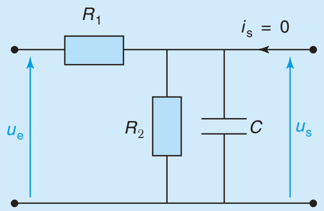
1 – Filtre passif passe-bas

On considère le filtre de la figure suivante. On donne $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$, $R_1 = 1{,}0\text{ k}\Omega$ et $R_2 = 3{,}0\text{ k}\Omega$.



1 Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

2 Exprimer la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(\text{j}\omega) = \dfrac{A_0}{1+\text{j}\omega\tau}$. Exprimer la constante A_0 et la constante de temps τ.

3 Calculer la durée τ, la fréquence de coupure f_c, et le gain maximal G_{max}.

4 À l'entrée du filtre, on injecte la tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(2\pi f t)$ d'amplitude $U_{em} = 10\text{ V}$ et de fréquence $f = \dfrac{f_c}{10}$. Déterminer la tension $u_s(t)$ de sortie.

résolution méthodique

1 Appliquons la méthode du cours.

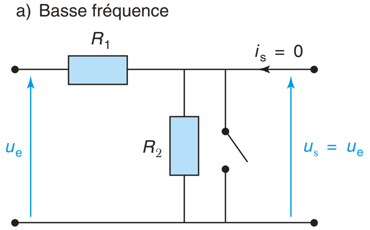
• À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (figure a). Les deux résistors sont traversés par le même courant ; ils sont en série. La branche R_1, R_2 réalise un diviseur de tension : $\dfrac{u_s}{u_e} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \neq 0$.

• À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé (figure b) donc $u_s = 0$.

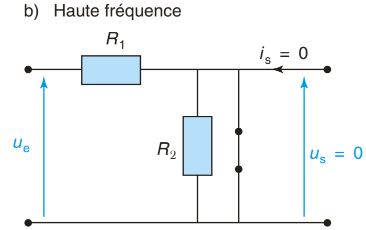
La tension de sortie est nulle seulement à haute fréquence ; le filtre est un **filtre passe-bas**.

> L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.

a) Basse fréquence

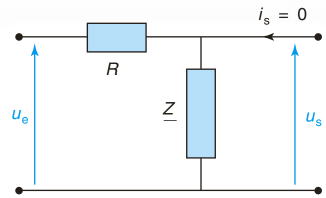


b) Haute fréquence



2 Soit $\underline{Z}$ l'impédance de l'association du condensateur et du résistor de résistance R_2, et $\underline{Y}$ son admittance.

Le courant de sortie est nul. Le résistor et le dipôle $\underline{Z}$ sont traversés par le même courant ; ils sont en série. Le circuit (figure ci-contre) réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer facilement la fonction de transfert :



$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R_1\underline{Y}}$$

$$= \frac{1}{1 + R_1\left[\dfrac{1}{R_2} + \mathrm{j}C\omega\right]} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}} \; \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{R_1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}C\omega} = \frac{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + \mathrm{j}\omega\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C}.$$

> Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

Par identification, on obtient : $\boxed{A_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C}$

La fonction de transfert est bien celle d'un filtre passe-bas, en accord avec la détermination rapide de la première question.

> Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.

3

$$\boxed{\tau = 0{,}75 \text{ ms} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 0{,}21 \text{ kHz}}$$

$|\underline{H}|_{max} = A_0 \Rightarrow G_{max} = 20\log(A_0)$

$$\boxed{G_{max} = -2{,}5 \text{ dB}}$$

4

Avec les données on a : $\omega\tau = \dfrac{\omega}{\omega_c} = \dfrac{f}{f_c} = \dfrac{1}{10}$.

Travaillons en notation complexe pour déterminer la tension de sortie.

- Tension d'entrée en notation complexe :

$$u_e = E_m\cos(2\pi f t) \Rightarrow \underline{u}_e = E_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}.$$

- Tension de sortie en notation complexe à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \underline{H}(\mathrm{j}\omega)\underline{u}_e = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}\underline{u}_e = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}}U_{em}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}$$

$$\underline{u}_s = \frac{A_0U_{em}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f t - \alpha)} \quad \text{avec} \quad \tan\alpha = \omega\tau.$$

• Tension de sortie réelle en prenant la partie réelle de son expression complexe :

$$u_s = \frac{A_0 U_{em}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(2\pi f t - \alpha) = \frac{0{,}75 \cdot 10}{\sqrt{1+10^{-2}}}\cos(2\pi f t - \alpha) \approx 7{,}5\cos(2\pi f t - \alpha)$$

$\tan\alpha = 0{,}10 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}10$ rad.

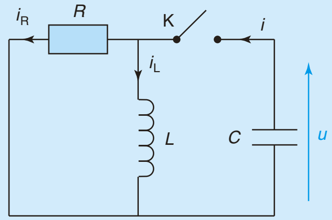
Finalement : $\boxed{u_s(t) = 7{,}5\cos(1{,}3 \cdot 10^2 t - 0{,}10)\ (\text{V})}$

en conclusion

- L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.
- Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.
- Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

2 – Circuit *RLC* parallèle

On considère le circuit suivant.
Données : $C = 1{,}0\ \mu F$; $L = 0{,}10\ H$; $R = 1{,}0\ k\Omega$.
L'armature supérieure porte la charge $Q_0 = 20\ \mu C$.
À la date $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K.



1 Quelle est la tension U_0 aux bornes du condensateur avant la fermeture de l'interrupteur ?

2 Quelles sont les valeurs u_{0^+}, i_{0^+}, i_{L0^+} et i_{R0^+} de la tension et des intensités après fermeture de l'interrupteur ?

3 Établir l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur.

4 Mettre l'équation différentielle sous la forme $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$. Calculer la pulsation propre ω_0, le coefficient d'amortissement σ et le facteur de qualité Q du circuit. En déduire la nature du régime.

5 Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma\frac{dy}{dx} + y = 0$ en posant $x = \omega_0 t$ et $y = \frac{u}{U_0}$ et résoudre l'équation différentielle. En déduire les expressions $u(t)$ et $i(t)$ de la tension et de l'intensité.

6 Tracer les courbes correspondantes.

résolution méthodique

1 $Q_0 = CU_0 \Rightarrow \boxed{U_0 = 20\ \text{V}}$

2 Le circuit *RL* ne comporte pas de générateur et l'interrupteur K est ouvert ; tous les courants sont nuls avant la fermeture de l'interrupteur.
L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction continue donc :

$$\boxed{i_{L0^+} = i_{L0^-} = 0}$$

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc :

$$\boxed{u_{0^+} = u_{0^-} = U_0 = 20\ (\text{V})}$$

La loi d'Ohm aux bornes du résistor s'écrit : $u = Ri_R$ (il est en convention récepteur), d'où :

$$\boxed{i_{R0^+} = \frac{u_{0^+}}{R} = \frac{U_0}{R} = 20\ (\text{mA})}$$

La loi des nœuds permet d'écrire :

$$\boxed{i_{0^+} = i_{R0^+} + i_{L0^+} = i_{R0^+} = 20\ (\text{mA})}$$

3 Écrivons les différentes relations entre les grandeurs qui vont nous servir :

$i = i_L + i_R$ (loi des nœuds), $i = -C\dfrac{du}{dt}$, $u = L\dfrac{di_L}{dt}$, et $u = Ri_R$ (loi d'Ohm).

Il faut mettre un signe moins car le condensateur est en convention générateur.

Il vient : $u = L\dfrac{di_L}{dt} = L\dfrac{d}{dt}[i - i_R] = L\dfrac{d}{dt}\left[-C\dfrac{du}{dt} - \dfrac{u}{R}\right] = L\left[-C\dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}\right]$.

Ce qui conduit à : $\boxed{LC\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{du}{dt} + u = 0}$

4 Divisons l'équation par LC : $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{LC} = 0$.

On peut alors identifier les termes recherchés :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}1 \cdot 10^3\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

et $2\omega_0\sigma = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{\sigma = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 0{,}16}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{2\sigma} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 3{,}16}$

Les expressions de σ et de Q ne sont pas celles du circuit *RLC* série car les trois composants sont en parallèle. En série, $Q_{\text{série}} = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, alors que, $Q_{\text{parallèle}} = \dfrac{1}{Q_{\text{série}}} = \dfrac{R}{L\omega_0}$.

Remarque : Un circuit *RLC* série devient idéal quand $R = 0$; il se réduit alors à un circuit LC.

Pour réduire à un circuit *LC* un circuit *RLC* parallèle il faut que $R = \infty$. On comprend alors que les expressions du facteur de qualité de chacun des circuits soient inverses l'une de l'autre.

Le régime est ***pseudo-périodique*** car l'amortissement est inférieur à 1 (facteur de qualité supérieur à 0,5).

5 Voir § 3.2 de « Retenir l'essentiel » pour établir l'équation différentielle réduite.

Une équation différentielle réduite (sous forme canonique) ne contient que des termes sans dimensions. Cela simplifie sa résolution.

Appliquons la méthode donnée dans « Retenir l'essentiel » (point méthode 2) pour résoudre l'équation différentielle.

a. Solution générale.

• Équation caractéristique : $r^2 + 2\sigma r + 1 = 0$.

Discriminant réduit : $\Delta = \sigma^2 - 1 = -0{,}98 < 0$

• Solutions : $\underline{r}_1 = -\sigma + \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}$ et $\underline{r}_2 = -\sigma + \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}$, avec $\Delta = \mathrm{j}^2\sqrt{-\Delta}$ et $\mathrm{j}^2 = -1$.

Les solutions sont complexes, le régime est pseudopériodique.

• Solution de l'équation différentielle :

$$y = \mathrm{e}^{-\sigma x}[A\cos(\sqrt{-\Delta}x) + B\sin(\sqrt{-\Delta}x)],\ \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles.}$$

b. Détermination des constantes en écrivant les conditions initiales imposées au circuit, à savoir :

• Continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$u_{t=0^+} = u_{t=0^-} = U_0 \Rightarrow y_{x=0} = 1 \Rightarrow A = 1$.

• Continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine : $i_{L0^+} = 0$.

Il faut chercher $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{0^+}$. D'après la deuxième question, la condition $i_{L0^+} = 0$ implique

$i_{0^+} = i_{R0^+} = \dfrac{u_{0^+}}{R} = \dfrac{U_0}{R}$. Par ailleurs $i_{0^+} = -C\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+}$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(U_0 y)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{\omega_0}\right)} = U_0\omega_0\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{0^+} = -\dfrac{1}{C\omega_0}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+} = -\dfrac{i_{0^+}}{C\omega_0 U_0} = -\dfrac{1}{RC\omega_0} = -2\sigma$. D'où :

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_0 = -\sigma A + B\sqrt{-\Delta} = -2\sigma \Rightarrow B = \frac{-\sigma}{\sqrt{-\Delta}}.$$

C'est bien en écrivant la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine que l'on détermine la constante B. Mais ici, comme parfois, la détermination de la relation entre les constantes est indirecte.

c. Solution de l'équation différentielle $y = \mathrm{e}^{-\sigma x}\left[\cos(\sqrt{-\Delta}x) - \dfrac{\sigma}{\sqrt{-\Delta}}\sin(\sqrt{-\Delta}x)\right]$.

La résolution d'une équation différentielle du second ordre sans second membre impose l'introduction de deux constantes :

Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer les constantes.

Les constantes sont déterminées en écrivant les continuités :

– de la tension aux bornes des condensateurs,

– **et** de l'intensité du courant qui traverse les bobines.

A.N. : $y = e^{-0,158x}[\cos(0,987x) - 0,16\sin(0,987x)]$.

Il faut maintenant revenir à la fonction $u(t)$ en utilisant les relations $x = \omega_0 t$ et $u = U_0 y$.

Sachant que $\omega_0 = 3,1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et que $U_0 = 20$ V, il vient :

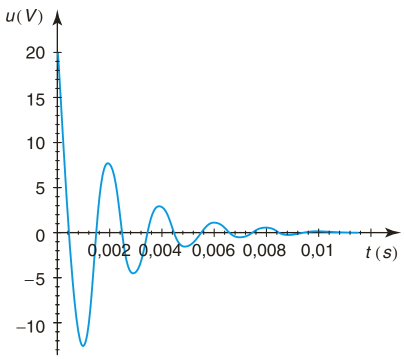
$$\boxed{u(t) = 20e^{-5,0 \cdot 10^2 t}[\cos(3,1 \cdot 10^3 t) - 0,16\sin(3,1 \cdot 10^3 t)] \text{ (V)}}$$

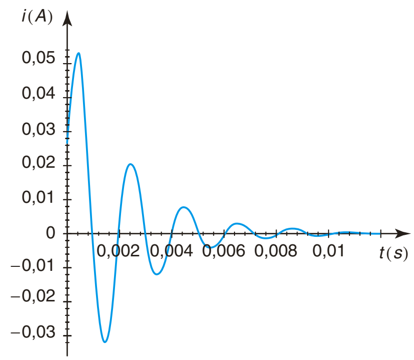
L'expression de l'intensité se déduit de la relation $i = -C\dfrac{du}{dt}$.

$$\boxed{i(t) = e^{-5,0 \cdot 10^2 t}[20\cos(3,1 \cdot 10^3 t) + 60\sin(3,1 \cdot 10^3 t)] \text{ (mA)}}$$

On vérifie qu'à la date $t = 0$ l'intensité est égale à 20 mA.

6 Les courbes sont tracées ci-dessous.





en conclusion

- Une équation différentielle réduite (sous forme canonique) ne contient que des termes sans dimension. Cela simplifie sa résolution.
- La résolution d'une équation différentielle du second ordre sans second membre impose l'introduction de deux constantes.

  Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer les constantes.

  Les constantes sont déterminées en écrivant les continuités :

  – de la tension aux bornes des condensateurs,

  – et de l'intensité du courant qui traverse les bobines.
- Le facteur de qualité Q d'un circuit RLC parallèle s'écrit $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$.