Suites et Séries – TD$_7$

24-25 octobre 2022

Exercice 1. (séries de Bertrand)

Étudier la convergence des séries $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ en fonction des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (autour de la série géométrique)

1. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum_k kx^k$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_n \frac{\cos(n)}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3. (séries télescopiques)

Étudier la nature des séries suivantes et calculer leur somme quand elles convergent :

$$(a)\ \sum_k \frac{1}{k(k+1)}; \quad (b)\ \sum_k \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}; \quad (c)\ \sum_n \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

Exercice 4. (critères de comparaison pour les séries positives)

Dans chacun des cas, étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ avec :

$$(a)\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}; \quad (b)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad (c)\ u_n = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(d)\ u_n = e^{-n^2}; \quad (e)\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Exercice 5. (avec des paramètres)

Dans chacun des cas, étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ en fonction des paramètres, avec :

1. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
2. $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$ avec $a \in \mathbb{R}$;
3. $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 6. (comparaison série-intégrale)

1. Montrer que la série $\sum_n \ln(n)$ diverge.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent quand $n \to \infty$ de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de S_n, a, b et n ; la seule somme à intervenir dans l'expression doit être S_n.

4. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum_n u_n$ est convergente, et déterminer la valeur de sa somme dans ces cas-là.

Exercice 7. (DS de 2020)

1. Montrer que la série $\sum_n \exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right)$ converge.
2. Pour tout $t > 1$, on pose : $f(t) = \exp\left(-t^2\sqrt{\ln t}\right)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{-2t\sqrt{\ln t}}$

   Montrer que :

$$g'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(t)$$

3. En déduire un équivalent du reste de la série $\sum_n \exp\left(-n^2\sqrt{\ln n}\right)$.

Exercice 8. (2020年期末考试)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue qui admet un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - a\,x^p + \underset{x\to 0^+}{o}(x^p), \quad a > 0,\ p > 1$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que : si $u_0 \in \,]0,\eta]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose dans la suite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Déterminer un équivalent simple de

$$(u_{n+1})^{1-p} - (u_n)^{1-p}$$

   quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(n\,a\,(p-1)\right)^{\frac{1}{1-p}}$$

4. On suppose que $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un reste en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.