Chapitre 6

Algorithme du simplexe (contraintes d'égalité)

Soit le programme linéaire avec n variables et m contraintes ($(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \leqslant m$) :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^\top \cdot x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.c. \quad & A \cdot x \leqslant b \end{aligned}$$

avec $c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^\top$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $b = (b_1, \ldots, b_m)$.

On va présenter quelques méthodes pour résoudre un problème d'optimisation linéaire sous contraintes.

6.1 Solution d'optimisation linéaire (OL)

Il y a deux cas dans lesquels le problème sous la forme standard (Définition 1.1) n'a pas de solution.

1. Si l'ensemble admissible du problème est vide (par exemple, $\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1,\ x \leqslant 0\}$). Dans ce cas, on dit que le problème est non-réalisable/infeasible/无解.
2. Si le problème d'OL est réalisable mais que sa valeur optimale vaut $-\infty$ (par exemple, $\min\{x,\ x \in \mathbb{R}_-\}$). Dans ce cas, on dit que le problème est non-borné/unbounded/无界.

Dans tous les autres cas, la valeur optimale du problème d'OL est finie et le problème a au moins une solution.

Définition 6.1 – Point extrémal/*Extreme point*/极点

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide, $x \in C$ est un point extrémal de C si et seulement si $C \backslash \{x\}$ est encore convexe.
Autrement dire, x est un point extrémal de C si

$$\forall (x_1, x_2) \in C^2,\ \lambda \in]0, 1[,\ x = \lambda . x_1 + (1 - \lambda) . x_2 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 = x_2$$

Remarque 6.1

1. Le nombre de points extrémaux d'un ensemble convexe peut être fini ou infini.
2. Si un ensemble convexe possède un nombre fini des points extrémaux, on appelle ces points sommets/*vertex*/顶点.

Définition 6.2 – Direction/*Direction*/方向 et Direction extrémale/*Extreme direction*/极方向

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide, $d \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. On dit que d est une direction de C si

$$\forall x \in C,\ \exists \lambda > 0,\ x + \lambda . d \in C$$

Une direction de C est dite extrémale si elle ne peut pas être présentée comme une combinaison positive des autres directions de C.

Remarque 6.2

1. Deux directions u et v de C sont différentes si $\nexists \lambda > 0,\ u = \lambda.v$. Donc deux directions linéairement indépendantes sont différentes, mais la réciproque n'est pas toujours vraie ? Pourquoi ?
2. La direction est une définition adaptée à qui fait sens dans un ensemble non-borné. Dans un ensemble borné, il n'y a pas de direction.

6.1.1 Théorème d'existence de solutions optimales d'OL

Théorème 6.1 – Existence de solutions optimales d'OL

Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ A\cdot x = b,\ x \geqslant 0\}$ un polyèdre convexe tel que $d^1, d^2, \ldots, d^M$ sont les directions extrémales de C. Alors une solution optimale au problème d'optimisation linéaire sous la forme standard existe si et seulement si

$$C \neq \varnothing,\ c^\top \cdot d^j \geqslant 0,\ \forall j \in [\![1, M]\!]$$

Démonstration 23

Si $C = \varnothing$, alors le problème d'OL n'a pas de solution. Donc $C \neq \varnothing$ est une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le problème d'OL possède une solution optimale.
Supposons donc que $C \neq \varnothing$, d'après le théorème de représentation, le polyèdre convexe C peut s'écrire sous la forme :

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i.x^i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j.d^j,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \forall i \in [\![1, N]\!],\ \mu_j \geqslant 0,\ \forall j \in [\![1, M]\!] \right\}$$

où $x^1, x^2, \ldots, x^N$ sont des points extrémaux de C.
Donc le problème d'OL est équivalente au problème :

$$\begin{aligned} &\min c^\top x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i.c^\top x^i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j.c^\top d^j \\ &s.c. \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \\ &\quad\ \lambda_i \geqslant 0,\ i \in [\![1, N]\!] \\ &\quad\ \mu_j \geqslant 0,\ j \in [\![1, M]\!] \end{aligned}$$

Comme la fonction objectif $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i.c^\top \cdot x^i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j.c^\top \cdot d^j$ est une fonction séparable [a], alors pour les variables λ_i comme les x^i sont les points extrémaux de C, alors l'ensemble $\{c^\top \cdot x^i\}$ est borné. Alors, l'ensemble des combinaisons convexes des $\{c^\top \cdot x^i\}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Il existe donc toujours une solution λ pour minimiser la partie $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i.c^\top \cdot x^i$.
Ensuite, pour la partie $\sum_{j=1}^{M} \mu_j.c^\top \cdot d^j$, avec $\mu_j \geqslant 0,\ j \in [\![1, M]\!]$, on peut vérifier facilement qu'il existe un minimum si et seulement si $c^\top \cdot d^j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, M$.
$\Rightarrow$: Par contraposée, si $\exists k \in [\![1, M]\!]$ tel que $c^\top \cdot d^k < 0$, alors pour $\mu_k \to +\infty$, on obtient $\mu_k.c^\top \cdot d^k \to -\infty$, donc $\sum_{j=1}^{M} \mu_j.c^\top \cdot d^j \to -\infty$, c'est-à-dire, il n'existe pas de minimum. Donc il existe un minimum $\Rightarrow c^\top \cdot d^j \geqslant 0$, $\forall j \in [\![1, M]\!]$.
$\Leftarrow$: Réciproquement, si $c^\top \cdot d^j \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0,\ \forall j \in [\![1, M]\!]$, alors, $\sum_{j=1}^{M} \mu_j.c^\top \cdot d^j \geqslant 0$, le minimum est clairement égale à 0 si $\mu_j = 0,\ j = 1, \ldots, M$.
Finalement, $C \neq \varnothing,\ c^\top \cdot d^j \geqslant 0,\ \forall j \in [\![1, M]\!]$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solution optimale du problème d'OL.

a. Une fonction de 2 variables indépendantes est dite séparable si on peut l'écrire sous forme d'un produit de 2 fonctions chacune d'entre elles dépendant d'une seule variable.

Théorème 6.2 – Existence de solution-sommet

Si le problème d'OL a une solution, il a une solution en un sommet de C.

Démonstration 24

On a vu dans la démonstration du théorème d'existence de solutions optimales d'OL, que la solution optimale satisfait $\mu_j = 0$, $\forall j \in [\![1, M]\!]$. Alors, le problème devient

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_{i=1}^{N} \lambda_i . c^\top \cdot x^i \\ s.c. \; & \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geqslant 0,\; i \in [\![1, N]\!] \end{aligned}$$

Prenons $p \in [\![1, N]\!]$ tel que

$$c^\top \cdot x^p = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} c^\top \cdot x^i$$

Comme $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in [\![1, N]\!]$, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \cdot \underbrace{c^\top \cdot x^i}_{\geqslant c^\top \cdot x^p} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i . c^\top \cdot x^p = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \right)}_{=1} . c^\top \cdot x^p = c^\top \cdot x^p$$

Donc $c^\top \cdot x^p$ est la valeur optimale du problème d'OL. C'est à dire, le sommet x^p est une solution optimale.

Remarque 6.3

Lorqu'un connaît tous les points extrémaux et toutes les directions extrémales de C, alors, le Théorème 6.2 nous permet de trouver une solution optimale en un sommet de C.

6.1.2 Solution de base

Considérons le système linéaire :

$$A \cdot x = b$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $(m \leqslant n)$ et $\text{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Comme $\text{rang}(A) = m$, il y a donc m colonnes de A linéairement indépendantes. Par exemple, si les premières m colonnes de A sont linéairement indépendantes, on peut donc écrire A sous la forme d'une matrice par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} B | N \end{bmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{GL}_m$, et $N \in \mathcal{M}_{m,n-m}$.

Définition 6.3 – Matrice de base/Basic matrix/基矩阵

Comme B est une matrice inversible, elle forme une base de $\mathbb{R}^m$, on l'appelle une *matrice de base/basic matrix/基矩阵* (ou *une base*). La matrice N s'appelle une *matrice hors base/non-basic matrix/非基矩阵*.

Définition 6.4 – Variable de base/Basic variable/基变量

Étant donnée une base B, on peut également décomposer les variables x en deux parties :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

où $x_B \in \mathbb{R}^m$ correspond à des colonnes de B, appelées *variables de base/basic variable/基变量* ; et $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ correspond à des colonnes de N, appelée *variable hors base/non-basic variable/非基变量*.

On obtient alors

$$A \cdot x = b \iff A \cdot x = \begin{bmatrix} B | N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$$

Comme B est inversible, on a

$$x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot x_N$$

Particulièrement, si on prend $x_N = 0$, alors

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Donc $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution possible de l'équation $A \cdot x = b$.

Définition 6.5 – Base réalisable/Feasible base/可行基

Soit une base B donnée, si $B^{-1} \cdot b \geqslant 0$, alors la matrice B appelé une *base réalisable/feasible base/可行基* pour les contraintes $\{A \cdot x = b, x \geqslant 0\}$. Sinon, B est une *base non-réalisable/infeasible base/非可行基*.

Définition 6.6 – Solution de base/Solution de base réalisable/Solution de base optimale

Dans un problème d'OL, soit B une matrice de base, on appelle $x = \begin{bmatrix} B^{-1} \cdot b \\ 0 \end{bmatrix}$ une solution de *base/basic solution/基本解* pour l'équation du système linéaire $Ax = b$.

1. Si de plus $B^{-1} \cdot b \geqslant 0$, on l'appelle une *solution de base réalisable/basic feasible solution/基本可行解*.
2. Si $x = \begin{bmatrix} B^{-1} \cdot b \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution optimale du problème d'OL, alors B est une *base optimale/optimal base/最优基*, et x est une *solution de base optimale/optimal basic solution/最优基本可行解*.

Définition 6.7 – Dégénération/Degeneration/退化

Soit $x = \begin{bmatrix} B^{-1} \cdot b \\ 0 \end{bmatrix}$ une solution de base réalisable du problème d'OL, si $B^{-1} \cdot b > 0$, alors la solution x est non-dégénérée, sinon x est dégénérée.

6.2 Méthode graphique

Cette méthode est uniquement applicable pour résoudre un problème d'optimisation avec une ou deux variables et peu de contraintes linéaires.

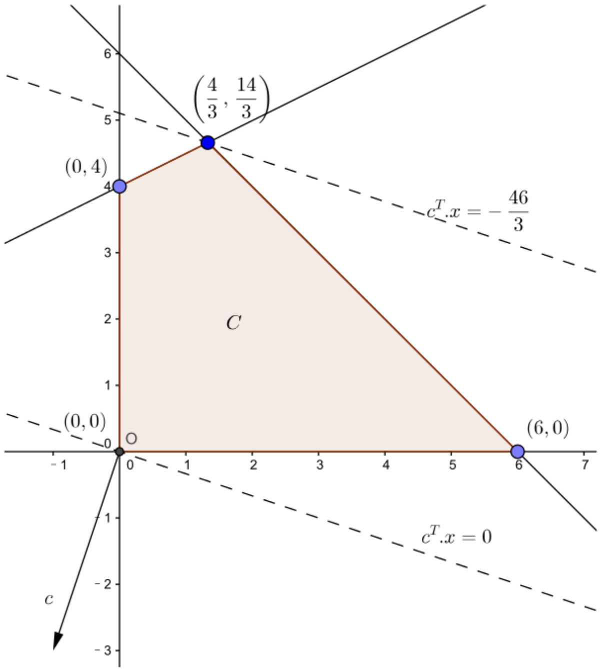

FIGURE 6.1 – Exemple de méthode graphique

Exemple 6.1 – Optimisation linéaire avec deux variables

Considérons le problème d'optimisation linéaire suivant

$$\begin{cases} \min & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & (x_1, x_2) \geqslant 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Notons l'ensemble des contraintes linéaires par C. Nous pouvons tracer le domaine C comme dans la figure 6.1, et c'est un polytope.

La fonction objectif à minimiser est $c^\top \cdot x = -x_1 - 3x_2$ où $c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Nous pouvons facilement trouver le minimum et le maximum de la fonction objectif sur C.

Le minimum global est atteint au point $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$, le maximum global est atteint au point $(0, 0)$.

La valeur minimale est $-\frac{4}{3} - 3 \times \frac{14}{3} = -\frac{46}{3}$; la valeur maximale est $-0 - 3 \times 0 = 0$.

6.3 Algorithme du simplexe

L'algorithme du simplexe/simplex algorithm/单纯性算法 a été développé par Georg Dantzig en 1947. C'est une méthode qui permet de trouver une solution de base optimale d'un problème d'OL en nombre fini d'étapes si le problème est réalisable, ou montre que le problème est non borné ou non-réalisable (les trois uniques possibilités pour un problème d'OL).

L'idée de cet algorithme est de passer d'un sommet de l'ensemble admissible (un polyèdre convexe), le long d'une arête, vers un autre sommet qui permet de diminuer la valeur de la fonction objectif. L'algorithme s'arrête lorsque la valeur de la fonction objectif ne décroît plus.

Pour construire cet algorithme, considérons le problème d'OL sous la forme standard (Définition 1.1) :

$$\min\{f(x) = c^\top \cdot x,\ A \cdot x = b,\ x \geqslant 0\}$$

Les matrices que nous avons mentionnées ici sont différentes de celles que nous avons utilisées pour décrire un problème d'optimisation au début de ce chapitre. Pour être précis, nous avons ici les nouvelles matrices comme suivantes : $c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top$ avec $\mathbf{0}$ un vecteur nul de m éléments, $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$, $A = \begin{bmatrix} N|B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n+m}$ et $b = (b_1, \ldots, b_m)$.

Question : Comment passer d'une solution de base réalisable vers une autre solution de base réalisable en diminuant la valeur de la fonction objectif f ?

Analyse : Notons B une matrice de base et N une matrice hors base, supposons que

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1} \cdot b \end{bmatrix}$$

est une solution de base réalisable. Alors,

$$f(x^0) = c^\top \cdot x^0 = \begin{bmatrix} c_N^\top | c_B^\top \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1} b \end{bmatrix} = c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b$$

D'abord, on va essayer de chercher une solution réalisable x depuis x^0 qui nous permet de diminuer la valeur de la fonction objectif, soit

$$x = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix}$$

une solution réalisable améliorée (avec $x_N \geqslant 0$). Alors,

$$x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot \underbrace{x_N}_{\geqslant 0}$$

Si on a $f(x) < f(x^0)$, il faut donc

$$f(x) = c^\top \cdot x = c_B^\top \cdot x_B + c_N^\top \cdot x_N = \underbrace{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b}_{=f(x^0)} - \left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \right) \cdot x_N < f(x^0)$$

On obtient alors

$$\left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \right) \cdot x_N > 0$$

Notons J l'ensemble des indices des variables hors base. Clairement $|J| = n$. Alors, on a deux cas possibles :

Cas 1 : S'il existe un indice $j \in J$ tel que $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j > 0$, on peut prendre une bonne valeur de $x_j > 0$ telle que $x \in C$ et fixé $x_i = 0$, $\forall i \in J \backslash \{j\}$, ce qui donne

$$\left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \right) \cdot x_N = \underbrace{\left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j \right)}_{>0} \cdot \underbrace{x_j}_{>0} > 0$$

et le vecteur x pourra diminuer la valeur objectif.

Cas 2 : Sinon, $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \leqslant 0$, alors $\nexists x_N \geqslant 0$ permettant de diminuer la valeur objectif, car $\left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \right) \cdot x_N \leqslant 0$, $\forall x_N \geqslant 0$.

D'après la discussion de cas ci-desous, prenons

$$k \in \arg\max \{ c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_i - c_i,\ i \in J \}$$

Si $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k \leqslant 0$, on est dans le deuxième cas, donc x est une solution de base réalisable et optimale.

Sinon, on a $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k > 0$, et on cherche une valeur de x_k qui permet de construire une solution réalisable $x = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix}$ telle que

$$x_N = \begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix}_{i \in J} \text{ où } x_i = \begin{cases} x_k, & i = j \\ 0, & i \in J \backslash \{j\} \end{cases}$$
$$x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot x_N = B^{-1} \cdot b - x_k \cdot B^{-1} \cdot p_k$$

Pour simplifier la notation, on note $\overline{b} = B^{-1} \cdot b$ et $y_k = B^{-1} \cdot p_k$. Alors,

$$x_B = \overline{b} - x_k \cdot y_k$$

Donc

$$f(x) = f(x^0) - \underbrace{x_k}_{>0} \cdot \underbrace{\left(c_B^\top \cdot y_k - c_k\right)}_{>0} < f(x^0)$$

Pour maximiser l'écart entre $f(x)$ et $f(x^0)$, on peut prendre x_k le plus grand possible en gardant la faisabilité de x. Comme $A \cdot x = b$ est toujours vrai, et $x_N \geqslant 0$, il reste à garantir $x_B \geqslant 0$.

On a deux cas possibles :

— Si $y_k \leqslant 0$ ($y_k \neq 0$), alors

$$\forall x_k > 0,\ x_B = \overline{b} - x_k \cdot y_k > \overline{b} \geqslant 0$$

Donc x est réalisable.
On fait tendre x_k vers $+\infty$, alors $\|x_B\| \to +\infty$, donc le problème est **non-borné**. Dans ce cas,

$$f(x) = f(x^0) - x_k \cdot \underbrace{\left(c_B^\top \cdot y_k - c_k\right)}_{>0} \xrightarrow[x_k \to +\infty]{} -\infty$$

Donc il n'existe pas de solution optimale.

— Sinon, $\exists i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $(y_k)_i > 0$, comme $x_B \geqslant 0$, il faut donc

$$\overline{b}_i - x_k.(y_k)_i \geqslant 0$$

Ceci implique

$$x_k \leqslant \frac{\overline{b}_i}{(y_k)_i}$$

Donc

$$x_k \leqslant \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{(y_k)_i},\ (y_k)_i > 0 \right\}$$

Prenons

$$r \in \arg \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{(y_k)_i},\ (y_k)_i > 0 \right\}$$

et on choisit $x_k = \frac{\overline{b}_r}{(y_k)_r}$ (c'est le plus grand x_k tel que $x_B \geqslant 0$).
Si $\overline{b}_r = 0$ (cas dégénéré car $x_B^0 = \overline{b}$ n'est pas un vecteur strictement positif), alors $x_k = 0$ et donc $x = x^0$. On ne peut pas améliorer la valeur optimale. On a donc atteint une solution réalisable de base optimale.
Sinon, $x_k > 0$, alors x est une solution réalisable et

$$x_{B_r} = \overline{b}_r - x_k.(y_k)_r = \overline{b}_r - \frac{\overline{b}_r}{(y_k)_r}.(y_k)_r = 0$$

Notons $\overline{B}$ la base B en remplaçant la colonne p_{B_r} (la r-ième colonne de la base B) par p_k, c'est-à-dire, $\overline{B} = (B \backslash \{p_{B_r}\}) \bigcup \{p_k\}$. On peut vérifier que la nouvelle solution réalisable x est une solution de base réalisable associée à la nouvelle base $\overline{B}$.
D'abord, on va montrer que $\overline{B}$ est une base. Comme $y_k = B^{-1} \cdot p_k$, donc $p_k = B \cdot y_k$.
$\overline{B}$ est une base si et seulement si

$$\sum_{1 \leqslant i \neq r \leqslant m} \lambda_i.p_{B_i} + \lambda_r.p_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i \in [\![1, m]\!]$$

On peut vérifier que pour

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i \neq r \leqslant m} \lambda_i.p_{B_i} + \lambda_r.p_k &= \sum_{1 \leqslant i \neq r \leqslant m} \lambda_i.p_{B_i} + \lambda_r.B \cdot y_k \\ &= \sum_{1 \leqslant i \neq r \leqslant m} \left(\lambda_i + \lambda_r(y_k)_i\right).p_{B_i} + \lambda_r(y_k)_r.p_{B_r} = 0 \end{aligned}$$

comme B est une base, alors

$$\begin{cases} \lambda_i + \lambda_r (y_k)_i = 0,\ 1 \leqslant i \neq r \leqslant m \\ \lambda_r (y_k)_r = 0 \end{cases}$$

Or $(y_k)_r > 0$ (grâce à la définition de r), ceci implique $\lambda_i = 0$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$, d'où, $\overline{B}$ est une base.
Ensuite, on peut démontrer qu'une telle solution réalisable associée à la base $\overline{B}$ est une solution de base réalisable (laissé en exercice). Donc on a bien trouvé une nouvelle solution de base réalisable x en diminuant la valeur de la fonction objectif.

On résume finalement l'algorithme du simplexe ci-dessous et on a le résultat de convergence en un nombre fini d'étapes.

Exemple 6.2

Résoudre le problème d'OL suivant via l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} \max & 4x_1 + x_2 \\ s.c. & -x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ & x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ & (x_1, x_2) \geqslant 0 \end{cases}$$

Standardisation de la forme du problème d'OL :

$$\begin{cases} \min & -4x_1 - x_2 \\ s.c. & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geqslant 0 \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme matricielle :

$$\min\{c^\top x : Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

avec $c = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$.

— **Initialisation :**
$B = \begin{bmatrix} p_3 | p_4 | p_5 \end{bmatrix} = I_3$ est bien une base réalisable (car $x_B = B^{-1} b = b > 0$), et iter $= 1$.

— **Itération 1 :**
Étape 1 : On choisit la matrice B comme une matrice identité, alors on trouve que

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b = b = \overline{b}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$f(x) = c_B^\top \cdot x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

Algorithm 3 Algorithme du simplexe

Données : La forme standard du problème d'OL, $c \in \mathbb{R}^{n+m}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n+m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $N \in \mathbb{N}^*$

Résultat : Une solution de base optimale $x^\star$, la valeur optimale $f(x^\star)$

Initialiser : iter $= 1$

Fonction SIMPLEXE

  Tant que iter $\leqslant N$ **faire**

    Étape 1 : Résoudre le système linéaire $B \cdot x_B = b$ pour trouver

$$x_N = 0, \quad x_B = B^{-1} \cdot b = \overline{b} \quad \text{et} \quad f(x) = c_B^\top \cdot x_B$$

    Étape 2 : Calculer $k \in \arg\min \left\{ c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j,\ j \in \{1, \ldots, m\} \right\}$

    Si $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k \leqslant 0$ **alors**

      La solution optimale : $x \leftarrow x^\star = \begin{bmatrix} 0 \\ x_B \end{bmatrix}$, $f(x) \leftarrow f(x^\star) = c_B^\top \cdot x_B$

      Terminé

    Fin Si

    Étape 3 : Résoudre le système linéaire $B \cdot y_k = p_k$ pour trouver

$$y_k = B^{-1} \cdot p_k$$

    Si $y_k \leqslant 0$ **alors**

      Le problème est **non-borné**, donc il n'y a pas de solution optimale

      Terminé

    Fin Si

    Étape 4 : Calculer

$$r \in \arg \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{(y_k)_i} \ :\ (y_k)_i > 0 \right\}$$

    Si $\overline{b}_r = 0$ (problème **dégénéré**) **alors**

      Les techniques d'anti-cyclage (voir la Secton 6.5.2)

    Fin Si

    Étape 5 : On échange x_{B_r} (variable de base $\rightarrow$ variable hors base) avec x_k (variable hors base $\rightarrow$ variable de base) pour obtenir

$$x_k = \frac{\overline{b}_r}{(y_k)_r},\ x_{B_r} = 0,\ B = (B \backslash \{p_{B_r}\}) \bigcup \{p_k\},\ \text{iter} = \text{iter} + 1$$

    Répéter l'Étape 1.

  Fin Tant que

  Retourner $x^\star$, $f(x^\star)$

Fin Fonction

Étape 2 : On calcule k avec $J \in \{1, 2\}$, alors

$$\begin{aligned} k \in \arg\max\{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j,\ j \in J\} &= \arg\max\{-c_1, -c_2\} \\ &= \arg\min\{4, 1\} = 1 \end{aligned}$$

Donc $k = 1$.
On a $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k = 4 > 0$, on passe à l'étape 3.
Étape 3 : $y_1 = B^{-1} \cdot p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \nleqslant 0$. Donc on passe à l'étape 4.
Étape 4 : On calcule ensuite r avec $y_1 = \begin{bmatrix} (y_1)_1 \\ (y_1)_2 \\ (y_1)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} r \in \arg\min_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{(y_k)_i} \right\} &= \arg\min \left\{ \frac{\bar{b}_2}{(y_1)_2}, \frac{\bar{b}_3}{(y_1)_3} \right\} \\ &= \arg\min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{3}{1} \right\} = 3 \end{aligned}$$

Donc $r = 3$.
Comme $\bar{b}_3 = 3 \neq 0$, le problème est non-dégénéré. On passe à l'étape 5.
Étape 5 : On remplace $p_{B_3} = p_5$ par $p_k = p_1$. Donc, maintenant on a $x_1 = 3$ et $x_5 = 0$.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 0, 4, 12, 0)$$

$$B = (B \backslash \{p_{B_r}\}) \bigcup \{p_k\} = (B \backslash \{p_5\}) \bigcup \{p_1\} = \begin{bmatrix} p_3 | p_4 | p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{iter} = 2$$

Retourner à l'étape 1.

— **Itération 2 :**

Étape 1 : On calcule $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors on trouve que

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{b}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$f(x) = c_B^\top \cdot x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = -12$$

Étape 2 : On calcule k avec $J \in \{2, 5\}$, alors

$$k \in \arg\max_{j \in J} \{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j\}$$

$$c_B^\top \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\end{bmatrix} \cdot p_2 - c_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & -4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} + 1 = 5 > 0$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\end{bmatrix} \cdot p_5 - c_5 = \begin{bmatrix}0 & 0 & -4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = -4 < 0$$

Donc $k = 2$.
On a $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k = 5 > 0$, on passe à l'étape 3.
Étape 3 : $y_2 = B^{-1} \cdot p_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix} \nleqslant 0$. Donc on passe à l'étape 4.
Étape 4 : On calcule ensuite r avec $y_2 = \begin{bmatrix}(y_2)_1\\(y_2)_2\\(y_2)_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}$ et $\bar{b} = \begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\6\\3\end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} r \in \arg\min_{i\in\{1,2\}} \left\{\frac{\bar{b}_i}{(y_k)_i}\right\} &= \arg\min\left\{\frac{\bar{b}_1}{(y_2)_1}, \frac{\bar{b}_2}{(y_2)_2}\right\} \\ &= \arg\min\left\{\frac{7}{1}, \frac{6}{5}\right\} = 2 \end{aligned}$$

Donc $r = 2$.
Comme $\bar{b}_2 = 6 \neq 0$, le problème est non-dégénéré. On passe à l'étape 5.
Étape 5 : On remplace $p_{B_2} = p_4$ par $p_k = p_2$. Donc, maintenant on a $x_2 = \frac{6}{5}$ et $x_4 = 0$.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(3, \frac{6}{5}, 4, 0, 0\right)$$

$$B = (B\backslash\{p_{B_r}\}) \bigcup \{p_k\} = (B\backslash\{p_4\}) \bigcup \{p_2\} = \begin{bmatrix}p_3|p_2|p_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\text{iter} = 3$$

Retourner à l'étape 1.

— **Itération 3 :**

Étape 1 : On calcule $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$, alors on trouve que

$$x_B = \begin{bmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\12\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{29}{5}\\\frac{6}{5}\\\frac{21}{5}\end{bmatrix} = \bar{b}$$

$$x_N = \begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix} = 0$$

$$f(x) = c_B^\top x_B = \begin{bmatrix}0 & -1 & -4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{29}{5}\\\frac{6}{5}\\\frac{21}{5}\end{bmatrix} = -18$$

Étape 2 : On calcule k avec $J \in \{4, 5\}$, alors

$$k \in \arg\max\{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_j - c_j,\ j \in J\}$$

$$c_B^\top \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot p_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 < 0$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot p_5 - c_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -2 < 0$$

Donc $k = 4$.
Comme $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_k - c_k = -1 < 0$, donc l'algorithme est terminé. On trouve une solution de base optimale :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 29/5 \\ 6/5 \\ 21/5 \end{bmatrix}$$
$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$
$$f(x) = c_B^\top \cdot x_B = -18$$

Conclusion :
L'algorithme du simplexe se termine en 3 itérations. On obtient une solution maximale : $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star) = (\frac{21}{5}, \frac{6}{5})$ et la valeur optimale : $f(x^\star) = 18$.

6.4 Tableau du simplexe

Dans le but de simplifier l'utilisation de l'algorithme du simplexe, nous présentons une version «tableau» dont tous les calculs pour une itération sont dans un tableau, on l'appelle tableau du simplexe/simplex table/单纯形表.

Considérons le problème d'OL sous la forme standard pour une base B donnée

$$\begin{aligned} f = \min \quad & c_N^\top \cdot x_N + c_B^\top \cdot x_B \\ s.c. \quad & N \cdot x_N + B \cdot x_B = b \\ & x_N,\, x_B \geqslant 0 \end{aligned}$$

On peut représenter ce problème en ajoutant une contrainte linéaire $f - c_N^\top x_N - c_B^\top x_B = 0$ comme suit

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ s.c. \quad & f - c_N^\top \cdot x_N - c_B^\top \cdot x_B = 0 && (1) \\ & N \cdot x_N + B \cdot x_B = b && (2) \\ & x_N,\, x_B \geqslant 0,\ f \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme B est inversible, en multipliant par B^{-1} à gauche dans (2), on obtient

$$B^{-1} \cdot N \cdot x_N + x_B = B^{-1} \cdot b$$

puis en multipliant par $c_B^\top$ à gauche

$$c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N \cdot x_N + c_B^\top \cdot x_B = c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b$$

et on sommant avec (1)

$$f + \left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top\right) \cdot x_N = c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b$$

Alors, le problème d'OL devient

$$\begin{array}{ll} \min & f \\ s.c. & B^{-1} \cdot N \cdot x_N + x_B = B^{-1} \cdot b \\ & f + \left(c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top\right) \cdot x_N = c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b \\ & x_N,\, x_B \geqslant 0,\, f \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ceci peut s'écrire sous forme de tableau ci-dessous

	f	x_N	x_B	
x_B	0	$B^{-1} \cdot N$	I_m	$B^{-1} \cdot b = \overline{b}$
f	1	$\underbrace{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top}_{\text{les coûts réduits}}$	0	$c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot b = c_B^\top \cdot \overline{b}$

Dans ce tableau, nous avons toutes les informations pour une itération de l'algorithme du simplexe.

— La solution de base réalisable :
$$x_N = 0,\, x_B = \overline{b}$$
— La valeur de la fonction objectif :
$$c^\top \cdot x = c_B^\top \cdot \overline{b}$$
— Les coûts réduits :
$$c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top$$

On suit la procédure suivante pour le passage d'un tableau (une solution de base réalisable) au tableau suivant (une autre solution de base réalisabe améliorée).

1. Tester les coûts réduits.
   Si $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top \leqslant 0$, alors $(x_N, x_B) = (0, \overline{b})$ est une solution optimale.
   Sinon, on trouve la plus grande coordonnée de $c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top$
   $$k \in \arg\max_{i \in J} \{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot p_i - c_i\}$$
   où J est l'ensemble des indices des variables hors base x_N. Et on trouve la colonne y_k.
2. Calculer $\frac{\overline{b}_r}{(y_k)_r} = \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{\frac{\overline{b}_i}{(y_k)_i},\, (y_k)_i > 0\right\}$.
3. Si $y_k \leqslant 0$, alors le problème est non-borné, terminé.
4. Si $\overline{b}_r = 0$ (cas dégénéré), et si on se trompe dans un cyclage, alors l'algorithme est terminé ou continue via les techniques anti-cyclage.
5. Sinon, on échange la variable hors base x_k avec la variable de base x_{B_r}. Il suffit d'appliquer la méthode du pivot de Gauss en choisissant le pivot $(y_k)_r$ comme dans le tableau du simplexe ci-dessous.

	x_N	x_B	
x_{B_1}	$(y_1)_1 \dots (y_k)_1 \dots$		
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$		
x_{B_r}	$(y_1)_r \dots (y_k)_r \dots$	I_m	$\overline{b}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$		
x_{B_m}	$(y_1)_m \dots (y_k)_m \dots$		
f	$\underbrace{z_1 \dots z_k \dots}_{c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot N - c_N^\top}$	0	$c_B^\top \cdot \overline{b}$

D'après la méthode du pivot de Gauss, l'élément de la dernière ligne et dernière colonne du tableau (valeur de la fonction objectif) devient :

$$c_B^\top \cdot \overline{b} - z_k.\left(\frac{\overline{b}_r}{y_r^k}\right)$$

Comme $z_k \left(\frac{\overline{b}_r}{y_r^k}\right) > 0$, alors la valeur de la fonction objectif diminue.

6.5 Convergence de l'algorithme du simplexe

6.5.1 Convergence dans le cas non dégénéré

Théorème 6.3 – Convergence dans le cas non dégénéré de l'algorithme du simplexe

Hypothèse de non dégénérescence : *toutes les variables de base sont positives à chaque itération.*
Si le problème d'optimisation linéaire sous la forme standard (OL)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^\top \cdot x \\ s.c. \quad & A \cdot x = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

avec $(c, x) \in \left(\mathbb{R}^{n+m}\right)^2$*,* $b \in \mathbb{R}^{n+m}$*,* $A \in \mathcal{M}_{m,n+m}$*, est réalisable avec une base* B *donnée, sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme du simplexe se termine en un nombre fini d'itérations.*

Démonstration 25

En supposant que la matrice A est de rang m, chaque solution de base réalisable doit comporter m variables de base positives (selon l'hypothèse de non dégénérescence).
Il y a un nombre fini de façons de choisir m colonnes de parmi les $(n+m)$ pour former des sous matrices $m \times m$

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{m!n!}$$

Or les bases réalisables constituent un sous-ensemble de ces dernières. Donc une borne supérieure du nombre de

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{m!n!}$$

solutions de base réalisables.
En effet, dans un problème d'OL réalisable, l'algorithme du simplexe trouve une solution de base optimale ; or alors détermine que le problème est non-borné ; ou enfin se trompe dans un cyclage au cas dégénéré. Si jamais on se retrouve dans le cas dégénéré, alors l'algorithme du simplexe va s'arrêter en un nombre fini d'itérations (car l'ensemble des sommets est de cardinal fini).

6.5.2 Convergence dans le cas dégénéré

Définition 6.8 – Règle de Bland/Bland's rule/布兰德规则

On appelle également règle des plus petits indices de Bland, elle consiste à faire entrer dans la base le plus petit indice $k \in J$ tel que le coût réduit $f(x_{\text{vieux}}) - f(x_{\text{nouveau}})$ est positif et à faire sortir le plus petit indice $r \in \arg\min_{i \in [\![1,]\!]} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{(y_k)_i},\ (y_k)_i > 0 \right\}$. Il a été démontré que la règle de Bland permet d'éviter le cyclage.

Théorème 6.4 – Convergence dans le cas dégénéré de l'algorithme du simplexe

En utilisant les critères d'entrée et de sortie de Bland, l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations.

Démonstration 26

(Preuve par contradiction)

Supposons que l'algorithme du simplexe ne termine jamais. Cela signifie qu'il existe une séquence infinie d'états de base $B_1, B_2, B_3, \ldots$ telle que la fonction objectif continue de s'améliorer à chaque itération.

6.6 Exercices

6.1 Considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} \max \quad 3x_1 + x_2 \\ \quad s.c. \quad x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ \qquad\quad x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ \qquad\quad (x_1, x_2) \geqslant 0. \end{cases}$$

a. Résoudre le problème en utilisant la méthode graphique.

b. Trouver toutes les solutions de base réalisables, et déterminer une solution de base optimale.

c. Résoudre le problème en utilisant l'algorithme du simplexe.

d. Résoudre le problème en utilisant le tableau du simplexe.

6.2 (Problème de flot maximum) L'objectif est de chercher dans un graphe pondéré (dont le poids sur chaque arc représente une capacité maximale) le flot maximal entre un sommet de départ et un sommet d'arrivé.

a. Construire un modèle d'optimisation linéaire pour le problème de flot maximum allant de 0 à 6 (voir le réseau dans la figure 6.2).

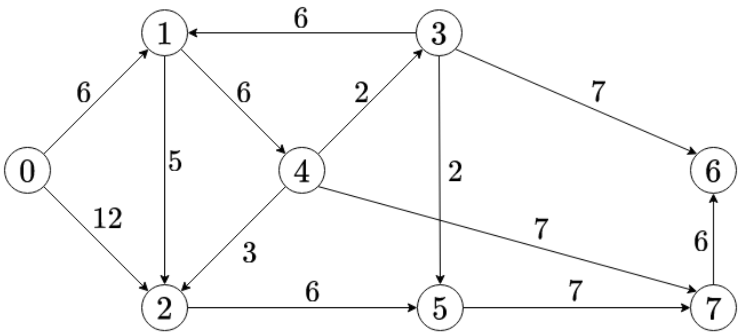

FIGURE 6.2 – Problème de flot maximum

b. Résoudre ce modèle en utilisant l'algorithme du simplexe.

c. Interpréter votre résultat dans le réseau.