。

Propriété 1.8

On trouve facilement

$$\mathbb{U}_1 = \{1\},\ \mathbb{U}_2 = \{1, -1\},\ \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \text{ et } \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

où

$$\boxed{j = \exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{3}\right)}$$

On a donc $j^3 = 1$, $\overline{j} = j^2$, $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 1.3

Plus généralement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [n \geq 2] \implies \left[\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right) = 0\right]}$$

Démonstration

Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)$$

c'est en fait une somme géométrique de raison $q = \exp(2\,i\,\pi/n) \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right)^k = \frac{1 - \left(\exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right)^n}{1 - \exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{n}\right)} = 0$$

Exemple 1.2 – Racines n-ième

Soit maintenant l'équation

$$z^n = a,\ \text{où } a \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$$

($a = 0$ est facile). Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^n = a$ (une solution), alors

$$\{z \in \mathbb{C},\ z^n = a\} = \delta.\mathbb{U}_n$$

Comment trouver δ ?

$$\text{Si } a = |a|\,e^{i\,\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ \text{ on peut prendre } \delta = \sqrt[n]{|a|}\,\exp\left(i\,\frac{\theta}{n}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C},\ z^n = a\} = \left\{\sqrt[n]{|a|}\,\exp\left(i\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Résoudre $z^n = {z_1}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ donné, z et z_1 étant deux nombres complexes, z connu, z_1 à trouver.

1.2.2 Résoudre $1 + z + z^2 = 0$ dans $\mathbb{C}$, en déduire une factorisation de l'expression

$$z^2 + 2\,z\,z' + z'^2$$

1.2.3 Résoudre l'équation où $z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue

$$1 + 2\,z + 2\,z^2 + \cdots + 2\,z^{n-1} + z^n = 0,\ n \in \mathbb{N}^* \text{ donné}$$

1.2.4 Soit

$$\omega = \exp\left(i\,\frac{2\,\pi}{7}\right)$$

(a) Montrer que

$$z = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } z' = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

sont conjugués et que $\mathrm{Im}(z) > 0$.

(b) En déduire un calcul de z et z', à l'aide de $z + z'$ et $z\,z'$.

1.2.5 Soit $\omega \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$. Montrer que

$$(\omega^2 + \omega + 1)\,(\omega^3 + \omega + 1)\,(\omega^4 + \omega + 1) = \omega\,(\omega + 1)$$

1.2.6 Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$$

1.2.7 Calculer, pour $\omega \in \mathbb{U}_n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\,\omega^k$$

1.2.8 Calculer

$$\cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

En déduire une construction à la règle non graduée et au compas du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.

1.2.9 Calculer

$$\max\left\{\left|\sum_{\omega \in E} \omega\right|,\ E \subset \mathbb{U}_5\right\}$$

1.2.2 Équations du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, on peut toujours écrire, pour $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}}$$

Il vient alors, pour l'équation d'inconnue complexe z, $a\,z^2 + b\,z + c = 0$.

1. Si $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 0$ (Δ s'appelle le *discriminant de l'équation*), alors l'équation possède une unique solution

$$z_0 = -\frac{b}{2\,a} \text{ (dite solution double)}$$

   et l'équation s'écrit

$$a\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = 0$$

2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation possède deux solutions distinctes [a]

$$\left(\text{si } \delta \in \mathbb{C} \text{ vérifie } \delta^2 = \Delta\right)\ z_1 = \frac{-b + \delta}{2\,a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2\,a}$$

   Et l'équation s'écrit

$$a\,(z - z_1)\,(z - z_2) = 0$$

---

a. Il est totalement *interdit* d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un nombre complexe (sauf si c'est un nombre réel positif) !

熟练掌握复数范围内一元二次方程的求解方法。

Remarque 1.5

En développant l'expression ci-dessus, on voit que

$$a\,(z-z_1)\,(z-z_2) = a\,z^2 - (z_1+z_2)\,z + z_1\,z_2 = a\,z^2 + b\,z + c$$

donc

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1\,z_2 = \frac{c}{a}$$

Lorsque la solution est double les relations sont encore exactes (avec $z_1 = z_2 = z_0$).

Propriété 1.9 – Cas réel

Si a, b et c sont dans $\mathbb{R}$, alors lorsque $\Delta < 0$, les deux racines complexes obtenues sont conjuguées, car on peut prendre

$$\delta = i\,\sqrt{-\Delta} \text{ et } -\delta = \overline{\delta}$$

注释 1.2

特别要指出的是在根号内的数必须是大于等于零的数；两复数之间并不能直接比较大小。

Remarque 1.6

De manière générale, si α est solution de $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, alors

$$\overline{\alpha} \text{ est solution de } \overline{a}\,z^2 + \overline{b}\,z + \overline{c} = 0$$

Démonstration

On a

$$\overline{a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c} = \overline{a}\,\overline{\alpha}^2 + \overline{b}\,\overline{\alpha} + \overline{c}$$

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2 + (i-1)\,z + i + 2 = 0$$

1.3.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2 + (1+3\,j)\,z + 8 + j = 0$$

1.3.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$
$$\overline{z} = a\,z + b$$

1.3.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$$
en remarquant que j est solution.

1.3.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^{18} - z^{12} + z^6 = 1$$

1.3.6 Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2 = 27\,\overline{z}$$

1.2.3 Équation du troisième degré

注释 1.3

了解本小节介绍的一元三次方程在复数范围内的求解方法。

Les équations de degré 3, de la forme
$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$
a, b et c sont des nombres réels, puis complexes, ont longtemps posé problème aux mathématiciens. La résolution se passe en plusieurs étapes (méthode de Cardan)

1. On normalise l'équation (la mettre sous une forme particulière fixée), en supprimant le terme de degré 2. En posant

$x = y + h$, il vient

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = y^3 + y^2\,(3\,h + a) + y\,(3\,h^2 + 2\,a\,h + b) + h^3 + a\,h^2 + b\,h + c$$

donc, en choisissant $h = -a/3$, on obtient une équation de la forme

$$y^3 + p\,y + q = 0$$

2. *Analyse.* Si y est solution, on peut l'écrire sous la forme $y = u + v$, il vient

$$u^3 + v^3 + (u + v)\,(p + 3\,u\,v) + q = 0$$

et donc, si l'on impose $p + 3\,u\;v = 0$, alors

$$u^3 + v^3 = -q \text{ et } u^3\,v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré

$$z^2 + q\,z - \frac{p^3}{27} = 0$$

3. *Synthèse.* Le discriminant de l'équation ci-dessus est

$$\Delta = q^2 + 4\,\frac{p^3}{27} = \frac{4\,p^3 + 27\,q^2}{27}$$

Donc
— Si $4\,p^3 + 27\,q^2 \neq 0$, soit $\delta \in \mathbb{C}$, tel que $\delta^2 = \Delta$, on trouve alors

$$u^3 = \frac{-q + \delta}{2} \text{ et } v^3 = \frac{-q - \delta}{2}$$

Soit u_0 et v_0 deux nombres complexes qui vérifient

$$u_0^3 = u^3 \text{ et } v_0^3 = v^3$$

u et v vérifient de plus

$$u\,v = -\frac{p}{3},\text{ il existe } k \in [\![0, 2]\!]\,,\ u = j^k\,u_0 \text{ et il existe } l \in [\![0, 2]\!]\,,\ v = j^l\,v_0$$

on trouve alors k et l en écrivant

$$u\,v = j^{k+l}\,u_0\,v_0 = -\frac{p}{3}$$

Quitte à changer un peu le u_0, on peut supposer que

$$u_0\,v_0 = -\frac{p}{3}$$

on trouve en ce cas, 3 solutions (distinctes)

$$y_1 = u_0 + v_0,\ y_2 = j\,u_0 + j^2\,v_0 \text{ et } y_3 = j^2\,u_0 + j\,v_0$$

— Si $\Delta = 0$, alors

$$u_0^3 = u^3 = v^3 = v_0^3 = -\frac{q}{2}$$

Donc

$$\text{il existe } m \in [\![0,2]\!]\,,\ v_0 = j^m\,u_0 \text{ et } u_0\,v_0 = -\frac{p}{3}$$

On trouve alors les solutions

$$y_1 = (1 + j^m)\,u_0,\ y_2 = (j + j^{m+2})\,u_0 \text{ et } y_3 = (j^2 + j^{m+1})\,u_0$$

Dans tous les cas pour m, il y a deux valeurs égales. On obtient donc

$$\boxed{\left[y^3 + p\,y + q = 0 \text{ a une racine double}\right] \iff \left[4\,p^3 + 27\,q^2 = 0\right]}$$

Remarque importante 1.7

Et si nous sommes avec une équation à coefficients réels ? Nous avons alors 3 cas

1. $4\,p^3 + 27\,q^2 = 0$, nous avons une racine double (par exemple $y_2 = y_3$). Mais, comme on peut alors choisir $u_0 \in \mathbb{R}$ et $m = 0$, on trouve que *toutes les racines sont réelles !* Pour les calculer, on écrit l'équation

$$(y - y_1)\,(y - y_2)^2 = 0$$

On a donc en développant

$$y_1 + 2\,y_2 = 0,\ 2\,y_1\,y_2 + y_2^2 = p \text{ et } y_1\,y_2^2 = -q$$

Il est facile de conclure.

2. $4\,p^3 + 27\,q^2 > 0$, nous pouvons alors trouver u_0 et v_0 dans $\mathbb{R}$, les solutions sont

$$y_1 = u_0 + v_0,\ y_2 = j\,u_0 + j^2\,v_0 \text{ et } y_3 = j^2\,u_0 + j\,v_0$$

Il y a donc *une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.*

3. $4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$, nous pouvons alors prendre $v_0 = \overline{u_0}$, les solutions sont

$$y_1 = u_0 + \overline{u_0},\ y_2 = j\,u_0 + \overline{j\,u_0} \text{ et } y_3 = j^2\,u_0 + \overline{j^2\,u_0}$$

Il y a *trois solutions réelles.*

Remarque 1.8

1. D'où vient ce $4\,p^3 + 27\,q^2$? Il suffit de raisonner graphiquement sur le tracé du graphe de la fonction $f : y \mapsto y^3 + p\,y + q$ (dans le cas réel, on dessine très mal dans $\mathbb{C}$), en effet, on a trois cas
   (a) La fonction est strictement croissante (dérivée positive, $p \geq 0$), alors une seule solution réelle possible.
   (b) La dérivée s'annule en deux valeurs (ici $p < 0$), le nombre de solutions réelles dépendra de la position respective des valeurs de la fonction aux extremums locaux. Pour avoir trois solutions réelles, il est nécessaire et suffisant (théorème des valeurs intermédiaires) d'avoir

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\,f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$$

   soit

$$\left(\sqrt{-\frac{p^3}{27}} + p\,\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)\,\left(-\sqrt{-\frac{p^3}{27}} - p\,\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right) = q^2 + \frac{4\,p^3}{27} < 0$$

   Voir la figure 1.1, page 45.
2. (Cas réel, avec trois racines réelles). La forme des solutions réelles nous incite à chercher des solutions sous la forme

$$y = \rho\,\cos(\theta)$$

On a donc

$$\rho^3 \cos^3(\theta) + p\,\rho \cos(\theta) + q = 0 \text{ et } 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) - \cos(3\,\theta) = 0$$

en exprimant que les deux équations sont les mêmes à proportionnalité près, il vient

$$\frac{\rho^3}{4} = -\frac{p\,\rho}{3} = -\frac{q}{\cos(3\,\theta)}$$

Comme $p < 0$ et $4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$, il vient alors

$$\rho = \sqrt{-\frac{4\,p}{3}} \text{ et } \cos(3\,\theta) = \frac{3\,q}{p\,\rho}$$

On obtient des formules sympathiques. Les solutions sont

$$\sqrt{-\frac{4\,p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\,q\,\sqrt{3}}{p\,\sqrt{-4\,p}}\right) + \frac{2\,k\,\pi}{3}\right), \text{ où } k \in [\![0, 2]\!]$$

Exemple 1.3

Essayons les deux méthodes pour résoudre l'équation suivante

$$y^3 - 7\,y - 6 = 0$$

(Solutions évidentes -1, -2 et donc 3). Les calculs sont explicités dans `Wxmaxima` 1.3, de la présente page et `Python` 1.3, page 35.

Session `Wxmaxima` 1.3 – Résolution d'une équation du troisième degré

Méthode de Cardan.

```
(%i1)  eq : y^3-7*y-6$
(%i2)  ZZ : solve(Z^2-6*Z+7^3/27,Z);
```

(%o2) $$[Z=-\frac{10\sqrt{3}\,i-27}{9}, Z=\frac{10\sqrt{3}\,i+27}{9}]$$

(%i3)
```
abs(rhs(ZZ[1]));
```

(%o3) $$\frac{7\sqrt{21}}{9}$$

(%i4)
```
ratsimp(rhs(ZZ[1])/abs(rhs(ZZ[1])));
```

(%o4) $$-\frac{10\sqrt{3}\,i-27}{7\sqrt{21}}$$

(%i5)
```
carg(%);
```

(%o5) $$-\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)$$

(%i6)
```
ratsimp(rhs(ZZ[2])/abs(rhs(ZZ[2])));
```

(%o6) $$\frac{10\sqrt{3}\,i+27}{7\sqrt{21}}$$

(%i7)
```
theta : carg(%);
```

(%o7) $$\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)$$

(%i8)
```
y1 : abs(rhs(ZZ[1]))^(1/3)*2*cos(1/3*theta);
```

(%o8) $$\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}}$$

(%i9)
```
y2 : abs(rhs(ZZ[1]))^(1/3)*2*cos(1/3*theta+2*%pi/3);
```

(%o9) $$\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}}$$

```
(%i10) y3 : abs(rhs(ZZ[1]))^(1/3)*2*cos(1/3*theta+4*%pi/3);
```

(%o10) $$\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\,\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)}{3}+\frac{4\,\pi}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}}$$

```
(%i11) ratsimp([y1,y2,y3]);
```

(%o11) $$\left[\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\,\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}},\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\,\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)+2\,\pi}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}},\frac{2\,7^{\frac{1}{3}}\,21^{\frac{1}{6}}\,\cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10}{3^{\frac{5}{2}}}\right)+4\,\pi}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}}\right]$$

```
(%i12) %,numer;
```

(%o12) $[3.0, -1.999999999999999, -1.0]$

Méthode trigonométrique.

```
(%i13) rho : sqrt(28/3);
```

(%o13) $$\frac{2\,\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

```
(%i14) theta0 : acos(18*sqrt(3)/7/sqrt(28));
```

(%o14) $$\operatorname{acos}\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\right)$$

```
(%i15) z1 : rho*cos(1/3*theta0)$
       z2 : rho*cos(1/3*theta0+2*%pi/3)$
       z3 : rho*cos(1/3*theta0+4*%pi/3)$
```

```
(%i18) ratsimp([z1,z2,z3]);
```

(%o18) $\left[\dfrac{2\sqrt{7}\cos\left(\dfrac{\operatorname{acos}\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}\right)}{\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{7}\cos\left(\dfrac{\operatorname{acos}\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\right)+2\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{7}\cos\left(\dfrac{\operatorname{acos}\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\right)+4\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}\right]$

(%i19) `%,numer;`

(%o19) $[3.0, -2.0, -1.0]$

Méthode `Wxmaxima`

(%i20) `factor(eq);`

(%o20) $(y+2)\ (y+1)\ (y-3)$

(%i21) `solve(eq,y);`

(%o21) $[y=-1, y=-2, y=3]$

Session `Python` 1.3 – Résolution d'une équation du troisième degré

On essaye ici les méthodes de Cardan et trigonométrique... Ce ne sont que des méthodes théoriques, car elles ne donnent pas facilement les résultats clairs.

In[9]

```
y = symbols('y')
eq = y**3-7*y-6
solve(y**2-6*y+7**3/S(27), y)
```

Out[9]

$$\left[3 - \frac{10\sqrt{3}i}{9},\ 3 + \frac{10\sqrt{3}i}{9}\right]$$

In[10]

```
abs(_[0])
```

Out[10]

$$\frac{7\sqrt{21}}{9}$$

In[11]

```
(__[0]/_).simplify()
```

Out[11]

$$\frac{\sqrt{21}\left(27 - 10\sqrt{3}i\right)}{147}$$

In[12]

```
arg(_)
```

Out[12]

$$- \operatorname{atan}{\left(\frac{10 \sqrt{3}}{27} \right)}$$

In[13]

```
abs(Out[10])**(S(1)/3)*2*cos(_/3)
```

Out[13]

$$\frac{2 \sqrt{21} \cos{\left(\frac{\operatorname{atan}{\left(\frac{10 \sqrt{3}}{27} \right)}}{3} \right)}}{3}$$

In[14]

```
_.evalf()
```

Out[14]

3.0

In[15]

```
abs(Out[10])**(S(1)/3)*2*cos(Out[12]/3+2*pi/3)
```

Out[15]

$$-\frac{2\sqrt{21}\sin\left(-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}{3}$$

In[16]

```
_.evalf()
```

Out[16]

$$-1.0$$

In[17]

```
abs(Out[10])**(S(1)/3)*2*cos(Out[12]/3+4*pi/3)
```

Out[17]

$$-\frac{2\sqrt{21}\cos\left(-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

In[18]

```
_.evalf()
```

Out[18]

$$-2.0$$

In[19]

```
solve(eq, y)
```

Out[19]

$[-2,\ -1,\ 3]$

In[20]

```
factor(eq)
```

Out[20]

$(y-3)\,(y+1)\,(y+2)$

Remarque importante 1.9

Ces méthodes sont donc inefficaces !

Exercice(s) 1.4

1.4.1 En utilisant le développement de $\cosh(3\,x)$ ou de $\sinh(3\,x)$, trouver des formules de la solution réelle de l'équation $y^3+p\,y+q=0$, lorsque $4\,p^3+27\,q^2>0$ (p et q réels).

1.4.2 (*Méthode de Ferrari*) On peut aussi résoudre une équation du quatrième degré de la forme

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d=0$$

en cherchant λ tel que

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d=\left(x^2+\frac{a}{2}\,x+\lambda\right)^2+\cdots$$

de telle sorte que la partie représentée par $\cdots$ soit un carré.

(a) Montrer que λ est alors solution d'une équation du troisième degré.

(b) En déduire une résolution de l'équation

$$x^4 + 2\,x^3 + 4\,x^2 - 2\,x + 5 = 0$$

1.3 Utilisation en géométrie

1.3.1 Angles, etc.

En regardant les points et les vecteurs du plan à travers de leurs affixes, on obtient les propriétés suivantes.

Propriété 1.10 – Produit scalaire

On a pour $M(z)$ et $M'(z')$, où z et z' sont des nombres complexes

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \right\rangle = \mathrm{Re}(\overline{z}\,z')$$

Propriété 1.11 – Déterminant

On a pour $M(z)$ et $M'(z')$

$$\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \mathrm{Im}(\overline{z}\,z')$$

Propriété 1.12 – Angles

Si $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont trois point distincts deux à deux du plan, alors

$$\boxed{\left[\theta \text{ est une mesure de l'angle } \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right] \iff \left[\frac{c-a}{b-a} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| e^{i\,\theta}\right]}$$

Démonstration

Avec des notations évidentes

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}((\overline{b-a})\,(c-a))}{|b-a|\,|c-a|} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}((\overline{b-a})\,(c-a))}{|b-a|\,|c-a|} \text{ soit } \frac{(\overline{b-a})\,(c-a)}{|b-a|\,|c-a|} = e^{i\theta}$$

Or

$$\overline{b-a} = \frac{|b-a|^2}{b-a}$$

La conclusion est immédiate.

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z, tels que

$$z,\ \frac{1}{z} \text{ et } 1-z \text{ soient sur un même cercle de centre } O$$

1.5.2 Soit un triangle formé par les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$, montrer que

$$\Big[ABC \text{ équilatéral}\Big] \iff \Big[(a+j\,b+j^2\,c)\,(a+j^2\,b+j\,c)=0\Big]$$

1.5.3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de l'équation

$$z^3+a\,z^2+b\,z+c=0,\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3$$

pour que les points d'affixe les trois racines forment un triangle équilatéral.

1.5.4 Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de l'équation

$$z^4+a\,z^3+b\,z^2+c\,z+d=0,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$$

pour que les points d'affixe les quatre racines forment un parallélogramme.

1.3.2 Cercle et triangle

Il est toujours possible de ramener un problème de géométrie où il y a un cercle à un calcul sur des complexes de module 1, en identifiant le cercle aux points d'affixe dans $\mathbb{U}$. C'est le cas notamment des triangles, où le cercle circonscrit intervient...

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est le cercle unité (de centre O, de rayon 1).

(a) Quel est l'affixe z du symétrique orthogonal de O par rapport à la droite (AB) ?

(b) Montrer que, si c est l'affixe de C, $z+c$ est l'affixe de H, l'orthocentre de ABC.

(c) Montrer que

$$\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$$

où G est le centre de gravité de ABC.

(d) Pourquoi ce résultat est-il encore valable pour un triangle quelconque ?

1.6.2 Soit ABC un triangle du plan, calculer les affixes du centre de gravité G, de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit I, du centre du cercle inscrit J.

1.6.3 Soit ABC un triangle du plan tel que le centre de gravité est égal au centre du cercle circonscrit. Montrer que ce triangle est équilatéral.

1.3.3 Transformations affines

Certaines transformations usuelles du plan peuvent être représentées à l'aide des nombres complexes, sous les formes suivantes

$$z \mapsto a\,z + b \text{ ou } z \mapsto a\,\overline{z} + b,\ (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

- $f : z \mapsto a\,z+b$. On procède comme suit

  (*Recherche des points fixes*) On résout l'équation

$$a\,z + b = z$$

1. Si $a \neq 1$, on obtient un point fixe

$$z_0 = \frac{b}{1-a}, \text{ alors } f(z) = z_0 + a\,(z - z_0)$$

Si $a = |a|\,e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, alors f représente la composée d'une rotation de centre $M(z_0)$ d'angle θ et d'une homothétie de centre $M(z_0)$ de rapport $|a|$.

2. Si $a = 1$, c'est une translation de b.

► $f : z \mapsto a\,\overline{z} + b$. On procède comme suit

(*Recherche des points fixes*) On résout l'équation

$$a\,\overline{z} + b = z, \text{ d'où } \overline{a}\,z + \overline{b} = \overline{z}$$

finalement

$$z = b + a\,(\overline{a}\,z + \overline{b})$$

1. Si $|a| = 1$ et $b = 0$, on revient à l'équation initiale.
   — Si $a = 1$, c'est l'identité.
   — Si $a \neq 1$, c'est l'application $z \mapsto e^{i\,\theta}\,\overline{z}$. Les points fixes sont les affixes de la droite passant par O, faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe Ox. f représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) y = 0$$

2. Si $|a| = 1$ et $b \neq 0$. Il n'y a pas de point fixe. f représente la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe Ox et une translation de vecteur d'affixe b.
3. Si $|a| \neq 1$, alors on a un unique point fixe

$$z_0 = \frac{b + a\,\overline{b}}{1 - |a|^2} \text{ et } f(z) = z_0 + a\,\overline{(z - z_0)}$$

f représente la composée d'une symétrie par rapport à la droite passant par le point $M(z_0)$, faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe Ox et d'une homothétie de rapport $|a|$ de centre $M(z_0)$ (donc sur la droite).

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Donner l'équation de la projection orthogonale sur une droite en nombres complexes.

1.7.2 Interpréter le produit de deux nombres complexes comme une transformation du plan et en déduire une construction explicite du produit $z\,z'$.

1.7.3 Étant donné deux points $A(a)$ et $C(c)$ du plan, quels sont les affixes des points B et D tels que $ABCD$ soit un carré ?

1.7.4 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit sur chaque côté un carré de centres respectifs P, Q, R et S. Montrer que $PQRS$ est un carré. (Voir la figure 1.2, page 46).

1.7.5 Soit A et B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que M, B et N sont alignés où N est l'image de M par une rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.

1.7.6 On appelle inversion du plan, l'application représentée par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$

(a) Calculer l'image d'une droite passant par O.

(b) Calculer l'image d'une droite ne passant pas par O.

(c) Calculer l'image d'un cercle centré en O.

(d) Calculer l'image d'un cercle passant par O.

1.7.7 Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points non alignés, ne formant pas un triangle équilatéral, on note $I(1)$, $J(j)$ et $K(j^2)$.

(a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tels que l'application $f : z \mapsto \alpha\, z + \beta\, \overline{z}$, envoie le triangle IJK sur le triangle ABC.

(b) On suppose que $\omega = 0$. Montrer qu'il existe une unique ellipse tangente aux trois côtés du triangle ABC.

(c) Montrer que les affixes des foyers de cette ellipse sont les deux racines α et β.

(d) En déduire que si

$$g(x) = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)$$

les deux racines de g' sont les affixes des foyers de l'ellipse.

Figure 1.1 – Discriminant

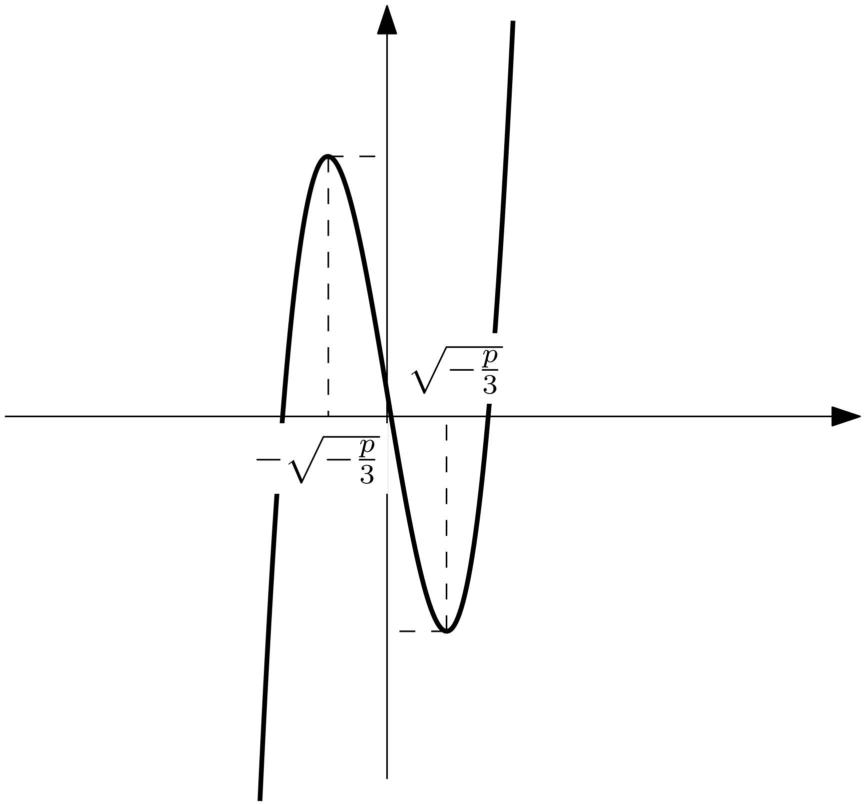
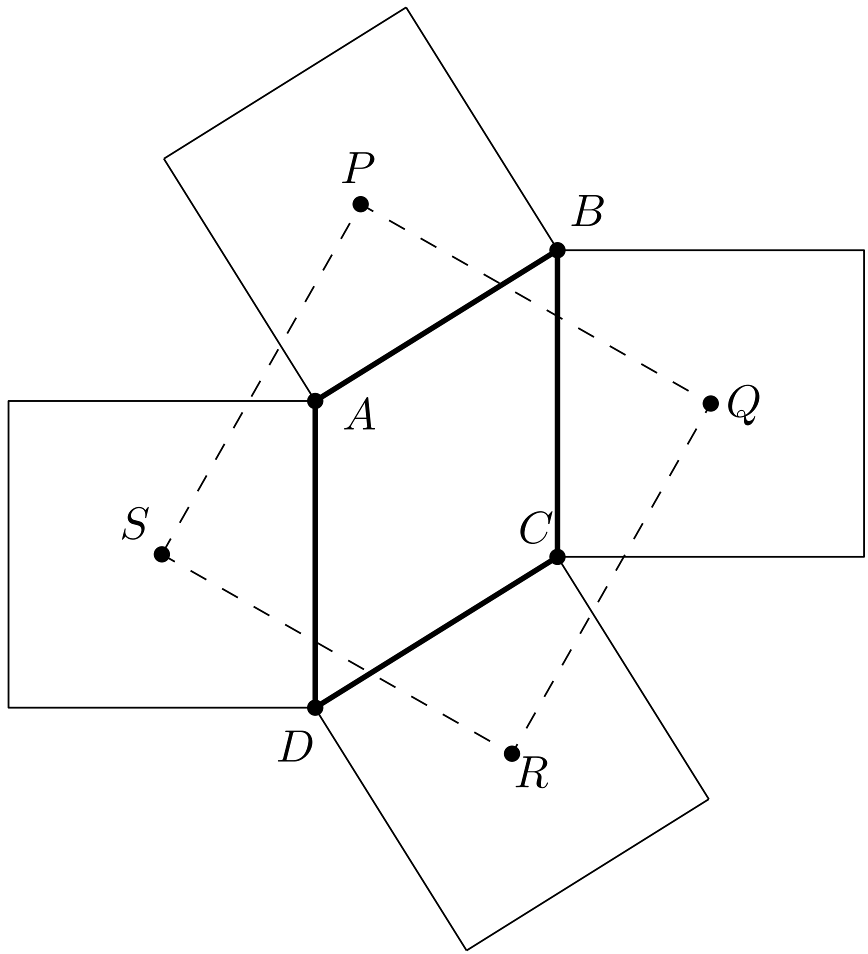


Figure 1.2 – Carré construit à partir d'un parallélogramme



Chapitre 2

Développements limités et asymptotiques

2.1 Comparaisons et équivalents

注释 2.1

本小节内容是本章学习的重要基础，因此我们首先复习了《高等数学 I (法文版)》与本章节相关的部分重要知识点。

Rappel 2.1

On rappelle les notations suivantes, soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [\inf I, \sup I]$ (si I n'est pas bornée, alors x_0 peut être dans $\{-\infty, +\infty\}$), $g : I \to \mathbb{R}$, telle qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\},\ g(x) \neq 0$$

Alors

$$\boxed{f(x) = o_{x_0}(g(x))} \text{ signifie } \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

et

$$\boxed{f(x) = O_{x_0}(g(x))} \text{ signifie } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ bornée au voisinage de } x_0$$

Notation 2.1 – Abus de notation

Comme nous serons souvent au voisinage de 0, nous noterons $o(\cdots)$ au lieu de $o_0(\cdots)$.

Définition 2.1 – Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [\inf I, \sup I]$ et $g : I \to \mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $I \cap V \setminus \{x_0\}$, où V est un voisinage de x_0, telles que [a]

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$$

On dit alors que $f(x)$ et $g(x)$ sont *équivalentes au voisinage de* x_0 et on note

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

[a] Dans la suite de ce paragraphe, nous travaillerons parfois dans $[-\infty, +\infty]$, ce qui signifie que, pour certains I, x_0 peut prendre les valeurs $\pm\infty$.

Propriété 2.1

On a donc

$$\boxed{\left[f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)\right] \iff \left[f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x))\right]}$$

Il est extrêmement dangereux de calculer avec des équivalents ! C'est pourquoi, nous ne nous en servirons que pour exprimer des énoncés et des résultats.

Exemple 2.1

1. On a
$$x \underset{1}{\sim} x^2 \text{ mais } \ln(x) \underset{1}{\not\sim} \ln(x^2)$$

2. On a
$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ mais } e^x \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$$

Remarque 2.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [\inf I, \sup I]$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ (il est indispensable que ℓ soit non nul !), alors
$$\left[f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell\right] \iff \left[f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell\right]$$

Propriété 2.2

Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)$$

Il est important de connaître quelques équivalents classiques

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\underset{0}{\sim} x \\
1-\cos(x) &\underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \\
\tan(x) &\underset{0}{\sim} x \\
\ln(1+x) &\underset{0}{\sim} x \\
e^x - 1 &\underset{0}{\sim} x \\
\arctan(x) &\underset{0}{\sim} x \\
\frac{\pi}{2} - \arctan(x) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

通常情况下，我们不能直接对已经存在等价关系的两个函数再进行四则运算，因此大家需要熟练掌握常用的等价关系。

Propriété 2.3

Soit deux fonctions f et g équivalentes au voisinage de x_0 alors f et g ont même signe au voisinage de x_0.

Propriété 2.4 – Comparaison des fonctions usuelles

On a les relations suivantes (à bien savoir), pour α et β deux nombres réels strictement positifs

$$
\begin{array}{rcl}
\ln(x) & = & o_{+\infty}(x^{\alpha}) \\
x^{\alpha} & = & o_{+\infty}(e^{x}) \\
e^{x} & = & o_{-\infty}\left(\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}\right) \\
\ln(x) & = & o_{0^+}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right) \\
(\ln(x))^{\beta} & = & o_{+\infty}(x^{\alpha}) \\
|\ln(x)|^{\beta} & = & o_{0^+}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right)
\end{array}
$$

Démonstration

► On montre, par exemple en faisant l'étude de $x \mapsto 2\left(\sqrt{x}-1\right) - \ln(x)$

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \ln(x) \leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

On en déduit

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

et, par encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ ou encore } \ln(x) = o_{+\infty}(x)$$

► Les autres comparaisons s'en déduisent par changement de variables.

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Donner les équivalents des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
x &\mapsto x^3+x^2+x && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto x^3+x^2+x && \text{au voisinage de} \quad +\infty\\
x &\mapsto \operatorname{cotan}(x) && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto \frac{x^3+x-1}{x^7+x^2-5} && \text{au voisinage de} \quad -\infty\\
x &\mapsto \frac{x^2+x+1}{x^3-2} && \text{au voisinage de} \quad 1
\end{aligned}$$

2.1.2 Donner les équivalents des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+2} && \text{au voisinage de} \quad 1\\
x &\mapsto \frac{2\,x^3-x-1}{x^4+x^2-2} && \text{au voisinage de} \quad 1\\
x &\mapsto \frac{x^x-4}{x^3-8} && \text{au voisinage de} \quad 2\\
x &\mapsto \ln(x)+x^3+\sqrt{x+2} && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto \ln(x)+x^3+\sqrt{x+2} && \text{au voisinage de} \quad +\infty
\end{aligned}$$

2.1.3 Donner les équivalents des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \ln(1+\sin^2(\sqrt{x}+12\,x)) && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto \arcsin(x\,\tan(x+\sqrt{x})) && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}} && \text{au voisinage de} \quad +\infty\\
x &\mapsto e^{x^2+x}-e^{\sqrt{x}} && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto e^{x^2+x}-e^{\sqrt{x}} && \text{au voisinage de} \quad +\infty\\
x &\mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1} && \text{au voisinage de} \quad 0\\
x &\mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1} && \text{au voisinage de} \quad +\infty\\
x &\mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1} && \text{au voisinage de} \quad -\infty
\end{aligned}$$

2.1.4 Comparer (en termes de o), au voisinage de 0^+, les fonctions suivantes

$$f_1(x) = x\,\ln(x),\ f_2(x) = \ln(1+x),\ f_3(x) = x^2\,\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_4(x) = \frac{x^3}{\ln(x)} \text{ et } f_5(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

2.1.5 Comparer, au voisinage de $+\infty$ les fonctions

$$x \mapsto x^{\sqrt{x}} \text{ et } x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^x$$

2.2 Développements limités

2.2.1 Généralités

Rappel 2.2

On peut exprimer le fait qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 puisse être dérivable en x_0 sous la forme

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + o(h)$$

Il est donc naturel de chercher des informations plus précises sur le $o(h)$ qui intervient ici.

Définition 2.2 – Développement limité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_0 \in I$, on dit que f admet *un développement limité à l'ordre n en x_0*, si, il existe des réels $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k + o(h^n) \overset{\text{Not}}{=} a_0 + a_1\,h + \cdots + a_n\,h^n + o(h^n)$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$$

这里给出了泰勒展开的定义，需要注意的是在定义域内某一点的展开。

Propriété 2.5

Si f possède un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons connus deux développements distincts, on a alors

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,h^k + o(h^n)$$

Comme les deux développements sont supposés distincts, l'ensemble $\{k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k \neq b_k\}$ est non vide. C'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. On en déduit qu'il admet un plus petit élément, noté p

$$p = \min\{k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k \neq b_k\}$$

On a alors, lorsque $h \neq 0$ et après division par h^p

$$a_p - b_p = \sum_{k=p+1}^{n} (b_k - a_k)\,h^{k-p} + o(h^{n-p}) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Donc $a_p = b_p$, ce qui contredit la définition de p et l'hypothèse de l'existence de deux développements limités distincts à l'ordre n en x_0.

Remarque 2.2

En conséquence, si f, définie sur un voisinage I de 0, admet un développement limité en 0 à l'ordre n et que de plus

— f est *paire*, c'est-à-dire

$$\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$$

alors, les coefficients impairs du développement limité seront nuls ;

— f est *impaire*, c'est-à-dire

$$\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$$

alors, les coefficients pairs du développement limité seront nuls.

当函数为奇函数或偶函数时，泰勒展开时我们可以应用如上技巧。

Propriété 2.6

Si f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si, et seulement si, f est continue en x_0.

Démonstration

Comme f est continue en x_0, on a

$$f(x_0+h) - f(x_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc

$$f(x_0+h) = f(x_0) + o(1)$$

La réciproque est immédiate.

Propriété 2.7

f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si, et seulement si, f est dérivable en x_0.

Démonstration

($\Rightarrow$) Comme f est dérivable en x_0, en notant a_1 le nombre dérivé de f en x_0, on a, par définition

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} a_1 = f'(x_0)$$

donc

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a_1 + o(1)$$

ce qui, multiplié par h nous donne

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a_1\,h + o(h)$$

($\Leftarrow$) Si on a l'égalité ci-dessus pour un certain $a_1 \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a_1 + o(1) \text{ et, donc } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} a_1$$

f est bien dérivable en x_0

Remarque importante 2.3

En revanche, l'existence d'un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de x_0 ne garantit rien de plus que la dérivabilité en x_0 ! Ainsi, la fonction $(n \geq 2)$

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0, est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'a pas de dérivée seconde en 0.

Définition 2.3 – Partie principale d'un développement limité

Lorsqu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 et que $(a_0, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, on appelle *partie principale de f en x_0* le terme

$$a_p\, h^p \text{ ou } a_p\, (x - x_0)^p$$

suivant que l'on considère $f(x_0 + h)$ ou $f(x)$, où p est défini par

$$p = \min\left\{k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k \neq 0\right\}$$

Notons que $a_p \neq 0$. On a alors

$$f(x) \underset{x_0}{} a_p\, (x - x_0)^p$$

2.2.2 Existence

Théorème 2.1 – Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$, alors

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)}$$

ou, encore

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n)}$$

请注意定理成立的条件，即函数f是 $\mathscr{C}^n$；函数$\mathscr{C}^n$通常也用来描述函数光滑的程度。

Démonstration

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, le résultat est vrai par continuité de la fonction f en x_0.
- Supposons le résultat démontré pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et prenons une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors sa dérivée vérifie l'hypothèse de récurrence. Donc

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

La fonction φ définie par

$$\varphi(h) = f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

vérifie alors $\varphi'(h) = o(h^n)$.
Soit $\varepsilon > 0$, on sait alors qu'il existe un $\eta > 0$, tel que, pour $h \in]-\eta, +\eta[$

$$\left|\varphi'(h)\right| \leq \varepsilon\, |h|^n$$

En ce cas, en utilisant le théorème des accroissements finis, il vient

$$|\varphi(h) - \underbrace{\varphi(0)}_{0}| \leq \varepsilon\, |h|^{n+1}$$

Ce qui termine la démonstration.

Propriété 2.8 – Primitivation d'un développement limité

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et f' admet un développement limité à l'ordre n en $x_0 \in I$

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en $x_0 \in I$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, h^{k+1} + o(h^{n+1})$$

Remarque 2.4

1. Les développements limités se comportent très bien par rapport à la primitivation (passage de f' à f) et cela fournit une méthode efficace pour déterminer des développements limités.
2. On a vu dans la remarque importante 2.3, page 56 que la dérivation ne fonctionnait pas bien ! Cependant, ne pas oublier que si une fonction est de classe $\mathscr{C}^p$ avec $p \geq 1$, alors sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$, on peut donc lui appliquer le théorème de Taylor-Young.

On obtient alors les développements limités classiques à *savoir par cœur !*.

— La fonction exponentielle a un développement limité à tout ordre n en tout point de $\mathbb{R}$, il est utile de connaître son développement en 0 (les autres s'en déduisent à l'aide de la relation $e^{x_0+h} = e^{x_0}\, e^h$)

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$$

— De même pour les fonctions sinus et cosinus, au voisinage de 0

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \, \frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} + o(x^n)}$$

et

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \, \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} + o(x^n)}$$

— De même, au voisinage de 0

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, x^k + o(x^n)}$$

qui provient de la somme géométrique

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

— On en déduit, par intégration, le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \, \frac{x^k}{k} + o(x^n)}$$

— Toujours au voisinage de 0, on obtient, pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} \, x^k + o(x^n)}$$

(Voir l'utilisation de `Wxmaxima` 2.1, page suivante et de `Python` 2.1, page suivante).

理解和牢记以上公式，注意是在o点的展开。

Session `Wxmaxima` 2.1 – Développements limités classiques

```
(%i1) taylor(exp(x),x,0,10);
```

(%o1)/T/ $$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\ldots$$

```
(%i2) taylor(sin(x),x,0,10);
```

(%o2)/T/ $$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}+\ldots$$

```
(%i3) taylor(cos(x),x,0,10);
```

(%o3)/T/ $$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}+\ldots$$

```
(%i4) taylor((1+x)^alpha,x,0,5);
```

(%o4)/T/ $$1+\alpha\,x+\frac{\left(\alpha^2-\alpha\right)\,x^2}{2}+\frac{\left(\alpha^3-3\,\alpha^2+2\,\alpha\right)\,x^3}{6}+\frac{\left(\alpha^4-6\,\alpha^3+11\,\alpha^2-6\,\alpha\right)\,x^4}{24}+\frac{\left(\alpha^5-10\,\alpha^4+35\,\alpha^3-50\,\alpha^2+24\,\alpha\right)\,x^5}{120}+\ldots$$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,5);
```

(%o5)/T/ $$\mathrm{f}(0)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{f}(x)\Big|_{x=0}\right)\,x+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{f}(x)\Big|_{x=0}\right)\,x^2}{2}+\frac{\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,\mathrm{f}(x)\Big|_{x=0}\right)\,x^3}{6}+\frac{\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,\mathrm{f}(x)\Big|_{x=0}\right)\,x^4}{24}+\frac{\left(\frac{d^5}{d\,x^5}\,\mathrm{f}(x)\Big|_{x=0}\right)\,x^5}{120}+\ldots$$

Session `Python` 2.1 – Développements limités classiques

La session couvre tout le chapitre. c'est pourquoi les numéros vont jusqu'à 50. Il faut toujours initialiser `Sympy`. La fonction `init_printing` permet d'avoir un plus joli affichage dans certains cas...

In [1]

```python
from sympy import *
init_printing()
```

In [2]

```python
x = symbols('x')
```

In [3]

```python
exp(x).series(x, 0, 11)
```

Out [3]

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + O\left(x^{11}\right)$$

In [4]

```python
sin(x).series(x, 0, 11)
```

Out [4]

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + O\left(x^{11}\right)$$

In [5]

```python
cos(x).series(x, 0, 11)
```

Out [5]

$$1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}-\frac{x^{6}}{720}+\frac{x^{8}}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}+O\left(x^{11}\right)$$

In [6]

```
alpha = symbols('\\alpha')
((1+x)**alpha).series(x, 0, 6)
```

Out [6]

$$1+\alpha x+\frac{\alpha x^{2}(\alpha-1)}{2}+\frac{\alpha x^{3}(\alpha-2)(\alpha-1)}{6}+\frac{\alpha x^{4}(\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)}{24}+\frac{\alpha x^{5}(\alpha-4)(\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)}{120}+O\left(x^{6}\right)$$

In [7]

```
f = Function('f')
f(x).series(x, 0, 6)
```

Out [7]

$$f(0)+x\left.\frac{d}{d\xi}f(\xi)\right|_{\xi=0}+\frac{x^{2}\left.\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}f(\xi)\right|_{\xi=0}}{2}+\frac{x^{3}\left.\frac{d^{3}}{d\xi^{3}}f(\xi)\right|_{\xi=0}}{6}+\frac{x^{4}\left.\frac{d^{4}}{d\xi^{4}}f(\xi)\right|_{\xi=0}}{24}+\frac{x^{5}\left.\frac{d^{5}}{d\xi^{5}}f(\xi)\right|_{\xi=0}}{120}+O\left(x^{6}\right)$$

Remarque 2.5

Dans le dernier développement limité, nous pouvons retrouver le résultat pour certaines valeurs de α, sans utilisation du théorème de Taylor-Young. En effet, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton nous donne [a] [b]

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} a^k\, b^{\alpha-k}$$

En l'écrivant pour $a = 1$ et $b = x$ et en tronquant, si nécessaire, à partir de n, on retrouve le développement limité annoncé.

---

a. On peut la démontrer facilement par récurrence sur α ou encore par un judicieux dénombrement...

b. La notation classique $\binom{n}{k}$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ désigne le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de cardinal n. On a facilement

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} \in \mathbb{N}$$

Session `Wxmaxima` 2.2 – Autres développements limités classiques

```
(%i1) alias(ln,log)$

(%i2) taylor(ln(1+x),x,0,10);
```

(%o2)/T/ $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \ldots$

Session `Python` 2.2 – Autres développements limités classiques

En `Sympy`, le logarithme népérien s'appelle ln !

In [8]

```
ln(1+x).series(x, 0, 11)
```

Out[8]

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}+O\left(x^{11}\right)$$

Comment obtenir un développement limité ? La formule de Taylor-Young nous donne à penser qu'il suffit de calculer les dérivées n-ième de la fonction à développer. C'est une erreur ! (à suivre)

注释 2.2

函数在点$x_0 \in I$处的泰勒展开是在该点邻域内的局部运算；导数则是在整个区间I内进行的全局运算。

Exemple 2.2

Prenons la fonction arctan et $n \in \mathbb{N}^*$. Sa dérivée est connue et son développement limité à l'ordre $n-1$ est, de manière immédiate

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\,x^{2\,k}+o\left(x^{n-1}\right)$$

Il est alors facile d'obtenir son développement limité à l'ordre n par primitivation

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\,\frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1}+o(x^n)$$

Que vaut la dérivée n-ième ? Voir le code `Wxmaxima` 2.3, de la présente page ou le code `Python` 2.3, page ci-contre.

Session `Wxmaxima` 2.3 – Dérivée n-ième de la fonction arctan

```
(%i1) taylor(atan(x),x,0,20);
```

(%o1)/T/ $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{17}}{17}-\frac{x^{19}}{19}+\ldots$

(%i2) diff(atan(x),x,20);

(%o2)

$$\frac{2432902008176640000\,x}{(x^2+1)^{11}} - \frac{160571532539658240000\,x^3}{(x^2+1)^{12}} + \frac{3082973424761438208000\,x^5}{(x^2+1)^{13}} - \frac{26719103014599131136000\,x^7}{(x^2+1)^{14}} + \frac{124689147401462611968000\,x^9}{(x^2+1)^{15}} - \frac{340061311094898032640000\,x^{11}}{(x^2+1)^{16}} + \frac{558049331027524976640000\,x^{13}}{(x^2+1)^{17}} - \frac{542105064426738548736000\,x^{15}}{(x^2+1)^{18}} + \frac{286996798814155702272000\,x^{17}}{(x^2+1)^{19}} - \frac{63777066403145711616000\,x^{19}}{(x^2+1)^{20}}$$

Session Python 2.3 – Dérivée n-ième de la fonction arctan

Toujours préférer les développements limités pour une étude locale (au voisinage d'un point).

In [9]

```
atan(x).series(x, 0, 21)
```

Out[9]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + O\left(x^{21}\right)$$

In [10]

```
atan(x).diff(x, 20)
```

Out[10]

$$\frac{486580401635328000x}{(x^2+1)^{11}}\left(-\frac{131072x^{18}}{(x^2+1)^9}+\frac{589824x^{16}}{(x^2+1)^8}-\frac{1114112x^{14}}{(x^2+1)^7}+\frac{1146880x^{12}}{(x^2+1)^6}-\frac{698880x^{10}}{(x^2+1)^5}+\frac{256256x^8}{(x^2+1)^4}-\frac{54912x^6}{(x^2+1)^3}+\frac{6336x^4}{(x^2+1)^2}-\frac{330x^2}{x^2+1}+5\right)$$

In[11]

```
_.subs(x, 0)/factorial(20)
```

Out[11]

0

(suite)

C'est exactement le contraire !

Il est plus facile de calculer les dérivées en un point à l'aide des développements limités que de calculer les dérivées. Le développement limité est un *calcul local* (on se place au voisinage d'un point) alors que le calcul des dérivées est un *calcul global* (on travaille sur tout l'ensemble de dérivation).

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Exprimer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sqrt{1+x} \\ x &\mapsto \frac{1}{(1-x)^p},\ p\in\mathbb{N}^* \\ x &\mapsto \arctan(x) \\ x &\mapsto \arcsin(x) \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

2.2.2 On considère les fonctions définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sinh(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

appelées respectivement, *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*.

注释 2.3

这里给出了双曲正弦，双曲余弦和双曲正切函数的定义。

(a) Tracer leurs graphes. Observer notamment leurs monotonies et préciser leurs équivalents en $\pm\infty$.

(b) Montrer qu'elles sont dérivables et calculer leurs dérivées.

(c) Montrer qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(d) Montrer que sinh et tanh définissent des $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes [a] sur $\mathbb{R}$. Calculer leurs fonctions réciproques, les dérivées de celles-ci. En déduire des développements limités de ces fonctions réciproques à l'ordre n au voisinage de 0.

(e) Montrer que cosh définit un difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^*$ qui se prolonge continûment en 0. Calculer la fonction réciproque, sa dérivée. Que peut-on dire de son comportement au voisinage de 0 ? De 1 ?

(f) Recommencer le travail de l'exercice précédent avec les fonctions $1/\tanh$ sur $\mathbb{R}^*$ et cosh sur $\mathbb{R}_-$.

a. Par définition, f est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, inversible et f^{-1} de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il suffit, pour obtenir la dernière propriété, de montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\neq 0$$

2.2.3 Opérations sur les développements limités

Le problème est le suivant. Nous avons une fonction f dont nous cherchons un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n donné [1]. Cette fonction s'exprime à l'aide de sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions usuelles. À quel ordre doit-on développer chacune des fonctions usuelles ? Et comment effectuer les calculs ?

Quelques principes

— On calcule les ordres nécessaires *avant* de commencer les calculs.

— Il est souvent possible de diminuer les calculs en tenant compte de certaines propriétés des fonctions à développer (parité, imparité...)

— On n'écrit pas de termes inutiles (d'ordre $> n$).

— Les développements limités sont *toujours* écrits suivant les puissances croissantes.

注释 2.4

理解并熟练掌握如何对初等函数进行加，减，乘，除以及复合运算后所得的函数在 0 点处进行泰勒展开运算。需要注意的是在进行泰勒展开运算之前，要先确定各个函数泰勒展开的阶数。

2.2.3.1 Somme et différence

Propriété 2.9 – Somme de deux développements limités

Pour calculer un développement limité à l'ordre n d'une somme $f = f_1 + f_2$, il suffit de calculer les développements limités de f_1 et f_2 à l'ordre n.

1. Quitte à considérer $f(x_0 + h)$, on peut se ramener au voisinage de 0 (pour h) quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}$. De même, en s'intéressant à $f(1/x)$, on peut, à partir de $\pm\infty$, se ramener en 0.

Remarque 2.6

Nous poserons dans la suite
$$g_1(x) = 1 - \cos(x) \text{ et } g_2(x) = \tan(x) - x$$

Exemple 2.3 – Somme de deux développements limités

Calculons un développement limité de $g_1 + g_2$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Il faut donc développer g_1 à l'ordre 5. Mais, g_1 est paire ! Son terme en x^5 sera donc nul, il nous suffit donc de calculer à l'ordre 4, soit
$$g_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Il faut aussi développer $g_2(x)$ à l'ordre 5, sans modification. C'est un quotient, nous verrons plus tard comment faire. Supposons-le fait
$$g_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^5)$$

Finalement
$$g_1(x) + g_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^5)$$

Voir la session `Wxmaxima` 2.4, de la présente page et la session `Python` 2.4, page suivante.

Session `Wxmaxima` 2.4 – Somme de deux développements limités

```
(%i1) g[1](x) := 1-cos(x)$
(%i2) g[2](x) := tan(x)-x$
(%i3) taylor(g[1](x),x,0,5);
```

(%o3)/T/ $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \ldots$

```
(%i4) taylor(g[2](x),x,0,5);
```

(%o4)/T/ $\frac{x^3}{3}+\frac{2\,x^5}{15}+\ldots$

```
(%i5) 'g[1](x)+'g[2](x)=taylor(g[1](x)+g[2](x),x,0,5);
```

(%o5)/T/ $g_2\left(x\right)+g_1\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}+\frac{2\,x^5}{15}+\ldots$

Session **Python** 2.4 – Somme de deux développements limités

Pour les sommes, il est facile de calculer *a priori* les ordres...

In[12]

```python
def g1(x):
    return(1-cos(x))


def g2(x):
    return(tan(x)-x)
```

In[13]

```python
g1(x).series(x, 0, 6)
```

Out[13]

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O\left(x^6\right)$$

In[14]

```
g2(x).series(x, 0, 6)
```

Out[14]

$$\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O\left(x^6\right)$$

In[15]

```
(g1(x)+g2(x)).series(x, 0, 6)
```

Out[15]

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + \frac{2x^5}{15} + O\left(x^6\right)$$

2.2.3.2 Produit et quotient

Propriété 2.10 – Produit de deux développements limités

Pour calculer le développement limité à l'ordre n de la fonction $f = f_1\, f_2$, il faut développer f_1 à l'ordre $n - p_2$ et f_2 à l'ordre $n - p_1$ où p_1 (resp. p_2) est le degré de la partie principale de f_1 (resp. f_2). On suppose ici, que p_1 et p_2 sont plus petits que n.

此处，p_1表示函数f_1的主部的阶数；p_2表示函数f_2的主部的阶数。

Exemple 2.4 – Produit de deux développements limités

Soit à développer la fonction $g_1\, g_2$ à l'ordre 8.

On a p_1 (pour g_1) égal à 2. Il faut donc développer g_2 à l'ordre $8 - 2 = 6$, mais elle est impaire, donc ordre 5.

$$g_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^6)$$

On a p_2 (pour g_2) égal à 3. Il faut donc développer g_1 à l'ordre $8 - 3 = 5$; mais elle est paire, donc ordre 4.

$$g_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Il reste à effectuer la multiplication, *dans l'ordre croissant des puissances !*

$$g_1(x)\, g_2(x) = \frac{x^5}{6} + x^7 \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{15}\right)}_{\frac{19}{360}} + o(x^8)$$

Voir la session `Wxmaxima` 2.5, de la présente page ou la session `Python` 2.5, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 2.5 – Produit de deux développements limités

```
(%i6) 'g[1](x)*'g[2](x)=taylor(g[1](x)*g[2](x),x,0,8);
```

(%o6)/T/ $g_1\,(x)\; g_2\,(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{19\,x^7}{360} + \ldots$

Session `Python` 2.5 – Produit de deux développements limités

Pour les produits, bien faire attention aux puissances du premier terme...

In[16]

```
(g1(x)*g2(x)).series(x, 0, 9)
```

Out[16]

$$\frac{x^5}{6} + \frac{19x^7}{360} + O\left(x^9\right)$$

Propriété 2.11 – Quotient de deux développements limités

Pour calculer le développement limité de $f = f_2/f_1$ à l'ordre n, le plus petit terme sera une puissance $p_2 - p_1$, soit un *écart* entre l'ordre du développement limité et la puissance de la partie principale de $n-(p_2-p_1)$. *Il faut travailler à écart constant !* Ainsi, il faudra développer f_1 à l'ordre $p_1+\big(n-(p_2-p_1)\big) = n-p_2+2\,p_1$ et f_2 à l'ordre $p_2+\big(n-(p_2-p_1)\big) = n+p_1$. Le quotient s'effectuant ensuite à l'aide d'une composition, qui sera suivie d'un produit.

Exemple 2.5 – Quotient de deux développements limités

Soit à calculer un développement limité de la fonction g_2/g_1 à l'ordre 4. La partie principale est de degré $3-2=1$, l'écart est donc de $4-1=3$.

On développe g_2 à l'ordre $3+3=6$, or la fonction est impaire, donc à l'ordre 5.

$$g_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^6)$$

On développe g_1 à l'ordre $3+2=5$, or la fonction est paire, donc à l'ordre 4.

$$g_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

On obtient [a]

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-x}{1-\cos(x)} &= \frac{\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{2\,x^2}{5}+o(x^3)\right)}{\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)}\\ &= \frac{2\,x}{3}\left(1+\frac{2\,x^2}{5}+o(x^3)\right)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)^{-1}}_{\text{calcul expliqué plus loin}}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-x}{1-\cos(x)} &= \frac{2\,x}{3}\left(1+\frac{2\,x^2}{5}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{2\,x}{3}\left(1+x^2\underbrace{\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{12}\right)}_{\frac{29}{60}}+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Voir la session `Wxmaxima` 2.6, de la présente page ou la session `Python` 2.7, page 77.

a. Noter la factorisation du numérateur et du dénominateur par leurs parties principales respectives !

Session `Wxmaxima` 2.6 – Quotient de deux développements limités

```
(%i7)  'g[2](x)/'g[1](x)=taylor(g[2](x)/g[1](x),x,0,4);
```

(%o7)/T/ $\dfrac{g_2\,(x)}{g_1\,(x)}=\dfrac{2\,x}{3}+\dfrac{29\,x^3}{90}+\ldots$

Session `Python` 2.6 – Quotient de deux développements limités

Le quotient fonctionne presque comme un produit...

In[17]

```
(g2(x)/g1(x)).series(x, 0, 4)
```

Out[17]

$$\frac{2x}{3} + \frac{29x^3}{90} + O\left(x^4\right)$$

Remarque importante 2.7

1. Remarquons que cette notion d'écart fonctionne aussi pour les produits. La partie principale aura un degré $p_1 + p_2$, l'écart est donc $e = n - (p_1 + p_2)$. On doit donc développer f_1 à l'ordre $p_1 + e = n - p_2$ et f_2 à l'ordre $p_2 + e = n - p_1$.
2. Si l'on avait voulu calculer g_1/g_2, la partie principale aurait été de degré -1 et donc l'écart $n + 1$, mais cette notion d'écart fonctionne encore. Ce n'est cependant plus réellement un développement limité, on parle alors de *développement limité généralisé*.

这里引出了一般泰勒展开(Développement limité généralisé)的定义。

2.2.3.3 Composition

Propriété 2.12 – Composition de deux développements limités

Pour calculer un développement limité à l'ordre n de $f = f_1 \circ f_2$, où l'on supposera que $f_2(0) = 0$ pour rester au voisinage de 0. Le terme éventuel constant de f_1 n'ayant aucun intérêt, nous poserons q_1 le degré de la partie principale de $f_1 - f_1(0)$. La partie principale finale (sans l'éventuelle constante) sera de degré $p_2\, q_1$, donc l'écart $e = n - p_2\, q_1$ s'applique au calcul du développement de f_2 qui sera donc d'ordre $p_2 + e$. Cherchons l'ordre n_1 du développement limité de f_1, le terme en x^{n_1} produira, lors de la composition un terme en $x^{p_2\, n_1}$, celui-ci doit être plus petit que n. On a donc

$$n_1 = \left\lfloor \frac{n}{p_2} \right\rfloor$$

此处q_1表示函数$f_1 - f_1(0)$的主部的阶数。

Exemple 2.6 – Composition de deux développements limités

Cherchons un développement limité de $g_1 \circ g_2$ à l'ordre 8 au voisinage de 0.
On a $q_1 = 2$, $p_2 = 3$, donc il faut développer g_1 à l'ordre $\lfloor 8/3 \rfloor = 2$ et g_2 à l'ordre $3 + (8-6) = 5$, soit

$$g_1(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et

$$g_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^5)$$

On a donc

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^5)\right)^2 + o\left(x^8\right) \\ &= \frac{x^6}{18}\left(1 + \frac{4\,x^2}{5} + o(x^2)\right) + o\left(x^8\right) \\ &= \frac{x^6}{18} + \frac{2\,x^8}{45} + o\left(x^8\right) \end{aligned}$$

Voir la session `Wxmaxima` 2.7, de la présente page ou la session `Python` 2.7, page ci-contre.

Session `Wxmaxima` 2.7 – Composition de deux développements limités

```
(%i8) 'g[1]('g[2](x))=taylor(g[1](g[2](x)),x,0,8);
```

(%o8)/T/ $g_1\left(g_2\left(x\right)\right) = \frac{x^6}{18} + \frac{2\,x^8}{45} + \ldots$

Session Python 2.7 – Composition de deux développements limités

La composition demande des calculs d'ordre très précis.

In[18]

```python
g1(g2(x)).series(x, 0, 9)
```

Out[18]

$$\frac{x^6}{18} + \frac{2x^8}{45} + O\left(x^9\right)$$

Remarque 2.8

Noter que les calculs d'ordre sont ici totalement dissymétriques, car les rôles des fonctions le sont.

Remarque 2.9

On s'aperçoit qu'il est utile de savoir développer des expressions de la forme

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \ldots$$

lorsque l'on compose des développements limités. Pour cela, on pourra faire appel à la formule du multinôme (voir la proposition 2.1, page suivante).

Proposition 2.1 – Formule du multinôme

Soit p un entier ≥ 2, soit n un entier et soit $(a_1, \ldots, a_p)$ des nombres réels, alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_p) \in [\![0, n]\!]^p \\ k_1 + \cdots + k_p = n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_p!} a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p}$$

Démonstration

On peut démontrer ce résultat plus ou moins facilement

- Par récurrence sur p.
- Par récurrence sur n.
- Par dénombrement...

Exemple 2.7

Ainsi, on peut obtenir

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x^2\,z + 3\,x\,y^2 + 3\,x\,z^2 + 3\,y^2\,z + 3\,y\,z^2 + 6\,x\,y\,z$$

Session `Wxmaxima` 2.8 – Utilisation de la formule du multinôme

```
(%i1) ratexpand((x+y+z)^3);
```

(%o1) $z^3 + 3\,y\,z^2 + 3\,x\,z^2 + 3\,y^2\,z + 6\,x\,y\,z + 3\,x^2\,z + y^3 + 3\,x\,y^2 + 3\,x^2\,y + x^3$

Session `Python` 2.8 – Utilisation de la formule du multinôme

La formule du multinôme (dont on verra qu'elle est vraie dans un cadre plus général dans un cours ultérieur) est utile pour les développements limités, car il est fréquent de calculer, notamment dans les compositions, des puissances de développements limités.

In[19]

```python
y, z = symbols('y z')
((x+y+z)**3).expand()
```

Out[19]

$$x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

2.2.4 Applications des développements limités

Remarque 2.10

À quoi peuvent bien servir les développements limités (et les développements asymptotiques) ? Essentiellement à calculer des comportements au voisinage d'un point x_0 (ou de $\pm\infty$) (limites ou équivalents, signes, positions relatives de courbes...). Nous en verrons de multiples exemples dans tous les cours (d'analyse) qui suivent.

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Calculer les développements limités suivants

$$e^x \sin(x) \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3$$

$$\sinh(x) \ln(1+x) \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 5$$

$$\ln(1+\sin(x)) \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3$$

$$\cos(\ln(1+x) - \sin(x)) \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 4$$

$$\tan(x) \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 6$$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{\sinh(x)} \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3$$

2.3.2 Calculer les limites suivantes

$$\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\tan(x)-\arcsin(x)} \text{ au point } 0$$

$$\frac{1}{\tan^2(x)}-\frac{1}{\tanh^2(x)} \text{ au point } 0$$

$$\tan(x)^{\tan(2\,x)} \text{ au point } \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(x)^{\frac{1}{\sin(x)\,\sinh(x)}} \text{ au point } 0$$

$$\frac{x^2-\sin^2(x)}{(\sin(x)-x\,\cos(x))^2}-\frac{3}{x^2} \text{ au point } 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2-2\,x+6}-\sqrt{x^2+2\,x-6}}{x^2-4\,x+3} \text{ au point } 3$$

$$\frac{e^{\arcsin(x)}-e^{\sin(x)}}{e^{\arctan(x)}-e^{\tan(x)}} \text{ au point } 0$$

2.3.3 Calculer les équivalents suivants

$$x^{\sin(x)}-(\sin(x))^x \text{ au voisinage de } 0^+$$

$$\sqrt[3]{\cosh(x)}-\sqrt[3]{\sinh(x)} \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$\ln(\tanh(x)) \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$\frac{(\ln(x))^2}{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)} \text{ au voisinage de } 1$$

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}}-x^{\frac{1}{x}} \text{ au voisinage de } +\infty$$

2.3.4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité en 0 à l'ordre n de $(e^x-1)^n$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p=\begin{cases}0 & \text{si } 1\le p\le n-1\\ n! & \text{si } p=n\end{cases}$$

2.3.5 On pose

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2\,k+1}\, x^{2\,k+1} + o(x^{2\,n+1})$$

(a) Justifier que

$$\tan'(x) = \sum_{k=0}^{n} (2\,k+1)\, a_{2\,k+1}\, x^{2\,k} + o(x^{2\,n})$$

(b) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par les $a_{2\,k+1}$.

2.3.6 Soit

$$f \;:\; x \mapsto \frac{x}{\ln(1-x)}$$

(a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre.

(b) Si l'on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$$

déterminer une relation de récurrence vérifiée par les a_k grâce à la relation $\ln(1-x)\, f(x) = x$.

2.3 Développements asymptotiques

Définition 2.4 – Développement asymptotique

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in [\inf I, \sup I]$. On appelle *développement asymptotique de la fonction* f *au voisinage de* x_0 toute expression de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + o_{x_0}(f_n(x))$$

où les fonctions f_k qui interviennent vérifient

1. les expressions des f_k sont « simples » ;

2. les $f_k(x)$ ne s'annulent pas au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 ;
3. elles vérifient

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ f_{k+1}(x) = o_{x_0}(f_k(x))$$

On note parfois cette dernière relation sous la forme $f_{k+1}(x) \underset{x_0}{\ll} f_k(x)$ ou $f_k(x) \underset{x_0}{\gg} f_{k+1}(x)$ et on dit que « $f_{k+1}(x)$ est négligeable devant $f_k(x)$ au voisinage de x_0 » et « $f_k(x)$ est dominante devant $f_{k+1}(x)$ au voisinage de x_0 ».

Remarque 2.11

La définition précédente n'est pas claire, car que veut dire *simple* ? Nous pourrions donner une définition plus précise, mais cela serait trop compliqué. La bonne foi du calculateur sera le critère. On peut cependant dire, par exemple, que

$$\begin{array}{rll} \dfrac{1}{x} & \text{est plus simple que} & \dfrac{1}{x+1} \text{ au voisinage de } \pm\infty \\ \ln(x) & \text{est plus simple que} & \ln(1+x) \text{ au voisinage de } +\infty \\ x & \text{est plus simple que} & \sin(x) \text{ au voisinage de } 0 \\ \dfrac{e^x}{x} & \text{est plus simple que} & \dfrac{(x+2)\,e^x}{x^2} \text{ au voisinage de } \pm\infty, \text{ etc.} \end{array}$$

要给出函数的渐近展开的确切定义是一件非常复杂的事情，定义 2.4, page précédente 给出的表述中，用以比较提供参考的“简单”函数通常指下面的一些函数(在$+\infty$邻域内)：

— 常函数 : $x \mapsto 1$
— $x \mapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$
— $x \mapsto \left(\ln x\right)^\beta,\ \beta \in \mathbb{R}$
— $x \mapsto \exp\left(cx^\gamma\right),\ c \in \mathbb{R}^*,\ \gamma \in \mathbb{R}_+^*$

以及这些函数的乘积，也就是所有形如 $f(x) = x^\alpha \times \left(\ln x\right)^\beta \times \exp\left(P(x)\right)$的函数，其中$P(x)$形如 $P(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^{\gamma_i},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_i > 0$。

Exemple 2.8

Déterminons un développement asymptotique en $+\infty$ (et en $-\infty$) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.
Puisque

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

on a, pour $x \neq 0$

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2\,x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit en particulier que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - (x+1)\Big) = 0$$

et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f se rapproche de la droite Δ d'équation $y = x + 1$ quand $|x|$ devient grand. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet Δ comme *droite asymptotique*, on dit aussi que Δ est une asymptote de $\mathcal{C}_f$.
Puisque

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{2\,x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{2\,x}$$

et on en déduit le signe de $f(x) - (x+1)$ au voisinage de $\pm\infty$ et donc les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de Δ

— $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$;
— $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de Δ au voisinage de $-\infty$.

Remarque 2.12

On a vu précédemment que les développements limités pouvait se calculer à partir de ceux des dérivées. Qu'en est-il pour les développements asymptotiques ? La situation est un peu plus compliquée. La question est donc « soit f et g deux fonctions définies, dérivables sur un intervalle I, soit $x_0 \in [\inf I, \sup I]$ (éventuellement $\pm\infty$), g' ne s'annulant pas au voisinage de x_0 sauf, peut-être en x_0 et telles que

$$f'(x) = o_{x_0}(g'(x))$$

que peut-on dire de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ au voisinage de x_0 ? »

Remarque 2.13

Remarquons tout d'abord que, d'après les hypothèses sur g', la fonction g vérifie les mêmes hypothèses, à savoir qu'elle ne s'annule pas au voisinage de x_0 sauf, peut-être, en x_0. Nous allons nous limiter aux limites à gauche.

Proposition 2.2 – Primitivation d'un développement asymptotique

La fonction g admet une limite finie lorsque x tend vers x_0

Alors f admet aussi une limite quand x tend vers x_0^- et l'on a

$$f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) = o_{x_0}\left(g(x) - \lim_{x \to x_0^-} g(x)\right)$$

La fonction g tend vers un infini lorsque x tend vers x_0.

Alors

$$f(x) = o_{x_0}\left(g(x)\right)$$

Démonstration du cas où les fonctions ont une limite finie

Pour simplifier, on va supposer que $I = [0, +\infty[$ (donc que $x_0 = +\infty$) et que g est strictement croissante. Notons β la limite (finie) de g en $+\infty$.

1. Montrons tout d'abord que f admet une limite finie en $+\infty$. Prenons $\varepsilon = 1$, comme $f'(x) = o_{+\infty}(g'(x))$, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $-g'(x) \leq f'(x) \leq g'(x)$. Donc $f + g$ est croissante sur $[A, +\infty[$ et $f - g$ est décroissante sur $[A, +\infty[$. Donc pour tout $x \geq A$, $f(x) - g(x) \leq f(A) - g(A)$, donc $f(x) + g(x) \leq f(A) - g(A) + 2\,g(x)$. Or, g est croissante et admet $\beta \in \mathbb{R}$ comme limite en $+\infty$, donc $g \leq \beta$. On en déduit que la fonction $f + g$ est croissante et majorée (par $f(A) - g(A) + 2\,\beta$) sur $[A, +\infty[$, donc $f + g$ admet une limite finie en $+\infty$. Finalement, $f = (f + g) - g$ admet une limite finie en $+\infty$, notée α.
2. Montrons pour finir que $f(x) - \alpha = o_{+\infty}\left(g(x) - \beta\right)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f'(x) = o_{+\infty}(g'(x))$, il existe $B \geq 0$ tel que pour tout $x \geq B$, $-\varepsilon\, g'(x) \leq f'(x) \leq \varepsilon\, g'(x)$. Donc $f + \varepsilon\, g$ est croissante sur $[B, +\infty[$ et $f - \varepsilon\, g$ est décroissante sur $[B, +\infty[$. Comme ces deux fonctions admettent respectivement $\alpha + \varepsilon\,\beta$ et $\alpha - \varepsilon\,\beta$ comme limite en $+\infty$, on en déduit que sur $[B, +\infty[$, on a

$$f + \varepsilon\, g \leq \alpha + \varepsilon\,\beta \quad \text{et} \quad f - \varepsilon\, g \geq \alpha - \varepsilon\,\beta$$

D'où sur $[B, +\infty[$, on a

$$-\varepsilon\,(\beta - g) \leq \alpha - f \quad \text{et} \quad \alpha - f \leq \varepsilon\,(\beta - g)$$

Finalement, pour tout $x \geq B$, on a $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon\,(\beta - g(x))$. D'où le résultat.

Démonstration du cas où g a une limite infinie

C'est un excellent exercice !

Remarque importante 2.14

On peut primitiver les développements asymptotiques, mais il faut bien faire attention aux comportements limites !

Exemple 2.9

Cherchons un développement asymptotique de $\arcsin(x)$ au voisinage de 1^-. On a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\,(1 - x)}}$$

On reconnaît à droite la dérivée de la fonction g définie par

$$g(x) = -\sqrt{2\,(1 - x)} \text{ qui admet la limite 0 en } 1^-$$

On peut donc en déduire que [a]

$$\arcsin(x) - \frac{\pi}{2} \underset{1^-}{\sim} -\sqrt{2\,(1 - x)}$$

puis

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\,(1 - x)} + o_{1^-}(\sqrt{1 - x})$$

a. Noter la présence de $\arcsin(1) = \pi/2$.

Session `Wxmaxima` 2.9 – Développement asymptotique de arcsin

```
(%i1) taylor(asin(1-h),h,0,1);
```

(%o1)/T/ $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\,\sqrt{h} + \ldots$

Session `Python` 2.9 – Développement asymptotique de arcsin

Il est toujours important d'aider le logiciel à faire les calculs. Ainsi, on veut écrire que $x = 1 - h$, où $h > 0$. Il est alors intéressant de le dire à `Sympy`.

In[20]

```python
h = symbols('h', positive=True)
asin(1-h).series(h, 0, 1)
```

Out[20]

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{h} + O\left(h\right)$$

Remarque 2.15

En utilisant la formule bien connue, lorsque $x > 0$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

il est facile de trouver un développement asymptotique de arctan au voisinage de $+\infty$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si l'on ne pense pas à cette formule, on peut l'obtenir directement avec ce qui précède

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ et } -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On obtient [a]

$$\arctan(x) - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)}_{\pi/2} = -\frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

a. On utilise la propriété 2.1, page 48

$$\boxed{f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = o_{x_0}(g(x))}$$

Session `Wxmaxima` 2.10 – Développement asymptotique de la fonction arctan

```
(%i1)  taylor(atan(x),x,inf,2);
```

Is x positive, negative, or zero ? p ;

(%o1)/T/ $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \ldots$

Pour éviter la question, il faut donner les propriétés de x.

```
(%i2)  assume(x>0)$
       taylor(atan(x),x,inf,2);
```

(%o3)/T/ $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \ldots$

Mais alors, x garde sa propriété pour la suite. Il est possible de la retrouver...

```
(%i4) facts(x);
```

(%o4) $[x > 0]$

et de l'oublier !

```
(%i5) forget(facts(x));
```

(%o5) $[[x > 0]]$

```
(%i6) facts(x);
```

(%o6) $[]$

Session `Python` 2.10 – Développement asymptotique de la fonction arctan

Contrairement à `Wxmaxima`, `Sympy` sait que $x > 0$, car nous sommes au voisinage de $+\infty$.

In[21]

```
atan(x).series(x, oo, 2)
```

Out[21]

$$-\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}; x \to \infty\right)$$

Remarque importante 2.16

Considérons la fonction $f = \sinh^{-1}$ introduite dans l'exercice 2.2.2, page 67. Si on ne sait rien sur cette fonction, on peut cependant calculer sa dérivée à l'aide de la formule bien connue

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Il vient alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

En primitivant, il vient alors

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$$

Remarque 2.17

Si on considère la fonction $g = f - \ln$, sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}\,\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,x^3}$$

On en déduit que g admet une limite K en $+\infty$ et que

$$g(x) - K \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,x^2}$$

soit

$$f(x) = \ln(x) + K + \frac{1}{4x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On connaît l'existence d'une constante, mais il n'est pas possible, par cette méthode, d'en calculer la valeur !

Remarque 2.18

Si, bien sûr, on connaît l'expression de $f = \sinh^{-1}$, on obtient

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \ln(x) + \ln(2) + o_{+\infty}(1)$$

ce qui permet de calculer la valeur de la constante.

Session `Wxmaxima` 2.11 – Développement asymptotique de la fonction $\sinh^{-1}$

```
(%i1) taylor(asinh(x),x,inf,3);
```

(%o1)/T/ $\log(x) + \log(2) + \ldots + \frac{1}{4\,x^2} + \ldots$

La fonction f s'appelle `asinh` en `Wxmaxima`. Notons la présence troublante de ces pointillés entre $\ln(2)$ et le reste du développement asymptotique...

```
(%i2) alias(ln,log)$
(%i3) taylor(ln(1+sqrt(1+1/x^2)),x,inf,2);
```

(%o3)/T/ $\ln(2) + \frac{1}{4\,x^2} + \ldots$

Si l'on *aide* `Wxmaxima`, en utilisant la même formule que ci-dessus, les pointillés inutiles disparaissent.

Session `Python` 2.11 – Développement asymptotique de la fonction $\sinh^{-1}$

Comme en `Wxmaxima`, il faut aider `Sympy` en remplaçant la fonction $\sinh^{-1}$ (souvent notée argsh en France) par sa formule logarithmique.

In[22]

```
asinh(x).series(x, oo, 3)
```

```
PoleError:
Asymptotic expansion of asinh around [oo] is not implemented.
```

In[23]

```
ln(1+sqrt(1+1/x**2)).series(x, oo, 3)
```

Out[23]

$$\frac{1}{4x^2} + \log(2) + O\left(\frac{1}{x^3}; x \to \infty\right)$$

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Déterminer des développements asymptotiques suivants

$$x \mapsto x^{\frac{1}{x}} \text{ au voisinage de } +\infty \text{ à 5 termes}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} \text{ au voisinage de 0 à 3 termes}$$

$$x \mapsto x\ \ln(x+1) - (x+1)\ \ln(x) \text{ au voisinage de } +\infty \text{ à 3 termes}$$

2.4.2 Déterminer une courbe simple asymptotique [a] en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ainsi que leurs positions relatives lorsque

$$f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

$$f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

$$f\ :\ x \mapsto x^2\ \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$f\,:\,x\mapsto \frac{x^2+x+1}{1+e^{1/x}}$$

$$f\,:\,x\mapsto x\,\exp\left(\frac{2\,x}{x^2+1}\right)$$

a. On a vu la définition d'une droite asymptotique (exemple 2.8, page 83), il est facile d'imaginer ce que peut être une *courbe* asymptotique.

2.4 Compléments sur les développements limités et asymptotiques

2.4.1 Fonctions réciproques

Le problème traité ici est le suivant. On a une fonction f possédant un développement limité ou asymptotique au voisinage d'un point $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ qui, de plus, est inversible au voisinage de x_0. Peut-on en déduire un développement limité ou asymptotique de f^{-1} au voisinage de $f(x_0)$?

2.4.1.1 Utilisation de la formule de Taylor-Young

Propriété 2.13

Il est facile de trouver un développement limité à l'ordre n ($n \geq 1$) d'une fonction réciproque de f (dont on connaît un développement limité à l'ordre n au point x_0, supposé ici dans $\mathbb{R}$) au point $f(x_0)$, lorsque l'on a les hypothèses suivantes sur f

$$f \text{ de classe } \mathscr{C}^n \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } f'(x_0) \neq 0$$

On sait alors que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de $f(x_0)$, d'après la relation $\left(f^{-1}\right)' = 1/f' \circ f^{-1}$. Le théorème de Taylor-Young nous permet alors d'affirmer l'existence d'un développement limité de f^{-1} au voisinage de $f(x_0)$.

Bilan

— On a

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n)$$

où les a_k ($k \in [\![0,n]\!]$) sont connus.

— On a

$$f^{-1}(f(x_0)+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, h^k + o(h^n)$$

où l'on sait que les b_k ($k \in [\![0,n]\!]$) ont une existence connue, mais une valeur à trouver.

— De plus, on a la relation, pour $x \in I$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x. \tag{2.1}$$

La technique est simple, développer la relation (2.1) à l'ordre n et utiliser l'unicité d'écriture des développements limités.

Exemple 2.10

Utilisons cette méthode pour trouver le développement limité à l'ordre 7 de la fonction tan.

- On a

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

que l'on obtient en primitivant le développement limité à l'ordre 6 de la dérivée d'arctan, qui est une somme géométrique

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

- La fonction tan, fonction réciproque de arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet donc un développement limité à tout ordre en 0. De plus, cette fonction est impaire, donc

$$\tan(x) = b_1\, x + b_3\, x^3 + b_5\, x^5 + b_7\, x^7 + o(x^7)$$

- Finalement

$$x = b_1 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) + b_3 \left(x^3 - x^5 + \frac{14}{15}\, x^7\right) + b_5 \left(x^5 - \frac{5}{3}\, x^7\right) + b_7\, x^7 + o(x^7)$$

où l'on a utilisé la formule du multinôme pour calculer les développements limités de $(\arctan(x))^k$, pour $k \in \{3,5,7\}$.

- En utilisant l'unicité du développement limité (car $x = x + o(x^7)$), il vient

$$b_1 = 1,\ -\frac{b_1}{3} + b_3 = 0,\ \frac{b_1}{5} - b_3 + b_5 = 0 \text{ et } -\frac{b_1}{7} + \frac{14\,b_3}{15} - \frac{5\,b_5}{3} + b_7 = 0$$

ce qui donne immédiatement (de proche en proche)

$$b_1 = 1,\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{2}{15} \text{ et } b_7 = \frac{17}{315}$$

Voir la session `Wxmaxima` 2.12, de la présente page ou la session `Python` 2.12, page suivante.

Session `Wxmaxima` 2.12 – Illustration de l'utilisation de la formule de Taylor-Young

```
(%i1) g(x) := trunc(b[1]*x+b[3]*x^3+b[5]*x^5+b[7]*x^7)$
(%i2) g(x);
```

(%o2) $$b_1\,x + b_3\,x^3 + b_5\,x^5 + b_7\,x^7 + \ldots$$

```
(%i3) taylor(g(atan(x))-x,x,0,7);
```

(%o3)/T/ $$(b_1 - 1)\,x + \frac{(3\,b_3 - b_1)\,x^3}{3} + \frac{(5\,b_5 - 5\,b_3 + b_1)\,x^5}{5} + \frac{(105\,b_7 - 175\,b_5 + 98\,b_3 - 15\,b_1)\,x^7}{105} + \ldots$$

```
(%i4) solve(makelist(coeff(%,x,k),k,1,7),[b[1],b[3],b[5],b[7]]);
solve: dependent equations eliminated: (2 4 6)
```

(%o4) $$[[b_1 = 1, b_3 = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{2}{15}, b_7 = \frac{17}{315}]]$$

```
(%i5) taylor(tan(x),x,0,7);
```

(%o5)/T/ $$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + \frac{17\,x^7}{315} + \ldots$$

Session Python 2.12 – Illustration de l'utilisation de la formule de Taylor-Young

N'ayant pas trouvé la fonction `trunc` en `Sympy`, il est facile de la programmer...

In[24]

```
def trunc(expr, x, n):
    return((expr+x**n).series(x, 0, n))
```

In[25]

```
b = IndexedBase('b')


def g(x):
    return(trunc(sum([b[2*k+1]*x**(2*k+1) for k in range(4)]),
                 x, 8))
```

In[26]

```
(g(atan(x))-x).series(x, 0, 8)
```

Out[26]

$$x(b_1-1)+x^3\left(-\frac{b_1}{3}+b_3\right)+x^5\left(\frac{b_1}{5}-b_3+b_5\right)+x^7\left(-\frac{b_1}{7}+\frac{14b_3}{15}-\frac{5b_5}{3}+b_7\right)+O\left(x^8\right)$$

In[27]

```
solve([_.coeff(x, 2*k+1) for k in range(8)])
```

Out[27]

$$\left\{b_1 : 1,\ b_3 : \frac{1}{3},\ b_5 : \frac{2}{15},\ b_7 : \frac{17}{315}\right\}$$

In[28]

```
g(x).subs(_)
```

Out[28]

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + O\left(x^8\right)$$

Remarque 2.19

Sous les hypothèses de la propriété 2.13, page 92, on peut déterminer directement b_0 et b_1 puisque

$$b_0 = f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(a_0) = x_0 \text{ et } b_1 = (f^{-1})'(a_0) = (f^{-1}))' \circ f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{a_1}$$

Exercice(s) 2.5

2.5.1 Soit $f : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto e^{x^2} \sin(x)$. Montrer que f réalise une bijection sur son image et déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

2.5.2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 2\,x - \arctan x$.

(a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0 et déterminer le développement limité à l'ordre 5.

(b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque admet un développement limité à tout ordre en 0.

(c) Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

(d) Que se passe-t-il lorsque l'on utilise l'identité $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$?

2.5.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + x^3$.

(a) Montrer que f est bijective. On note g sa réciproque.

(b) Montrer que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 et le calculer.

(c) Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

2.4.1.2 Autres cas

Que se passe-t-il lorsque la dérivée de la fonction en x_0 est nulle ? Et quand nous sommes en $\pm\infty$? Il n'y a alors plus aucun théorème à notre disposition. D'ailleurs, l'exemple de la fonction arccos au voisinage de $1 = \cos(0)$ nous montre que nous avons affaire à des développements asymptotiques. Comment le calculer ? De proche en proche !

Exemple 2.11

Prenons l'exemple de la fonction arccos au voisinage de 1. Il est assez facile, ici, de s'en sortir en passant par la dérivée connue, développer la dérivée et primitiver le développement obtenu.

- On a

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Développons au voisinage de 1^-, en posant $x = 1 - h$. Il vient

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\,h - h^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\,h}}\left(1 - \frac{h}{2}\right)^{-1/2}$$

- En utilisant le développement connu au voisinage de 0 de $(1+x)^\alpha$, pour $\alpha = -1/2$, on obtient

$$\arccos'(1-h) = -\frac{1}{\sqrt{2\,h}}\left(1 + \frac{h}{4} + \frac{3\,h^2}{32} + o(h^2)\right)$$

- Il reste à primitiver [a]

$$-\arccos(1-h) + \arccos(1) = -\sqrt{2\,h} - \frac{h^{3/2}}{6\sqrt{2}} - \frac{3\,h^{5/2}}{80\sqrt{2}} + o(h^{5/2})$$

d'où

$$\arccos(x) = \sqrt{2\,(1-x)} + \frac{\sqrt{2}}{12}\,(1-x)^{3/2} + \frac{3\sqrt{2}}{160}\,(1-x)^{5/2} + o_1\left((1-x)^{5/2}\right)$$

---

a. On connaît une primitive de $x \mapsto x^{\alpha}$, c'est

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ si } \alpha \neq -1 \text{ et } x \mapsto \ln(|x|) \text{ sinon}$$

Exemple 2.12

La méthode précédente ne fonctionne que parce que nous connaissons bien l'expression de la dérivée de la fonction réciproque de cos. On peut cependant s'en sortir aussi si on n'a plus cette information, uniquement à l'aide du développement limité de cos.

- On sait qu'au voisinage de 0, on a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc, au voisinage de 1

$$\cos(\arccos(x)) = x = 1 - \frac{(\arccos(x))^2}{2} + o_1\left((\arccos(x))^2\right)$$

et, donc [a]

$$\frac{(\arccos(x))^2}{2} = 1 - x + o_1(1-x)$$

On sait de plus que $\arccos(x)$ est positif au voisinage de 1, on en déduit que

$$\arccos(x) = \sqrt{2\,(1-x)} + o_1(\sqrt{1-x})$$

- On a obtenu le premier terme. Comment peut-on continuer ? Tout simplement en recommençant, après introduction d'une petite fonction

$$\delta(1-x) = \arccos(x) - \sqrt{2\,(1-x)} = o_1(\sqrt{1-x})$$

et en réinjectant dans le développement limité à l'ordre plus grand de cos

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Il vient

$$1-h=\cos(\arccos(1-h))=\cos(\sqrt{2\,h}+\delta(h))=1-\frac{1}{2}\,\left(2\,h+2\,\sqrt{2\,h}\,\delta(h)+o(\sqrt{h}\,\delta(h))\right)+\frac{1}{24}\,\left(4\,h^2+o(h^2)\right)$$

Soit, en simplifiant

$$\sqrt{2\,h}\delta(h)+o(\sqrt{h}\,\delta(h))=\frac{h^2}{6}+o(h^2) \tag{2.2}$$

En en déduit immédiatement, en divisant par $\sqrt{2h}$ que

$$\delta(h)=\frac{\sqrt{2}\,h^{3/2}}{12}+o(h^{3/2})$$

Finalement

$$\boxed{\arccos(x)=\sqrt{2\,(1-x)}+\frac{\sqrt{2}}{12}\,(1-x)^{3/2}+o_1\left((1-x)^{3/2}\right)}$$

a. Car si $f(x)=g(x)+o_{x_0}(g(x))$, alors $g(x)=f(x)+o_{x_0}(f(x))$.

Remarque 2.20

Cette méthode est *très* délicate. Malheureusement, on n'a parfois que celle-ci à disposition ! Il est important de noter que

1. on fait apparaître des o de différentes natures ;
2. l'objectif est de faire apparaître une égalité (équation (2.2)), où les termes ne sont pas de même nature (connue ou inconnue), chacun associé à un o de lui-même. À gauche, un o dépendant de la fonction étudiée δ et à droite, un o indépendant de δ.

Remarque 2.21

Cette méthode peut aussi s'appliquer en $\pm\infty$. Mêmes principes, mêmes difficultés.

Exemple 2.13

Soit la fonction $f : x \mapsto x + x^5$. Elle est clairement $\mathscr{C}^\infty$ et inversible au voisinage de $+\infty$. Cherchons un développement asymptotique de f^{-1} au voisinage de $+\infty$.

- $f(x) = x^5 + o_{+\infty}(x^5)$, donc
$$x = \sqrt[5]{f(x)} + o_{+\infty}\left(\sqrt[5]{f(x)}\right)$$
On obtient donc, en posant $x = f^{-1}(y)$
$$f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y} + \underbrace{o_{+\infty}(\sqrt[5]{y})}_{\delta(y)}$$
- On réinjecte dans le développement asymptotique plus précis de $f(x)$
$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) = y = y + 5\,\sqrt[5]{y^4}\,\delta(y) + o_{+\infty}(\sqrt[5]{y^4}\,\delta(y)) + \sqrt[5]{y} + o_{+\infty}(\sqrt[5]{y})$$
Que l'on peut réorganiser en
$$5\,\sqrt[5]{y^4}\,\delta(y) + o_{+\infty}(\sqrt[5]{y^4}\,\delta(y)) = -\sqrt[5]{y} + o_{+\infty}(\sqrt[5]{y})$$
Soit, finalement
$$\delta(y) = -\frac{1}{5}\,y^{-3/5} + o_{+\infty}\left(y^{-3/5}\right)$$

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Montrer que les fonctions suivantes sont inversibles au voisinage de $+\infty$. Donner un développement asymptotique à deux termes de leur réciproque au voisinage de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{x} \\ x &\mapsto x\,\tanh(x) \\ x &\mapsto \frac{x^7}{1+x^4} \end{aligned}$$

2.4.1.3 Remarque complémentaire

Les deux exemples précédents nous montrent combien la deuxième méthode est pénible. Heureusement, dans de nombreux cas nous pouvons l'éviter.

Exemple 2.14

Dans le premier exemple, le problème venait de ce que la dérivée de cos s'annulait en 0. Nous avions, de manière plus précise (x variera dans $[0, \pi]$, car nous nous intéressons à l'arccos, en particulier x est positif)

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On a donc

$$x^2 = 2\,(1 - \cos(x)) + o\left((1 - \cos(x))\right)$$

et, finalement

$$x = \sqrt{2\,(1 - \cos(x))} + o\left(\sqrt{1 - \cos(x)}\right)$$

Au lieu de travailler avec la relation $y = \cos(x)$, nous allons travailler avec la relation

$$z = \sqrt{2\,(1 - \cos(x))}$$

car nous allons pouvoir utiliser la formule de Taylor-Young sur cette équation !

Session Wxmaxima 2.13 – Méthode industrielle

```
(%i1) assume(x>=0)$
(%i2) f(x) := sqrt(2*(1-cos(x)))$
```

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,5);
```

(%o3)/T/ $x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1920} + ...$

```
(%i4) g(z) := trunc(b[1]*z+b[3]*z^3+b[5]*z^5)$

(%i5) taylor(g(f(x))-x,x,0,5);
```

(%o5)/T/ $(b_1 - 1)\,x + \frac{(24\,b_3 - b_1)\,x^3}{24} + \frac{(1920\,b_5 - 240\,b_3 + b_1)\,x^5}{1920} + ...$

```
(%i6) solve(makelist(coeff(%,x,k),k,0,5),[b[1],b[3],b[5]]);

solve: dependent equations eliminated: (1 3 5)
```

(%o6) $[[b_1 = 1, b_3 = \frac{1}{24}, b_5 = \frac{3}{640}]]$

```
(%i7) trunc(subst(%[1],g(z)));
```

(%o7) $z + \frac{z^3}{24} + \frac{3\,z^5}{640} + ...$

```
(%i8) powerdisp : true$

(%i9) trunc(subst([z=sqrt(2*(1-y))],%th(2)));
```

(%o9) $\sqrt{2}\,\sqrt{1-y} + \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3\,2^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\,(1-y)^{\frac{5}{2}}}{5\,2^{\frac{9}{2}}} + ...$

```
(%i10) taylor(acos(1-h),h,0,3);
```

(%o10)/T/ $\sqrt{2}\,\sqrt{h} + \frac{\sqrt{2}\,h^{\frac{3}{2}}}{12} + \frac{3\,\sqrt{2}\,h^{\frac{5}{2}}}{160} + ...$

Session `Python` 2.13 – Méthode industrielle

Quand on peut éviter la méthode pas-à-pas, il faut le faire, surtout si nous avons à calculer plusieurs termes. Ici, comment calculer le développement asymptotique de la fonction arccos au voisinage de 1.

In[29]

```
def f(x):
    return(sqrt(2*(1-cos(x))))


def g(x):
    return(trunc(sum([b[2*k+1]*x**(2*k+1) for k in range(3)]),
                 x, 6))
```

In[30]

```
f(x).series(x, 0, 6)
```

Out[30]

$$x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1920} + O\left(x^6\right)$$

In[31]

```
g(z)
```

Out[31]

$$zb_1 + z^3b_3 + z^5b_5 + O\left(z^6\right)$$

In[32]

```
(g(f(x))-x).series(x, 0, 6)
```

Out[32]

$$x\left(b_1-1\right)+x^3\left(-\frac{b_1}{24}+b_3\right)+x^5\left(\frac{b_1}{1920}-\frac{b_3}{8}+b_5\right)+O\left(x^6\right)$$

In[33]

```
solve([_.coeff(x, 2*k+1) for k in range(3)])
```

Out[33]

$$\left\{b_1:1,\ b_3:\frac{1}{24},\ b_5:\frac{3}{640}\right\}$$

In[34]

```
g(z).subs(_)
```

Out[34]

$$z+\frac{z^3}{24}+\frac{3z^5}{640}+O\left(z^6\right)$$

In[35]

```
_.subs({z: sqrt(2*(1-y))})
```

Out[35]

$$\sqrt{2-2y}+\frac{(2-2y)^{\frac{3}{2}}}{24}+\frac{3\,(2-2y)^{\frac{5}{2}}}{640}+O\left((y-1)^3\,;y\to 1\right)$$

In[36]

```
acos(1-h).series(h, 0, 3)
```

Out[36]

$$\sqrt{2}\sqrt{h}+\frac{\sqrt{2}h^{\frac{3}{2}}}{12}+\frac{3\sqrt{2}h^{\frac{5}{2}}}{160}+O\left(h^{3}\right)$$

Exemple 2.15

Procédons de même avec le deuxième exemple. On peut transformer l'équation

$$y = x + x^5$$

en

$$\frac{1}{z} = \sqrt[5]{\frac{1}{t}+\frac{1}{t^5}}$$

en posant $x = 1/t$, pour se ramener en 0 et $1/z = \sqrt[5]{y}$ pour, d'une part, se ramener en 0, d'autre part, avoir un développement limité convenable en 0.

Session Wxmaxima 2.14 – Industrialisation (en $+\infty$)

```
(%i1) f(t) := 1/(1/t+1/t^5)^(1/5)$
      f(t);
```

(%o2) $$\frac{1}{\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^5}\right)^{\frac{1}{5}}}$$

```
(%i3) taylor(f(t),t,0,9);
```

(%o3)/T/ $$t-\frac{t^5}{5}+\frac{3\,t^9}{25}+\ldots$$

```
(%i4) g(z) := trunc(sum(b[k]*z^k,k,1,9))$
```

```
(%i5) taylor(g(f(t))-t,t,0,9);
```

(%o5)/T/ $$(b_1-1)\,t+b_2\,t^2+b_3\,t^3+b_4\,t^4+\frac{(5\,b_5-b_1)\,t^5}{5}+\frac{(5\,b_6-2\,b_2)\,t^6}{5}+\frac{(5\,b_7-3\,b_3)\,t^7}{5}+\frac{(5\,b_8-4\,b_4)\,t^8}{5}+\frac{(25\,b_9-25\,b_5+3\,b_1)\,t^9}{25}+\ldots$$

```
(%i6) solve(makelist(coeff(%,t,k),k,0,9),makelist(b[k],k,1,9));
solve: dependent equations eliminated: (1)
```

(%o6) $$[[b_1=1,b_2=0,b_3=0,b_4=0,b_5=\frac{1}{5},b_6=0,b_7=0,b_8=0,b_9=\frac{2}{25}]]$$

```
(%i7) powerdisp : true$
```

```
(%i8) trunc(subst(%th(2)[1],g(z)));
```

(%o8) $$z+\frac{z^5}{5}+\frac{2\,z^9}{25}+\ldots$$

```
(%i9) taylor(1/%,z,0,9);
```

(%o9)/T/ $$\frac{1}{z}-\frac{z^3}{5}-\frac{z^7}{25}+\ldots$$

Eh oui ! C'est le développement de $1/z$ que nous cherchons !

```
(%i10) trunc(subst([z=y^(-1/5)],%));
```

(%o10) $$-\frac{1}{25\,y^{\frac{7}{5}}}-\frac{1}{5\,y^{\frac{3}{5}}}+y^{\frac{1}{5}}+\ldots$$

Pour une raison obscure, `Wxmaxima` l'écrit dans un mauvais ordre...

Session Python 2.14 – Industrialisation (en $+\infty$)

L'utilisation de la méthode est un peu technique, il faut en effet enlever des O pour faire correctement les calculs (voir la ligne 40).

In[37]

```
t = symbols('t', positive=True)


def f(t):
    return(1/(1/t+1/t**5)**(S(1)/5))
```

In[38]

```
f(t).series(t, 0, 10)
```

Out[38]

$$t - \frac{t^5}{5} + \frac{3t^9}{25} + O\left(t^{10}\right)$$

In[39]

```
def g(z):
    return(trunc(sum([b[k]*z**k for k in range(1, 10)]), z, 10))
```

In[40]

```
g(f(t))
```

```
TypeError: 'ConditionSet' object is not iterable
```

In[41]

```
((g(z).removeO()).subs({z: f(t)})-t).series(t, 0, 10)
```

Out[41]

$$t\left(b_1-1\right)+t^2b_2+t^3b_3+t^4b_4+t^5\left(-\frac{b_1}{5}+b_5\right)+t^6\left(-\frac{2b_2}{5}+b_6\right)+t^7\left(-\frac{3b_3}{5}+b_7\right)+t^8\left(-\frac{4b_4}{5}+b_8\right)+t^9\left(\frac{3b_1}{25}-b_5+b_9\right)+O\left(t^{10}\right)$$

In[42]

```
solve([_.coeff(t, k) for k in range(1, 10)])
```

Out[42]

$$\left\{b_1:1,\ b_2:0,\ b_3:0,\ b_4:0,\ b_5:\frac{1}{5},\ b_6:0,\ b_7:0,\ b_8:0,\ b_9:\frac{2}{25}\right\}$$

In[43]

```
g(z).subs(_)
```

Out[43]

$$z+\frac{z^5}{5}+\frac{2z^9}{25}+O\left(z^{10}\right)$$

In[44]

```
(1/_).series(z, 0, 10)
```

Out[44]

$$\frac{1}{z} - \frac{z^3}{5} - \frac{z^7}{25} + O\left(z^{10}\right)$$

In[45]

```
_.subs({z: y**(-S(1)/5)})
```

Out[45]

$$-\frac{1}{25y^{\frac{7}{5}}} - \frac{1}{5y^{\frac{3}{5}}} + \sqrt[5]{y} + O\left(\frac{1}{y^2}; y \to \infty\right)$$

Exercice(s) 2.7

2.7.1 Soit la fonction

$$f\ :\ x \mapsto \frac{x^7}{1+x^4}$$

(a) Montrer que la fonction f définit une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer un développement asymptotique à 3 termes au voisinage de 0 de la réciproque de f.

2.7.2 Déterminer des développements asymptotiques à deux termes au voisinage de $+\infty$ de la réciproque (dont on montrera l'existence) de la fonction

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{x} \\ x &\mapsto x\tanh(x) \\ x &\mapsto \frac{x^7}{1+x^4} \end{aligned}$$

On essaiera, lorsque c'est possible, de se ramener à l'utilisation de la formule de Taylor-Young.

2.4.2 Fonctions implicites

Le calcul des développements asymptotiques dans les situations où l'on ne connaît pas de formule explicite de la fonction étudiée pose le problème suivant. On ne peut pas prévoir la forme des termes qui apparaissent. En conséquence, la méthode artisanale est la seule qui peut fonctionner.

Exemple 2.16

On considère la fonction, pour $t \in]2, +\infty[$, donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = x^t - t\,x + 1$$

- La fonction f_t est clairement continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Comme, de plus, $f_t(1) = 2 - t < 0$, par hypothèse sur t et que

$$f_t(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer l'existence d'une solution x_t de $f_t(x) = 0$, dans l'intervalle $]1, +\infty[$. La stricte monotonie nous donne son unicité.

Nous allons chercher le développement asymptotique à 3 termes de x_t lorsque t tend vers $+\infty$. Nous voyons bien que nous n'avons pas de formule explicite de x_t.

- *Premier terme.* La recherche du premier terme est la plus délicate, car il faut pouvoir localiser x_t (a-t-il une limite ? Tend-il vers $+\infty$? etc.) L'idée est simple, plutôt que de placer x_t par rapport à une constante k, nous allons placer k par rapport à x_t en prenant en considération les signes de la fonction x_t. On a le tableau de signe (pour $k > 1$ et t assez grand) de la figure 2.2, page 113. En effet, si l'on calcule $f_t(k) = k^t - t\,k + 1$ et que $k > 1$, alors

$$f_t(k) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

Ce qui signifie, que si t est assez grand, alors $f_t(k) > 0$, donc $k > x_t$. En prenant un $\varepsilon > 0$ et $k = 1 + \varepsilon$, on obtient

$$\exists T > 2,\ \forall t \geq T,\ 1 \leq x_t \leq k = 1 + \varepsilon$$

Ce qui nous donne

$$\boxed{x_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1}$$

- *Deuxième terme.* Posons

$$x_t = 1 + \delta_t \text{ où } \delta_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

En écrivant

$$\underbrace{x_t^t}_{\text{le plus gros terme}} = \underbrace{t\,x_t - 1}_{\text{les autres termes}}$$

ou encore

$$x_t = \sqrt[t]{t\,x_t - 1} = \sqrt[t]{t + t\,\delta_t - 1} = t^{1/t}\left(1 + \frac{t\,\delta_t - 1}{t}\right)^{1/t} \tag{2.3}$$

Finalement [a]

$$1 + \delta_t = \left(1 + \frac{\ln(t)}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)\right)\left(1 + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

On obtient donc

$$\boxed{\delta_t = \frac{\ln(t)}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)}$$

- *Troisième terme.* On procède de même. Posons

$$x_t = 1 + \frac{\ln(t)}{t} + \mu_t,\ \text{où } \mu_t = o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

On réinjecte dans l'équation (2.3). Il vient

$$1 + \frac{\ln(t)}{t} + \mu_t = \underbrace{\left(1 + \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln^2(t)}{2t^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln^2(t)}{t^2}\right)\right)\underbrace{\left(1 + \frac{\ln(t)}{t} + \mu_t - \frac{1}{t}\right)^{1/t}}_{1+\frac{\ln(t)}{t^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right)}}_{1+\frac{\ln(t)}{t}+\frac{\ln^2(t)}{2t^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln^2(t)}{t^2}\right)}$$

Ce qui nous donne

$$\boxed{\mu_t = \frac{\ln^2(t)}{2t^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln^2(t)}{t^2}\right)}$$

a. Car $t^{1/t} = \exp(\ln(t)/t)$ et $(1 + o(1))^{1/t} = \exp(\ln(1 + o(1))/t)$.

Figure 2.1 – Droite asymptote

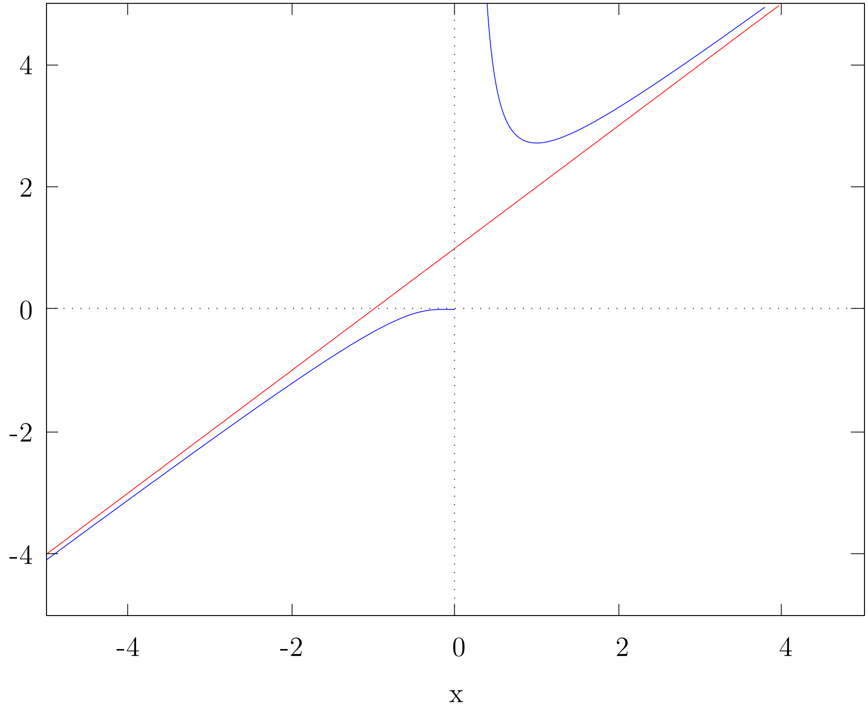


Figure 2.2 – Tableau de signe

x	1		x_t		k	$+\infty$
$f_t(x)$	$2-t<0$	$f_t(x)<0$	0		$f_t(x)>0$	$+\infty$

Session `Wxmaxima` 2.15 – Développements d'une fonction implicite

On se place en 0, en remplaçant t par $1/t$. Cela aide beaucoup les logiciels de calcul formel...

```
(%i1) f(x) := 1/t^t*(x-t)^t$
(%i2) taylor(f(trunc(1))-1,t,0,1);
```

(%o2)/T/ $\left(-\log(t)+\ldots\right)t+\ldots$

```
(%i3) taylor(f(trunc(1-log(t)*t))-1+log(t)*t,t,0,2);
```

(%o3)/T/ $\left(\frac{\log(t)^2}{2}-\log(t)-1+\ldots\right)t^2+\ldots$

```
(%i4) trunc(subst([t=1/t],1-t*log(t)+t^2*log(t)^2/2));
```

(%o4) $1+\frac{\log(t)}{t}+\frac{\log(t)^2}{2\,t^2}+\ldots$

Session Python 2.15 – Développements d'une fonction implicite

Pour les développements asymptotiques de fonctions implicites, on aura un théorème qui nous permettra, dans certains cas, de savoir *a priori* que le développement limité existe (voir le théorème des fonctions implicites dans le cours de calcul différentiel). En général, on ne connaît ni l'existence, ni la forme d'un éventuel développement. Il ne nous reste donc que la méthode pas-à-pas...

In [46]

```python
def f(x):
    return(1/t**t*(x-t)**t)
```

In [47]

```python
(f(1)-1).series(t, 0, 2)
```

Out [47]

$$-t\log(t) + O\left(t^2\log(t)^2\right)$$

In [48]

```python
(f(1+_.removeO())-(1+_.removeO())).series(t, 0, 3)
```

Out [48]

$$t^2\left(\frac{\log(t)^2}{2} - \log(t)\right) + O\left(t^3\log(t)^3\right)$$

In [49]

```
(1-t*ln(t)+t**2*ln(t)**2/2).subs({t: 1/t})
```

Out [49]

$$1 - \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{t} + \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2t^2}$$

In [50]

```
_.simplify()
```

Out [50]

$$1 + \frac{\log(t)}{t} + \frac{\log(t)^2}{2t^2}$$

Exercice(s) 2.8

2.8.1 On considère l'équation

$$\tan(x) = x$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\,\pi, +\frac{\pi}{2} + n\,\pi\right[$, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2.8.2 Reprendre l'exercice précédente en remplaçant l'équation par

$$\tan(x)\,\tanh(x) = x$$

2.8.3 Pour la fonction donnée en exemple

$$f_t(x) = x^t - t\,x + 1, \text{ où } t > 2$$

(a) Montrer que cette fonction possède un unique point x_t d'annulation sur l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_t au voisinage de 0.

2.8.4 Soit q une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, qui vérifie

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ f''(x) + q(x)\,f(x) = 0$$

Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer.

2.8.5 (a) Montrer qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que

$$\forall x \geq 0,\ f(x)\,e^{f(x)} = x$$

(b) Préciser la monotonie de f.

(c) Comparer $f(x)$ et $\ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Donner un développement asymptotique à 3 termes au voisinage de $+\infty$.

2.8.6 On considère l'équation

$$y^4 + y\cos(y) = x$$

(a) Montrer que pour $x > 0$, il existe une unique solution $y_x > 0$.

(b) Donner les trois premiers termes du développement asymptotique de y_x lorsque x tend vers 0^+.

(c) Que pouvez-vous dire du développement asymptotique de y_x lorsque x tend vers $+\infty$?

Chapitre 3

Intégration

3.1 L'intégrale de Riemann

注释 3.1

熟练掌握本节函数积分的定义,性质及运算。

3.1.1 Aire et premières propriétés

L'objectif de ce paragraphe est simple, étant donnée une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on veut pouvoir calculer l'« aire » de la zone comprise entre la courbe et l'axe des x, comme sur la figure 3.1, page 141 ($f : x \mapsto x^2$ sur $[-1, +1]$).

Remarque 3.1

Comme pour le calcul des aires des rectangles, on aura des aires positives et négatives, suivant que la courbe est *au dessus* de l'axe Ox ou *au dessous*. Voir la figure 3.2, page 142, représentant le cas de la fonction $x \mapsto x^3 - x$ sur $[-1.5, 1.5]$.

这里通过几个特殊的例子给出区间上函数黎曼积分的几何意义。

Notation 3.1

Nous noterons *quand elle existera* cette « aire » sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dira alors que f est *intégrable sur* $[a,b]$, et on lit la formule ci-dessus « intégrale de a à b de $f(x)$ d x ».

函数的黎曼可积性是本小节学习的重要条件，函数 f 的黎曼和都会趋向于一个确定的值即面积确定，那么f 在闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼积分存在，并且定义为黎曼和的极限，这时候称函数 f 为黎曼可积的。

Remarque importante 3.2

La variable x introduite dans la notation est dite *variable muette*. Cela signifie qu'on pourrait aussi bien écrire t, u, etc. C'est en effet un calcul qui dépend de la fonction f, mais pas du nom de la variable utilisée. On a donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \cdots$$

x peut exister en dehors de l'intégrale, en ce cas, il faut *absolument* éviter de prendre x comme variable muette ! Une écriture du genre

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \text{ n'a aucun sens ! On écrira } \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ par exemple}$$

Nous allons énoncer, dans la suite de cette section, un *cahier des charges* de l'intégrale. C'est-à-dire, les propriétés que nous attendons d'une intégrale. Les conséquences de ces propriétés seront étudiées dans la section 3.1.2, page 121. Une construction possible de l'intégrale, respectant notre cahier des charges pour les fonctions continues par morceaux, sera proposée dans la section 3.1.3, page 125.

Propriété 3.1 – Relation de Chasles

Si f est intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$ et si $c \in]a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[b, c]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Voir la figure 3.3, page 143.

黎曼积分具有可加性。

Notation 3.2

Pour simplifier, lorsque $a > b$, on notera

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Not}}{=} -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et, de même } \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ainsi, la relation de Chasles pourra s'écrire sans que l'on s'occupe de l'ordre de a, b et c, ni de leur éventuelle égalité.

Propriété 3.2 – Croissance de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ $(a < b)$ et si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Voir la figure 3.4, page 144.

Propriété 3.3 – Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, alors la fonction $\lambda.f+\mu.g$ est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \left(\lambda\, f(x)+\mu\, g(x)\right)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Voir les figures 3.5, page 145 et 3.6, page 146.

这里表示黎曼积分是线性变换的，我们的教材《线性代数(法文版)》线性映射章节有线性变换的详细介绍。

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Calculer

$$\int_{-1}^{2}\lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$$

3.1.2 Calculer l'intégrale sur $[0,5]$ de la fonction définie sur $[0,5]$ par

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } 0\leq x\leq \frac{1}{2}\\ -2\,x+\frac{5}{2} & \text{si } \frac{1}{2}<x\leq 3\\ 4\,x-\frac{17}{2} & \text{si } 3<x\leq 5\end{cases}$$

3.1.3 Calculer l'intégrale sur $[-2,2]$ de la fonction définie par

$$f(x)=x+2+\sqrt{4-x^2}$$

3.1.2 Majoration d'intégrales et conséquences

Propriété 3.4

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$) et si f et $|f|$ sont intégrables sur $[a,b]$ (c'est le cas, par exemple, des fonctions continues), alors

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration

On regarde séparément les aires positives et négatives, en posant

$$f^+ = \max(0,+f) \text{ et } f^- = \max(0,-f)$$

Ces deux fonctions sont positives et intégrables sur $[a,b]$, car

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \text{ et } f^- = \frac{|f|-f}{2} \text{ ou } f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-$$

On a finalement

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)$$

La croissance permet de conclure.

Propriété 3.5

Lorsque f est intégrable sur $[a,b]$ ($a < b$), et bornée (c'est le cas, par exemple, des fonctions continues), alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x)\right|$$

从比较几何面积大小的角度来看，本性质变得一目了然。

Démonstration

On a, pour tout $x \in [a,b]$
$$-\Big(\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|\Big) \leq f(x) \leq +\Big(\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|\Big)$$
la croissance de l'intégrale permet de conclure.

Propriété 3.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, continue, *positive* (et intégrable) [a] sur $[a,b]$, alors
$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right] \iff [f = 0]$$

a. Nous verrons plus loin que les fonctions continues sont intégrables.

Démonstration

Un dessin nous permet de comprendre ce qui se passe. Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0) > 0$. La continuité de f en x_0 nous donne pour $\varepsilon = f(x_0)/2$, l'existence d'un $\eta > 0$, tel que
$$[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset]a,b[\text{ et } \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$$
La relation de Chasles nous donne
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_0-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$
La croissance de l'intégrale nous permet d'affirmer que
$$\int_a^{x_0-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad \int_{x_0+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \eta\, f(x_0) > 0$$
Voir la figure 3.7, page 147.

Propriété 3.7 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ telles que f^2 et g^2 soient intégrables sur $[a, b]$ et $f\,g$ intégrale sur $[a, b]$, alors [a] (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}\,\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}}$$

Si, de plus, f et g sont continues et si il y a égalité, alors f et g sont proportionnelles. [b]

---

a. Les hypothèses sont vérifiées pour les fonctions continues.
b. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$f = \lambda.g \text{ ou } g = \lambda.f$$

Démonstration

1. *Inégalité.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque, alors, par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) + \lambda\, g(x))^2 \;\mathrm{d}x \geq 0$$

donc, en développant, par linéarité de l'intégrale

$$\lambda^2 \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq 0$$

Comme λ est quelconque, ceci n'est possible que si le discriminant de l'équation du second degré est négatif ou nul. Donc

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right) \leq 0$$

2. *Cas d'égalité dans le cas où f et g sont continues.* Si il y a égalité, le discriminant est nul. Si $g \neq 0$, cela signifie ($g \neq 0$ et continue donc, le terme en λ^2 est non nul) qu'il existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b (f(x) + \lambda_0\, g(x))^2 \;\mathrm{d}x = 0$$

La fonction $(f + \lambda_0.g)^2$ est donc positive, continue et son intégrale est nulle, on en déduit qu'elle est nulle. En ce cas, $f = -\lambda_0.g$. Si g est nulle, alors $g = 0.f$.

Exercice(s) 3.2

On admettra pour le moment que toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

3.2.1 Soit f une fonction définie, continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, à valeurs réelles, telle que, pour toute fonction $g;:\ [a,b]\to\mathbb{R}$, continue

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=0$$

montrer que $f=0$.

3.2.2 Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{n+1}\leq\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\,\mathrm{d}t\leq\frac{2}{n+1}$$

3.2.3 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a<b)$, continue sur $[a,b]$, montrer que

$$\left[\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right]\iff\left[f\text{ garde un signe constant}\right]$$

3.2.4 Soit f et g deux fonctions définies, continues sur $[a,b]$ $(a<b)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\sqrt{\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)^2\,\mathrm{d}x}\leq\sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$$

(b) Préciser les cas d'égalité.

3.2.5 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, continue. Montrer que

$$\left|\int_0^1 x\,f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x}$$

Préciser les cas d'égalité.

3.2.6 Montrer que, si on pose

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\int_0^1\left(\sin(t)\right)^x\,\mathrm{d}t$$

alors, la fonction f est décroissante, positive et elle vérifie de plus

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

3.2.7 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$), de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(a) = f(b) = 0$ et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leq k$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq k\,\frac{(b-a)^2}{4}$$

3.2.8 Soit $a > 0$ et f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$, vérifiant de plus $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^a |f(x)\,f'(x)|\ \mathrm{d}x \leq \frac{a}{2} \int_0^a f'(x)^2\ \mathrm{d}x$$

3.2.9 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \int_0^1 x^k\,f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.

3.1.3 Construction théorique de l'intégrale

Il nous reste la question de savoir quelles sont les fonctions intégrables sur $[a,b]$ ($a < b$), ou, plus simplement, si les fonctions que nous connaissons sont intégrables sur $[a,b]$. Nous allons nous limiter à une famille de fonctions assez simples et montrer que celles-ci sont intégrables sur $[a,b]$.

Définition 3.1 – Fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$), on dit que f est *continue par morceaux sur* $[a,b]$ si il existe une *subdivision* de $[a,b]$, c'est-à-dire un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0, \ldots, a_n$, tels que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

et des fonctions $g_1, \dots, g_n$ vérifiant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$g_k \text{ est définie, continue sur } \underbrace{[a_{k-1}, a_k]}_{\text{fermé}}$$

et

$$\forall x \in \underbrace{]a_{k-1}, a_k[}_{\text{ouvert}}, \ f(x) = g_k(x)$$

这里给出分段连续函数的定义，需要注意的是连续函数是分段连续函数的一种特殊情况。

Remarque importante 3.3

Remarquons la subtile nuance sur l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$. La fonction g_k est définie, continue sur le *segment* $[a_{k-1}, a_k]$. En particulier, elle admet une limite à droite en a_{k-1} et une limite à gauche en a_k. En revanche, la fonction f coïncide avec les g_k sur *l'intervalle ouvert* $]a_{k-1}, a_k[$, on n'a donc *a priori* aucune information sur la valeur de $f(a_k)$. En conclusion, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\lim_{x \to a_k^+} f(x) \text{ existe et vaut } g_{k+1}(a_k)$$

et

$$\lim_{x \to a_{k+1}^-} f(x) \text{ existe et vaut } g_{k+1}(a_{k+1})$$

Exemple 3.1

1. La fonction $\lfloor \ \rfloor$ (partie entière) est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction signe définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{signe}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

3. La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[-1, +1]$, car elle n'a pas de limite à gauche et à droite en 0.

Définition 3.2 – Fonction en escalier

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, continue par morceaux sur $[a, b]$, on dira que f est *en escalier* si, il existe une subdivision telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$g_k \text{ est une fonction constante}$$

理解并掌握闭区间上阶梯函数的定义。

Exemple 3.2

La fonction partie entière est en escalier sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.4

On voit immédiatement qu'une fonction en escalier est intégrable (on somme les aires des rectangles) sur $[a, b]$. Figure 3.8, page 148. Et si f est en escalier, $g_1, \ldots, g_n$ les fonctions constantes sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors [a]

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, g_{k+1}(a_k)$$

a. On reconnaît l'aire des rectangles de largeur $a_{k+1} - a_k$ et de hauteur $g_{k+1}(a_k)$.

Théorème 3.1 – Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, continue par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \text{ en escalier },\ \forall x \in [a, b],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Démonstration

1. *Nous allons commencer dans un premier temps par supposer que f est continue sur* $[a, b]$. En ce cas, nous obtenons, par exemple, le dessin suivant [a] (Voir la figure 3.9, page 149).

   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé, nous allons considérer l'ensemble suivant

   $$\Delta_\varepsilon = \{\alpha \in [a, b],\ \exists \varphi \text{ en escalier sur } [a, \alpha],\ \forall x \in [a, \alpha],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon\}$$

   D'après la continuité de f en a, il existe un $\eta_1 > 0$, pas de continuité associé à ε. En ce cas la fonction constante (donc, en escalier) définie sur $[a, a + \eta_1]$ par $\varphi(x) = f(a)$ vérifie

   $$\forall x \in [a, a + \eta_1],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

   donc $a + \eta_1 \in \Delta_\varepsilon$. On en déduit que $\Delta_\varepsilon \neq \emptyset$.

   (b) Considérons la borne supérieure δ de Δ_ε. Par définition, on a

   $$\delta \in [a, b]$$

   Supposons que $\delta \neq b$, alors, la fonction f étant continue, on peut trouver un $\eta_2 > 0$, pas de continuité de f en δ associé à ε. Comme $\delta < b$, on peut supposer que $\eta_2 < b - \delta$. Par définition, d'une borne supérieure, on peut aussi trouver $\beta \in]\delta - \eta_2, \delta] \cap \Delta_\varepsilon$, et une fonction φ_0 en escalier sur $[a, \beta]$ telle que, pour tout $x \in [a, \beta]$, $|f(x) - \varphi_0(x)| \leq \varepsilon$. On construit alors la fonction en escalier φ_1 sur $[a, \delta + \eta_2]$ par

   $$\forall x \in [a, \delta + \eta_2],\ \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{si } x \leq \beta \\ f(\delta) & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

   Ceci montre que $\delta + \eta_2 \in \Delta_\varepsilon$, contredisant la définition de δ. L'hypothèse $\delta \neq b$ est donc absurde. On en déduit que $\delta = b$.

   (c) D'après la continuité de f en b, il existe un $\eta_3 > 0$, pas de continuité associé à ε. Comme $\delta = b$, on a $b - \eta_3 < \delta$. On peut donc trouver $\gamma \in]b - \eta_3, \delta] \cap \Delta_\varepsilon$, et une fonction φ_2 en escalier sur $[a, \gamma]$ telle que, pour tout $x \in [a, \gamma]$, $|f(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon$. On construit alors la fonction en escalier φ_3 sur $[a, b]$ par

   $$\forall x \in [a, b],\ \varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & \text{si } x \leq \gamma \\ f(b) & \text{si } x > \gamma \end{cases}$$

   Alors pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - \varphi_3(x)| \leq \varepsilon$.

2. *Lorsque la fonction f est continue par morceaux*, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on applique ce qui précède à chaque fonction g_k, ce qui nous donne une fonction en escalier φ_k sur $[a_{k-1}, a_k]$ et on construit la fonction φ qui convient de la manière suivante

   $$\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_{k-1}, a_k[,\ \forall k \in [\![1, n]\!] \\ f(a_k) & \text{si } x = a_k,\ \forall k \in [\![0, n]\!] \end{cases}$$

---

a. La démonstration qui suit est non constructive. C'est-à-dire qu'elle ne nous fournit pas une construction explicite de la fonction en escalier qui convient. En revanche, le dessin fournit une fonction en escalier explicite. Nous verrons plus loin une autre démonstration montrant qu'elle convient.

Définition 3.3 – Intégrabilité d'une fonction

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, on considère les deux ensembles suivants

$$A_+(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{où } \varphi \text{ en escalier, telle que } \varphi \geq f \right\}$$

et

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{où } \varphi \text{ en escalier, telle que } \varphi \leq f \right\}$$

f sera dite *intégrable sur* $[a,b]$ si

$$\inf A_+(f) = \sup A_-(f)$$

On pose alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf A_+(f) = \sup A_-(f)$$

Théorème 3.2 – Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, continue par morceaux sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.

在闭区间 $[a,b]$ 上所有分段连续函数都是可积的，后续课程我们会进一步研究更一般的情况如开区间情况下的函数可积性。

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on peut, d'après le théorème d'approximation par des fonctions en escalier, trouver une fonction φ en escalier, telle que

$$\forall x \in [a,b],\ |\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}$$

En ce cas, les fonctions suivantes

$$\varphi_+ = \varphi + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \text{ et } \varphi_- = \varphi - \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}$$

sont en escalier et vérifient

$$\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$$

Comme, de plus,

$$\int_a^b \big(\varphi_+(x) - \varphi_-(x)\big)\,\mathrm{d}x = \varepsilon$$

on peut en déduire que

$$\inf A_+(f) = \sup A_-(f)$$

Voir la figure 3.10, page 150.

Remarque 3.5

Il est souvent intéressant d'aborder un exercice théorique sur les intégrales de la manière suivante

1. on montre le résultat pour les fonctions en escalier ;
2. on généralise, par approximation, aux fonctions continues par morceaux.

On peut, par exemple, montrer les propriétés 3.1, page 119, 3.2, page 119 et 3.3, page 120.

Proposition 3.1 – Riemann-Lebesgue

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, *continue par morceaux,* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_a^b f(x)\,\sin(\lambda\,x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

Démonstration

1. Supposons que la fonction est en escalier et $\lambda > 0$, il existe alors une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, et f est constante sur les intervalles $]a_{k-1}, a_k[$, $k \in [\![1, n]\!]$, notons μ_k cette constante. D'après la relation de Chasles, il suffit de calculer les termes [a]
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mu_k\,\sin(\lambda\,x)\,\mathrm{d}x$$
On remarque que, sur une période, pour une raison de symétrie évidente, on a
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\,\pi}{\lambda}} \sin(\lambda\,x)\,\mathrm{d}x = 0$$
et donc, il suffit de découper l'intervalle $]a_{k-1}, a_k[$ en périodes de longueur $2\,\pi/\lambda$. Il vient, si
$$N = \left\lfloor \frac{\lambda\,(a_k - a_{k-1})}{2\,\pi} \right\rfloor$$

alors

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\int_{a_{k-1}+2\,\pi\, j/\lambda}^{a_{k-1}+2\,\pi\,(j+1)/\lambda} \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x}_{0} + \int_{a_{k-1}+2\,\pi\, N/\lambda}^{a_k} \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x$$

Et le dernier terme vérifie

$$\left| \int_{a_{k-1}+2\,\pi\, N/\lambda}^{a_k} \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \left(a_k - a_{k-1} - \frac{2\,\pi N}{\lambda} \right) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

2. Prenons, maintenant une fonction continue par morceaux. D'après le théorème d'approximation par des fonctions en escalier, si on se donne un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une fonction en escalier φ qui vérifie

$$\forall x \in [a, b],\ \left| f(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}$$

et, pour cette fonction en escalier φ, il existe un Λ tel que

$$\forall \lambda \geq \Lambda,\ \left| \int_a^b \varphi(x)\, \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En ce cas, de l'égalité $f = (f - \varphi) + \varphi$, on tire, pour $\lambda \geq \Lambda$

$$\left| \int_a^b f(x)\, \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \underbrace{\int_a^b \left| f(x) - \varphi(x) \right| \mathrm{d}x}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\left| \int_a^b \varphi(x)\, \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x \right|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$$

---

a. Nous verrons dans le paragraphe suivant que ce terme se calcule ainsi

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin(\lambda\, x)\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\lambda\, x)}{\lambda} \right]_{x=a_{k-1}}^{x=a_k} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

注释 3.2

理解并掌握闭区间上分段连续函数、闭区间上的阶梯函数、闭区间上的连续函数都是可积的。

Remarque 3.6

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$, on pourra démontrer rapidement le théorème de Riemann-Lebesgue (proposition 3.1, page précédente) à l'aide d'une simple intégration par parties. Voir le théorème 3.4, page 138.

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, montrer que

$$\sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \, \mathrm{d}x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) \right|$$

3.3.2 Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique ($T > 0$), continue par morceaux sur $[0, T]$.

(a) Montrer que φ est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

(b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, montrer que

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(\lambda\, x) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x) \, \mathrm{d}x \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

3.3.3 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue. Étudier les limites suivantes

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f\left(x^\lambda\right) \, \mathrm{d}x$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 \lambda\, x^\lambda\, f\left(x^\lambda\right) \, \mathrm{d}x.$$

3.2 Primitives et intégrales

3.2.1 Définitions et lien avec l'intégrale

Définition 3.4 – Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est *une primitive de* f, si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Remarque 3.7

La fonction f étant une dérivée, elle doit satisfaire la propriété des valeurs intermédiaires (voir la propriété 1.11, page 48 du livre « Fonctions réelles et géométrie »). La plupart du temps, nous nous contenterons de prendre f continue sur I.

Remarque 3.8

1. Il n'y a pas unicité de la primitive de f. En effet, si F est une primitive de f sur I et si $k \in \mathbb{R}$, alors $G = F + k$ est aussi une primitive de f.
2. Réciproquement, si G est une deuxième primitive de f, alors $(F - G)' = 0$, donc $F - G$ est une fonction constante sur I.

此处q_1表示函数$f_1 - f_1(0)$的主部的次数。

Remarque importante 3.9

Il peut arriver que f soit définie sur une réunion disjointe d'intervalles A, si F est une primitive de f sur A (c'est-à-dire F dérivable sur A et $F' = f$ sur A), alors une autre primitive de f sur A différera *sur chaque intervalle composant* A d'une constante qui pourra donc être différente sur chaque intervalle composant A.

Exemple 3.3

La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Une primitive en est

$$F \ : \ x \longmapsto \ln(|x|)$$

Si G est une autre primitive de f, alors

$$\exists (k_-, k_+) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \ G(x) = \begin{cases} \ln(-x) + k_- & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) + k_+ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a des primitives célèbres à bien connaître (F désigne *une* primitive de f sur chaque intervalle où la fonction f est définie)

$f(x)$		$F(x)$
x^α $(\alpha \neq -1)$		$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$		$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x		e^x
$\cos(x)$		$\sin(x)$
$\sin(x)$		$-\cos(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$		$\tan(x)$
$\sinh(x)$		$\cosh(x)$
$\cosh(x)$		$\sinh(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert\right)$

牢记表中常用函数的原函数(不含常数项)。

Remarque 3.10

Nous présentons dans les parties 3.2.2 et A des méthodes pour calculer des primitives.

Théorème 3.3 – Théorème fondamental de l'analyse (TFA)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, *continue sur* $[a,b]$, *alors la fonction*

$$F \;:\; x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

définie sur $[a,b]$, *est* la *primitive de* f *sur* $[a,b]$, *qui s'annule en* a.

微积分基本定理的第一基本定理。

Démonstration

1. Montrons que F est dérivable et que $F' = f$. Soit $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$, tel que $x + h \in [a,b]$, alors

$$\begin{aligned}\delta_h &= |F(x+h) - F(x) - h\,f(x)| \\ &= \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - h\,f(x)\right| \\ &= \left|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles. Comme f est continue en x, alors, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un pas de continuité $\eta > 0$, associé. En ce cas, si $|h| \leq \eta$, on obtient

$$\delta_h \leq \left|\int_x^{x+h} \big|f(t) - f(x)\big|\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon\,|h|$$

On a donc démontré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall h \in \mathbb{R},\ \Big[|h| \leq \eta \text{ et } h \neq 0\Big] \implies \left[\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon\right]$$

soit, la dérivabilité de F en x et $F'(x) = f(x)$.

2. F est une primitive de f, et elle s'annule en a. Mais, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Si leur valeur en a est la même (ici 0), elles sont égales.

Notation 3.3 – Crochet

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a et b deux éléments de I, nous noterons

$$\Big[f(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \overset{\text{Not}}{=} f(b) - f(a)$$

Remarque 3.11

En conséquence, si F est *une* primitive d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}}$$

微积分基本定理的第二基本定理，在实际计算过程中经常用到。

Exemple 3.4

1. On peut calculer des intégrales facilement lorsque l'on connaît une primitive

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_{x=0}^{x=1} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

2. On peut avoir cependant des fonctions dont on sait calculer l'intégrale, mais qui n'ont pas de primitive.

$$\int_0^3 \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x = 3$$

et $\lfloor\ \rfloor$ n'est pas une dérivée, car elle ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires. Cependant, sur chaque segment $[i, i+1]$ où $i \in \mathbb{Z}$, il y aura une primitive, on pourra donc utiliser le théorème pour calculer l'intégrale.

Notation 3.4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, une fonction continue. Puisque $x \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ est *la* primitive de f qui s'annule en a, nous noterons *une* primitive quelconque F de f par [a]

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) \overset{\text{Not}}{=} \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

---

a. La variable x n'est plus muette, elle désigne la variable de F.

Remarque importante 3.12

La notation de primitive est dangereuse, car elle désigne n'importe quelle primitive *a priori*. Ainsi, en posant $f : x \mapsto e^x \cosh(x)$ alors, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x \cosh(x) + e^x \sinh(x) = e^{2\,x}$$

On en déduit donc

$$\int e^{2\,x}\, \mathrm{d}x = f(x) = e^x \cosh(x)$$

D'autre part, il est évident que

$$\int e^{2\,x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{2\,x}$$

Mais, les fonctions $x \mapsto e^x \cosh(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2} e^{2x}$ ne sont pas égales (simplement elles diffèrent d'une constante).

Remarque importante 3.13

Du théorème fondamental de l'analyse (théorème 3.3, page 135), on déduit la formule très utile suivante, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $a \in I$, pour tout $x \in I$, on a [a]

$$\boxed{f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = (x-a)\int_0^1 f'\big(a + u\,(x-a)\big)\,\mathrm{d}u}$$

a. La deuxième égalité s'obtient à l'aide du changement de variable $t = a + u\,(x-a)$. Voir le théorème 3.5, page 154.

3.2.2 Intégration par parties et changement de variable

注释 3.3

本小节介绍了分部积分法和换元法两个重要的积分计算方法，需要熟练掌握。

Théorème 3.4 – Intégration par parties

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

注意定理使用的条件是 函数 f 和函数 g 为$\mathscr{C}^1$， 在换元法中我们也有类似的条件。

Démonstration

Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (f\,g)'(x)\,\mathrm{d}x$$

Il suffit alors d'utiliser la formule de dérivation d'un produit

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

puis la linéarité de l'intégrale.

Propriété 3.8 – Primitivation par parties

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Il s'agit d'une égalité entre primitives et donc, à une constante près ! Cela se lit « *une* primitive de $f'\,g$ est $f\,g$ moins *une* primitive de $f\,g'$ ».

Exemple 3.5

1. Calculons, par exemple, $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x$. Puisque

$$\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \begin{cases} u\,:\,x \mapsto e^x \\ v\,:\,x \mapsto x \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties

$$\int_0^1 \underbrace{e^x}_{u'(x)}\,\underbrace{x}_{v(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{e^x}_{u(x)}\,\underbrace{x}_{v(x)}\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{u(x)}\,\underbrace{1}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = e - \Big[e^x\Big]_{x=0}^{x=1} = 1$$

2. Calculons, par exemple une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\,e^x$. Puisque

$$\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \begin{cases} u\,:\,x \mapsto e^x \\ v\,:\,x \mapsto x \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, par intégration par parties

$$\int \underbrace{e^x}_{u'(x)} \underbrace{x}_{v(x)} \,\mathrm{d}x = \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{x}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{1}_{v'(x)} \,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x = (x-1)\,e^x$$

3. On peut procéder à plusieurs intégrations par parties successives.

   Calculons, par exemple, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \begin{cases} u \,:\, x \mapsto e^x \\ v \,:\, x \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

   Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v(x)} \,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v(x)}\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{(-\sin(x))}_{v'(x)} \,\mathrm{d}x = -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

   On recommence

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \begin{cases} u \,:\, x \mapsto e^x \\ v \,:\, x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

   Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} \,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} \,\mathrm{d}x = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

   On obtient alors

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

   puis

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

Figure 3.1 – Aire délimitée par une courbe

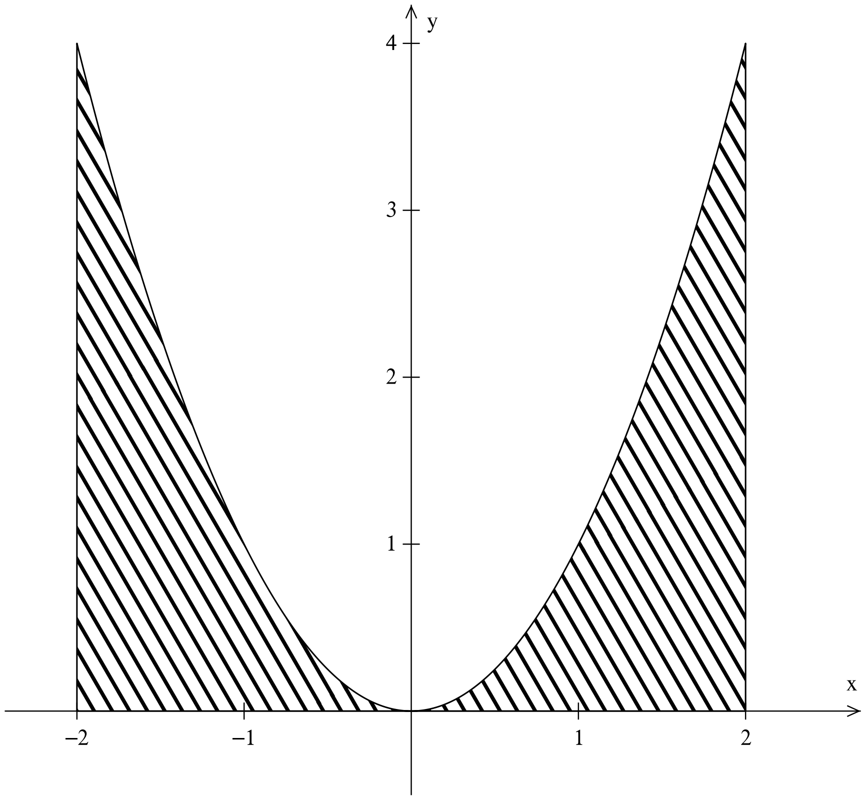


Figure 3.2 – Signe des aires

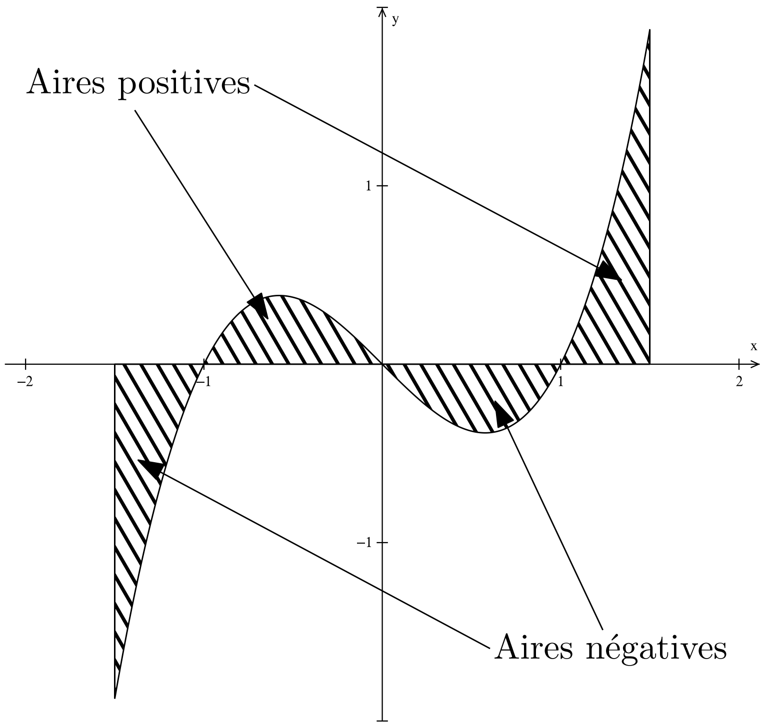


Figure 3.3 – Relation de Chasles

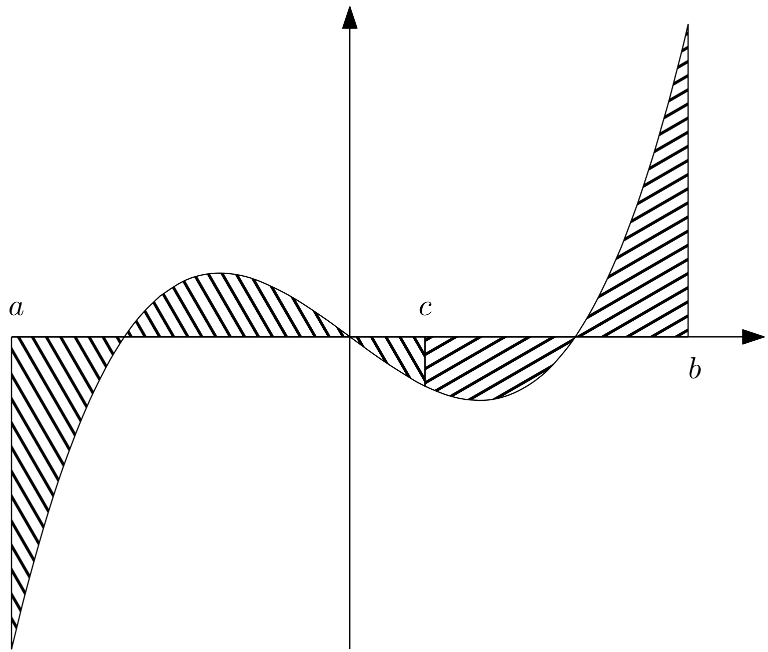


Figure 3.4 – Croissance de l'intégrale

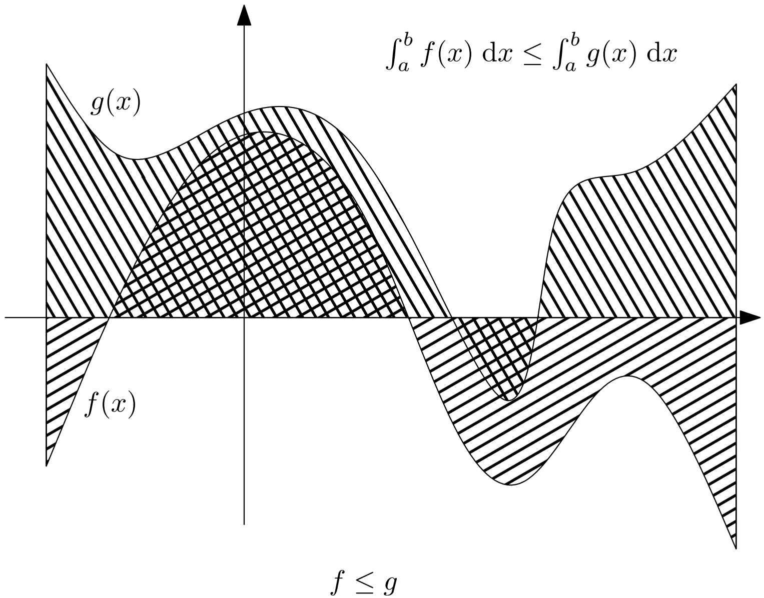


Figure 3.5 – Linéarité de l'intégrale (somme)

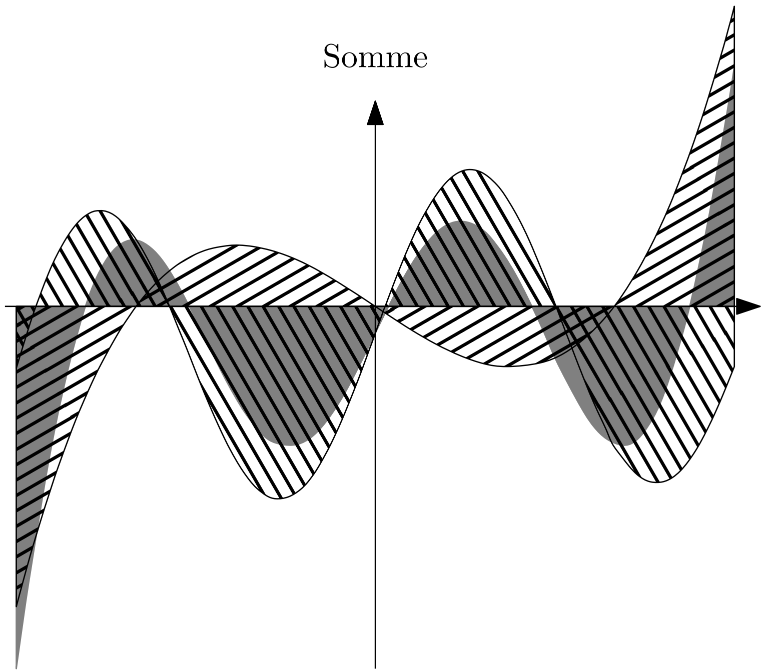


Figure 3.6 – Linéarité de l'intégrale (homothétie)

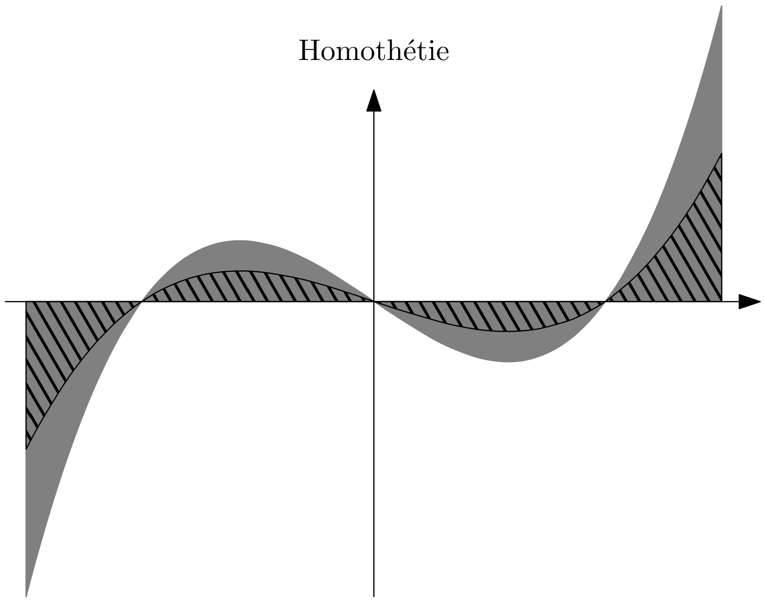


Figure 3.7 – Intégrale de f, continue, positive

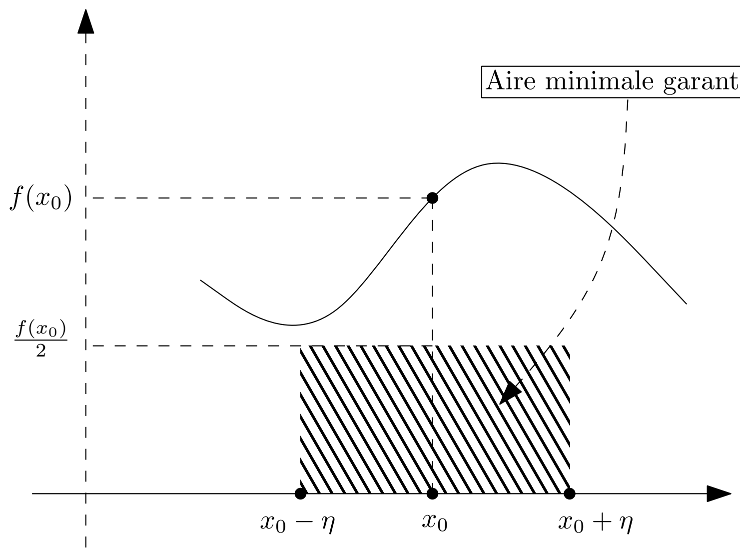


Figure 3.8 – Intégrale d'une fonction en escalier

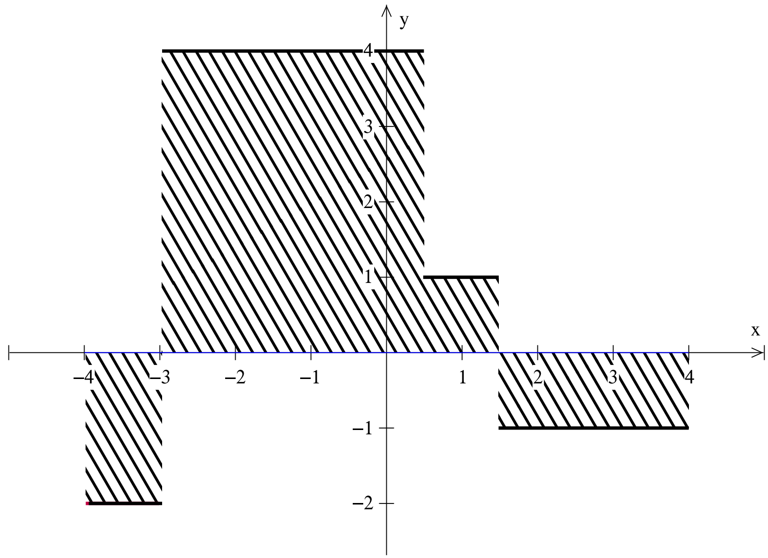


Figure 3.9 – Approximation par une fonction en escalier

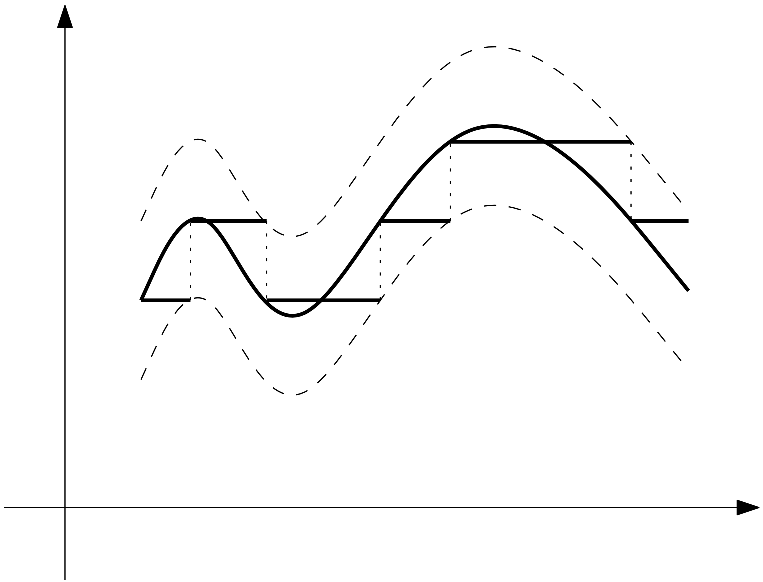
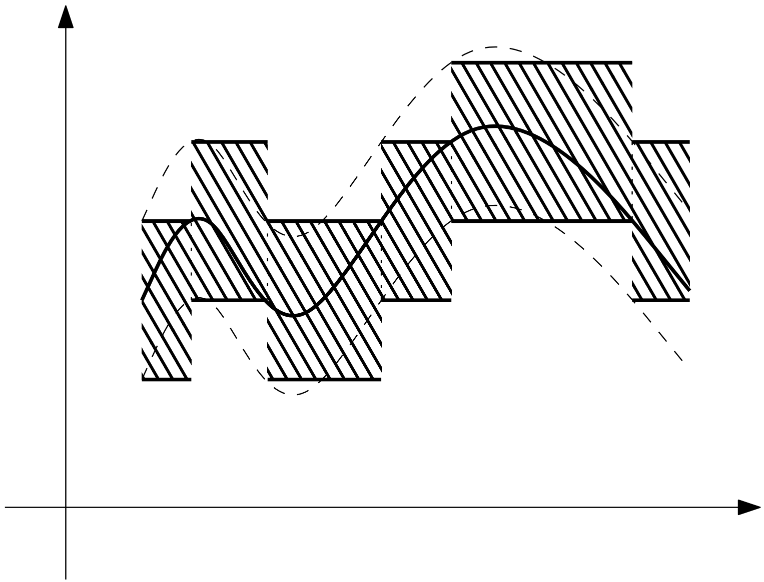


Figure 3.10 – Intégrabilité d'une fonction



Session `Wxmaxima` 3.1 – Calculs de primitives

```
(%i1) integrate(x*exp(x),x);
```

(%o1) $(x-1)\,e^{x}$

```
(%i2) integrate(exp(x)*cos(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{e^{x}\,\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)}{2}$

```
(%i3) integrate(exp(x)*cosh(x),x);
```

(%o3) $\dfrac{\frac{e^{2\,x}}{2}+x}{2}$

Session `Python` 3.1 – Calculs de primitives

Pour le calcul des intégrales, on dispose de deux outils

1. la fonction `integrate` qui essaye de calculer (sans qu'on sache comment) notre intégrale ;
2. modifier comme à la main, une intégrale qui ne se calcule pas (on parle de forme *inerte*) signalée par la fonction `Integral`.

Deux règles s'imposent

1. ne jamais avoir confiance dans les résultats d'`integrate`, sauf pour les intégrales très simples (et donc qu'on sait calculer facilement à la main) ;
2. toujours se servir de `Sympy` comme d'un outil qui effectue *les calculs qu'on sait faire*, et non pour faire des choses inconnues (et potentiellement fausses).

La méthode `.doit` permet de transformer une forme inerte (`Integral(...)`) en un calcul avec `integrate`. Les mêmes précautions d'utilisation sont donc à prendre !

In[1]

```
from sympy import *
init_printing()
```

In[2]

```
x = symbols('x', real=True)
```

Remarque 3.14

Pour des calculs simples, la fonction `integrate` est utilisable. Notons qu'on a intérêt à aider la machine en donnant le plus d'information possible sur les variables. Pour l'intégration, la variable d'intégration est *toujours* réelle.

In[3]

```
integrate(x*exp(x), x)
```

Out[3]

$$(x - 1)\, e^{x}$$

In[4]

```
integrate(exp(x)*cos(x), x)
```

Out[4]

$$\frac{e^{x} \sin(x)}{2} + \frac{e^{x} \cos(x)}{2}$$

In [5]

```
integrate(exp(x)*cosh(x), x)
```

Out [5]

$$-\frac{xe^{x}\sinh\left(x\right)}{2}+\frac{xe^{x}\cosh\left(x\right)}{2}+\frac{e^{x}\cosh\left(x\right)}{2}$$

In [6]

```
_.rewrite(exp)
```

Out [6]

$$-\frac{x\left(\frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)e^{x}}{2}+\frac{x\left(\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)e^{x}}{2}+\frac{\left(\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)e^{x}}{2}$$

In [7]

```
_.simplify()
```

Out [7]

$$\frac{x}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{4}$$

Théorème 3.5 – Changement de variable

Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a<b)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable sur I et $\varphi([a,b]) \subset I$, alors

$$\boxed{\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\;\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. Par composition, $G = F\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$G' = F'\circ\varphi\,\varphi' = f\circ\varphi\,\varphi'$$

Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\;\mathrm{d}x = \int_a^b G'(x)\;\mathrm{d}x = \Big[G(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = G(b)-G(a) = F\Big(\varphi(b)\Big) - F\Big(\varphi(a)\Big) = \Big[F(x)\Big]_{x=\varphi(a)}^{x=\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x$$

Notation 3.5 – Noms des variables

Dans une intégrale, le nom d'une variable (x, y, t, etc.) n'a pas d'importance, ce sont des variables muettes, mais dans les calculs, il vaut mieux les différencier. La formule du théorème de changement de variable (théorème 3.5, de la présente page) s'écrira, pour exprimer qu'on est en train de faire un changement de variable

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t \underset{x=\varphi(t)}{\overset{\text{Not}}{=}} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x$$

Exemple 3.6

1. Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}\;\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2\,x}+1}$ est continue sur $[0,1]$ et, en faisant le changement de variable $t = e^x = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}\,\mathrm{d}x \underset{t=e^x}{=} \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \Big[\arctan(t)\Big]_{t=1}^{t=e} = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}$$

2. Calculons une primitive de la fonction continue sur $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}$$

On obtient, en faisant le changement de variable $u = e^t = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\int \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}\,\mathrm{d}x \underset{u=e^x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan(u) \underset{u=e^x}{=} \arctan(e^x)$$

Remarque importante 3.15

Quand on fait un changement de variable, il faut différencier le cas du calcul d'une intégrale de celui d'une primitive !

— Si on calcule une intégrale (une valeur réelle ou complexe), seule cette valeur nous intéresse.

— Si on calcule une primitive (de variable x, par exemple), le résultat doit être une fonction de x ! C'est pourquoi on a écrit dans l'exemple précédent

$$\arctan(u) \underset{u=e^x}{=} \arctan(e^x)$$

Session `Wxmaxima` 3.2 – Changements de variables

```
(%i1) integrate(exp(x)/(1+exp(2*x)),x);
```

(%o1) $\operatorname{atan}(e^x)$

Session `Python` 3.2 – Changements de variables

Pour les changements de variable, il faut souvent aider `Sympy`, en présentant le changement sous la forme $x = \varphi^{-1}(t)$, plutôt que $t = \varphi(x)$.

In [8]

```
integrate(exp(x)/(1+exp(2*x)), x)
```

Out [8]

$$\mathrm{RootSum}\left(4z^2+1, \left(i \mapsto i\log\left(2i+e^x\right)\right)\right)$$

Remarque 3.16

La fonction `integrate` donne souvent des résultats incompréhensibles ! Toujours, *toujours*, préférer une méthode qu'on peut vérifier celle qu'on utiliserait à la main !

In [9]

```
Integral(exp(x)/(1+exp(2*x)), x)
```

Out [9]

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

In [10]

```
u = symbols('u')
_.transform(exp(x), u)
```

Out [10]

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

In[11]

```python
_.doit().subs({u: exp(x)})
```

Out[11]

$\operatorname{atan}\left(e^{x}\right)$

Exemple 3.7

Il y a aussi des changements de variables plus compliqués, par exemple, calculons pour $0 < a \leq b < \pi$

$$\int_a^b \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

On va poser le changement de variable $t = \tan(x/2) = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Ce changement de variable permet de se ramener à une fonction rationnelle qui est censée être plus simple, et cela fait apparaître au numérateur le $\varphi'(x)$ dont nous avons besoin. Il vient

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1+\tan^2(x/2)}{2\,\tan(x/2)}\,\mathrm{d}x &\underset{t=\tan(x/2)}{=} \int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln(|t|)\Big]_{t=\tan(a/2)}^{t=\tan(b/2)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right|\right)\end{aligned}$$

Session Wxmaxima 3.3 – Autres changements de variables

(%i1) `I : 'integrate(1/sin(x),x);`

(%o1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$

(%i2) `changevar(I,t=tan(x/2),t,x);`

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.Some solutions will be lost.
```

(%o2) $2\int \frac{1}{(t^2+1)\,\sin(2\,\mathrm{atan}(t))}dt$

```
(%i3) trigexpand(%);
```

(%o3) $\int \frac{1}{t}dt$

```
(%i4) %,nouns;
```

(%o4) $\log(t)$

On remarquera que `Wxmaxima` ne considère pas le signe du terme dans le logarithme. Ce qui serait une faute dans une copie !

Session `Python` 3.3 – Autres changements de variables

En regardant les informations données à l'annexe (chapitre A, page 307), on peut avoir des idées des changements de variable utiles.

In[12]

```
J = Integral(1/sin(x), x)
J
```

Out[12]

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$$

In[13]

```
_.transform(tan(x/2), u)
```

Out[13]

$$\int \frac{2}{\left(u^{2} + 1\right) \sin{\left(2 \operatorname{atan}{\left(u \right)} \right)}}\, du$$

In[14]

```
_.trigsimp()
```

Out[14]

$$\int \frac{1}{u}\, du$$

In[15]

```
_.doit()
```

Out[15]

$$\log{\left(u \right)}$$

Exemple 3.8

On peut aussi faire le changement de variable $t = \cos(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=\cos(x)}{=} \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ = \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \left(\frac{1}{2\,(t-1)} - \frac{1}{2\,(t+1)}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right]_{t=\cos(a)}^{t=\cos(b)} \\ = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(b)}{1+\cos(b)}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}\right)\end{aligned}$$

Session `Wxmaxima` 3.4 – Même exemple, autre calcul

```
(%i5) changevar(I,t=cos(x),t,x);
```

(%o5) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-1}dt$

```
(%i6) partfrac(1/(t^2-1),t);
```

(%o6) $\displaystyle\frac{1}{2\ (t-1)} - \frac{1}{2\ (t+1)}$

```
(%i7) integrate(%,t);
```

(%o7) $\displaystyle\frac{\log(t-1)}{2} - \frac{\log(t+1)}{2}$

```
(%i8) subst([t=cos(x)],%);
```

(%o8) $\displaystyle\frac{\log(\cos(x)-1)}{2} - \frac{\log(\cos(x)+1)}{2}$

Session `Python` 3.4 – Même exemple, autre calcul

Sympy (comme **Wxmaxima**) oublie souvent les valeurs absolues dans les logarithmes.

In[16]

```
J.transform(cos(x), u)
```

Out[16]

$$\int \left(-\frac{1}{1-u^2}\right) du$$

In[17]

```
_.doit().subs({u: cos(x)})
```

Out[17]

$$\frac{\log\left(\cos\left(x\right)-1\right)}{2} - \frac{\log\left(\cos\left(x\right)+1\right)}{2}$$

Remarque 3.17

Quand on fait un changement de variable du type $t = \tan(x)$, il faut faire attention aux discontinuités introduites.

Session `Wxmaxima` 3.5 – Calcul d'une intégrale, connaissant une primitive

```
(%i1) f(x) := 1/(1+sin(x)^2)$
(%i2) define(F(x),integrate(f(x),x));
```

(%o2) $\mathrm{F}\,(x) := \dfrac{\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)}{\sqrt{2}}$

```
(%i3) F(2*%pi)-F(0);
```

(%o3) 0

```
(%i4) integrate(f(x),x,0,2*%pi);
```

(%o4) $\sqrt{2}\,\pi$

`Wxmaxima` ne peut pas se souvenir qu'on a fait un changement de variable pour calculer la primitive... Du coup, la formule devient fausse ! Si l'on utilise l'exemple A.1, page 335, alors cela devient bon

```
(%i5) G(x) := F(x)+C+%pi/sqrt(2)*floor(x/%pi+1/2)$
(%i6) G(2*%pi)-G(0);
```

(%o6) $\sqrt{2}\,\pi$

Session `Python` 3.5 – Calcul d'une intégrale, connaissant une primitive

Certains changement de variables comme $u = \tan(x)$ font apparaître de fausses discontinuités dans les calculs. Il faut recoller !

In[18]

```python
def f(x):
    return(1/(1+sin(x)**2))
```

In[19]

```
integrate(f(x), x)
```

Out[19]

$$\frac{24\sqrt{3-2\sqrt{2}}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)+\pi\left\lfloor\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}{\pi}\right\rfloor\right)}{14+10\sqrt{2}}+\frac{17\sqrt{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)+\pi\left\lfloor\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}{\pi}\right\rfloor\right)}{14+10\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{2\sqrt{2}+3}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}\right)+\pi\left\lfloor\frac{x}{2}\right.\right.}{14+10\sqrt{2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}+3}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}\right)+\pi\left\lfloor\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}{\pi}\right\rfloor\right)}{14+10\sqrt{2}}$$

Remarque 3.18

Encore une utilisation de la fonction `integrate` qui nous donne un résultat peu utilisable !

In[20]

```
_.subs({x: 2*pi})-_.subs({x: 0})
```

Out[20]

$$\frac{4\pi\sqrt{2\sqrt{2}+3}}{14+10\sqrt{2}}+\frac{24\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{14+10\sqrt{2}}+\frac{17\sqrt{2}\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{14+10\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}\pi\sqrt{2\sqrt{2}+3}}{14+10\sqrt{2}}$$

In[21]

```
_.evalf()
```

Out[21]

4.44288293815837

In[22]

```
(sqrt(2)*pi).evalf()     # La bonne valeur !
```

Out[22]

4.44288293815837

Remarque 3.19

Le calcul semble bon, mais la formule obtenue à la ligne 20 n'est guère attirante.

In[23]

```
Integral(f(x), x)
```

Out[23]

$$\int \frac{1}{\sin^2(x) + 1}\, dx$$

In[24]

```
_.transform(tan(x), u)
```

Out[24]

$$\int \frac{1}{\left(u^{2}+1\right)\left(\frac{u^{2}}{u^{2}+1}+1\right)}\, du$$

In[25]

```
_.doit()
```

Out[25]

$$\frac{\sqrt{2}\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}u\right)}{2}$$

In[26]

```
_.subs({u: tan(x)})
```

Out[26]

$$\frac{\sqrt{2}\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}\tan\left(x\right)\right)}{2}$$

In[27] – Sans recollement, même problème qu'avec `Wxmaxima`

```
_.subs({x: 2*pi})-_.subs({x: 0})
```

Out[27]

$$0$$

In[28] – Avec le recollement (fait à la main), tout va bien !

```
C = symbols('C')
G = Lambda(x, __+C+pi/sqrt(2)*floor(x/pi+S(1)/2))
```

In[29]

```
G(x)
```

Out[29]

$$C + \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}\tan\left(x\right)\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\rfloor}{2}$$

In[30]

```
G(2*pi)-G(0)
```

Out[30]

$$\sqrt{2}\pi$$

Remarque importante 3.20

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, il arrive souvent que l'on ait plutôt envie de faire un changement de variable de la forme $x = \varphi(t)$. Qu'est-ce que cela change ? Il faut alors déterminer α et β tels que

$$\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta],\ \varphi(\alpha) = a \text{ et } \varphi(\beta) = b$$ [a]

a. Si φ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ (inversible et φ^{-1} de classe $\mathscr{C}^1$) alors on peut prendre $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

Exemple 3.9

Soit à calculer une primitive de la fonction (où $a > 0$)

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$$

On obtient, par le changement de variable $t = a\,u$ qui est équivalent au changement de variable $u = \dfrac{t}{a}$

$$\int^x \frac{1}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=a\,u}{=} \int^{x/a} \frac{1}{a}\,\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{a}\,\arctan(u)\right]^{x/a} = \frac{1}{a}\,\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Session `Wxmaxima` 3.6 – Changement de variable posé à l'envers

```
(%i1) assume(a>0)$
      I : 'integrate(1/(x^2+a^2),x)$
(%i3) changevar(I,x=a*t,t,x);
```

(%o3) $\displaystyle\int \frac{1}{a\,t^2 + a}dt$

```
(%i4) %,nouns;
```

(%o4) $\dfrac{\operatorname{atan}(t)}{a}$

Session `Python` 3.6 – Changement de variable posé à l'envers

Pour les changements de variable de la forme $t = \psi(x)$ (x ancienne variable, t nouvelle variable), `Sympy` ne sera pas toujours content. Cependant, quand l'inversion est simple, pas de problème particulier.

In[31] – Ne pas oublier $a > 0$

```python
a = symbols('a', positive=True)
Integral(1/(x**2+a**2), x)
```

Out[31]

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx$$

In[32] – Syntaxe particulière à cause de la constante a

```python
_.transform(x, (a*u, u))
```

Out[32]

$$\int \frac{a}{a^2u^2 + a^2}\, du$$

In[33]

```python
_.simplify()
```

Out[33]

$$\frac{\operatorname{atan}(u)}{a}$$

Exemple 3.10

Prenons un exemple un peu plus compliqué. Soit la fonction à primitiver

$$x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$$

Le changement de variable $y = \sqrt{x^2+1}$ ne mène à rien, il faut paramétrer l'hyperbole d'équation $y^2 = x^2+1$ en utilisant la trigonométrie hyperbolique [a]

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sinh(u)}{=} \int \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u &= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{e^{2u}}{4}+\frac{e^{-2u}}{4}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{u}{2}+\frac{e^{2u}}{8}-\frac{e^{-2u}}{8} \underset{x=\sinh(u)}{=} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\end{aligned}$$

---

a. On a donc $u = g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, l'expression de $g(x)$ peut ne servir à rien, seule celle de $g'(x)$ est toujours utile !

Session `Wxmaxima` 3.7 – Paramétrage

```
(%i1) I : 'integrate(sqrt(x^2+1),x);
```

(%o1) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

```
(%i2) I,nouns;
```

(%o2) $\dfrac{\operatorname{asinh}(x)}{2}+\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2}$

C'est le résultat trouvé ! Mais nous n'utilisons pas cette fonction. Nous avons vu qu'elle valait $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

```
(%i3) changevar(I,x=sinh(t),t,x);
```

(%o3) $\int \cosh(t)\,\sqrt{\sinh(t)^2+1}dt$

```
(%i4) trigsimp(%);
```

(%o4) $\int \cosh(t)^2 dt$

Session Python 3.7 – Paramétrage

Le paramétrage de la courbe $u = h(x)$ où h est ce qui nous empêche de faire simplement le calcul est parfois une bonne méthode de calcul des intégrales.

In [34]

```
J = Integral(sqrt(x**2+1), x)
J
```

Out [34]

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx$$

In [35]

```
J.doit()
```

Out [35]

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\operatorname{asinh}(x)}{2}$$

In[36]

```
J.transform(x, sinh(u))
```

Out[36]

$$\int \sqrt{\sinh^{2}(u) + 1}\cosh(u)\, du$$

In[37]

```
_.trigsimp()
```

Out[37]

$$\int \sqrt{\cosh^{2}(u)}\cosh(u)\, du$$

Propriété 3.9 – utilisation de symétries et de périodicité

1. Soit f une fonction *impaire* et continue par morceaux sur $[-a, +a]$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ alors

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

2. Soit f une fonction *paire* et continue par morceaux sur $[-a, +a]$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ alors

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+a} f(x)\, \mathrm{d}x$$

3. Soit f une fonction *T-périodique* [a] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(T > 0)$ et continue par morceaux sur $[0, T]$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_{a}^{a+T} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\, \mathrm{d}x$$

a. On rappelle qu'une fonction T-périodique vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

奇函数，偶函数以及周期函数我们可以简化计算。

Exemple 3.11

La fonction $x \mapsto \sin^2(2\,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2(2\,x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{1} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{1/2} \frac{t}{(1+t^2)\,\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{1} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_1^{4} \exp\left(-\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{1} \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{1} \arctan\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} e^{-t}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

3.4.2 Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$\begin{array}{rcl}
x & \longmapsto & \cosh(x)\,\cos(2\,x) \\
x & \longmapsto & (x^2+2\,x+2)\,\cos(2\,x) \\
x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3}\,\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \\
x & \longmapsto & \sqrt{\tan(x)} \qquad (\text{poser } t=\sqrt{\tan(x)}) \\
x & \longmapsto & \exp\left(-\sqrt{x}\right) \\
x & \longmapsto & \arctan\left(\sqrt{x^2+1}\right) \\
x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\,\ln(x)} \\
x & \longmapsto & \cos(\ln(x)) \\
x & \longmapsto & x\,\cos^2(x)
\end{array}$$

3.4.3 *Intégrales de Wallis.* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

(b) En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.

(c) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

(d) En déduire que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$$

(e) Calculer $(n+1)\,I_n\,I_{n+1}$.

(f) Donner alors un équivalent simple de I_n.

3.4.4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a<b)$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(a)=0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Trouver les cas d'égalité ?

3.4.5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $0 < f'(t) \leq 1$. Prouver que

$$\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(t)\ \mathrm{d}t$$

3.4.6 Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout x de $]0,1[$. Montrer que

$$\int_0^1 |f''(t)|\ \mathrm{d}t \geq 4 \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

3.4.7 (a) Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a,b],\ \exists c \in]a,b[,\ f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b) f''(c)$$

(b) Soit f de classe $\mathscr{C}^3$ de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer que

$$\int_{-1}^{+1} |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [-1,+1]} \left|f^{(3)}(x)\right|$$

3.2.3 Fonctions définies par une intégrale (dépendance dans les bornes)

Remarque 3.21

Il arrive que l'on doive étudier une primitive

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

ou, plus généralement, une fonction de la forme

$$G(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = F \circ \varphi(x)$$

sans pouvoir calculer l'intégrale.

Proposition 3.2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ continue par morceaux alors

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } [a,b]$$

De plus

1. *si f est continue au point x_0 alors F est dérivable en x_0 ;*

2. *si f est continue sur $[a,b]$ alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.*

此性质需要熟练掌握，这里函数F是一个以积分上限x为自变量的函数，通常叫做变上限的定积分；类似也有变下限的定积分。

Démonstration

Soit $x_0 \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$, on a alors

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|$$

par la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale. Mais, f étant continue par morceaux sur $[a,b]$, elle est bornée. Posons

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

on a alors

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+h} M\,\mathrm{d}t\right| = M\,|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Ce qui montre la continuité de F.

1. Supposons maintenant que f est continue en x_0. Prenons un $\varepsilon > 0$, il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$\forall h \in [-\eta,\eta],\ \Big[x_0 + h \in [a,b]\Big] \implies \Big[|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \varepsilon\Big]$$

Soit donc $h \in [-\eta,\eta] \setminus \{0\}$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$, on a alors

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{h}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la dérivabilité de F en x_0. Et on a de plus $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. Supposons f continue sur $[a, b]$. On peut utiliser la question précédente, mais comme F est une primitive de f. Le résultat est donc évident.

Remarque 3.22

1. Plus généralement, si f admet une limite à droite (respectivement à gauche) en x_0 alors F est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0.
2. La fonction F est toujours plus régulière que f, on parle d'effet régularisant.

Exemple 3.12

Étudions la fonction

$$F : x \longmapsto \int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{dt}$$ [a]

► Comme $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^{x^2} > 0$$

► Ainsi, F est strictement croissante et impaire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} \, \mathrm{dt} \underset{u=-t}{=} \int_0^x e^{u^2} \, (-1) \, \mathrm{du} = -F(x)$$

► On peut faire une étude locale en un point, par exemple (puisque F est dérivable)

$$F(x) = F(0) + x\,F'(0) + o(x) \underset{0}{\sim} x$$

► On peut faire une étude en l'une des bornes
Par l'inégalité $e^{t^2} \geq t^2$ sur $[0, +\infty[$ et la croissance de l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{dt} \geq \int_0^x t^2 \, \mathrm{dt} = \frac{x^3}{3} \text{ et } F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

a. Nous ne connaissons pas de formule explicite donnant une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, mais comme le montre cet exemple, nous pouvons en dire beaucoup de propriétés.

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Calculer la dérivée de la fonction

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

3.5.2 Étudier la fonction définie par

$$x \longmapsto \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

3.5.3 Soit f la fonction sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ définie par

$$f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) *Étude globale*

i. Justifier soigneusement l'existence de $f(x)$ pour les x considérés.

ii. Montrer que f est dérivable et calculer la dérivée de f.

(b) *Étude locale en* 1.

i. Calculer

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\,\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

ii. En déduire qu'en posant $f(1) = \ln 2$, on prolonge f par continuité au point 1.

iii. Montrer que ce prolongement est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.

(c) *Études locales aux bornes (on pourra proposer des encadrements)*

i. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ii. Étudier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Qu'en concluez-vous ?

iii. Étudier

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

(d) Donner l'allure du graphe de f

3.5.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On définit

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

(b) Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

3.5.5 Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$, continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$. Montrer que

(a) On a

$$\forall x \in [0, a],\ \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t = x\, f(x)$$

(b) Puis, si $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq f(a)$

$$u\, v \leq \int_0^u f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^v f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t$$

3.2.4 Formule de Taylor avec reste intégral

注释 3.4

本小节给出的两个定理在今后的学习过程中会经常用到。

Théorème 3.6 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$, *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, *de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$, *alors*

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

Démonstration

La démonstration (très simple) se fait par récurrence sur n, avec une intégration par parties. Notons $\mathcal{H}_n$ l'énoncé du théorème.

— $(\mathcal{H}_0)$ C'est alors la formule bien connue (voir la remarque 3.13, page 138)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

— $(\mathcal{H}_n \ \Rightarrow\ \mathcal{H}_{n+1})$ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur $[a,b]$, elle est donc $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence au rang n. Il vient

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, nous pouvons faire une intégration par parties avec

$$u' = \frac{(x-t)^n}{n!} \text{ et } v = f^{(n+1)}(t)$$

où l'on peut choisir

$$u = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et } v' = f^{(n+2)}(t)$$

Il vient

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Ce qui est le résultat cherché.

Remarque importante 3.23

Quelle différence avec la formule de Taylor-Young ?

- La formule de Taylor-Young est un résultat asymptotique. Elle ne donne des informations que lorsque l'on passe à la limite (on dit que c'est un résultat *local*).
- La formule de Taylor avec reste intégral est une information exacte sur *tout* l'intervalle (on dit que c'est un résultat *global*).

Il faut donc toujours se poser la question de savoir si l'on a besoin d'une information locale ou globale !

Théorème 3.7 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ ($a<b$, $n\in\mathbb{N}$), alors

$$\boxed{\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|\leq\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}$$

Démonstration

Il suffit de majorer le reste intégral exprimé en $x=b$ (nous supposons ici $a<b$). Posons

$$M=\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

qui existe, car la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$.

$$\left|\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq M\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t=\left[-M\,\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{t=b}=M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En conclusion

— pour une information en un point, Taylor-Young ;
— pour une information imprécise sur tout l'intervalle, Taylor-Lagrange ;
— pour une information précise sur tout l'intervalle, Taylor avec reste intégral.

Exemple 3.13

Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

On reconnaît dans les majorants et minorants les débuts du développement de Taylor de la fonction cos en 0. Comme ce sont des inégalités globales, nous allons utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

— *À l'ordre* 1 ($n = 1$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2} \underbrace{\sup_{t\in[0,x]} |\cos(t)|}_{\leq 1}$$

Ce qui nous donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

l'inégalité de gauche est le résultat cherché.

— *À l'ordre* 3 ($n = 3$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^4}{24} \underbrace{\sup_{t\in[0,x]} |\cos(t)|}_{\leq 1}$$

Ce qui nous donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{x^4}{24} \leq \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24}$$

l'inégalité de droite est le résultat cherché.

Exemple 3.14

Montrons que, au voisinage de 0,

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ici, nous pouvons immédiatement écrire (Taylor-Young)

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{24} > 0, \text{ si } x \neq 0$$

L'équivalent a le même signe que la fonction de départ...

Proposition 3.3 – Inégalité de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors f' est bornée et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|}$$

Démonstration

On écrit la formule de Taylor avec reste intégral, avec $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$f(x+a) = f(x) + a\, f'(x) + \int_x^{x+a} (x+a-t)\, f''(t)\, \mathrm{d}t$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a} - \int_x^{x+a} \frac{(x+a-t)}{a}\, f''(t)\, \mathrm{d}t$$

En majorant, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{2}{a} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| + \underbrace{\int_x^{x+a} \frac{x+a-t}{a}\, \mathrm{d}t}_{=\frac{a}{2}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f''(t)\right|$$

Ce qui montre que f' est bornée. Par ailleurs, cette expression est valide pour tout $a > 0$, on peut donc choisir la valeur de a qui la rend minimale [a]

$$a = 2\sqrt{\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|}}$$

L'inégalité annoncée s'en déduit.

---

a. Cette valeur doit être bien définie. Mais, si elle ne l'est pas, alors $f'' = 0$, et comme f est bornée, f est constante, donc $f' = 0$, l'inégalité est encore vérifiée.

Exercice(s) 3.6

3.6.1 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}\, e^{|x|}$$

3.6.2 Montrer que

$$\forall x \geq 0,\ 0 \leq \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \leq \frac{x^3}{16}$$

3.6.3 Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f de classe $\mathscr{C}^3$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$M = \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(3)}(x) \right|$$

Montrer que

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a)\, f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24}\, M$$

3.6.4 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3.6.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\left| (1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k \right) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3.6.6 Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{8\sqrt{5}} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

3.6.7 Soit

$$E = \left\{ f \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ de } [0,1] \text{ dans } \mathbb{R},\ f'' \leq 1 \right\}$$

Pour $f \in E$, on pose

$$A(f) = f(0) - 2\,f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$$

Montrer que

$$M = \sup_{f \in E} A(f)$$

existe, le calculer et résoudre l'équation $A(f) = M$.

3.6.8 Soit f définie, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in]0,1[$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{a\,x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer $f^{(n)}$ en fonction de f.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$$

(c) En déduire que f est nulle.

3.6.9 (a) Montrer qu'il existe une suite d'entiers strictement positifs a_1, a_3, a_5... tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1} + o\left(x^{2\,n+1}\right)$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\tan^{(n)} \text{ est strictement croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(c) Soit $x \in [0, \pi/2[$, en introduisant $y \in]x, \pi/2[$, montrer que

$$\left|\tan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(d) Montrer que c'est encore vrai lorsque $x \in]-\pi/2, 0]$.

Il est souvent indispensable de calculer des primitives. Heureusement, les logiciels de calcul formel sont là pour nous aider ! Vous trouverez dans l'appendice, au chapitre A, page 307 quelques méthodes de calcul.

3.2.5 Intégrales généralisées

注释 3.5

本小节介绍了反常积分也叫广义积分，它是定积分的延续。其中无界函数的反常积分也叫做瑕积分。

Propriété 3.10 – Intégrales impropres

Lorsque f est définie sur $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$), continue par morceaux sur tout segment de $[a, +\infty[$, et que la fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \text{ a une limite } \lambda \text{ en } +\infty$$

on écrit

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \overset{\text{Not}}{=} \lambda$$

Remarque 3.24

On peut procéder de même pour définir des intégrales sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ($]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$). Si l'intervalle est ouvert, il est indispensable d'étudier les deux limites. Par exemple

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \text{ existe}\right] \iff \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t \text{ existe} \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)\, \mathrm{d}t \text{ existe} \end{cases}$$

Remarque 3.25

On peut clairement faire des changements de variable dans une intégrale impropre, cependant, il *faut* avoir montré l'existence d'une limite *avant* de faire le changement de variable.

对广义积分进行换元运算时，需要首先验证极限的存在性，即收敛性。

Exemple 3.15

Soit à calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

on sait qu'une telle intégrale existe (la fonction est continue), et on avait fait le changement de variable $t = \tan(x)$, alors

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=\tan(x)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\,t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Remarque 3.26

La fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$, mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x \text{ n'a pas de sens}$$

On ne peut pas ici appliquer la remarque de symétrie...

Exemple 3.16

On a

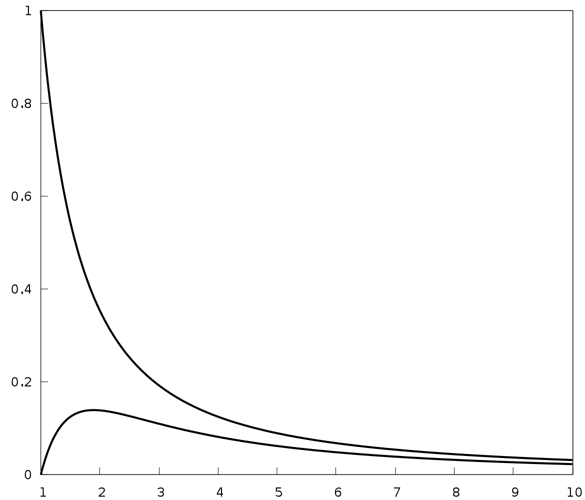
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration

1. *Existence* La fonction
$$x \longmapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$
est définie, continue sur $]0,+\infty[$. On a donc à montrer que
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ existent}$$
La fonction
$$x \longmapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
est croissante sur $[1,+\infty[$, d'après la positivité de la fonction. De plus [a]
$$\forall x \geq 1,\ \int_1^x \frac{\ln(x)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \leq 2$$
(Voir la figure 3.11, page ci-contre). Et toute fonction croissante majorée admet une limite.
La fonction
$$x \longmapsto \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
est croissante sur $]0,1]$ (mais $x \to 0^+$, il faut donc faire des minorations, car elle décroît lorsque x décroît). On a [b]
$$\forall x \in\ ]0,1],\ \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geq -\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x} - 2 \geq -2$$
(Voir la figure 3.12, page 190). Et toute fonction décroissante minorée admet une limite.
Calcul. On a donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
or le premier terme, avec le changement de variable $x = 1/t$, devient
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x=1/t}{=} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
d'où le résultat.

a. On a utilisé $1/(1+t^2) \leq 1/t^2$ et $\ln(t) \leq \sqrt{t}$.
b. On a utilisé $1/(1+t^2) \leq 1$ et $-\ln(t) \leq 1/\sqrt{t}$.

Figure 3.11 – Majoration du logarithme



Remarque 3.27

En revanche, il faut être très prudent lors des intégrations par parties et montrer soigneusement l'existence des objets.

Exemple 3.17

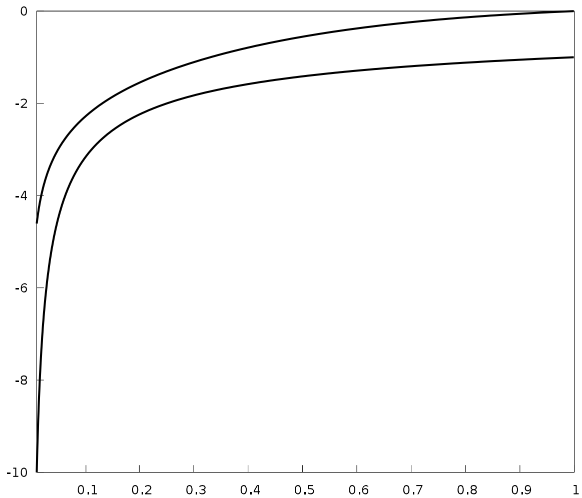
Soit à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

1. *Existence.* On pourra utiliser [a]

$$\frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,x\sqrt{x}}$$

Figure 3.12 – Minoration du logarithme



Du premier équivalent, on peut déduire l'existence d'un $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in \,]0, \eta], \ \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

La fonction définie sur $]0, \eta]$

$$G \ : \ x \longmapsto \int_x^\eta \frac{\arctan(t)}{t\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

est décroissante (mais, quand x décroît, elle va croître, il faut donc la majorer) et pour $x \in \,]0, \eta]$, on a

$$\int_x^\eta \frac{\arctan(t)}{t\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \leq \int_x^\eta \frac{2}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t = 4\sqrt{\eta} - 4\sqrt{x} \leq 4\sqrt{\eta}$$

G admet donc une limite lorsque x tend vers 0^+. On procède de même, sur un intervalle $[A, +\infty[$ $(A > \eta)$ pour montrer que la fonction

$$x \longmapsto \int_A^x \frac{\arctan(t)}{t\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. La relation de Chasles et l'intégrabilité sur $[\eta, A]$ permet de conclure.

2. *Calcul.* Faisons une intégration par parties *sur* $[\varepsilon, X]$ $(0 < \varepsilon < X)$, car la fonction n'est pas définie en 0 (d'où le ε) et on a $+\infty$ comme borne (d'où X).

$$\int_\varepsilon^X \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{2\arctan(x)}{\sqrt{x}}\right]_{x=\varepsilon}^{x=X} + \int_\varepsilon^X \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\, \mathrm{d}x$$

Il reste alors, à montrer que le crochet et la nouvelle intégrale ont des limites lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $X \to +\infty$. Comme l'existence a été montrée, il suffit de montrer l'existence des limites du crochet. Or

$$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x \text{ donc } -\frac{2\arctan(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

et

$$-\frac{2\arctan(x)}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Il reste à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\, \mathrm{d}x$$

Ce qui se fait, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

---

a. On généralisera ce type de raisonnement avec des équivalents à la proposition 3.4, page 196.

Session `Wxmaxima` 3.8 – Calcul d'une intégrale impropre

```
(%i1) I : 'integrate(2/sqrt(x)/(1+x^2),x,0,inf);
```

(%o1) $2\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx$

```
(%i2) assume(t>0)$
      changevar(I,t=sqrt(x),t,x);
```

(%o3) $4\int_0^{\infty}\frac{1}{t^4+1}dt$

```
(%i4) factor(t^4+1,a^2-2);
```

(%o4) $\left(t^2-a\,t+1\right)\,\left(t^2+a\,t+1\right)$

```
(%i5) partfrac(4/%,t);
```

(%o5) $\frac{2\,t+2\,a}{a\,\left(t^2+a\,t+1\right)}-\frac{2\,t-2\,a}{a\,\left(t^2-a\,t+1\right)}$

```
(%i6) subst([a=sqrt(2)],%);
```

(%o6) $\frac{2\,t+2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\,\left(t^2+\sqrt{2}\,t+1\right)}-\frac{2\,t-2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\,\left(t^2-\sqrt{2}\,t+1\right)}$

```
(%i7) integrate(%,t,0,inf);
```

(%o7) $\sqrt{2}\,\pi$

```
(%i8) display(integrate(atan(x)/x/sqrt(x),x,0,inf));
```

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{atan}\left(x\right)}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\sqrt{2}\,\pi$$

(%o8) *done*

Session `Python` 3.8 – Calcul d'une intégrale impropre

Pour une intégrale impropre, on peut souvent procéder ainsi

1. calculer une primitive ;
2. passer aux limites...

In[38]

```
J = Integral(2/sqrt(x)/(1+x**2), (x, 0, oo))
J
```

Out[38]

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x} \left(x^{2} + 1\right)}\, dx$$

In[39]

```
_.doit()
```

Out[39]

$$\sqrt{2} \pi$$

In[40]

```
J.transform(sqrt(x), u)
```

Out[40]

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{4 u}{\left(u^{4} + 1\right) \sqrt{u^{2}}}\, du$$

In[41] – Noter le fait que $u > 0$

```
u = symbols('u', positive=True)
J.transform(sqrt(x), u)
```

Out[41]

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{4}{u^4 + 1}\, du$$

In[42]

```
factor(4/(u**4+1), extension=sqrt(2))
```

Out[42]

$$\frac{4}{\left(u^2 - \sqrt{2}u + 1\right)\left(u^2 + \sqrt{2}u + 1\right)}$$

In[43]

```
_.apart(extension=sqrt(2))
```

Out[43]

$$-\frac{\sqrt{2}u - 2}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} + \frac{\sqrt{2}u + 2}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}$$

In [44]

```
__.apart()
```

Out [44]

$$\frac{4}{u^4 + 1}$$

In [45]

```
integrate(__, u)
```

Out [45]

$$-\frac{\sqrt{2}\log\left(u^2 - \sqrt{2}u + 1\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}\log\left(u^2 + \sqrt{2}u + 1\right)}{2} + \sqrt{2}\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}u - 1\right) + \sqrt{2}\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}u + 1\right)$$

In [46]

```
_.limit(u, oo)-_.limit(u, 0)
```

Out [46]

$$\sqrt{2}\pi$$

Remarque 3.28

On a vu à la proposition 2.2, page 84, que, sous certaines conditions, on pouvait primitiver des développements asymptotiques. La proposition suivante va nous préciser la situation.

Proposition 3.4 – Primitivation des comparaisons asymptotiques

Soit f et g deux fonctions continues, strictement positives, *définies sur $[a,b[$, où $b \in]a,+\infty]$, telles que*

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$$

En ce cas

1. *Si*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existe,}$$

alors

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ existe, et } \underbrace{\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x\to b]{}0} \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. *Si*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ n'existe pas,}$$

alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ n'existe pas et } \underbrace{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x\to b]{}+\infty} \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque importante 3.29

La fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est croissante sur $[a,b[$ (car f est positive), donc

— soit elle est majorée, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe (c'est la limite)}$$

— soit, elle tend vers $+\infty$ et l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'a pas de sens !

Démonstration du fait que les intégrales sur $[a, b[$ sont de même nature

Prenons un $\varepsilon > 0$, alors, il existe un nombre réel $c \in [a, b[$ tel que

$$\forall x \in [c, b[,\ (1-\varepsilon) f(x) \leq g(x) \leq (1+\varepsilon) f(x) \tag{3.1}$$

1. *Cas où l'intégrale de f sur $[a, b[$ a un sens* La fonction définie sur $[c, b[$ par

$$G : x \longmapsto \int_c^x g(t)\ \mathrm{d}t$$

est alors croissante (g est positive), majorée par $(1+\varepsilon) \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$, elle admet une limité lorsque x tend vers b.

2. *Cas où l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'a pas de sens* La fonction G vérifie pour $x \in [c, b[$

$$G(x) \geq (1-\varepsilon) \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$$

Démonstration dans le cas où l'intégrale existe

1. Remarquons d'abord qu'en ce cas

$$\boxed{\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b]{} 0}$$

En effet, pour $x \in [a, b[$ on a

$$\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \underbrace{\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x \to b]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}$$

2. Ensuite, en prenant un $\varepsilon > 0$, on trouve un $c \in [a, b[$ vérifiant la relation (3.1). En ce cas, pour $x \in [c, b[$ on a

$$(1-\varepsilon) \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_x^b g(t)\ \mathrm{d}t \leq (1+\varepsilon) \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

l'équivalent est alors immédiat.

Démonstration dans le cas où l'intégrale n'existe pas

1. Remarquons d'abord qu'en ce cas
$$\boxed{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty}$$
2. Ensuite, en prenant un $\varepsilon > 0$, on trouve un $c \in [a, b[$ vérifiant la relation (3.1). En ce cas, pour $x \in [c, b[$ on a
$$(1-\varepsilon)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq (1+\varepsilon)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
on a alors
$$\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + (1-\varepsilon)\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + (1+\varepsilon)\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
La propriété encadrée ci-dessus permet alors de conclure.

Remarque 3.30

De même, bien sûr, avec les intervalles de la forme $]a, b]$ ou $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [-\infty, b[$.

注释 3.6

通过下面例题的解题过程掌握求积分估计的常用方法以及 Proposition 3.4 的应用。

Remarque importante 3.31

En utilisant l'équivalence
$$\Big[f(x) \underset{b}{\sim} g(x)\Big] \iff \Big[f(x) - g(x) = o_b\big(f(x)\big)\Big]$$
on obtient que si f et g sont deux fonctions *continues, strictement positives* définies sur $[a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in\,]a, +\infty]$, vérifient
$$g(x) = o_b\big(f(x)\big) \quad \left(\text{ou} \quad g(x) \underset{b}{\ll} f(x)\right)$$

1. si l'intégrale de f existe sur $[a, b[$, alors l'intégrale de g existe aussi sur $[a, b[$ et

$$\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t = o_b\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \left(\text{ou} \quad \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\ll} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. si l'intégrale de f n'existe pas sur $[a, b[$, alors *on ne sait rien sur celle de* g, mais on a

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = o_b\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \left(\text{ou} \quad \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\ll} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exemple 3.18

Cherchons, par exemple, le comportement asymptotique de

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Deux méthodes.

1. *Intégration par parties* [a]

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2\,t\,e^{t^2}}{2\,t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_{t=1}^{t=x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$$

De l'inégalité $e^{t^2} \geq t$, sur $[1, +\infty[$, on déduit que

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

De plus,

$$\frac{e^{t^2}}{2t^2} \underset{+\infty}{\ll} e^{t^2}$$

donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\ll} \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le crochet donne donc l'équivalent, et

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2\,x}$$

2. *Correction de la dérivée* On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x^2}\right) = 2\,x\,e^{x^2}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{x^2}}{2\,x}\right) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2\,x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2} > 0$$

Donc

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e^{t^2}}{2\,t}\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{t^2}}{2\,t}\right]_{t=1}^{t=x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2\,x}$$

---

a. On notera le sens subtil de l'intégration par parties.

Remarque 3.32

La *correction de la dérivée* fonctionne de la manière suivante

1. la fonction est à monotonie *très* rapide

$$f'(x) \underset{b}{\sim} \varphi(x)\,f(x),\ \text{ où } \varphi'(x) = o_b\left(\varphi(x)^2\right)$$

on étudie alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) \underset{b}{\sim} f(x)$$

2. la fonction est à monotonie plus lente on étudie alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\,f(x)\right) \overset{?}{\underset{b}{\sim}} f(x)$$

Exercice(s) 3.7

3.7.1 Soit

$$f\ :\ x \longmapsto \int_e^x \ln(\ln t)\ \mathrm{d}t$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f et ses variations.

(b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

(c) Montrer que f admet une limite finie en 1^+.

(d) Faire le graphe de f.

3.7.2 Soit

$$f\ :\ \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

(a) Montrer que f est bien définie et donner ses variations.

(b) Déterminer un équivalent de f en 0.

(c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

(d) Faire le graphe de f.

3.7.3 On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\big)\ \mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos(x)\big)\ \mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de ces deux intégrales.

(b) Montrer que $I = J$.

(c) En considérant $I + J$, montrer que

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\ \ln(2)$$

3.7.4 Trouver des équivalents de

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^3}\ \mathrm{d}t \qquad \text{au voisinage de } +\infty$$

$$\int_2^x \frac{t}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t \qquad \text{au voisinage de } +\infty$$

3.7.5 Calculer pour $0 < a < b$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x$$

3.7.6 Existences et calculs des intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 2x + 10)\sqrt{x^2+16}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}, \; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$$

3.7.7 La fonction erreur est donnée par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) \, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer qu'elle admet une limite ℓ en $+\infty$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Tracer rapidement son graphe.

(c) Faire son développement limité en 0 à l'ordre 3.

(d) Faire son développement asymptotique en $+\infty$ avec deux termes (le premier est ℓ).

3.3 Notions sur les intégrales multiples

注释 3.7

本小节介绍了多重积分，它将单元函数的定积分推广到多元函数的定积分。特别的，本小节还举例介绍了极坐标换元法及其应用。

Ce paragraphe ne propose aucune démonstration. Les techniques utiles sont développées sans justification.

3.3.1 Cahier des charges pour une intégrale double, triple ou plus...

La question de la définition d'une intégrale d'une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on se ramène au cas $p = 1$ grâce aux applications composantes) est en fait multiple [a]

1. Qu'est-ce que D (dit *domaine* d'intégration) ? (Pour l'intégrale simple, nous avions un segment).
2. Quelle régularité pour la fonction f faut-il supposer ? (Pour l'intégrale simple, nous avions *au moins* les fonctions continues par morceaux).
3. Quelle propriété veut-on retrouver ? (Pour l'intégrale simple, on voulait calculer une surface).

Nous allons procéder comme pour l'intégrale simple par un cahier des charges. Supposons connu un domaine D d'intégration et des fonctions intégrables sur D (c'est-à-dire que l'on a su donner un sens à l'intégrale de cette fonction sur D), nous voulons

1. Si D est un pavé ($D = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$, où a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n sont des nombres réels vérifiant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k < b_k$), $\int_D 1$ est l'aire (le volume, etc.) de D.

$$\mu(D) \overset{\text{Not}}{=} \int_D 1 = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

On retrouve ainsi, l'aire d'un carré du plan et d'un parallélépipède de l'espace.

Par extension, nous supposerons que la fonction constante 1 *est intégrable sur* D*, et que*

$$\mu(D) \overset{Not}{=} \int_D 1 \geq 0$$

On appellera souvent $\mu(D)$ « mesure de D ».

2. (*Linéarité*) L'ensemble des fonctions intégrables doit vérifier
si f et g sont intégrables sur D, λ et μ deux nombres un réels alors, $(\lambda.f + \mu.g)$ est intégrable sur D et

$$\int_D (\lambda.f + \mu.g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g$$

3. (*Croissance*) L'application doit vérifier, si f et g sont intégrables sur D

$$\left[f \leq g\right] \implies \left[\int_D f \leq \int_D g\right]$$

4. (*Extension de la relation de Chasles*) Si $D = D_1 \cup D_2$ et $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, et si f est intégrable sur D alors f est intégrable sur D_1 et sur D_2 et,

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

a. Nous pourrions nous limiter aux cas $n = 2$ et $n = 3$ qui seront les plus fréquents dans la pratique.

Remarque 3.33

Toutes ces notions seront clarifiées dans le cours d'intégration.

Notation 3.6

— Lorsque $n = 2$, on notera souvent

$$\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{Not}}{=} \int_D f$$

— De même, lorsque $n = 3$, on notera souvent

$$\iiint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{\text{Not}}{=} \int_D f$$

— Pour $n \geq 4$, on utilisera la notation générale.

On déduit du cahier des charges les propriétés suivantes.

Propriété 3.11

Si f et $|f|$ sont intégrables sur D, alors

$$\left|\int_D f\right| \leq \int_D |f|$$

Propriété 3.12

Si f est intégrable et bornée sur D, alors

$$\left|\int_D f\right| \leq \sup_{x\in D} |f(x)| \underbrace{\int_D 1}_{\mu(D)}$$

où $\mu(D)$ désigne « l'aire de D » ($n = 2$) ou le « volume de D » ($n = 3$).

Propriété 3.13 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g définies sur D sont telles que f^2, g^2 et $f\,g$ sont intégrables sur D, alors

$$\left|\int_D f\,g\right| \leq \sqrt{\int_D f^2}\sqrt{\int_D g^2}$$

Propriété 3.14

Si D_1, ..., D_q sont des domaines, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{q} D_k\right) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu(D_k)$$

Exercice(s) 3.8

On supposera que D est un domaine convenable et que les fonctions données sont intégrables sur D.

3.8.1 Soit D un segment de droite dans $\mathbb{R}^2$, montrer que [a]

$$\mu(D) = 0$$

3.8.2 Montrer que la mesure d'un rectangle incliné est bien celle qu'on attend. (Invariance de la mesure par rotation/symétrie orthogonale et translation).

3.8.3 Soit D le disque unité du plan, montrer que (voir la figure 3.14, page 208).

$$\mu(D) = \pi$$

3.8.4 Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, une fonction définie, continue sur Δ ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs positives. Soit D un domaine d'intégration inclus dans Δ, on suppose de plus que

$$\int_D f = 0$$

(a) Soit $x_0 \in D$, tel que

$$\exists r > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \Big[\,\|y - x_0\| \leq r\Big] \implies \Big[y \in D\Big]$$

montrer que $f(x_0) = 0$.

(b) Posons, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$BF(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|y - x_0\| \leq r\}$$

Montrer que

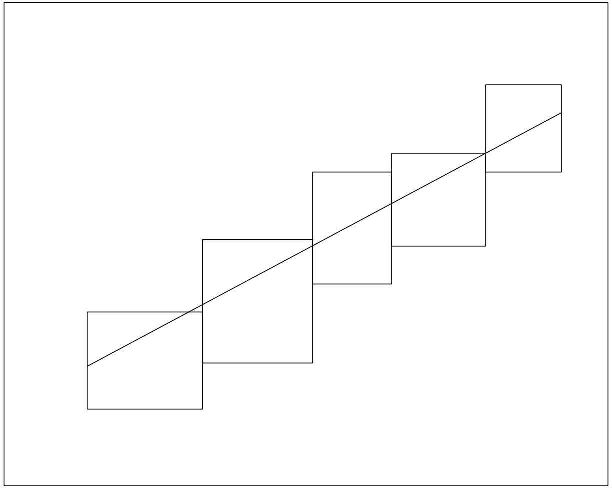
$$\forall x_0 \in D,\ \Big[\exists r > 0,\ \mu\left(D \cap BF\left(x_0, r\right)\right) > 0\Big] \implies \Big[f\left(x_0\right) = 0\Big]$$

---

a. On pourra montrer qu'un $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver un nombre p de rectangles $R_1, \ldots, R_p$ qui recouvrent D tels que (voir la figure 3.13, page ci-contre).

$$\sum_{k=1}^{p} \mu(R_k) \leq \varepsilon$$

Figure 3.13 – Mesure d'un segment de $\mathbb{R}^2$



3.3.2 Théorème de Fubini

Notation 3.7

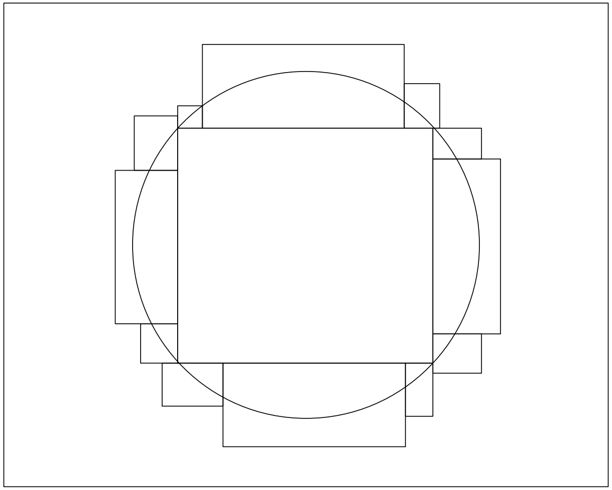
Pour $n = 1$, on conviendra, par souci de compatibilité, notamment dans le théorème de Fubini (théorème 3.8, page suivante) que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$

$$\int_{[a,b]} f \overset{\text{Not}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et, de même, avec une réunion finie de segments *disjoints*, par la relation de Chasles

$$\text{si } D = \bigcup_{k=1}^{p} [a_k, b_k], \text{ alors } \int_D f = \sum_{k=1}^{p} \int_{[a_k,b_k]} f$$

Figure 3.14 – Mesure d'un disque



Théorème 3.8 – Fubini [cas $n = 2$]

Soit $f : D \subset [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ où $a < b$ et $c < d$, intégrable sur D, alors, pour $x \in [a,b]$ notons

$$D_x = \{y \in [c,d],\ (x,y) \in D \cap (\{x\} \times [c,d])\} \ \textit{ et } f(x,\bullet)\ : \begin{cases} D_x & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(x,y) \end{cases}$$

et, pour tout $y \in [c,d]$ notons

$$\Delta_y = \{x \in [a,b],\ (x,y) \in D \cap ([a,b] \times y)\} \ \textit{ et } f(\bullet,y) \begin{cases} \Delta_y & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x,y) \end{cases}$$

On a alors

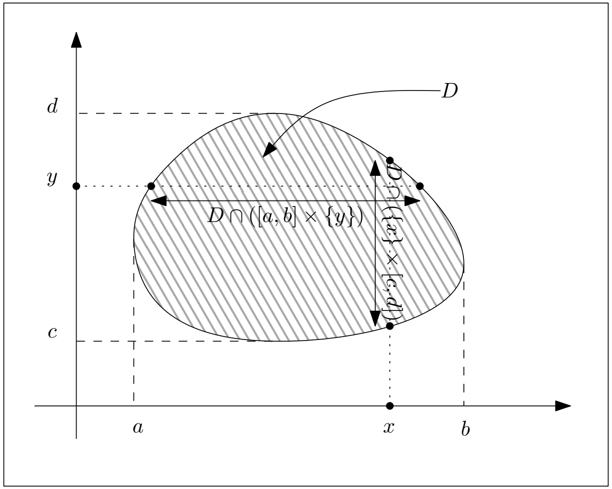
$$\int_D f = \iint_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{D_x} f(x,\bullet)\right)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\Delta_y} f(\bullet,y)\right)\,\mathrm{d}y$$

Voir la figure 3.15, de la présente page.

Démonstration

Admis... pour le moment.

Figure 3.15 – Théorème de Fubini dans le cas du plan



Exemple 3.19 – Aire de l'intérieur d'une ellipse

Soit à calculer l'aire de l'intérieur D d'une ellipse, soit

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } 0 < b \leq a$$

En appliquant la formule, on a (par exemple)

$$\mu(D) = \int_{-a}^{+a} \left(\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{+b\sqrt{1-x^2/a^2}} 1 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Le calcul est effectué en `Wxmaxima` dans le code 3.9, de la présente page. On pourrait aussi écrire

$$\mu(D) = \int_{-b}^{+b} \left(\int_{-a\sqrt{1-y^2/b^2}}^{+a\sqrt{1-y^2/b^2}} 1 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Cela donne, bien sûr, le même résultat.

Session `Wxmaxima` 3.9 – Aire de l'intérieur d'une ellipse

```
(%i1) integrate(1,y,-delta,delta);
```

(%o1) $2\,\delta$

```
(%i2) subst([delta=b*sqrt(1-x^2/a^2)],%);
```

(%o2) $2\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

```
(%i3) integrate(%,x,-a,a);
```

Is a positive or negative ?p ;
(%o3) $\pi\,a\,b$

Session `Python` 3.9 – Aire de l'intérieur d'une ellipse

Notons que si l'aire de la surface délimitée par une ellipse est facile à calculer, sa longueur nous introduit de nouvelles fonctions (on parle alors d'intégrales elliptiques).

In[47]

```
y = symbols('y', real=True)
delta = symbols('\\delta', positive=True)
integrate(1, (y, -delta, delta))
```

Out[47]

$$2\delta$$

In[48]

```
a, b = symbols('a b', positive=True)
_.subs({delta: b*sqrt(1-x**2/a**2)})
```

Out[48]

$$2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

In[49]

```
integrate(_, (x, -a, a))
```

Out[49]

$$\pi ab$$

Remarque 3.34

On calcule toujours l'intégrale intérieure *avant* de calculer la seconde !

Remarque importante 3.35

Il faut *choisir* le bon sens de calcul, car un sens peut-être plus facile qu'un autre. Calculons, par exemple, la valeur suivante ($0 < a < 1$)

$$\int_D f, \text{ où } D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, a] \text{ et } f(x, y) = \frac{1}{y\cos(x) + 1}$$

On a alors deux possibilités

1. on calcule d'abord

$$\int_0^a \frac{1}{y\cos(x)+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\cos(x)}\Big[\ln(y\cos(x)+1)\Big]_{y=0}^{y=a}$$

qui pose un problème pour $x = \pi/2$ (mais l'intégrale est facile à calculer lorsque $\cos(x) = 0$ et la formule se prolonge facilement par continuité en cette valeur). Il faut calculer ensuite

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos(x))}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

qui se calculera facilement ultérieurement, mais, qui pour le moment est difficile !

2. on calcule d'abord

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{y\cos(x)+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\sqrt{1-y^2}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y+1}\right)}{y^2-1}$$

(merci `Wxmaxima` et `Sympy`), qui ne pose pas de problème particulier. Mais, il faut alors calculer

$$\int_0^a \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)\,\mathrm{d}y$$

qui se calcule grâce au changement de variable

$$u = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

Voir le calcul en `Wxmaxima` (session 3.10, page suivante) ou la session `Python` 3.10, page 214.

Session Wxmaxima 3.10 – Fubini

```
(%i1) assume(a>0,a<1);
```

(%o1) $[a>0,a<1]$

```
(%i2) integrate(1/(y*cos(x)+1),y,0,a);
```

Is $\cos(x)\ (a\cos(x)+1)$ positive, negative, or zero ?p ;
Is $\cos(x)$ positive or negative ?p ;

(%o2) $\dfrac{\log(a\cos(x)+1)}{\cos(x)}$

```
(%i3) integrate(%,x,0,%pi/2);
```

(%o3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log(a\cos(x)+1)}{\cos(x)}dx$

Après un long moment, Wxmaxima renonce à faire le calcul... Ce calcul se fait d'une autre manière que nous verrons plus tard.

```
(%i4) integrate(1/(y*cos(x)+1),x,0,%pi/2);
```

Is $y^2-1.0$ positive or negative ?n ;

(%o4) $-\dfrac{2\sqrt{1-y^2}\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y+1}\right)}{y^2-1}$

```
(%i5) radcan(%);
```

(%o5) $-\dfrac{2\sqrt{1-y}\sqrt{y+1}\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y+1}}\right)}{y^2-1}$

```
(%i6) factor(%);
```

(%o6) $-\dfrac{2\sqrt{1-y}\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y+1}}\right)}{(y-1)\sqrt{y+1}}$

```
(%i7) integrate(%,y,0,a);
```

$$(\%o7)\quad -2\int_{0}^{a}\frac{\sqrt{1-y}\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y+1}}\right)}{(y-1)\,\sqrt{y+1}}dy$$

```
(%i8) changevar(%,u=sqrt((1-y)/(1+y)),u,y);
```

Is u positive, negative, or zero ?p;

$$(\%o8)\quad 4\int_{\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}}^{1}\frac{\mathrm{atan}\,(u)}{u^2+1}du$$

```
(%i9) %,nouns;
```

$$(\%o9)\quad 4\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}\right)^2}{2}\right)$$

```
(%i10) expand(%);
```

$$(\%o10)\quad \frac{\pi^2}{8}-2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}\right)^2$$

Session Python 3.10 – Fubini

Les intégrales doubles sont souvent difficiles à calculer. En effet, les difficultés peuvent venir à la fois des intégrales à calculer, mais aussi de la forme des domaines d'intégration. De plus, il faut bien choisir dans quel ordre faire les calculs !

In [50]

```
integrate(1/(y*cos(x)+1), (y, 0, a))
```

Out [50]

$$\frac{\log\,(a\cos\,(x)+1)}{\cos\,(x)}$$

In[51]

```
integrate(_, (x, 0, pi/2))    # Le calcul n'aboutit pas !
```

KeyboardInterrupt:

Remarque 3.36

Comme en `Wxmaxima`, cette intégrale pose un problème au système. Encore une utilisation de la fonction `integrate` inutile !

In[52]

```
integrate(1/(y*cos(x)+1), (x, 0, pi/2))
```

Out[52]

$$\begin{cases} \infty & \text{for } y = -1 \\ 1 & \text{for } y = 1 \\ -\frac{\log\left(1-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}\right)}{y\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}} + \frac{\log\left(-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}\right)}{y\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}} - \frac{\log\left(\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}\right)}{y\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}} + \frac{\log\left(\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}+1\right)}{y\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}-\sqrt{\frac{y}{y-1}+\frac{1}{y-1}}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Remarque 3.37

Encore une mauvaise utilisation de la fonction `integrate` ! Et un résultat peu utilisable !

In[53] – Pour pouvoir simplifier *à l'intérieur* d'une intégrale

```
def Isimp(expr):
    """
    Pour simplifier sous l'intégrale
```

```
    """
    f = expr.func
    a = expr.args
    return(f(*(a[0].simplify(), a[1])))
```

In [54]

```
Integral(1/(y*cos(x)+1), (x, 0, pi/2))
```

Out[54]

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y \cos{\left(x \right)} + 1}\, dx$$

In [55]

```
_.transform(tan(x/2), u)
```

Out[55]

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{\left(u^{2} + 1\right) \left(y \cos{\left(2 \operatorname{atan}{\left(u \right)} \right)} + 1\right)}\, du$$

In [56]

```
Isimp(_)
```

Out[56]

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{-u^{2} y + u^{2} + y + 1}\, du$$

In[57]

```
t = symbols('t')
_.transform(u, (t*sqrt((1+y)/(1-y)), t))
```

Out[57]

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{- \frac{1}{y - 1}} \sqrt{y + 1}}} \frac{2 \sqrt{\frac{y + 1}{1 - y}}}{- \frac{t^{2} y \left(y + 1\right)}{1 - y} + \frac{t^{2} \left(y + 1\right)}{1 - y} + y + 1}\, dt$$

In[58]

```
_.doit()
```

Out[58]

$$\frac{\left(2 y \sqrt{\frac{y}{1 - y} + \frac{1}{1 - y}} - 2 \sqrt{\frac{y}{1 - y} + \frac{1}{1 - y}}\right) \operatorname{atan}{\left(\frac{1}{\sqrt{- \frac{1}{y - 1}} \sqrt{y + 1}} \right)}}{\left(y - 1\right) \left(y + 1\right)}$$

In[59]

```
_.simplify()
```

Out[59]

$$\frac{2\sqrt{\frac{-y-1}{y-1}}\,\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{y-1}}\sqrt{y+1}}\right)}{y+1}$$

In[60]

```
1  Integral(_, (y, 0, a))
```

Out[60]

$$\int\limits_{0}^{a}\frac{2\sqrt{\frac{-y-1}{y-1}}\,\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{y-1}}\sqrt{y+1}}\right)}{y+1}\,dy$$

In[61]

```
1  _.transform(sqrt((1-y)/(1+y)), u)
```

Out[61]

$$\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}}\frac{2\sqrt{\frac{-\frac{1-u^2}{u^2+1}-1}{\frac{1-u^2}{u^2+1}-1}}\left(-\frac{2u\left(1-u^2\right)}{\left(u^2+1\right)^2}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\frac{1-u^2}{u^2+1}-1}}\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2+1}+1}}\right)}{\frac{1-u^2}{u^2+1}+1}\,du$$

In[62]

```
Isimp(_)
```

Out[62]

$$\int_{1}^{\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}} \left(-\frac{4\operatorname{atan}(u)}{u^2+1}\right) du$$

In[63]

```
_.transform(atan(u), x)
```

Out[63]

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}\right)} \left(-4\operatorname{atan}(\tan(x))\right) dx$$

Théorème 3.9 – Fubini [cas général]

Soit $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*,* $a_1, \ldots, a_n$*,* $b_1, \ldots, b_n$ *des nombres réels vérifiant pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ $a_k < b_k$ *et*

$$f \ : \ D \subset \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \longmapsto \mathbb{R}, \ \textit{intégrable sur } D$$

notons, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$q_k \ : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

pour tout $x_k \in [a_k, b_k]$

$$D_{k,x_k} = q_k\left(D \cap \left(\prod_{j=1}^{k-1}[a_j, b_j] \times \{x_k\} \times \prod_{j=k+1}^{n}[a_j, b_j]\right)\right)$$

et

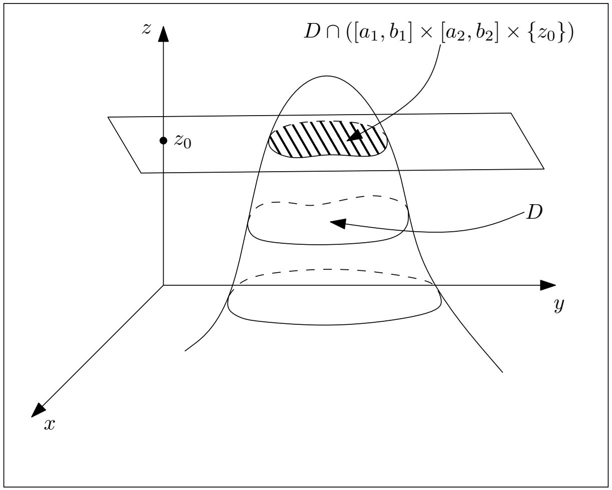
$$\widetilde{f}_{k,x_k} \;:\; (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

On a alors, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\int_D f = \int_{a_k}^{b_k}\left(\int_{D_{k,x_k}} \widetilde{f}_{k,x_k}\right) \mathrm{d}x_k$$

Voir, en dimension 3, la figure 3.16, de la présente page.

Figure 3.16 – Fubini dans l'espace



Exemple 3.20

Calculons le volume de l'intérieur D d'un ellipsoïde E défini par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ 0<c\leq b\leq a$$

On a alors

$$\mu(D)=\int_D 1=\int_{-c}^{+c}\left(\int_{\{(x,y),\ (x,y,x)\in D\cap([-a,a]\times[-b,b]\times\{z\})\}}1\right)\,\mathrm{d}z$$

or,

$$\{(x,y),\ (x,y,z)\in D\cap([-a,a]\,[-b,b]\,\{z\})\},\ \text{est l'intérieur d'une ellipse}\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

où

$$\alpha=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\ \text{et}\ \beta=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

donc

$$\mu(D)=\int_{-c}^{+c}\pi\,a\,b\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\,\pi\,a\,b\,c$$

Exercice(s) 3.9

3.9.1 Calculer les intégrales $\int_D f$ où

$$\begin{aligned}
f(x,y)=\frac{1}{1+x+y} \quad &\text{et} \quad D=[0,1]^2\\
f(x,y)=y^2 \quad &\text{et} \quad D=\left\{(x,y),\ x^2\leq 2p\,y\ \text{et}\ y^2\leq 2\,p\,x\right\},\quad (p>0)\\
f(x,y,z)=x\,y\,z \quad &\text{et} \quad D=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z\leq 1\right\}\\
f(x,y,z)=z \quad &\text{et} \quad D=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3,\ y^2+z\leq 1\ \text{et}\ x^2+z\leq 1\right\}
\end{aligned}$$

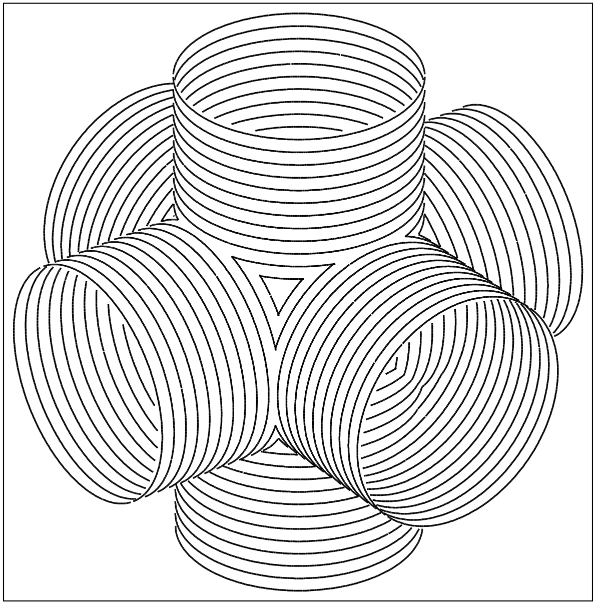
3.9.2 Calculer le volume de l'intersection de trois cylindres pleins de révolution de rayon R dont les axes sont orthogonaux. Voir la figure 3.17, page suivante.

3.9.3 En s'inspirant du calcul du volume de l'intérieur d'un ellipsoïde, calculer

$$\mu(BF(x_0, R)),\ \text{boule de centre } x_0 \text{ de rayon } R \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

3.9.4 Soit $a > 0$, déterminer le volume de l'intersection de la boule d'équation $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - a\,x \leq 0$ (dont le dessin se trouve pour $a = 1$ à la figure 3.18, page 232).

Figure 3.17 – Exercice 3.9.2



3.3.3 Changement de variables

Remarque 3.38

Il est souvent utile de tenir compte de la géométrie de D (et, dans un deuxième temps du comportement de f par rapport à cette géométrie), on pourra notamment utiliser les coordonnées polaires dans le plan, et les coordonnées cylindriques ou sphériques dans l'espace. Nous verrons ultérieurement la situation générale.

Théorème 3.10 – Changement de variables [cas des coordonnées polaires]

Soit $f : D \subset [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ($a < b$ et $c < d$), intégrable sur D, soit

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{cases}$$

Soit D' un domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que

1. *$\psi(D') = D$;*
2. *$\psi_{|_{D'}}$ est* presque *injective (il existe $D'' \subset D'$, telle que $\psi_{|_{D''}}$ est injective et $\mu(D' \setminus D'') = 0$),*

alors

$$\int_D f = \iint_{(x,y)\in D} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{D'} |\rho|\, f \circ \psi = \iint_{(\rho,\theta)\in D'} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))\, |\rho|\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$$

Exemple 3.21

Calculons

$$\iint_{(x,y)\in D} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{f(x,y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \text{ où } D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq x \text{ et } x^2 + y^2 \geq y\right\}$$

1. Traçons D (figure 3.19, page 233).
2. Il est envisageable de passer en coordonnées polaires

$$D' = \left\{(\rho, \theta) \in [0, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right],\ \rho \geq 0,\ \sin(\theta) \leq \rho \leq \cos(\theta)\right\}$$

il vient

$$I = \int_D f = \iint_{(\rho,\theta)\in D'} \rho^2\,|\rho|\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\int_{\max(0,\sin(\theta))}^{\cos(\theta)} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\,\mathrm{d}\theta$$

Le calcul devient immédiat. Voir la session `Wxmaxima` 3.11, de la présente page ou la session `Python` 3.11, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.11 – Calcul d'une intégrale double

```
(%i1) integrate(rho^3,rho,max(0,sin(theta)),cos(theta));
```

(%o1) $\dfrac{\cos(\theta)^4}{4} - \dfrac{\max(0,\sin(\theta))^4}{4}$

```
(%i2) integrate(%,theta,-%pi/2,%pi/4);
```

(%o2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\theta)^4}{4} - \frac{\max(0,\sin(\theta))^4}{4} d\theta$

`Wxmaxima` n'arrive pas à gérer le max...

```
(%i3) integrate(rho^3,rho,a,cos(theta));
```

(%o3) $\dfrac{\cos(\theta)^4}{4} - \dfrac{a^4}{4}$

```
(%i4) integrate(subst([a=0],%),theta,-%pi/2,0)+
      integrate(subst([a=sin(theta)],%),theta,0,%pi/4);
```

(%o4) $\dfrac{3\,\pi}{64} + \dfrac{1}{8}$

Session `Python` 3.11 – Calcul d'une intégrale double

Un exemple supplémentaire du risque d'utiliser la fonction `integrate` (ligne 68).

Remarque 3.39

Dans le même esprit que pour `Isimp`, substituer *à l'intérieur* d'une intégrale peut être utile.

In [64] – Fonction `Isubs`

```
def Isubs(expr, pat, pats):
    """
    Isubs essaye de simplifier à l'intérieur d'une intégrale (notée expr)
    elle remplace le pattern pat, par le pattern de substitution pats
    """
    f = expr.func
    a = expr.args
    asub = (a[0].subs(pat, pats), a[1])
    return(f(*asub))
```

In [65]

```
Isubs(_, atan(tan(x)), x)
```

Out [65]

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{atan}{\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}} \right)}} \left(-4x\right)\, dx$$

In [66]

```
_.doit()
```

Out[66]

$$-2\operatorname{atan}^{2}\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}\right)+\frac{\pi^{2}}{8}$$

In [67]

```
rho, theta = symbols('\\rho \\theta', real=True)
integrate(rho**3, (rho, Max(0, sin(theta)), cos(theta)))
```

Out[67]

$$\frac{\cos^{4}(\theta)}{4}-\frac{\max\left(0,\sin(\theta)\right)^{4}}{4}$$

In [68] – Un exemple où `integrate` donne un résultat faux !

```
integrate(_, (theta, -pi/2, pi/4))  # C'est faux !
```

Out[68]

$$\frac{1}{8}$$

In [69] – Coupons à la main

```
integrate(cos(theta)**4/4, (theta, -pi/2, 0)) +\
    integrate(cos(theta)**4/4-sin(theta)**4/4, (theta, 0, pi/4))
```

Out[69]

$$\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64}$$

Exemple 3.22 – Intégrale de Gauss

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

considérons les ensembles suivants (pour $a > 0$)

$$D_1 = \{(x,y),\ x^2+y^2 \leq a^2\},\ D_2 = [-a,a]^2 \text{ et } D_3 = \{(x,y),\ x^2+y^2 \leq 2a^2\}$$

On a clairement $f \geq 0$ et $D_1 \subset D_2 \subset D_3$, on peut donc dire que

$$\int_{D_1} f \leq \int_{D_2} f \leq \int_{D_3} f$$

Or

$$\int_{D_2} f = \int_{-a}^{+a} \left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \left(\int_{-a}^{+a} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \right)^2$$

Par ailleurs, par passage en coordonnées polaires

$$\int_{D_1} f = \iint_{(\rho,\theta)\in[0,a]\times[0,2\,\pi]} e^{-\rho^2}\ |\rho|\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^a 2\,\pi\,\rho\, e^{-\rho^2}\ \mathrm{d}\rho = \left[-2\,\pi\, \frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=a} = \pi\ \left(1 - e^{-a^2}\right)$$

et

$$\int_{D_3} f = \iint_{(\rho,\theta)\in[0,2\,a]\ [0,2\,\pi]} e^{-\rho^2}\ |\rho|\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\,a} 2\,\pi\,\rho\, e^{-\rho^2}\ \mathrm{d}\rho = \left[-2\,\pi\, \frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=2\,a} = \pi\ \left(1 - e^{-4\,a^2}\right)$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, il vient, par encadrement

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

Session `Wxmaxima` 3.12 – Intégrale de Gauss

(%i1) `integrate(exp(-x^2),x,minf,inf);`

(%o1) $\sqrt{\pi}$

Session `Python` 3.12 – Intégrale de Gauss

Intégrale connue de tous les systèmes de calcul formel ou symbolique.

In [70]

```
integrate(exp(-x**2), (x, -oo, oo))
```

Out [70]

$\sqrt{\pi}$

Théorème 3.11 – Changement de variables [cas des coordonnées cylindriques]

Soit $f : D \subset [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \to \mathbb{R}$ *(*$a_1 < a_2$*,* $b_1 < b_2$ *et* $c_1 < d_2$*), intégrable sur* D*, soit*

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \end{cases}$$

Soit $D' \in \mathbb{R}^3$*, tel que*

1. $\psi(D') = D$ *;*
2. $\psi_{|_{D'}}$ *est* presque *injective,*

alors

$$\int_D f = \iiint_{(x,y,z)\in D} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{D'} |\rho|\, f \circ \psi = \iiint_{(r,\theta,z)\in D'} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)\, |\rho|\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z$$

Exemple 3.23

Prenons par exemple le domaine D (ellipsoïde de révolution d'axe Oz) défini par

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

on trouve [a]

$$D'=\left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad \underbrace{\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1}_{\text{intérieur d'une ellipse } E_0}\qquad \text{et } \theta\in[0,\pi]\right\}$$

Le volume de D est donc [b]

$$\mu(D)=\int_D 1=\int_{D'}|\rho|=\int_0^{2\pi}\left(\iint_{(\rho,z)\in E_0}|\rho|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}\theta$$

Donc

$$\mu(D)=\pi\int_{-a}^{+a}|\rho|\left(\int_{-c\sqrt{1-\rho^2/a^2}}^{+c\sqrt{1-\rho^2/a^2}}1\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}\rho$$

Et, finalement

$$\mu(D)=2\pi\int_{-a}^{+a}c\,|\rho|\sqrt{1-\rho^2/a^2}\,\mathrm{d}\rho=8\pi\int_0^a c\,\rho\sqrt{1-\rho^2/a^2}\,\mathrm{d}\rho=$$

$$4\pi c\left[-\frac{a^2}{3}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a}=\frac{4}{3}\pi a^2 c$$

a. On pourrait prendre $\rho\geq 0$, en ce cas $\theta\in[0,2\pi]$.
b. Bien sûr, nous avons déjà fait ce calcul. Il supposait connue l'aire de l'intérieur d'une ellipse...

Théorème 3.12 – Changement de variables [cas des coordonnées sphériques]

Soit $f : D \subset [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \to \mathbb{R}$ *($a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ et $c_1 < d_2$), intégrable sur D, soit*

$$\psi \; : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi), r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi), r\,\cos(\theta)) \end{cases}$$

Soit $D' \in \mathbb{R}^3$*, tel que*

1. $\psi(D') = D$ *;*
2. $\psi_{|_{D'}}$ *est* presque *injective,*

alors

$$\int_D f = \iiint_{(x,y,z)\in D} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{D'} r^2\,|\sin(\theta)|\,f \circ \psi =$$
$$\iiint_{(r,\theta,\varphi)\in D'} f\big(r\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi), r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi), r\,\cos(\theta)\big)\,r^2\,|\sin(\theta)|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Exemple 3.24

Soit à calculer le volume de l'intérieur d'une sphère D

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

On a alors

$$D' = [0, a] \times [0, \pi] \times [0, 2\,\pi]$$

donc

$$\mu(D) = \int_D 1 = \int_{D'} r^2\,|\sin(\theta)| = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\,\pi} \left(\int_0^a r^2\,|\sin(\theta)|\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}\varphi\right)\,\mathrm{d}\theta$$

Donc

$$\mu(D) = 2\,\pi\,\frac{a^3}{3}\int_0^\pi |\sin(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi\,a^3$$

Exercice(s) 3.10

3.10.1 Calculer à l'aide d'un changement de variables $\displaystyle\int_D f$ où

$$f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2+a^2} \quad \text{et} \quad D=\{y\geq 0,\ 0\leq \rho\leq a\,(1+\cos(\theta))\}\,,\quad (a>0)$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad D=\left\{\frac{a}{2+\cos(\theta)}\leq \rho\leq a\right\},\quad (a>0)$$

$$f(x,y,z)=1 \quad \text{et} \quad D=\left\{x^2+y^2+z^2\leq a \text{ et } x^2+y^2\leq z^2\right\},\quad (a>0)$$

$$f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2+1} \quad \text{et} \quad D=\left\{z\in[0,1] \text{ et } x^2+y^2\leq z^2\right\}$$

3.10.2 Volume de

$$D=\left\{z\in[-1,1] \text{ et } x^2+y^2\leq 1+z^2\right\}\ ?$$

Figure 3.18 – Fenêtre de Viviani

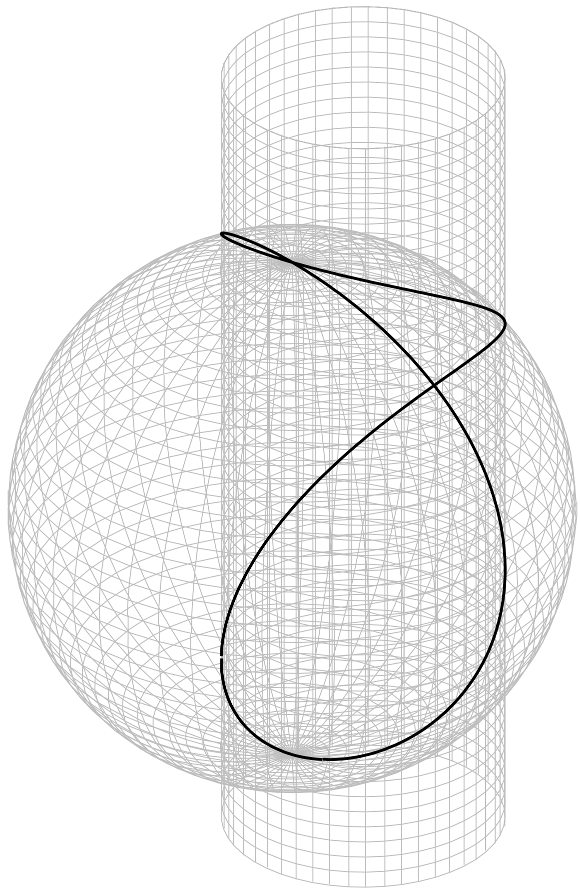
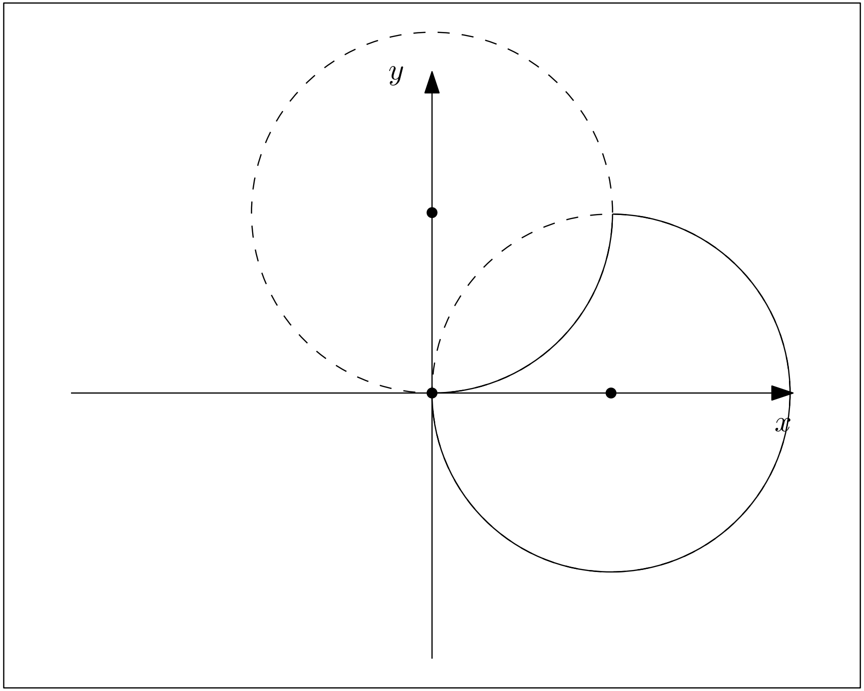


Figure 3.19 – Calcul d'une intégrale double



Chapitre 4

Équations différentielles linéaires

注释 4.1

微分方程是一种用来描述某一类函数与其导函数之间关系的函数。本章节介绍了几种典型的线性微分方程和求解方法。绝大多数高阶或非线性微分方程并没有解析解，对于这类方程，后续课程我们会通过如数值求解，动力学分析等方向来研究。

4.1 Théorie

4.1.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 4.1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit a et b deux applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (nous noterons $\mathbb{K}$ l'un ou l'autre de ces corps), *continues sur* I, on appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute écriture de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + a(x)\,y = b(x),\ x \in I$$

— Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation $(\mathcal{E})$ est *homogène*, le terme $b(x)$ s'appelle *le second membre de l'équation $(\mathcal{E})$*.

— L'équation

$$(\mathcal{H}) \qquad y' + a(x)\, y = 0,\ x \in I$$

est dite *équation (différentielle linéaire) homogène associé à $(\mathcal{E})$.*

— On dit que $\varphi : I \mapsto \mathbb{K}$ est *une solution de $(\mathcal{E})$* si φ est dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$

$$\varphi'(x) + a(x)\, \varphi(x) = b(x)$$

— On appelle *condition initiale*, la donnée d'un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.

— On appelle *problème de Cauchy*, la donnée d'une équation différentielle $(\mathcal{E})$ et d'une condition initiale (x_0, y_0). On note

$$(\mathcal{C})\ :\ \begin{cases} y' + a(x)\, y = b(x), & x \in I \\ (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}, & \text{qu'on écrit parfois } y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

— On appelle *solution au problème de Cauchy $(\mathcal{C})$*, toute solution φ de $(\mathcal{E})$ qui vérifie de plus

$$\varphi(x_0) = y_0$$

了解线性和非线性微分方程的区别，本定义中线性体现在方程 $(\mathcal{E})$ 右边第二项是关于 y 的线性函数；未知函数的最高阶的导数的阶数也叫作微分方程的阶数；方程$(\mathcal{H})$ 是对应于方程 $(\mathcal{E})$ 的线性齐次方程；柯西问题通常也叫做初值问题。

Remarque importante 4.1

Si φ est une solution de $\mathcal{E}$ sur I, on a

$$\varphi' = -a\, \varphi + b \quad \text{avec } a,\ b \text{ et } \varphi \text{ continues sur } I$$

donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Néanmoins, comme on le verra dans l'exemple 4.6, il existe des expressions différentielles dont les solutions ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ (cas où le coefficient de y' est une fonction de x).

Remarque importante 4.2

y désigne une *lettre* et non une fonction. C'est une manière de poser la question « Quelles sont les fonctions φ de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient

$$\forall x \in I,\ \varphi'(x) + a(x)\,\varphi(x) = b(x)\ ?\ »$$

Remarque 4.3

Lorsque $a = 0$, nous sommes revenus à la recherche d'une primitive de b.

Théorème 4.1 – Existence et unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(\mathcal{C})$ un problème de Cauchy comme dans la définition 4.1, page 235 , alors il existe une unique solution à $(\mathcal{C})$, φ qui est donnée, pour $x \in I$, par

$$\boxed{\varphi(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(+\int_{x_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right) b(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

注释 4.2

本公式需要熟练掌握，一种特殊且比较常见的情况是函数 a 和函数 b 为常值函数。

Session `Wxmaxima` 4.1 – Résolution d'une équation différentielle linéaire

```
(%i1) eq : 'diff(y,x)+a(x)*y=b(x);
```

(%o1) $\dfrac{d}{d\,x}\,y + \mathrm{a}\,(x)\;y = \mathrm{b}\,(x)$

```
(%i2) ode2(eq,y,x);
```

(%o2) $y = e^{-\int \mathrm{a}(x)dx} \left(\int e^{\int \mathrm{a}(x)dx}\, \mathrm{b}(x)\, dx + \%c\right)$

```
(%i3) ic1(%,x=x0,y=y0);
```

(%o3) $y = e^{-\int \mathrm{a}(x)dx} \left(- \int e^{\int \mathrm{a}(x)dx}\, \mathrm{b}(x)\, dx \Big|_{[x=x0,y=y0]} + \int e^{\int \mathrm{a}(x)dx}\, \mathrm{b}(x)\, dx + \left(y0\, e^{\int \mathrm{a}(x)dx|_{[x=x0,y=y0]}}\right)\right)$

```
(%i4) phi(x) := exp(-integrate(a(t),t,x0,x))*
            (y0+integrate(exp(integrate(a(u),u,x0,t))*b(t),
             t,x0,x));
```

(%o4) $\phi(x) := \exp\left(-\int_{x0}^{x} \mathrm{a}(t)\, dt\right) \left(y0 + \int_{x0}^{x} \exp\left(\int_{x0}^{t} \mathrm{a}(u)\, du\right) \mathrm{b}(t)\, dt\right)$

```
(%i5) subst([y=phi(x)],eq);
```

(%o5) $\frac{d}{d\,x}\left(e^{-\int_{x0}^{x} \mathrm{a}(t)dt}\left(y0 + \int_{x0}^{x} \mathrm{b}(t)\, e^{\int_{x0}^{t} \mathrm{a}(u)du} dt\right)\right) + e^{-\int_{x0}^{x} \mathrm{a}(t)dt}\, \mathrm{a}(x) \left(y0 + \int_{x0}^{x} \mathrm{b}(t)\, e^{\int_{x0}^{t} \mathrm{a}(u)du} dt\right) = \mathrm{b}(x)$

```
(%i6) lhs(%),nouns;
```

(%o6) $e^{\int_{x0}^{x} \mathrm{a}(u)du - \int_{x0}^{x} \mathrm{a}(t)dt}\, \mathrm{b}(x)$

Session `Python` 4.1 – Résolution d'une équation différentielle linéaire

La résolution théorique est difficile en `Sympy`, mais elle est efficace dans les cas où on connaît les fonctions. Notons que `Sympy` utilise des notations bizarres comme

$$\int f(x_0)\, \mathrm{d}x_0$$

pour désigner la primitive de f qui s'annule en x_0 ? ? (Voir la ligne 6).

In[1]

```
from sympy import *
init_printing()
```

In[2]

```
x = symbols('x')
a, b, y = symbols('a b y', cls=Function)
```

In[3]

```
eq = Eq(y(x).diff(x)+a(x)*y(x), b(x))
eq
```

Out[3]

$$a(x)y(x) + \frac{d}{dx}y(x) = b(x)$$

In[4] – Linéaire du premier ordre

```
dsolve(eq, y(x), hint='1st_linear')
```

Out[4]

$$y(x) = \left(C_1 + \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right)e^{-\int a(x)\,dx}$$

In[5] – Si on oublie...

```
dsolve(eq, y(x))
```

Out[5]

$$\left(e^{\int a(x)\,dx} - \int a(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right)y(x) + \int \left(a(x)y(x) - b(x)\right)e^{\int a(x)\,dx}\,dx = C_1$$

In[6]

```
x0, y0, t, u = symbols('x_0 y_0 t u')
dsolve(eq, y(x), hint='1st_linear', ics={y(x0): y0})
```

Out[6] – Notation *très* bizarre

$$y(x) = \left(y_0 e^{\int a(x_0)\,dx_0} + \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx - \int b(x_0)e^{\int a(x_0)\,dx_0}\,dx_0\right)e^{-\int a(x)\,dx}$$

In[7]

```
phi = Function('\\phi')
phi = Lambda(x, exp(-Integral(a(t), (t, x0, x)))*(y0+Integral(
    exp(Integral(a(u), (u, x0, t)))*b(t), (t, x0, x))))
```

In[8]

```
phi(x)
```

Out[8]

$$\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(t) e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(u)\, du}\, dt\right) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt}$$

In[9]

```
eq.subs({y: phi}).doit()
```

Out[9]

$$b(x) \left(e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt}\right) e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} = b(x)$$

In[10]

```
_.simplify()
```

Out[10]

$$b(x) = b(x) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt + \int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du}$$

Démonstration du théorème 4.1, page 237

Vérifier que la solution donnée convient est très simple. Mais, d'où vient cette formule ? Dans tous les cas, il reste à montrer l'unicité.

1. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions au même problème de Cauchy, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est solution du problème de Cauchy suivant

$$\mathcal{C}_0 \ : \quad \begin{cases} y' + a(x)\, y = 0, & \text{c'est } (\mathcal{H}) \\ (x_0, 0) \end{cases}$$

Nous allons donc, avant toute autre chose, nous intéresser à la résolution de $(\mathcal{H})$.

2. (*Résolution de* $(\mathcal{H})$) Nous allons nous appuyer sur la remarque suivante

Remarque 4.4

> Lorsque a est une fonction constante $x \mapsto \lambda$, nous connaissons une solution
> $$x \mapsto e^{-\lambda\, x}$$
> Il est donc naturel de chercher une solution sous la forme
> $$x \mapsto e^{-\lambda(x)}$$

(*Analyse*) Si la fonction $x \mapsto e^{-\lambda(x)}$ est solution de $(\mathcal{H})$, alors λ et de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie

$$\forall x \in I,\ -\lambda'(x)\, e^{-\lambda(x)} + a(x)\, e^{-\lambda(x)} = 0$$

On voit alors que toute primitive de a convient. Choisissons-en une, par exemple celle qui s'annule en x_0

$$\lambda_0(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\ \mathrm{d}t$$

Quelles sont les autres solutions ? À nouveau, nous allons nous appuyer sur la remarque suivante

Remarque 4.5

> Si on choisit une autre primitive Λ de λ, alors il existe $k \in \mathbb{K}$
> $$\forall x \in I,\ \Lambda(x) = \lambda_0(x) + k$$
> la solution de l'équation différentielle qui en découle est alors
> $$\forall x \in I,\ \varphi(x) = e^{-\lambda_0(x)}\, e^{k}$$

Il est donc naturel de chercher les autres solutions sous la forme (*Méthode de variation de la constante, voir la propriété 4.3, page 245*)

$$\varphi(x) = K(x)\, e^{-\lambda_0(x)} \qquad (*)$$

En ce cas, K est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in I,\ \underbrace{\left(K'(x) - K(x)\,\lambda_0'(x)\right)\ e^{-\lambda_0(x)} + a(x)\, K(x)\, e^{-\lambda_0(x)}}_{=K'(x)\, e^{-\lambda_0(x)}} = 0$$

Finalement, les seules possibilités sont pour K d'être constante. ⚠ *Or,* toutes *les solutions peuvent s'écrire sous la forme* $(*)$*, car* $e^{-\lambda_0(x)}$ *est toujours non nul !* Ceci nous garantit que ce sont les seules possibles.

(*Synthèse*) On trouve donc que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ est (vérification aisée) [a]

$$\boxed{S_{\mathcal{H}} = \left\{ x \mapsto K \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \right),\ K \in \mathbb{K} \right\}}$$

L'unicité de la solution vérifiant $(x_0, 0)$ est évidente (c'est la fonction nulle). Ceci montre l'unicité de la solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$.

3. *Existence de la solution.* Reprenons la forme $(*)$, mais utilisons la pour trouver les solutions de $(\mathcal{E})$ – pour le moment, nous ne occupons pas de la condition initiale. Il vient alors

$$\forall x \in I,\ K'(x) = b(x)\, e^{+\lambda_0(x)}$$

ce qui nous permet de calculer K. Finalement, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est [b] $S_{\mathcal{E}} = \{f_k,\ k \in \mathbb{K}\}$, où on a, pour tout $x \in I$

$$\boxed{f_k(x) = \left(k + \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(+ \int_{x_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \right) \right) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \right)}$$

Si on cherche les solutions qui vérifient de plus $\varphi(x_0) = y_0$, on en trouve une et une seule, pour laquelle $k = y_0$.

---

a. On dit que $S_{\mathcal{H}}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (une seule constante détermine la solution) engendré par la fonction $x \mapsto e^{-\lambda_0(x)}$. Le terme *linéaire* signifie d'ailleurs que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel, c'est-à-dire qu'il est stable par *combinaisons linéaires.*

b. On dit que $S_{\mathcal{E}}$ est un espace affine de direction $S_{\mathcal{H}}$. L'appellation *linéaire* est ici injustifiée, mais c'est l'appellation usuelle.

Propriété 4.1

La seule solution de $(\mathcal{H})$ qui s'annule sur I est la solution nulle.

Remarque 4.6

On peut donc raisonner à la physicienne. Si φ est solution de $(\mathcal{H})$ et *non nulle*, alors

$$\forall x \in I,\ \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln\left(|\varphi(x)|\right) \big) = -a(x)$$

ce qui permet de retrouver facilement la formule de la solution générale de l'équation $(\mathcal{H})$.

Ceci n'est valable que pour résoudre $(\mathcal{H})$!

Propriété 4.2

La solution générale de $(\mathcal{C})$ est somme de la solution générale de $(\mathcal{H})$ et d'une *solution particulière*, que l'on a exprimé en fonction de K. Réciproquement, si on connaît une solution particulière φ_0 de $(\mathcal{E})$, en cherchant les autres solutions de la forme $\varphi = \varphi_0 + \psi$, on s'aperçoit que ψ doit être une solution de $(\mathcal{H})$. Ceci est particulièrement intéressant, lorsque l'on connaît *au moins une* solution de $(\mathcal{E})$.

Exemple 4.1

Ainsi, soit l'équation différentielle

$$y' + x\,y = 1 + x^2$$

Il y a une solution « évidente », $\varphi_0(x) = x$. Donc l'ensemble des solutions sera de la forme

$$S = \left\{ x \mapsto x + k\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ k \in \mathbb{K} \right\}$$

Session `Wxmaxima` 4.2 – Exemples de résolution

```
(%i1) eq(y) := 'diff(y,x)+x*y=1+x^2$
(%i2) ode2(eq(phi(x)),phi(x),x);
```

(%o2) $\phi\,(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,\left(x\,e^{\frac{x^2}{2}} + \%c\right)$

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $\phi\,(x) = \%c\,e^{-\frac{x^2}{2}} + x$

Session Python 4.2 – Exemples de résolution

Comme toute fonction « boîte noire » (dont on ne connaît pas le fonctionnement), il faut se méfier des résultats de `dsolve`. On ne devrait l'utiliser que lorsqu'on sait faire les calculs !

In[11]

```
dsolve(Eq(diff(y(x), x)+x*y(x), 1+x**2), y(x))
```

Out[11]

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + x$$

In[12]

```
dsolve(Eq(diff(y(x), x)+x*y(x), 1+x**2), y(x), ics={y(x0): y0})
```

Out[12]

$$y(x) = x + \left(-x_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} + y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Propriété 4.3 – Variation de la constante

Lorsque l'on a une solution $\varphi_{\mathcal{H}}$ de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à $(\mathcal{E})$, on a cherché une solution de la forme $\boxed{K(x)\,\varphi_{\mathcal{H}}(x)}$, cette méthode s'appelle *la variation de la constante*. Nous la généraliserons plus tard.

此方法叫做常数变易法，对于二阶线性常系数微分方程也有类似的方法。

Propriété 4.4 – Principe de superposition des solutions

La méthode de calcul d'une solution particulière peut-être répartie en plusieurs tâches par le *principe de superposition des solutions*. Si $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle linéaire (du premier ordre), avec un second membre $b(x)$ qui s'écrit

$$b(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x)$$

où les β_k sont des fonctions *continues* de I dans $\mathbb{K}$, alors, on peut introduire les équations différentielles suivantes, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$y' + a(x)\, y = \beta_k(x) \qquad (\mathcal{E}_k)$$

Si φ_k est une solution particulière de $(\mathcal{E}_k)$, alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \text{ est une solution particulière de } (\mathcal{E})}$$

这一定理通常叫做线性微分方程叠加原理，对于二阶线性微分方程也有类似的定理。

Exemple 4.2

Ainsi, soit l'équation

$$y' + x\, y = 1 + x + x^2$$

on peut l'éclater en

$$y' + x\, y = 1 + x^2 \text{ de solution particulière } x \mapsto x$$

et

$$y' + x\, y = x \text{ de solution particulière } x \mapsto 1$$

Ce qui nous donne la solution particulière $x \mapsto 1 + x$ de l'équation initiale.

Remarque importante 4.7

L'unicité de la solution signifie que deux graphes de solutions distinctes ne peuvent pas se couper.

Remarque importante 4.8

L'unicité de la solution à un problème de Cauchy est très importante. Elle nous permet en effet, de montrer des propriétés des solutions *sans les calculer* !

Exemple 4.3

Ainsi, toute solution de l'équation différentielle

$$y' + x \arctan\left(x^2 + 2021\right) y = \sin(x), \ (x \in \mathbb{R})$$

sont toutes paires ! (Heureusement que nous n'avons pas à résoudre cette équation !) En effet, soit φ une solution de cette équation vérifiant $\varphi(0) = a \in \mathbb{R}$, vérifions que $\psi : x \mapsto \varphi(-x)$ est aussi solution

$$\psi'(x) + x \arctan\left(x^2 + 2021\right) \psi(x) = -\varphi'(-x) + x \arctan\left(x^2 + 2021\right) \varphi(-x)$$

or, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi'(-x) + (-x) \arctan\left((-x)^2 + 2021\right) \varphi(-x) = \sin(-x) = -\sin(x)$$

donc [a]

$$\psi'(x) + x \arctan\left(x^2 + 2021\right) \psi(x) = \sin(x)$$

La fonction ψ vérifie de plus la même condition initiale que φ, on obtient par unicité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(-x) = \varphi(x)$$

a. On peut remarquer que le raisonnement fonctionnera toujours lorsque a et b seront des fonctions impaires.

Remarque importante 4.9

L'unicité ne fonctionne que sur l'intervalle I de définition, mais pas sur $[\inf I, \sup I]$. Ainsi, les solutions de l'équation

$$y' - \frac{2}{x}\, y = 0,\ x \in \mathbb{R}_+^*$$

sont les fonctions de la forme $x \mapsto k\, x^2$, $k \in \mathbb{R}$. Elles se prolongent toutes en 0 par la valeur 0, mais $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Il faut être attentif, car sur le dessin, les courbes semblent se couper. Voir la figure 4.1, page 301.

注意到自变量 x 不能取到零点。

Exercice(s) 4.1

4.1.1 Résoudre

$$y' + y = e^x$$

4.1.2 Quelles sont les solutions impaires de

$$y' + e^{x^2}\, y = 0\ ?$$

4.1.3 Montrer que si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(x)\, y = b(x),\ x \in I$$

où a et b sont continues sur I, alors

$$\Big[\exists x \in I,\ f(x) = g(x)\Big] \iff [f = g]$$

4.1.4 Résoudre

$$y' + \tan(x)\, y = \operatorname{cotan}(x),\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

4.1.5 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{x}{3}\ (f(x) + f(0))$$

4.1.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 4.2 – Équation différentielle linéaire du second ordre

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et c une application *continue* définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* l'écriture

$$y'' + a\,y' + b\,y = c(x),\ (x \in I) \qquad (\mathcal{E})$$

1. L'équation $(\mathcal{H})$ définie par
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$
est dite *équation homogène associée à* $(\mathcal{E})$. $c(x)$ s'appelle *le second membre de l'équation* $(\mathcal{E})$.
2. On appelle solution de $(\mathcal{E})$, toute application $\varphi : I \to \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^2$, telle que
$$\forall x \in I,\ \varphi''(x) + a\,\varphi'(x) + b\,\varphi(x) = c(x)$$
3. On appelle *condition initiale*, la donnée de $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
4. On appelle *problème de Cauchy linéaire (du second ordre)* la donnée d'une équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$ et d'une condition initiale $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et on note
$$(\mathcal{C})\ :\ \begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = c(x), & x \in I \\ (x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}, & \text{qu'on écrit parfois } y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$
5. On appelle *solution du problème de Cauchy* $(\mathcal{C})$, toute solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie de plus
$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \varphi'(x_0) = y_1$$

与一阶线性微分方程不同，这里的 a 与 b 并不是函数，而是确定的实数或复数；二阶微分方程通常可以变换成一阶微分方程组，也叫做微分系统。

Session Wxmaxima 4.3 – Résolution d'une équation différentielle du second ordre

```
(%i1) eq : 'diff(y,x,2)+a*'diff(y,x)+b*y=c(x);
```

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+a\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+b\,y=\mathrm{c}\left(x\right)$$

```
(%i2) ode2(eq, y, x);
```

Is $4\,b-a^2$ positive, negative, or zero ?p ;

(%o2) $$y=e^{-\frac{a\,x}{2}}\left(\%k1\,\sin\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right)+\%k2\,\cos\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right)\right)-\frac{e^{-\frac{a\,x}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right)\int e^{\frac{a\,x}{2}}\,\mathrm{c}\left(x\right)\,\sin\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right)dx-2\right.}{\sqrt{4\,b-a^2}}$$

```
(%i3) ode2(eq, y, x);
```

Is $4\,b-a^2$ positive, negative, or zero ?n ;

(%o3) $$y=\frac{\sqrt{a^2-4\,b}\,e^{-\frac{\sqrt{a^2-4\,b}\,x}{2}-\frac{a\,x}{2}}\left(\int e^{\frac{\sqrt{a^2-4\,b}\,x}{2}+\frac{a\,x}{2}}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx-e^{\sqrt{a^2-4\,b}\,x}\int e^{\frac{a\,x}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4\,b}\,x}{2}}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx\right)}{4\,b-a^2}+\%k1\,e^{\frac{\left(\sqrt{a^2-4\,b}-a\right)x}{2}}+$$
$$\%k2\,e^{\frac{\left(-\sqrt{a^2-4\,b}-a\right)x}{2}}$$

```
(%i4) ode2(eq, y, x);
```

Is $4\,b-a^2$ positive, negative, or zero ?z ;

(%o4) $$y=\left(\%k2\,x+\%k1\right)\,e^{-\frac{a\,x}{2}}-e^{-\frac{a\,x}{2}}\left(\int x\,e^{\frac{a\,x}{2}}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx-x\int e^{\frac{a\,x}{2}}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx\right)$$

Remarque 4.10

On constate que

1. Il y a des solutions.
2. Il y a deux paramètres $\%k1$ et $\%k2$.
3. Si $c=0$, les solutions sont de la forme $x\mapsto e^{\alpha\,x}$.
4. La valeur de $a^2-4\,b$ agit sur la forme des solutions.

Session `Python` 4.3 – Résolution d'une équation différentielle du second ordre

On voit ici comment gérer des conditions du type $a^2 - 4\,b < 0$ ou > 0 ou $= 0$.

Remarque importante 4.11

Il est ici très important de signaler que a et b sont réels ! Sinon, `Sympy` les supposera complexes.

`In[13]`

```
a, b = symbols('a b', real=True)
c = Function('c')
d = symbols('d', positive=True)
eq = Eq(diff(y(x), x, x)+a*diff(y(x), x)+b*y(x), c(x))
eq
```

`Out[13]`

$$a\frac{d}{dx}y(x) + by(x) + \frac{d^2}{dx^2}y(x) = c(x)$$

`In[14]` – Cas où $a^2 - 4\,b > 0$

```
dsolve(eq, y(x))
```

`Out[14]`

$$y(x) = C_1 e^{\frac{x\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}} + C_2 e^{\frac{x\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}} - \frac{e^{\frac{x\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}} \int c(x) e^{\frac{ax}{2}} e^{\frac{x\sqrt{a^2-4b}}{2}}\, dx}{\sqrt{a^2-4b}} + \frac{e^{\frac{x\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}} \int c(x) e^{\frac{ax}{2}} e^{-\frac{x\sqrt{a^2-4b}}{2}}\, dx}{\sqrt{a^2-4b}}$$

In[15] – Cas où $a^2 - 4 = 0$

```
dsolve(eq.subs({b: a**2/4}), y(x))
```

Out[15]

$$y(x) = \left(C_1 + x\left(C_2 + \int c(x)e^{\frac{ax}{2}}\,dx\right) - \int xc(x)e^{\frac{ax}{2}}\,dx\right)e^{-\frac{ax}{2}}$$

In[16] – Cas où $a^2 - 4\,b < 0$

```
dsolve(eq.subs({b: (a**2+d)/4}), y(x)).subs({d: 4*b-a**2})
```

Out[16]

$$y(x) = \left(\left(C_1 - \frac{2\int c(x)e^{\frac{ax}{2}}\sin\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right)dx}{\sqrt{-a^2+4b}}\right)\cos\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right) + \left(C_2 + \frac{2\int c(x)e^{\frac{ax}{2}}\cos\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right)dx}{\sqrt{-a^2+4b}}\right)\sin\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right)\right)e^{-\frac{ax}{2}}$$

Théorème 4.2 – Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy

Soit $(\mathcal{C})$ un problème de Cauchy linéaire du second ordre, comme dans la définition 4.2, page 249, alors il existe une unique solution φ à ce problème de Cauchy.

Démonstration

1. *(Unicité)* Supposons qu'il y a deux solutions φ_1 et φ_2 du même problème de Cauchy $(\mathcal{C})$, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est solution du problème de Cauchy suivant
$$(\mathcal{C}_0) \;:\; \begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = 0, & \text{soit } (\mathcal{H}) \\ y(x_0) = 0 \text{ et } y'(x_0) = 0. \end{cases}$$
Nous allons donc nous intéresser à la résolution de $(\mathcal{H})$.
2. *Résolution de $(\mathcal{H})$.* Nous allons, suite à la remarque faite précédemment, chercher des solutions de la forme $x \mapsto e^{\alpha\,x}$, alors
$$\left[x \mapsto e^{\alpha\,x} \text{ solution de } \mathcal{H}\right] \iff \left[\alpha \text{ vérifie } \alpha^2 + a\,\alpha + b = 0\right]$$
L'équation
$$\boxed{\alpha^2 + a\,\alpha + b = 0}$$
s'appelle *l'équation caractéristique de* $(\mathcal{H})$.
   - *Prenons* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En ce cas, deux situations peuvent se passer

   (a) $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$, alors on trouve deux solutions distinctes α_1 et α_2 de l'équation caractéristique. On a donc, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ qui vérifie
   $$S_{\mathcal{H}} \supset \left\{x \mapsto \lambda\,e^{\alpha_1\,x} + \mu\,e^{\alpha_2\,x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$
   (b) $\Delta = 0$, alors on trouve une unique solution α_0 de l'équation caractéristique. On a alors
   $$S_{\mathcal{H}} \supset \{x \mapsto \lambda\,e^{\alpha_0\,x},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$$
   A-t-on toutes les solutions ? Pour les chercher, nous allons, comme dans l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, chercher les solutions sous une forme particulière, par *variation de la constante* si α est une solution de l'équation caractéristique, cherchons les solutions φ sous la forme
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \lambda(x)\,e^{\alpha\,x}}$$
   Il vient, pour $x \in \mathbb{R}$
   $$e^{\alpha\,x}\,\varphi''(x) + (2\alpha + a)\,e^{\alpha\,x}\,\varphi'(x) + \underbrace{(\alpha^2 + a\,\alpha + b)}_{=0}\,e^{\alpha\,x}\,\varphi(x) = 0 \tag{4.1}$$
   soit
   $$\varphi''(x) + (2\,\alpha + a)\,\varphi'(x) = 0$$
   - Reprenons les deux cas pour Δ.

   (c) Si $\Delta \neq 0$ et si $\alpha = \alpha_1$, alors on trouve
   $$\lambda(x) = A + B\,e^{-(2\alpha_1 + a)\,x} \text{ soit } \varphi(x) = A\,e^{\alpha_1\,x} + B\,\underbrace{e^{-(\alpha_1 + a)\,x}}_{e^{\alpha_2\,x}}$$

Finalement

$$\boxed{S_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto \lambda\, e^{\alpha_1\, x} + \mu\, e^{\alpha_2\, x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$

Voir la session `Wxmaxima` 4.4, page ci-contre ou la session `Python` 4.4, page suivante.

(d) Si $\Delta = 0$, $\alpha_0 = -a/2$, alors on trouve

$$\lambda(x) = A + B\, x$$

Finalement

$$\boxed{S_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto \lambda\, e^{\alpha_0\, x} + \mu\, x\, e^{\alpha_0\, x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$

Voir la session `Wxmaxima` 4.5, page ci-contre ou la session `Python` 4.5, page 258.

(Unicité, conclusion) Si l'on cherche une solution de $(\mathcal{H})$ qui vérifie $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi'(x_0) = 0$, on trouve $\varphi = 0$. Ce qui montre l'unicité de la solution de $(\mathcal{C})$.

3. *(Existence).* Si l'on refait le même calcul que dans l'équation (4.1), 253, mais *avec* le second membre. On trouve

$$\forall x \in I,\ \lambda''(x) + (2\,\alpha + a)\,\lambda'(x) = e^{-\alpha\, x}\, c(x)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en λ'. La connaissance de $\lambda'(x_0)$ nous donne l'existence (et l'unicité) de λ', la connaissance de $\lambda(x_0)$ nous donne l'existence (et l'unicité) de λ, donc de φ, vérifiant le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$. Il est même possible d'effectuer le calcul[a], voir la session `Wxmaxima` 4.6, page 256 ou la session `Python` 4.5, page 258.

- Finalement (formules inutiles, se souvenir de la démarche pour les obtenir)

(a) Si $\Delta \neq 0$. On trouve (λ etμ étant deux valeurs déterminées par les conditions initiales)

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \underbrace{\lambda\, e^{\alpha_1\, x} + \mu\, e^{\alpha_2\, x}}_{\text{solution de } (\mathcal{H})} + \underbrace{e^{\alpha_1\, x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)\, t}\left(\int_{x_0}^{t} e^{-\alpha_2\, u}\, c(u)\, \mathrm{d}u\right)\, \mathrm{d}t\right)}_{\text{solution particulière}}$$

(b) Si $\Delta = 0$. On trouve (λ etμ étant deux valeurs déterminées par les conditions initiales)

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \underbrace{\lambda\, e^{\alpha_0\, x} + \mu\, x\, e^{\alpha_0\, x}}_{\text{solution de } (\mathcal{H})} + \underbrace{e^{\alpha_0\, x}\left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} e^{-\alpha_0\, u}\, c(u)\, \mathrm{d}u\right)\, \mathrm{d}t\right)}_{\text{solution particulière}}$$

Voir la session `Wxmaxima` 4.7, page 257 ou la session `Python` 4.5, page 258.

---

a. Résolution de l'équation homogène, puis variation de la constante...

Session Wxmaxima 4.4 – Résolution de l'équation homogène

```
(%i1) eq : 'diff(phi(x),x,2)-(alpha[1]+alpha[2])*'diff(phi(x),x)+
      alpha[1]*alpha[2]*phi(x);
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\,(x) - (\alpha_2+\alpha_1)\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\,(x)\right) + \alpha_1\,\alpha_2\,\phi\,(x)$

```
(%i2) ode2(eq, phi(x), x);
```

Is $\alpha_2-\alpha_1$ zero or nonzero ?n ;

(%o2) $\phi\,(x) = \%k1\,e^{\frac{\left(\sqrt{(-\alpha_2-\alpha_1)^2-4\,\alpha_1\,\alpha_2}+\alpha_2+\alpha_1\right)\,x}{2}} + \%k2\,e^{\frac{\left(-\sqrt{(-\alpha_2-\alpha_1)^2-4\,\alpha_1\,\alpha_2}+\alpha_2+\alpha_1\right)\,x}{2}}$

```
(%i3) radcan(%);
```

(%o3) $\phi\,(x) = \%k1\,e^{\alpha_2\,x} + \%k2\,e^{\alpha_1\,x}$

Session Wxmaxima 4.5 – Résolution de l'équation homogène ($\Delta = 0$)

```
(%i4) ode2(eq, phi(x), x);
```

Is $\alpha_2-\alpha_1$ zero or nonzero ?z ;

(%o4) $\phi\,(x) = (\%k2\,x + \%k1)\;e^{\frac{(\alpha_2+\alpha_1)\,x}{2}}$

Session Python 4.4 – Résolution de l'équation homogène

On traite aussi les deux cas séparément ($\alpha_1 \neq \alpha_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$)

In[17]

```
alpha = IndexedBase('\\alpha')
phi = Function('\\phi')
eq = diff(phi(x), x, x)-(alpha[1]+alpha[2]) * \
    diff(phi(x), x)+alpha[1]*alpha[2]*phi(x)
```

```
eq
```

Out[17]

$$-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{d}{dx}\phi(x)+\phi(x)\alpha_1\alpha_2+\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$$

In[18] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
dsolve(eq, phi(x))
```

Out[18]

$$\phi(x)=C_1e^{x\alpha_1}+C_2e^{x\alpha_2}$$

In[19] – Cas où $\alpha_1 = \alpha_2$

```
dsolve(eq.subs({alpha[2]: alpha[1]}), phi(x))
```

Out[19]

$$\phi(x)=(C_1+C_2x)\,e^{x\alpha_1}$$

Session Wxmaxima 4.6 – Résolution avec second membre

```
(%i1) eq : 'diff(phi(x),x,2)-(alpha[1]+alpha[2])*'diff(phi(x),x)+
      alpha[1]*alpha[2]*phi(x)=c(x);
```

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\,(x)-(\alpha_2+\alpha_1)\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\,(x)\right)+\alpha_1\,\alpha_2\,\phi\,(x)=\mathrm{c}\,(x)$$

(%i2) `subst([phi(x)=mu(x)*exp(alpha[1]*x)],eq);`

(%o2) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\left(e^{\alpha_1\,x}\,\mu\left(x\right)\right)-\left(\alpha_2+\alpha_1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\left(e^{\alpha_1\,x}\,\mu\left(x\right)\right)\right)+\alpha_1\,\alpha_2\,e^{\alpha_1\,x}\,\mu\left(x\right)=\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i3) `expand(%),diff;`

(%o3) $$e^{\alpha_1\,x}\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mu\left(x\right)\right)-\alpha_2\,e^{\alpha_1\,x}\left(\frac{d}{d\,x}\,\mu\left(x\right)\right)+\alpha_1\,e^{\alpha_1\,x}\left(\frac{d}{d\,x}\,\mu\left(x\right)\right)=\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i4) `ratsimp(%/exp(alpha[1]*x));`

(%o4) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mu\left(x\right)+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mu\left(x\right)\right)=e^{-\alpha_1\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i5) `subst(['diff(mu(x),x)=psi(x),'diff(mu(x),x,2)='diff(psi(x),x)],%);`

(%o5) $$\frac{d}{d\,x}\,\psi\left(x\right)+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\,\psi\left(x\right)=e^{-\alpha_1\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i6) `ode2(%,psi(x),x);`

(%o6) $$\psi\left(x\right)=e^{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,x}\left(\int e^{-\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,x-\alpha_1\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx+\%c\right)$$

(%i7) `ratsimp(%);`

(%o7) $$\psi\left(x\right)=e^{-\alpha_1\,x}\left(e^{\alpha_2\,x}\int e^{-\alpha_2\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)dx+\%c\,e^{\alpha_2\,x}\right)$$

Session `Wxmaxima` 4.7 – Résolution avec second membre ($\Delta=0$)

(%i1) `eq : 'diff(phi(x),x,2)-(2*alpha[0])*'diff(phi(x),x)+`
`alpha[0]^2*phi(x)=c(x);`

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\left(x\right)-2\,\alpha_0\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\left(x\right)\right)+\alpha_0^2\,\phi\left(x\right)=\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i2) `subst([phi(x)=mu(x)*exp(alpha[0]*x)],eq);`

(%o2) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(e^{\alpha_0\,x}\,\mu\left(x\right)\right)-2\,\alpha_0\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(e^{\alpha_0\,x}\,\mu\left(x\right)\right)\right)+\alpha_0^2\,e^{\alpha_0\,x}\,\mu\left(x\right)=\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i3) `expand(%),diff;`

(%o3) $$e^{\alpha_0\,x}\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mu\left(x\right)\right)=\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i4) `ratsimp(%/exp(alpha[0]*x));`

(%o4) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mu\left(x\right)=e^{-\alpha_0\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i5) `subst(['diff(mu(x),x,2)='diff(psi(x),x)],%);`

(%o5) $$\frac{d}{d\,x}\,\psi\left(x\right)=e^{-\alpha_0\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)$$

(%i6) `ode2(%,psi(x),x);`

(%o6) $$\psi\left(x\right)=\int e^{-\alpha_0\,x}\,\mathrm{c}\left(x\right)\,dx+\%c$$

Session `Python` 4.5 – Résolution avec second membre

On différencie aussi les deux cas...

In[20]

```
eq2 = Eq(eq, c(x))
mu, psi = symbols('\\mu \\psi', cls=Function)
eq2.subs({phi(x): mu(x)*exp(alpha[1]*x)})
```

Out[20]

$$-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)e^{x\alpha_1}+\mu(x)e^{x\alpha_1}\alpha_1\alpha_2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu(x)e^{x\alpha_1}=c(x)$$

In[21] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
_.doit()
```

Out[21]

$$-\left(\mu(x)e^{x\alpha_1}\alpha_1 + e^{x\alpha_1}\frac{d}{dx}\mu(x)\right)(\alpha_1+\alpha_2) + \left(\mu(x)\alpha_1^2 + 2\frac{d}{dx}\mu(x)\alpha_1 + \frac{d^2}{dx^2}\mu(x)\right)e^{x\alpha_1} + \mu(x)e^{x\alpha_1}\alpha_1\alpha_2 = c(x)$$

In[22] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
_.simplify()
```

Out[22]

$$c(x) = \left(\frac{d}{dx}\mu(x)\alpha_1 - \frac{d}{dx}\mu(x)\alpha_2 + \frac{d^2}{dx^2}\mu(x)\right)e^{x\alpha_1}$$

In[23] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
_.subs({diff(mu(x), x): psi(x)})
```

Out[23]

$$c(x) = \left(\psi(x)\alpha_1 - \psi(x)\alpha_2 + \frac{d}{dx}\psi(x)\right)e^{x\alpha_1}$$

In[24] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
dsolve(_, psi(x))
```

Out[24]

$$\psi(x) = \left(C_1 + \int c(x)e^{-x\alpha_2}\,dx\right)e^{-x(\alpha_1-\alpha_2)}$$

In[25] – Cas où $\alpha_1 \neq \alpha_2$

```
_.subs({psi(x): diff(mu(x), x)})
```

Out[25]

$$\frac{d}{dx}\mu(x) = \left(C_1 + \int c(x)e^{-x\alpha_2}\,dx\right)e^{-x(\alpha_1-\alpha_2)}$$

In[26] – Cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$

```
Eq(eq.subs({alpha[1]: alpha[0], alpha[2]: alpha[0]}), c(x))
```

Out[26]

$$\phi(x)\alpha_0^2 - 2\frac{d}{dx}\phi(x)\alpha_0 + \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = c(x)$$

In[27] – Cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$

```
_.subs({phi(x): mu(x)*exp(alpha[0]*x)})
```

Out[27]

$$\mu(x)e^{x\alpha_0}\alpha_0^2 - 2\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)e^{x\alpha_0}\alpha_0 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu(x)e^{x\alpha_0} = c(x)$$

In[28] – Cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$

```
_.doit().simplify()
```

Out[28]

$$c(x) = e^{x\alpha_0} \frac{d^2}{dx^2} \mu(x)$$

In[29] – Cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$

```
dsolve(_.subs({diff(mu(x), x): psi(x)}), psi(x))
```

Out[29]

$$\psi(x) = C_1 + \int c(x) e^{-x\alpha_0}\, dx$$

Remarque 4.12

Il y a beaucoup de remarques à faire

1. La solution générale de $(\mathcal{H})$ dépend de *deux* paramètres λ et μ.
2. La solution générale de $(\mathcal{E})$ est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée.

La formule pour trouver une solution particulière est particulièrement désagréable. Heureusement, il y a plusieurs situations ou des simplifications sont possibles

1. *Principe de superposition des solutions.* Lorsque le second membre $c(x)$ s'écrit comme somme de fonctions

$$c(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x)$$

et que l'on connaît des solutions particulières ψ_k des équations déduites

$$y'' + a\,y' + b\,y = \gamma_k(x)$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k \text{ est une solution particulière de } (\mathcal{E})$$

2. *Second membre particulier.* Lorsque le second membre a la forme particulière suivante

$$c(x) = P(x)\,e^{\mu\,x}, \text{ où } \mu \in \mathbb{K} \text{ et } P \text{ polynomiale}$$

alors, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)\,e^{\mu\,x}$, où Q est une fonction polynomiale. On peut même prédire son degré

$$\deg Q = \begin{cases} \deg P & \text{si } \mu \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ \deg P + 1 & \text{si } \Delta \neq 0 \text{ et } \mu \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ \deg P + 2 & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } \mu = \alpha_0 \end{cases}$$

这里给出了几种典型的二阶常系数微分方程的解法，希望读者结合例题进一步理解。

Exemple 4.4

Soit l'équation différentielle

$$y'' + y = x^2\,\sin(x) + \cosh(x), \quad (x \in \mathbb{R})$$

à résoudre.

$\mathcal{H}$

L'équation caractéristique est $\alpha^2 + 1 = 0$, dont les solutions sont $\pm i$. Donc

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto \lambda\,e^{i\,x} + \mu\,e^{-i\,x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

Solution particulière

Le second membre peut s'écrire

$$x^2\,\sin(x)+\cosh(x)=\frac{x^2}{2i}\,e^{i\,x}-\frac{x^2}{2i}\,e^{-i\,x}+\frac{1}{2}\,e^{x}+\frac{1}{2}\,e^{-x}$$

Il suffit de trouver des solutions pour chacune des 4 équations obtenues. Voir la session **Wxmaxima** 4.8, de la présente page ou la session **Python** 4.6, page suivante.

Session **Wxmaxima** 4.8 – Second membre particulier

(%i1)
```
eq1 : 'diff(y,x,2)+y=x^2*exp(%i*x)/(2*%i);
```

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+y=-\frac{i\,x^2\,e^{i\,x}}{2}$$

(%i2)
```
subst([y=(a*x^3+b*x^2+c*x+d)*exp(%i*x)],eq1);
```

(%o2) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(\left(a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d\right)\,e^{i\,x}\right)+\left(a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d\right)\,e^{i\,x}=-\frac{i\,x^2\,e^{i\,x}}{2}$$

(%i3)
```
ratsimp(ev(expand(%),diff));
```

(%o3) $$\left(6\,i\,a\,x^2+(4\,i\,b+6\,a)\,x+2\,i\,c+2\,b\right)\,e^{i\,x}=-\frac{i\,x^2\,e^{i\,x}}{2}$$

(%i4)
```
ratsimp(%/exp(%i*x));
```

(%o4) $$6\,i\,a\,x^2+(4\,i\,b+6\,a)\,x+2\,i\,c+2\,b=-\frac{i\,x^2}{2}$$

(%i5)
```
solve(makelist(coeff(lhs(%),x,k)=coeff(rhs(%),x,k),k,0,2),[a,b,c,d]);
```

(%o5) $$[[a=-\frac{1}{12},b=-\frac{i}{8},c=\frac{1}{8},d=\%r1]]$$

(%i6)
```
eq2 : 'diff(y,x,2)+y=exp(x)/2;
```

(%o6) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+y=\frac{e^{x}}{2}$$

```
(%i7) subst([y=a*exp(x)],eq2);
```

(%o7) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,(a\,e^x) + a\,e^x = \frac{e^x}{2}$

```
(%i8) ratsimp(ev(expand(%),diff));
```

(%o8) $2\,a\,e^x = \frac{e^x}{2}$

```
(%i9) ratsimp(%/exp(x));
```

(%o9) $2\,a = \frac{1}{2}$

```
(%i10) solve(%,a);
```

(%o10) $[a = \frac{1}{4}]$

Session Python 4.6 – Second membre particulier

Quand le second membre est de la forme $P(x)\,e^{\alpha\,x}$, où P est polynomiale et $\alpha \in \mathbb{C}$, on sait faire !

In[30]

```
eq1 = Eq(diff(y(x), x, x)+y(x), x**2*exp(I*x)/(2*I))
```

In[31]

```
a, b, c, d = symbols('a b c d')
eq1.subs({y(x): (a*x**3+b*x**2+c*x+d)*exp(I*x)}).doit()
```

Out[31]

$$\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^{ix} + \left(-ax^3 + 6ax - bx^2 + 2b - cx - d + 2i\left(3ax^2 + 2bx + c\right)\right) e^{ix} = -\frac{ix^2 e^{ix}}{2}$$

In[32]

```
_.simplify()
```

Out[32]

$$\frac{ix^2 e^{ix}}{2} = -2\left(3ax + b + i\left(3ax^2 + 2bx + c\right)\right) e^{ix}$$

In[33]

```
(_.rhs-_.lhs)*exp(-I*x)
```

Out[33]

$$\left(-\frac{ix^2 e^{ix}}{2} - 2\left(3ax + b + i\left(3ax^2 + 2bx + c\right)\right) e^{ix}\right) e^{-ix}$$

In[34]

```
_.expand()
```

Out[34]

$$-6iax^2 - 6ax - 4ibx - 2b - 2ic - \frac{ix^2}{2}$$

In[35]

```
solve([_.coeff(x, k) for k in range(3)], [a, b, c, d])
```

Out[35]

$$\left\{a : -\frac{1}{12},\ b : -\frac{i}{8},\ c : \frac{1}{8}\right\}$$

In[36]

```
eq2 = Eq(diff(y(x), x, x)+y(x), exp(x)/2)
```

In[37]

```
eq2.subs({y(x): a*exp(x)}).doit()
```

Out[37]

$$2ae^{x} = \frac{e^{x}}{2}$$

In[38]

```
solve(_, a)
```

Out[38]

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

Remarque importante 4.13

Assez souvent a et b sont dans $\mathbb{R}$ et c est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous serions intéressés par avoir des solutions réelles. Comment fait-on ?

— On résout dans $\mathbb{C}$;
— parmi les solutions trouvées, on cherche celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$;
— on peut diminuer le travail, en remarquant que, lorsque a et b sont réels et c à valeurs complexes, si φ est solution de $y'' + a\,y' + b\,y = c(x)$, alors $\overline{\varphi} : x \mapsto \overline{\varphi(x)}$ est solution de $y'' + a\,y' + b\,y = \overline{c(x)}$.

这里给出了解几种典型的二阶常系数微分方程的思路，希望读者结合例题进一步理解。

On obtient donc, pour l'équation homogène $(\mathcal{H})$ (lorsque a et b sont réels)

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$, alors, les solutions réelles sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto \lambda\, e^{\alpha_1\, x} + \mu\, e^{\alpha_2\, x}, \quad \boxed{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors, les solutions réelles sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto \lambda\, e^{\alpha_0\, x} + \mu\, x\, e^{\alpha_0\, x}, \quad \boxed{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors α_1 et α_2 sont deux complexes conjugués de partie réelle β et de partie imaginaire ω, alors, les solutions réelles sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto \lambda\, e^{\beta\, x}\, \cos(\omega\, x) + \mu\, e^{\beta\, x}\, \sin(\omega\, x), \quad \boxed{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}}$$

二阶线性常系数齐次微分方程（系数为实数），我们通过求解特征方程提供了完整的解题方法，需熟练掌握。

Session Wxmaxima 4.9 – Solutions réelles

```
(%i1) eq : 'diff(y,x,2)+a*'diff(y,x)+b*y;
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+a\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+b\,y$

```
(%i2) assume(a^2-4*b>0);
```

(%o2) $[a^2>4\,b]$

```
(%i3) ode2(eq,y,x);
```

(%o3) $y=\%k1\,e^{\frac{\left(\sqrt{a^2-4\,b}-a\right)\,x}{2}}+\%k2\,e^{\frac{\left(-\sqrt{a^2-4\,b}-a\right)\,x}{2}}$

```
(%i4) forget([a^2>4*b]);
```

(%o4) $[[a^2>4\,b]]$

```
(%i5) assume(equal(a^2,4*b));
```

(%o5) $[\mathrm{equal}\left(a^2,4\,b\right)]$

```
(%i6) ode2(eq,y,x);
```

(%o6) $y=\left(\%k2\,x+\%k1\right)\,e^{-\frac{a\,x}{2}}$

```
(%i7) forget([equal(a^2,4*b)]);
```

(%o7) $[[\mathrm{equal}\left(a^2,4\,b\right)]]$

```
(%i8) assume(a^2<4*b);
```

(%o8) $[4\,b>a^2]$

(%i9) `ode2(eq,y,x);`

(%o9) $$y = e^{-\frac{a\,x}{2}} \left(\%k1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right) + \%k2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\,b-a^2}\,x}{2}\right)\right)$$

Session `Python` 4.7 – Solutions réelles

On procède comme précédemment...

In[39]

```
y = Function('y')
```

In[40]

```
a, b = symbols('a b', real=True)
```

In[41]

```
eq = diff(y(x), x, x)+a*diff(y(x), x)+b*y(x)
```

In[42] – Cas où $a^2 - 4 \geq 0$

```
dsolve(eq, y(x))
```

Out[42]

$$y(x) = C_1 e^{\frac{x\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}} + C_2 e^{\frac{x\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)}{2}}$$

In[43] – Cas où $a^2 - 4 < 0$

```
c = symbols('c', positive=True)
dsolve(eq.subs({b: (a**2+c)/4}), y(x)).subs({c: 4*b-a**2})
```

Out[43]

$$y(x) = \left(C_1 \sin\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{x\sqrt{-a^2+4b}}{2}\right)\right) e^{-\frac{ax}{2}}$$

In[44] – Cas où $b^2 - 4\,b = 0$

```
dsolve(eq.subs({b: a**2/4}), y(x))
```

Out[44]

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{ax}{2}}$$

Remarque importante 4.14

L'existence et l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy ne fonctionne que parce que *les conditions initiales sont en un même point* x_0 ! Ainsi, le problème

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0 \text{ et } y(\pi) = 1$$

n'a pas de solution !

Démonstration

La solution générale de $y'' + y = 0$ est de la forme $\varphi : x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$. La condition initiale $y(0) = 0$, nous impose $\mu = 0$, mais alors,

$$\varphi(\pi) = \lambda \sin(\pi) = 0 \neq 1$$

Remarque importante 4.15

Lorsque y_0 ou y_1 est nul, on trouve, en faisant varier l'autre condition initiale, une famille de solutions de $(\mathcal{H})$ qui sont toutes proportionnelles entre elles !

Démonstration

— Si $y_0 = 0$ et φ_1 solution du problème de Cauchy où $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = y_1$ et φ_2 solution de la même équation différentielle mais avec les conditions initiales $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = y_2 \neq 0$, alors

$$\varphi_1 \text{ et } \frac{y_1}{y_2}\,\varphi_2 \text{ sont solutions du même problème de Cauchy } \begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = 0 \\ y(x_0) = 0 \text{ et } y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Donc

$$\varphi_1 = \frac{y_1}{y_2}\,\varphi_2$$

— Si φ_1 est solution du problème de Cauchy avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = 0$ et φ_2 avec les conditions initiales $y(x_0) = z_0 \neq 0$ et $y'(x_0) = 0$, alors, de même

$$\varphi_1 = \frac{y_0}{z_0}\,\varphi_2$$

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions réelles)

$$\begin{aligned}
y'' + a^2\,y &= 0 \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*) \\
y'' - a^2\,y &= 0 \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*) \\
y'' + y' + y &= 0 \\
y'' + y' - 2\,y &= x\,e^x \\
y'' + y' - 2\,y &= (x+2)\,e^{-x} \\
y'' + y' - 2\,y &= x^3 + 1 \\
y'' + y &= \cos^2(x) \\
y'' + y &= |x|
\end{aligned}$$

4.2.2 Résoudre les équations différentielles suivantes, avec conditions initiales (solutions réelles)

$$
\begin{array}{rcl}
y'' - 2\,y' + y = x\,\cosh(x) - x^2 & \text{avec} & y(0) = a,\ y'(0) = b \\
y'' - 2\,y' + 2\,y = e^x\,\sin^2(x) & \text{avec} & y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \\
 & & \text{puis, étudier les limites en } \pm\infty \\
 & & \\
y'' + y = x^2 + x + 1 & \text{avec} & y(0) = 0,\ y(a) = \lambda,\ (a \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})
\end{array}
$$

4.2.3 Résoudre l'équation différentielle suivante (solutions complexes)

$$y'' - (5\,i + 2)\,y' + (7\,i - 9)\,y = 0$$

4.2 Calculs

4.2.1 Premier ordre

Il arrive souvent que le problème soit posé d'une manière un peu différente. Ainsi, rencontre-t-on souvent la question suivante *Soit a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, quelles sont les solutions de l'équation différentielle*

$$(\mathcal{E}) \qquad a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

Discuter le problème de Cauchy.

Remarque importante 4.16

Par rapport aux définitions et au théorème de Cauchy-Lipschitz, *ce n'est pas une équation différentielle.* En effet, dans ceux-ci l'équation différentielle avait un coefficient 1 devant y'.

Pour différencier les deux situations, nous appellerons $(\mathcal{E})$ une *expression différentielle*. Pour étudier cette expression différentielle, il faut procéder en plusieurs étapes

1. (*Théorie*) Pour pouvoir appliquer le théorème pour les équations linéaires du premier ordre, il faut mettre l'équation différentielle sous la bonne forme

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}\,y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

mais ceci n'a de sens que sur

$$\Delta = I \setminus \{x \in I,\ a(x) = 0\}$$

Très souvent, Δ ne sera plus un intervalle, mais une réunion d'intervalles disjoints deux à deux (que nous supposerons ici finie). (Voir l'exemple 4.5, de la présente page).

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{p} I_k$$

Le théorème ne nous assure l'existence de solutions sur chaque I_k, *mais pas sur tout* I !

2. (*Pratique*) Le schéma est le suivant
   — On résout chaque équation différentielle sur I_k.
   — On essaye de recoller les solutions aux points de discontinuité pour construire d'éventuelles solutions sur I, c'est-à-dire des fonctions φ vérifiant φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$a(x)\,\varphi'(x) + b(x)\,\varphi(x) = c(x)$$

Exemple 4.5

Ainsi, si nous considérons l'expression différentielle

$$\sin(x)\,y' + \cos(x)\,y = \tan(x), \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

on a

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \Delta = I \setminus \{0\},\ p = 2,\ I_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\text{ et } I_2 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Exemple 4.6 – Recollement

Soit l'expression différentielle suivante

$$(\mathcal{E}) \qquad (1-x^2)\,y' - x\,y = 1$$

De l'expression à l'équation

Ici

$$\Delta = I_1 \cup I_2 \cup I_3, \text{ où } I_1 =]-\infty, -1[,\ I_2 =]-1, 1[\text{ et } I_3 =]1, +\infty[$$

On résout sur chaque intervalle I_k

Résolution sur I_1 et I_3

$x^2 - 1 > 0$, on obtient

— *Équation homogène.*

$$\varphi_0(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$

— *Variation de la constante.*

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ d'où } \lambda(x) = -\ln\left(\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)$$

— *Bilan.* Les solutions sont pour $k \in \{1, 3\}$ de la forme

$$\forall x \in I_k,\ \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\lambda_k - \ln\left(\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)\right)$$

Résolution sur I_2

on obtient

— *Équation homogène.*

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— *Variation de la constante.*

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ d'où } \lambda(x) = \arcsin(x)$$

— *Bilan.* Les solutions sur I_2 sont de la forme

$$\forall x \in I_2,\ \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\lambda_2 + \arcsin(x)\right)$$

Recollements

Nous avons trouvés des solutions définies sur chaque I_k, mais existe-t-il des solutions définies sur des intervalles plus grands ? De quelle classe sont-elles ?

— *Recollement par continuité.* Pour qu'une solution sur I_1 se recolle avec une solution de I_2, il faut

$$\lim_{x\to -1^-} \varphi_1(x) = \lim_{x\to -1^+} \varphi_2(x)$$

soit, premièrement, que ces limites existent, et deuxièmement, qu'elles soient égales, or

$$\left(\left[\lim_{x\to -1^-} \varphi_1(x) \text{ existe}\right] \iff \left[\lambda_1 = 0\right]\right) \text{ et } \left(\left[\lim_{x\to -1^+} \varphi_2(x) \text{ existe}\right] \iff \left[\lambda_2 = \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

on vérifie alors que la valeur commune est égale (à 1).
De même, en 1, on peut recoller une solution sur I_2 avec une solution sur I_3, si

$$\lambda_3 = 0 \text{ et } \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$$

La fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{-\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(x)\right) & \text{si } -1 < x < 1, \end{cases}$$

est continue sur $I_1 \cup \{-1\} \cup I_2$ et est une solution de $\mathcal{E}$ sur I_1 et sur I_2. Puisque nous n'avons pas (encore) montré que φ est dérivable en -1, l'expression

$$(1-x^2)\,\varphi'(x) - x\,\varphi(x) = 1$$

n'a pas nécessairement de sens pour $x = -1$.

▶ On a donc deux solutions définies respectivement sur $I_1 \cup I_2$ et $I_2 \cup I_3$, mais aucune sur tout $\mathbb{R}$!

— *Recollement* $\mathscr{C}^1$. Les fonctions obtenues sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$? Pour le savoir, il suffit de chercher les limites des dérivées de ces fonctions respectivement en -1 et 1. Un simple calcul de limite nous montre que (pour $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \pi/2$)

$$\lim_{x\to -1^-} \varphi_1'(x) = \lim_{x\to -1^+} \varphi_2'(x) = \frac{1}{3}$$

et, de même (pour $\lambda_2 = -\pi/2$ et $\lambda_3 = 0$)

$$\lim_{x\to+1^-} \varphi_2'(x) = \lim_{x\to+1^+} \varphi_3'(x) = \frac{1}{3}$$

Les fonctions obtenues sont bien de classe $\mathscr{C}^1$.

这里由于方程($\mathcal{E}$) 并不是标准的一阶线性微分方程，通过变换成几个分段定义域内标准线性微分方程来求解，最后通过函数左极限等于右极限的方法得到在全定义域上的解函数（积分曲线）。

Session Wxmaxima 4.10 – Exemple de recollement

ifthenelse

```
(%i1)  phi[1](x) := if x<-1 then -log(-x-sqrt(x^2-1))/sqrt(x^2-1)
       elseif x=-1 then 1
       else 1/sqrt(1-x^2)*(%pi/2+asin(x))$
(%i2)  phi[2](x) := if x<1 then (asin(x)-%pi/2)/sqrt(1-x^2)
       elseif x=1 then -1
       else -1/sqrt(x^2-1)*log(x+sqrt(x^2-1))$
(%i3)  load(draw)$
(%i4)  draw2d(
           color=black,
           yrange=[-4,4],
           explicit(phi[1](x),x,-2,0.99),
           color=blue,
           explicit(phi[2](x),x,-0.99,2),
           terminal=wxt)$
```

Voir la figure 4.2, page 302.

Session Python 4.8 – Exemple de recollement

Pour tracer les graphiques, on a besoin de bibliothèques (*packages*) numériques (`numpy`, `math`) et graphique (`matplotlib.pyplot`). Pour ne pas mélanger les objets, nous nommons ces bibliothèques par un nom plus court (`np`, `m` et `plt`), ce qui nous oblige à préfixer les fonctions que nous voulons utiliser....

In[45]

```python
import numpy as np
import math as m


def phi1(x):
    if (x < -1):
        return(-m.log(-x-m.sqrt(x**2-1))/m.sqrt(x**2-1))
    elif (x == -1):
        return(1)
    else:
        return(1/m.sqrt(1-x**2)*(m.pi/2+m.asin(x)))
```

In[46]

```python
def phi2(x):
    if (x < 1):
        return((m.asin(x)-m.pi/2)/m.sqrt(1-x**2))
    elif (x == 1):
        return(-1)
    else:
        return(-1/m.sqrt(x**2-1)*m.log(x+m.sqrt(x**2-1)))
```

In[47]

```python
import matplotlib.pyplot as plt

x1 = np.linspace(-2, 0.99, 200)
x2 = np.linspace(-0.99, 2, 200)
plt.plot(x1, [phi1(i) for i in x1], label='phi1')
plt.plot(x2, [phi2(i) for i in x2], label='phi2')
plt.legend()
```

```python
plt.savefig("Graphiques/recollt.pdf")
```

Voir la figure 4.3, page 303.

Remarque importante 4.17

Que devient le résultat d'existence et d'unicité au problème de Cauchy ?

— *Il n'y a plus nécessairement existence* lorsque la condition initiale concerne une valeur

$$x_0 \text{ telle que } a(x_0) = 0$$

— *Il n'y plus nécessairement unicité (y compris pour un x_0 quelconque).*

Exemple 4.7 – Non existence

Ainsi, dans l'équation précédente, la condition initiale $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ admet une solution (d'ailleurs unique), mais la condition $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ n'admet pas de solution !

Exemple 4.8 – Non unicité

L'expression différentielle

$$x\,y' - 2\,y = 0$$

dont les solutions sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} k_+\,x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ k_-\,x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{où } (k_+, k_-) \in \mathbb{K}^2$$

sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On n'a jamais unicité à un problème de Cauchy, car la donnée de y_0 en x_0 ne fixe qu'au plus une des deux constantes. Ainsi, prenons $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, alors on obtient une infinité de solutions

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ k_-\,x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Voir la figure 4.4, page 304.

Remarque importante 4.18

Il faut bien différencier les recollements par continuité, les recollements dérivables et les recollements $\mathscr{C}^1$.
Notons par exemple $(\mathcal{E})$ l'expression différentielle

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

avec a, b et c continues sur $\mathbb{R}$ et a ne s'annule qu'en 0. Alors, on va chercher à faire un recollement en 0.

1. Un recollement par continuité consiste à déterminer une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui soit solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Cette fonction peut ne pas être dérivable en 0 et donc ne pas être une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, comme par exemple pour l'expression différentielle
$$x\,y' - y = 0$$
À retenir, un recollement par continuité est une condition *nécessaire* pour l'existence d'une solution sur $\mathbb{R}$, dans la pratique, elle fournit des conditions nécessaires sur les constantes.
2. Un recollement dérivable consiste à déterminer une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui soit solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme par exemple pour l'expression différentielle
$$x\,y' - 2\,y = c(x) \text{ avec } c(x) = \begin{cases} x\,\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
À retenir, un recollement dérivable est une condition *nécessaire et suffisante* pour l'existence d'une solution sur $\mathbb{R}$. Dans la pratique, on cherche un recollement par continuité puis, s'il existe, on étudie la dérivabilité de la (ou des) fonction(s) trouvée(s).
3. Un recollement de classe $\mathscr{C}^1$ consiste à déterminer une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qui soit solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
À retenir, un recollement de classe $\mathscr{C}^1$ est une condition *suffisante* pour l'existence d'une solution sur $\mathbb{R}$. Dans la pratique, elle est plus simple à mettre en œuvre que le recollement différentiable puisqu'il suffit d'utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice(s) 4.3

4.3.1 Résoudre les expressions différentielles suivantes (on étudiera les éventuels problèmes de recollement $\mathscr{C}^1$)

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\,y' - y &= 1+x \\
|x|\,y' + 2\,y &= \frac{x}{1+x^2} \\
2\,x\,y' + y &= \frac{1}{x-1} \\
& \quad \text{trouver une solution } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-\infty, 1[\\
(x^2-1)\,y' + x\,y &= 3\,(x^3-x) \\
\sin(2\,x)\,y' - 2\,y &= \sin(2\,x) \\
x\,y' + (x-1)\,y &= x^4 + 3\,x^2 \\
x\,(x-2)\,y' + (1-x)\,y &= 0 \\
x\,y' + y &= \arctan(x)
\end{aligned}
$$

4.3.2 Résoudre

$$y' + |y| = 1 \tag{4.2}$$
$$(x+i)\,y' + y = 1 + 2\,x\,\arctan(x) \tag{4.3}$$
$$y' = |y-x| \tag{4.4}$$
$$f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

4.3.3 Soit E l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus haut degré inférieur ou égal à $2\,n$ (où $n \in \mathbb{N}$). Soit $k \in \mathbb{R}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que l'application

$$\phi \;:\; \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto \Big(x \mapsto (x^2-1)\,P'(x) - (2\,n\,x + k)\,P(x)\Big) \end{cases}$$

soit bijective.

4.2.2 Second ordre

Lorsque le second membre de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants n'est pas sous la forme $P(x)\, e^{\alpha\, x}$, où P est une fonction polynomiale et $\alpha \in \mathbb{K}$, la méthode de variation de la constante mène parfois à des calculs compliqués.

Exemple 4.9

Soit l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

Il est facile de résoudre l'équation homogène sous la forme

$$x \mapsto \lambda\, \sin(x) + \mu\, \cos(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

La méthode de variation de la constante nous conduit à chercher une solution sous la forme

$$y(x) = \mu(x)\, \cos(x)\ \text{(par exemple)}$$

Session `Wxmaxima` 4.11 – Variation d'une constante

```
(%i1) eq : 'diff(y,x,2)+y=1/cos(x)^2$
(%i2) subst([y=mu(x)*cos(x)],lhs(eq));
```

$$(\%o2)\quad \frac{d^2}{d\,x^2}\,(\mu\,(x)\,\cos\,(x)) + \mu\,(x)\,\cos\,(x)$$

```
(%i3) %,diff;
```

$$(\%o3)\quad \cos\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mu\,(x)\right) - 2\sin\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mu\,(x)\right)$$

```
(%i4) subst(['diff(mu(x),x)=phi(x),'diff(mu(x),x,2)='diff(phi(x),x)],%);
```

$$(\%o4)\quad \cos\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\,(x)\right) - 2\,\phi\,(x)\,\sin\,(x)$$

```
(%i5) ode2(%,phi(x),x);
```

(%o5) $\phi(x) = \frac{\%c}{\cos(x)^2}$

```
(%i6) subst([phi(x)=c(x)/cos(x)^2],%th(2));
```

(%o6) $\cos(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,\frac{\mathrm{c}(x)}{\cos(x)^2}\right) - \frac{2\,\mathrm{c}(x)\,\sin(x)}{\cos(x)^2}$

```
(%i7) %,diff;
```

(%o7) $\cos(x)\left(\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{c}(x)}{\cos(x)^2} + \frac{2\,\mathrm{c}(x)\,\sin(x)}{\cos(x)^3}\right) - \frac{2\,\mathrm{c}(x)\,\sin(x)}{\cos(x)^2}$

```
(%i8) ratsimp(%);
```

(%o8) $\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{c}(x)}{\cos(x)}$

```
(%i9) integrate(1/cos(x),x);
```

(%o9) $\frac{\log(\sin(x)+1)}{2} - \frac{\log(\sin(x)-1)}{2}$

```
(%i10) 'integrate(1/2*log((1+sin(x))/(1-sin(x)))/cos(x)^2,x);
```

(%o10) $\frac{\int \frac{\log\left(\frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}\right)}{\cos(x)^2}dx}{2}$

```
(%i11) trigsimp(ev(%,nouns));
```

(%o11) $\frac{\sin(x)\,\log\left(-\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right) - 2\cos(x) - 2}{2\cos(x)}$

Session `Python` 4.9 – Variation d'une constante

Lorsque le second membre est quelconque, il nous reste la méthode de variation de la constante.

In [48]

```
eq = diff(y(x), x, x)+y(x)
eq.subs({y(x): mu(x)*cos(x)}).doit()
```

Out [48]

$$-2\sin(x)\frac{d}{dx}\mu(x) + \cos(x)\frac{d^2}{dx^2}\mu(x)$$

In [49]

```
_.subs({diff(mu(x), x): psi(x)})
```

Out [49]

$$-2\psi(x)\sin(x) + \cos(x)\frac{d}{dx}\psi(x)$$

In [50]

```
dsolve(_, psi(x))
```

Out [50]

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\cos^2(x)}$$

In [51]

```
__.subs({psi(x): phi(x)/cos(x)**2}).doit()
```

Out[51]

$$\left(\frac{2\phi(x)\sin(x)}{\cos^3(x)} + \frac{\frac{d}{dx}\phi(x)}{\cos^2(x)}\right)\cos(x) - \frac{2\phi(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

In[52]

```
1 _.simplify()
```

Out[52]

$$\frac{\frac{d}{dx}\phi(x)}{\cos(x)}$$

In[53]

```
1 integrate(1/cos(x), x)
```

Out[53]

$$-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2} + \frac{\log(\sin(x)+1)}{2}$$

In[54]

```
1 Integral(_/cos(x)**2, x)
```

Out [54]

$$\int \frac{-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2} + \frac{\log(\sin(x)+1)}{2}}{\cos^2(x)}\, dx$$

In [55] – Une fonction pour faire des intégrations par parties

```
def IPP(integ, v):
    """
    integ est l'intégrale dans laquelle nous essayons de faire une IPP
    elle est de la forme $\int u v'$
    """
    aux = integ.args[1]
    x = aux[0]
    if len(aux) == 3:
        a = aux[1]
        b = aux[2]
    u = (integ.args[0]/v.diff(x))
    if len(aux) == 3:
        return(limit(u*v, x, b, dir='-')-limit(u*v, x, a, dir='+')-Integral(v*diff(u, x), (x, a,
        ↪  b)))
    else:
        return(u*v-Integral(v*diff(u, x), x))
```

In [56]

```
IPP(_, tan(x))
```

Out[56]

$$\frac{\left(-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{2}\right)\tan(x)}{\left(\tan^2(x)+1\right)\cos^2(x)}-\int\left(\frac{\frac{\cos(x)}{2(\sin(x)+1)}-\frac{\cos(x)}{2(\sin(x)-1)}}{\left(\tan^2(x)+1\right)\cos^2(x)}+\frac{2\left(-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{2}\right)\sin(x)}{\left(\tan^2(x)+1\right)\cos^3(x)}-\frac{\left(-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{2}\right)\left(2\tan^2(x)+2\right)\tan(x)}{\left(\tan^2(x)+1\right)^2\cos^2(x)}\right)\tan(x)\,dx$$

In[57]

```
_.simplify()
```

Out[57]

$$-\frac{(\log(\sin(x)-1)-\log(\sin(x)+1))\tan(x)}{2}-\frac{1}{\cos(x)}$$

Remarque 4.19

Cette double primitivation est compliquée. Il existe une autre méthode (que nous justifierons dans le cours d'algèbre linéaire), *la méthode de variations des deux constantes*. Il s'agit de chercher une solution sous la forme

$$\varphi(x)=\lambda(x)\,\varphi_1(x)+\mu(x)\,\varphi_2(x)$$

où φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation homogène, non proportionnelles.

Exemple 4.10 – Méthode de variation des deux constantes

On a alors

$$\varphi'(x) = \lambda(x)\cos(x) - \mu(x)\sin(x) + \underbrace{\lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x)}_{\text{On impose que ceci soit }=0}$$

en re-dérivant, on trouve que λ' et μ' doivent vérifier deux équations

$$\begin{cases} \lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x) = 0 & \text{(équation imposée)} \\ \lambda'(x)\cos(x) - \mu'(x)\sin(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \text{en reportant...} \end{cases}$$

Ce qui nous donne immédiatement

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \text{ et } \mu'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Il est alors facile de conclure.

Session Wxmaxima 4.12 – Variations des deux constantes

```
(%i1)  eq : 'diff(y,x,2)+y=1/cos(x)^2$
(%i2)  integrate(1/cos(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{\log(\sin(x)+1)}{2} - \dfrac{\log(\sin(x)-1)}{2}$

```
(%i3)  integrate(-sin(x)/cos(x)^2,x);
```

(%o3) $-\dfrac{1}{\cos(x)}$

```
(%i4)  subst([y=1/2*log((1+sin(x))/(1-sin(x)))*sin(x)-1],lhs(eq));
```

(%o4) $\dfrac{d^2}{d\,x^2}\left(\dfrac{\sin(x)\,\log\left(\frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}\right)}{2} - 1\right) + \dfrac{\sin(x)\,\log\left(\frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}\right)}{2} - 1$

```
(%i5)  %,diff$
```

```
(%i6) trigsimp(%);
```

$$(\%o6)\quad \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Session Python 4.10 – Variations des deux constantes

La méthode de variations des deux constantes conduit à des calculs plus simples (à la main et à la machine). On trouvera sa justification dans le cours sur les équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients non constants.

In [58]

```
nu = Function('\\nu')
eq1 = Eq(diff(mu(x), x)*cos(x)+diff(nu(x), x)*sin(x), 0)
eq2 = Eq(diff(mu(x), x)*diff(cos(x), x) +
         diff(nu(x), x)*diff(sin(x), x), 1/cos(x)**2)
```

In [59]

```
solve([eq1, eq2], [diff(mu(x), x), diff(nu(x), x)])
```

Out[59]

$$\left\{\frac{d}{dx}\mu(x) : -\frac{\sin(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)},\ \frac{d}{dx}\nu(x) : \frac{1}{\sin^2(x)\cos(x) + \cos^3(x)}\right\}$$

In [60]

```
sys = _
```

In[61] – Noter l'utilisation du dictionnaire

```
sys[diff(mu(x), x)].trigsimp()
```

Out[61]

$$-\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

In[62]

```
integrate(_, x)
```

Out[62]

$$-\frac{1}{\cos(x)}$$

In[63]

```
sys[diff(nu(x), x)].trigsimp()
```

Out[63]

$$\frac{1}{\cos(x)}$$

In[64]

```
integrate(_, x)
```

Out [64]

$$-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{2}$$

In [66] – La solution générale

```
(a+Out[62])*cos(x)+(b+_)*sin(x)
```

Out [66]

$$\left(a-\frac{1}{\cos(x)}\right)\cos(x)+\left(b-\frac{\log(\sin(x)-1)}{2}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{2}\right)\sin(x)$$

L'algorithme (*Méthode de variation des deux constantes*) est donc pour trouver une solution particulière de l'équation

$$y''+a\,y'+b\,y=c(x)$$

— On résout l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée, ce qui nous permet de trouver deux fonctions φ_1 et φ_2 telles que

$$S_{\mathcal{H}}=\left\{x\mapsto \lambda\,\varphi_1(x)+\mu\,\varphi_2(x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\right\}$$

— On cherche une solution particulière sous la forme

$$x\mapsto \lambda(x)\,\varphi_1(x)+\mu(x)\,\varphi_2(x)$$

en imposant

$$\boxed{\forall x\in I,\ \lambda'(x)\,\varphi_1(x)+\mu'(x)\,\varphi_2(x)=0}$$

En reportant, il vient

$$\boxed{\begin{cases}\lambda'(x)\,\varphi_1(x)+\mu'(x)\,\varphi_2(x)=0 & \text{(imposée)}\\ \lambda'(x)\,\varphi_1'(x)+\mu'(x)\,\varphi_2'(x)=c(x) & \text{en reportant...}\end{cases}}$$

qui est plus facile à résoudre.

Exercice(s) 4.4

4.4.1 Résoudre les équations différentielles

$$\begin{aligned} y'' - 2\,y' + 2\,y &= \frac{e^x}{\cos^2(x)} \\ y'' + y &= \operatorname{cotan}(x) \end{aligned}$$

4.3 Études qualitatives

Il arrive que nous n'ayons pas besoin de résoudre l'équation (ou l'expression) différentielle pour donner des propriétés de ses solutions. Le principe est simple

1. On résout formellement l'expression/équation.
2. On réinjecte les informations dans la formule trouvée.

注释 4.3

本小节结合第二章节内容，从定性分析的角度来研究线性微分方程的性质。

Exemple 4.11 – Étude qualitative

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f'(x) + \alpha\, f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \lambda$$

alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\lambda}{\alpha}$$

Démonstration

- L'idée consiste à inverser la relation différentielle
  — On connaît le comportement de $f' + \alpha\, f$? *Donnons lui un nom !* Posons

$$g(x) = f'(x) + \alpha\, f(x)$$

  — Il suffit alors d'exprimer f en fonction de g et d'y réinjecter l'information donnée.

— *Inversion de la formule.* Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est la solution du problème de Cauchy linéaire du premier ordre

$$(\mathcal{C}) \ : \begin{cases} y' + \alpha\, y = g(x) \\ y(x_0) = f(x_0) \end{cases}$$

Il est facile alors de calculer f en fonction de g (qui est fonction de f). Il vient

$$f(x) = e^{-\alpha\, x} \left(e^{\alpha\, x_0}\, f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{\alpha\, t}\, \mathrm{d}t \right)$$

— *Réinjection de la propriété.* Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on sait alors qu'il existe $A > 0$, tel que

$$\forall x \geq A,\ |g(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

Prenons donc $x_0 = A$, et $x \geq A$, il vient alors

$$f(x) - \frac{\lambda}{\alpha} = e^{-\alpha\,(x-A)}\, f(A) + e^{-\alpha\, x} \int_{A}^{x} (\lambda + g(t) - \lambda)\, e^{\alpha\, t}\, \mathrm{d}t - \frac{\lambda}{\alpha}$$

D'où

$$\left| f(x) - \frac{\lambda}{\alpha} \right| \leq \underbrace{|f(A)|\, e^{-\alpha\,(x-A)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \underbrace{\left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|\ e^{-\alpha\,(x-A)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \varepsilon\, \underbrace{\left(1 - e^{-\alpha\,(x-A)}\right)}_{\leq 1}$$

Donc, pour x assez grand, on a

$$\left| f(x) - \frac{\lambda}{\alpha} \right| \leq 2\,\varepsilon,\ \text{ soit } f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\lambda}{\alpha}$$

Exemple 4.12 – Autre étude qualitative

Soit l'équation différentielle définie par

$$y' - y = \ln(x), \qquad (x \in \mathbb{R}_+^*)$$

1. Préciser les comportements en 0^+ et $+\infty$ des solutions.
2. Donner (sans machine) l'allure des graphes des solutions.

Démonstration

1. *(Résolution)* Il est facile d'obtenir ici encore, une formule donnant les solutions (si $\lambda \in \mathbb{R}$ est donné)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\lambda(x) = e^x \left(\lambda + \int_1^x e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t\right)$$

(Comportement en 0^+). La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est négative sur $]0,1[$ et on a

$$e^{-t} \ln(t) = o_{0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

donc

$$\lim_{x \to 0^+} \int_1^x e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t \text{ existe}$$

Donc

$$\boxed{\varphi_\lambda(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \lambda + \int_1^0 e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t \text{ et } \varphi'_\lambda(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty}$$

(Comportement en $+\infty$) La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est positive sur $]1,+\infty[$ et on a

$$e^{-t} \ln(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t \text{ existe}$$

Donc

$$\boxed{\varphi_\lambda(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda + \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda + \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t < 0 \end{cases}}$$

Que se passe-t-il pour la valeur particulière

$$\lambda_0 = -\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t \ ?$$

Il nous faut alors trouver un équivalent de

$$\lambda_0 + \int_1^x e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t$$

Or

$$0 < e^{-t}\,\ln(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\,\ln(t)\right)$$

donc (par correction de la dérivée)

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\,\ln(t)\right)\,\mathrm{d}t = e^{-x}\,\ln(x)$$

et, finalement

$$\boxed{\varphi_{\lambda_0}(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)}$$

2. *(Tracé des trajectoires)* Il est possible de tracer des trajectoires de solutions d'équations différentielles de la manière suivante
   - On trace le lieu des points du plan où la solution passant par le point a une tangente horizontale (courbe rouge sur le dessin final). C'est donc
   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ y + \ln(x) = 0\right\}$$
   Cela partitionne le plan en plusieurs zones, où il est aisé de déterminer le signe des dérivées des solutions passant par ces points.
   - On trace le lieu des points du plan où la solution passant par le point annule sa dérivée seconde (courbe bleue sur le dessin final). On peut en trouver son équation en prenant une solution φ et en écrivant
   $$\varphi'(x) = \varphi(x) + \ln(x) \text{ donc } \varphi''(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x} = \varphi(x) + \ln(x) + \frac{1}{x}$$
   C'est donc
   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ y + \ln(x) + \frac{1}{x} = 0\right\}$$
   Cela partitionne le plan en zones où il est aisé de déterminer le signe de la dérivée seconde.
   - À l'origine ($x = 0$), la tangente est verticale.
   - Il suffit alors de se laisser porter par le crayon...

   L'allure obtenue (tracé qualitatif, sans les valeurs) est donnée à la figure 4.5, page 305.

Session **Wxmaxima** 4.13 – Vérification des allures

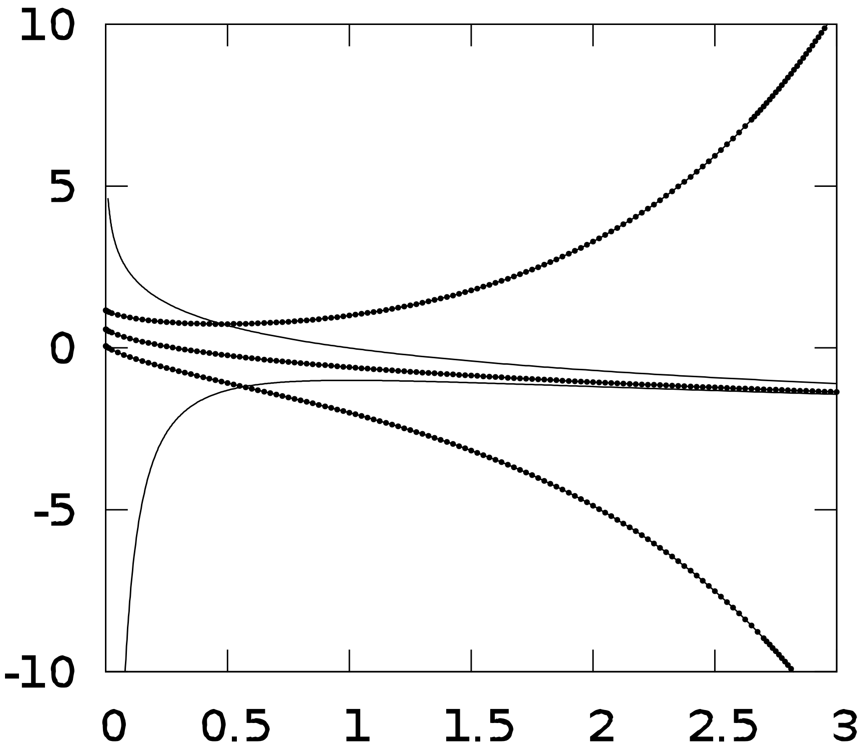
```
(%i1) load(draw)$
(%i2) load(drawdf)$
(%i3) quad_qagi(exp(-t)*log(t),t,1,inf);
```

(%o3) $[0.21938393439552, 2.346644382875865910^{-11}, 135, 0]$

drawdf !showfieldsolnat

(%i4)
```
drawdf(y+log(x),[x,0,3],
show_field=false,
soln_at(1,1),
soln_at(1,-2),
soln_at(1,-0.21938393439552*%e),
color=red,
explicit(-log(x),x,0.01,3),
color=blue,
explicit(-log(x)-1/x,x,0.01,3));
```

(%o4) 0



Session Python 4.11 – Vérification des allures

Pour trouver des trajectoires de solutions d'équations différentielles, on peut faire appel à la bibliothèque `scipy.integrate`.

In [67]

```
import scipy.integrate as sc
```

In[68]

```
def f(t):
    return(np.exp(-t)*np.log(t))
```

In[69] – Calcul numérique de l'intégrale

```
sc.quad(f, 1, np.inf)
```

Out[69]

$$(0.21938393439552,\ 2.34664543819267\,10^{-11})$$

In[70]

```
def edo(y, x):
    return(y+np.log(x))


xp = np.linspace(1, 3, 20)
xm = np.arange(1, 0, -0.01)
```

In[71]

```
y0 = [1, -2, -_[0]*np.e]
solp = sc.odeint(edo, y0, xp)
solm = sc.odeint(edo, y0, xm)
```

In[72] – Noter comment accéder aux différentes solutions

```
plt.plot(xp, solp[:, 0], color='red', label="M>0")
plt.plot(xm, solm[:, 0], color="red")
plt.plot(xp, solp[:, 1], color="green", label="M<0")
plt.plot(xm, solm[:, 1], color="green")
plt.plot(xp, solp[:, 2], "--b", label="M=0")
plt.plot(xm, solm[:, 2], "--b")
x = np.linspace(0.1, 3, 200)
plt.plot(x, -np.log(x), label="y=-ln(x)")
plt.plot(x, -np.log(x)-1/x, label="y=-ln(x)-1/x")
plt.legend()
plt.savefig("Graphiques/derdeder.pdf")
```

Voir la figure 4.6, page 306.

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f''(x) + f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda$$

Montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda$$

4.5.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, bornée et $a > 0$. Montrer que l'équation différentielle

$$y'' - a^2\, y = f(x)$$

possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

4.5.3 Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de $+\infty$ de l'équation

$$y' - y = \frac{1}{x}$$

4.5.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On considère l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y}{n^2} = f(x)$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution vérifiant $y(0) = y(1) = 0$. On la note u_n.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x)$$

(c) Conclusion.

4.5.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Montrer que l'équation

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = f(x)$$

possède au plus une solution périodique.

4.5.6 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall x \in [0, 1],\ f''(x) + 2\,f'(x) + f(x) \geq 0$$

Montrer que

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) \leq 0$$

4.5.7 (a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$y'' - 2\,y' + y = \frac{1}{\sqrt{\pi\,x}}$$

(b) Montrer que toute solution peut se prolonger de manière $\mathscr{C}^1$ en 0.
On note $\widetilde{y}$ ce prolongement.

(c) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la solution (dont on justifiera l'existence) vérifiant

$$\widetilde{y}(0) = 0 \text{ et } \widetilde{y}'(0) = 1$$

4.5.8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et soit l'équation différentielle

$$y'' + y = f(x)$$

(a) Trouver la forme générale des solutions.

(b) Montrer qu'il existe une unique solution φ_0 vérifiant

$$\varphi_0(0) = 0 \text{ et } \varphi_0'(0) = 0$$

En calculer son expression.

(c) Que dire de φ_0 si f est paire ? Si f est impaire ?

(d) Trouver toutes les solutions lorsque f est paire.

(e) On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\int_{-x}^0 |f(t)| \, \mathrm{d}t \text{ existent}$$

i. Montrer que toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer qu'une seule d'entre elles a une limite en $+\infty$. La calculer.

4.5.9 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) > 0$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) > 0$$

4.5.10 *Lemme de Grönwall* Soit u et v deux fonctions définies, continues sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives. On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \geq a,\ u(x) \leq M + \int_a^x u(t)\,v(t) \, \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\forall x \geq a,\ u(x) \leq M \exp\left(\int_a^x v(t) \, \mathrm{d}t\right)$$

Figure 4.1 – Point limite

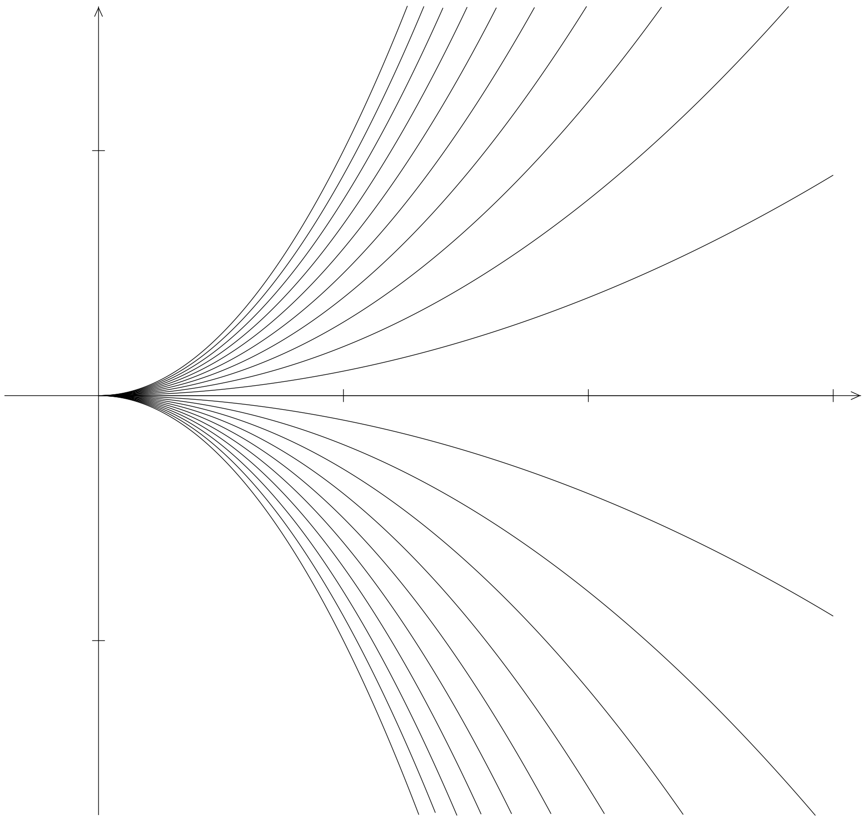


Figure 4.2 – Exemple de recollement

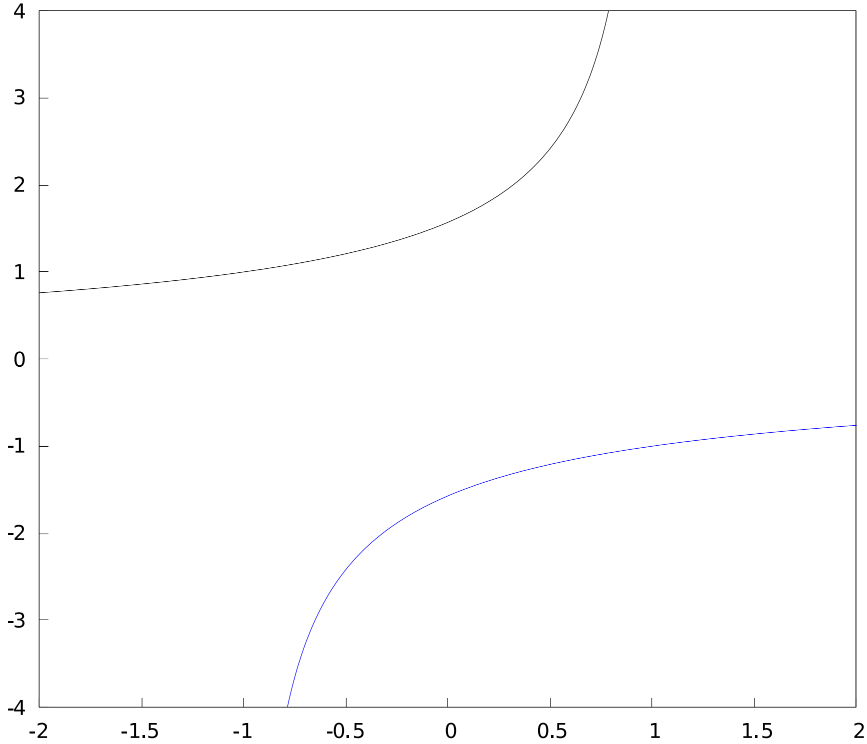


Figure 4.3 – Recollement dans une équation différentielle

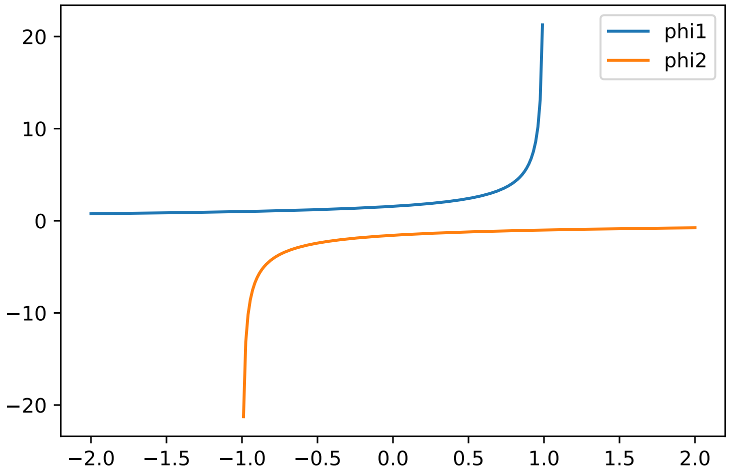


Figure 4.4 – Recollements

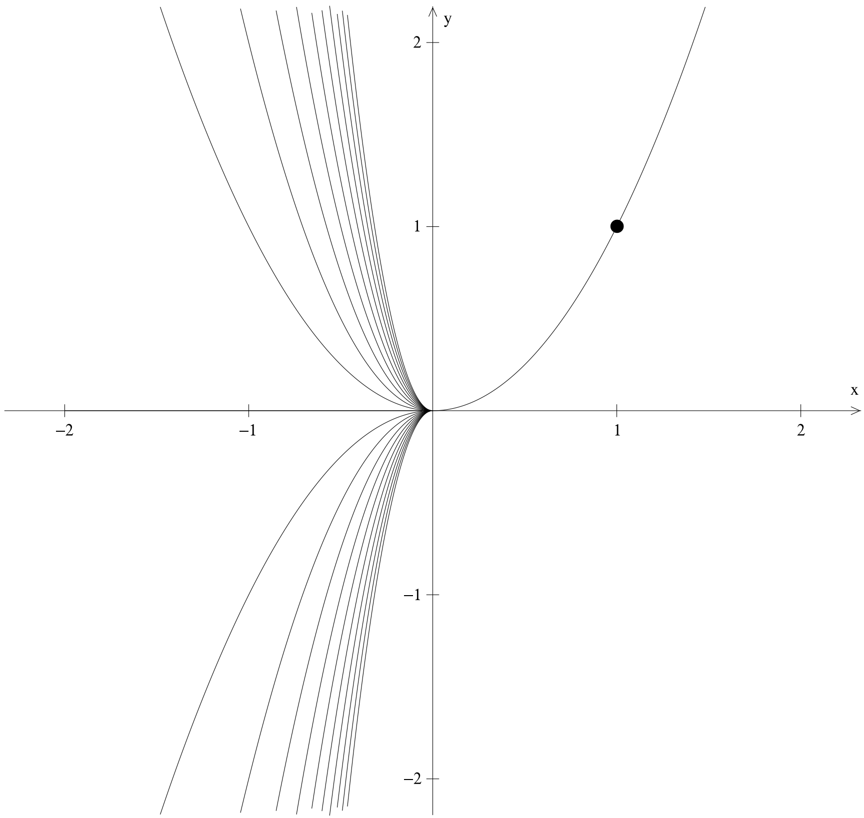


Figure 4.5 – Étude qualitative, allure des solutions

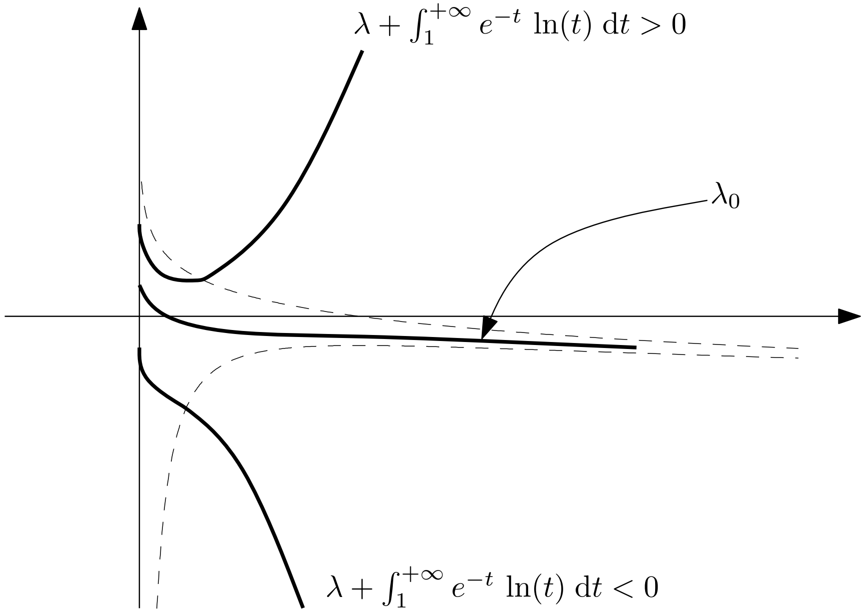
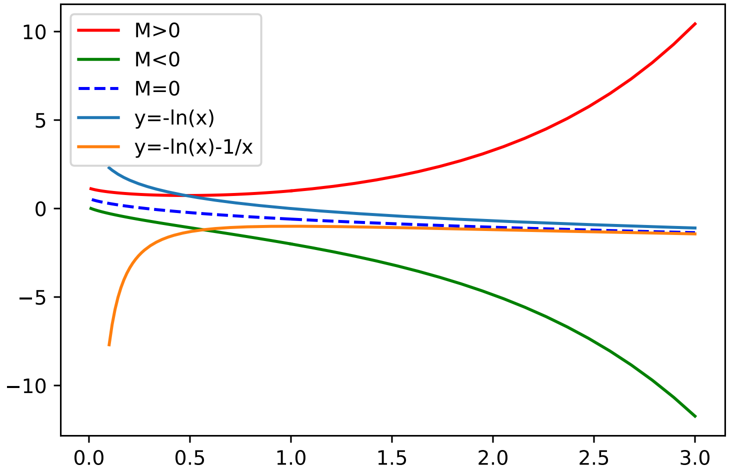


Figure 4.6 – Vérification des allures



Annexe A

Catalogue des méthodes de calcul de primitives

Ce chapitre décrit les rares situations où l'on sait peut-être calculer certaines primitives.[a]

a. Le calcul d'une primitive est difficile à programmer. `Wxmaxima` essaye de faire au mieux (du moins ses programmeurs), il y a beaucoup d'approximations dans les résultats (des logarithmes ou des racines d'expression potentiellement négatives). Il est donc indispensable de *ne pas* lui faire confiance !

本小节介绍了几类典型函数求其原函数的方法。

A.1 Fonctions rationnelles

L'algorithme de calcul est le suivant

1. On décompose la fonction rationnelle sous la forme

$$P(x) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{k,j}}{(x-\alpha_k)^j} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{b_{k,j}\, x + c_{k,j}}{(x^2 + \beta_k\, x + \gamma_k)^j}$$

   où

$$\forall k \in [\![1, q]\!] \,,\ \beta_k^2 - 4\,\gamma_k < 0$$

et où P est une fonction polynomiale. (Voir la session `Wxmaxima` A.1, de la présente page ou la session `Python` A.1, page 310).

2. On primitive chaque terme, de la manière suivante (Voir la session `Wxmaxima` A.2, page 313 ou la session `Python` A.2, page 315).

$f(x)$		$F(x)$
x^k		$\frac{x^{k+1}}{k+1}$
$\dfrac{1}{x-a}$		$\ln(\vert x-a\vert)$
$\dfrac{1}{(x-a)^j}$, $(j \geq 2)$		$-\dfrac{1}{(j-1)\,(x-a)^{j-1}}$
$\dfrac{1}{x^2+\beta\,x+\gamma}$, $(\beta^2-4\,\gamma<0)$		$\dfrac{2\,\arctan\left(\frac{2\,x+\beta}{\sqrt{4\,\gamma-\beta^2}}\right)}{\sqrt{4\,\gamma-\beta^2}}$

Session `Wxmaxima` A.1 – Décomposition d'une fonction rationnelle

Un exemple où $P(x)=1$, $p=2$, $\alpha_1=2$, $n_1=1$, $\alpha_2=-1$, $n_2=2$ et $q=0$.

```
(%i1) R : (x^3+2*x+1)/((x+1)^2*(x-2));
```

(%o1) $$\frac{x^3+2\,x+1}{(x-2)\,(x+1)^2}$$

```
(%i2) partfrac(R,x);
```

(%o2) $$-\frac{13}{9\,(x+1)}+\frac{2}{3\,(x+1)^2}+\frac{13}{9\,(x-2)}+1$$

Un exemple où $P(x)=x-2$, $p=0$, $q=1$, $\beta_1=1$, $\gamma_1=1$ et $m_1=2$.

```
(%i3) R : (x^5-12*x+3)/(x^2+x+1)^2;
```

(%o3) $$\frac{x^5-12\,x+3}{(x^2+x+1)^2}$$

```
(%i4) partfrac(R,x);
```

(%o4) $\dfrac{x+3}{x^2+x+1}+\dfrac{2-13\,x}{\left(x^2+x+1\right)^2}+x-2$

Un exemple où $P(x)=0$, $p=1$, $\alpha_1=1$, $n_1=4$, $q=1$, $m_1=3$, $\beta_1=-1$ et $\gamma_1=3$.

```
(%i5) R : (x-2)/((x^2-2*x+1)^2*(x^2-x+3)^3);
```

(%o5) $\dfrac{x-2}{\left(x^2-2\,x+1\right)^2\left(x^2-x+3\right)^3}$

```
(%i6) partfrac(R,x);
```

(%o6) $\dfrac{35\,x+18}{729\,\left(x^2-x+3\right)}+\dfrac{23\,x+9}{243\,\left(x^2-x+3\right)^2}+\dfrac{11\,x+3}{81\,\left(x^2-x+3\right)^3}-\dfrac{35}{729\,\left(x-1\right)}-\dfrac{2}{81\,\left(x-1\right)^2}+\dfrac{2}{27\,\left(x-1\right)^3}-\dfrac{1}{27\,\left(x-1\right)^4}$

L'existence de cette décomposition sera démontrée ultérieurement, elle suppose que l'on sait factoriser le dénominateur (ce qui n'est pas toujours possible). Pour le moment, on pose *a priori* la forme et on identifie. Par exemple

$$R(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$$

s'écrit *a priori* sous la forme

$$\begin{aligned} a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2} &= \frac{a\,(x-1)^2+b\,(x-1)+c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a\,x^2+x\,(b-2\,a)+c-b+a}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

il suffit alors de prendre

$$a=1,\ b-2\,a=0 \text{ et } c-b+a=1 \text{ soit } a=1,\ b=2 \text{ et } c=2$$

```
(%i1) R : (x^2+1)/(x-1)^2;
```

(%o1) $\dfrac{x^2+1}{\left(x-1\right)^2}$

```
(%i2) partfrac(R,x);
```

$$(\%o2)\quad \frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+1$$

```
(%i3) ratsimp(R-(a+b/(x-1)+c/(x-1)^2));
```

$$(\%o3)\quad -\frac{(a-1)\,x^2+(b-2\,a)\,x+c-b+a-1}{x^2-2\,x+1}$$

```
(%i4) solve(makelist(coeff(num(%),x,k),k,0,2),[a,b,c]);
```

$$(\%o4)\quad [[a=1,b=2,c=2]]$$

Session `Python` A.1 – Décomposition d'une fonction rationnelle

Pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle, on utilise (à la main) ce qui s'appelle *décomposition en éléments simples*. Cela correspond à la méthode `.apart` de `Sympy`.

In[1]

```python
from sympy import *
init_printing()
```

In[2]

```python
x = symbols('x')
R = (x**3+2*x+1)/((x+1)**2*(x-2))
```

In[3]

```python
R.apart()
```

Out[3]

$$1-\frac{13}{9(x+1)}+\frac{2}{3(x+1)^2}+\frac{13}{9(x-2)}$$

In[4]

```
R = (x**5-12*x+3)/((x**2+x+1)**2)
R.apart()
```

Out[4]

$$x+\frac{x+3}{x^2+x+1}-\frac{13x-2}{(x^2+x+1)^2}-2$$

In[5]

```
R = (x-2)/((x**2-2*x+1)**2*(x**2-x+3)**3)
R.apart()
```

Out[5]

$$\frac{11x+3}{81(x^2-x+3)^3}+\frac{23x+9}{243(x^2-x+3)^2}+\frac{35x+18}{729(x^2-x+3)}-\frac{35}{729(x-1)}-\frac{2}{81(x-1)^2}+\frac{2}{27(x-1)^3}-\frac{1}{27(x-1)^4}$$

In[6]

```
R = (x**2+1)/((x-1)**2)
R.apart()
```

Out [6]

$$1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

In [7]

```
a, b, c = symbols('a b c')
simplify(R - (a+b/(x-1)+c/(x-1)**2))
```

Out [7]

$$\frac{-a\,(x-1)^2-b\,(x-1)-c+x^2+1}{(x-1)^2}$$

In [8]

```
numer(_).expand().collect(x)
```

Out [8]

$$-a+b-c+x^2\,(1-a)+x\,(2a-b)+1$$

In [9]

```
solve([_.coeff(x, k) for k in range(3)], [a, b, c])
```

Out [9]

$$\{a:1,\ b:2,\ c:2\}$$

Session `Wxmaxima` A.2 – Intégration terme à terme

```
(%i1) integrate(x^n,x);
```

Is $n+1$ zero or nonzero ?n ;

(%o1) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

```
(%i2) integrate(1/(x-a),x);
```

(%o2) $\log(x-a)$

```
(%i3) integrate(1/(x-a)^j,x);
```

Is $j-1$ zero or nonzero ?n ;

(%o3) $\frac{(x-a)^{1-j}}{1-j}$

```
(%i4) integrate(1/(x^2+a*x+b),x);
```

Is $4\,b-a^2$ positive or negative ?p ;

(%o4) $\frac{2\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\,x+a}{\sqrt{4\,b-a^2}}\right)}{\sqrt{4\,b-a^2}}$

La dernière primitive demande quelques explications. Son principe est simple

$$\frac{1}{x^2+\beta\,x+\gamma}=\frac{1}{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{4\,\gamma-\beta^2}{4}}$$

où l'on effectue le changement de variable

$$x+\frac{\beta}{2}=t\sqrt{\frac{4\,\gamma-\beta^2}{4}}$$

```
(%i1) 'integrate(1/(x^2+a*x+b),x);
```

(%o1) $\int\frac{1}{x^2+a\,x+b}dx$

```
(%i2) changevar(%,x+a/2=t*sqrt((4*b-a^2)/4),t,x);
```

$$(\%o2)\quad 2\sqrt{4\,b-a^2}\int \frac{1}{(4\,b-a^2)\;t^2+4\,b-a^2}dt$$

```
(%i3) factor(%);
```

$$(\%o3)\quad \frac{2\int \frac{1}{t^2+1}dt}{\sqrt{4\,b-a^2}}$$

```
(%i4) %,nouns;
```

$$(\%o4)\quad \frac{2\,\mathrm{atan}\,(t)}{\sqrt{4\,b-a^2}}$$

```
(%i5) subst([t=(x+a/2)/sqrt((4*b-a^2)/4)],%);
```

$$(\%o5)\quad \frac{2\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\,\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{4\,b-a^2}}\right)}{\sqrt{4\,b-a^2}}$$

Il reste le cas compliqué d'une primitive de

$$\frac{1}{(x^2+\beta\,x+\gamma)^j},\ \text{où } j\in\mathbb{N}^*,\ j\neq 1 \text{ et } \beta^2-4\,\gamma<0$$

L'écriture

$$x^2+\beta\,x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{4\,\gamma-\beta^2}{4}$$

déjà utilisée et le résultat précédent nous incite à faire le changement de variable

$$x+\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{4\,\gamma-\beta^2}{4}}\,\tan(t)$$

qui, combiné à la relation

$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

nous conduit au paragraphe suivant...

```
(%i1) 'integrate(1/(x^2+a*x+b)^3,x);
```

$$(\%o1) \quad \int \frac{1}{(x^2 + a\,x + b)^3}dx$$

```
(%i2) changevar(%,x+a/2=sqrt((4*b-a^2)/4)*tan(t),t,x)$
(%i3) factor(%);
```

$$(\%o3) \quad \frac{32 \int \frac{\sec(t)^2}{\tan(t)^6+3\tan(t)^4+3\tan(t)^2+1}dt}{(4\,b - a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

```
(%i4) factor(trigsimp(%));
```

$$(\%o4) \quad \frac{32 \int \cos(t)^4 dt}{(4\,b - a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Session `Python` A.2 – Intégration terme à terme

Pour les fonctions rationnelles, la fonction `integrate` est fiable, sauf qu'elle ne met pas les bonnes valeurs absolues dans les logarithmes.

In[10]

```
n = symbols('n')
integrate(x**n, x)
```

Out[10]

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{for } n \neq -1 \\ \log(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[11]

```
1 integrate(1/(x-a), x)
```

Out[11]

$$\log\left(-a+x\right)$$

In[12]

```
1 integrate(1/(x-a)**n, x)
```

Out[12]

$$\begin{cases} \frac{(-a+x)^{1-n}}{1-n} & \text{for } n \neq 1 \\ \log\left(-a+x\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[13] – Cas où $a^2 - 4\,b > 0$

```
1 integrate(1/(x**2+a*x+b), x)
```

Out[13]

$$\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}\log\left(-\frac{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}}{2}+\frac{a}{2}+2b\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}+x\right)-\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}\log\left(\frac{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}}{2}+\frac{a}{2}-2b\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}+x\right)$$

In[13] – Cas où $a^2 - 4\,b > 0$

```
a, b = symbols(' a b', real=True)
integrate(1/(x**2+a*x+b), x)
```

Out[13]

$$\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}\log\left(-\frac{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}}{2}+\frac{a}{2}+2b\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}+x\right)-\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}\log\left(\frac{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}}{2}+\frac{a}{2}-2b\sqrt{\frac{1}{a^2-4b}}+x\right)$$

In[14] – Cas où $a^2 - 4\,b < 0$

```
c = symbols('c', positive=True)
integrate((1/(x**2+a*x+b)).subs({b: (a**2+c)/4}), x)
```

Out[14]

$$\frac{2\operatorname{atan}\left(\frac{a}{\sqrt{c}}+\frac{2x}{\sqrt{c}}\right)}{\sqrt{c}}$$

In[15] – Calcul « à la main »

```
Integral(1/(x**2+a*x+b), x)
```

Out[15]

$$\int\frac{1}{ax+b+x^2}\,dx$$

In[16] – Cas où $a^2 - 4\,b < 0$

```
t = symbols('t')
_.transform(x, (-a/S(2)+t*sqrt((4*b-a**2)/4), t))
```

Out[16]

$$\int \frac{\sqrt{- \frac{a^{2}}{4} + b}}{a \left(- \frac{a}{2} + t \sqrt{- \frac{a^{2}}{4} + b}\right) + b + \left(- \frac{a}{2} + t \sqrt{- \frac{a^{2}}{4} + b}\right)^{2}}\, dt$$

In[17]

```
_.expand()
```

Out[17]

$$\int \frac{\sqrt{- \frac{a^{2}}{4} + b}}{- \frac{a^{2} t^{2}}{4} - \frac{a^{2}}{4} + b t^{2} + b}\, dt$$

In[18]

```
_.factor()
```

Out[18]

$$- \frac{2 \sqrt{- a^{2} + 4 b} \int \frac{1}{t^{2} + 1}\, dt}{a^{2} - 4 b}$$

In[19]

```
_.doit()
```

Out[19]

$$-\frac{2\sqrt{-a^2+4b}\,\operatorname{atan}(t)}{a^2-4b}$$

In[20]

```
_.subs({t: (x+a/2)/sqrt((4*b-a**2)/4)})
```

Out[20]

$$-\frac{2\sqrt{-a^2+4b}\,\operatorname{atan}\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{-\frac{a^2}{4}+b}}\right)}{a^2-4b}$$

In[21]

```
_.simplify()
```

Out[21]

$$\frac{2\operatorname{atan}\left(\frac{a+2x}{\sqrt{-a^2+4b}}\right)}{\sqrt{-a^2+4b}}$$

In[22]

```
Integral(1/(x**2+a*x+b)**3, x)
```

Out[22]

$$\int \frac{1}{\left(ax+b+x^{2}\right)^{3}}\, dx$$

In[23]

```
_.transform(x, (-a/2+tan(t)*sqrt((4*b-a**2)/4), t))
```

Out[23]

$$\int \frac{\sqrt{-\frac{a^{2}}{4}+b}\left(\tan^{2}\left(t\right)+1\right)}{\left(a\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^{2}}{4}+b}\tan\left(t\right)\right)+b+\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^{2}}{4}+b}\tan\left(t\right)\right)^{2}\right)^{3}}\, dt$$

In[24] – Simplification *sous* l'intégrale

```
_.args[0].rewrite(cos).simplify()
```

Out[24]

$$\frac{32\cos^{4}\left(t\right)}{\left(-a^{2}+4b\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Remarque A.1

On pourrait aussi utiliser la fonction `Isimp` définie page 215.

Exercice(s) A.1

A.1.1 Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \frac{x^4}{x^3 - 3\,x - 2}\\
x &\mapsto \frac{x^2 + 2\,x}{(x+1)^2}\\
x &\mapsto \frac{1}{1 + x^3}\\
x &\mapsto \frac{x^3}{(x+1)\,(x^2+4)^2}\\
x &\mapsto \frac{2\,x^3 + 3}{(x^2+1)\,(x-1)^3}\\
x &\mapsto \frac{1}{(1+x^3)^3}
\end{aligned}$$

A.2 Polynômes trigonométriques

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} a_{i,j}\ \cos^i(x)\ \sin^j(x)$$

où les $a_{i,j}$ sont des nombres réels fixés.

L'algorithme de calcul pour le terme $\cos^i(x)\,\sin^j(x)$ est le suivant

1. si i est impair, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$;
2. si j est impair, on fait le changement de variable $t = \cos(x)$;
3. sinon, on utilise nos connaissances trigonométriques pour éliminer les puissances...

Session `Wxmaxima` A.3 – Primitives de polynômes trigonométriques

Cas où i est impair.

```
(%i1) I : 'integrate(cos(x)^3*sin(x)^4,x);
```

(%o1) $$\int \cos(x)^3 \sin(x)^4 dx$$

```
(%i2) changevar(I,t=sin(x),t,x);
```

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.Some solutions will be lost.
```

(%o2) $$\int t^4 - t^6 dt$$

Cas où j est impair.

```
(%i3) I : 'integrate(cos(x)^4*sin(x)^3,x);
```

(%o3) $$\int \cos(x)^4 \sin(x)^3 dx$$

```
(%i4) changevar(I,t=cos(x),t,x);
```

(%o4) $$\int t^6 - t^4 dt$$

Cas où les deux sont pairs.

```
(%i5) I : 'integrate(cos(x)^4*sin(x)^4,x);
```

(%o5) $$\int \cos(x)^4 \sin(x)^4 dx$$

(%i6) `trigreduce(I);`

(%o6) $$\frac{\int \cos(8\,x) - 4\cos(4\,x) + 3dx}{128}$$

Session Python A.3 – Primitives de polynômes trigonométriques

Pour les fonctions trigonométriques, la difficulté réside toujours dans la simplification des expressions.

In [25]

```
Integral(cos(x)**3*sin(x)**4, x)
```

Out [25]

$$\int \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx$$

In [26]

```
_.transform(x, asin(t))
```

Out [26]

$$\int t^4\left(1 - t^2\right)\,dt$$

In [27]

```
Integral(cos(x)**4*sin(x)**3, x)
```

Out[27]

$$\int \sin^{3}{\left(x \right)} \cos^{4}{\left(x \right)}\, dx$$

In[28]

```
_.transform(x, acos(t))
```

Out[28]

$$\int \left(- t^{4} \left(1 - t^{2}\right)\right)\, dt$$

In[29]

```
Integral(cos(x)**4*sin(x)**4, x)
```

Out[29]

$$\int \sin^{4}{\left(x \right)} \cos^{4}{\left(x \right)}\, dx$$

In[30]

```
_.args[0].rewrite(exp).expand().rewrite(cos)
```

Out[30]

$$- \frac{\cos{\left(4 x \right)}}{32} + \frac{\cos{\left(8 x \right)}}{128} + \frac{3}{128}$$

Remarque A.2

Les polynômes trigonométrique hyperboliques fonctionnent de la même manière.

Session Wxmaxima A.4 – Cas de la trigonométrie hyperbolique

Imparité de i.

```
(%i1) I : 'integrate(cosh(x)^3*sinh(x)^4,x);
```

(%o1) $\int \cosh(x)^3 \sinh(x)^4 dx$

```
(%i2) changevar(I,t=sinh(x),t,x);
```

(%o2) $\int t^6 + t^4 dt$

Imparité de j.

```
(%i3) I : 'integrate(cosh(x)^4*sinh(x)^3,x);
```

(%o3) $\int \cosh(x)^4 \sinh(x)^3 dx$

```
(%i4) changevar(I,t=cosh(x),t,x);
solve: using arc-trig functions to get a solution.Some solutions will be lost.
```

(%o4) $\int t^6 - t^4 dt$

Cas où les deux sont pairs.

```
(%i5) I : 'integrate(cosh(x)^4*sinh(x)^4,x);
```

(%o5) $\int \cosh(x)^4 \sinh(x)^4 dx$

(%i6) trigreduce(I);

(%o6) $$\frac{\int \cosh\left(8\,x\right)-4\cosh\left(4\,x\right)+3dx}{128}$$

Session Python A.4 – Cas de la trigonométrie hyperbolique

De la même manière... dans le principe ! Mais, il y a des difficultés de calcul supplémentaires.

In [31]

```
Integral(cosh(x)**3*sinh(x)**4, x)
```

Out [31]

$$\int \sinh^4(x)\cosh^3(x)\,dx$$

In [32]

```
_.transform(x, asinh(t))
```

Out [32]

$$\int t^4\left(t^2+1\right)\,dt$$

In [33]

```
Integral(cosh(x)**4*sinh(x)**3, x)
```

Out[33]

$$\int \sinh^{3}{\left(x \right)} \cosh^{4}{\left(x \right)}\, dx$$

In[34]

```python
_.transform(x, acosh(t))
```

Out[34]

$$\int \frac{t^{4} \left(t - 1\right)^{\frac{3}{2}} \left(t + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^{2} - 1}}\, dt$$

In[35] – La simplification ne fonctionne pas

```python
_.args[0].simplify()
```

Out[35]

$$\frac{t^{4} \left(t - 1\right)^{\frac{3}{2}} \left(t + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^{2} - 1}}$$

In[36]

```python
_.powsimp(force=True)
```

Out[36]

$$\frac{t^{4}\left(\left(t-1\right)\left(t+1\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^{2}-1}}$$

In[37] – Maintenant, la simplification fonctionne !

```
_.simplify()
```

Out[37]

$$t^{6}-t^{4}$$

In[38]

```
Integral(cosh(x)**4*sinh(x)**4, x)
```

Out[38]

$$\int \sinh^{4}\left(x\right)\cosh^{4}\left(x\right)\,dx$$

In[39]

```
_.args[0].rewrite(exp)
```

Out[39]

$$\left(\frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)^{4}\left(\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)^{4}$$

In[40]

```
_.expand()
```

Out[40]

$$\frac{e^{8x}}{256} - \frac{e^{4x}}{64} + \frac{3}{128} - \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{e^{-8x}}{256}$$

In[41]

```
_.rewrite(cos)
```

Out[41]

$$-\frac{\cosh(4x)}{32} + \frac{\cosh(8x)}{128} + \frac{3}{128}$$

Exercice(s) A.2

A.2.1 Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & \sin^2(2\,x)\,\cos^3(x) \\ x & \mapsto & \cos^3(x)\,\sin^4(x) \\ x & \mapsto & \cos^4(x)\,\sin^6(x) \\ x & \mapsto & \cosh(2\,x)\,\cosh^2(x) \\ x & \mapsto & \cosh^5(x)\,\sinh^8(x) \end{array}$$

A.3 Fonctions rationnelles trigonométriques

On appelle fonction rationnelle trigonométrique tout quotient de deux polynômes trigonométriques.

L'algorithme de calcul est le suivant

1. si la fonction rationnelle peut se mettre sous la forme
$$\sin(x)\,F(\cos(x)),\ \text{où } F \text{ est une fonction rationnelle}$$
on pose alors le changement de variable $t = \cos(x)$;
2. si la fonction rationnelle peut se mettre sous la forme
$$\cos(x)\,F(\sin(x)),\ \text{où } F \text{ est une fonction rationnelle}$$
on pose alors le changement de variable $t = \sin(x)$;
3. si la fonction est π-périodique, on pose alors le changement de variable $t = \tan(x)$;
4. dans les autre cas, on pose $t = \tan(x/2)$.

Tous ces changements de variable nous ramènent à des fonctions rationnelles.

Session `Wxmaxima` A.5 – Primitives de fonctions rationnelles trigonométriques

Cas où la fonction peut s'écrire $\sin(x)\,F(\cos(x))$.

```
(%i1) I : 'integrate(1/sin(x),x);
```

(%o1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$

```
(%i2) changevar(I,t=cos(x),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.Some solutions will be lost.
```

(%o2) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-1}dt$

Cas où la fonction peut s'écrire $\cos(x)\,F(\sin(x))$.

```
(%i3) I : 'integrate(1/cos(x),x);
```

(%o3) $$\int \frac{1}{\cos(x)}dx$$

```
(%i4) changevar(I,t=sin(x),t,x);
```

(%o4) $$-\int \frac{1}{t^2-1}dt$$

Cas où la fonction est π-périodique.

```
(%i5) I : 'integrate(1/(1+sin(x)^2),x);
```

(%o5) $$\int \frac{1}{\sin(x)^2+1}dx$$

```
(%i6) changevar(I,t=tan(x),t,x);
```

(%o6) $$\int \frac{1}{2\,t^2+1}dt$$

Cas général.

```
(%i7) I : 'integrate(1/(sin(x)+cos(x)^2),x);
```

(%o7) $$\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)^2}dx$$

```
(%i8) changevar(I,t=tan(x/2),t,x);
```

(%o8) $$2\int \frac{1}{(t^2+1)\,\sin(2\operatorname{atan}(t))+(t^2+1)\,\cos(2\operatorname{atan}(t))^2}dt$$

```
(%i9) trigexpand(%);
```

(%o9) $$2\int \frac{1}{(t^2+1)\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{t^2}{t^2+1}\right)^2+2\,t}dt$$

```
(%i10) ratsimp(%);
```

$$(\%o10)\ 2\int \frac{t^2+1}{t^4+2\,t^3-2\,t^2+2\,t+1}dt$$

Il n'est pas sûr que nous sachions factoriser le dénominateur de cette fonction rationnelle...

Session `Python` A.5 – Primitives de fonctions rationnelles trigonométriques

Il est souvent possible de se contenter du changement $u = \tan(x/2)$, mais il y a parfois mieux !

In [42]

```
Integral(1/sin(x), x)
```

Out [42]

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$$

In [43]

```
_.transform(x, acos(t))
```

Out [43]

$$\int \left(-\frac{1}{1-t^2}\right)\,dt$$

In [44]

```
Integral(1/cos(x), x)
```

Out[44]

$$\int \frac{1}{\cos{\left(x \right)}}\, dx$$

In[45]

```
_.transform(x, asin(t))
```

Out[45]

$$\int \frac{1}{1 - t^{2}}\, dt$$

In[46]

```
Integral(1/(1+sin(x)**2), x)
```

Out[46]

$$\int \frac{1}{\sin^{2}{\left(x \right)} + 1}\, dx$$

In[47]

```
_.transform(x, atan(t))
```

Out[47]

$$\int \frac{1}{\left(t^{2} + 1\right) \left(\frac{t^{2}}{t^{2} + 1} + 1\right)}\, dt$$

In[48]

```
1 _.args[0].simplify()
```

Out[48]

$$\frac{1}{2t^2 + 1}$$

In[49]

```
1 Integral(1/(sin(x)+cos(x)**2), x)
```

Out[49]

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos^2(x)}\, dx$$

In[50]

```
1 _.transform(x, 2*atan(t))
```

Out[50]

$$\int \frac{2}{(t^2 + 1)\left(\sin(2\,\mathrm{atan}(t)) + \cos^2(2\,\mathrm{atan}(t))\right)}\, dt$$

In[51]

```
1 _.args[0].trigsimp()
```

Out[51]

$$\frac{2}{\left(t^{2}+1\right)\left(\frac{2t}{t^{2}+1}+\frac{\left(1-t^{2}\right)^{2}}{\left(t^{2}+1\right)^{2}}\right)}$$

In[52]

```
_.simplify()
```

Out[52]

$$\frac{2\left(t^{2}+1\right)}{2t\left(t^{2}+1\right)+\left(t^{2}-1\right)^{2}}$$

In[53]

```
_.factor()
```

Out[53]

$$\frac{2\left(t^{2}+1\right)}{t^{4}+2t^{3}-2t^{2}+2t+1}$$

Exemple A.1

Revenons sur le troisième exemple. La fonction définie par

$$f(x)=\frac{1}{1+\sin^{2}(x)}$$

est définie continue sur $\mathbb{R}$, or, nous faisons le changement de variable $t = \tan(x)$ qui n'est pas défini en $\pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. Une primitive trouvée est donnée par le calcul

$$x \mapsto \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\,\tan(x)\right)}{\sqrt{2}}$$

Traçons cette fonction (voir la figure A.1, page ci-contre) ! Elle n'est pas continue, alors qu'une primitive est par définition dérivable (donc continue). Que se passe-t-il ? Nous avons oublié qu'une primitive est définie *à une constante près*. Et donc, si l'on prend $n \in \mathbb{Z}$, nous avons la primitive cherchée qui vaut

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\,\pi, +\frac{\pi}{2} + n\,\pi\right[,\ F(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\,\tan(x)\right)}{\sqrt{2}} + C_n$$

De plus, F doit être définie en $\pi/2 + n\,\pi$, on va donc recoller les morceaux en écrivant que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\,\pi^-} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\,\pi^+} F(x)$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ C_n + \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\,\tan(x)\right)}{\sqrt{2}} = C_{n+1} + \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\,\tan(x)\right)}{\sqrt{2}}$$

Ce qui donne finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ C_n + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = C_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Supposons connu $C_0 = F(0)$, on a une suite arithmétique donc

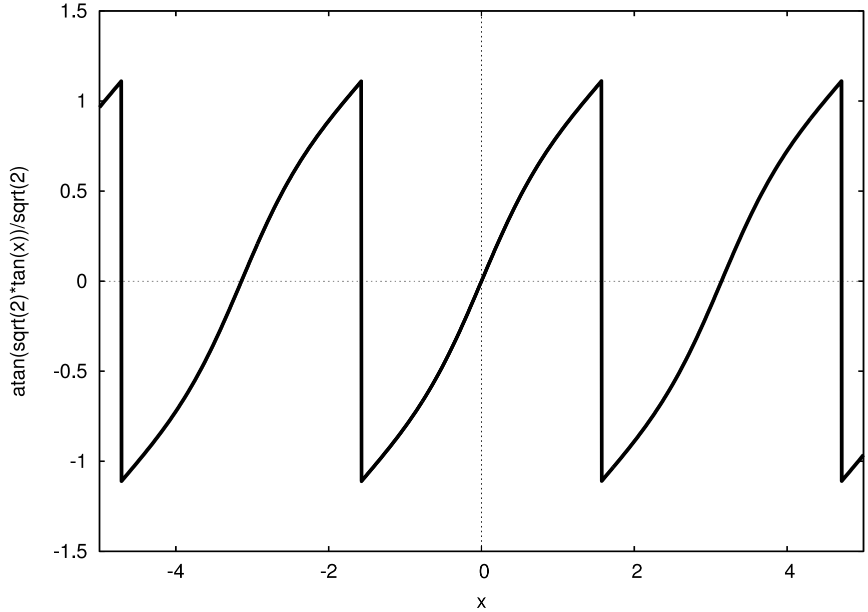
$$C_n = C_0 + n\,\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\,\tan(x)\right)}{\sqrt{2}} + C_0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor}$$

Voir la figure A.2, page 338.

Figure A.1 – Mauvaise primitive (avant recollement)



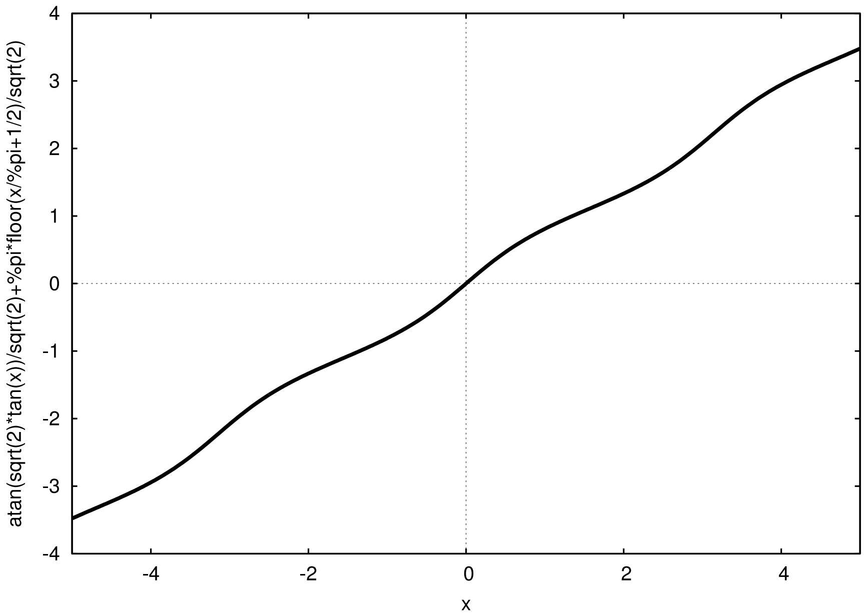
Remarque A.3

Lorsqu'on a une fraction rationnelle trigonométrique hyperbolique, on procède de la même manière que pour le cas de la trigonométrie usuelle.

Session `Wxmaxima` A.6 – Cas hyperbolique

Fonctions de la forme $\sinh(x)\,F(\cosh(x))$.

Figure A.2 – Bonne primitive (après recollement)




```
(%i1) I : 'integrate(1/sinh(x),x);
```

(%o1) $$\int \frac{1}{\sinh(x)} dx$$

```
(%i2) changevar(I,t=cosh(x),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.Some solutions will be lost.
```

(%o2) $$\int \frac{1}{t^2 - 1} dt$$

Fonctions de la forme $\cosh(x)\,F(\sinh(x))$.

```
(%i3) I : 'integrate(1/cosh(x),x);
```

(%o3) $$\int \frac{1}{\cosh(x)}\,dx$$

```
(%i4) changevar(I,t=sinh(x),t,x);
```

(%o4) $$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Plus subtil ! Fonctions qui serait π-périodique si c'était la trigonométrie usuelle.

```
(%i5) I : 'integrate(1/(cosh(x)^2+1),x);
```

(%o5) $$\int \frac{1}{\cosh(x)^2+1}\,dx$$

```
(%i6) changevar(I,t=tanh(x),t,x);
```

(%o6) $$-\int \frac{1}{t^2-2}\,dt$$

Cas général.

```
(%i7) I : 'integrate(1/(sinh(x)+cosh(x)^2),x);
```

(%o7) $$\int \frac{1}{\sinh(x)+\cosh(x)^2}\,dx$$

```
(%i8) changevar(I,t=tanh(x/2),t,x);
```

(%o8) $$-2\int \frac{1}{(t^2-1)\,\sinh(2\,\mathrm{atanh}(t))+(t^2-1)\,\cosh(2\,\mathrm{atanh}(t))^2}\,dt$$

```
(%i9) trigexpand(%);
```

(%o9) $$-2\int \frac{1}{(t^2-1)\left(\frac{t^2}{(1-t)\,(t+1)}+\frac{1}{(1-t)\,(t+1)}\right)^2+\frac{2\,t\,(t^2-1)}{(1-t)\,(t+1)}}\,dt$$

```
(%i10) ratsimp(%);
```

$$(\%o10)\quad -2\int \frac{t^2-1}{t^4-2\,t^3+2\,t^2+2\,t+1}dt$$

Mais, dans le cas de la trigonométrie hyperbolique, on peut toujours utiliser le changement de variable $t=e^x$. La fonction rationnelle obtenue est toutefois souvent plus compliquée...

```
(%i1)  I : 'integrate(1/cosh(x),x)$
       changevar(I,t=exp(x),t,x);
```

$$(\%o2)\quad \int \frac{1}{t\cosh\left(\log\left(t\right)\right)}dt$$

```
(%i3)  trigrat(%);
```

$$(\%o3)\quad 2\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

```
(%i4)

I : 'integrate(1/sinh(x),x)$
changevar(I,t=exp(x),t,x);
```

$$(\%o5)\quad \int \frac{1}{t\sinh\left(\log\left(t\right)\right)}dt$$

```
(%i6)  trigrat(%);
```

$$(\%o6)\quad 2\int \frac{1}{t^2-1}dt$$

```
(%i7)  I : 'integrate(1/(cosh(x)^2+1),x)$
       changevar(I,t=exp(x),t,x);
```

$$(\%o8)\quad \int \frac{1}{t\cosh\left(\log\left(t\right)\right)^2+t}dt$$

```
(%i9)  trigrat(%);
```

$$(\%o9)\quad 4\int \frac{t}{t^4+6\,t^2+1}dt$$

```
(%i10) I : 'integrate(1/(sinh(x)+cosh(x)^2),x)$
       changevar(I,t=exp(x),t,x);
```

$$(\%o11)\quad \int \frac{1}{t\sinh\left(\log\left(t\right)\right)+t\cosh\left(\log\left(t\right)\right)^2}dt$$

```
(%i12) trigrat(%);
```

$$(\%o12)\quad 4\int \frac{t}{t^4+2\,t^3+2\,t^2-2\,t+1}dt$$

Session Python A.6 – Cas hyperbolique

Toujours la même chose, mais ce n'est pas exactement pareil...

In [54]

```
Integral(1/sinh(x), x)
```

Out [54]

$$\int \frac{1}{\sinh\left(x\right)}\,dx$$

In [55]

```
_.transform(x, acosh(t))
```

Out[55]

$$\int \frac{1}{\sqrt{t-1}\sqrt{t+1}\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

In[56]

```
1 Integral(1/cosh(x), x)
```

Out[56]

$$\int \frac{1}{\cosh(x)}\, dx$$

In[57]

```
1 _.transform(x, asinh(t))
```

Out[57]

$$\int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

In[58]

```
1 Integral(1/(1+cosh(x)**2), x)
```

Out[58]

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)+1}\, dx$$

In [59]

```
_.transform(x, atanh(t))
```

Out [59]

$$\int \frac{1}{\left(1 - t^{2}\right) \left(1 + \frac{1}{1 - t^{2}}\right)}\, dt$$

In [60]

```
_.args[0].simplify()
```

Out [60]

$$- \frac{1}{t^{2} - 2}$$

In [61]

```
Integral(1/(sinh(x)+cosh(x)**2), x)
```

Out [61]

$$\int \frac{1}{\sinh{\left(x \right)} + \cosh^{2}{\left(x \right)}}\, dx$$

In [62]

```
_.transform(x, 2*atanh(t))
```

Out[62]

$$\int \frac{2}{\left(1 - t^{2}\right) \left(\sinh{\left(2 \operatorname{atanh}{\left(t \right)} \right)} + \cosh^{2}{\left(2 \operatorname{atanh}{\left(t \right)} \right)}\right)}\, dt$$

In[63]

```
1 _.args[0]
```

Out[63]

$$\frac{2}{\left(1 - t^{2}\right) \left(\sinh{\left(2 \operatorname{atanh}{\left(t \right)} \right)} + \cosh^{2}{\left(2 \operatorname{atanh}{\left(t \right)} \right)}\right)}$$

In[64]

```
1 _.subs({sinh(2*atanh(t)): 2*t/(1-t**2), cosh(2*atanh(t)): (1+t**2)/(1-t**2)})
```

Out[64]

$$\frac{2}{\left(1 - t^{2}\right) \left(\frac{2 t}{1 - t^{2}} + \frac{\left(t^{2} + 1\right)^{2}}{\left(1 - t^{2}\right)^{2}}\right)}$$

In[65]

```
1 _.simplify()
```

Out[65]

$$\frac{2\left(t^{2}-1\right)}{2t\left(t^{2}-1\right)-\left(t^{2}+1\right)^{2}}$$

In[66]

```
_.factor()
```

Out[66]

$$-\frac{2\left(t-1\right)\left(t+1\right)}{t^{4}-2t^{3}+2t^{2}+2t+1}$$

In[67]

```
Integral(1/cosh(x), x)
```

Out[67]

$$\int \frac{1}{\cosh\left(x\right)}\, dx$$

In[68]

```
_.transform(x, ln(t))
```

Out[68]

$$\int \frac{1}{t\cosh\left(\log\left(t\right)\right)}\, dt$$

In [69]

```
_.rewrite(exp)
```

Out [69]

$$\int \frac{1}{t\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}\right)}\, dt$$

In [70]

```
_.factor()
```

Out [70]

$$2\int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$$

In [71]

```
Integral(1/sinh(x), x)
```

Out [71]

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx$$

In [72]

```
_.transform(x, ln(t)).rewrite(exp).factor()
```

Out[72]

$$2 \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\, dt$$

In[73]

```
1 Integral(1/(1+cosh(x)**2), x)
```

Out[73]

$$\int \frac{1}{\cosh^{2}(x) + 1}\, dx$$

In[74]

```
1 _.transform(x, ln(t)).rewrite(exp).factor()
```

Out[74]

$$4 \int \frac{1}{t\left(t^{2} + 6 + \frac{1}{t^{2}}\right)}\, dt$$

In[75]

```
1 Integral(1/(sinh(x)+cosh(x)**2), x)
```

Out[75]

$$\int \frac{1}{\sinh(x) + \cosh^{2}(x)}\, dx$$

In[76]

```
_.transform(x, ln(t)).rewrite(exp).factor()
```

Out[76]

$$4\int \frac{1}{t^3+2t^2+2t-2+\frac{1}{t}}\,dt$$

Exercice(s) A.3

A.3.1 Calculer une primitive des fonctions suivantes (on s'assurera que la fonction trouvée est bien continue sur le domaine de définition de la fonction de départ)

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)}\\
x &\mapsto \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\\
x &\mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}\\
x &\mapsto \tan^3(x)\\
x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\\
x &\mapsto \frac{1}{(1+\sin^2(x))^2}\\
x &\mapsto \frac{1}{1+\tanh(x)}\\
x &\mapsto \frac{1}{\tanh^2(x)}
\end{aligned}$$

A.4 Racines de fonctions homographiques

On considère ici des fonctions rationnelles faisant, de plus, intervenir une expression du type

$$\sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}$$

L'algorithme de calcul est simple, on pose le changement de variable

$$t=\sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}$$

Session `Wxmaxima` A.7 – Racines de fonctions homographiques

```
(%i1) I : 'integrate(x*((2*x-1)/(x+2))^(1/3),x);
```

(%o1) $$\int \frac{x\,(2\,x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}dx$$

```
(%i2) changevar(I,t=((2*x-1)/(x+2))^(1/3),t,x);
```

(%o2) $$\int \frac{x\,(2\,x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}dx$$

Il faut un peu aider le logiciel...

```
(%i3) changevar(I,t^3=(2*x-1)/(x+2),t,x);
```

(%o3) $$-\int \frac{30\,t^6+15\,t^3}{t^9-6\,t^6+12\,t^3-8}dt$$

Session `Python` A.7 – Racines de fonctions homographiques

Le changement de variable est simple $u =$« ce qui nous gêne ».

In[77]

```
1  Integral(x*((2*x-1)/(x+2))**(S(1)/3), x)
```

Out[77]

$$\int x \sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+2}}\, dx$$

In[78]

```
1  _.transform(((2*x-1)/(x+2))**(S(1)/3), t)
```

Out[78]

$$\int \left(-\frac{\sqrt[3]{\frac{-1-\frac{2(2t^3+1)}{t^3-2}}{2-\frac{2t^3+1}{t^3-2}}}\left(2t^3+1\right)\left(-\frac{6t^2}{t^3-2}+\frac{3t^2\left(2t^3+1\right)}{\left(t^3-2\right)^2}\right)}{t^3-2}\right) dt$$

In[79]

```
1  _.args[0].simplify()
```

Out[79]

$$-\frac{t^2\left(30t^3+15\right)\sqrt[3]{t^3}}{t^9-6t^6+12t^3-8}$$

Exercice(s) A.4

A.4.1 Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & \dfrac{1+\sqrt{2\,x+1}}{x+1} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} \end{array}$$

A.5 Coniques

On s'intéresse ici à des fonctions rationnelles où, de plus, interviennent des expressions de la forme

$$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c},\ \text{où } a\neq 0$$

L'algorithme de calcul consiste à paramétrer le morceau de conique décrit par

$$y=\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}$$

soit,

$$y^2-a\,x^2-b\,x-c=0 \text{ avec } y\geq 0$$

On a donc deux possibilités.

1. $a>0$, c'est une hyperbole que l'on peut paramétrer avec de la trigonométrie hyperbolique en utilisant la relation [a]

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1}$$

2. $a < 0$, c'est une ellipse que l'on peut paramétrer avec de la trigonométrie usuelle en utilisant la relation

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

a. Ceux qui sont allergique à la trigonométrie hyperbolique pourront utiliser de la trigonométrie usuelle et utiliser la relation

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Session `Wxmaxima` A.8 – Coniques

Cas hyperbolique.

```
(%i1) I : 'integrate(1/(x+sqrt(x^2+x+1)),x);
```

(%o1) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}dx$$

On écrit $y^2 = x^2 + x + 1$, que l'on réorganise pour obtenir une différence de deux carrés

$$y^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

```
(%i2) changevar(I,x+1/2=sqrt(3)/2*sinh(t),t,x);
```

(%o2) $$\sqrt{3}\int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{3}\sqrt{\sinh(t)^2+1}+\sqrt{3}\sinh(t)-1}dt$$

```
(%i3) trigsimp(%);
```

(%o3) $$\sqrt{3}\int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{3}\sinh(t)+\sqrt{3}\cosh(t)-1}dt$$

Cas hyperbolique (légèrement différent).

```
(%i4) I : 'integrate(1/(x+sqrt(x^2+3*x+1)),x);
```

(%o4) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3\,x+1}+x}dx$$

On écrit $y^2-(x^2+3\,x+1)$, que l'on réorganise pour obtenir une différence de deux carrés

$$y^2-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}$$

```
(%i5) changevar(I,x+3/2=sqrt(5)/2*cosh(t),t,x);
```

(%o5) $$\sqrt{5}\int \frac{\sinh(t)}{\sqrt{5}\,\sqrt{\cosh(t)-1}\,\sqrt{\cosh(t)+1}+\sqrt{5}\cosh(t)-3}dt$$

Le logiciel « ne voit pas » que $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$... Le calcul pourrait alors continuer.
Le cas elliptique.

```
(%i6) I : 'integrate(1/(x+sqrt(2-x^2)),x);
```

(%o6) $$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}+x}dx$$

```
(%i7) changevar(I,x=sqrt(2)*cos(t),t,x);
```

(%o7) $$-\int \frac{\sin(t)}{i\,\sqrt{\cos(t)-1}\,\sqrt{\cos(t)+1}+\cos(t)}dt$$

Oups ! Le logiciel « ne voit pas » que $i\sqrt{\cos(t)-1}\sqrt{\cos(t)+1}$ n'a pas de sens et qu'on pourrait le remplacer par $\sin(t)$...

Session `Python` A.8 – Coniques

Pour paramétrer des coniques, si c'est une ellipse, il faut utiliser la trigonométrie usuelle, si c'est une hyperbole, la trigonométrie... hyperbolique !

In[80] – Hyperbole

```
Integral(1/(x+sqrt(x**2+x+1)), x)
```

Out[80]

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$$

In[81]

```
_.transform(x, -S(1)/2+sqrt(3)/2*sinh(t))
```

Out[81]

$$\int \frac{\sqrt{3}\cosh\left(t\right)}{2\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\sinh\left(t\right)}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\sinh\left(t\right)}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}\sinh\left(t\right)}{2} - \frac{1}{2}\right)}\, dt$$

In[82]

```
_.trigsimp()
```

Out[82]

$$\int \frac{\sqrt{3}\cosh\left(t\right)}{\sqrt{3}\sqrt{\cosh^2\left(t\right)} + \sqrt{3}\sinh\left(t\right) - 1}\, dt$$

In[83] – Hyperbole (autre branche)

```
Integral(1/(x+sqrt(x**2+3*x+1)), x)
```

Out[83]

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 1}}\, dx$$

In[84]

```
_.transform(x, -S(3)/2+sqrt(5)/2*cosh(t))
```

Out[84]

$$\int \frac{\sqrt{5}\sinh(t)}{2\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}\cosh(t)}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{5}\cosh(t)}{2} - \frac{7}{2}} + \frac{\sqrt{5}\cosh(t)}{2} - \frac{3}{2}\right)}\, dt$$

In[85]

```
_.trigsimp()
```

Out[85]

$$\int \frac{\sqrt{5}\sinh(t)}{\sqrt{5}\sqrt{\sinh^2(t)} + \sqrt{5}\cosh(t) - 3}\, dt$$

In[86] – Ellipse (cercle)

```
Integral(1/(x+sqrt(2-x**2)), x)
```

Out[86]

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}\,dx$$

In[87]

```
_.transform(x, sqrt(2)*cos(t))
```

Out[87]

$$\int \left(-\frac{\sqrt{2}\sin(t)}{\sqrt{2-2\cos^2(t)}+\sqrt{2}\cos(t)}\right)dt$$

Exercice(s) A.5

A.5.1 Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \frac{2\,x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\\
x &\mapsto \sqrt{x^2-5\,x+6}\\
x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\\
x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}
\end{aligned}$$

Figure A.3 – Équation différentielle linéaire qualitative