Suites et Séries – TD$_5$

10-11 octobre 2022

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$(u_0,u_1)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+2}+\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n=0.$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2

Quelle est la nature de la suite de terme général $\left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{4}\cos(n)\right)^n$?

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$$

Étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de u_0.

Exercice 4

Étudier la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0>0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{1+u_n}.$$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall m\geqslant N,\forall n\geqslant N,|u_n-u_m|\leqslant\varepsilon.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. La suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :
$$u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que : $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 8

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence par :
$$u_0 \in [-1,1], \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$.
   (b) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.
2. On suppose que $u_0 > 0$ et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = \frac{1}{(u_n)^2}$$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
   (b) En déduire un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto x^2 + A$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :
$$u_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Donner le tableau de variations de f, ainsi que le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$ en fonction de A.
2. On suppose dans cette question que $A \geqslant 0$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que si $A > \dfrac{1}{4}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que si $A \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donner sa limite.
3. On suppose dans cette question que $A \in]-1,0[$.
   (a) Montrer que $[A,0]$ est stable par f.

(b) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers une limite a, et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers une limite b.

(c) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$f \circ f(x) - x = (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1)$$

(d) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.