Suites et Séries – TD_{12}

28-29 novembre 2022

Exercice 1

Un sac contient 2 dés à six faces. L'un est parfaitement équilibré ; l'autre donne le chiffre 6 une fois sur deux et est équiprobable sur les autres chiffres. On prend un dé au hasard dans le sac et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On a obtenu un 6. Quelle est la probabilité qu'on ait pris le dé équilibré ?
3. Même question si on obtient un 5.
4. Même question si on obtient 5 ou 6.

Exercice 2

Une urne A contient 6 boules blanches et 5 boules noires. Une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A. Déterminer :

1. la probabilité que la boule tirée soit blanche ;
2. la probabilité qu'au moins une des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée est blanche.

Exercice 3

Un joueur joue au jeu suivant. Première étape : il lance simultanément deux pièces équilibrées. Deuxième étape : il relance k fois les deux pièces simultanément, où $k \in \{0, 1, 2\}$ est le nombre de « pile(s) » obtenu(s) à la première étape.

1. Le joueur gagne la partie s'il obtient au moins un « pile » à la deuxième étape. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur obtienne deux « piles » à la première étape sachant qu'il a obtenu un seul « pile » à la deuxième étape ?

Exercice 4

Soit $a > 0$ et soient U et V deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-a, a\}$ de même loi définie par

$$\mathbb{P}(U = -a) = \mathbb{P}(V = -a) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U = a) = \mathbb{P}(V = a) = \frac{2}{3}.$$

On suppose que U et V sont indépendantes. On pose

$$X = U \quad \text{et} \quad Y = \text{signe}(U)V.$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes mais que les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Exercice 5

On considère une urne contenant r boules avec r_B boules blanches et $r - r_B$ boules noires. On tire au hasard simultanément n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n < r$, et on s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ ainsi qu'une variable aléatoire discrète X modélisant cette expérience aléatoire.
2. Donner la loi de X. *On ne demande pas de vérifier que* $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $q \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = q\,\mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X. *Indication : chercher une relation entre* $\mathbb{P}(X = n)$ *et* $\mathbb{P}(X = n+1)$.

Exercice 7

Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $n \geqslant 2$ un entier, on pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n (on pourra étudier les cas $n = 2$ puis $n = 3$ et faire une récurrence sur n). *On ne demande pas de vérifier que* $\sum_{k \in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$.