Mathématiques I – TD$_3$

28 février - 1 mars 2022

Exercice 1

1. Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
   (b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 5.
2. Soit $g\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x+1}{x}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.
   (b) Étudier les limites de la fonction g en $+\infty$ et en 0.
3. Soit $h\colon x \mapsto \sqrt{x^2-1} - x$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction h.
   (b) Étudier la limite de la fonction h en $+\infty$.
4. Soit $i\colon x \mapsto \dfrac{x + \cos(x)}{x + \sin(x)}$.
   (a) Justifier que i est bien définie sur $]1, +\infty[$.
   (b) Étudier la limite de la fonction i en $+\infty$.

1. (a)

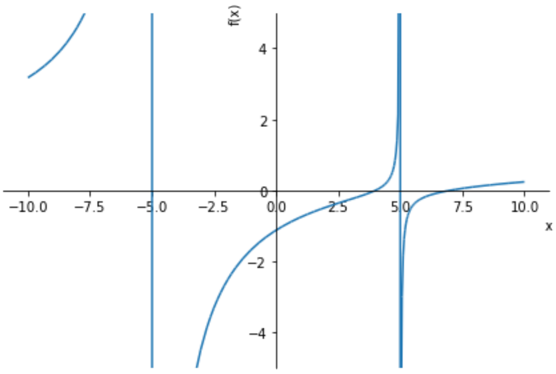
Le seul problème pouvant arriver ici est que le dénominateur s'annule.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 25 = 0$ si, et seulement si, $(x+5)(x-5) = 0$ si, et seulement si, $x = -5$ ou $x = 5$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}.}$$

Vérifions avec Sympy :

```python
from sympy import *
x = symbols('x')
plot((x**2-11*x+28)/(x**2-25),(x,-10,10),ylim=(-5,5))
```



(b)

Attention aux formes indéterminées de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On peut penser à la méthode de factoriser par le terme dominant, c'est-à-dire le terme le « plus fort » (celui qui tend le plus vite vers ∞).

Soit $x > 5$. On a

$$f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} = \frac{x^2\left(1 - \frac{11}{x} + \frac{28}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{11}{x} + \frac{28}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}}$$

On a

$$1 - \frac{11}{x} + \frac{28}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 + 0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{25}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

d'où :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1.}$$

On a

$$x^2 - 11x + 28 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2 < 0, \quad x^2 - 25 \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} 0^+ \quad \text{et} \quad x^2 - 25 \underset{x\to5^-}{\longrightarrow} 0^-$$

donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} -\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to5^-}{\longrightarrow} +\infty}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit((x**2-11*x+28)/(x**2-25),x,+oo)
```

Résultat : 1

```
limit((x**2-11*x+28)/(x**2-25),x,5,'+')
```

Résultat : $-\infty$

```
limit((x**2-11*x+28)/(x**2-25),x,5,'-')
```

Résultat : ∞

2. (a)

Ici, il y a deux problèmes possibles : le dénominateur s'annule et on prend la racine carrée d'un nombre strictement négatif.

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{4x+1}{x}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, on a $4x + 1 > 0$ donc $\frac{4x+1}{x} \geqslant 0$. Si $x < 0$, on a

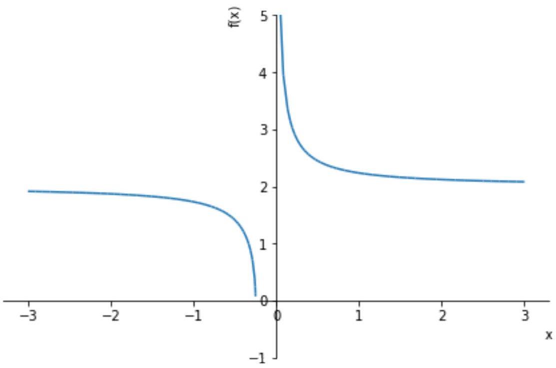
$$\frac{4x+1}{x} \geqslant 0 \iff 4x + 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{-1}{4}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } g \text{ est }]-\infty, \tfrac{-1}{4}] \cup]0, +\infty[.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
plot(sqrt((4*x+1)/x),(x,-3,3),ylim=(-1,5))
```



(b)

On utilise encore la factorisation par le terme dominant.

Soit $x > 0$. On a

$$\frac{4x+1}{x} = \frac{4x\left(1+\frac{1}{4x}\right)}{x} = 4\left(1+\frac{1}{4x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 4\times(1+0) = 4$$

La fonction racine carrée est continue en 4, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$$

Attention, c'est indispensable de dire que la fonction racine carrée est continue ! Sinon on ne peut pas appliquer le théorème de composition des limites. Pour la limite en 0, on ne regarde que la limite à droite car g n'est pas définie à gauche de 0.

On a

$$4x+1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 > 0 \quad \text{et} \quad x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{x} = +\infty$$

Mais la fonction racine carrée tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc par composition de limites, on en déduit que :

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit(sqrt((4*x+1)/x),x,+oo)
```

Résultat : 2

```
limit(sqrt((4*x+1)/x),x,0,'+')
```

Résultat : ∞

3. (a)

Ici, il y a un seul problème possible : on prend la racine carrée d'un nombre strictement négatif.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

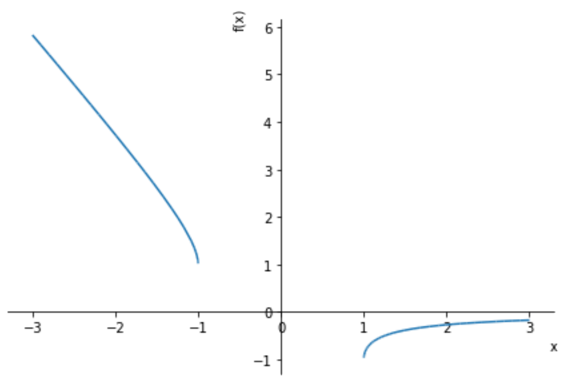
$$x^2 - 1 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 1 \iff x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -1$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } h \text{ est }]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\,.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
plot(sqrt(x**2-1)-x,(x,-3,3))
```



(b)

On a une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On peut penser à la méthode de la quantité conjuguée (voir le TD2).

Soit $x \geqslant 1$. On a

$$h(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

Mais $x^2 - 1 \to +\infty$ et $x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ donc par composition de limites (la fonction racine carrée tend vers $+\infty$ en $+\infty$) et par opérations sur les limites :

$$\sqrt{x^2-1} + x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc :

$$\boxed{h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit(sqrt(x**2-1)-x,x,+oo)
```

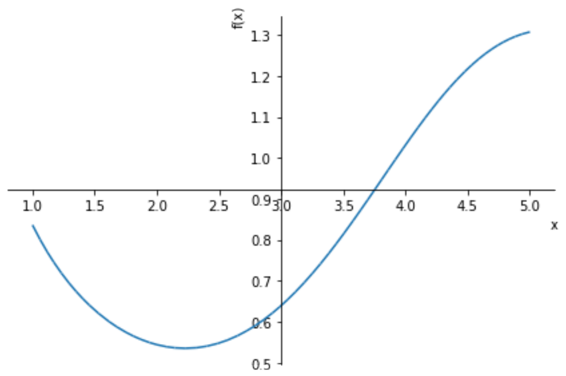
Résultat : 0

4. (a) Soit $x > 1$. On a $\sin(x) \geqslant -1$ donc $x + \sin(x) > 1 - 1 = 0$ donc :

$$\boxed{i \text{ est bien définie sur }]1, +\infty[\,.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
plot((x+cos(x))/(x+sin(x)),(x,1,5))
```



(b) Soit $x > 1$. On a

$$i(x) = \frac{x + \cos(x}{x + \sin(x)} = \frac{x\left(1 + \frac{\cos(x)}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\cos(x)}{x}}{1 + \frac{\sin(x)}{x}}$$

On a

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| = \frac{|\cos(x)|}{|x|} \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\boxed{h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

donc par encadrement :

$$\frac{\cos(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On montre de la même façon que :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusion :

$$\boxed{i(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1.}$$

Vérifions avec Sympy :

```
limit((x+cos(x))/(x+sin(x)),x,+oo)
```

Résultat : 1

Exercice 2

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f admet pour limite ℓ en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x > A, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Posons $B = -A < 0$. Soit $y < B$, on a :

$$|\underbrace{f(y)}_{=f(-y)} - \ell| = |f(\underbrace{-y}_{>-B=A}) - \ell| < \varepsilon$$

On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B < 0, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad y < B \implies |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Exercice 3

Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

1. Donner un exemple d'une fonction T-périodique.
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x + nT) = f(x)$$
   (b) On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
   $$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$
   Montrer que f est constante.

On peut penser à la fonction cosinus (ou sinus) qui est 2π-périodique.

1. Posons $f\colon x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T} x\right)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}(x + T)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} x\right) = f(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \text{ est } T\text{-périodique.}}$$

2. (a) Par récurrence sur n. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $f(x+nT) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ».
   — $\mathscr{P}(0)$ est vraie car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 0 \times T) = f(x+0) = f(x)$$

   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\big(x + (n+1)T\big) &= f\big((x+nT)+T\big) \\ &= f\big(x+nT\big) && \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= f(x) && \text{car } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

   ce qui montre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x+nT) = f(x)}$$

On fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que f n'est pas constante.
La définition de « f est constante » est :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a) = f(b)$$

donc la négation « f n'est pas constante » est

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a) \neq f(b)$$

   (b) Supposons par l'absurde que f ne soit pas constante : il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Puisque $\frac{|f(a)-f(b)|}{4} > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x > M, \quad |f(x) - \ell| < \frac{|f(a)-f(b)|}{4}$$

   Il existe $n_a \in \mathbb{N}$ et $n_b \in \mathbb{N}$ tels que $x + n_A T > M$ et $x + n_B T > M$. On a donc

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(a+n_aT) - f(b+n_bT)| \\ &= \big|f(a+n_aT) - \ell - \big(f(b+n_bT) - \ell\big)\big| \\ &\leqslant |f(a+n_aT) - \ell| + |f(b+n_bT) - \ell| \\ &< \frac{|f(a)-f(b)|}{4} + \frac{|f(a)-f(b)|}{4} \\ &< \frac{|f(a)-f(b)|}{2} \end{aligned}$$

   ce qui est absurde.
   Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante.}}$$

On peut retenir cette méthode : si on a des informations du type $|a-\ell|<\varepsilon$ et $|b-\ell|<\varepsilon'$, on peut majorer $|a-b|$ en faisant apparaitre ℓ et en utilisant l'inégalité triangulaire (c'est-à-dire $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) :

$$|a-b| = |a-\ell-(b-\ell)| \leqslant | \leqslant |a-\ell|+|b-\ell| < \varepsilon+\varepsilon'$$

Exercice 4

Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}(ax)^2 & \text{si } x\leqslant 1,\\ a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x>1\end{cases}$$

Trouver les valeurs de a pour lesquelles f est continue.

— La fonction $x\mapsto(ax)^2$ est continue sur $]-\infty,1[$ (car elle est polynomiale) donc f est continue sur $]-\infty,1[$.

— La fonction $x\mapsto a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$ (comme composée de fonctions continues) donc f est continue sur $]1,+\infty[$.

— Pour que f soit continue en 1, il suffit que f admette une limite à droite et à gauche en 1 et que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

- La fonction $x\mapsto(ax)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une limite à gauche en 1 qui vaut sa valeur en 1 donc
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax)^2=(a\times1)^2=a^2$$
- La fonction $x\mapsto a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une limite à droite qui vaut sa valeur en 1 donc
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\times1\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\times1=a$$

On en déduit que la fonction f est continue en 1 si, et seulement si, $a^2=a$. Mais :

$$a^2=a \iff a^2-a=0 \iff a(a-1)=0 \iff a=0 \text{ ou } a=1$$

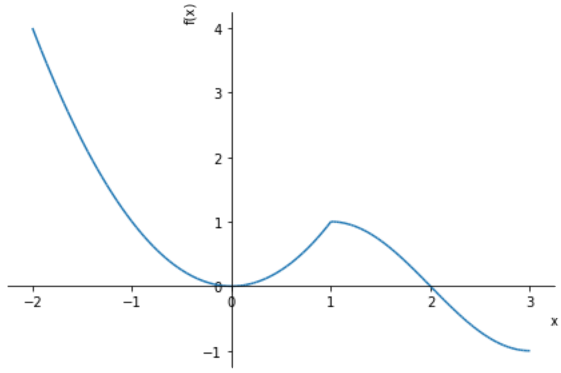
On en déduit que f est continue en 1 si, et seulement si, $a=0$ ou $a=1$.

Conclusion :

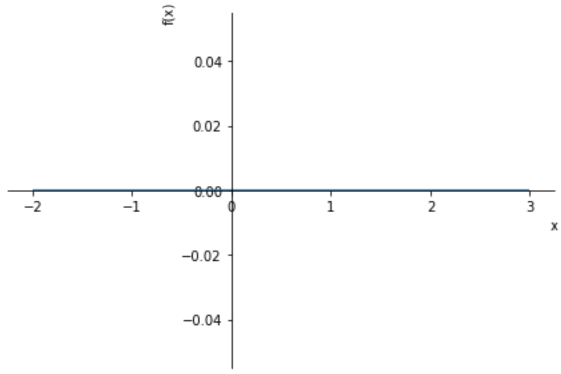
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue si, et seulement si, } a=0 \text{ ou } a=1.}$$

On peut vérifier avec Sympy :

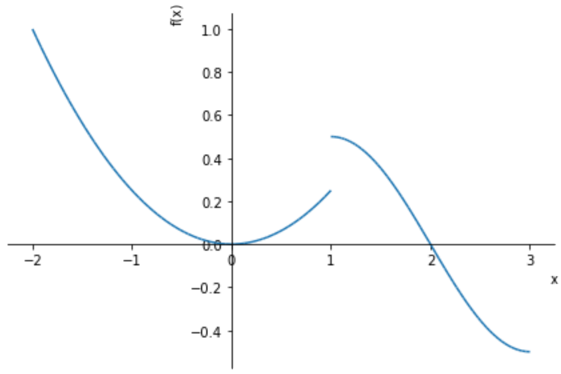
```
a = 1
P1 = plot((a*x)**2,(x,-2,1),show=False)
P2 = plot(a*sin(pi/2*x),(x,1,3),show=False)
P1.append(P2[0])
P1.show()
```



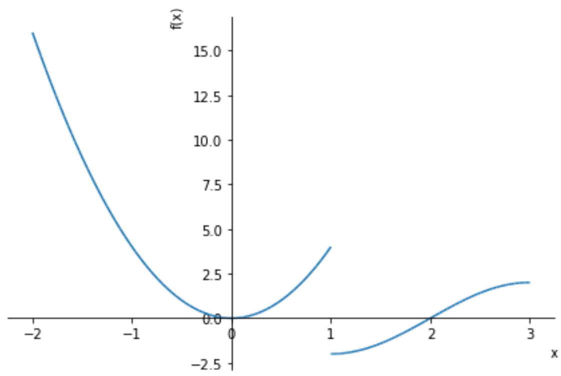

```
a = 0
P1 = plot((a*x)**2,(x,-2,1),show=False)
P2 = plot(a*sin(pi/2*x),(x,1,3),show=False)
P1.append(P2[0])
P1.show()
```




```
a = 0.5
P1 = plot((a*x)**2,(x,-2,1),show=False)
P2 = plot(a*sin(pi/2*x),(x,1,3),show=False)
P1.append(P2[0])
P1.show()
```




```
a = -2
f = Piecewise(((a*x)**2,x<=1),(a*sin(pi/2*x),x>1))
plot(f,(x,-2,3))
```



Exercice 5

Soit $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en -1.

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en -1, et donc on a une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » lorsqu'on calcule la limite de f en -1. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en écrivant $x^3+1 = (x+1)(x^2+ax+b)$ et en trouvant a et b.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On a $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ donc

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1} = \frac{1+x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2-x+1}$$

Puisque $x^2-x+1 \to 3 \neq 0$ quand $x \to -1$, on en déduit que

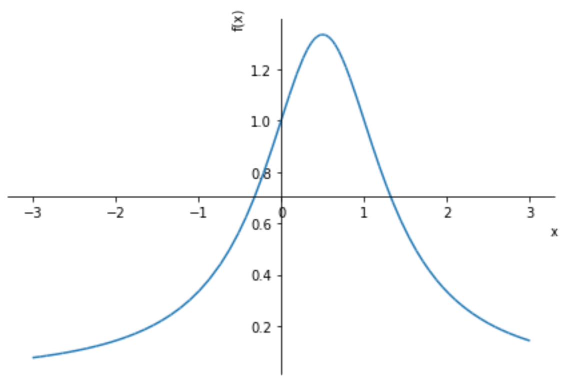
$$f(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en } -1 \text{ en posant } f(-1) = \frac{1}{3}.}$$

On peut vérifier avec Sympy :

```
plot((1+x)/(x**3+1),(x,-3,3))
```

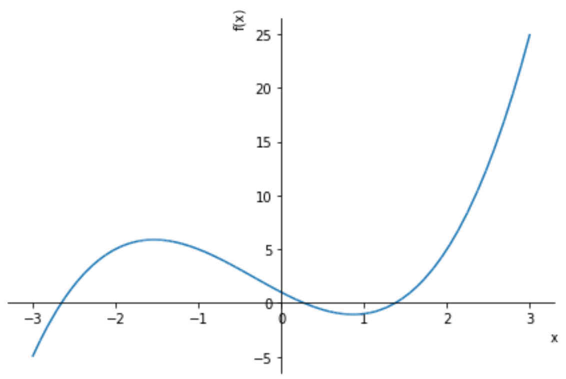


Exercice 6

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

L'équation est trop compliquée pour trouver les solutions, on doit donc utiliser l'un des résultats du cours. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer l'existence de solutions d'équations.
Pour trouver en quels points appliquer ce théorème, on peut utiliser Sympy pour avoir une idée.

```
plot(x**3+x**2-4*x+1,(x,-3,3))
```



Posons $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue (c'est une fonction polynomiale).

- On a $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue sur $[0, 1]$), il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue sur $[1, 2]$), il existe $\beta \in]1, 2M[$ tel que $f(\beta) = 0$.
- On a $f(0) = 1 > 0$ et $f(-3) = -5 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue sur $[-3, 0]$), il existe $\gamma \in]-3, 0[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Puisque $\gamma < \alpha < \beta$, on conclut que :

> l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Nous verrons en fait qu'il n'y en a pas d'autres, car f est de degré 3 donc a au plus 3 racines.

Exercice 7

Soient $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\sup_{t \in [0,1]} f(t) = \sup_{t \in [0,1]} g(t)$$

Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

(Cela sera fait en semaine 4)

Exercice 8

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

(Cela sera fait en semaine 4)

Exercice 9

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On pose

$$\forall x \geqslant 0, \quad \phi(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t)$$

Montrer que ϕ est continue.

(Cela sera fait en semaine 4)

Exercice 10

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche et une limite à droite en a.

(Cela sera fait en semaine 4)