Algèbre linéaire et bilinéaire I – TD$_5$

18 Octobre 2022

Partie 1 : Projecteurs et symétries

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer que f est un projecteur puis calculer $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où g est la symétrie associée à f.

Montrons que $f \circ f = f$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned} f\Big(f(x, y, z)\Big) &= f(2x - 2z, y, x - z) \\ &= \Big(2(2x - 2z) - 2(x - z), y, 2x - 2z - (x - z)\Big) \\ &= (2x - 2z, y, x - z) \\ &= f(x, y, z) \end{aligned}$$

d'où $f \circ f = f$. L'application f est linéaire et vérifie $f \circ f = f$, c'est donc un projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Soit g la symétrie associée. On a $g = 2.f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ (propriété 1.35) d'où

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = 2.f(x, y, z) - (x, y, z) = (3x - 4z, y, 2x - 3z).$$

Exercice 2 (Exercice 1.10 du livre) :

On pose $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \big(x \mapsto f(-x)\big) \end{array}$$

Montrer que ϕ est une symétrie. Par rapport à quel espace et parallèlement à quel espace ?

- On vérifie aisément que ϕ est linéaire et que $\phi^2 = \mathrm{id}_E$.
- Calculons $\operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{id}_E)$. Soit $f \in E$:

$$\begin{aligned} \phi(f) - f = 0_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) - f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \\ &\Leftrightarrow f \text{ est paire.} \end{aligned}$$

- Calculons $\operatorname{Ker}(\phi + \mathrm{id}_E)$. Soit $f \in E$:

$$\begin{aligned} \phi(f) + f = 0_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) + f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \\ &\Leftrightarrow f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Notons $F = \{f \in E,\ \text{paire}\}$ et $G = \{f \in E,\ \text{impaire}\}$.

$$\boxed{\phi \text{ est une symétrie par rapport à } F \text{ et parallèlement à } G.}$$

Exercice 3 :

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Supposons $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$. On a

$$p \circ q - p = p \circ (q - \operatorname{id}_E)$$

Or $\operatorname{Im}(q - \operatorname{id}_E) = \operatorname{Ker}(q)$ (propriété 1.29 du livre) donc $\operatorname{Im}(q - \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(p)$ puis

$$p \circ q - p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Ainsi $p \circ q = p$ et de même on obtient $q \circ p = q$.

Si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$, alors $\operatorname{Ker}(q) \subset \operatorname{Ker}(p)$
et $\operatorname{Ker}(p) \subset \operatorname{Ker}(q)$ d'où égalité $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$.

2. Enoncer une condition nécessaire et suffisante semblable pour que p et q aient même image.

Supposons $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$. On a $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{id}_E) = \operatorname{Im}(q)$ donc $(p - \operatorname{id}_E) \circ q = 0$ d'où $p \circ q = q$.
Et de façon semblable , $q \circ p = p$.
Inversement, l'égalité $p \circ q = q$ entraîne $\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p)$ et l'égalité $q \circ p = p$ entraîne $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(q)$.
Ainsi, la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p.$$

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$u^2 - 5.u + 6.\operatorname{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On pose $F = \operatorname{Ker}(u - 3.\operatorname{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(u - 2.\operatorname{id}_E)$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et soit q la symétrie associée. Exprimer p et q en fonction de u.
4. Montrer que u est un automorphisme et exprimer u^{-1} en fonction de u.

1. Puisque $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\operatorname{id}_E \in \mathscr{L}(E)$, on a $u - 3.\operatorname{id}_E$ (car $\mathscr{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel). On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de E puisque c'est le noyau d'un endomorphisme de E. On procède de même pour G.
2. *Attention ici, on ne peut pas utiliser d'arguments basés sur la dimension car on ne sait pas si E, F et G sont de dimension finie.*

   On procède en deux étapes.

   ▷ Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. On a $\{0_E\} \subset F \cap G$, montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. Puisque $x \in F$, on a $u(x) - 3.x = 0_E$ et puisque $x \in G$, on a $u(x) - 2.x = 0_E$. En soustrayant ces deux égalités on obtient $x = 0_E$, donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, $F \cap G = \{0_E\}$.

▷ Montrons que $F+G=E$. On a $F+G\subset E$ donc montrons que $E\subset F+G$. Soit $x\in E$.

- Analyse : supposons que $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$, c'est-à-dire $u(x_F)-3.x_F=0_E$ et $u(x_G)-2.x_G=0_E$, d'où

$$u(x)=u(x_F+x_G)=u(x_F)+u(x_G)=3.x_F+2.x_G.$$

On a donc
$$\begin{cases} x_F+x_G=x \\ 3.x_F+2.x_G=u(x)\end{cases} \implies \begin{cases} x_F+x_G=x \\ -x_G=u(x)-3.x\end{cases}$$
d'où $x_F=u(x)-2.x$ et $x_G=3.x-u(x)$.

- Synthèse : écrivons
$$x=\underbrace{\big(u(x)-2.x\big)}_{=x_F}+\underbrace{\big(3.x-u(x)\big)}_{=x_G}.$$

Montrons que $x_F\in F$. On a

$$\begin{aligned} u(x_F)-3.x_F &= u\big(u(x)-2.x\big)-3.\big(u(x)-2.x\big) \\ &= u^2(x)-2.u(x)-3.u(x)+6.x \\ &= (\underbrace{u^2-5.u+6.\,\mathrm{id}_E}_{=0_{\mathscr{L}(E)}})(x) \\ &= 0_E \end{aligned}.$$

donc $x_F\in \mathrm{Ker}(u-3\,\mathrm{id}_E)=F$. On a de même

$$\begin{aligned} u(x_G)-2.x_G &= u\big(3.x-u(x)\big)-2.\big(3.x-u(x)-3.x\big) \\ &= 3.u(x)-u^2(x)+2.u(x)-6.x \\ &= -(\underbrace{u^2-5.u+6.\,\mathrm{id}_E}_{=0_{\mathscr{L}(E)}})(x) \\ &= 0_E \end{aligned}.$$

donc $x_G\in\mathrm{Ker}(u-2.\,\mathrm{id}_E)=G$. On a donc $x\in F+G$ d'où $E\subset F+G$.

Par double inclusion, on a $F+G=E$ et comme $F\cap G=\{0_E\}$, on a $F\oplus G=E$.

3. Soit $x\in E$. La question précédente montre que $E=F\oplus G$ et que pour tout $x\in E$,

$$x=\underbrace{\big(u(x)-2.x\big)}_{\in F}+\underbrace{\big(3.x-u(x)\big)}_{\in G}.$$

On a donc $p(x)=u(x)-2.x$ et $q(x)=2.(u(x)-2.x)-x=2.u(x)-5.x$ pour tout $x\in E$.

4. On a
$$\mathrm{id}_E=\frac{5}{6}.u-\frac{1}{6}.u^2=u\circ\left(\frac{5}{6}.\mathrm{id}_E-\frac{1}{6}.u\right)=\left(\frac{5}{6}.\mathrm{id}_E-\frac{1}{6}.u\right)\circ u$$
ce qui montre que u est bijective, et comme de plus $u\in\mathscr{L}(E)$, u est un automorphisme de E et le calcule précédent montre que

$$u^{-1}=\frac{5}{6}.\mathrm{id}_E-\frac{1}{6}.u.$$

Partie 2 : Images et noyaux d'endomorphismes

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

   Soit $x \in \text{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E$. donc on a
   $$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E.$$
   Ainsi, $x \in \text{Ker}(f^2)$. Finalement, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

   Soit $y \in \text{Im}(f^2)$, alors il existe $z \in E$ tel que
   $$y = f^2(z) = f(u) \text{avec } u = f(z).$$
   Ainsi, $y \in \text{Im}(f^2)$. Finalement, $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

   $\triangleright(\Rightarrow)$
   Supposons d'abord que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$, Il suffit de démontrer que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$
   Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0_E$ et posons $y = f(x)$.
   Alors $y \in \text{Im}(f)$ et $f(y) = f^2(x) = 0_E$, donc $y \in \text{Ker}(f)$. On en déduit que $y = 0_E$ et que $x \in \text{Ker}(f)$, d'où l'inclusion demandée.
   $\triangleright(\Leftarrow)$
   Supposons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
   Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors $f(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors
   $$f^2(x) = f(y) = 0_E.$$
   et donc $x \in \text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$. Ainsi, $f(x) = 0_E$ donc $y = 0_E$ et on a bien prouvé que
   $$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$$

3. Montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ si et seulement si $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

   $\triangleright(\Rightarrow)$
   Supposons d'abord que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ et prouvons que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.
   Soit $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \text{Ker}(f)$ et $v\text{Im}(f)$.
   En particulier, il existe $w \in E$ tel que $v = f(w)$.
   Mais alors,
   $$y = f(x) = f(u) + f^2(w) = f^2(w) \in \text{Im}(f^2)$$
   ce qu'il fallait démontrer.

   $\triangleright(\Leftarrow)$
   Supposons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ et démontrons que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.
   Soit $y \in E$. Alors il existe $z \in E$ tel que $f(y) = f^2(z)$.
   Posons $u = y - f(z)$ et $v = f(z)$.
   Alors
   $$f(u) = f(y) - f^2(z) = 0_E.$$
   Donc $u \in \text{Ker}(f)$ et $v \in \text{Im}(f)$. on a montré que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

Exercice 6 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par : $u(P) = P + (1-X)P'$.

1. Donner une base de E.

> Montrer que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E.
> Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ telle que $0_E = a.1 + b.X + c.X^2 + d.X^3$, on ait $a = b = c = d = 0$
> Donc la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est libre. On a aussi $\dim(E) = 4$.
> En conclusion, la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est bien une base de E.

2. Montrer que u est un endomorphisme de E.

> Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E.
> Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire.
> Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
>
> $$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1-X)(P' + \lambda Q') \\ &= P + (1-X)P' + \lambda(Q + (1-X)Q') \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$
>
> L'application u est donc bien linéaire, d'où u est un endomorphisme de E.

3. Déterminer l'image de u et donner une base de $\mathrm{Im}(u)$.

> Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, on sait que $(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. On a :
>
> $$u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$
>
> On a alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)$.
>
> On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

4. Déterminer le noyau de u et donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

> Ecrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et calculons $u(P)$:
>
> $$u(P) = -2aX^3 + (3a-b)X^2 + 2bX + c + d.$$
>
> Ainsi, on obtient
>
> $$u(P) = 0_E \iff \begin{cases} -2a &= 0 \\ 3a - b &= 0 \\ 2b &= 0 \\ c + d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= c \\ d &= -c \end{cases}$$
>
> On a alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(X - 1)$.
> Une base de $\mathrm{Ker}(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.

Soit $E^\star = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual de E. On considère les formes linéaires :

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ f_i : P \mapsto \int_{-1}^{1} t^i P(t) dt$$

5. Montrer que $B^\star = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E^\star$.

Méthode I :

Ecrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$f_0(P) = \int_{-1}^{1} (at^3 + bt^2 + ct + d) dt = \frac{2}{3}b + 2d,$$

de même, on a

$$f_1(P) = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c,$$
$$f_2(P) = \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}d,$$
$$f_3(P) = \frac{2}{7}a + \frac{2}{5}c.$$

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ telle que

$$\lambda_0.f_1 + \lambda_1.f_2 + \lambda_2.f_2 + \lambda_3.f_3 = 0_{E^\star}.$$

c'est-à-dire, pour tout $P \in E$,

$$(\lambda_0.f_1 + \lambda_1.f_2 + \lambda_2.f_2 + \lambda_3.f_3)(P) = 0.$$

On a alors $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$
Donc la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre .
En plus, $\dim(E) = \dim(E^\star) = 4$. (proposition 1.8 du livre).
Donc, $B^\star = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ une base de $E^\star$.

Méthode II :

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f = \lambda_0.f_0 + \cdots + \lambda_3.f_3 = 0_{E^\star}$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k X^k \in E$. On a :

$$0 = f(P) = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{3} \lambda_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \left(\sum_{k=0}^{3} \lambda_k t^k\right)^2$ est positive (car c'est un carré), continue (car polynomiale) et d'intégrale nulle, donc elle est nulle, donc

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_3) = (0, \ldots, 0)$$

La famille $B^\star$ est donc libre. Comme $E^\star$ est de dimension 4, $B^\star$ est une base de $E^\star$.

Exercice 7 :

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté E, et l'on note :

$$\mathscr{S}(E) = \left\{ u \in \mathscr{L}(E),\ u^3 = u^2 \ \right\}$$

1. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x,\ y,\ z) = (0,\ x,\ z).$$

— Montrer que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

— On a

$$f^2 = f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y,\ z) & \mapsto (0,\ 0,\ z) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ f \circ f\big((x,\ y,\ z)\big) = f\big((0,\ x,\ z)\big) = (0,\ 0,\ z).$$

En plus

$$\forall (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ f^3\big((x,\ y,\ z)\big) = f\big((0,\ 0,\ z)\big) = (0,\ 0,\ z)$$

Donc

$$f^3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y,\ z) & \mapsto (0,\ 0,\ z) \end{cases}$$

Donc $f^3 = f^2$.
Alors on a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

— Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

On calcul

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \left\{ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ f\big((x,\ y,\ z)\big) = (0,\ x,\ z) = (0,\ 0,\ 0) \right\} \\ &= \left\{ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z = 0 \right\} \\ &= \left\{ (0,\ y,\ 0),\ y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(\{(0,\ 1,\ 0)\}\big) \end{aligned}$$

— Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

On calcul

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{ (0,\ x,\ z),\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x.(0,\ 1,\ 0) + z.(0,\ 0,\ 1),\ \ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(\{(0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}\big) \end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Montrer que $u = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in E$.
Comme $(u^3 - u^2)(x) = 0$, on a $u\big(u^2(x) - u(x)\big) = 0$,
ainsi le vecteur $u^2(x) - u(x) \in \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Donc on a $u^2(x) - u(x) = 0_E$ ce qui implique $u\big(u(x) - x\big) = 0$. Ainsi le vecteur $u(x) - x \in \text{Ker}(u) = \{0_E\}$, d'où $u(x) = x$.
On a bien $u = \text{id}_E$.

3. On suppose dans cette question que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$. Montrer que u est un projecteur.

Soit $x \in E$. Comme $u^3(x) = u^2(x)$, on a $u^2\big(u(x)-x\big) = 0$ et donc le vecteur $u(x)-x \in \text{Ker}(u^2)$.
En plus, $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$, on a $u(x) - x \in \text{Ker}(u)$ et donc $u\big(u(x) - x\big) = 0_E$, c'est-à-dire, $u^2(x) = u(x)$.
Comme x est arbitraire, on a $u^2 = u$. En conclusion, u est un projecteur.

Dans la suite, on suppose que Ker$(u) \neq \{0_E\}$ et que Ker$(u) \neq$ Ker(u^2).

4. Déterminer pour $n \geq 3$, u^n.
En déduire que : $E = \text{Ker}(u^2) \bigoplus \text{Im}(u^2)$.

Comme $u^3 = u^2$, par récurrence on montre que $\forall n \geq 3,\ u^n = u^2$.
Puisque. $u^4 = u^2$, on en déduit que u^2 est un projecteur de E .
D'après le cours, $E = \text{Ker}(u^2) \bigoplus \text{Im}(u^2)$.

5. Montrer que : $\text{Ker}(u^2)$ est stable par u.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$, montrons que $u(x) \in \text{Ker}(u^2)$.
Comme $u^2\big(u(x)\big) = u^3(x) = u^2(x) = 0$, par conséquent, $u(x) \in \text{Ker}(u^2)$.

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec u (c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$). Montrer que $\text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(v)$ sont stables par u (c'est-à-dire $u(\text{Im}(v)) \subset \text{Im}(v)$ et $u(\text{Ker}(v)) \subset \text{Ker}(v)$).
2. Soit p un projecteur de E tel que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par u. Montrer que u commute avec p.

1. ▷ Soit $x \in \text{Ker}(v)$, montrons que $u(x) \in \text{Ker}(v)$. On a

$$v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big) = u(0_E) = 0_E$$

donc $u(x) \in \text{Ker}(v)$, ce qui montre que $\text{Ker}(v)$ est stable par u.

▷ Soit $y \in \text{Im}(v)$, montrons que $u(y) \in \text{Im}(v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$, d'où

$$u(y) = u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) \in \text{Im}(v)$$

donc $\text{Im}\, v$ est stable par u.

2. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \text{Ker}(p)$ et $z \in \text{Im}(p)$ tels que $x = y + z$. On a en particulier $p(y) = 0_E$ et comme p restreint à $\text{Im}(p)$ est l'identité, $p(z) = z$. On a donc

$$u\big(p(x)\big) = u\big(p(y) + p(z)\big) = u(0_E + z) = u(0_E) + u(z) = u(z).$$

On a également

$$p\big(u(x)\big) = p\big(u(y) + u(z)\big) = p\big(u(y)\big) + p\big(u(z)\big) = 0_E + u(z) = u(z)$$

car $u(y) \in u(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p)$ et $u(z) \in u(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$. On a donc $u\big(p(x)\big) = p\big(u(x)\big)$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire que u et p commutent.

Partie 3 : Résultats importants

Exercice 9 :

Le but de cet exercice est de redémontrer le théorème du rang différent de la méthode en classe .

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E soit de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$.

1. Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E. Montrer que u induit une bijection entre H et $\operatorname{Im}(u)$.
2. En déduire le théorème du rang :

$$\operatorname{rang}(u) + \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim E.$$

1. Il est demandé de montrer que
$$\begin{aligned} \phi\colon H &\longrightarrow \operatorname{Im}(u) \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$
est un isomorphisme. Il est immédiat que ϕ est linéaire, car u l'est.
   - ▷ Soit $x \in \operatorname{Ker}(\phi)$. On a en particulier $x \in H$ car $\operatorname{Ker}(\phi) \subset H$ et $0_{E'} = \phi(x) = u(x)$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$. On a donc $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap H = \{0_E\}$ d'où $x = 0_E$. On a donc $\operatorname{Ker}(\phi) \subset \{0_E\}$ et comme $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}\phi$, on a $\operatorname{Ker}\phi = \{0_E\}$ ce qui montre que ϕ est injective.
   - ▷ Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or puisque $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus H$, on peut écrire $x = x_K + x_H$ avec $x_K \in \operatorname{Ker}(u)$ et $x_H \in H$, d'où
   $$y = u(x) = u(x_K + x_H) = u(x_K) + u(x_H) = 0_E + u(x_H) = \phi(x_H)$$
   ce qui montre que $y \in \operatorname{Im}(\phi)$. On a donc $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Im}(\phi)$ et comme $\operatorname{Im}(\phi) \subset \operatorname{Im}(u)$, on en déduit $\operatorname{Im}(\phi) = \operatorname{Im}(u)$, ce qui montre que ϕ est surjective.

   Finalement, ϕ est un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im}(u)$.
2. Puisque $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus H$ et que E est de dimension finie, on a $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u) + \dim H$. Or H et $\operatorname{Im}(u)$ sont isomorphes donc $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie et $\dim H = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rang}(u)$. On a donc
$$\operatorname{rang}(u) + \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim E.$$

Exercice 10 :

Le but de cet exercice est de redémontrer la formule de Grassman à partir du théorème du rang.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie et soit $\phi\colon F \times G \to F + G$ définie par

$$\forall (f, g) \in F \times G, \quad \phi(f, g) = f + g.$$

1. Montrer que $\operatorname{rang}(\phi) = \dim(F + G)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\phi)$ est isomorphe à $F \cap G$.
3. En déduire la formule de Grassman :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

1. Par construction, ϕ est surjective donc $\mathrm{Im}(\phi) = F + G$. On a donc $\mathrm{rang}(\phi) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(F + G)$.
2. Soient $(f, g) \in F \times G$. On a

$$(f, g) \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff f + g = 0_E \iff g = -f$$

donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{(f, -f) \colon f \in F\}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi \colon & F \cap G & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\phi) \\ & f & \longmapsto & (f, -f) \end{array}.$$

Il est clair que ψ est linéaire. Si $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$, on a $(f, -f) = (0_E, 0_E)$ d'où $f = 0_E$ et donc $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0_E\}$, ce qui montre que ψ est injective. De plus $\mathrm{Im}(\psi) = \{(f, -f) \colon f \in F\} = \mathrm{Ker}(\phi)$ d'après ce qui précède, donc ψ est surjective. Finalement, ψ est un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $F \cap G$.
3. Appliquons le théorème du rang à ϕ :

$$\mathrm{rang}\,\phi + \dim \mathrm{Ker}(\phi) = \dim(F \times G).$$

Or $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ (propriété 1.21. de notre livre) et comme $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $F \cap G$ sont isomorphes, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(F \cap G)$. On a donc

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$