Topologie et Calcul différentiel – TD 8: Topologie : Espaces vectoriels normés

02 juin 2023

Le but de ce TD est de savoir calcler des normes subordonnées, de savoir montrer si des applications linéaires sont continues, et de savoir utiliser l'argument de la dimension pour savoir si un ensemble est compact.

Exercices sur la continuité

Exercice 1 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels ; on le munit de la norme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\|_\infty = \max\left(\{a_k,\ k \in [\![0, n]\!]\}\right)$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur a l'application $\varphi_a : P \longrightarrow P(a)$ est-elle continue sur E ?

Par définition, si $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\varphi_a(P) = P(a)$.
Si $|a| > 1$, on peut imaginer une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes dont les coefficients sont bornés, et telle que $\varphi_a(P_n)$ tend vers l'infini. Par exemple, prenons $P_n = X^n$. Alors $||P_n||_\infty = 1$ et

$$\varphi_a(P_n) = a^n$$

qui diverge quand $|a| > 1$. Alors,

$$|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |} = \sup_{||P||_\infty = 1} |\varphi_a(P)| \geqslant |\varphi_a(P_n)| = |a|^n \to_{n\to\infty} +\infty$$

Donc φ_a n'est pas continue.
Si $a = 1$ on voit que $\varphi_a(1 + X + X^2 + \ldots + X^n) = n + 1 \to +\infty$ donc φ_a n'est pas continue.
Si $a = -1$ on peut voir, avec la même idée, que $\varphi_a(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots + (-1)^n X^n) = n + 1$ donc φ_a n'est pas continue.
Enfin, supposons $|a| < 1$. Soit $P = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ avec $||P|| \leqslant 1$. Alors

$$|\varphi_a(P)| \leqslant |b_0| + |b_1| \cdot |a| + \ldots + |b_n| \cdot |a|^n \leqslant 1 + |a| + |a|^2 + \ldots + |a|^n = \frac{1 - |a|^{n+1}}{1 - |a|} \leqslant \frac{1}{1 - |a|}$$

Donc $|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |} \leqslant \frac{1}{1-|a|}$ et donc φ_a est continue.

2. Quand elle est continue, calculer

$$|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |}$$

D'après la question 1., on sait que φ_a est continue si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas, on a vu que $|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |} \leqslant \frac{1}{1-a}$
De plus, en notant $Q_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ on a $||Q_n||_\infty = 1$ et donc

$$|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |} \geqslant \varphi(Q_n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \to_{n\to\infty} \frac{1}{1 - a} \geqslant |||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty, |\ |}$$

Donc $|||\varphi_a|||_{\|\ \|_\infty,|\ |} = \frac{1}{1-a}$.

3. Même question quand E est muni de la norme $||\cdot||_1$ définie par $||P||_1 = \sum_k |a_k|$?

On peut voir que si $Q_n = X^n$, alors $||Q_n||_1 = 1$ et $\varphi_a(Q_n) = a^n$ donc clairement φ_a n'est pas continue si $|a| > 1$.
Si $|a| \leqslant 1$, soit $P = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ avec $||P|| \leqslant 1$. Alors

$$|\varphi_a(P)| \leqslant |b_0| + |b_1| \cdot |a| + \ldots + |b_n| \cdot |a|^n \leqslant \max\{1, |a|, |a|^2, \ldots, |a|^n\} \leqslant 1$$

car $|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_n| \leqslant 1$ et que $|a| \leqslant 1$. Donc $|||\varphi_a|||_{\|\ \|_1,|\ |} \leqslant 1$ et φ_a est continue.
On note que si $P = 1$ (polynôme constant), alors $\varphi_a(P) = 1$ et $||P||_1 = 1$ donc on a $|||\varphi_a|||_{\|\ \|_1,|\ |} = 1$.

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

$$E = \left\{ P \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists (a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times x^k \right\}.$$

La base canonique de E est $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = x^k.$$

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k . P_k \in E$, on définit

$$N_\infty(P) = \sup_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que N_∞ et N_2 sont des normes sur E.

Facile.

2. Pour tout $P \in E$, on pose

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ \mathrm{dt}.$$

Montrer que $L \in E^*$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P, Q) \in E^2$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$L(\lambda P + Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t) dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t) dt + \int_{-1}^{1} Q(t) dt = \lambda L(P) + L(Q)$$

Donc $L \in E^*$.

3. $L : (E, N_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est-elle continue ?

Cette application n'est pas continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit P_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

On a :

$$N_\infty(P_n) = 1 \quad \text{et} \quad L(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}.$$

Or la série $\sum \frac{2}{2k+1}$ diverge. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|L(P_n)|}{N_\infty(P_n)} = +\infty$$

Ceci démontre le résultat.

4. Montrer que $L : (E, N_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue.

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times x^k$. On a

$$L(P) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2k}}{2k+1}$$

Soit $n \geqslant 1$. On remarque que L définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ comme suit. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k$, où $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$L(P) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2k}}{2k+1} = \langle R_n, P\rangle$$

où $R_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{2k+1} X^{2k}$. Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|L(P)| \leqslant N_2(P) \times N_2(R_n) = 2 \times N_2(P) \times \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge. On note S sa somme (précisément $S = \frac{\pi^2}{8}$, mais ce n'est pas utile ici). On a donc

$$|L(P)| \leqslant N_2(P) \times 2\sqrt{S}.$$

Donc $L : (E, N_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue et $|||L|||_{N_2} \leqslant 2\sqrt{S}$.

5. Existe-t-il une fonction $Q \in E$ telle que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||_{N_2}$?

On va montrer que $|||L|||_{N_2} = 2\sqrt{S}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs du produit scalaire sont positivement colinéaires. En ce cas, il vient

$$N_2(R_n) = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{2}{2k+1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 2\sqrt{S}$$

$$L(R_n) = N_2(S)^2 \to 4S$$

On en déduit que $|||L|||_{N_2} = 2\sqrt{S}$.
Comme R_n est le seul polynôme de degré n dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour lequel la borne est atteinte, on en déduit que la borne n'est pas atteinte (pas dans $\mathbb{R}_n[X]$ en tous cas).
Comme $n \geqslant$ est arbitraire, alors la borne supérieure n'est pas atteinte pour un polynôme de degré quelconque, et elle n'est donc pas atteinte sur $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit
$$F = \{P \in E,\ L(P) = 0\}.$$
Quel est l'adhérence de F dans (E, N_∞) ? dans (E, N_2) ?

> F est un hyperplan, c'est le noyau de la forme linéaire L. D'après le cours, F est donc soit fermé soit dense. Précisément, F est fermé si L est continue et F est dense sinon.
> Dans (E, N_∞), l'application L n'est pas continue, donc $\overline{F} = E$.
> Dans (E, N_2) l'application L est continue, donc $\overline{F} = F$.

Exercice 3 :

Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $f \in \mathscr{L}$, on pose :
$$m(f) = \sup_{0 \leqslant x < y \leqslant 1} \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \right\} \quad \text{et} \quad M(f) = m(f) + |f(0)|.$$

1. Montrer que M est une norme sur $\mathscr{L}$

> *Montrons que M est une norme sur $\mathscr{L}$.*
>
> (a) Soit $f \in \mathscr{L}$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$,
> $$|f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|.$$
> Donc, l'ensemble $\left\{ \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|,\ 0 \leqslant x < y \leqslant 1 \right\}$ est non vide (on voit qu'il contient $|f(1) - f(0)|$ si on prend $x = 0$ et $y = 1$) et majoré (par k). Donc, $m(f)$ existe et est fini. De plus, il est clair que $M(f) \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{M est bien définie}}$.
>
> (b) Soit $f \in \mathscr{L}$. Si f est la fonction nulle, alors on a clairement $M(f) = 0$. De plus, si $M(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $m(f) = 0$. Donc, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ tel que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, on a :
> $$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0.$$
> Donc $f(x) = f(y)$. Autrement dit, f est contante et vaut 0 en 0. Donc, f est la fonction nulle. D'où, $\boxed{\forall f \in \mathscr{L},\ M(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0}$.
>
> (c) Soit $f \in \mathscr{L}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
> $$m(\lambda.f) = \sup_{0 \leqslant x < y \leqslant 1} \left\{ \left| \frac{\lambda \times f(x) - \lambda \times f(y)}{x - y} \right| \right\} = |\lambda| \times m(f).$$
> Donc, $\boxed{M \text{ vérifie la propriété d'homogénéité}}$.
>
> (d) Soit $(f, g) \in \mathscr{L}^2$. D'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ tel que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, on a :
> $$\begin{aligned} \left| \frac{(f+g)(x) - (f+g)(y)}{x - y} \right| &= \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x - y|} \\ &= \frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x - y|} \\ &\leqslant \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \\ &\leqslant m(f) + m(g). \end{aligned}$$

Donc, $m(f+g) \leqslant m(f)+m(g)$. Or, $|(f+g)(0)| \leqslant |f(0)|+|g(0)|$. Ainsi, $M(f+g) \leqslant M(f)+M(g)$. Ceci est vrai pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}$. D'où, $\boxed{M \text{ vérifie l'inégalité triangulaire}}$.

$$\boxed{M \text{ est une norme sur } \mathscr{L}.}$$

2. Comparer M et la norme infinie de $\mathscr{L}$.

Ces deux normes ne sont pas équivalentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n de $\mathscr{L}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x \times n \text{ si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a $M(f_n) = n$ et $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1$. Donc

$$\frac{M(f_n)}{\|f_n\|_{\infty,[0,1]}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 :

On considère l'espace vectoriel E muni de la norme N, où

$$E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } \forall f \in E,\ N(f) = \|f\|_{\infty,[0,1/2]} + \|f\|_{1,[1/2,1]}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.

Elle vérifie :

(a) Elle est bien définie, car tout $f \in E$ est continue sur $[0,1]$, donc bornée sur $[0,1/2]$ et intégrable sur $[1/2,1]$.

(b) Elle est définie, car l'intégrale d'une fonction continue, positive sur $[1/2,1]$ ne peut être nulle que lorsque la fonction est nulle sur cet intervalle.

(c) Elle est clairement homogène.

(d) Elle vérifie l'inégalité triangulaire car les $\|\ \|_{\infty,[a,b]}$ et $\|\ \|_{1,[a,b]}$ la vérifient aussi.

2. Pour quelles valeurs de $a \in [0,1]$, la fonction :

$$\varphi_a \ : \begin{cases} (E,N) \to (\mathbb{R},|\ |) \\ f \mapsto f(a) \end{cases} \qquad \text{est-elle continue ? Justifier.}$$

— *La fonction φ_a est continue si $a \in [0,1/2]$.*
En effet, l'application étant linéaire, il suffit de montrer qu'elle est lipschitzienne au voisinage de 0. Or on a :

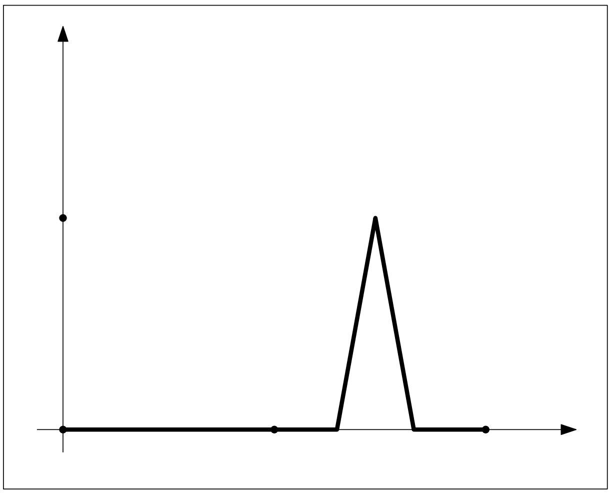
$$\forall a \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ \forall f \in E,\ |f(a)| \leq \|f\|_{\infty,[0,1/2]} \leq N(f).$$

— *La fonction φ_a n'est pas continue pour $a \in]1/2,1]$.*
En effet, si l'on prend la fonction f_ϵ $(0 < \epsilon < a - 1/2)$ définie sur E par :

$$f_\epsilon(x) = 0 \text{ sur } [0,1]\backslash]a-\epsilon, a+\epsilon[,\ f_\epsilon(a) = 1$$

et f_ϵ affine sur $]a-\epsilon, a[\cap[0,1]$ et sur $]a, a+\epsilon[\cap[0,1]$, alors :

$$N(f_\epsilon) \leq \epsilon \text{ donc } \frac{|\varphi(f_\epsilon)|}{N(f_\epsilon)} \geq \frac{1}{\epsilon} \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} +\infty.$$



Exercice 5 :

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit les normes suivantes sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

1. Déterminer la norme triple $||| \; |||_{1,\infty}$ sur $M_n(\mathbb{K})$:

On a, pour $M \in M_n(\mathbb{K})$,

$$|||M|||_{1,\infty} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_1}$$

Soit $x \in K^n \setminus \{0\}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_1} &= \frac{\sup_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} \\
&\leqslant \frac{\sup_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |M_{i,j}| \times |x_j|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} \\
&\leqslant \frac{\sup_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |M_\infty| \times |x_j|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} \qquad \text{où } M_\infty = \max_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |M_{i,j}| \\
&\leqslant M_\infty
\end{aligned}$$

De plus si $M_\infty = |M_{i_0,j_0}|$ alors en prenant y tel que $y_j = 0$ si $j \neq j_0$ et $y_{j_0} = \frac{M_{i_0,j_0}}{|M_{i_0,j_0}|}$ on obtient $|(My)_i| = \frac{M_{i,j_0} \times M_{i_0,j_0}}{|M_{i_0,j_0}|} \leqslant M_\infty$ et $|(My)_{i_0}| = M_\infty$.
Ainsi on a

$$|||M|||_{1,\infty} = \max_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |M_{i,j}|$$

2. On sait que toutes les normes sont équivalentes sur $M_n(\mathbb{K})$. On note $N_1 = ||| \; |||_{1,\infty}$, et on

pose $N_2(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$ et on définit, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$,

$$\alpha_{i,j} = \max_{M \in M_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \frac{N_j(M)}{N_i(M)}$$

Déterminer $\alpha_{1,2}$ et $\alpha_{2,1}$.

On a de manière évidente $N_2(M) \leqslant n^2 \times N_1(M)$. Si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a $M_{i,j} = 1$, alors $N_2(M) = n^2 \times N_1(M)$. D'où

$$\alpha_{1,2} = \max_{M \in M_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \frac{N_2(M)}{N_1(M)} = n^2$$

On a également $N_1(M) \leqslant N_2(M)$ et pour M telle que $M_{1,1} = 1$ et $M_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (1,1)$ on a $N_1(M) = N_2(M)$. D'où

$$\alpha_{2,1} = \max_{M \in M_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \frac{N_1(M)}{N_2(M)} = 1$$

Exercice 6

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se place dans $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme de votre choix. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de :

$$A = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathrm{rang}(M) = p\} \ , \ \text{ où } 0 \leqslant p \leqslant n.$$

Déterminons l'intérieur de A.

Soit $M \in A$. De par l'algorithme du pivot de Gauss on sait que M est équivalente à une matrice diagonale D avec p fois le chiffre 1 sur la diagonale.

$$M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot Q$$

Soit alors M_ε définie par

$$M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & \varepsilon & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot Q$$

Alors $|||M - M_\varepsilon|||_{1,1} \leqslant |||P||| \times \varepsilon \times |||Q|||$ et $M_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $M \in A$ et tout $\delta > 0$ on a

$$BO(M,\delta) \cap A^c \neq \emptyset$$

D'où $M \notin \mathring{A}$. Ainsi, si $p \neq n$ on a $\mathring{A} = \emptyset$.

Si $p = n$ alors $A = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, A est donc ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Passons maintenant à l'adhérence de A.

Soit M une matrice de rang $k \leqslant p$. De par l'algorithme du pivot de Gauss on sait que M est équivalente à une matrice diagonale D avec k fois le chiffre 1 sur la diagonale

$$M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot Q$$

Soit $\varepsilon > 0$. On va rajouter $p-k$ fois le nombre ε sur la diagonale. Posons

$$M_\varepsilon = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & \varepsilon & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \varepsilon & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot Q$$

Alors M_ε est de rang p et,

$$|||M_\varepsilon - M|||_{1,1} \leqslant |||P|||_{1,1} \times |||D_\varepsilon - D|||_{1,1} \times |||Q|||_{1,1} \leqslant \varepsilon \times |||P|||_{1,1} \times |||Q|||_{1,1}$$

D'où,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = M$$

et donc $M \in \bar{A}$.
On a donc

$$\{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \operatorname{rang}(M) \leqslant p\} \subset \bar{A}$$

Montrons que $\{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \operatorname{rang}(M) \leqslant p\}$ est un ensemble fermé. Pour cela on va montrer que son complémentaire $\{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \operatorname{rang}(M) > p\}$ est ouvert.
Soit M une matrice de rang $k > p$. De par l'algorithme du pivot de Gauss on sait que M est équivalente à une matrice diagonale D avec k fois le chiffre 1 sur la diagonale

$$M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot Q$$

Soit $\varepsilon > 0$, on va regarder la boule ouverte $BO(M, \varepsilon)$, soit $N \in BO(M, \varepsilon)$ et soit $D' = P^{-1} \cdot N \cdot Q^{-1}$ de sorte que $N = P \cdot D' \cdot Q$. Alors

$$|||D - D'|||_{1,1} = |||P^{-1} \cdot (M - N) \cdot Q^{-1}|||_{1,1} \leqslant |||P^{-1}|||_{1,1} \times \varepsilon \times |||Q^{-1}|||_{1,1}$$

On a
$$D - D' = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline D_3 & D_4 \end{array}\right]$$
De plus
$$|||D_1 - I_k|||_{1,1} \leqslant |||D - D'|||_{1,1} \leqslant |||P^{-1}|||_{1,1} \times \varepsilon \times |||Q^{-1}|||_{1,1}$$
Par continuité du déterminant on a alors, pour ε assez petit, $\det(D_1) > 0$. Ainsi $\mathrm{Rang}(D - D') \geqslant k$ et donc
$$BO(M, \varepsilon) \subset \{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathrm{rang}(M) > p\}$$
Ainsi $\{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathrm{rang}(M) > p\}$ est un ensemble ouvert et par conséquent $\{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathrm{rang}(M) \leqslant p\}$ est fermé.
En conclusion on a $\bar{A} = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathrm{rang}(M) \leqslant p\}$.
En particulier ceci prouve que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, soit $g \in E$ et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$
On munit $\mathbb{R}$ de la norme usuelle $|\cdot|$.

1. φ est-elle continue pour les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $Vert \cdot \|_2$?

φ est une forme linéaire. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(f, g) \in E^2$,
$$\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$$
Pour montrer sa continuité, il faut et il suffit de montrer qu'elle est lipschitzienne en 0_E.

— *Continuité pour* $\| \ \|_\infty$.
On a :
$$\forall f \in E, \ |\varphi(f)| \leqslant \left(\int_0^1 |g(t)| \ \mathrm{d}t \right) \times \|f\|_\infty$$
L'application φ est lipschitzienne en 0_E, elle est donc continue.

— *Continuité pour* $\| \ \|_1$.
On a :
$$\forall f \in E, \ |\varphi(f)| \leqslant \|g\|_\infty \times \|f\|_1$$
L'application φ est lipschitzienne en 0_E, elle est donc continue.

— *Continuité pour* $\| \ \|_2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\forall f \in E, \ |\varphi(f)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 g(t)^2 \ \mathrm{d}t} \times \|f\|_2$$
L'application φ est lipschitzienne en 0_E, elle est donc continue.

2. Calculer la norme $|||\varphi|||$ dans les cas où φ est continue.

On va montrer que les constantes trouvées précédemment sont les normes triples cherchées.

(a) Pour $\| \ \|_2$

On prend $f = g$ et on obtient $|\varphi(g)| = \|g\|_2$. D'où

$$\sup_{f\in E\setminus\{0_E\}} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_2} = \|g\|_2$$

(b) Pour $\| \ \|_1$

On va trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty,$$

g est une fonction continue sur $[0,1]$ compact, elle atteint donc ses bornes. Soit alors $x \in [0,1]$ tel que $\|g\|_\infty = |g(x)|$, quitte à considérer $-g$ on suppose $g(x) \geqslant 0$. Supposons que $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On définit f_n par

$$f_n(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \notin \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \\ n^2(y-x) + n \text{ si } y \in \left[x - \frac{1}{n}, x\right] \\ -n^2(y-x) + n \text{ si } y \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

Alors f_n est continue, $\|f_n\|_1 = 1$. Posons $u_n = \inf_{y\in\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]} g(y)$. Comme g est continue on a $u_n \to |g(x)| = \|g\|_\infty$. De plus

$$u_n \times f_n \leqslant g \times f_n \leqslant \|g\|_\infty \times f_n$$

d'où $u_n \leqslant \varphi(f_n) \leqslant \|g\|_\infty$ et donc

$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty,$$

Si $x = 0$ on pose $f_n = \begin{cases} 0 \text{ si } y \notin \left[0, x + \frac{1}{n}\right] \\ -2n^2(y-x) + 2n \text{ si } y \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right] \end{cases}$ et on procède de la même manière, le cas $x = 1$ est similaire.

D'où $|||\varphi|||_1 = \|g\|_\infty$

(c) Pour $\| \ \|_\infty$

On va trouver une suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{|\varphi(h_n)|}{\|h_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_1,$$

L'idée ici est de trouver une suite de fonctions continues h_n telle que $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$ si $g(x) \geqslant 0$ et -1 si $g(x) < 0$. Une telle suite existe, ce qui se voit facilement avec un dessin mais est compliquée à définir rigoureusement.

Exercice 8 :

Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Calculer la norme subordonnée de l'application

$$\theta : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $f \in E$, on a :

$$|\theta(f)| \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t + \int_{-1}^0 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = 2\|f\|_\infty$$

et donc $|||\theta|||_\infty \leqslant 2$. De plus, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction f_n de E par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant \frac{-1}{n}, \\ n \times x & \text{si } x \in [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta(f_n) = 2 - \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

$$\boxed{\text{On a donc } |||\theta|||_\infty = 2.}$$

Exercice 9 :

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup sur $[0,1]$ notée $\|.\|_\infty$ et on définit, pour $f \in E$:

$$T(f) = \int_0^1 \sin(2\pi x) \cdot f(x)\ dx$$

1. Montrer que T est une forme linéaire continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.

   (a) $T : E \to \mathbb{R}$ et est linéaire : c'est une forme linéaire sur E.

   (b) Pour tout $f \in E$:

   $$|T(f)| \leqslant \int_0^1 |\sin(2\pi x) \cdot f(x)|\ dx \leqslant \int_0^1 |\sin(2\pi \cdot x)|\ dx \times \|f\|_\infty = \frac{2}{\pi} \cdot \|f\|_\infty.$$

   $$\boxed{T \text{ est une forme linéaire continue sur } (E, \|.\|_\infty).}$$

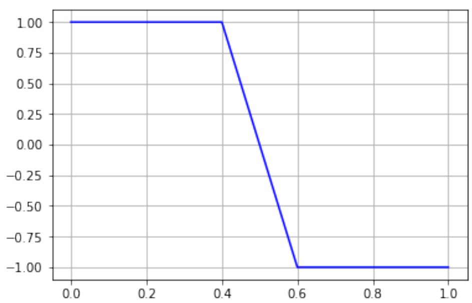
2. Calculer une valeur approchée et/ou exacte de $|||T|||_{||\cdot||_\infty, |\cdot|}$.

   Comme la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $[0, 1/2]$ et négative sur $[1/2, 1]$, une fonction optimale pour maximiser $T(f)$ et qui vérfie $||f||_\infty = 1$ est la fonction

   $$f \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1/2 \\ -1 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

   Le problème, c'est que cette fonction n'est pas continue. On va donc l'approcher par une suite de fonctions continues. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

   $$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - \dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{n} \\ -n \times \left(x - \dfrac{1}{2}\right) & \text{si } \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ -1 & \text{si } x - \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$



On a $||f_n||_\infty = 1$ et :

$$T(f_n) = \int_0^{1/2-1/n} \sin(2\pi \times x)\ dx + \int_{1/2-1/n}^{1/2} \underbrace{\sin(2\pi \times x) \times f_n(x)}_{\geqslant 0}\ dx$$
$$+ \int_{1/2}^{1/2+1/n} \underbrace{\sin(2\pi \times x) \times f_n(x)}_{\geqslant 0}\ dx - \int_{1/2+1/n}^{1} \sin(2\pi \times x)\ dx$$
$$\geqslant \int_0^{1/2-1/n} \sin(2\pi \times x)\ dx - \int_{1/2+1/n}^{1} \sin(2\pi \times x)\ dx = \frac{1+\cos(2\pi/n)}{\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}.$$

Or, d'après a question précédente, on a :

$$||T||_\infty \leqslant \frac{2}{\pi}$$

Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure :

$$\boxed{|||T|||_{||\cdot||_\infty, |\cdot|} = \int_0^1 |\sin(2\pi \times x)|\ dx = \frac{2}{\pi}}$$

Exercices sur les compacts

Exercice 10 :

On considère la situation où (E, d) est un espace métrique ou bien (E, N) est un espace vectoriel normé, et A une partie de E. Il faut répondre aux questions :

- A est-il ouvert dans E (pour d ou N) ?
- A est-il fermé dans E (pour d ou N) ?
- A est-il compact (pour d ou N) ?

1. $E = \mathbb{R}$, $N = |\ |$ et $A = [0, +\infty[$. Justifier les réponses.

   (a) A est fermé dans E, car c'est un intervalle fermé.

   (b) A n'est pas ouvert dans E, car $0 \in \overline{A^c}$. En effet,
   $$-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   (c) A n'est pas compact, car il n'est pas borné.

2. $E = \mathbb{C}^2$, $N(z_1, z_2) = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ et
   $$A = \{(z_1, z_2) \in E,\ N(z_1, z_2) \leq 1\}.$$
   Justifier les réponses.

   (a) A est fermé dans E, car c'est une boule fermée.

   (b) A n'est pas ouvert dans E, car $(1, 0) \in \overline{A^c}$. En effet,
   $$\left(\frac{n+1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1, 0).$$

   (c) A est compact (boule unité en dimension finie).

3. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $N=\| \|_{\infty,[0,1]}$ et

$$A=\{f\in E,\ \forall x\in[0,1],\ |f(x)-x|\leq 1\}.$$

Justifier les réponses.

(a) A est fermé dans E, car c'est une boule fermée $BF(Id,1)$.

(b) A n'est pas ouvert dans E car l'application $g:x\mapsto x+1$ est dans $\overline{A^c}$. Si, pour $n\in\mathbb{N}$, on note :

$$g_n\ :\ x\mapsto x+1+\frac{1}{n+1}\text{ alors }N(g-g_n)=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

(c) A n'est pas compact car c'est une boule de rayon >0 dans un espace de dimension infinie (théorème de Riesz).

4. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, où on choisit la norme N par :

$$\forall f\in E,\ N(f)=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\text{ et }A=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}).$$

Justifier les réponses.

(a) A n'est pas fermé dans E car l'application $f_\infty:x\mapsto\left|x-\frac{1}{2}\right|$ est limite pour la norme N des fonctions f_n définies par :

$$\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{n}}.$$

(b) A n'est pas ouvert dans E, car pour un $\epsilon>0$ quelconque, $f\in A$, $BO(f,\epsilon)$ contient des fonctions non dérivables en tout point. Par exemple, la fonction g définie par :

$$\forall x\in[0,1],\ g(x)=f(x)+\frac{\epsilon}{2}\times\frac{f_\infty(x)}{N(f_\infty)},$$

où f_∞ est la fonction définie à la question ci-dessus.

(c) A n'est pas compact, car il n'est pas fermé.

5. $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme :

$$\forall f\in E,\ N(f)=\int_0^{1/2}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\sup_{x\in[1/2,1]}|f(x)|.$$

On considère alors pour $a\in[0,1]$

$$A=\{f\in E,\ f(a)=0\}.$$

Justifier les réponses.

(a) A est un hyperplan, il est donc fermé si $f\mapsto f(a)$ est continue, dense sinon. Or cela dépend de a. On a :

$$\forall a\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ \forall f\in E,\ |f(a)|\leq N(f).$$

L'application est alors continue et A est donc fermé dans E. Au contraire, lorsque $a<1/2$, la forme linéaire $f\mapsto f(a)$ n'est plus continue (où n est assez grand pour que

$a + 1/n \leq 1/2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a - 1/n \\ n^2 \times (x - a + 1/n) & \text{si } a - 1/n \leq x \leq a \\ -n^2 \times (x - a - 1/n) & \text{si } a \leq x \leq a + 1/n \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

alors

$$\frac{|f_n(a)|}{N(f_n)} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Ce qui montre que A n'est pas fermé.

(b) A est un sous-espace vectoriel strict, il ne peut donc pas être ouvert, car sinon, ce serait E tout entier (on a vu qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ d'intérieur non vide est forcément E tout entier).

(c) A n'est pas borné, il n'est donc pas compact.

Exercice 11 :

On considère l'ensemble E des matrices $n \times n$ à coefficients réels, muni d'une norme quelconque et

$$A = \{M \in E,\ \det(M) = 0\}.$$

1. Pourquoi ne s'intéresse-t-on pas à la norme ?

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La topologie ne changera pas lorsque l'on changera de norme.

2. Montrer que A est fermé dans E.

L'application det est n-linéaire sur E de dimension finie, elle est donc continue et

$$A = \det{}^{-1}(\{0\}),$$

est image réciproque du singleton $\{0\}$ qui est fermé dans $\mathbb{R}$.

3. Que vaut l'intérieur de A ? Justifier.

Le complémentaire de A est $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans E, donc :

$$\mathring{A} = \overbrace{(GL_n(\mathbb{R})^c)}^{\circ} = \left(\overline{GL_n(\mathbb{R})}\right)^c = \emptyset.$$

Soit $M \in E$ et $r > 0$.

4. Montrer que :

$$A \cap BF(M, r) \text{ est compact.}$$

$A \cap BF(M, r)$ est intersection de deux fermés de E, il est donc fermé dans E. Comme il est borné et que nous sommes en dimension finie, c'est bien un compact.

Soit f une application continue de $A \cap BF(M, r)$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. On pose alors :

$$B = \bigcup_{X \in A \cap BF(M,r)} BF(X, f(X)).$$

5. B est-il encore compact ? Justifier.

On peut procéder de deux manières.

(a) *Directement.* Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$, chaque b_p étant dans une boule $BF(X_p, f(X_p))$ où $X_p \in A\cap BF(M,r)$. Cela nous fournit une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \left(A\cap BF(M,r)\right)^{\mathbb{N}}$ qui est compact. On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers une limite $\Lambda \in A\cap BF(M,r)$. Soit :

$$X_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \Lambda.$$

Comme f est continue, on obtient alors :

$$f\left(X_{\varphi(p)}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f\left(\Lambda\right).$$

Donc, pour p assez grand, on a :

$$b_{\varphi(p)} \in BF\left(\Lambda, 2\,f\left(\Lambda\right)\right) \text{ qui est compacte,}$$

car c'est une boule fermée d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On en déduit qu'il existe une sous-suite de $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite β, qui vérifie immédiatement :

$$\beta \in A\cap BF\left(\Lambda, f\left(\Lambda\right)\right) \subset B,$$

en passant à la limite... B est bien compact.

(b) On peut aussi utiliser qu'en dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

— *B est bornée.* Car la fonction f continue sur un compact est bornée. Notons S sa borne supérieure (qui est d'ailleurs un maximum), alors :

$$B \subset BF(M, r+S).$$

— *B est fermée dans E.* Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite $\beta \in E$. Montrons que $\beta \in B$. On procède comme avant, chaque b_p est dans une boule $BF(X_p, f(X_p))$, on extrait une sous-suite de $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Λ et, par continuité de f, on obtient que :

$$\beta \in BF\left(\Lambda, f(\Lambda)\right).$$

Ce qui montre le résultat.

Exercice 12 :

Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel normé de dimension finie. Soit K un compact d'intérieur non vide de E. On pose :

$$C = \{u \in \mathscr{L}(E),\ u(K)\subset K\}.$$

Pour $u\in\mathscr{L}(E)$, on note :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u^n = u\circ u^{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que C est compact.

Toutes les normes de $\mathscr{L}(E)$ sont équivalentes, prenons la norme triple subordonnée à N qu'on note $|||\cdot|||$.

- Montrons que C est borné.

K est d'intérieur non vide donc :

$$\exists a \in K,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ BF(a,r) \subset K.$$

Par ailleurs K est borné donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in K,\ N(x) \leqslant M.$$

Soit $x \in BF(0_E, r)$ et soit $u \in C$. Alors, comme $a \in K$ et $a + x \in K$, on a $u(a) \in K$ et $u(a+x) \in K$. D'où

$$\begin{aligned} N(u(x)) &= N(u(a+x) - u(a)) \\ &\leqslant N(u(a+x)) + N(u(a)) \\ &\leqslant 2M \end{aligned}$$

u est donc bornée sur $BF(0_E, r)$ et donc aussi sur $BF(0_E, 1)$ (majorée par $2M/r$). On a donc :

$$|||u||| \leqslant \frac{2M}{r}.$$

Donc C est borné.

- Montrons que C est fermé dans $\mathscr{L}(E)$.
  Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ un suite qui converge vers une limite $u \in \mathscr{L}(E)$.
  Il faut prouver que $u(K) \subset K$.
  Soit $x \in K$. On a :

  $$N(u_p(x) - u(x)) = N((u_p - u)(x)) \leqslant |||u_p - u||| \times N(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

  Donc $(u_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ dans E.
  Comme K est fermé, et que $\forall p \in \mathbb{N},\ u_p(x) \in K$, alors $u(x) \in K$.
  Ceci prouve que u est dans C. Donc C est fermé.
- C est fermé et borné dans un espace de dimension finie, donc C est compact.

2. Soit $u \in C$. Montrer que la suite $(\det(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puis en déduire que $|\det(u)| \leqslant 1$.

C est compact et $\det$ est une application continue sur $\mathscr{L}(E)$. Donc $\det(C)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. En particulier, $\det(C)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
Soit $u \in C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u^n \in C$. Or

$$|\det(u^n)| = |\det(u)|^n.$$

La suite $(|\det(u^n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On a donc nécessairement

$$|\det(u)| \leqslant 1.$$

Dans la suite, on suppose également que K est convexe.

1. Soit $u \in C$.
   (a) Soit $a \in K$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k(a).$$

   Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K et que $u(a_n) - a_n$ tend vers 0_E.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k(a) \in K$. Or K est convexe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in K$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u(a_n) - a_n = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(a) - a\right).$$

D'où

$$N(u(a_n) - a_n) \leqslant \frac{2M}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(b) En déduire que :

$$\exists b \in K,\ u(b) = b.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une limite b dans K. u est continue (linéaire en dimension finie), donc $b = u(b)$.

Exercice 13 :

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé **de dimension finie. On fixe** $g \in \mathscr{GL}(E)$, et on note

$$L_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

$$R_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\varphi_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \mapsto & g \circ f \circ g^{-1} \end{array}$$

On fera attention au fait que **les variables des fonctions L_g, R_g et φ_g sont des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$.** On munit $\mathscr{L}(E)$ de la norme triple $|||.|||_{E,E}$. On note alors $|||.|||_L = |||.|||_{\mathscr{L}(E),\mathscr{L}(E)}$ la norme triple sur $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$, c'est-à-dire la norme triple pour les applications linéaires de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $L_g \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$. On admet dans la suite que les applications R_g et φ_g sont aussi linéaires.

Soit $(f, h) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme g est linéaire,

$$L_g(f + \lambda.h) = g \circ (f + \lambda.h) = g \circ f + \lambda.g \circ h = L_g(f) + \lambda.L_g(h)$$

Donc L_g est une application linéaire.

2. Sans calcul, montrer que ces applications sont continues.

Comme E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie, donc toute application linéaire de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ est continue.

3. Déterminer $|||L_g|||_L$ et $|||R_g|||_L$.

$\triangleright$ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a, d'après le cours,

$$|||L_g(f)|||_{E,E} = |||g \circ f|||_{E,E} \leqslant |||g|||_{E,E} \times |||f|||_{E,E}$$

Donc $|||L_g|||_L \leqslant |||g|||_{E,E}$.
$\triangleright$ On $\mathrm{Id}_E \neq 0$ et

$$|||L_g(\mathrm{Id}_E)|||_{E,E} = |||g|||_{E,E} \leqslant |||g|||_{E,E} \times |||\mathrm{Id}_E|||_{E,E}$$

donc $|||L_g|||_L \geqslant |||g|||_{E,E}$.
▷ Finalement, $|||L_g|||_L = |||g|||_{E,E}$. On démontre de même que $|||R_g|||_L = |||g|||_{E,E}$.

4. Montrer que $1 \leqslant |||\varphi_g|||_L \leqslant |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.

▷ On a $\varphi_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ donc $|||\varphi_g|||_L \leqslant |||L_g|||_L \times |||R_{g^{-1}}|||_L = |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.
▷ On $\mathrm{Id}_E \neq 0$ et

$$|||\varphi_g(\mathrm{Id}_E)|||_{E,E} = |||g \circ \mathrm{Id}_E \circ g^{-1}|||_{E,E} = |||\mathrm{Id}_E|||_{E,E}$$

donc $|||\varphi_g|||_L \geqslant 1$.

5. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|g(x_0)\| = |||g|||_{E,E}$.

D'après le cours, $|||g|||_{E,E} = \sup\limits_{x \in S_E(0,1)} \|g(x)\|$. Comme E est de dimension finie, $S_E(0,1)$ est compact car fermé borné dans E. Donc la fonction continue $x \mapsto \|g(x)\|$ atteint son maximum sur $S_E(0,1)$. Donc il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|g(x_0)\| = |||g|||_{E,E}$.

6. Montrer qu'il existe $y_0 \in E$ tel que $\|y_0\| = 1$ et $\|g(y_0)\| = \dfrac{1}{|||g^{-1}|||_{E,E}}$.

De même que précédemment, il existe $z_0 \in E$ tel que $\|z_0\| = 1$ et $\|g^{-1}(z_0)\| = |||g^{-1}|||_{E,E}$.
Comme g est un isomorphisme et $z_0 \neq 0$, on a $g^{-1}(z_0) \neq 0$.
Posons alors $y_0 = \dfrac{g^{-1}(z_0)}{\|g^{-1}(z_0)\|}$. On a $\|y_0\| = 1$ et, par linéarité de g

$$\|g(y_0)\| = \frac{1}{\|g^{-1}(z_0)\|}\|g(g^{-1}(z_0))\| = \frac{\|z_0\|}{|||g^{-1}|||_{E,E}} = \frac{1}{|||g^{-1}|||_{E,E}}$$

7. On admet qu'il existe un $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f(y_0) = x_0$ et $|||f|||_{E,E} = 1$. Montrer que $|||\varphi_g|||_L = |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.

Par définition de $|||.|||_{E,E}$, on a, pour tout $y \in E \setminus \{0\}$,

$$|||g \circ f \circ g^{-1}|||_{E,E} \geqslant \frac{\|g(f(g^{-1}(y)))\|}{\|y\|}$$

Pour $y = g(y_0) \neq 0$ (car g bijective), on a

$$|||g \circ f \circ g^{-1}|||_{E,E} \geqslant \frac{\|g(f(y_0))\|}{\|g(y_0)\|} = \frac{\|g(x_0)\|}{\|g(y_0)\|} = |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$$

Ainsi, on obtient

$$|||\varphi_g|||_L \geqslant \frac{|||g \circ f \circ g^{-1}|||_{E,E}}{|||f|||_{E,E}} \geqslant |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}.$$

De plus, d'après la question 4, $|||\varphi_g|||_L \leqslant |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.
Donc on obtient $|||\varphi_g|||_L = |||g|||_{E,E} \times |||g^{-1}|||_{E,E}$.

Exercice 14 :

1. On considère l'espace vectoriel $E = (\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) On considère la fonction

$$\begin{aligned} N : & E \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_0^1 |f(t) - 2f(0)| \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

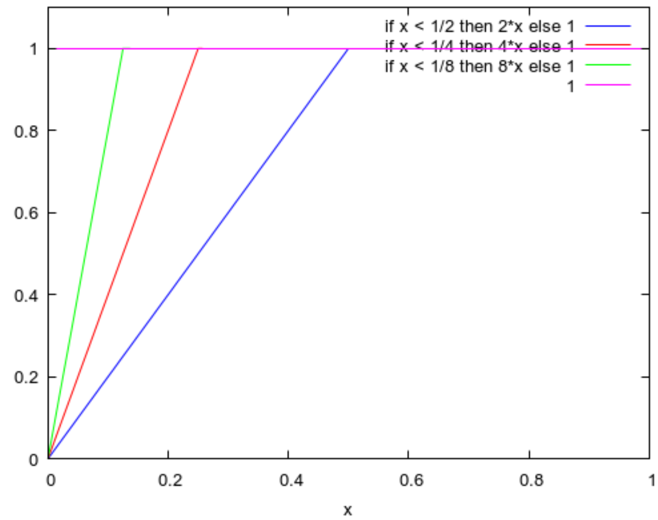
Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé.

> Il faut montrer que N est une norme. On vérifie donc que :
> ▷ $N(\lambda.f) = \lambda \times N(f)$
> ▷ $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$
> ▷ $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$
> Aucune difficulté ici.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} f_n : & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} n \times x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans (E, N), et donner sa limite.

> Il se passe ici quelque chose de surprenant. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ semble converger vers la fonction g constante égale à 1, comme on peut le voir sur le dessin suivant :
>
> 
>
>
> Et pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
>
> $$\begin{aligned} N(g - f_n) &= \int_0^1 |g(t) - f_n(t) - 2g(0) + 2f_n(0)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} |-1 - n \times t| \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^1 |-2| \, \mathrm{d}t \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \neq 0 \end{aligned}$$
>
> La limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est en fait la fonction h constante égale à -1. En effet, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} N(h-f_n) &= \int_0^1 |h(t)-f_n(t)-2h(0)+2f_n(0)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} |1-n\times t|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^1 |0|\,\mathrm{d}t \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h.}$$

2. Soit (E,N) un espace vectoriel normé admettant un hyperplan dense H. Montrer que pour tout $y \in E\backslash H$, il existe une norme N' sur E telle que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tendant vers y dans (E,N), $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-y$ dans (E,N').

Soit $y \in E\backslash H$. Comme H est un hyperplan de E, on a $E = H \oplus \mathrm{Vect}(y)$. On peut donc décomposer de manière unique tout élément x de E sous la forme $x = h + \lambda \times y$, avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit maintenant la symétrie par rapport à H selon y :

$$\begin{aligned} \phi : E &\to E \\ x = h+\lambda\times y &\mapsto h-\lambda\times y \end{aligned}$$

L'application $N' = N\circ\phi$ est aussi une norme (facile, on vérifie les 3 points de la définition en utilisant le fait que N est une norme et ϕ est linéaire).
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergeant vers y dans (E,N). On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} N'(-y-y_n) = N(\phi(-y-y_n)) &= N(-\phi(y)-\phi(y_n)) \\ N(y-y_n)) &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -y \text{ dans } (E,N').}$$

3. Donner une explication au résultat contre-intuitif de la question 1.

On pose $E = \left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}\right)$, $N = ||.||_1$, $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $f = (x \mapsto 1)$.
On a bien $f_n \to f$ dans (E,N).
On pose

$$\begin{aligned} \phi : E &\to E \\ g &\mapsto (x \mapsto g(x)-2g(0)) \end{aligned}$$

Φ est la symétrie par rapport à H selon f.
$N' = N\circ\phi$ est la norme considérée dans la question 1.(a), et on a bien $f_n \to -f$ dans (E,N').

Exercice 15 :

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

1. Montrer que u est continue et majorer $\|u\|$.

On a :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Donc

$$\boxed{u \text{ est continue et } \|u\| \leqslant 1}$$

2. Montrer que :

$$\forall a \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a)\| \leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\|$$

Par télescopage,

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - \mathrm{Id})$$

D'où

$$\begin{aligned} \|v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a)\| &= \left\| \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1}(a) - a\right) \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \times \left(\left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\|\right) \\ &\leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\| \end{aligned}$$

car, par hypothèse sur u, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.

3. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0_E\}$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$, il existe $a \in E$ tel que $x = u(a) - a$. On a donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = v_n(x)$$

Or $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, donc, par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k(x) = x$. Et donc $v_n(x) = x$. Donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x$$

Or, d'après la question précédente,

$$\|v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a)\| \leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\|$$

D'où

$$\|x\| \leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\|$$

En passant à la limite on obtient $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0_E\}}$$

4. On suppose que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$

(a) Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_n(x))$ converge. On note $v(x)$ sa limite. Montrer que l'application v est la projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$.

Soit $x \in E$. Il existe $y \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ tels que $x = y + z$. Comme $y \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$, alors il existe $a \in E$ tel que $y = u(a) - a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned}\|v_n(y)\| &= \|v_n \circ (u-\mathrm{Id})(a)\| \\ &\leqslant \frac{2}{n+1} \times \|a\|\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(y) = 0_E$$

Par ailleurs $z \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n(z) = z$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = z$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = z$$

c'est-à-dire $v(x) = z$.

$$\boxed{\text{L'application } v \text{ est la projection sur } \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}).}$$

(b) Montrer que v est continue.

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n(x)\| &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|u^k(x)\| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|x\| \\ &\leqslant \|x\|\end{aligned}$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\|v(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Donc

$$\boxed{v \text{ est continue.}}$$

(c) En déduire que $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ est un fermé de E.

$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(v) = v^{-1}(\{0_E\})$. Donc comme v est continue,

$$\boxed{\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \text{ est un fermé de } E.}$$

5. Montrer que, réciproquement, si pour tout $x \in E$ la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$

est un fermé de E, alors
$$\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}) = E$$

Soit $x \in E$. On pose
$$y = \lim_{n \to +\infty} v_n(x).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u(v_n(x)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(x) = v_n(x) + \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(x) - x\right)$$

D'où
$$\|(u(v_n(x)) - v_n(x)\| = \left\|\frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(x) - x\right)\right\| \leqslant \frac{1}{n+1} \times \left(\|u^{n+1}(x)\| + \|x\|\right) \leqslant \frac{2}{n+1} \times \|x\|$$

D'où, en passant à la limite,
$$u(y) = y$$

On en déduit
$$y \in \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$x - v_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Id} - u^k)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Id} - u^k)(x)$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\operatorname{Id} - u^k = (\operatorname{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell,$$

d'où $\operatorname{Im}(\operatorname{Id} - u^k) \subset \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - u) = \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id})$, et donc
$$x - v_n(x) \in \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$$

Comme $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$ est fermé dans E, en passant à la limite, on en déduit
$$x - y \in \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$$

On a écrit $x = y + (x-y)$ avec $y \in \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})$ et $x - y \in \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$. Donc
$$E = \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}) + \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$$

Comme d'après la question 2, on a $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}) = \{0_E\}$. On en déduit
$$\boxed{\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}) = E}$$