TD n°5 : mesures et intégrabilité

Exercice 1 **Tribu (cours)**

Montrer que $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R}\,,\ A \text{ ou } A^c \text{ est fini ou dénombrable}\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

Correction :

On vérifie les axiomes d'une tribu (Rappel 2.2) :

- L'ensemble vide $\emptyset$ est fini donc dans $\mathcal{T}$.
- Si $A \in \mathcal{T}$ alors, soit A est fini ou dénombrable et alors $B = A^c \in \mathcal{T}$ car B^c est fini ou dénombrable, soit A^c est fini ou dénombrable et alors $B = A^c \in \mathcal{T}$ car B est fini ou dénombrable.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ alors, soit tous les A_n sont finis ou dénombrables et alors $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est fini ou dénombrable et donc $B \in \mathcal{T}$, soit il existe un A_{n_0} tel que $A^c_{n_0}$ est fini ou dénombrable et alors $B^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^c_n \subset A^c_{n_0}$ et donc B^c est fini ou dénombrable, d'où $B \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est donc bien une tribu.

Exercice 2 **Tribu**

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{T}$ une tribu sur F. On considère $f : E \to F$ une application. Montrer que $\mathcal{T}' = \left\{f^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{T}\right\}$ est une tribu sur E.

Correction :

Montrons les 3 axiomes d'une tribu :

- $\emptyset \in \mathcal{T}'$. En effet $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Soit $B \in \mathcal{T}'$. Alors il exite $A \in \mathcal{T}$ tel que $f^{-1}(A) = B$. Alors $B^c = f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T}'$.
- Soit $(B_n) \in \mathcal{T}'^{\mathbb{N}}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists A_n$ tel que $B_n = f^{-1}(A_n)$. Alors :

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

  Or $\mathcal{T}$ est une tribu donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. Ainsi $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}'$.

Exercice 3 **Tribu**

Soit X un ensemble muni de ses parties. On définit :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{si A est fini} \\ +\infty, & \text{si A est infini} \end{cases}$$

Montrer que μ définie une mesure. Elle est appelée mesure de comptage.

Correction :

Vérifions les deux propriétés pour une mesure :

- $\mu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.

  1. Soit (A_n) une suite d'ensemble deux à deux disjoints mesurables.

  1. Si l'un des A_i est infini alors $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n|$.

2. Si ils sont tous finis. Alors : $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n|$ par récurrence sur n car les ensembles sont tous disjoints.

Exercice 4 **mesure et tribu**

Soit (X, B, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. On considère :

$$\mathcal{T} = \left\{A \in B, \quad \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\right\}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Correction :

On montrer que $\mathcal{T}$ vérifie les 3 axiomes des tribus.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ car $\mu(\emptyset) = 0$ (définition d'une mesure).
2. Soit $A \in \mathcal{T}$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. De plus, par complémentaire $\mu(A^c) = 1$ ou $\mu(A^c) = 0$. Donc $A^c \in \mathcal{T}$.
3. Soit $\{A_i\}$ une suite d'événements 2 à 2 disjoints de $\mathcal{T}$.
   - Si $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mu(A_i) = 0$. Alors $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i) = 0$.
   - Si $\exists i \in \mathbb{N}, \quad \mu(A_i) = 1$. Alors $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}, \quad \mu(A_j) = 0$. La formule est donc encore vraie.

Ainsi $\mathcal{T}$ est une tribu.

Exercice 5

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E, \text{ la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f(x)\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Indications : on pourra utiliser la caractérisation de la convergence à l'aide des suites de Cauchy

Correction :

Écrivons la caractérisation pour une suite de Cauchy :

$$\begin{aligned}(f_n(x)) \quad \text{converge} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{eps>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq N} \{x \in E, [f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}\end{aligned}$$

L'ensemble $\{x \in E, [f_n(x) - f_m(x)| < eps\}$ est mesurable car f_n et f_m sont mesurables. Malheureusement, on n'a pas une intersection dénombrable avec $\varepsilon > 0$. On utilise une suite $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ par exemple pour caractériser la limite. Alors :

$$(f_n(x)) \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq N} \left\{x \in E, [f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

On obtient une intersection et union dénombrable d'ensembles mesurables. L'ensemble est donc mesurable.

Exercice 6 **Rappel intégrale de Riemann, intégrale généralisée**

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - 1}.$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

On décompose l'étude suivant les difficultés :

- Sur $[0,1]$. À l'aide d'un développement limité en 0, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0. Il n'y a pas de problème d'intégrabilité.

- Sur $[1,+\infty[$. On utilise la méthode du x^α. Par les croissances comparées
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0.$$
Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{=} o(1/x^2)$. Par comparaison asymptotique avec une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$, la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7 **Rappel intégrale de Riemann, intégrale généralisée**

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{xe^{-x}}{1+x^2}.$$
Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

On décompose l'étude suivant les problèmes possibles.

- Sur $]0,1]$. f est prolongeable par continuité car admet une limite. f est intégrable sur $[0,1]$.

- Sur $[1,+\infty[$. On utilise par exemple la méthode du x^α. Alors :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0,$$
par croissance comparée. Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{=} o(1/x^2)$. Par comparaison asymptotique avec une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$, la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 8 **Rappel intégrale de Riemann, intégrale généralisée**

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$.

Correction :

Le seul problème est en 1. Déterminons un équivalent de f en 1. On pose $x = 1+h$, alors :
$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{1}{1-\sqrt{1+h}} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{-h/2+o(h)} \end{aligned}$$
Ainsi $f(1+h) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{h}$. Par substitution $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ n'est pas intégrable en 1. Par comparaison asymptotique, f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.