Révision
Td-Tp 16
Decembre 2023

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n \; : \; \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n^\alpha \times (1 + n\,x^2)} \end{array}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
3. On suppose que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{s} \times (1 + s\,x^2)} \,\mathrm{d}s.$$
   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \pi - 2 \arctan(x).$$
   (c) En déduire que $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ n'est pas continue en 0.
4. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

1. Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente.

   Sinon, on a
   (a) $u_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   (b) $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\,n^{1+\alpha}}$
   (c) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{x\,n^{1+\alpha}}$ est une série de Riemann convergente ($1 + \alpha > 1$)

   et, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente.

   $$\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[.}$$

2. u_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ est :

$$u_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n^\alpha \times (1+n\,x^2)^2}.$$

Ainsi, u_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ et, puisque $u_n(0) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)$:

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \left|u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}.$$

D'après les séries de Riemann :

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \text{ est convergente} \iff \alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[\text{ si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

3. (a) Pour $x > 0$ fixé, la fonction $v_x\ :\ s \mapsto \dfrac{x}{s^\alpha \times (1+s\,x^2)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et décroissante :

$$u_n(x) = v_x(n) \geq \int_n^{n+1} v_x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$, pour $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} v_x(s)\,\mathrm{d}s = \int_1^{N+1} v_x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par positivité de v_x, $\int_1^{+\infty} v_x(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \int_1^{+\infty} v_x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puisque $v_x(s) \geq \dfrac{x}{\sqrt{s} \times (1+s\,x^2)}$, par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{s}\times(1+s\,x^2)}\,\mathrm{d}s.}$$

(b) Pour $x > 0$ fixé, la fonction $s \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{s}\times(1+s\,x^2)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $t = \sqrt{s} = \varphi(s)$ est un C^1-difféomorphisme de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.
Puisque $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}s}{2\sqrt{s}}$, par changement de variables, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{s}\times(1+s\,x^2)}\,\mathrm{d}s = \int_1^{+\infty} \frac{2x}{1+t^2\,x^2}\,\mathrm{d}t = \Big[2\,\arctan(t\times x)\Big]_1^{+\infty}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \pi - 2\,\arctan(x).}$$

(c) Puisque $\lim_{x\to 0^+} 2\arctan(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$:

$$\boxed{x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ n'est pas continue en } 0.}$$

4. Si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$.

   Si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ alors :

   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0, +\infty[$;
   (b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$;

   donc, par le Théorème de continuité sous le signe somme : $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur $[0, +\infty[$ et notamment en 0. D'après la question précédente : $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [0, +\infty[\text{ si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 1$ et on note :

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n \times (1 + n\,x^2)} \end{array} \quad \text{et} \quad S : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n \times (1 + n\,x^2)} \end{array}.$$

1. Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.
4. Déterminer $S(0)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ quand $x \to 0^+$.

1. Puisque

   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0, +\infty[$;
   (b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$;

   par le Théorème de continuité sous le signe somme :

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$u_n'(x) = \frac{1 - n\,x^2}{n \times (1 + n\,x^2)^2}.$$

Notamment, pour tout $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$:

$$|u_n'(x)| = \frac{|1 - n\,x^2|}{n \times (1 + n\,x^2)^2} \leq \frac{1}{n \times (1 + n\,x^2)} \leq \frac{1}{a^2\,n^2},$$

et $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.
Puisque

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$;
(b) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$;
(c) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$;

par dérivation sous le signe somme : $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a,+\infty[=]0,+\infty[.}$$

3. Puisque

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$;
(b) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

par interversion de limites :

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.}$$

Posons $v_n(x) = \dfrac{x^2}{n \times (1 + n\,x^2)}$ alors $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc :

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$;
(b) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{n^2}$;

par interversion de limites : $xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \neq 0.$

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.}$$

4. Puisque $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0.}$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $v_x \,:\, s \mapsto \dfrac{x}{s \times (1 + s\,x^2)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et décroissante :

$$u_n(x) = v_x(n) \geq \int_n^{n+1} v_x(s)\,\mathrm{d}s \geq v_x(n+1) = u_{n+1}(x).$$

Par comparaison série-intégrale, $\int_1^{+\infty} v_x(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente et :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \int_1^{+\infty} v_x(s)\,\mathrm{d}s \geq \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(x) = S(x) - \frac{x}{1+x^2}.$$

Puisque :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} v_x(s)\,\mathrm{d}s &= \int_1^{+\infty} \frac{x}{s \times (1 + s\,x^2)}\,\mathrm{d}s \\ &= \left[x \times \ln\left(\frac{s}{1 + s\,x^2}\right)\right]_1^{+\infty} = -2x\,\ln(x) + x\,\ln(1+x^2),\end{aligned}$$

il vient :

$$-2x\,\ln(x) + x\,\ln(1+x^2) \leq S(x) \leq -2x\,\ln(x) + x\,\ln(1+x^2) + \frac{x}{1+x^2}.$$

Par encadrement : $\dfrac{S(x)}{-2x\,\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1 \neq 0$ et :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -2x\,\ln(x).}$$

Exercice 3

On rappelle que la fonction Γ est définie par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \times e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x \times \Gamma(x).$$

1. Soit u et v deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s \times \int_{-\infty}^{+\infty} v(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} u * v(s)\,\mathrm{d}s.$$

2. Déduire du résultat de la question précédente que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) \times \Gamma(y) = \Gamma(x+y) \times \int_0^1 t^{x-1} \times (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^1 t^{x-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = 2^{1-2\,x} \times \int_{-1}^1 (1-t^2)^{x-1}\,\mathrm{d}t = 2^{1-2\,x} \times \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

4. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) \times \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\,x} \times \Gamma(2\,x) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

1. Commençons par vérifier que les intégrales écrites ont un sens. A gauche de l'égalité, c'est clair car u et v sont intégrables. Pour la droite, c'est un théorème du cours que comme $(u,v) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ alors $u * v \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. De plus :
$$\int_{\mathbb{R}} u * v(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(t) \times v(s-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$
Il s'agit d'appliquer la théorème de Fubini-Lebesgue. Par le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(t) \times v(s-t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(t) \times v(s-t)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
Donc, après le changement de variable $x = s - t$:
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(t) \times v(s-t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|\,\mathrm{d}t \times \int_{\mathbb{R}} |v(x)|\,\mathrm{d}x.$$
Mais cette quantité est finie comme u et v sont intégrables, donc la fonction
$$(t,s) \mapsto u(t) \times v(s-t)$$
est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc utiliser le théorème de Fubini-Lebesgue, qui donne :
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(t) \times v(s-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(t) \times v(s-t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{d}t \times \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. On utilise le résultat de la question précédente pour
$$u(t) = t^{x-1} \times e^{-t} \times \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t), \quad v(t) = t^{y-1} \times e^{-t} \times \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$
Calculons $u * v$:
$$u * v(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leqslant 0 \\ \int_0^s t^{x-1} \times (s-t)^{y-1} \times e^{-s}\,\mathrm{d}t & \text{sinon} \end{cases}$$
donc, si $s > 0$, en effectuant le changement de variable $v = \frac{t}{s}$:
$$u * v(s) = e^{-s} \times s^{x+y-1} \int_0^1 v^{x-1} \times (1-v)^{y-1}\,\mathrm{d}v.$$
D'où :
$$\begin{aligned}\Gamma(x) \times \Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-s} \times s^{x+y-1} \int_0^1 v^{x-1} \times (1-v)^{y-1}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s \\ &= \Gamma(x+y) \times \int_0^1 v^{x-1} \times (1-v)^{y-1}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$
3. Pour la première égalité, on effectue le changement de variable $t = \frac{u+1}{2}$ dans l'intégrale :
$$\int_0^1 t^{x-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \left(\frac{u+1}{2}\right)^{x-1} \times \left(\frac{-u+1}{2}\right)^{x-1} \frac{\mathrm{d}\,u}{2} = 2^{1-2\,x} \times \int_{-1}^1 (1-u^2)^{x-1}\,\mathrm{d}u.$$
Pour la deuxième égalité, on effectue le changement de variable $u^2 = t$, en faisant bien attention d'intégrer sur un intervalle où il est légitime de le faire :
$$\int_{-1}^1 (1-u^2)^{x-1}\,\mathrm{d}u = 2 \times \int_0^1 (1-u^2)^{x-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 (1-t)^{x-1} \times t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

4. On part de la formule de la question 2 :

$$\Gamma(x) \times \Gamma(x) = \Gamma(2\,x) \times \int_0^1 t^{x-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Mais, par la question 3 :

$$\int_0^1 t^{x-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = 2^{1-2\,x} \times \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Et, encore par la question 4 :

$$\Gamma(x) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \times \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} \times (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

En combinant ces trois expressions, on en déduit que :

$$\Gamma(x) \times \Gamma(x) \times \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \Gamma(2\,x) \times 2^{1-2\,x} \times \Gamma(x) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le résultat s'obtient alors en divisant par $\Gamma(x)$, qui est strictement positif.