



Institut  
Mines-Télécom

# Électronique des Systèmes d'acquisition **ELEC101**

Chadi Jabbour

Échantillonnage et TZ

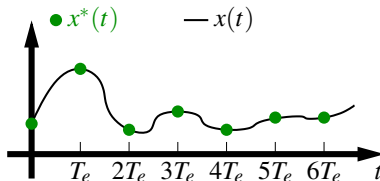


# Signaux analogiques continus et discrets

Deux grandes classes de signaux analogiques sont distinguées :

- ▶ Signaux à temps continu, noté  $t$ , fonction  $x(t)$  ;
- ▶ Signaux à temps discret, noté  $k$ , séquence  $x[k]$ .

Signal continu  $x(t)$   $T_e$  Signal échantillonné  $x[k] = x^*(nT_e)$   
Période d'échantillonnage

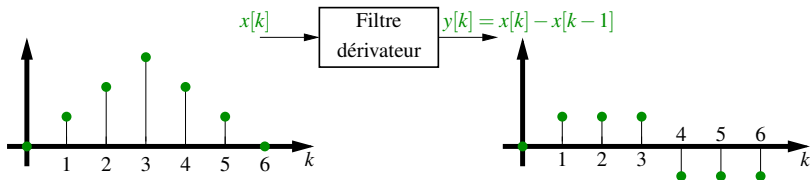


- ▶ Caractérisé par une relation entrée sortie  $y[n] = f(x[n])$
- ▶ Les valeurs en entrée et en sortie ne sont connues qu'à des instants discrets
- ▶ L'intervalle de temps qui sépare deux de ces instants est la période d'échantillonnage notée  $T_e$  ou  $T_s$  en anglais

## Théorème de Nyquist-Shannon

L'échantillonnage *sans perte* d'un signal exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la bande passante de ce signal.

# Systèmes analogiques: x et y échantillonnés

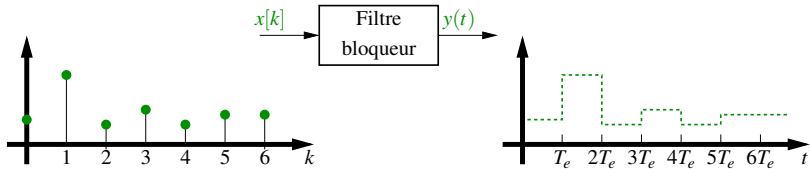


Ce filtre réalise la différence entre 2 échantillons consécutifs d'où son nom de dérivateur.

Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une 'équation aux différences finies' d'ordre  $n$  à coefficient  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  réels et constants.

$$y[k] = - \sum_{i=1}^n \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^m \alpha_j x[k-j] \quad m \text{ et } n \text{ sont finis.}$$

# Systèmes analogiques: $x$ échantillonné et $y$ continu

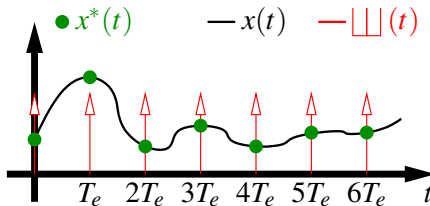


Interpolation d'ordre 0 ou blocage

La valeur de l'entrée est bloquée sur une période d'échantillonnage

## Échantillonnage

L'échantillonnage peut être modélisé par une multiplication (temporelle) du signal analogique avec un peigne de Dirac



$$x^*(nT_e) = x(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$x^*(nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

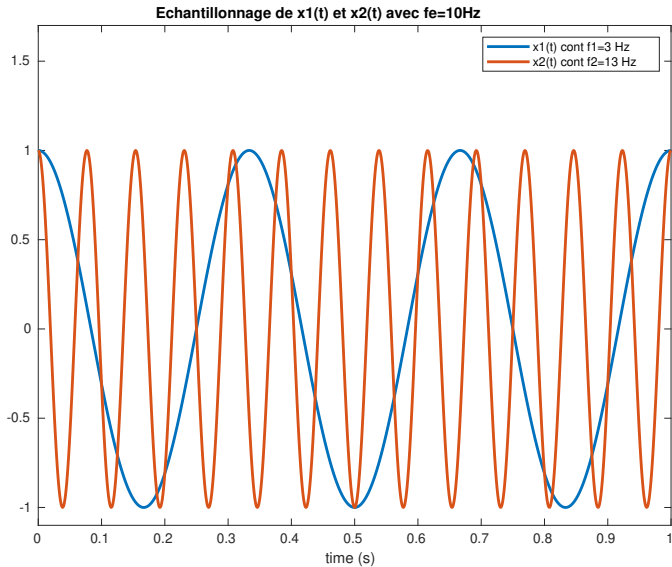
## Exemple fonction sinusoidale

Soit  $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$  et  $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$  2 signaux qu'on échantillonnera à une fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$ . On prendra  $f_2 = f_e + f_1$

$$x_1^*(t) = \cos(2\pi f_1 t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_1 nT_e) \delta(t - nT_e)$$

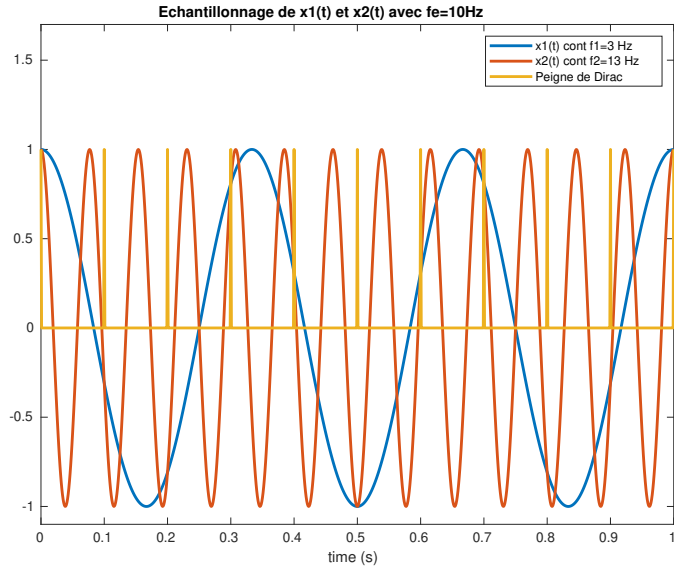
$$\begin{aligned} x_2^*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_2 nT_e) \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\underbrace{2\pi f_e nT_e}_{2\pi n} + 2\pi f_1 nT_e) \delta(t - nT_e) = x_1^*(t) \end{aligned}$$

# Exemple Repliement du signal

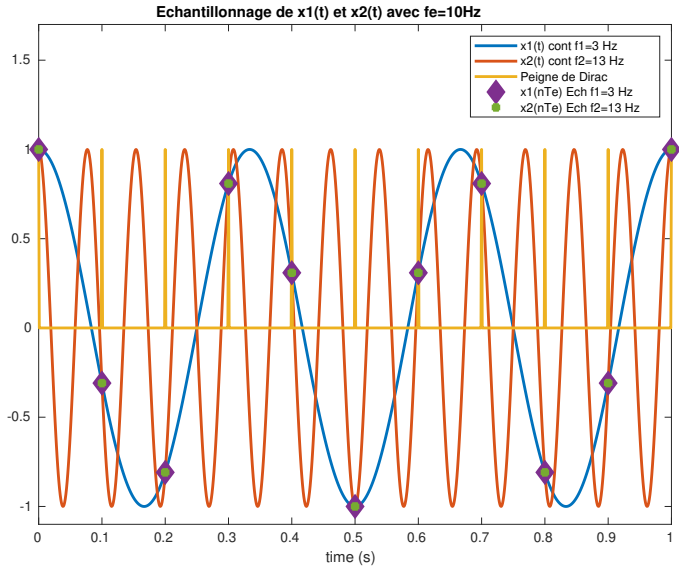




# Exemple Repliement du signal



# Exemple Repliement du signal



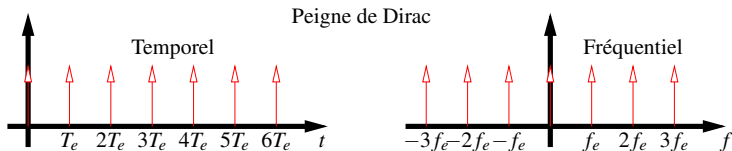
# Impact fréquentiel de l'échantillonnage

On peut démontrer en utilisant les séries de Fourier que

$$\sqcup_{T_e}(t) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_e t}$$

La transformée de Fourier de  $\sqcup_{T_e}(t)$  est donc donnée par

$$TF\{\sqcup_{T_e}(t)\} = \sqcup(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqcup_{T_e}(t) e^{-j2\pi ft} dt = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e)$$



# Impact fréquentiel de l'échantillonnage

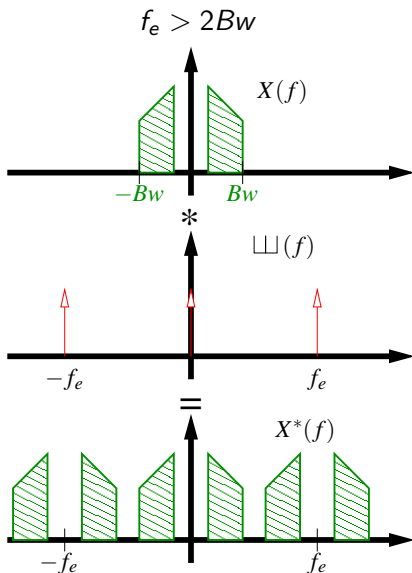
L'échantillonnage est modélisé par une multiplication par un peigne de Dirac dans le domaine temporel donc c'est une convolution dans le domaine fréquentiel

$$X^*(f) = X(f) * \text{III}(f) = X(f) * f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e)$$

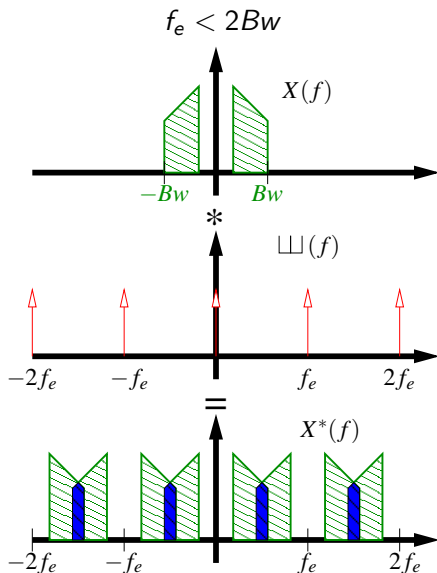
$$X^*(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(k) \delta(f - n f_e - k) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e)$$

Le spectre de  $X^*(f)$  est infini et est périodisé avec une période  $f_e$

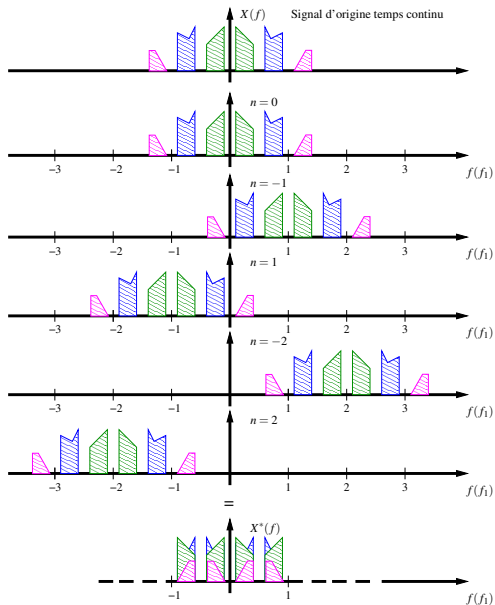
# Échantillonnage



# Échantillonnage



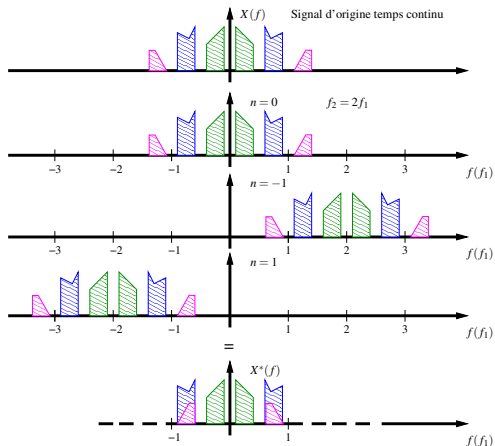
# Comparaison 2 valeurs de $f_e$



$$X^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Premier cas:  
échantillonnage à  
 $f_e = f_1$

# Comparaison 2 valeurs de $f_e$

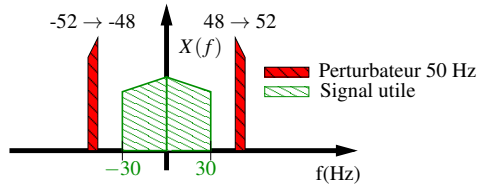
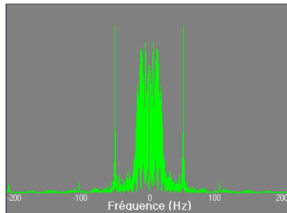


$$X^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Deuxième cas:  
échantillonnage à  
 $f_e = 2 \times f_1$



# Exercice 1: Signal ECG



1. Sachant que la phase du signal ECG est une fonction impaire et que son module, comme illustré, est une fonction paire, quelle conclusion peut-on tirer sur le signal ECG?
2. Tracer le spectre du signal pour une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  de 70 Hz.
3. Que faut-il faire pour éviter d'avoir le problème du repliement?

## Transformée en $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{T}\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(\mathcal{Z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n}$$

- ▶ La transformée en  $\mathcal{Z}$  est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace dans le domaine continu.
- ▶ La TZ est l'outil mathématique adapté pour concevoir et analyser les fonctions discrètes (analogiques et numériques).

- ▶ La TZ est linéaire

$$TZ\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aTZ\{x_1[n]\} + bTZ\{x_2[n]\}$$

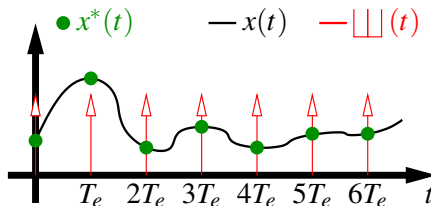
- ▶ La TZ d'un signal retardé

$$TZ\{x[n - k]\} = \mathcal{Z}^{-k}X(\mathcal{Z})$$

- ▶ La TZ de la sortie d'un filtre discret  $h[n]$

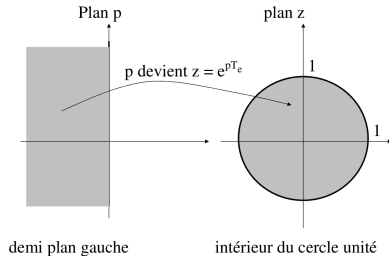
$$Y(\mathcal{Z}) = TZ\{x[n] * h[n]\} = X(\mathcal{Z}) \cdot H(\mathcal{Z})$$

## Exercice 2: Échantillonnage et TZ



1. Écrire l'expression du signal  $x^*(t)$  en fonction de la valeur des échantillons de  $x(t)$  et du peigne de Dirac.
2. Trouver la transformation de Laplace, puis la transformation en  $\mathcal{Z}$  de  $x^*(t)$ .
3. En déduire la relation entre  $\mathcal{Z}$  et  $p$  et les conditions de stabilité du système en temps discret.

# Stabilité équivalence temps continu- discret



Un système de fonction de transfert  $H(p)$  est stable si les pôles sont à partie réelle négative

$$p = \sigma + j\omega \implies \mathcal{Z} = e^{(\sigma + j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} \cdot e^{j\omega T_e}$$

$$\sigma < 0 \implies |e^{pT_e}| < 1$$

## Stabilité dans le domaine temporel

Un filtre  $h(n)$  est stable au sens EBSB si et seulement si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

## Stabilité dans le domaine des $\mathcal{Z}$

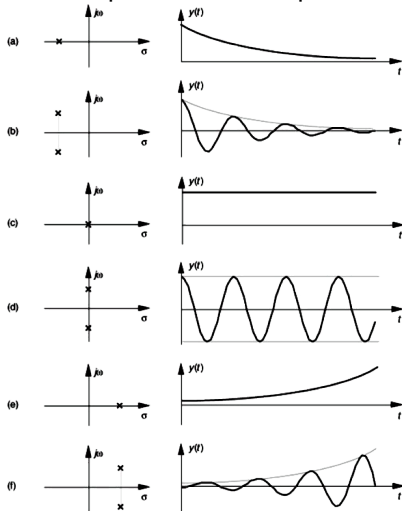
Un filtre  $H(\mathcal{Z})$  est stable EBSB si et seulement si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité

## Stabilité au sens large

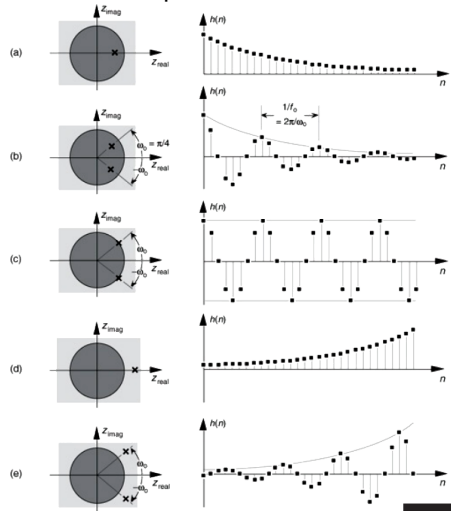
Si un système a des pôles d'ordre 1 sur le cercle unité, il est stable au sens large

# Stabilité et pôles : illustrations

## Temps continu – Laplace



## Temps discret – TZ

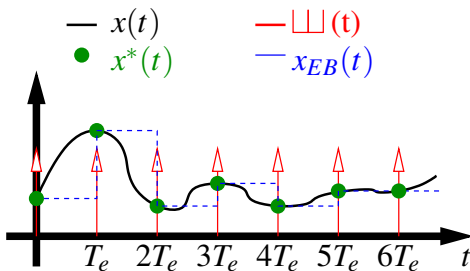


# Systèmes continus à systèmes discrets

Temps continu	Temps Discret
$h(t)$ réponse impulsionnelle	$h[n]$ réponse impulsionnelle discrète
Réponse temporelle $y(t) = x(t) * h(t)$	Réponse temporelle $y[n] = x[n] * h[n]$
Fonction de transfert en $p$ $H(p)$	Fonction de transfert en $\mathcal{Z}$ $H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{p \cdot T_e}}$
Domaine complexe $Y(p) = X(p) \cdot H(p)$	Domaine complexe $Y(\mathcal{Z}) = X(\mathcal{Z}) \cdot H(\mathcal{Z})$
Transformée de Fourier $H(p)_{p=j\omega}$	TFTD $H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{j\omega \cdot T_e}}$



## Exercice 3: Échantillonnage et blocage



1. Exprimer  $x_{EB}(t)$  en fonction des échantillons  $x(nT_e)$  et de la fonction échelon  $u(t)$
2. Calculer la transformation de Laplace de  $x_{EB}(t)$  :  $X_{EB}(p)$ .  
Faire apparaître dans cette expression la transformation de Laplace de  $x^*(t)$  :  $X^*(p)$ . En déduire la fonction de transfert d'un bloqueur, notée  $T_B(p)$ .
3. Représenter le module de  $T_B(j\omega)$  en fonction de la fréquence.