Topologie et Calcul différentiel : Fonctions convexes – TD 3

24 mars 2023

Exercice 1 : Fonctions convexes ?

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Justifier. *(On pourra utiliser `Python`).*

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= |x| \qquad \text{sur } \mathbb{R} \\
f_2(x) &= \max\left(1, x^2\right) \qquad \text{sur } \mathbb{R} \\
f_3(x) &= \ln\left(1 + x^2\right) \qquad \text{sur } \mathbb{R} \\
f_4(x) &= \arctan\left(\ln\left(1 + x^2\right)\right) \qquad \text{sur } \mathbb{R} \\
f_5(x) &= \begin{cases} f_3(x) - f_3(1) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ f_2(x) - f_2(1) & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Composée de fonctions convexes

Soit f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$, g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Fonction convexe bornée

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Soit $h > 0$ fixé.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x < y$, on a

$$f(y + h) - f(x + h) \geqslant f(y - h) - f(x - h).$$

2. Montrer que la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{2h} \times \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

est convexe.

Exercice 5 : Inégalité de convexité

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Comparer :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}, \quad h = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}.$$

Exercice 6 : Inégalité de convexité discrète

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs, p, q, r des nombres réels vérifiant $0 < p < 1 < q < r$. On pose

$$\forall k \in \{1, p, q, r\},\ m_k = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k}$$

1. Comparer les m_k pour $k \in \{1, p, q, r\}$.
2. Placer g et h par rapport aux m_k, $k \in \{1, p, q, r\}$ lorsque

$$g = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \frac{n}{h} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

Exercice 7 : Inégalité de convexité

Soit a, b et c trois nombres réels > 0, montrer en utilisant une inégalité de convexité que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

Exercice 8 : Inégalité de convexité discrète

Dans cet exercice, il suffit d'appliquer l'inégalité de convexité discrète à des fonctions convexes (ou concaves) bien choisies.
Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

1. Démontrer que :
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$
2. Démontrer que :
$$1 + (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + x_1)^{\frac{1}{n}} (1 + x_2)^{\frac{1}{n}} \ \ldots\ (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$$
(On pourra démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.)
3. Démontrer à l'aide de l'inégalité précédente que :
$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 y_2 \ldots y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (x_1 + y_1)^{\frac{1}{n}} (x_2 + y_2)^{\frac{1}{n}} \ \ldots\ (x_n + y_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 9 : Inégalité de Hölder

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, on définit l'ensemble $\mathcal{L}(I)$ par

$$\mathcal{L}^p(I) := \{f : I \to \mathbb{R},\ \int_I |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{L}^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.
2. Soit $p, q, r \geqslant 1$ tels que $1/p + 1/q = 1/r$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Démontrer que $fg \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R})$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Si $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, montrer l'inclusion $\mathcal{L}^q([a, b]) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Si $[a, b] = [0, 1]$, montrer que l'inclusion est stricte.

Exercice 10 : Propriétés asymptotiques des fonctions convexes

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'une des propriétés suivantes est satisfaite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - a\,x\Big) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - a\,x\Big) = b \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 : Fonctions log-convexes

On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est log-convexe si, et seulement si, $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que lorsque f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ et log-convexes alors $f + g$ est log-convexe.
2. Montrer que c'est encore vrai en général. *(On pourra utiliser la midconvexité).*

Exercice 12 : Dérivation d'un équivalent

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que

$$f(x) \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{(b-x)^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Montrer que

$$f'(x) \underset{b^-}{\sim} \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}}$$

Trouver un contre-exemple lorsque f n'est plus convexe.

Exercice 13 : Transformation de Legendre

Soit ϕ une fonction définie sur un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur I. On définit la *transformée de Legendre de* ϕ par

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(x\,y - \phi\,(x)\big) \in]-\infty, +\infty]$$

et on s'intéresse à

$$J = \Big\{y \in \mathbb{R},\ \widetilde{\phi}(y) \neq +\infty\Big\}$$

1. Soit $p \in]1, +\infty[$, $\phi : x \longmapsto |x|^p/p$ définie sur $I = \mathbb{R}$, calculer $\widetilde{\phi}$ et J. Quelle inégalité du cours retrouve-t-on ?
2. Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\widetilde{\phi}$ est convexe sur J.
3. On suppose que $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi''(x) > 0 \text{ et } \phi'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

   montrer alors que

$$\widetilde{\widetilde{\phi}} = \phi$$