Topologie et Calcul différentiel – TD 2: Théorème des fonctions implicites

10 mars 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à appliquer le théorème des fonctions implicites, et à reconnaître les problèmes dans lesquels il intervient.

Exercice 1 :

On considère la fonction de deux variables $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$\psi(x, y) = x \exp(y) + \sin(\log(y)) \exp(x)$$

1. Calculer les dérivées partielles de ψ.

> Remarquons que ψ appartient à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a
>
> $$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \exp(y) + \sin(\log(y)) \exp(x).$$

2. Démontrer qu'il existe un voisinage de 0 noté $\mathscr{V}(0) \subseteq \mathbb{R}$ et une unique fonction ϕ de classe $\mathscr{C}^1(\mathscr{V}(0); \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathscr{V}(0)$, $\psi(x; \phi(x)) = 0$

> On remarque que $\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq 0$ et $\psi(0, 1) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de 0, noté $\mathscr{V}(0)$, et une unique fonction $\phi : \mathscr{V}(0) \to \mathbb{R}_+^*$ appartenant à $\mathscr{C}^1(\mathscr{V}(0); \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\phi(0) = 1$ et $\psi(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathscr{V}(0)$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de ϕ en 0.

> On utilise l'unicité du développement de Taylor de ϕ en 0. On cherche ϕ sous la forme $\phi(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$. En injectant ce développement dans l'équation $\psi(x, \phi(x)) = 0$, on trouve :
>
> $$\begin{aligned} 0 &= x \cdot \exp(\phi(x)) + \sin(\ln(\phi(x)) \cdot \exp(x) \\ &= x \cdot \exp((1 + ax + bx^2 + o(x^2)) + \sin(\ln(1 + ax + bx^2 + o(x^2))) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= x \cdot e \cdot \exp(ax + bx^2 + o(x^2)) + \sin\left(ax + bx^2 - \frac{1}{2}(ax)^2 + o(x^2)\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= x \cdot e \cdot (1 + ax + o(x)) + \left(ax + bx^2 - \frac{1}{2}a^2x^2 + o(x^2)\right) \cdot (1 + x + o(x)) \\ &= xe + eax^2 + o(x^2) + ax + ax^2 + bx^2 - \frac{1}{2}a^2x^2 + o(x^2) \\ &= (e + a)x + \left(ea + a + b - \frac{a^2}{2}\right) + o(x^2) \end{aligned}$$
>
> En identifiant les termes du premier ordre et du deuxième ordre, il vient
>
> $$a = -e, b = -ea + \frac{a^2}{2} - a = e + \frac{3}{2}e^2.$$

Exercice 2 :

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x,y) = 2e^{x+y} + y - x$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I au voisinage de 1 et une unique fonction $\phi \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ tels que

$$\phi(1) = -1 \text{ et } \forall x \in I,\ H(x,\phi(x)) = 0 \text{ et } \partial_2 H(x,\phi(x)) \neq 0$$

> On a $H(1,-1) = 0$. De plus, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 H(x,y) = 2e^{x+y} - 1 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(1,-1)$ ce qui nous donne la conclusion voulue.

Exercice 3 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \sin(y) + x \times y^4 + x^2.$$

1. Montrer que $(0,0) \in \Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\}$ et que au voisinage de ce point la courbe peut s'écrire sous la forme $y = \varphi(x)$.

> f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a $f(0,0) = 0$ donc $(0,0) \in \Gamma_f$. Par ailleurs, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert I autour de 0 tel que :
>
> $$\exists! \varphi \in \mathscr{C}^1(O,\mathbb{R}),\ \begin{cases} & \varphi(0) = 0 \\ \forall x \in I, & (x,\varphi(x)) \in \Gamma_f \\ \forall x \in I, & \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \neq 0 \end{cases}.$$

2. Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ en 0.

> C'est du Python

Exercice 4 :

On rappelle que la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \theta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(0) = 0$. On pose $f(x,y) = \sin(\theta(y)) - \tan(4\,\theta(x))$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f. Quelle est la classe de f ?

> Le seul problème vient de la fonction tangente. On sait qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. La fonction f est donc bien définie dès que le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $4\,\theta(x) \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Or, la fonction θ est à valeurs dans $[0,1]$, donc la seule condition à vérifier est $4\,\theta(x) \neq \dfrac{\pi}{2}$. Or,
>
> $$e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{8} \Longleftrightarrow x = \sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{-1} \text{ ou } x = -\sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{-1}.$$

Ainsi, f est bien définie sur

$$\Delta = \left(\mathbb{R} \setminus \left\{ -\sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{-1}, \sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{-1} \right\}\right) \times \mathbb{R}.$$

De plus, par composition de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Δ.

2. Étudier les extremums locaux de f.

Cherchons les candidats possibles, nous savons qu'ils vérifient : $(x, y) \in \Delta$ et,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 4\,\theta'(x) \times (1 + \tan^2(4\,\theta(x))) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = \theta'(y) \times \cos(\theta(y)) = 0. \end{cases}$$

Or, puisque θ est à valeurs dans $[0,1]$, on sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta(y)) \neq 0$. Ainsi, $\theta'(y) = 0$, et ceci n'est possible que si $y = 0$ (en effet, pour tout $y \neq 0$, on a $\theta'(y) = -\frac{2}{t^3} \times e^{-\frac{1}{t^2}} \neq 0$). De la même manière, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \tan^2(4\,\theta(x)) > 0$, on a $\theta'(x) = 0$. Donc, $x = 0$. On a donc trouvé, un seul candidat : $(x, y) = (0, 0)$.

De plus, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $f(0, y) = \sin(\theta(y)) > 0 = f(0, 0)$ (car θ est à valeur dans $[0, 1]$). D'autre part, puisque θ est continue en 0, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $0 < x < \eta$, on a $0 < 4 \times \theta(x) < \frac{\pi}{2}$, donc $f(x, 0) < 0 = f(0, 0)$. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f.

3. Quels sont les points de Γ où le théorème des fonctions implicites s'applique ?

Cherchons plutôt les points où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas. Nous savons qu'ils vérifient : $(x, y) \in \Delta$ et,

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \partial_1 f(x,y) = 4\,\theta'(x) \times (1 + \tan^2(4\,\theta(x))) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = \theta'(y) \times \cos(\theta(y)) = 0. \end{cases}$$

D'après la question précédente, les deux dernières équations entraînent $(x, y) = (0, 0)$. Et on a bien $(0, 0) \in \Gamma$ (c'est-à-dire, $f(0, 0) = 0$). Ainsi, le théorème des fonctions implicites s'applique à tous les points de $\Gamma \setminus \{(0, 0)\}$.

4. Soit le point $(a, b) = \left(\sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{-1}, 0\right)$, montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique. On notera φ la fonction implicite. Quelle est la classe de φ ? Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de (a, b).

On a bien $f(a, b) = 0$. Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, on sait d'après la question précédente que le théorème des fonctions implicites s'applique. De plus, comme $\theta'(0) = 0$, on a :

$$\partial_2 f(a, b) = 0.$$

Donc (puisque (a, b) n'est pas un point singulier) on a $\partial_1 f(a, b) \neq 0$. Ainsi, il existe un intervalle ouvert autour de a et il existe une unique fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I telle que

$$\begin{cases} \varphi(b) = a \\ \forall y \in I,\ (\varphi(y), y) \in I \\ \forall y \in I,\ \partial_1 f(\varphi(y), y) \neq 0. \end{cases}$$

Donnons un développement limité de φ l'ordre 2 au voisinage de (a, b). C'est possible car cette fonction est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Celui-ci s'écrit

$$\varphi(b+h) = \varphi(b) + \varphi'(b) \times h + \varphi''(b) \times \frac{h^2}{2} + o(|h|^2)$$

On sait déjà que :

$$\varphi(b) = a, \text{ et } \varphi'(b) = \frac{\partial_2(a,b)}{\partial_1(a,b)} = 0.$$

Pour déterminer $\varphi''(b)$, nous allons faire un développement limité de f à l'ordre 2. Avant de se lancer dans des calculs, remarquons que, pour tout $(x,y) \in \Delta$,

$$\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y) = 0.$$

De plus,

$$\partial_2\partial_2 f(x,0) = \theta''(0) \times \cos(\theta(0)) - \theta'(0)^2 \times \sin(\theta(0)) = 0$$

D'où,

$$f(a+h, b+k) = \partial_1 f(a,b) \times h + \partial_1\partial_1 f(a,b) \times \frac{h^2}{2} + o(\|(h,k)\|^2).$$

Ensuite, on sait que pour h suffisamment petit (en fait, h tel que $b+h \in I$),

$$0 = f(\varphi(b+h), b+h) = f\left(a + \varphi''(b) \times \frac{h^2}{2} + o(|h|^2), b+h\right).$$

On injecte ensuite dans le développement limité de f :

$$0 = \frac{\varphi''(b)}{2} \times \partial_1 f(a,b) + o(|h|^2).$$

Par unicité du développement limité (quand il existe), on en déduit que $\partial_1 f(a,b) \times \varphi''(b) = 0$, or $\partial_1 f(a,b) \neq 0$, donc $\varphi''(b) = 0$.

5. Trouver l'expression explicite de φ, au voisinage de (a,b).

On sait que pour tout $(x,y) \in \Gamma$, on a :

$$\tan(4\,\theta(x)) = \sin(\theta(y)).$$

Donc,

$$4\,\theta(x) = \operatorname{atan}\big(\sin(\theta(y))\big) + k \times \pi,$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Or, θ est à valeurs dans $[0,1]$ donc les seules valeurs possibles de k sont $k=0$ et $k=1$. On trouve alors :

$$x = \sqrt{-\ln\left(\frac{k \times \pi + \operatorname{atan}(\sin(e^{-1/y^2}))}{4}\right)}^{-1} \text{ ou } x = -\sqrt{-\ln\left(\frac{k \times \pi + \operatorname{atan}(\sin(e^{-1/y^2}))}{4}\right)}^{-1}.$$

Or on est au voisinage de (a,b), donc

$$x = \sqrt{-\ln\left(\frac{\pi + \operatorname{atan}(\sin(e^{-1/y^2}))}{4}\right)}^{-1}.$$

Ainsi, par unicité de la fonction implicite, on a

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \sqrt{-\ln\left(\frac{\pi + \operatorname{atan}(\sin(e^{-1/y^2}))}{4}\right)}^{-1}.$$

Exercice 5 :

► On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5\,x^3 - 27\,x \times y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.

f est définie par une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, elle est continue et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Or, cette fonction rationnelle est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On trouve :

$$\partial_1 f(x,y) = -\frac{\left(3\,y^2 - 5\,x^2\right)\left(9\,y^2 + x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^2}$$

et

$$\partial_2 f(x,y) = -\frac{64\,x^3\,y}{\left(y^2+x^2\right)^2}.$$

2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Oui. Car si l'on pose $N = \sqrt{x^2+y^2}$, on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x(5x^2-27y^2)}{N^2} \leqslant \frac{x(27x^2+27y^2)}{N^2} \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}(27x^2+27y^2)}{N^2} = \frac{27\,N^3}{N^2} = 27N \xrightarrow[N\to 0]{} 0.$$

3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

Oui. Il suffit de regarder les limites des taux d'accroissements des fonctions appropriées. Ainsi :

— *Existence de $\partial_1 f(0,0)$:* si $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 5 \xrightarrow[x\to 0]{} 5, \text{ donc } \partial_1 f(0,0) = 5.$$

— *Existence de $\partial_2 f(0,0)$:* si $y \neq 0$, on a :

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0, \text{ donc } \partial_2 f(0,0) = 0.$$

4. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (justifier votre réponse).

On a vu que la fonction rationnelle définissant f était de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il suffit donc de faire le calcul. On trouve :

$$\partial_1 f(x,y) = -\frac{\left(3\,y^2 - 5\,x^2\right)\left(9\,y^2 + x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^2}$$

et

$$\partial_2 f(x,y) = -\frac{64\,x^3\,y}{\left(y^2+x^2\right)^2}.$$

Non. Car

$$\partial_1 f(\sqrt{3}\,t, \sqrt{5}\,t) = 0 \xrightarrow[t\to 0,\, t\neq 0]{} 0 \neq 5 = \partial_1 f(0,0).$$

La fonction $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

On aurait aussi pu remarqué que

$$\partial_2 f(t,t) = -16 \xrightarrow[t\to 0,\ t\neq 0]{} -16 \neq 0 = \partial_2 f(0,0).$$

Donc la fonction $\partial_2 f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

- On s'intéresse maintenant aux *lignes de niveaux* de la fonction f. Pour cela, étant donné un réel $a \in \mathbb{R}^*$, on va étudier la fonction :

$$g_a(x,y) = (5\,x^3 - 27\,x \times y^2) - a \times (x^2 + y^2).$$

5. Déterminer les extrémums locaux de g_a.

(a) Les candidats extrémums vérifient les deux équations :

$$\partial_1 g_a(x,y) = 0 \text{ et } \partial_2 g_a(x,y) = 0,$$

soit

$$-27\,y^2 + 15\,x^2 - 2\,a \times x = 0 \text{ et } -54\,x \times y - 2\,a \times y = 0.$$

(b) La résolution du système nous donne quatre candidats :

$$\left(\frac{2\,a}{15}, 0\right),\ (0,0),\ \left(-\frac{a}{27}, \pm\frac{\sqrt{23}\,a}{81}\right).$$

(c) Pour chaque candidat, on peut regarder le développement limité au voisinage du point, pour trouver le comportement de la fonction au voisinage. Cela donne :

— En $(2\,a/15, 0)$, on a :

$$g_a\left(\frac{2\,a}{15} + h, k\right) = -\frac{4\,a^3}{675} + \frac{5\,a\,h^2 - 23\,a\,k^2}{5} + o\left(h^2 + k^2\right),$$

où le terme de degré 2 change de signe au voisinage de $(0,0)$. Ce n'est pas un extrémum local.

— En $(0,0)$, on a :

$$g_a(h,k) = -a\,k^2 - a\,h^2 + o\left(h^2 + k^2\right),$$

donc, $(0,0)$ est un maximum local si $a > 0$ et un minimum local si $a < 0$.

— En $\left(-\frac{a}{27}, \pm\frac{\sqrt{23}\,a}{81}\right)$, on a :

$$g_a\left(-\frac{a}{27} + h, \pm\frac{\sqrt{23}\,a}{81} + k\right) = -\frac{32\,a^3}{19683} - \frac{14\,a\,h^2 \pm 6\sqrt{23}\,a\,k\,h}{9} + o\left(h^2 + k^2\right),$$

où le terme de degré 2 change de signe au voisinage de $(0,0)$. Ce n'est pas un extrémum local.

- On pose :

$$\Gamma_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g_a(x,y) = 0\right\}.$$

6. En quels points de Γ_a est-il impossible d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a ?

Les points où il n'est pas possible d'utiliser le théorème des fonctions implicites vérifient :

$$g_a(x,y)=0,\ \partial_1 g_a(x,y)=0 \text{ et } \partial_2 g_a(x,y)=0,$$

ce sont donc les candidats extrémums de g_a qui, de plus, appartiennent à Γ_a. On trouve donc le point :

$$(0,0).$$

7. En quels points de Γ_a est-il impossible d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a sous la forme $y=\varphi(x)$?

Les points où il est impossible de paramétrer par x vérifient :

$$g_a(x,y)=0 \text{ et } \partial_2 g_a(x,y)=0,$$

soit

$$(5\,x^3-27\,x\times y^2)-a\times(x^2+y^2)=0$$

et

$$-54\,x\times y-2\,a\times y=0.$$

Ce qui nous donne deux points :

$$\left(\frac{a}{5},0\right) \text{ et, bien sûr } (0,0).$$

8. Utiliser le théorème des fonctions implicites pour paramétrer Γ_a, en fonction de x au voisinage du point :

$$\left(a,\frac{a}{\sqrt{7}}\right),$$

et donner un développement limité à l'ordre 1 de la fonction implicite trouvée.

(a) Ce point est bien sur Γ_a, car $g_a(a,a/\sqrt{7})=0$.

(b) On peut paramétrer par x car $\partial_2 g_a(a,a/\sqrt{7})=-8\sqrt{7}\,a^2$.

(c) Le théorème des fonctions implicites nous garantit l'existence d'un voisinage V de a et d'une fonction φ_a définie sur ce voisinage de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car g_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$).

(d) Le théorème de Taylor-Young nous garantit l'existence d'un développement limité à tout ordre de φ_a au voisinage de a. Pour le trouver, on pose :

$$\varphi_a(x)=b+c\times(x-a)+o_a\left((x-a)\right),$$

et on réinjecte dans l'expression :

$$\forall x\in V,\ g_a(x,\varphi_a(x))=0.$$

L'unicité du développement limité permet de conclure... Il vient :

$$\varphi_a(a+h)=\frac{a}{\sqrt{7}}+\frac{8}{7\sqrt{7}}h+o(h).$$

Exercice 6 :

Soit F et g deux fonctions réelles définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$. On note

$$\Gamma=\{(x,y)\in U,\ F(x,y)=0\}.$$

On cherche les extremums de la fonction g restreinte à l'ensemble Γ.

1. Soit $(a,b) \in \Gamma$ un extremum de g sur Γ. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que $\mathrm{grad}_{(a,b)}F$ et $\mathrm{grad}_{(a,b)}g$ sont colinéaires.

La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathrm{grad}_{(a,b)}F = 0$, alors $\mathrm{grad}_{(a,b)}F$ et $\mathrm{grad}_{(a,b)}g$ sont colinéaires. Sinon, l'une des dérivéees partielles de F est non nulle, par exemple $\partial_2 F(a,b) \neq 0$.
D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc un ouvert I autour de a et une unique fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I tels que :

$$\begin{cases} & \varphi(a) = b \\ \forall x \in I, & (x, \varphi(x)) \in \Gamma \\ \forall x \in I, & \partial_2 F(x, \varphi(x)) \neq 0 \end{cases}.$$

Au voisinage de (a,b), Γ est donc une courbe d'équation $y = \varphi(x)$. Puisque (a,b) est un extremum de g sur Γ, la fonction $x \in I \mapsto g(x, \varphi(x))$ admet un extremum en a. Or cette fonction est dérivable : sa dérivée s'annule donc en a. Ainsi :

$$\partial_1 g(a, \varphi(a)) + \varphi'(a) \times \partial_2 g(a, \varphi(a)) = 0.$$

Or pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = \frac{-\partial_1 F(x,\varphi(x))}{\partial_2 F(x,\varphi(x))}$. En réinjectant, et en multipliant par $\partial_2 F(a,b)$, on obtient :

$$\partial_1 g(a,b) \times \partial_2 F(a,b) - \partial_2 g(a,b) \times \partial_1 F(a,b) = 0,$$

ce qui prouve le résultat désiré.

2. Quel est le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (on admet que le maximum existe) ? Un triangle rectangle est un triangle dont deux côtés sont orthogonaux.

Notons x et y les longueurs de deux petits côtés d'un tel triangle. Le troisième côté (appelé hypothénuse) a pour longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. Le périmètre du triangle vaut donc $x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ et son aire vaut $\frac{1}{2}xy$.
On définit les fonctions F et g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $F(x,y) = x+y+\sqrt{x^2+y^2}-\ell$ et $g(x,y) = \frac{1}{2}xy$. On peut reformuler la question ainsi : Trouver le maximum de la fonction F restreinte à l'ensemble Γ.
Les fonctions f et F sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer le résultat de la question 1. Comme on admet que le maximum existe, le maximum est atteint d'après la question 1 en un point $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$\partial_1 F(a,b) \times \partial_2 f(a,b) - \partial_2 F(a,b) \times \partial_1 f(a,b) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{b}{2} \times \left(1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \frac{a}{2} \times \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 0.$$

On en déduit $a = b$ et donc finalement $a = b = \frac{\ell}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \ell$.
Finalement, le triangle cherché est isocèle (c'est-à-dire qu'il a deux côtés de même longueur).

Exercice 7 :

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 = 1$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1,1)$.

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la fonction f par $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. On a alors, pour tout $(,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 2y \ ;$$
$$\partial_2 f(x,y) = -2x + 4y \ .$$

En particulier, $\mathrm{grad}_{(1,1)} f = (1,2) \neq (0,0)$. Comme on a aussi $f(1,1) = 0$, la courbe Γ admet donc une tangente $\mathscr{T}$ en $(1,1)$. En posant $M_0 = (1,1)$, on a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} M = (x,y) \in \mathscr{T} &\Leftrightarrow \langle \mathrm{grad}_{(1,1)} f, \overrightarrow{M_0 M} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 2 \times (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La tangente $\mathscr{T}$ a donc pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

2. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente. On pourra appliquer la théorème des fonctions implicites et effectuer un développement limité en 1 de la fonction φ obtenue.

Comme $\partial_2 f(1,1) \neq 0$, on peut appliquer la théorème des fonctions implicites en $(1,1)$. Il existe un intervalle ouvert I autour de 1 et $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R})$ tels que Γ soit le graphe de ϕ au voisinage de $(1,1)$. En particulier, $\forall x \in I, f(x,\phi(x)) = 0$.
Comme f est de classe C^∞, φ est de classe C^∞. En dérivant la fonction $x \mapsto f(x,\phi(x))$ sur I, on obtient pour tout $x \in I$: $\partial_1 f(x,\phi(x)) + \phi'(x) \times \partial_1 f(x,\phi(x)) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, 3x^2 - 2\phi(x) + \phi'(x) \times (-2x + 4\phi(x)) = 0.$$

En particulier, $\phi'(1) = -\frac{1}{2}$ (c'est en fait comme ça qu'on trouve l'équation de la tangente). En dérivant une deuxième fois, on obtient pour tout $x \in I$:

$$6x - 2\phi'(x) + \phi''(x) \times (-2x + 4\phi(x)) + \phi'(x) \times (-2 + 4\phi'(x)) = 0.$$

Pour $x = 1$, cela fournit $\phi''(1) = -\frac{9}{2}$. Comme ϕ est de classe C^2, la formule de Taylor-Young donne :

$$\phi(1+h) = 1 - \frac{1}{2}h - \frac{9}{4}h^2 + o(h^2).$$

On a donc

$$\phi(1+h) - (-\frac{1}{2}(h-1) + \frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}h^2 + o(h^2).$$

La courbe est donc en-dessous de la tangente $\mathscr{T}$ au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 8 :

Étudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes. On pourra essayer de les visualiser avec des courbes de niveau.

1. $f(x,y) = (x-y)^3 - 6\,x \times y$
2. $f(x,y) = x^3 + x \times y^2 - x^2 \times y - y^3$
3. $f(x,y) = (x^2 - y^2) \times \exp(x^2 - y^2)$.

Exercice 9 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2\,z \times (x+y) - 2\,x + y - 2\,z + 1.$$

1. Déterminer l'existence et l'unicité d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans un voisinage V de $(0,0)$ vérifiant :

$$\varphi(0,0) = 1 \text{ et } \forall (x,y) \in V,\ f(x,y,\varphi(x,y)) = 0.$$

> Nous avons clairement que $f(0,0,1) = 0$. De plus, $\partial_3 f(0,0,1) = 1 \neq 0$. Comme f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites qui nous dit qu'il existe un voisinage ouvert V de $(0,0)$ et une unique fonction φ définie sur V telle que
>
> $$\varphi(0,0) = 1 \text{ et } \forall (x,y) \in V,\ f(x,y,\varphi(x,y)) = 0.$$
>
> Notons que pour l'unicité de φ, on a besoin à priori de prouver que $\partial_3 f(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$ sur un voisinage de $(0,0)$. Mais ceci est toujours vrai, quitte à réduire le voisinage considéré, par continuité de $\partial_3 f$ et de φ.
> Comme f est en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, la remarque 30. du cours nous donne que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur V. On peut même obtenir des formules pour les dérivées partielles de φ en dérivant l'expression $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$...

2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$.

> Le développement limité recherché est :
>
> $$1 + 4\,h + k - 14\,h \times k - 40\,h^2 - k^2$$

Exercice 10 :

Pour chacune des fonctions suivantes, les tracer sur leur ensemble de définition, puis répondre aux questions.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ pour $(x,y) \in [-2,2]^2$.
   (a) Visualiser l'intersection de la courbe représentative de f et du plan d'équation $z = 0$.
   (b) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(1,0)$?
2. $g(x,y) = y^2 - 1 + \sin(\pi \times x)$ pour $(x,y) \in [-2,2]^2$.
   (a) Visualiser la ligne de niveau $z = 0$.
   (b) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
   (c) Superposer les courbes de φ est de f.
   (d) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(\frac{1}{2}, 0)$?
3. $h(x,y) = \mathrm{sinc}(x) - \mathrm{sinc}(y)$ pour $(x,y) \in [-3\pi, 3\pi]$, où $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$
   (a) Visualiser h et la ligne de niveau correspondant à $z = 0$.
   (b) Vérifier que $h(\pi, 2\pi) = 0$.
   (c) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
   (d) Effectuer un développement limité de φ à l'ordre 1 en π.
   (e) Faire apparaître la tangente à φ au point $(\pi, 2\pi)$ sur le dessin.