Topologie et Calcul différentiel – TD 5: Topologie : ouvert, intérieur, frontière, voisinages, points isolés

21 avril 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manier les outils de topologie qui nous serviront plus tard.

Exercice 1 :

Soit E un espace-vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que l'intérieur de F est non-vide.

1. Montrer que $F = E$.

> Soit $x \in Int(F)$. Il existe $r > 0$ tel que $BO(x, r) \subset F$.
>
> Montrons que $BO(0, r) \subseteq F$. Soit $y \in BO(0, r)$. Alors $y = x - (x - y) \in F$ car $x \in F$, $x - y \in BO(x, r) \subset F$ et F est un espace vectoriel. Donc, $BO(0, r) \subseteq F$.
>
> Montrons que $E = F$. Soit $z \in E \backslash BO(0, r)$. Alors $||z|| \geqslant r > 0$. Donc, $z = \frac{2 \cdot ||z||}{r} \cdot \left(\frac{r}{2} \cdot \frac{z}{||z||} \right) \in F$ car $\frac{r}{2} \cdot \frac{z}{||z||} \in BO(0, r)$ et F est un espace vectoriel. Donc $E = BO(0, r) \cup (E \backslash BO(0, r)) = F$.

Exercice 2 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

1. Montrer que A est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leqslant M$.

> ▷ On suppose que A est bornée. Il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $A \subset BO(x_0, r)$.
> Alors pour tout $x \in A$,
>
> $$\|x\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| \leqslant r + \|x_0\|.$$
>
> ▷ Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leqslant M$. Alors $A \subset BO(0_E, M + 1)$, donc A est bornée.

Dans la suite, on suppose que A est bornée.

2. Montrer que $\overline{A}$ et ∂A sont bornées.

> ▷ Comme A est bornée, il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leqslant M$.
> ▷ Soit $x \in \overline{A}$. Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$\|x\| \leqslant \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\|x_n\|}_{\leqslant M}$$
>
> Donc $\|x\| \leqslant M$. Ainsi

$$\boxed{\overline{A} \text{ est bornée.}}$$

▷ Comme ∂A est inclus dans $\overline{A}$,

$$\boxed{\partial A \text{ est bornée.}}$$

3. Lorsque $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, montrer que $\operatorname{diam}(\overset{\circ}{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$. Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

▷ Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a $d(x, y) \leqslant \operatorname{diam}(A)$ pour tout $(x, y) \in (\overset{\circ}{A})^2$. Donc

$$\boxed{\operatorname{diam}(\overset{\circ}{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A).}$$

▷ Dans $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle, posons $A = [1, 2] \cup \{3\}$. Alors

$$\boxed{\operatorname{diam}(\overset{\circ}{A}) = \operatorname{diam}(]1, 2[) = 1 < 2 = \operatorname{diam}(A).}$$

4. Montrer que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

▷ Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(\overline{A})$.
▷ Soit $(x, y) \in \overline{A}^2$. Il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, y) \leqslant \underbrace{d(x, x_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{d(x_n, y_n)}_{\leqslant \operatorname{diam}(A)} + \underbrace{d(y_n, y)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc $d(x, y) \leqslant \operatorname{diam}(A)$. Finalement, $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$ et

$$\boxed{\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A}).}$$

5. (a) Montrer que $\operatorname{diam}(\partial A) \leqslant \operatorname{diam}(A)$.

Comme $\partial A \subset \overline{A}$ et $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$, on a

$$\boxed{\operatorname{diam}(\partial A) \leqslant \operatorname{diam}(A).}$$

(b) Soit $x \in A$ et $u \in E \setminus \{0\}$. On considère l'ensemble $X = \{t \geqslant 0,\ x + t.u \in A\}$. Montrer que $t_{x,u} = \sup X \in \mathbb{R}$ est bien défini.

▷ Comme A est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall y \in A, \|y\| \leqslant M$.
▷ Soit $t \in X$. On a

$$|t|.\|u\| = \|t.u\| \leqslant \|x + t.u\| + \|x\| \leqslant M + \|x\|.$$

Donc $t \leqslant \dfrac{M + \|x\|}{\|u\|}$. Ainsi, X est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
▷ De plus, X est non vide car $0 \in X$. Donc

$$\boxed{t_{x,u} = \sup X \in \mathbb{R} \text{ est bien défini.}}$$

(c) Montrer que $x + t_{x,u}u \in \partial A$.

▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + (t_{x,u} + \frac{1}{n})u$. Par définition de $t_{x,u}$, $y_n \notin A$. On a de plus $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + t_{x,u}u$, donc $x + t_{x,u}u \in \overline{E \setminus A}$.
▷ Par définition de $t_{x,u}$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t_{x,u}$ et $x + t_n.u \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $x + t_n.u \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + t_{x,u}.u$, donc $x + t_{x,u}u \in \overline{A}$.

$$\boxed{x + t_{x,u}u \in \partial A.}$$

(d) Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer qu'il existe x' et y' alignés avec x et y tels que $x' \in \partial A$, $y' \in \partial A$ et $\|x' - y'\| \geqslant \|x - y\|$.

▷ Posons $u = y - x$. On a alors $1 \in X$, donc $t_{x,y-x} \geqslant 1$. On pose $x' = x + t_{x,y-x}.(y - x) \in \partial A$.
▷ De même, pour y et $u = x - y$, on a $t_{y,x-y} \geqslant 1$ et on pose $y' = y + t_{y,x-y}.(x - y) \in \partial A$.
▷ On a alors

$$\|y' - x'\| = \|y + t_{y,x-y}.(x - y) - x - t_{x,y-x}.(y - x)\| = |t_{y,x-y} + t_{x,y-x} - 1|.\|x - y\| \geqslant \|x - y\|.$$

(e) Montrer que $\mathrm{diam}(\partial A) = \mathrm{diam}(A)$.

▷ Par définition du diamètre, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{diam}(A)$.
▷ D'après la question précédente, il existe ainsi des suites $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ∂A telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x'_n, y'_n) \geqslant d(x_n, y_n)$.
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $d(x_n, y_n) \leqslant \mathrm{diam}(\partial A)$. Par passage à la limite, on obtient $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(\partial A)$.
▷ D'après la question 5.(a), on a $\mathrm{diam}(\partial A) \leqslant \mathrm{diam}(A)$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{diam}(\partial A) = \mathrm{diam}(A).}$$

Exercice 3 :

Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ **muni de la norme infinie** et $F = \{f \in E,\ f \text{ croissante}\}$.

1. Soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

Donc

$$\boxed{f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).}$$

2. Montrer que F est fermé dans E.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \in E$. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \leqslant y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(x) \leqslant f_n(y).$$

D'après la question 1, on en déduit par passage à la limite :

$$f(x) \leqslant f(y).$$

Donc f est croissante.

$$\boxed{F \text{ est fermé dans } E.}$$

3. Montrer que $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

Soit $f \in F$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que

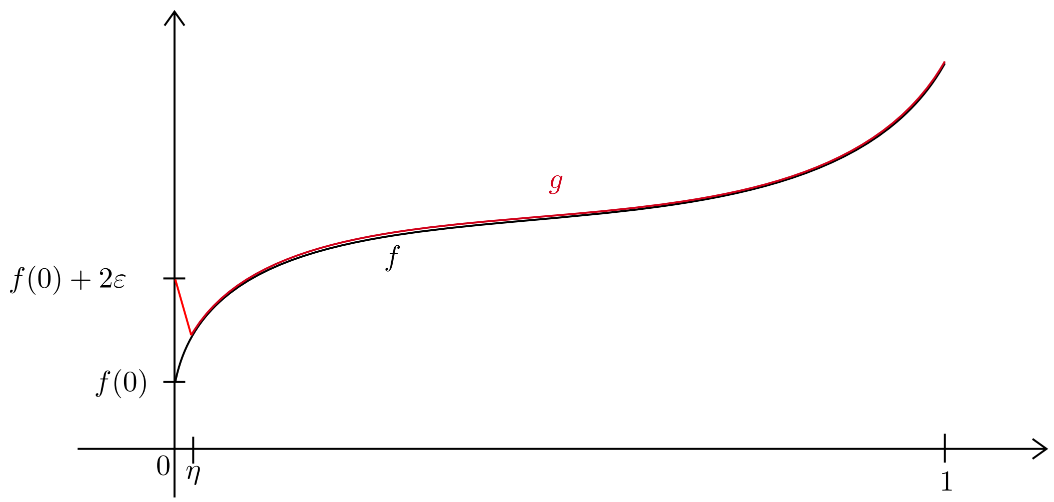
$$\forall x \in [0,\eta], |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Comme f est croissante, on a même

$$\forall x \in [0,\eta], f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta) < f(0) + \varepsilon.$$

On définit la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(0) + 2\varepsilon + \dfrac{f(\eta) - 2\varepsilon - f(0)}{\eta} x & \text{si } x \in [0,\eta[\\ f(x) & \text{si } x \in [\eta, 1] \end{cases} \end{array}$$



▷ La fonction g est continue sur $[0,1]$. Elle n'est pas croissante car $g(0) = 2\varepsilon > f(\eta) = g(\eta)$.
▷ Soit $x \in [0,\eta]$. Comme f est croissante sur $[0,\eta]$ et g est décroissante sur $[0,\eta]$, on a

$$g(\eta) - f(\eta) \leqslant g(x) - f(x) \leqslant g(0) - f(0)$$

d'où

$$0 \leqslant g(x) - f(x) \leqslant 2\varepsilon.$$

De plus, pour tout $x \in [\eta, 1]$, on a $g(x) = f(x)$. On en déduit que $\|g - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

$\triangleright$ Finalement, on a montré que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in BO(f, 2\varepsilon) \setminus F$. Donc $f \notin \mathring{F}$. Comme $\mathring{F} \subset F$, on en déduit

$$\boxed{\mathring{F} = \emptyset.}$$

Exercice 4

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, $C_1 = \{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+\}$, $C_2 = \{f \in E,\ f(0) = f(1)\}$.

1. On munit E de la norme infinie, préciser alors $\overline{C_k}$ et $\mathring{C_k}$ pour $k \in \{1, 2\}$.

— $\bar{C}_1$.
Soit $f \in \bar{C}_1$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {C_1}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Soit $x \in [0,1]$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$. D'où $f(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Comme $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a alors $f(x) \geqslant 0$. D'où $f \in C_1$. L'ensemble C_1 est donc fermé,

$$\bar{C}_1 = C_1$$

— $\mathring{C}_1$.
Soit $f \in \mathring{C}_1$, il existe $r > 0$ tel que, $\|f - g\|_\infty < r \Rightarrow g \in \mathring{C}_1 \subset C_1$. En particulier $x \mapsto f(x) - \frac{r}{2} \in \mathring{C}_1 \subset C_1$, par conséquent,

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant \frac{r}{2} > 0$$

On a donc $\mathring{C}_1 \subset \left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$.
Soit maintenant $f \in \left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$. Soit $\delta = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$. Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes, on a donc $\delta > 0$. Alors la boule ouverte $BO(f, \frac{\delta}{2})$ est incluse dans $\left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$. On en conclut que l'ensemble $\left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$ est un ouvert de E inclus dans C_1.
$\mathring{C}_1$ est le plus grand ouvert inclus dans C_1, d'où $\left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\} \subset C_1$. En conclusion, on a

$$\mathring{C}_1 = \left\{f \in E,\ f([0,1]) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$$

— $\bar{C}_2$.
Soit $f \in \bar{C}_2$, on a $|f(0) - f_n(0)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$. D'où $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, on a alors $f(0) = 0$ et de même $f(1) = 1$. D'où $f \in C_2$. L'ensemble C_2 est donc fermé,

$$\bar{C}_2 = C_2$$

— $\mathring{C}_2$.
Soit $f \in \mathring{C}_2$, il existe $r > 0$ tel que, $\|f - g\|_\infty < r \Rightarrow g \in \mathring{C}_2 \subset C_2$. En particulier $g : x \mapsto f(x) - \frac{r}{2} \in \mathring{C}_2 \subset C_2$, ce qui est absurde car $g(0) = -\frac{r}{2} \neq 0$ Ainsi C_2 est d'intérieur vide

$$\mathring{C}_2 = \emptyset$$

2. On munit E de la norme 1, déterminer $\overline{C_2}$ et $\mathring{C}_2$.

Montrons que $\overline{F} = E$. Soit $f \in E$, montrons qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C_2^{\mathbb{N}^*}$ telle que : $\|f_n - f\|_{1,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Posons :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1) + n \times \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(1)\right) \times x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ f(x) & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ et $f_n(0) = f_n(1) = f(1)$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C_2^{\mathbb{N}^*}$. De plus, f est continue sur $[0,1]$ donc est bornée (il existe $M \geqslant 0$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant M$). D'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|f_n - f\|_{1,[0,1]} = \int_0^{\frac{1}{n}} \left| f(x) - f(1) - n \times \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(1)\right) \times x \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{2\,M}{n} + \frac{2\,M}{2\,n} \leqslant \frac{3\,M}{n}.$$

Or, f est continue en 0, donc : $\|f_n - f\|_{1,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $f \in \overline{C_2}$, autrement dit : $E \subset \overline{C_2}$. L'autre inclusion est claire, donc,

$$\boxed{\overline{C_2} = E.}$$

Remarque : Pour la norme 1, C_2 est dense dans E.

Déterminons $\mathring{C}_2$. Soit $f \in \mathring{C}_2$. Par définition, $f \in E$ et il existe $r > 0$ tel que : $BO(f,r) \subset \mathring{C}_2 \subset C_2$. La fonction $g : x \mapsto f(x) + r \times x$ appartient à $BO(f,r)$ car :

$$\|g - f\|_{1,[0,1]} = \int_0^1 r \times x \,\mathrm{d}x = \frac{r}{2} < r.$$

D'où, $g \in C_2$ et $f(0) = f(1) + r$. Or, $\mathring{C}_2 \subset C_2$, donc $f(0) = f(1)$. D'où $r = 0$, ce qui n'est pas. Donc il n'existe pas de fonction $f \in \mathring{C}_2$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathring{C}_2 = \emptyset.}$$

Exercice 5

Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites à valeurs réelles bornées. On munit E de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants

1. Les suites presque nulles $\{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\}$.

Notons $P = \{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\}$.
Soit $u \in E$ une suite qui tend vers 0 à l'infini. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ il existe alors un indice $\varphi(N)$ tel que

$$\forall k \geqslant \varphi(N) \quad |u_k| \leqslant \frac{1}{N}$$

Posons alors u^N la suite définie par

$$u_k^{(N)} = \begin{cases} u_k \text{ si } k \leqslant \varphi(N) \\ 0 \text{ si } k > \varphi(N) \end{cases}$$

La suite $u^{(N)}$ est alors une suite presque nulle et on a $\|u - u^{(N)}\| \leqslant \frac{1}{N}$. Ainsi la suite de suites $\left(u^{(N)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.

D'où $\{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset \bar{P}$.
Soit maintenant $v \in E \setminus \{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$. Montrons que $v \notin \bar{A}$. Par l'absurde supposons qu'il existe une suite de suites presque nulles $(v^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ qui converge vers v pour la norme $\| \bullet \|_\infty$. La suite v est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge, comme v ne converge pas vers 0 il existe une sous-suite qui converge vers un réel $x \neq 0$. Soit φ une extraction telle que $\lim_{n\to\infty} v_{\varphi(n)} = x$. Soit M tel que $\forall N \geqslant M$, $\|v - v^{(N)}\|_\infty < \frac{|x|}{2}$. On a alors, pour $N \geqslant M$

$$|v_{\varphi(n)} - v^{(N)}_{\varphi(n)}| \leqslant \|v - v^{(N)}\|_\infty < \frac{|x|}{2}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} |v_{\varphi(n)} - v^{(N)}_{\varphi(n)}| \leqslant \frac{|x|}{2}$$

C'est-à-dire

$$|x - 0| \leqslant \frac{|x|}{2}$$

ce qui est absurde.
Ainsi on a bien

$$\{u \in l^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} = \bar{P}$$

Soit $u \in P$, soit $\varepsilon > 0$ et soit v la suite constante égale à ε. Alors $u+v \in BO(u, 2\varepsilon)$ et $u+v \notin P$. D'où $u \notin \mathring{P}$. Ainsi $\mathring{P} = \emptyset$

2. Les suites convergentes.

Notons C l'ensemble des suites convergentes
Soit $(v^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de suites convergentes qui converge vers une suite u. On a donc :

(a) Chaque $v^{(p)}$ converge, donc, il existe un réel λ_p tel que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_p\ \Rightarrow\ |v^{(p)}_n - \lambda_p| \leq \epsilon.$$

(b) La suite $(v^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers u. On a donc :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p \geq P\ \Rightarrow\ \|v^{(p)} - u\|_\infty \leq \epsilon.$$

Notre objectif est de montrer que u converge. Mais quelle peut être la limite ? Très probablement la limite de la suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

(a) *Montrons que la suite* $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

En effet, on a, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|\lambda_p| \leq |\lambda_p - v^{(p)}_n| + |v^{(p)}_n - u_n| + |u_n|.$$

Le troisième terme est majoré par $\|u\|_\infty$ (et donc indépendamment de n), le deuxième par $\|v^{(p)} - u\|_\infty$, terme général d'une suite convergente vers 0 et donc borné indépendamment de p. Si l'on prend $n \geq N_p$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ |\lambda_p| \leq \epsilon + \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\|v^{(p)} - u\|_\infty\right) + \|u\|_\infty.$$

Or, le théorème de Bolzano-Weierstraß nous assure qu'alors la suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence μ. Soit φ une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\lambda_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mu.$$

(b) *Montrons que u converge vers* μ.

On a :
$$|u_n - \mu| \leq |u_n - v_n^{(\varphi(p))}| + |v_n^{(\varphi(p))} - \lambda_{\varphi(p)}| + |\lambda_{\varphi(p)} - \mu|.$$
Le premier terme est majoré par $\|u - v^{(\varphi(p))}\|_\infty$ (donc indépendamment de n), pour un $\epsilon > 0$ fixé, on peut trouver P_1 tel que :

$$\forall p \geq P_1,\ \|u - v^{(\varphi(p))}\|_\infty \leq \epsilon.$$

Le troisième terme tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, on peut donc trouver un P_2 tel que :
$$\forall p \geq P_2,\ |\lambda_{\varphi(p)} - \mu| \leq \epsilon.$$
Prenons $p = \max(P_1, P_2)$, on peut alors trouver un N tel que :

$$\forall n \geq N,\ |v_n^{(\varphi(p))} - \lambda_{\varphi(p)}| \leq \epsilon.$$

On a finalement :
$$\forall n \geq N,\ |u_n - \mu| \leq 3\,\epsilon.$$
En conclusion C est fermé, $\bar{C} = C$.
Déterminons les points intérieurs de l'ensemble des suites convergentes. Soit u une suite convergente et soit $\varepsilon > 0$. Posons alors v la suite définie par $v_n = u_n + (-1)^n \times \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$, c'est-à-dire $v \in BO(u, \varepsilon)$ et la suite v ne converge pas. On en déduit que $\mathring{C} = \emptyset$

Exercice 6 :

Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R}, |\ |)$ tel que tous les points de A sont isolés. Montrer que A est au plus dénombrable.

Soit $a \in A$. On sait que A est un point isolé, donc il existe $r_a > 0$ tel que $A \cap BO(a, r_a) = \{a\}$. De plus, dans $\mathbb{R}$, on a $BO(a, r_a) =]a - r_a, a + r_a[$. Ainsi, $A \cap]a - r_a, a + r_a[= \{a\}$. De plus, il existe $q_a \in \mathbb{Q} \cap \left]a - \frac{r_a}{2}, a + \frac{r_a}{2}\right[$. Comme A ne possède que des points isolés, on peut définir l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \mapsto & \mathbb{Q} \\ a & \mapsto & q_a. \end{array} \right.$$

Montrons que f est injective. Supposons que $f(a_1) = f(a_2)$ où a_1 et a_2 sont dans A. Par définition de f, on a :
$$|a_1 - f(a_1)| < \frac{r_{a_1}}{2} \quad \text{et} \quad |a_2 - f(a_2)| < \frac{r_{a_2}}{2}.$$
D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$|a_1 - a_2| \leqslant |a_1 - f(a_1)| + |f(a_1) - a_2| = |a_1 - f(a_1)| + |f(a_2) - a_2| < \frac{r_{a_1} + r_{a_2}}{2}.$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer $r_{a_2} \leqslant r_{a_1}$. Donc,

$$|a_1 - a_2| < r_{a_1}.$$

D'où $a_2 \in A \cap]a_1 - r_{a_1}, a_1 + r_{a_1}[= \{a_1\}$. Autrement dit $a_1 = a_2$. La fonction f est bien injective, ce qui montre que :

$$\boxed{A \text{ est au plus dénombrable.}}$$

Remarque : Afin d'éviter les calculs, on aurait pu choisir $q_a \in]a, r_a[$.
Remarque : On pouvait aussi démontrer l'injectivité par contraposée, ou par surjectivité.