Suites et Séries – Midterm Exam

lundi 14 novembre 2022

Numéro étudiant : .... Nom chinois : .... Nom français : ....

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. 各个题目是不相关的，可以按照任何顺序来完成。
3. Une feuille $A4$ recto-verso *manuscrite* de mémorisation est autorisée (écrite à la main !)
4. 允许携带一张手写的$A4$白纸手稿。
5. Tous les autres documents sur papiers et les outils électroniques (téléphone, smartphone, ordinateur, tablette, etc.) sont interdits.
6. 不能使用任何其它参考资料和电子设备包括手机、翻译器和计算器。

Toutes les réponses doivent être justifiées !
ne pas justifier = perdre des points

Exercice 1

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \begin{cases} \lambda\left(\sqrt{1+n^\alpha}-1\right) & \text{si } n = 3k,\ k\in\mathbb{N}^*, \\ \sqrt{1+n^\alpha}-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$ sont fixés.

1. Déterminer les valeurs de α telles que la série $\sum\limits_n u_n$ est grossièrement divergente.

Puisque : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \alpha \geq 0$: $\boxed{\sum_n u_n \text{ est grossièrement divergente lorsque } \alpha \geq 0.}$

2. Déterminer les valeurs de α telles que la série $\sum\limits_n u_n$ est absolument convergente.

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sqrt{1+n^\alpha}-1$. Alors : $v_n = O(u_n)$ et $u_n = O(v_n)$.
Par comparaison de séries à termes positifs : $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n |v_n|$ sont de même nature.

— Si $\alpha < 0$ alors $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^\alpha}{2}$. Par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum_n v_n$ est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha < -1$.

$\boxed{\sum_n u_n \text{ est absolument convergente si et seulement si } \alpha < -1.}$

3. On se place dans le cas où $\alpha = -1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$.

(a) Montrer que

$$w_n = \frac{\lambda+2}{6n} - \frac{\lambda+14}{72n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} w_n &= u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2} \\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}(3n)^{-1} - \frac{1}{8}(3n)^{-2} + o(n^{-2})\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(3n+1)^{-1} - \frac{1}{8}(3n+1)^{-2} + o(n^{-2})\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(3n+2)^{-1} - \frac{1}{8}(3n+2)^{-2} + o(n^{-2})\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (3n+1)^{-1} &= (3n)^{-1}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1} \\ &= (3n)^{-1}\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right); \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (3n+2)^{-1} &= (3n)^{-1}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{-1} \\ &= (3n)^{-1}\left(1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3n} - \frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{w_n = \frac{1}{n}\frac{\lambda+2}{6} - \frac{1}{n^2}\frac{\lambda+14}{72} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$

(b) À quelle condition sur λ la série $\sum_n u_n$ est-elle convergente ?

- Si $\lambda \neq -2$ alors $w_n \sim \frac{\lambda+2}{6n}$ et, par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum_n w_n$ est divergente.
- Si $\lambda = -2$ alors $w_n \sim -\frac{1}{6n^2}$ et, par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum_n w_n$ est absolument convergente.
- Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et qu'on effectue une sommation par paquets de taille fixe (donc bornée), les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ sont de même nature.

$\boxed{\text{Lorsque } \alpha = -1, \text{ la série } \sum_n u_n \text{ est convergente si et seulement si } \lambda = -2.}$

4. On se place maintenant dans le cas où $\alpha = -1$ et $\lambda = -2$.

(a) Donner un équivalent du reste d'ordre n de la série $\sum_n w_n$.

— Puisque $-w_n \sim \frac{1}{6n^2}$ et $\sum_n \frac{1}{6n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs :

$$R_n(w) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \sim -\frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

— Pour $k \geq 2$, par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Par convergence des séries et des intégrales, on obtient :

$$\frac{1}{n} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) = 1$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

.

$\boxed{R_n(w) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \sim -\frac{1}{6n}}$

(b) En déduire des équivalents des restes d'ordre $3n-1$ et $3n$ de la série $\sum_n u_n$.

— On a :

$$u_{3n+1} = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad u_{3n+2} = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad R_n(w) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = \frac{-1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

— Par convergence des séries :

$$R_{3n-1}(u) = \sum_{k=3n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\sum_{p=3k}^{3k+2} u_p \right) = \sum_{k=n}^{+\infty} w_k = R_{n-1}(w) \sim \frac{-1}{6(n-1)} \sim \frac{-1}{6n}$$

$$R_{3n}(u) = \sum_{k=3n+1}^{+\infty} u_k = u_{3n+1} + u_{3n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{p=3k}^{3k+2} u_p \right) = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\boxed{R_{3n-1}(u) \sim \frac{-1}{6n} \text{ et } R_{3n}(u) \sim \frac{1}{6n}.}$

(c) Sans faire des développements limités d'ordre supérieur, quelle information obtient-on sur le reste d'ordre $3n+1$ de la série $\sum_n u_n$?

Comme dans la question précédente :

$$R_{3n+1}(u) = \sum_{k=3n+2}^{+\infty} u_k = u_{3n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{p=3k}^{3k+2} u_p \right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et on obtient qu'une domination. Pour obtenir un équivalent, il aura fallut déterminer un développement asymptotique à 3 termes de w_n. $\boxed{R_{3n+1}(u) = o\left(\frac{1}{n}\right).}$

Exercice 2

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par :

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. Donner l'écriture trigonométrique de $1 + e^{i\theta}$.

$\boxed{1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)\, e^{i\theta/2}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le module et l'argument de z_n.

On a $z_1 = \frac{\rho(1+e^{i\theta})}{2} = \rho\cos(\theta/2)\, e^{i\theta/2}$. Donc on peut montrer par récurrence que : $\boxed{z_n = 1 = \rho\cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\ldots\cos(\theta/2^n)\, e^{i\theta/2^n}}$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

On a $\lim_{n\to+\infty} e^{i\theta/2^n} = 1$. De plus :

— Si $\theta = 0$: $\cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\ldots\cos(\theta/2^n) = 1$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \rho}$.

— Si $\theta \neq 0$: $\cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\ldots\cos(\theta/2^n) = \frac{\sin(\theta)}{2^n\sin(\theta/2^n)}$ qui tend vers $\frac{\sin(\theta)}{\theta}$. Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \rho\frac{\sin(\theta)}{\theta}}$.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$$

1. Donner la limite de a_n en $+\infty$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme la fonction $x \mapsto x + e^{-x}$ n'admet pas de point fixe dans $\mathbb{R}$, alors la suite n'est pas convergente.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

2. Par une analogie continu-discret, donner le développement asymptotique à 2 termes de a_n au voisinage de $+\infty$.

Par analogie continu-discret on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \mathrm{e}^{a_n} \text{ et } c_n = b_{n+1} - b_n$$

En remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-a_n} = 0$, on a successivement :
$c_n = \mathrm{e}^{a_n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-a_n}} - 1\right) = 1 + o(1)$ donc la série $\sum_n c_n$ est divergente (par équivalence des séries à termes positifs), d'où $\sum_{k=0}^{n} c_k \sim n$ c'est-à-dire $b_n \sim n$, ce qui implique : $a_n \sim \ln(n)$.
Ensuite, on note $b_n = n + b'_n$ où $b'_n = o(n)$. Alors d'une part on a :
$b_{n+1} - b_n = n + 1 + b'_{n+1} - n - b'_n = 1 + b'_{n+1} - b'_n$.
D'autre part $b_{n+1} - b_n = c_n = 1 + \frac{1}{2b_n} + o\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Cela donne $b'_{n+1} - b'_n \sim \frac{1}{2n}$ qui est le terme général de la série harmonique (divergente, dont la somme partielle est équivalente à $\ln(n)$). On a donc : $b'_n \sim \frac{\ln(n)}{2}$.
Cela veut dire que $b_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + o\left(\ln(n)\right)$, en écrivant que $a_n = \ln(b_n)$ on obtient :

$$\boxed{a_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

Feuille de brouillon

Feuille de brouillon

Feuille de brouillon

Feuille de brouillon