

Table des matières

1	Fonctions réelles de la variable réelle	3
1.1	Rappels	3
1.1.1	Monotonie	3
1.1.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	6
1.1.3	Cardinalité	10
1.2	Limites	14
1.2.1	Premières définitions	14
1.2.2	Techniques	24
1.3	Continuité	28
1.3.1	Définitions et premières propriétés	28
1.3.2	Quelques résultats	34
1.4	Dérivabilité	46
1.4.1	Définition	46
1.4.2	Résultats	56
2	\mathbb{R}^n euclidien ($n \geq 2$)	83
2.1	Quelques rappels	83
2.2	Propriétés euclidiennes	91
2.2.1	Norme et produit scalaire	91
2.2.2	Angles	96
2.3	Droites, plans, etc.	99
2.3.1	Définitions	99
2.3.2	Mise en équation(s)	101
2.3.3	Distances	117

2.3.4	Retour sur les angles	127
2.4	Barycentres	128
2.5	Quelques applications particulières	131
2.5.1	Translation	131
2.5.2	Homothétie	132
2.5.3	Projection orthogonale	132
2.5.4	Symétrie orthogonale	133
2.5.5	Rotation	134
2.6	Bases et repères	138
2.6.1	Point de vue vectoriel	138
2.6.2	Point de vue affine	141
3	Fonctions de plusieurs variables et systèmes de coordonnées	191
3.1	Dérivation d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^p	191
3.2	Fonctions de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}^p	198
3.2.1	Ouverts de \mathbb{R}^n	198
3.2.2	Continuité des fonctions de plusieurs variables	201
3.2.3	Dérivées partielles	207
3.3	Systèmes de coordonnées	220
3.3.1	Dans le plan	222
3.3.2	Dans l'espace	229
A	Utilisation de Python	259
A.1	Dessins	259
A.2	Vecteurs	262
A.3	Formule de Lagrange	263
A.4	Double produit vectoriel	264
A.5	Cercle dans l'espace	264
A.6	Perpendiculaire commune	266
A.7	Vitesse instantanée	269
A.8	Dérivées partielles	271

Chapitre 1

Fonctions réelles de la variable réelle

1.1 Rappels

1.1.1 Monotonie

Proposition 1.1

\mathbb{R} a une propriété remarquable : soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, alors, en posant

$$\Delta = \{M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M\}$$

1. ou bien l'ensemble Δ est \mathbb{R} : alors $A = \emptyset$, et on note $\sup A = -\infty$,
2. ou bien l'ensemble Δ est vide : on dit que A est non majorée, et on note $\sup A = +\infty$,
3. ou bien il existe un unique $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = [M_0, +\infty[$: alors A est une partie non vide et majorée et on note $\sup A = M_0$. On dit que M_0 est la borne supérieure de A .

On peut bien sûr définir de même la notion de borne inférieure.

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$: 实数集 \mathbb{R} 的所有子集的集合。

Exemple 1.1

Quelques exemples de bornes supérieures :

1. *Cas des intervalles*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow \sup [a, b[= \sup [a, b] = b$$

2. *Cas non majorés*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sup [a, +\infty[= +\infty$$

3. *Ensembles plus compliqués*

$$\sup \{\sin(x), x \in \mathbb{R}\} = 1$$

Rappel 1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

1. On dit que f est *croissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

2. On dit que f est *strictement croissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

3. On dit que f est *décroissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

4. On dit que f est *strictement décroissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

5. On dit que f est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

6. On dit que f est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

通常用此 Rappel 来研究和证明函数的单调性(Monotonie)

Remarque 1.1

La fonction *partie entière* définie par :

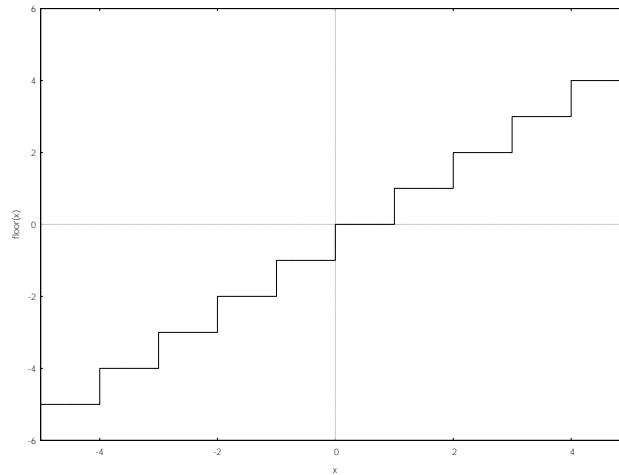
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = n \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z}, \\ n \leq x < n + 1 \end{cases}$$

est croissante, mais n'est pas strictement croissante.

Son graphe est donné à la figure 1.1, de la présente page

熟练掌握整函数(La fonction partie entière)的定义。

Figure 1.1 – Partie entière



Exercice(s) 1.1

1.1.1 Montrer que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur \mathbb{R} . Est-elle strictement croissante ?

1.1.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (un entier naturel non nul), étudier la monotonie de $x \mapsto x^n$ lorsque n est impair. Le montrer. Où intervient l'impairité de n ?

1.1.3 Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ (un rationnel strictement positif), que dire de la monotonie de $x \mapsto x^\alpha$?

1.1.4 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , montrer que :

$$\left[f \text{ strictement croissante} \right] \iff \left[\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b \iff f(a) \leq f(b) \right]$$

1.1.5 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, croissante. Montrer que

$$\exists a \in [0, 1], f(a) = a$$

1.1.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Rappel 1.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F .

1. Si $y \in F$, on dit que $x \in E$ est *un antécédent de y par f* , si $y = f(x)$.

2. On dit que f est *injective* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(Unicité de l'antécédent)

3. On dit que f est *surjective* si :

$$\forall z \in F, \exists x \in E, z = f(x)$$

(Existence de l'antécédent)

4. On dit que f est *bijective* si f est injective et surjective. (Existence et unicité de l'antécédent)

理解并掌握函数单射(Injectivité),满射(surjectivité), 双射(bijectivité)的定义(熟练应用此定义来研究和证明函数的单射、满射、双射性质)

Remarque 1.2

Une fonction $f : E \rightarrow F$ étant donnée, on peut définir

$$f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$$

On dit que $f(E)$ est *l'image de E par f*. Lorsque f est injective, alors l'application définie par :

$$\tilde{f} : \begin{cases} E \rightarrow f(E) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

est bijective.

Remarque 1.3

On fera attention à bien distinguer :

- f est bijective de E *sur* F , qui signifie que f est injective et surjective et que son image est F ;
- f est bijective de E *dans* F , qui signifie que f est injective et définit une bijection entre E et $f(E)$.

Remarque 1.4

Quand f est bijective, on définit *la fonction réciproque de f*, et on note f^{-1} l'application

$$\begin{cases} f(E) \rightarrow E \\ y \mapsto x, \text{ tel que } y = f(x) \end{cases}$$

Remarque importante 1.5

Ne pas confondre avec l'application *image réciproque* qui, elle, est *toujours* définie par :

$$\forall B \subset F, f^{-1}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Il n'y a pas d'ambiguïté de notation, car son argument est un sous-ensemble de F !

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} est-elle strictement monotone ? (Si oui, le prouver, si non, trouver un contre-exemple).

1.2.2 Soit

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

(a) Montrer que f est bijective de \mathbb{R} sur un intervalle I à préciser.

(b) Expliciter sa réciproque.

1.2.3 Soit

$$f : \begin{cases}]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{2x}{1-x^2} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective sur \mathbb{R} et déterminer sa réciproque.

1.2.4 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a \neq 0$. Soit $f : x \in \mathbb{Z} \mapsto a \times x^2 + b \times x + c$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que f soit injective.

1.2.5 Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) \mapsto 2^a \times (2b+1) - 1 \end{cases}$$

est bijective.

1.2.6 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$, telles que :

$$g \circ f \text{ est injective}$$

(a) Montrer que f est injective.

(b) Donner un exemple où g n'est pas injective.

(c) Montrer que, si f est surjective, alors g est injective.

1.2.7 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$, telles que :

$g \circ f$ surjective

quelles propriétés de f et g peut-on en déduire ?

1.2.8 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $f(f(a) + f(b)) = a + b$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

1.2.9 Déterminer une CNS^a sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ pour que

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) \mapsto (a \times x + b \times y, c \times x + d \times y) \end{cases}$$

soit bijective.

1.2.10 Soit f une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Montrer que

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, a < b < c \text{ et } \frac{f(a) + f(c)}{2} = f(b)$$

1.2.11 Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que

(a) f est injective si et seulement si, il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f = Id_X$.

(b) f est surjective si et seulement si, il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g = Id_Y$.

1.2.12 Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On pose

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

(a) Montrer que si $A \cup B = E$ alors f est injective.

(b) Réciproque ?

(c) Donner une CNS pour que f soit surjective.

a. CNS=Condition Nécessaire et Suffisante.

1.1.3 Cardinalité

注释 1.1

基数(Cardinalité) : 集合论中刻画任意集合所含元素数量多少的一个概念。

Théorème 1.1 – Cantor-Bernstein

Soit E et F deux ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans E , alors :

$$\exists \psi : E \rightarrow F, \text{ bijective}$$

Démonstration

Cette démonstration est difficile, elle pourra être sautée dans un premier temps.

1. *Quelques idées.* Il faut construire la bijection ψ à l'aide des fonctions f et g , pour cela, il est naturel de prendre une partie A de E et de construire ψ de la manière suivante :

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus A \end{cases}$$

où g^{-1} désigne ici la réciproque de l'application

$$\begin{cases} F \rightarrow g(F) \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$$

À quelle condition obtient-on ψ bijective ?

- (a) Bonne définition. Pour définir correctement ψ , il faut que $E \setminus A \subset g(F)$, on a donc une première condition sur A : $A \supset E \setminus g(F)$.
- (b) Injectivité. La condition d'injectivité s'écrit ici :

$$f(A) \cap g^{-1}(E \setminus A) = \emptyset$$

On peut voir facilement que cette condition s'écrit aussi $g \circ f(A) \cap (E \setminus A) = \emptyset$. c'est-à-dire $A \supset g \circ f(A)$.

- (c) Surjectivité. La condition de surjectivité $\psi(E) = F$ devient ici :

$$f(A) \cup g^{-1}(E \setminus A) = F$$

Or, cette condition s'écrit encore : $\forall b \in F, b \notin g^{-1}(E \setminus A) \Rightarrow b \in f(A)$, c'est-à-dire $\forall c \in g(F), c \notin E \setminus A \Rightarrow c \in g \circ f(A)$, c'est-à-dire $\forall c \in g(F), c \in A \Rightarrow c \in g \circ f(A)$. La condition de surjectivité est donc : $A \cap g(F) \subset g \circ f(A)$.

La question devient donc : est-il possible de trouver une partie A de E vérifiant :

$$A \supset E \setminus g(F), \quad A \supset g \circ f(A) \quad \text{et} \quad A \cap g(F) \subset g \circ f(A) ?$$

La réponse est souvent dans la recherche d'un individu vérifiant une condition d'extrémalité.

2. *Rédaction de la preuve.* Posons

$$\mathcal{F} = \{M \subset E, \quad M \supset E \setminus g(F) \quad \text{et} \quad M \supset g \circ f(M)\}$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ (car $E \in \mathcal{F}$) et est stable par intersections^a. On considère alors

$$A = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M$$

Il s'agit du *plus petit élément*^b de \mathcal{F} . Montrons que A convient.

(a) $A \supset E \setminus g(F)$, car tous les éléments M de \mathcal{F} vérifie cette propriété.

(b) $A \supset g \circ f(A)$, car tous les éléments M de \mathcal{F} vérifie cette propriété. Donc :

$$g \circ f(A) = g \circ f \left(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \right) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{F}} g \circ f(M) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M = A$$

(c) Supposons que A ne vérifie pas la dernière propriété : on a donc $A \cap g(F) \not\subset g \circ f(A)$. Il existe donc $a \in A \cap g(F) \setminus g \circ f(A)$.

Posons $B = A \setminus \{a\}$. Alors

— On a : $B \cup \{a\} \supset E \setminus g(F)$, donc comme $a \in g(F)$, on a : $B \supset E \setminus g(F)$.

— $g \circ f(B) \subset g \circ f(A) \subset A = B \cup \{a\}$. Mais $a \notin g \circ f(A)$, donc $a \notin g \circ f(B)$. Finalement $g \circ f(B) \subset B$.

On conclut que $B \in \mathcal{F}$, donc par minimalité de A , on a : $A \subset B$. Comme $a \in A$, on a donc : $a \in B$, ce qui est absurde.

a. Si $(M_i)_{i \in I}$ sont dans \mathcal{F} , alors $A = \bigcap_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$.

b. Voilà la condition d'extrémalité cherchée. On vérifiera que $A \in \mathcal{F}$. Clairement, $\forall M \in \mathcal{F}, A \subset M$.

Proposition 1.2

Plus généralement, si on a un ensemble E et une propriété P sur les parties de E (ie $P : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$), on peut considérer :

$$\mathcal{F} = \{A \subset E, \quad P(A) = \text{Vrai}\}$$

Si, de plus, la propriété vérifie :

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

2. $\forall (M_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \bigcap_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$, alors

$$A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$$

et $\forall A \in \mathcal{F}, A \supset A_0$. (On dit que A_0 est le plus petit élément de \mathcal{F} .)

Proposition 1.3

De même, si la propriété vérifie :

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

2. $\forall (M_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \bigcup_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$, alors

$$A_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$$

et $\forall A \in \mathcal{F}, A \subset A_0$. (On dit que A_0 est le plus grand élément de \mathcal{F} .)

Démonstration de la proposition 1.2, page précédente

La démonstration de la proposition 1.3, de la présente page sera identique.

($A_0 \in \mathcal{F}$) Il suffit d'appliquer la propriété d'intersection au cas où $I = \mathcal{F}$ et

$$\forall A \in \mathcal{F}, M_A = A$$

($A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \supset A_0$) Clairement, d'après la définition de A_0 comme intersection de tous les $A \in \mathcal{F}$, on a, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $A_0 \subset A$.

Définition 1.1

1. Un ensemble E sera dit *infini* si :

$$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow E \text{ injective}$$

On notera $\mathbb{N} \hookrightarrow E$.

2. Un ensemble E sera dit *dénombrable* si :

$$\exists f : E \rightarrow \mathbb{N} \text{ injective } (E \hookrightarrow \mathbb{N})$$

3. Un ensemble E sera dit *fini*, s'il n'est pas infini.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Montrer qu'un ensemble fini est dénombrable. La réciproque est-elle vraie ?

1.3.2 Soit E un ensemble non vide, montrer que :

$$E \text{ fini} \iff \exists ! n \in \mathbb{N}, E \text{ en bijection avec } \llbracket 1, n \rrbracket$$

1.3.3 Soit E un ensemble, montrer que :

$$E \text{ infini et dénombrable} \iff E \text{ en bijection avec } \mathbb{N}$$

1.3.4 Montrer que \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{N}^k ($k \in \mathbb{N}^*$), \mathbb{Q}^k ($k \in \mathbb{N}^*$) sont infinis et dénombrables (donc en bijection avec \mathbb{N}).

1.3.5 Soit E un ensemble infini, montrer que E non dénombrable si, et seulement si,

$$\forall D \subset E, D \text{ dénombrable} \Rightarrow E \setminus D \text{ en bijection avec } E$$

1.3.6 Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont jamais en bijection. ^a

1.3.7 Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. ^b

1.3.8 Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables indexée par un ensemble I dénombrable. Montrer que :

$$\bigcup_{i \in I} E_i \text{ est dénombrable}$$

1.3.9 Montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

1.3.10 Soient 3 ensembles E , F et G , trouver une bijection entre

$$E^{F \times G} \text{ et } (E^F)^G$$

1.3.11 Montrer que l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers est infini, dénombrable.

1.3.12 Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec \mathbb{R} .^c

a. Si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on pourra considérer :

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$$

b. Si f est une application de \mathbb{N} dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, en notant $f(n) = (u_p^{(n)})_{p \in \mathbb{N}}$, on pourra considérer la suite définie par :

$$v_n = 1 + u_n^{(n)}$$

c. On pourra remarquer que \mathbb{R} est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

1.2 Limites

1.2.1 Premières définitions

Notation 1.1

1. Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , nous noterons \bar{I} , l'ensemble des points *adhérents* à I et $\overset{\circ}{I}$, l'ensemble des points *intérieurs* à I , de la manière suivante :

I	\bar{I}	$\overset{\circ}{I}$
$[a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b[$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, b[$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, +\infty[$	$[a, +\infty[$	$]a, +\infty[$
$]a, +\infty[$	$[a, +\infty[$	$]a, +\infty[$
$] - \infty, a]$	$] - \infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, a[$	$] - \infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, +\infty[$	$] - \infty, +\infty[$	$] - \infty, +\infty[$

Dans ce cours, nous emploierons le mot voisinage dans le sens suivant^a :

- Un voisinage de $a \in \bar{I}$ dans I , est de la forme $I \cap]a - \eta, a + \eta[$ ($\eta > 0$).
- Un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est de la forme $[A, +\infty[$ (resp. $] - \infty, -A]$) où $A \in \mathbb{R}$.
- Nous noterons $[-\infty, +\infty]$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

a. Une définition plus usuelle sera donnée dans le cours Mathématiques VI (Topologie).

Définition 1.2 – Limite d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , soit a un point de \bar{I} et $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que f admet la limite λ en a (resp. limite à gauche, limite à droite) et on note :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ (resp. } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \lambda, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda)$$

si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \left| \begin{array}{l} \forall x \in I, \\ \text{resp. } \forall x \in I \cap] - \infty, a[, \\ \text{resp. } \forall x \in I \cap]a, +\infty[, \end{array} \right| |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

On note aussi :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x < a} \lambda, \text{ pour la limite à gauche}$$

et

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x > a} \lambda, \text{ pour la limite à droite}$$

深刻理解函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 $a \in I$ 处极限 (左极限或右极限) 存在的定义。

Remarque 1.6

En termes simples : cela signifie que plus on se rapproche de a , plus la valeur de la fonction se rapproche de λ .

Exemple 1.2 – Limites ou non ?

1. La fonction *partie entière* admet une limite en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et une limite à droite et à gauche en tout point de \mathbb{Z} .
2. La fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a une limite en tout point de \mathbb{R}^* , mais n'a pas de limite en 0. Voir son graphe, figure 1.2, page suivante.

Définition 1.3

On peut généraliser la notion de limite lorsque λ prend une valeur infinie, et quand a prend une valeur infinie (en ce cas, I doit contenir un sous-intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $] -\infty, \alpha]$), soit :

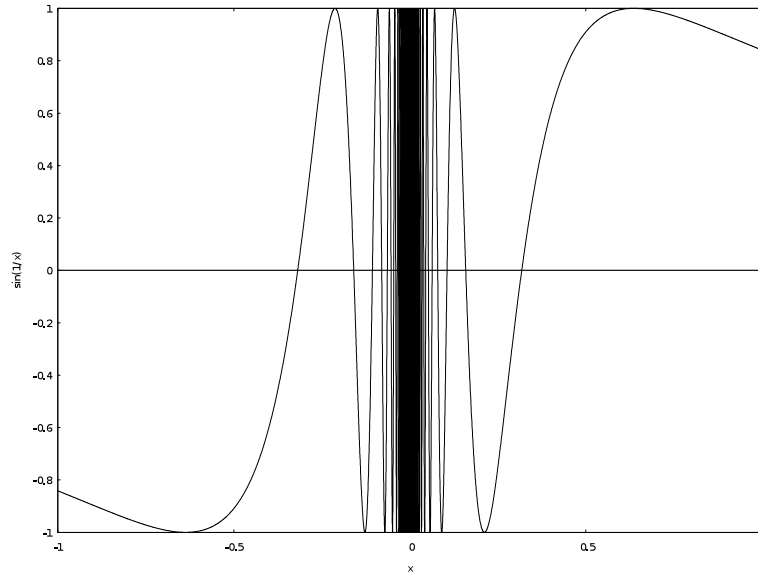
1. ($\lambda = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

Figure 1.2 – Fonction sans limite



Et (limite à gauche)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\infty, a[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

Enfin (limite à droite)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a, +\infty[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

2. $(\lambda = -\infty, a \in \mathbb{R}) :$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A$$

Et (limite à gauche)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\infty, a[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A$$

Enfin (limite à droite)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a, +\infty[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A$$

3. $(\lambda \in \mathbb{R}, a = +\infty) :$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

4. $(\lambda \in \mathbb{R}, a = -\infty) :$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \lambda$$

se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \leq -A \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

5. $(\lambda = +\infty, a = +\infty) :$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

6. ... (les autres cas sont laissés en exercice)

Remarque 1.7

On peut les résumer de la manière suivante : soit $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, soit $a \in [-\infty, +\infty]$, f étant définie au voisinage de a , alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

signifie :

Pour tout voisinage W de λ , il existe un voisinage V de a , tel que, si $x \in V$ alors $f(x) \in W$.

Remarque importante 1.8

Ces définitions ne sont pas pratiques ! Pour simplifier, nous allons procéder de la manière suivante :

1. considérer les fonctions de référence usuelles et connaître leurs limites ;
2. combiner ces fonctions de référence usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, composition...)

为了证明函数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 $a \in \mathbb{R}$ 处有极限，我们可以采用以下方法：

1. 采用定义来证明。
2. 应用已知常用函数的极限来证明，也就是说：(通常采用此方法)
 - (a) 考虑与该函数相关的常用函数的极限
 - (b) 运用函数的加、减、乘、除、复合等基本运算求该函数的极限。

Propriété 1.1

Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) en $a \in [-\infty, +\infty]$, alors cette limite est unique.

Propriété 1.2

Si f et g définies sur I admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite) λ et μ réelles en $a \in [-\infty, +\infty]$, alors $f + g$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda + \mu$ en a .

Remarque 1.9

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque λ et μ sont dans $[-\infty, +\infty]$, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad & \ll x + \infty \gg = \ll \infty + x \gg = \ll +\infty + \infty \gg = +\infty, \\ & \ll x - \infty \gg = \ll -\infty + x \gg = \ll -\infty - \infty \gg = -\infty,\end{aligned}$$

Remarque importante 1.10

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll +\infty - \infty \gg \text{ et } \ll -\infty + \infty \gg$$

Propriété 1.3

Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) λ réelle en $a \in [-\infty, +\infty]$, si $k \in \mathbb{R}$, alors $k.f$ admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $k.\lambda$ en a .

Remarque 1.11

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall k > 0, \quad & \ll k.(+\infty) \gg = +\infty \\ & \ll k.(-\infty) \gg = -\infty \\ \forall k < 0, \quad & \ll k.(+\infty) \gg = -\infty \\ & \ll k.(-\infty) \gg = +\infty\end{aligned}$$

Propriété 1.4

Si f et g définies sur I admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite) λ et μ réelles en $a \in [-\infty, +\infty]$, alors $f \times g$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \times \mu$ en a .

Remarque 1.12

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque les limites sont dans $[-\infty, +\infty]$, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad & \ll x \times (+\infty) \gg = \ll (+\infty) \times x \gg = \ll (+\infty) \times (+\infty) \gg \\ & = \ll (-\infty) \times (-\infty) \gg = +\infty \\ \forall x < 0, \quad & \ll x \times (+\infty) \gg = \ll (+\infty) \times x \gg = \ll (+\infty) \times (-\infty) \gg \\ & = \ll (-\infty) \times (+\infty) \gg = -\infty\end{aligned}$$

Remarque importante 1.13

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll 0 \times (+\infty) \gg \text{ et } \ll 0 \times (-\infty) \gg$$

Propriété 1.5

Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ en $a \in [-\infty, +\infty]$, si g est définie au voisinage de λ et admet une limite $\mu \in [-\infty, +\infty]$ en λ , alors $g \circ f(x)$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) μ en a .

Exemple 1.3

Soit $a \in [-\infty, +\infty]$, f définie sur un voisinage de a et $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ tel que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

alors, si $\lambda \neq 0$:

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \begin{cases} 1/\lambda & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \lambda \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases}$$

En revanche, si $\lambda = 0$, il faut différencier trois cas :

$$\begin{cases} \text{si } f(x) \geq 0 \text{ au voisinage de } a & \text{alors } 1/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \\ \text{si } f(x) \leq 0 \text{ au voisinage de } a & \text{alors } 1/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \\ \text{sinon, on ne peut rien dire} \end{cases}$$

Notation 1.2

L'unicité de la limite vue dans la propriété 1.1, page 19 permet d'utiliser les autres notations suivantes ($a \in [-\infty, +\infty]$, $\lambda \in [-\infty, +\infty]$) :^a

$$\begin{array}{lll} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lambda \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lambda \end{array}$$

a. Dans le cas où $a \in \{-\infty, +\infty\}$, on *n'utilise pas* les notations a^+ et a^- , car cela n'a pas de sens.

Exemple 1.4 – Limites usuelles (à connaître)

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \\ \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \\ \forall \alpha > 0, x^\alpha &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \ln(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \ln(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \\ e^x &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

牢记这些常用函数在某点处的极限。

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit f définie sur un voisinage de $+\infty$, on suppose que f admet une limite réelle en $+\infty$, montrer que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Que pensez-vous de la réciproque ?

1.4.2 Étudier les limites des fonctions suivantes :

$$\frac{x}{2 + \sin(1/x)} \quad \text{en} \quad 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{4x^4 + x^2 + x - 6} \quad \text{en} \quad 1 \quad (1.2)$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}} \quad \text{en} \quad +\infty \quad (1.3)$$

1.4.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

1.4.4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective, strictement croissante, telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

1.4.5 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donner un contre-exemple lorsque f n'est plus croissante.

1.4.6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \neq 0, g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x)}{x} = \frac{f(\frac{x}{2^n})}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{g(\frac{x}{2^k})}{2^k}$$

(b) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

1.2.2 Techniques

Nous ne parlerons ici que de limites, les résultats se généralisent facilement aux limites à gauche et à droite.

Proposition 1.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont telles que, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $a \in [-\infty, +\infty]$, f et g étant définies au voisinage de a , avec

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu$$

alors

$$\lambda \leq \mu$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, fixé, on peut trouver ^a un $\eta_1 > 0$ et un $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x) - \mu| \leq \varepsilon$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et prenons $x \in I$, tel que $|x - a| \leq \eta$, alors

$$\lambda \leq f(x) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon \leq \mu + 2\varepsilon$$

On obtient donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \lambda \leq \mu + 2\varepsilon$$

Ceci n'est possible que si

$$\lambda \leq \mu$$

a. Dans la suite du cours, nous résumerons tout cela en disant que η est *associé* à ε .

Remarque 1.14

La démonstration nous permet de voir que si l'inégalité est stricte le résultat reste *avec une inégalité large* ! Soit, si

$$\forall x \in I, f(x) < g(x), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu$$

alors

$$\lambda \leq \mu$$

On ne peut pas en général obtenir d'inégalité stricte, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x) = x^2, g(x) = x, I =]0, 1[, a = 0, \lambda = \mu = 0$$

Remarque 1.15

1. Le résultat est encore vrai lorsque $a = \pm\infty$ (seule la démonstration change un peu).
2. Le résultat est encore vrai lorsque $\mu = -\infty$ ou $\lambda = +\infty$.

Théorème 1.2 – Lemme des gendarmes

Soit f, g et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, +\infty]$, I étant un voisinage de a , $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, tels que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ et } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

alors

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

Démonstration

Nous ne traiterons que le cas $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les autres cas sont similaires.

Soit $\varepsilon > 0$ donné, η_1 associé à ε pour f et η_2 associé à ε pour h . Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et prenons $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, alors

$$g(x) - \lambda \leq h(x) - \lambda \leq \varepsilon \text{ et } \lambda - g(x) \leq \lambda - f(x) \leq \varepsilon$$

Donc, pour un tel x ,

$$|g(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

C'est la définition de

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

Exemple 1.5

On a, en utilisant les propriétés graphiques connues des fonctions concernées, par encadrement :

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 0 \\ \ln(1+x) & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 0 \\ e^x - 1 & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 0 \end{array}$$

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Montrer, par encadrement des fonctions et en utilisant les propriétés graphiques, que :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (1.4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (1.5)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (1.6)$$

1.5.2 Étudier les limites suivantes :

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \text{ en } 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \text{ en } 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ en } 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \text{ en } \frac{\pi}{2} \quad (1.10)$$

$$\frac{\tan(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{\sqrt{3} - 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})} \text{ en } 0 \quad (1.11)$$

1.5.3 Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$ tels que :

$$g \text{ est bornée sur } I \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

montrer que

$$(f \times g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

1.5.4 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante.

(a) Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

(b) Montrer que :

$$\lambda \in \mathbb{R} \iff f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+$$

Plus généralement, toute fonction croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) admet une limite.

1.5.5 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone, où $I =]\alpha, \beta[$.

(a) Montrer qu'en tout point $a \in I$, f admet une limite à gauche et une limite à droite.

(b) Montrer que

$$\left\{ a \in I, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right\} \text{ est dénombrable}$$

1.3 Continuité

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.4 – Fonction continue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

— Soit $a \in I$, on dit que f est *continue en a* si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

Si f n'est pas continue en a , on dit que f est *discontinue en a* .

— On dit que f est *continue sur I* si elle est continue en tout point de I .

深刻理解函数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 $a \in I$ 处连续 (包括左连续、右连续), 以及函数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在其定义区间 I 上连续的定义。明确函数在其定义区间 I 上连续的概念是以该函数在一点 $a \in I$ 处连续为基础给出的。

Propriété 1.6

Une fonction est continue en a si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Propriété 1.7

Une fonction est continue sur I si, et seulement si

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Proposition 1.5

Si f est continue en a et $f(a) > 0$, alors il existe un voisinage de a où f ne prend que des valeurs strictement positives. (On peut énoncer une propriété semblable lorsque $f(a) < 0$).

Exemple 1.6

1. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue en tout point de \mathbb{Z} .
2. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^{1/3}$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 1.6

Soit f et $g : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit a dans I .

1. *Si f et g sont continues en a , alors $f + g$ est continue en a .*
2. *Si f est continue en a et si $k \in \mathbb{R}$, alors $k.f$ est continue en a .*
3. *Si f et g sont continues en a , alors $f \times g$ est continue en a .*

4. Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors f/g est continue en a .
5. Si f est continue en a et si h est une fonction définie au voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ est continue en a .

Proposition 1.7

De même, si f et g sont définies, continues sur I et si h est définie, continue sur $J \supset f(I)$, alors

1. $f + g$ est continue sur I .
2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k.f$ est continue sur I .
3. $f \times g$ est continue sur I .
4. Si g ne s'annule pas sur I , alors f/g est continue sur I .
5. $h \circ f$ est continue sur I .

Remarque importante 1.16

Les *fonctions polynomiales*^a sont continues sur \mathbb{R} .

a. De la forme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \times x^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Remarque importante 1.17

Les *fonctions rationnelles* (quotient de deux fonctions polynomiales, celle du dénominateur étant non nulle) sont continues sur leur ensemble de définition.^a

a. Qui sera souvent une réunion de plusieurs intervalles sur chacun desquels la fonction sera continue.

Exemple 1.7

1. Les fonctions suivantes sont continues :

$$x \mapsto \sin(x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \ln(x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto e^x \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}$$

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on peut définir une *fonction puissance* sur \mathbb{R}_+^* de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\alpha \times \ln(x))$$

Lorsque $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}^*$, où q est impair, on peut définir cette fonction sur \mathbb{R}^* . Lorsque $p/q \in \mathbb{Q}_+^*$, on peut définir cette fonction sur \mathbb{R}_+ . Dans tous les cas, elle est continue sur les intervalles composant son domaine de définition.

Définition 1.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que :

— f est *continue à gauche en a* , si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$$

— f est *continue à droite en a* , si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$$

— Soit f définie, continue sur un intervalle de type $]a, b]$ et vérifiant :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda \in \mathbb{R}$$

on peut alors définir la fonction \tilde{f} sur $[a, b]$ par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b] \\ \lambda & \text{si } x = a \end{cases}$$

Le fonction \tilde{f} est alors continue sur $[a, b]$ et s'appelle le *prolongement par continuité* de f .

Exemple 1.8

La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue à droite en tout point de \mathbb{Z} .

注释 1.2

1. 基本初等函数：

- (a) 常量函数 $y = \text{常数}$
- (b) 幂函数 $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- (c) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
- (d) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
- (e) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$
- (f) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, (见定义1.6)

已知的基本函数中：常量函数，三角函数，反三角函数，以及有理指数幂函数都是定义域上的连续函数。

指数函数和对数函数的连续性：

2. 初等函数：

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数。

注释 1.3

初等函数的连续性

- 1. 一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数。

2. Any elementary function is continuous on its domain.

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Étudier la continuité de

(a) $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(b) $g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(c) $h(x) = |x - \lfloor x + 1/2 \rfloor|$.

1.6.2 Si f et g sont continues sur I , montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont. *Ne pas utiliser la définition de la continuité, mais les propriétés ci-dessus !*

1.6.3 La fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a-t-elle des points de continuité ? Si oui, préciser lesquels.

1.6.4 Montrer que chacun des énoncés suivants est faux, en donnant un exemple de fonction f ne le vérifiant pas. I est un intervalle de \mathbb{R} inclus dans le domaine de définition de f . Un dessin peut suffire.

(a) Si $I = [a, b]$ et f croissante sur I , alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.

(b) Si $I = [a, b]$ et $f(I) = [f(a), f(b)]$ alors f est continue sur I .

(c) Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I .

(d) Si f est strictement monotone sur I , alors $f(I)$ est un intervalle.

(e) Si f est injective sur I , et $f(I) = I$, alors $\exists x \in I, f(x) = x$.

1.6.5 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ croissante sur \mathbb{R}_+^* telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+^* .

1.3.2 Quelques résultats

1.3.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.3 – Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Démonstration

Comment reconnaître un intervalle ? C'est exactement une partie K de \mathbb{R} qui vérifie :

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall t \in [0, 1], \alpha + t \times (\beta - \alpha) \in K$$

Nous allons donc montrer que $f(I)$ vérifie cette propriété.

Soit donc $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$ et $t \in [0, 1]$. On peut supposer $\alpha < \beta$. On sait qu'il existe a et b dans I tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.

Posons $\gamma = \alpha + t \times (\beta - \alpha)$ et montrons que $\gamma \in f(I)$.

- Si $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$, il n'y a rien à faire.
- Sinon, $\alpha < \gamma < \beta$ et regardons :

$$\Delta = \{\mu \in [0, 1], f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma\}$$

Puisque Δ est une partie de \mathbb{R} non vide ($0 \in \Delta$) et majorée (par 1), on sait que $\delta = \sup \Delta$ est un réel (appartenant à $[0, 1]$). Montrons que $f(a + \delta \times (b - a)) = \gamma$.

- Montrons que $f(a + \delta \times (b - a)) \leq \gamma$. Supposons par l'absurde que $f(a + \delta \times (b - a)) > \gamma$. Alors comme $\alpha < \gamma$, on a : $\delta > 0$. D'autre part, comme f est continue, la fonction $t \mapsto f(a + t \times (b - a))$ l'est aussi, donc

$$\lim_{\mu \rightarrow \delta} f(a + \mu \times (b - a)) > \gamma$$

On en déduit qu'il existe un $\eta \in]0, \delta]$ tel que

$$\forall \mu \in [\delta - \eta, \delta], f(a + \mu \times (b - a)) > \gamma$$

On en déduit que pour tout $\mu \in [\delta - \eta, \delta]$, $\mu \notin \Delta$. Comme d'autre part, pour tout $\mu \in]\delta, 1]$, $\mu \notin \Delta$, on en déduit que $\Delta \subset [0, \delta - \eta[$, donc $\delta \leq \delta - \eta$, donc $\eta \leq 0$, ce qui est absurde.

- Montrons que $f(a + \delta \times (b - a)) \geq \gamma$. Supposons par l'absurde que $f(a + \delta \times (b - a)) < \gamma$. Alors comme $\beta > \gamma$, on a : $\delta < 1$. D'autre part, comme f est continue, la fonction $t \mapsto f(a + t \times (b - a))$ l'est aussi, donc

$$\lim_{\mu \rightarrow \delta} f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma$$

On en déduit qu'il existe un $\eta \in]0, 1 - \delta]$ tel que

$$\forall \mu \in [\delta, \delta + \eta], f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma$$

En particulier, $f(a + (\delta + \eta) \times (b - a)) < \gamma$, donc $\delta + \eta \in \Delta$, donc $\delta + \eta \leq \delta$. D'où $\eta \leq 0$, ce qui est absurde.

Remarque 1.18

Le TVI assure en particulier que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I , alors pour tout $J \subset I$ intervalle de \mathbb{R} , comme $f|_J$ est une fonction continue sur un intervalle, $f|_J(J)$ est un intervalle de \mathbb{R} , c'est-à-dire $f(J)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Exemple 1.9

Il peut toutefois y avoir changement de *nature* de l'intervalle, ainsi :

f	J	$f(J)$
$x \mapsto \sin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\sin(1), \sin(1)]$
	$] -1, 1[$	$] -\sin(1), \sin(1)[$
	$[-2, 2]$	$[-1, 1]$
	$] -2, 2[$	$[-1, 1]$
$x \mapsto x^2$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
	$] -1, 1[$	$[0, 1[$

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle à valeurs dans \mathbb{R} et qui ne s'annule pas, garde un signe constant.

1.7.2 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, continue. Montrer que f admet un point fixe (ie $\exists a \in [0, 1], f(a) = a$).

1.7.3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et injective. Montrer que f est strictement monotone. Étudier la réciproque.

1.7.4 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, montrer que l'application

$$x \mapsto x^n - n \times x + 1$$

possède exactement 2 points d'annulation sur $[0, +\infty[$.

1.7.5 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

1.7.6 En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que si T est un triangle non plat du plan alors il existe un carré inscrit dans T (i.e. ses quatre sommets sont sur T). Voir la figure 1.3, page 37

1.7.7 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} + \sin(x) + 2 \cos(x)$. Donner l'allure du graphe de f et montrer qu'elle s'annule une infinité de fois.

1.7.8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, I et J deux intervalles tels que $J \subset f(I)$. Existe-t-il un intervalle K tel que $f(K) = J$? On pourra discuter suivant la nature de J .

- 1.7.9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue. On suppose que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Prouver que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou bien tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- 1.7.10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $x \mapsto \sin(f(x))$ tend vers 0 en $+\infty$. Que dire de f en $+\infty$?
- 1.7.11 Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0$$

vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans pour autant être continue.

- 1.7.12 Soit \mathcal{E} une ellipse du plan, montrer, en utilisant le TVI, que pour tout point C de \mathcal{E} , il existe un triangle équilatéral inscrit dans \mathcal{E} dont l'un des sommets est C . Proposer une construction géométrique de ces triangles. Voir la figure 1.4, page 38.
- 1.7.13 (a) Montrer que tout sous-ensemble fini de $[0, 1]$ est l'ensemble des racines d'une fonction continue à valeurs dans \mathbb{R} .
 (b) Montrer qu'il existe une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , nulle sur aucun intervalle non vide de type $]a, b[$ et qui, pourtant, a une infinité de racines.
 (c) À quelle condition un sous-ensemble de \mathbb{R} est-il l'ensemble des racines d'une fonction continue à valeurs dans \mathbb{R} ?
- 1.7.14 Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1], f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

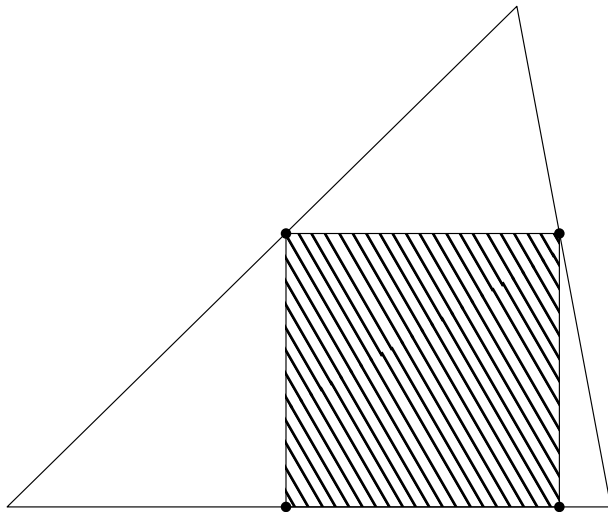
Faire les cas $n = 2$, et $n = 3$ pour commencer.

1.3.2.2 Caractère borné des fonctions continues sur un segment

Théorème 1.4 – Caractère borné des fonctions continues sur un segment

Soit f une fonction continue définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors f est bornée (ie $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a, b], \alpha \leq f(x) \leq \beta$), et les bornes inférieure et supérieure sont atteintes (on parle de minimum et de maximum) : il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que pour tout $x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Figure 1.3 – Carré inscrit dans un triangle



Remarque importante 1.19

Ce résultat devient faux si l'intervalle n'est pas un segment $x \mapsto 1/(1-x)$ sur $[0, 1[$, ou si f n'est plus continue

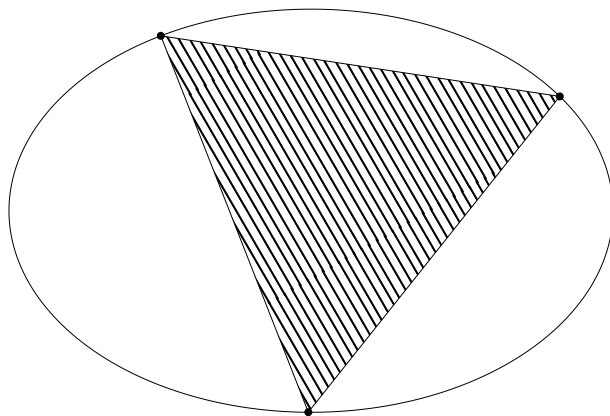
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration du théorème 1.4, page précédente

1. Montrons d'abord que f est bornée. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant, par exemple, que f n'est pas majorée.
 - L'idée simple est de regarder comment évolue le sup de la fonction sur $[a, b]$, en posant :

$$\forall \alpha \in [a, b], \varphi(\alpha) = \sup_{x \in [a, \alpha]} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Figure 1.4 – Triangle équilatéral inscrit dans une ellipse



- L'hypothèse faite nous dit que $\varphi(b) = +\infty$, regardons plus précisément le moment où le sup devient $+\infty$ en regardant :

$$\Delta = \{\alpha \in [a, b], \varphi(\alpha) = +\infty\}$$

Puisque Δ est une partie de \mathbb{R} non vide ($b \in \Delta$) et minorée (par a), on sait que $\delta = \inf \Delta$ est un réel (appartenant à $[a, b]$).

- Puisque f est continue en δ , en prenant par exemple $\varepsilon = 1$ et η associé, on a

$$\forall x \in [\delta - \eta, \delta + \eta] \cap [a, b], f(x) - f(\delta) \leq 1$$

- Finalement, f est majorée sur $[a, \delta - \eta]$ par définition de δ et f est majorée sur $[\delta - \eta, \delta + \eta] \cap [a, b]$ par la remarque précédente. Ceci contredit la définition de δ .
 - L'hypothèse faite est donc absurde. Ce qui montre le résultat.
2. Montrons maintenant que les bornes sont atteintes. On procède de même, montrons par exemple, que la borne supérieure est atteinte. Posons

$$M = \varphi(b) \text{ et } \delta = \inf \{x \in [a, b], \varphi(x) = M\}$$

La continuité de f en δ nous donne immédiatement que $f(\delta) = M$.

Remarque 1.20

Cette démonstration est intéressante car elle nous montre que la difficulté est de prendre les bons objets (ici φ et δ), ce qui ne peut se faire que si l'on a compris ce qui se passait. Pour cela, un dessin est souvent plein d'enseignement.

Remarque importante 1.21

Lorsque l'on prend des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble de réels, il faut généralement justifier que l'ensemble est non vide. Si l'on veut de plus, montrer que ce sont des maximum et minimum, il faut montrer :

1. que les bornes supérieure et inférieure sont dans \mathbb{R} ;
2. qu'elles sont atteintes.

On pourra se demander si dans la démonstration précédente, toutes ces vérifications ont bien été effectuées.

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur \mathbb{R} et admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} . Les bornes sont-elles nécessairement atteintes ?

1.8.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$$

Montrer que f admet un minimum global (ie $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(a)$).

1.8.3 Soient $0 < a < b$. Montrer l'existence et calculer

(a) Soit $r \in [a, b]$,

$$M(r) = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{r - x}{x} \right|$$

(b) Puis

$$m = \min_{r \in [a, b]} M(r)$$

1.8.4 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, montrer que la fonction φ définie par :

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t) \text{ est continue}$$

1.8.5 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, croissante, continue, bornée. Donner une CNS pour que la borne supérieure soit un maximum.

1.8.6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $T > 0$, on dit que f est T -périodique si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

Montrer qu'une fonction T -périodique continue est bornée.

1.8.7 (a) Montrer qu'il existe f définie, continue sur \mathbb{R} telle que f n'est pas bornée mais $f \circ f$ l'est.

(b) Soit f définie, continue sur \mathbb{R} telle que $f \circ f \circ f$ est bornée. Montrer que $f \circ f$ l'est aussi.

(c) Généraliser.

1.3.2.3 Continuité de la fonction réciproque

Il s'agit ici de la fonction réciproque d'une application bijective !

Théorème 1.5 – Continuité de la fonction réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, strictement monotone. Alors :

1. f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$;
2. f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Démonstration

1. La stricte monotonie de f nous en assure l'injectivité. Le TVI nous permet de dire que $f(I)$ est un intervalle. La surjectivité dans $f(I)$ est évidente.
2. Nous allons utiliser le résultat de l'exercice 1.5.5, page 28. Supposons, sans perte de généralité, que f est strictement croissante. Alors f^{-1} est strictement croissante. Soit $\alpha \in f(I)$. Supposons, sans perte de généralité, qu'il existe $\eta > 0$ tel que $[\alpha, \alpha + \eta] \subset f(I)$. Montrons que f^{-1} est continue à droite en α . Comme f^{-1} est monotone, f^{-1} admet une limite à droite en α , notée b :

$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} b$$

Montrons que $b = f^{-1}(\alpha)$. Remarquons que pour tout $x \in]\alpha, \alpha + \eta]$, on a : $f^{-1}(x) \in]f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\alpha + \eta)]$, donc en passant

à la limite quand $x \rightarrow \alpha^+$, on a : $b \in [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\alpha + \eta)]$. Comme $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}(\alpha + \eta)$ appartiennent à l'intervalle I , on en déduit que $b \in I$. Finalement, on a :

(a) pour tout $x \in]\alpha, \alpha + \eta]$, $f^{-1}(x) \in I$

(b) $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} b$,

(c) f est continue en $b \in I$.

Donc $f(f^{-1}(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} f(b)$, donc $\alpha = f(b)$, puis $b = f^{-1}(\alpha)$.

On a prouvé que

$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} f^{-1}(\alpha)$$

donc f^{-1} est continue à droite en α .

Remarque importante 1.22

Le graphe d'une fonction réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice. Voir la figure 1.5, page suivante.

Définition 1.6 – Fonctions trigonométriques réciproques

1. La fonction sin est continue strictement croissante sur $[-\pi/2, +\pi/2]$, elle admet donc une réciproque appelée *fonction arcsinus* et notée :

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto \arcsin(x) = y \end{cases} \quad \text{tel que } \sin(y) = x \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

Son graphe est donnée à la figure 1.6, page 43

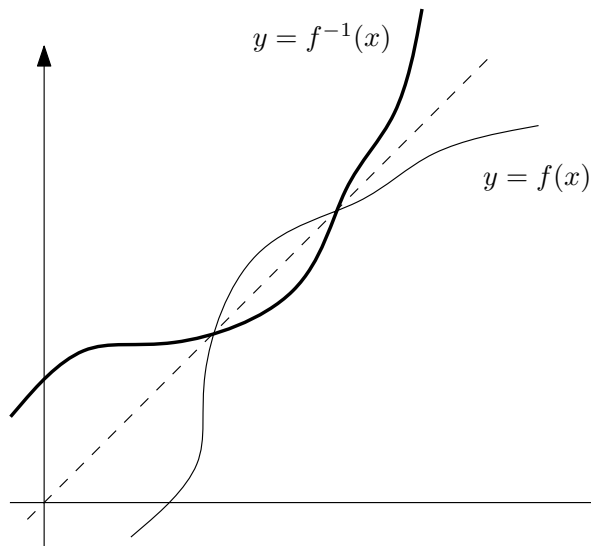
2. La fonction cos est continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$, elle admet donc une réciproque appelée *fonction arccosinus* et notée :

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x \mapsto \arccos(x) = y \end{cases} \quad \text{tel que } \cos(y) = x \text{ et } y \in [0, \pi]$$

Son graphe est donnée à la figure 1.7, page 44

3. La fonction tan est continue strictement croissante sur $]-\pi/2, +\pi/2[$, elle admet donc une réciproque appelée *fonction*

Figure 1.5 – Graphe d'une fonction réciproque

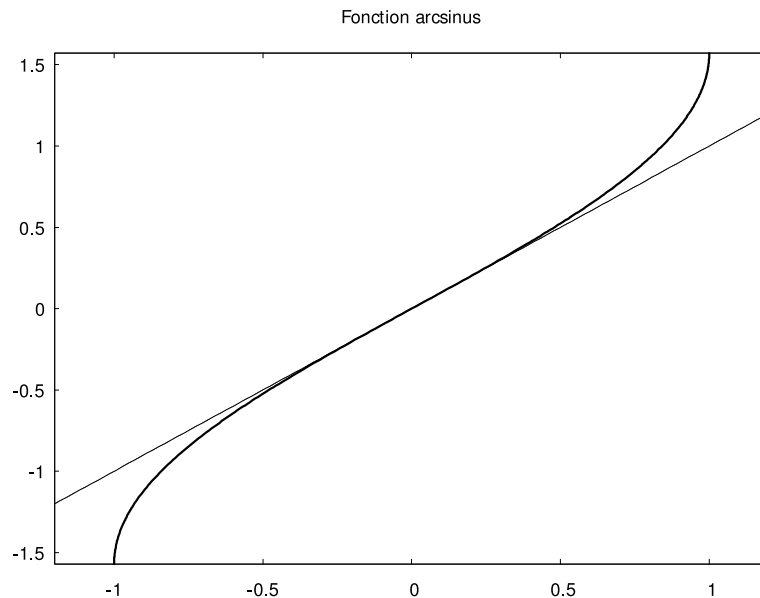


arctangente et notée :

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan(x) = y \quad \text{tel que } \tan(y) = x \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Son graphe est donnée à la figure 1.8, page 45

Figure 1.6 – Fonction arcsin



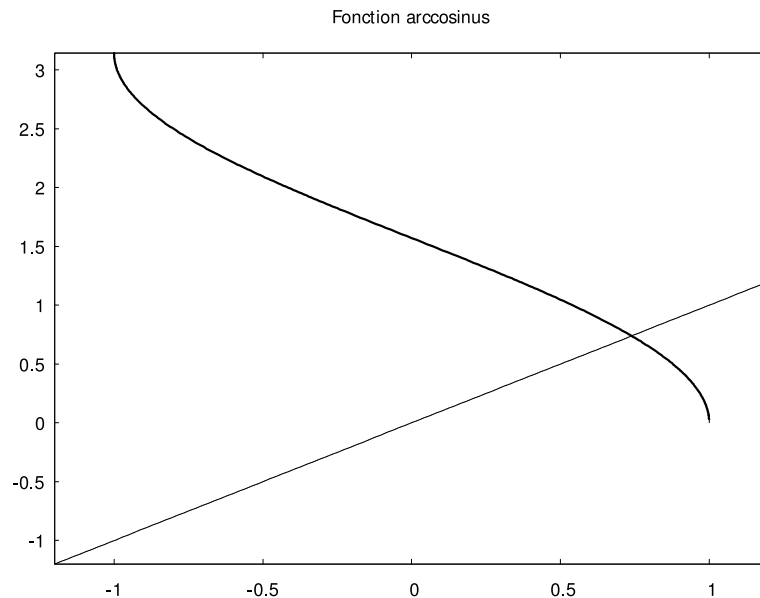
注释 1.4

掌握连续的局部有界性(Propriete 1.6), 局部保号性(Propriete 1.5), 四则运算以及复合函数的连续性(Propriete 1.6 和 Propriete 1.7), 能在各种计算证明中正确运用这些性质。

注释 1.5

熟练掌握闭区间上连续函数的性质：中值定理(Théorème 1.3); 有界性定理(Theoreme 1.4); 反函数连续性定理(Theoreme 1.5)

Figure 1.7 – Fonction arccos



Exercice(s) 1.9

1.9.1 Résoudre $\arccos(x) + \arccos(2x) = 2$.

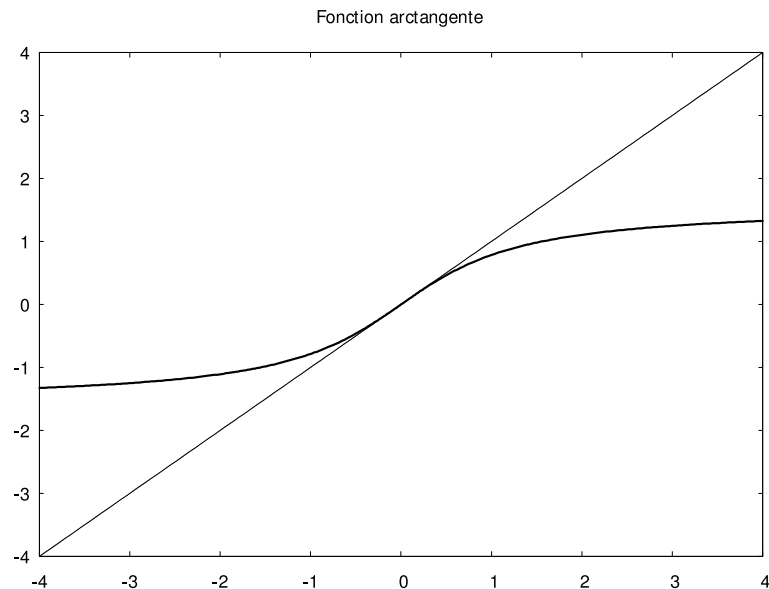
1.9.2 Calculer

$$\forall x \neq 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.9.3 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $x \times y \neq 1$, comparer

$$\arctan(x) + \arctan(y) \text{ et } \arctan\left(\frac{x+y}{1-x \times y}\right)$$

Figure 1.8 – Fonction arctan



1.9.4 Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$$

1.9.5 Résoudre

$$\arctan(x-3) + \arctan(x-2) + \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = 0$$

1.9.6 Que valent, en fonction de x et d'une partie entière d'une fonction de x , les expressions suivantes (on précisera aussi les domaines de définition des fonctions concernées) ?

- $\sin(\arcsin(x))$ et $\arcsin(\sin(x))$.
- $\cos(\arccos(x))$ et $\arccos(\cos(x))$.
- $\tan(\arctan(x))$ et $\arctan(\tan(x))$.

1.9.7 Résoudre dans \mathbb{R}^2 l'équation :

$$x + y = \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y))$$

1.9.8 Résoudre

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1.9.9 Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Cette formule est appelée formule de Machin. Quel est son intérêt par rapport à la relation $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$?

1.4 Dérivabilité

注释 1.6

导数的思想最早是由法国数学家Fermat(费马)在研究极值问题时提出的，它是一个描述函数变化快慢的量。

1.4.1 Définition

Notation 1.3 – Notation de Landau (petit o)

On utilisera souvent les notations suivantes, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_o \in \bar{I}$ (si I n'est pas bornée, alors x_o peut être dans $\{-\infty, +\infty\}$), $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, telle qu'il existe un voisinage V de x_o tel que :

$$\forall x \in V \setminus \{x_o\}, g(x) \neq 0$$

Alors

$$f(x) = o_{x_o}(g(x)) \text{ signifie } \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_o} 0$$

Notation 1.4 – Notation de Landau (grand o)

$f(x) = O_{x_0}(g(x))$ signifie $\frac{f(x)}{g(x)}$ borné au voisinage de x_0

Remarque 1.23

Comme x_0 vaut souvent 0, on écrit souvent $o(g(x))$ et $O(g(x))$ au lieu de $o_0(g(x))$ et $O_0(g(x))$.

Remarque 1.24

Clairement, si $f(x) = o_{x_0}(g(x))$, alors $f(x) = O_{x_0}(g(x))$. On a de plus,

$$o_{x_0}(o_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x)), \quad O_{x_0}(o_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x)), \quad o_{x_0}(O_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x))$$

et

$$O_{x_0}(O_{x_0}(g(x))) = O_{x_0}(g(x))$$

函数的高阶无穷小量 (Notation 1.3)和同阶无穷小量 (Notation 1.4)是对两个函数收敛快慢的比较。

Définition 1.7 – Fonction dérivable en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, on dit que f est *dérivable en x_0* si, la fonction *taux d'accroissement en x_0* définie par :

$$\tau_{x_0} : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

admet une limite finie λ lorsque x tend vers x_0 . λ s'appelle alors *le nombre dérivé de f en x_0* .

函数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 $x_0 \in I$ 处的导数(Définition 1.7)是该函数在 x_0 处关于 x 的变化率。

Exemple 1.10

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* , mais n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

1. *Dérivabilité en tout point de \mathbb{R}^** Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, alors, pour x assez proche de x_0 et $x \neq x_0$, x est du même signe que x_0 (quelle propriété de la fonction utilise-t-on ?). Donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 & \text{si } x_0 > 0 \\ \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On trouve un nombre dérivé égal à 1 pour les $x_0 > 0$ et à -1 pour les $x_0 < 0$.

2. *Non dérivabilité en 0* On a, pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de limite quand x tend vers 0.

注释 1.7

函数可导必连续，但函数连续不一定可导(见 Exemple 1.10)

Remarque importante 1.25

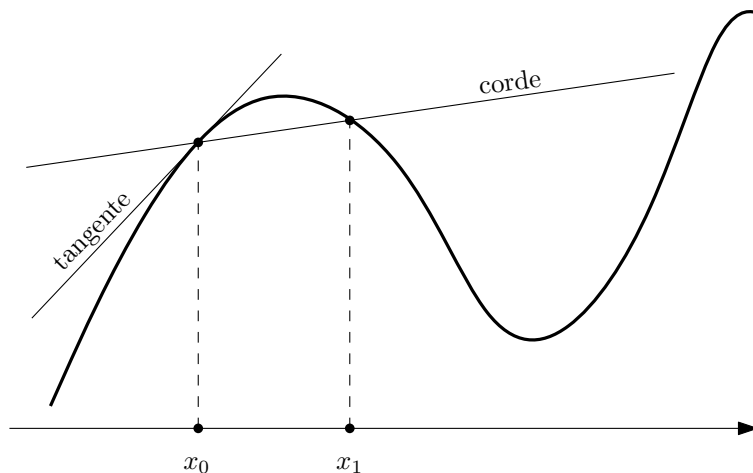
Géométriquement, le taux d'accroissement en x_0 , pris en x_1 représente la pente de la corde reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. Si f est dérivable en x_0 , alors, lorsque x_1 tend vers x_0 , cette pente a une limite λ , on dit que le graphe de la fonction f a une tangente en x_0 : c'est la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de pente λ . Son équation est :

$$y = f(x_0) + \lambda \times (x - x_0)$$

Voir la figure 1.9, page suivante.

理解函数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处导数的几何意义 : 函数 f 在一点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $(y = f(x))$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率。(见图 1.9)

Figure 1.9 – Interprétation géométrique de la dérivée



Remarque importante 1.26

On peut aussi interpréter l'existence d'un nombre dérivé en x_0 , sous la forme d'un *développement limité* :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times \lambda + o_{x_0}(x - x_0)$$

Remarque 1.27

À comparer à l'équation de la tangente en x_0 :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times \lambda$$

On travaille plus volontiers avec la relation :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)$$

où il est sous-entendu que h tend vers 0.

Remarque 1.28

Comme pour les limites, on peut facilement définir des notions de nombre dérivé à gauche et à droite...

Définition 1.8 – Fonction dérivable sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est *dérivable sur I* si

$$\forall x_0 \in I, f \text{ est dérivable en } x_0$$

La fonction définie par :

$$x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

s'appelle la (*fonction*) *dérivée de f* et se note f' .

Notation 1.5 – Dérivées à gauche et à droite

Lorsque f admet en tout point une dérivée à gauche (resp. à droite), on note f'_g (resp. f'_d) la fonction dérivée à gauche (resp. à droite) obtenue.

Propriété 1.8

Soit f et g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
2. $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)' = k.f'$.

3. $f \times g$ est dérivable sur I et

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Démonstration

$$\begin{aligned}(f \times g)(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \times g(x_0 + h) \\&= (f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) \times (g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h)) \\&= f(x_0) \times g(x_0) + h \times (f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)) + \\&\quad \underbrace{h^2 \times f'(x_0) \times g'(x_0) + f(x_0) \times o(h) + o(h) \times g(x_0) +}_{o(h)} \\&\quad \underbrace{h \times f'(x_0) \times o(h) + o(h) \times h \times g'(x_0) + o(h) \times o(h)}_{o(h^2)}\end{aligned}$$

Propriété 1.9

Si $h : J \supset f(I) \rightarrow \mathbb{R}$, est dérivable sur J , alors $h \circ f$ est dérivable sur I et

$$(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 h \circ f(x_0 + \delta) &= h \left(f(x_0) + \underbrace{\delta \times f'(x_0) + o(\delta)}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0} \right) \\
 &= h(f(x_0)) + (\delta \times f'(x_0) + o(\delta)) \times h'(f(x_0)) \\
 &\quad + \left(\underbrace{o(\delta \times f'(x_0) + o(\delta))}_{o(\delta)} \right)
 \end{aligned}$$

注释 1.8

熟练掌握导数的四则运算(Propriété 1.8)以及复合函数的求导法则(Propriété 1.9).

Exemple 1.11

Ainsi, si f et g sont dérivables sur I , g ne s'annulant pas sur I , on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Remarque importante 1.29

La notation f' est réservée aux fonctions ! Il arrive parfois que l'on veuille dériver des expressions d'une variable x . Nous utiliserons alors la notation :

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \stackrel{\text{Not}}{=} f'(x)$$

Cette notation sera utilisée avec précaution : en effet, comment note-t-on $f'(y)$? Ou $f'(x+y)$?

注释 1.9

注意区别： f' 是函数， $f'(x_0)$ 是数值。

$$f'(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Exemple 1.12 – Dérivées usuelles

On a le tableau suivant des dérivations des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Remarque 1.30

La connaissance de ces dérivées nous permet de retrouver rapidement les limites usuelles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \frac{e^x - 1}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 1 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 1 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 1 \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 0 \\ \frac{\tan(x)}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0} & 1 \end{array}$$

Exercice(s) 1.10

- 1.10.1 À l'aide du tableau précédent, calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le domaine où la fonction est dérivable) : $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$), $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \cotan(x)$.
- 1.10.2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $x \mapsto 1/f(x)$, $x \mapsto \ln(f(x))$, $x \mapsto f(x)^\alpha$ (où $\alpha \neq 0$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable).
- 1.10.3 Calculer les dérivées (si elles existent) des fonctions (dont on aura précisé le domaine de définition, ainsi que le domaine

de dérivabilité) :

$$x \mapsto \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$x \mapsto \frac{e^x}{x}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

$$x \mapsto \cos(x) \times \left(1 + \tan(x) \times \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

$$x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$$

$$x \mapsto x^{\frac{x}{x-1}}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right)$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \times \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \times \sin \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.10.4 Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et $h = \max(f, g)$. Donner une CNS pour que h soit également dérivable.

1.10.5 Soit $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \leq g \leq h$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = h(a)$ et f et h sont dérivables en a . Montrer que g est également dérivable en a .

1.4.2 Résultats

1.4.2.1 Rolle et accroissements finis

Propriété 1.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in I$, alors :

$$f \text{ dérivable en } a \Rightarrow f \text{ continue en } a$$

La réciproque est fausse.

Démonstration

Si $f(a+h) = f(a) + h \times \lambda + o(h)$, alors et de manière immédiate $f(a+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$.

Exemple 1.13

1. On a vu que la fonction $x \mapsto |x|$ était continue, mais pas dérivable en 0. Voir l'exemple 1.10, page 48.
2. Il peut y avoir des exemples plus compliqués :

$$x \mapsto \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur tout \mathbb{R} (en particulier en 0) et n'est pas dérivable en 0. Voir la figure 1.10, page 76.

Remarque 1.31

Il est donc naturel de se concentrer sur les fonctions dérivables (donc continues) de fonction dérivée continue. Une telle fonction sera dite *de classe \mathcal{C}^1* .

Théorème 1.6 – Théorème de Rolle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, soit $(a, b) \in I^2$, tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Démonstration

Voir la figure 1.11, page 77.

1. Soit f est constante entre a et b , en ce cas, tout c de $]a, b[$ convient.
2. Si f n'est pas constante sur $]a, b[$, alors, comme f est continue, elle possède un minimum m et un maximum M et au moins l'un des deux est différent de $f(a)$ et donc de $f(b)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $M > f(a)$. M est atteint en une valeur $c \in]a, b[$, et, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq M$.
3. Donc :

$$\forall x \in]a, c[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ donc } f'(c) \geq 0$$

et

$$\forall x \in]c, b[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ donc } f'(c) \leq 0$$

finalement $f'(c) = 0$.

注释 1.10

罗尔定理的几何意义：在每一点都可导的一段连续曲线上，如果曲线的两端点高度相同，则至少存在一条水平切线(见 Figure 1.11)

Théorème 1.7 – Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, soit $(a, b) \in I^2$, tels que $a < b$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$$

注释 1.11

Théorème des accroissements finis 的几何意义：函数 f 在点 $(c, f(c))$ 的切线平行于连接曲线在区间两端点的直线。

Remarque importante 1.32

Comme on le voit sur la figure 1.12, page 78, le c n'est pas unique. Il est d'ailleurs, en général, difficile d'obtenir des informations précises sur le c . La seule information disponible est $a < c < b$.

Propriété 1.11

Si f est dérivable sur I , alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (ie $f'(I)$ est un intervalle). Attention ! f' n'est pas nécessairement continue !

Démonstration

Soit $(\alpha, \beta) \in f'(I)^2$ ($\alpha < \beta$). On sait que

$$\exists(c, d) \in I^2, f'(c) = \alpha \text{ et } f'(d) = \beta$$

En ce cas, la fonction taux d'accroissement prolongée, définie par :

$$\tilde{\tau}_c(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c \end{cases}$$

est continue sur I , en particulier d'après le TVI, $\tilde{\tau}_c(I) \supset [\min(\tilde{\tau}_c(c), \tilde{\tau}_c(d)), \max(\tilde{\tau}_c(c), \tilde{\tau}_c(d))]$, donc

$$\tilde{\tau}_c(I) \supset \left[\min \left(\alpha, \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right), \max \left(\alpha, \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right) \right]$$

De même, $\tilde{\tau}_d(I) \supset [\min(\tilde{\tau}_d(d), \tilde{\tau}_d(c)), \max(\tilde{\tau}_d(d), \tilde{\tau}_d(c))]$, donc

$$\tilde{\tau}_d(I) \supset \left[\min \left(\beta, \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right), \max \left(\beta, \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right) \right]$$

Donc

$$\tilde{\tau}_c(I) \cup \tilde{\tau}_d(I) \supset [\alpha, \beta]$$

Finalement, soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$, il s'écrit sous la forme d'un

$$\tilde{\tau}_c \text{ ou } d(x), x \in]\min(c, d), \max(c, d)[$$

le TAF permet alors d'écrire γ sous la forme d'un $f'(e)$, $e \in]\min(c, d), \max(c, d)[$.

注释 1.12

理解并掌握 Théorème des accroissements finis 及应用。特别注意，当 $f(a) = f(b)$ 时，Théorème de Rolle 和 Théorème des accroissements finis 的结论是一样的。这表明 Théorème de Rolle 是 Théorème des accroissements finis 的一个特殊情况。

Exercice(s) 1.11

1.11.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I . Montrer que :

$$f \text{ est constante} \iff \left(\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0 \right)$$

Que peut-on dire si f est définie sur une réunion d'intervalles disjoints ?

1.11.2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I . Montrer que :

$$\begin{aligned} f' \geq 0 &\iff f \text{ croissante} \\ f' \leq 0 &\iff f \text{ décroissante} \\ f' > 0 &\implies f \text{ strictement croissante} \\ f' < 0 &\implies f \text{ strictement décroissante} \end{aligned}$$

Donner des contre-exemples aux réciproques des deux dernières implications.

1.11.3 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

1.11.4 Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que, de plus

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$$

Montrer que

$$\exists c \in]a, +\infty[, f'(c) = 0$$

1.11.5 Soit f dérivable sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $l \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = l \right) \Rightarrow (\exists c \in]a, b[) \quad f'(c) = 0$$

1.11.6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique, dérivable sur \mathbb{R} . On suppose que f s'annule en au moins n points distincts de $[0, 1[$. Montrer qu'il en est de même pour f' .

1.11.7 Soit f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($a < b$), dérivables, telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que

$$g(b) \neq g(a) \text{ et } \exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

1.11.8 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($a < b$), dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$. Montrer que $f'(a) \geq 0$ et $f'(b) \leq 0$.

1.11.9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

Étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Généraliser.

1.11.10 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

$$(a) \text{ Si } 0 < a < b \text{ alors } a < \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} < b,$$

$$\text{en déduire que pour } 0 < x < 1 \text{ ou } x > 1 \text{ on a : } 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

$$(b) \text{ Si } 0 < a < b \text{ alors } \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leq \frac{b-a}{3}.$$

$$(c) \text{ Si } 0 < x < 1 \text{ alors } \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(d) \text{ Si } x > 0 \text{ alors } \arctan x > \frac{x}{1+x^2}.$$

1.11.11 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule.

1.4.2.2 Dérivabilité des fonctions réciproques

Proposition 1.8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall a \in I, f'(a) \neq 0$$

Alors f est strictement monotone et f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration

1. La dérivée garde un signe constant, sinon elle s'annulerait d'après le TVI.^a Donc, f est bien strictement monotone ; sa réciproque est bien définie.
2. Pour voir si f^{-1} est dérivable, il suffit de regarder l'existence de limites des taux d'accroissement. Soit $\alpha \in f(I)$, $\alpha = f(a)$, soit $y \in f(I) \setminus \{\alpha\}$, $y = f(x)$, alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha)}{y - \alpha} = \frac{x - a}{y - \alpha} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow \alpha} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(\alpha)}$$

car, lorsque $y \rightarrow \alpha$, $x \rightarrow a$ par continuité de f^{-1} .

^a Même si la fonction n'était que dérivable, comme une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, le résultat serait toujours valide. Le résultat cependant changerait, car f^{-1} serait seulement dérivable...

Remarque 1.33

Géométriquement, ce résultat est évident : $f'(a) = \tan(\theta)$ est la pente de la tangente au graphe de f en a . Donc, comme le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice, la pente en $f(a)$ au graphe de f^{-1} sera $\tan(\pi/2 - \theta) = 1/\tan(\theta)$.

Remarque 1.34

Si $f'(a) = 0$, clairement le graphe de f^{-1} aura une tangente verticale en $f(a)$ (en supposant que f^{-1} existe toujours). Regarder le graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+ .

Propriété 1.12

On obtient donc les propriétés sur les fonctions usuelles suivantes ^a :

$f(x)$	Dom. déf.	Dom. dér.	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$] - 1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$] - 1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$

^a. Dom. déf. = Domaine de définition et Dom. dér. = Domaine de dérivabilité.

Exemple 1.14

On retrouve les propriétés respectives de l'exponentielle et du logarithme :

1. Si on sait que :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

alors la proposition 1.8, page précédente nous permet d'obtenir immédiatement que :

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

2. Si, au contraire, on sait que :

$$\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

la proposition 1.8, page 61 nous permet d'obtenir immédiatement que :

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$$

Exercice(s) 1.12

1.12.1 Dérivabilité et calculs des dérivées de

$$x \mapsto \arcsin \left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \right) - \frac{x}{2}$$

$$x \mapsto \arcsin \left(\frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$x \mapsto \arcsin(2x \times \sqrt{1 - x^2})$$

$$x \mapsto 2 \arctan \left(\sqrt{1 + x^2} - x \right) + \arctan(x)$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1 - \arcsin(x)}{1 + \arcsin(x)}}$$

$$x \mapsto \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{2} + x} \right) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{2} - x} \right)$$

1.12.2 Étudier le signe de la dérivée de $f(x)$ où

$$f : x \mapsto \arctan \left(\frac{x \times \sin(\theta)}{1 - x \times \cos(\theta)} \right)$$

$$\theta \in \mathbb{R}.$$

1.12.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) - x \times \sqrt{1 - x^2}$.

- (a) Domaine de définition, continuité. Montrer que pour $x \in [0, 1[$, $f'(x)$ existe et le calculer.
- (b) Étudier la dérivabilité de f en 1.
- (c) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur J à préciser.
- (d) g est l'application réciproque. Montrer que g est dérivable sur $]0, \pi/2[$ au moins et préciser g' (en fonction de g).
Étude aux bords. . .

1.12.4 Faire le graphe de $f(x) = \arccos(2 \sin(\frac{x}{2}))$.

1.12.5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

- (a) Montrer que f est monotone.
- (b) Montrer que f est bijective.
- (c) f^{-1} est-elle continue ? dérivable ? de classe \mathcal{C}^1 ?

1.4.2.3 Prolongement \mathcal{C}^1

Théorème 1.8 – Prolongement \mathcal{C}^1

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \lambda$$

alors

1. f admet une limite en b^- , notée l ;
2. la fonction \tilde{f} définie sur $[a, b]$ par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ l & \text{si } x = b \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\tilde{f}'(b) = \lambda$.

Démonstration

1. f' étant continue sur $[a, b[$ et admettant une limite en b^- , elle est bornée. Donc,

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a, b[, m \leq f'(x) \leq M$$

La fonction g , définie sur $[a, b[$ par $g(x) = f(x) - m \times x$, est donc dérivable à dérivée positive, donc est croissante.

De plus, le TAF nous permet d'obtenir :

$$\forall x \in [a, b[, \exists c_x \in]a, x[, g(x) - g(a) = (x - a) \times g'(c_x)$$

donc

$$g(x) \leq g(a) + (b - a) \times (M - m)$$

La fonction g est croissante, majorée sur $[a, b[$, elle admet donc une limite en b^- (voir l'exercice 1.5.4, page 27). Comme sur $[a, b[$ on a $f(x) = g(x) + m \times x$, on en déduit que f admet une limite en b^- .

2. \tilde{f} est donc bien définie et est continue sur $[a, b]$. Par ailleurs, \tilde{f} est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Il reste à montrer que \tilde{f} est dérivable en b puis que \tilde{f}' est continue en b .

Dérivabilité en b . Soit $x \in [a, b]$. Comme \tilde{f} est continue sur $[x, b]$ et dérivable sur $]x, b]$, le TAF nous donne :

$$\exists d_x \in]x, b[, \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{x - b} = f'(d_x)$$

De plus, $x < d_x < b$, donc lorsque x tend vers b^- , d_x tend vers b^- ! Donc, $f'(d_x)$ tend vers λ .

Continuité de \tilde{f}' en b . Tout simplement parce que l'on a prolongé f' par continuité en b .

Remarque 1.35

L'hypothèse dérivable serait suffisante, car f' ayant une limite en b^- resterait bornée au voisinage de b^- .

Remarque 1.36

Bien sûr, on a le même type de résultat sur $]a, b]$.

Remarque importante 1.37

Géométriquement, cela se traduit par une autre définition de la (pente de la) tangente, comme limite des (pentes des) tangentes avoisinantes. Voir la figure 1.13, page 79.

Exercice(s) 1.13

1.13.1 Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et que sa dérivée en 0 vaut 0. Voir la figure 1.14, page 79.

1.13.2 Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et que sa dérivée en 0 vaut 0. Voir la figure 1.15, page 80.

1.13.3 Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de

$$f(x) = \sqrt{x} \times \ln x \text{ et } g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

1.13.4 Soit

$$f(x) = x + 2x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0$$

Prolonger f par continuité en 0, montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(0) > 0$, mais que f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

1.13.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\cos(\omega \times x) - \cos(x)}{1 - \omega^2}$$

1.4.2.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 1.9 – Fonction de classe \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞

1. Si f est de classe \mathcal{C}^1 et si f' est dérivable, on dit que f est *deux fois dérivable*. On note f'' la dérivée seconde de f (la dérivée de f'). Si, de plus, f'' est continue, on dit que f est *de classe \mathcal{C}^2* .
2. De manière itérative, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on dit que f est *n fois dérivable* (resp. *de classe \mathcal{C}^n*) si f est de classe \mathcal{C}^{n-1} et si la dérivée $(n-1)$ -ième, notée $f^{(n-1)}$, est dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^1). On note $f^{(n)}$ sa dérivée n -ième.
3. On dit que f est *de classe \mathcal{C}^∞* si f est de classe \mathcal{C}^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Par extension, on dit que f est *de classe \mathcal{C}^0* lorsque f est continue.

熟练掌握 \mathcal{C}^1 类函数, \mathcal{C}^n ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) 类函数以及 \mathcal{C}^∞ 类函数的定义。

Exemple 1.15

1. Les fonctions usuelles (données par leur expression en x) suivantes sont de classe \mathcal{C}^∞ sur le domaine de dérivation donné.

$$\begin{array}{lll}
 \frac{1}{x} & \text{sur} & \mathbb{R}^* \\
 e^x, \sin(x), \cos(x), \arctan(x) & \text{sur} & \mathbb{R} \\
 \ln(x) & \text{sur} & \mathbb{R}_+^* \\
 \tan(x) & \text{sur} & \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \arcsin(x), \arccos(x) & \text{sur} &]-1, 1[
 \end{array}$$

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et $\mathcal{C}^{[\alpha]}$ sur \mathbb{R}_+ . Si $n \leq [\alpha]$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - n + 1) \times x^{\alpha - n}$$

Propriété 1.13

On a les propriétés immédiates suivantes, si f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} , si $k \in \mathbb{R}$ et si h est de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle $J \supset f(I)$, alors

1. $f + g$ est de classe \mathcal{C}^n .
2. $k.f$ est de classe \mathcal{C}^n .
3. $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^n .
4. $h \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n .

理解并掌握 \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) 类函数经过加、减、乘以及复合运算后仍得到一 \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) 类函数这一性质, 并可熟练运用该性质计算函数的高阶导数。

Théorème 1.9 – Formule de Leibniz

Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^n , alors

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

où $f^{(0)}$ désigne f , $f^{(1)}$ désigne f' et $f^{(2)}$ désigne f'' .

Démonstration

Immédiat, par récurrence sur n .

Exercice(s) 1.14

1.14.1 Montrer que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} (dans le cours Mathématiques VI (Séries entières), nous montrerons que cette fonction des de classe \mathcal{C}^∞).

1.14.2 Montrer que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

1.14.3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $x \mapsto x \times e^x$.

(a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ et strictement monotone.

(b) Montrer que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ .

(c) Plus généralement, que peut-on dire de la réciproque d'une fonction \mathcal{C}^∞ ?

1.14.4 Calculer les dérivées n -ième des fonctions suivantes (données par leur expression en x) :

$$x \mapsto \sin^3 x$$

$$x \mapsto e^x \times \sin x$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$x \mapsto \ln(x^2 - x + 2)$$

$$x \mapsto x^n \times e^{-x}$$

$$x \mapsto x^{n-1} \times \ln(x)$$

1.14.5 Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que pour $t > 0$

$$\left[t \mapsto t^{n-1} \times f\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{(n)} = \left[t \mapsto (-1)^n \times t^{-n-1} \times f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

1.14.6 On pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Montrer que la dérivée n -ième est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré n ayant n racines réelles distinctes et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (1 + x^2) \times P'_n(x) - (2n + 1) \times x \times P_n(x)$$

1.14.7 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in]a, b[, f(x) = \frac{1}{2} (x - a) \times (x - b) \times f''(c_x)$$

1.14.8 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n . On suppose de plus qu'il existe $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$, tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, f(x_k) = 0$$

(a) Montrer que

$$\exists c \in]a, b[, f^{(n-1)}(c) = 0$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in]a, b[, f(x) = \frac{1}{n!} \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \right) \times f^{(n)}(c_x)$$

1.14.9 Soit f deux fois dérivable sur I à valeurs réelles, a, b, c sont trois points distincts de I . Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b) \times (a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c) \times (b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b) \times (c-a)} = \frac{1}{2} \times f''(d)$$

1.14.10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f'' s'annule exactement n fois. Quel est le nombre maximal de points d'intersections entre le graphe de f et une droite ?

1.14.11 Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ , valant 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et 0 en dehors du segment $[-1, 1]$.

1.14.12 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^2 telle que f'' est bornée et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \alpha \times f(x) \leq f''(x)$$

(a) Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

(b) Montrer que f et f' ont une limite nulle en $+\infty$

1.14.13 Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ a \times x^2 + b \times x + c & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer une CNS sur a, b, c pour que f soit de classe \mathcal{C}^2 (et de classe \mathcal{C}^3 ?).

1.14.14 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable 3 fois sur $[0, 1]$, telle que

$$f(0) = -1, f'(0) = 1 \text{ et } f''(0) = 1$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, f''(x) > 0 \Rightarrow \exists ! x_0 \in]0, 1[, f(x_0) = 0$$

(b) Si de plus on suppose

$$\forall x \in]0, 1[, f''(x) < 2$$

donner une minoration de x_0 .

(c) Si de plus on suppose

$$\forall x \in]0, 1[, f^{(3)}(x) > 0$$

donner une majoration de x_0 .

1.14.15 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 , telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$$

1.14.16 Démontrer que $x \mapsto x^n + p \times x + q$, (p et q réels) ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair, et plus de trois racines réelles si n est impair.

1.4.2.5 Extrémums

Rappel 1.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} et $\alpha \in I$, on dit que :

— f admet un maximum (local) α si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\cap I, f(x) \leq f(\alpha)$$

— f admet un maximum global α si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(\alpha)$$

— f admet un minimum (local) α si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\cap I, f(x) \geq f(\alpha)$$

— f admet un minimum global α si :

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(\alpha)$$

— f admet un extrémum (local ou global) α si f admet un maximum ou un minimum (local ou global) en α .

理解并掌握函数的(局部或全局)极大值(maximum local 或 maximum global)、极小值(minimum local 或 minimum global)、极值(extrémum local 或 extrémum global)的定义。

Proposition 1.9

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a, +\infty]$), une fonction dérivable admettant un extrémum (local) $\alpha \in]a, b[$, alors $f'(\alpha) = 0$. Si, de plus, f est de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$\alpha \text{ est un minimum (local)} \Rightarrow f''(\alpha) \geq 0$$

$$\alpha \text{ est un maximum (local)} \Rightarrow f''(\alpha) \leq 0$$

$$f''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \text{ est un minimum (local)}$$

$$f''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \text{ est un maximum (local)}$$

$$f''(\alpha) = 0 \quad \text{tout peut arriver (rien/maximum/minimum).}$$

极值的必要条件：可导函数在极值点处的一阶导数为零。

极值的充分条件：若 $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$, 则

1. $f''(\alpha) < 0$, $f(\alpha)$ 为局部极大值.
2. $f''(\alpha) > 0$, $f(\alpha)$ 为局部极小值.

Démonstration

1. $f'(\alpha) = 0$ a été vu lors de la démonstration du théorème de Rolle (théorème 1.6, page 57).

2. Si α est un minimum, alors

$$\forall x \in]a, b[, f(x) \geq f(\alpha)$$

Si $f''(\alpha) < 0$, alors, comme f'' est continue, f'' reste < 0 au voisinage de α (notons-le $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset]a, b[$, où $\eta > 0$), donc f' est décroissante sur $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$, en particulier

$$\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha], f'(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in [\alpha, \alpha + \eta[, f'(x) \leq 0$$

Mais, comme α est un minimum :

$$\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha, \alpha + \eta[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (voir le théorème 1.7, page 57), on obtient :

$$\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, f(x) = f(\alpha), \text{ donc } f''(\alpha) = 0$$

Ceci contredit l'hypothèse initiale.

3. Si α est un maximum, la démonstration est identique.
4. Si $f''(\alpha) > 0$, alors f' est strictement croissante au voisinage de α , donc f' est négative sur $]\alpha - \eta, \alpha[$ et positive sur $]\alpha, \alpha + \eta[$, on a donc le graphe suivant au voisinage de α de la figure 1.16, page 81. Il est alors facile de conclure que c'est un minimum (local).
5. *Idem* pour le maximum (local).
6. La fonction $f : x \mapsto x^4$ a un minimum en 0 et $f'(0) = f''(0) = 0$.
La fonction $f : x \mapsto -x^4$ a un maximum en 0 et $f'(0) = f''(0) = 0$.
La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'a pas d'extrémum en 0 et $f'(0) = f''(0) = 0$.

Remarque importante 1.38

Si l'intervalle de définition de f n'est plus de la forme $]a, b[$, alors il peut y avoir des extrémums aux bornes ! Ainsi, la fonction

$$f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

a un minimum (global) en 0 et deux maximums (globaux) en ± 1 .

Dans la pratique, pour trouver un extrémum d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment dérivable, on suit les étapes suivantes :

1. On cherche les points d'annulation de f' dans $\overset{\circ}{I}$.
2. On regarde en ces points les valeurs de f'' (on espère qu'aucun point n'est dans le cas $f''(\alpha) = 0$).
3. Pour les points vérifiant $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$, on se débrouille comme on peut...
4. On compare avec les valeurs aux bornes éventuelles (dans $I \setminus \overset{\circ}{I}$).

Les points d'annulation de f' : 驻点、静止点、停留点。

注释 1.13

求极值的方法(求全局极值是最优化方法的目的)

1. 在 I 内找出所有一阶导数为零的点 (即驻点)
2. 求驻点处的二阶导数 f'' , $\begin{cases} f''(\alpha) > 0 & \text{局部最小值} \\ f''(\alpha) < 0 & \text{局部最大值} \end{cases}$
3. 对于 $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ 的点, 我们将在M122中继续研究。
4. 比较边界点($I \setminus \overset{\circ}{I}$)处的值。

Exercice(s) 1.15

1.15.1 Déterminer les extrémums sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto x^4 - x^3 + 1$.

1.15.2 Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable de maximums et une infinité dénombrable de minimums. Quels sont ses extrémums globaux ?

1.15.3 Soit f de classe \mathcal{C}^2 , définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f''(x) \geq f(x) \text{ et } f(0) = f(1) = 0$$

Montrer que f est négative.

1.15.4 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + t \times y}{1 + t^2} \right|$$

1.15.5 Soit $\lambda \in [1, +\infty[$, étudier le comportement lorsque λ tend vers $+\infty$ de :

$$\begin{aligned} \sup_x \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{\lambda} \right)^\lambda \right) & \quad \text{pour } x \in [-1, 0] \\ \sup_x \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{\lambda} \right)^\lambda \right) & \quad \text{pour } x \in [-\lambda, 0] \end{aligned}$$

Figure 1.10 – Une fonction continue, mais pas dérivable

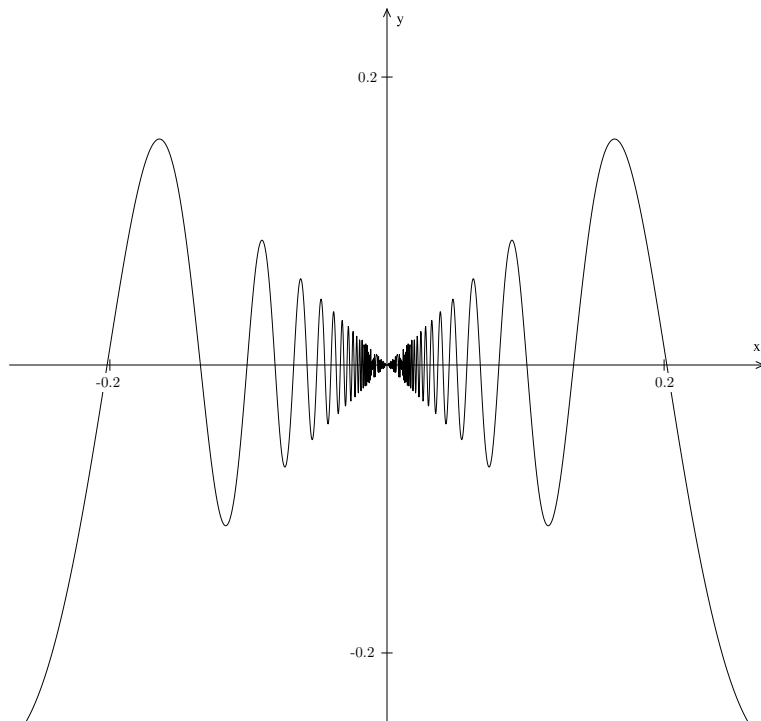


Figure 1.11 – Illustration du théorème de Rolle

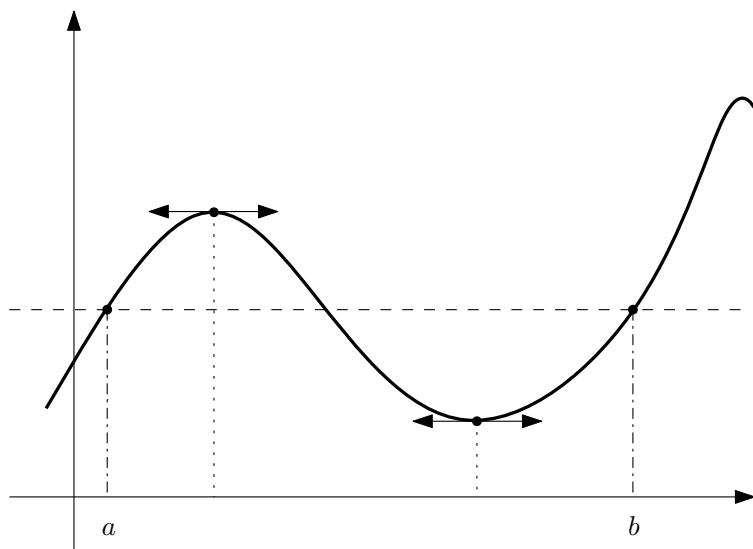


Figure 1.12 – Illustration du théorème des accroissements finis

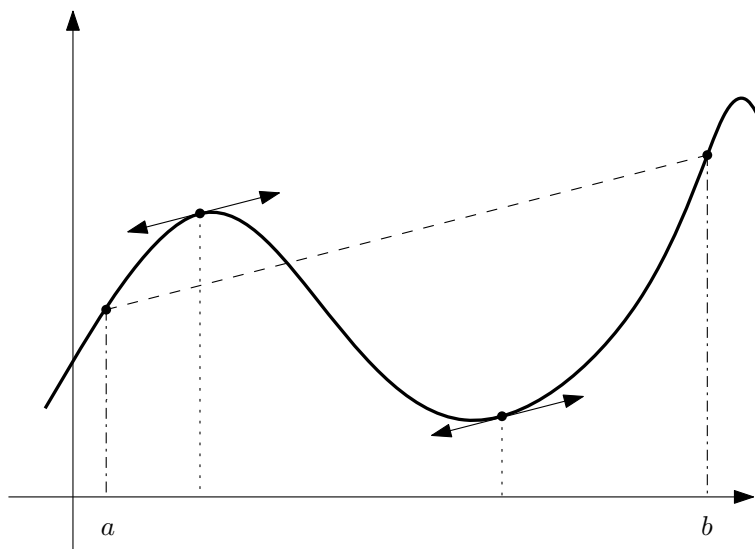


Figure 1.13 – La tangente en un point vue comme limite des tangentes

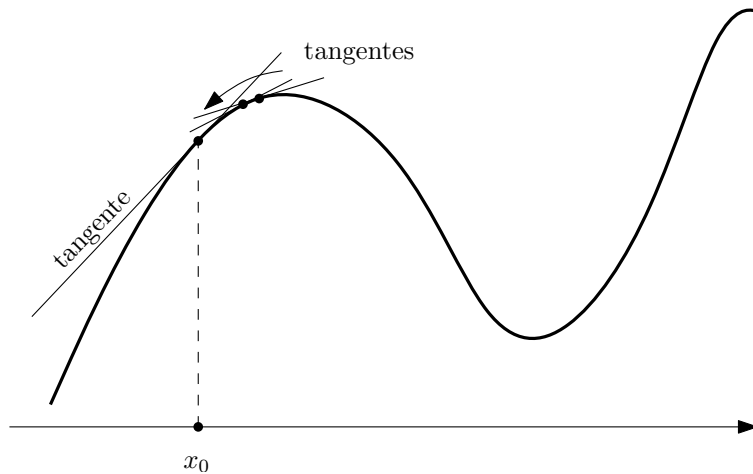


Figure 1.14 – Fonction radical

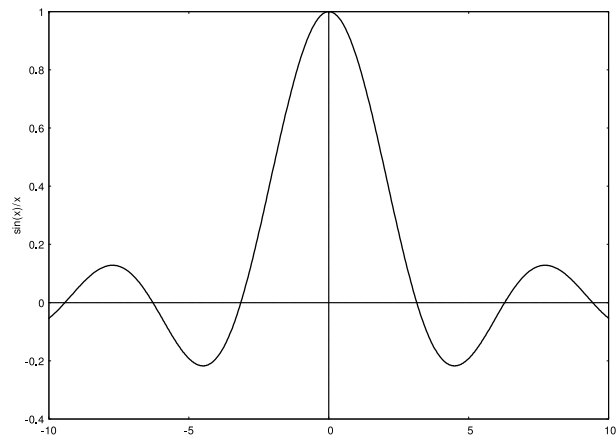


Figure 1.15 – Exemple de raccordement de classe \mathcal{C}^∞

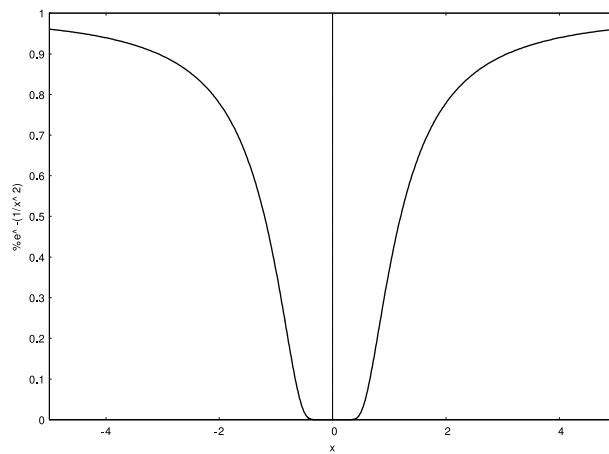
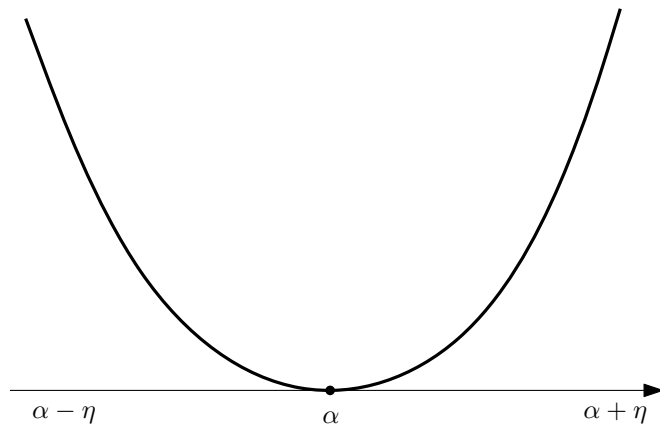


Figure 1.16 – Minimum local

Allure de la courbe au voisinage de α



Chapitre 2

\mathbb{R}^n euclidien ($n \geq 2$)

2.1 Quelques rappels

Rappel 2.1

\mathbb{R}^n est l'ensemble des n -uplets de réels (lorsque $n = 2$, on parle de *couples*, lorsque $n = 3$ de *triplets*, etc.), $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ signifie que chaque x_k est dans \mathbb{R} .

n 元实数组的全体称为 n 维实空间 \mathbb{R}^n ,每个 n 元数组 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 称为 n 维实空间 \mathbb{R}^n 的一个点, 数 x_i 称为该点的第 i 个坐标。

Notation 2.1

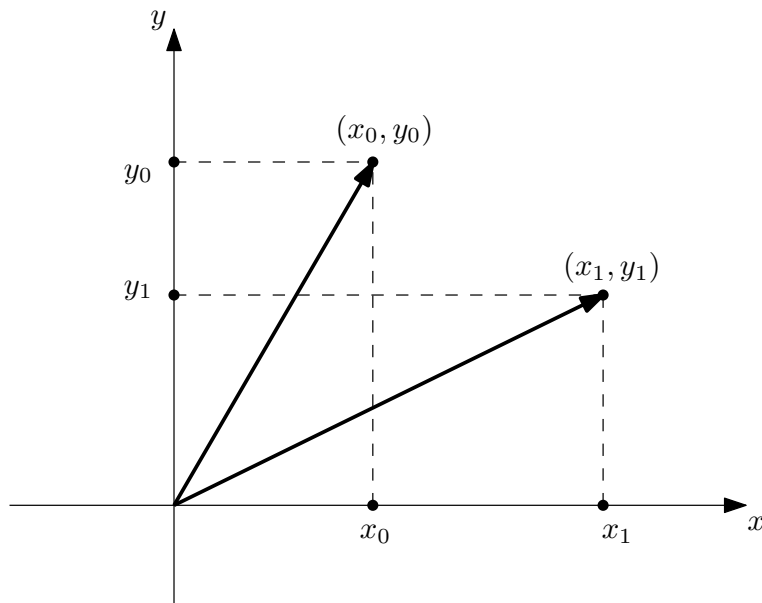
Nous noterons souvent :

$$\underline{x} \text{ le } n\text{-uplet } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Remarque importante 2.1

Chaque élément \underline{x} de \mathbb{R}^n peut être vu comme un vecteur. Voir la figure 2.1, page suivante.

Figure 2.1 – Un vecteur



Remarque importante 2.2

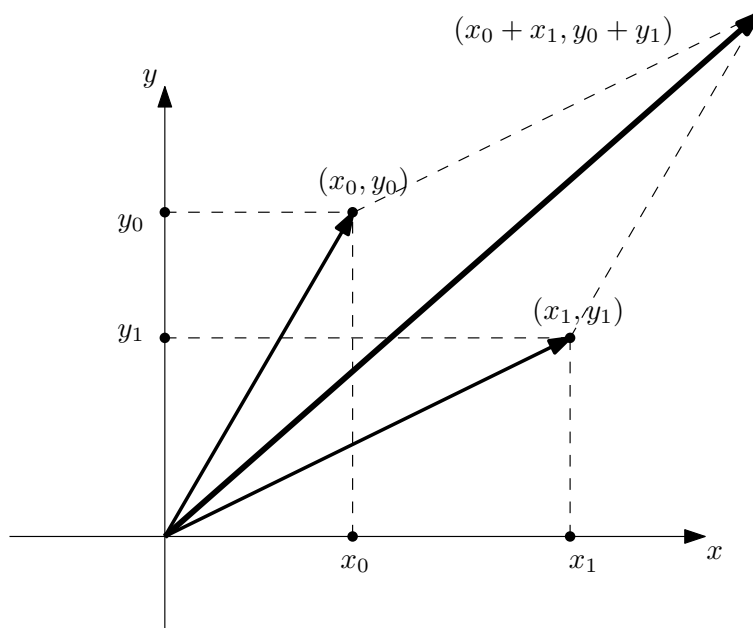
On peut additionner deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel, avec toutes les règles de calcul usuelles...^a
Voir les figures 2.2, page suivante et 2.3, page 86.

a. On dit que \mathbb{R}^n (ensemble de vecteurs) est un espace vectoriel. Voir l'exercice 2.1.1, page 88.

Remarque importante 2.3

Chaque élément de \underline{x} de \mathbb{R}^n peut être vu comme un point. Voir la figure 2.4, page 87.

Figure 2.2 – Somme de deux vecteurs

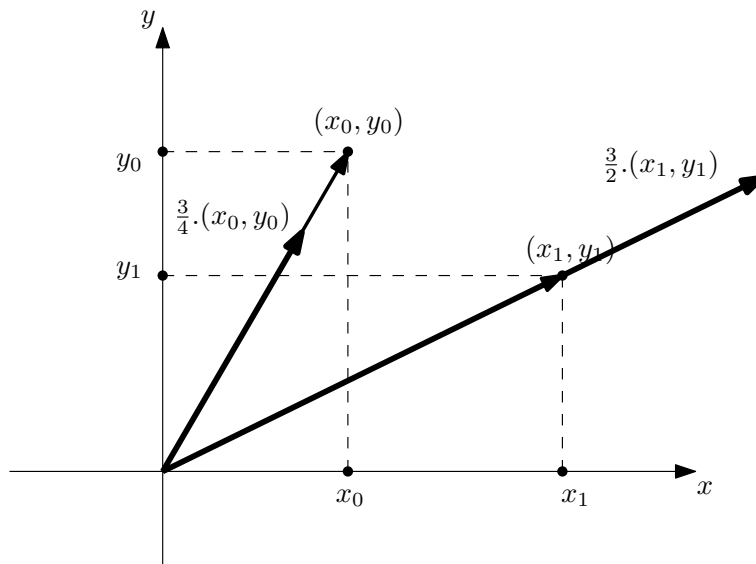


Remarque 2.4

Étant donné un point $A \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, on peut construire un unique point $B = A + \vec{u}$, comme sur le dessin (où $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ et $\vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$), avec toutes les règles usuelles de calcul...^a Le vecteur \vec{u} se note aussi \overrightarrow{AB} , et est en ce cas appelé *bipoint*.

a. On dit que \mathbb{R}^n (ensemble de points) est un espace affine de direction \mathbb{R}^n (ensemble de vecteurs). Voir l'exercice 2.1.2, page 89

Figure 2.3 – Multiplication d'un vecteur par un réel



Notation 2.2

Pour différencier, lorsque ce sera indispensable les n -uplets, des vecteurs, et des points nous noterons :

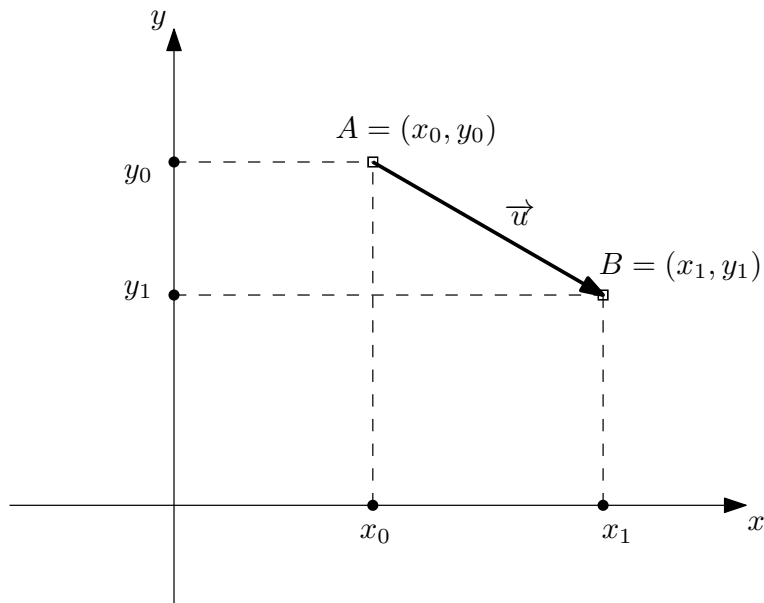
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ le n -uplet

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ le vecteur correspondant

$X = (x_1, \dots, x_n)$ le point correspondant

Les opérations seront notées :

Figure 2.4 – Un point



1. Addition de 2 vecteurs :

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

2. Soustraction de 2 vecteurs :

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, \dots, u_n) - (v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)$$

3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire λ :

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (u_1, \dots, u_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda \times u_1, \dots, \lambda \times u_n)$$

4. Addition d'un point et d'un vecteur :

$$A + \vec{u} = (a_1, \dots, a_n) + (u_1, \dots, u_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n)$$

5. Addition/soustraction de 2 n -uplets :

$$\underline{x} \pm \underline{y} = (x_1, \dots, x_n) \pm (y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n)$$

6. Multiplication d'un n -uplet par un scalaire λ :

$$\lambda \cdot \underline{x} = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n)$$

Remarque 2.5

On pourra remarquer que l'on fait toujours la même chose, c'est notre regard sur les objets qui change ! Nous verrons plus tard l'intérêt qu'il y a à changer de point de vue...

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Un \mathbb{R} -*espace vectoriel* E est défini usuellement comme ceci :

E est muni d'une opération interne (ie $E \times E \rightarrow E$) notée $+$ qui vérifie :

— *Associativité* :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$$

— *Existence d'un élément neutre (noté 0_E ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :*

$$\forall x \in E, 0_E + x = x$$

— *Existence d'un opposé à x (noté $-x$) :*

$$\forall x \in E, \exists (-x) \in E, x + (-x) = 0_E$$

— *Commutativité* :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$$

E est muni d'une opération externe (ie $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$) notée \cdot qui vérifie :

— *Compatibilité avec l'addition de E* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

— *Compatibilité avec l'addition des réels* :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

— *Compatibilité avec la multiplication des réels* :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$$

— *Respect de l'unité* :

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x$$

(a) Vérifier rapidement que \mathbb{R}^n muni des opérations décrites est bien un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(b) Montrer que, si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on a alors les propriétés :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot 0_E &= 0_E, \\ \forall x \in E, \quad 1 \cdot x &= x \text{ et } (-1) \cdot x = -x \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot x &= 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E. \end{aligned}$$

2.1.2 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, un ensemble \mathcal{E} est dit *espace affine réel de direction E* si \mathcal{E} est muni d'une opération mixte $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ qui vérifie :

— *Unicité d'écriture* :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists! \vec{u} \in E, B = A + \vec{u}$$

— *Compatibilité avec l'addition de E* :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$$

(a) Vérifier rapidement que \mathbb{R}^n muni de l'opération décrite est bien un espace affine de direction \mathbb{R}^n (espace vectoriel).

(b) Si \mathcal{E} est un espace affine de direction E , montrer que :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \quad A + \vec{u} &= A \iff \vec{u} = 0_E \\ \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \forall \vec{u} \in E, \quad A + \vec{u} &= B + \vec{u} \iff A = B \end{aligned}$$

(c) Montrer que tout \mathbb{R} -espace vectoriel est un espace affine de direction lui-même, pour quelle opération ?

Ainsi, tout espace vectoriel a une structure affine naturelle. Le danger est alors de confondre les deux structures, c'est pourquoi, dans \mathbb{R}^n , les points et les vecteurs sont notés différemment.

2.1.3 Avec les opérations connues, quelle structure (espace vectoriel ou, à défaut, espace affine – et, dans ce cas, on précisera la direction) ont les ensembles suivants :

- (a) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} ?
- (b) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , telles que $f(0) = 0$?
- (c) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , telles que $f(0) = 1$?
- (d) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$?
- (e) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telles que $f(0) = 0$?
- (f) Les fonctions continues f , définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , monotones ?

注释 2.1

设 E 是一非空集合, 若:

1. 在 E 上定义加法运算(记作 $+$), 满足:

— 结合律:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$$

— 加法单位元:

$$\forall x \in E, 0_E + x = x$$

— 加法逆元:

$$\forall x \in E, \exists (-x) \in E, x + (-x) = 0_E$$

— 交换律:

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$$

2. 在 E 上定义数乘运算(记作 \cdot), 满足:

— 关于 E 上加法的分配律:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

— 关于实数上加法的分配律：

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

— 关于实数上乘法的结合律：

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$$

— 乘法单位元：

$$\forall x \in E, 1.x = x$$

我们称 E 为实向量空间。

注释 2.2

设 E 为实向量空间，我们称集合 \mathcal{E} 为以向量空间 E 为伴随空间的实仿射空间，如果 \mathcal{E} 上定义运算算子 $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ 且满足：

—

$$\forall(A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists! \vec{u} \in E, B = A + \vec{u}$$

—

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$$

2.2 Propriétés euclidiennes

2.2.1 Norme et produit scalaire

Dans le plan et l'espace, on est habitué à calculer des longueurs de vecteurs ou des distances entre deux points, quelle définition donner dans \mathbb{R}^n ? Il suffit de généraliser la formule connue dans le plan et l'espace...

Définition 2.1 – Norme euclidienne canonique d'un vecteur de \mathbb{R}^n

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, on appelle *norme euclidienne canonique* de \vec{u} sa longueur, elle vaut :

$$\|\vec{u}\| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Définition 2.2 – Distance euclidienne entre deux points de \mathbb{R}^n

Si A et B sont deux points de \mathbb{R}^n , on appelle *distance (pour la norme euclidienne canonique)* de A à B :

$$d(A, B) \stackrel{\text{Def}}{=} \|\vec{AB}\|$$

Remarque 2.6

Dans le plan, nous avons l'habitude de manipuler des angles, des projections, etc. Pour généraliser ces notions, nous allons utiliser la norme euclidienne canonique et ses propriétés.

Définition 2.3 – Produit scalaire canonique

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on appelle *produit scalaire canonique* de \vec{u} et \vec{v} l'expression :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Cette formule s'appelle *formule de polarisation*.

En termes de coordonnées, on a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \times v_i = u_1 \times v_1 + \cdots + u_n \times v_n$$

Théorème 2.1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

On a :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2, |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, \vec{u} et \vec{v} sont alignés.

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$0 \leq \|\vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}\|^2 = \lambda^2 \times \|\vec{v}\|^2 + 2\lambda \times \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{u}\|^2$$

On a donc une fonction polynomiale de degré 2 qui reste toujours positive, ceci n'est possible que si :

$$\Delta' = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

2. Supposons $\vec{v} \neq 0$ (sinon, il n'y a rien à démontrer). Alors, il y a égalité si, et seulement si, il existe un λ_0 qui annule la fonction polynomiale, soit, d'après le caractère défini de la norme euclidienne canonique :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \vec{u} + \lambda_0 \cdot \vec{v} = 0$$

Définition 2.4 – Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs de \mathbb{R}^n sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Remarque 2.7

On retrouve la notion usuelle d'orthogonalité de deux vecteurs du plan. Ainsi, si $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v} = (\cos \phi, \sin \phi)$, on a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\theta - \phi)$$

Donc, ces vecteurs seront orthogonaux si, et seulement si,

$$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ 表示 $(\theta - \phi) - \frac{\pi}{2} \in \{k.\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème 2.2 – Théorème de Pythagore

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser la formule de polarisation.

Remarque 2.8

Soit A , B et C trois points de \mathbb{R}^2 , formant un triangle rectangle, on obtient la figure 2.5, page 144.

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, on dit que $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si elle vérifie :

— *Homogénéité* :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x)$$

— *Inégalité triangulaire* :

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

— *Caractère défini* :

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

(a) Vérifier que la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n est une norme.

(b) Montrer qu'elle vérifie de plus *l'identité du parallélogramme* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2.2.2 Soit E un ensemble, on dit que $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une *distance sur E* si elle vérifie :

— *Symétrie* :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$$

— *Caractère défini* :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

— *Inégalité triangulaire* :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(a) Vérifier que la distance pour la norme euclidienne est bien une distance.

(b) Montrer que si \mathcal{E} est un espace affine réel de direction E , si N est une norme sur E , alors la fonction définie sur \mathcal{E} par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A, B) = N(\overrightarrow{AB})$$

est bien une distance sur \mathcal{E} .

2.2.3 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, on dit que $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un *produit scalaire sur E* s'il vérifie :

— *Linéarité à droite* :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(x, y_1 + \lambda \cdot y_2) = \phi(x, y_1) + \lambda \times \phi(x, y_2)$$

— *Symétrie* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$$

— *Positivité* :

$$\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$$

— *Caractère défini* :

$$\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$$

(a) Vérifier que le produit scalaire canonique est bien un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

(b) Montrer qu'un produit scalaire sur E vérifie l'inégalité :

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y)^2 \leq \phi(x, x) \times \phi(y, y)$$

(c) Montrer que si ϕ est un produit scalaire sur E , alors

$$N : x \mapsto \sqrt{\phi(x, x)} \text{ est une norme sur } E$$

(d) Montrer que N vérifie l'identité du parallélogramme.

2.2.2 Angles

Essayons maintenant de généraliser la notion d'angle entre deux vecteurs. Dans le plan (\mathbb{R}^2) la situation est particulière, car nous sommes habitués à *orienter* le plan. Ainsi, pouvons-nous distinguer plusieurs situations (voir la figure 2.6, page 145).

Remarque importante 2.9

Dans l'espace (\mathbb{R}^3) ou plus généralement dans \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), il n'est plus possible d'orienter le plan contenant les deux vecteurs (en supposant qu'ils ne sont pas alignés), car le plan peut être observé « par dessus » ou « par dessous ». Le cosinus de θ semble conservé, c'est pourquoi, nous imposerons dans ce cas, $\sin \theta \geq 0$. (Voir la figure 2.7, page 146).

Définition 2.5 – Angle et mesure d'angle

Soit deux vecteurs non nuls, \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), nous appellerons *mesure de l'angle* ($\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$), tout réel θ tel que :

$$\sin \theta \geq 0 \text{ et } \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Démonstration

Un tel θ existe, car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right| \leq 1$$

Remarque 2.10

Une mesure de l'angle est donc déterminé à 2π -près. Une valeur particulière intéressante de θ est

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right) \in [0, \pi]$$

Remarque importante 2.11

Dans le plan, nous allons essayer de tenir compte de l'orientation ^a, pour cela, nous pouvons remarquer qu'une valeur particulière discrimine les deux situations, la valeur :

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1$$

qui est positive dans le cas des angles *directs*, et négative pour les angles *indirects*. Le calcul est explicité à la figure 2.8, page 146.

a. Nous verrons l'année prochaine une définition propre de cette notion.

Remarque 2.12

On a de plus la *formule de Lagrange* :

$$(u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2)^2 + (u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1)^2 = (u_1^2 + u_2^2) \times (v_1^2 + v_2^2)$$

Vérifions la avec Wxmaxima (code 2.1, de la présente page).

Session Wxmaxima 2.1 – Formule de Lagrange

```
(%i1) (u[1]*v[1]+u[2]*v[2])^2+  
(u[1]*v[2]-u[2]*v[1])^2=  
factor((u[1]*v[1]+u[2]*v[2])^2+  
(u[1]*v[2]-u[2]*v[1])^2);
```

```
(%o1) (u2 v2 + u1 v1)^2 + (u1 v2 - v1 u2)^2 = (u2^2 + u1^2) (v2^2 + v1^2)
```

Définition 2.6 – Angle orienté du plan

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^2 non nuls, on appelle *mesure de l'angle orienté* $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ tout réel θ vérifiant :

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \text{ et } \sin \theta = \frac{\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Remarque importante 2.13

Dans le plan, nous avons donc deux notions différentes : les mesures d'angle et les mesures d'angle orienté. Il est souvent inutile de s'occuper de l'orientation des angles.

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Soit ABC un vrai triangle du plan (ie les points sont distincts et non alignés), soit α , β et γ des mesures des angles \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} .^a Soit a , b et c les longueurs des côtés BC , AC et AB . Montrer que :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Voir la figure 2.9, page 147.

2.3.2 Soit A et C deux points distincts du plan. Calculer les coordonnées de B et D en fonction de celles de A et C de

manière à obtenir un carré $ABCD$.

2.3.3 Montrer, en utilisant la formule de la mesure d'un angle donné, que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à π .

2.3.4 Montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent. Voir la figure 2.10, page 147.

2.3.5 Démontrer le théorème de Morley : soit un triangle quelconque ABC , alors les trisectrices (droites coupant en trois les angles) définissent un triangle équilatéral. Voir la figure 2.11, page 148.

2.3.6 Soit ABC un vrai triangle du plan, montrer que l'aire du triangle est :

$$\left| \frac{\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2} \right|$$

a. Clairement, nous pouvons définir une mesure de l'angle \widehat{ABC} , comme une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

2.3 Droites, plans, etc.

2.3.1 Définitions

Définition 2.7 – Droite de \mathbb{R}^n

On appelle *droite vectorielle* de \mathbb{R}^n dirigée par un vecteur \vec{u} non nul :

$$\{\lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On appelle *droite affine* de \mathbb{R}^n , passant par un point A et dirigée par un vecteur \vec{u} non nul :

$$\{A + \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Voir la figure 2.12, page 149.

Définition 2.8 – Plan de \mathbb{R}^n

On appelle *plan vectoriel* de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) dirigé par deux vecteurs non alignés \vec{u} et \vec{v} :

$$\{\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On appelle *plan affine* de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non alignés \vec{u} et \vec{v} :

$$\{A + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Voir la figure 2.13, page 150.

Exercice(s) 2.4

- 2.4.1 (a) Soit Δ une droite affine de \mathbb{R}^n , définie par un point A et un vecteur non nul \vec{u} . Soit B un point quelconque de Δ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors Δ peut être définie par le point B et le vecteur $\lambda.\vec{u}$.
- (b) Soit Π un plan affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), défini par un point A et deux vecteurs non alignés \vec{u} et \vec{v} . Soit B un point quelconque de Π et $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$, tels que $\lambda_1 \times \mu_2 \neq \lambda_2 \times \mu_1$, alors Π peut être défini par le point B et les vecteurs $\lambda_1.\vec{u} + \mu_1.\vec{v}$ et $\lambda_2.\vec{u} + \mu_2.\vec{v}$ (qui sont donc non alignés).
- 2.4.2 Dans le plan (\mathbb{R}^2), étant donnés un point A , un vecteur non nul \vec{u} et un réel α , déterminer :

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^2, \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = \alpha \right\}$$
$$\left\{ M \in \mathbb{R}^2, \text{Det} \left(\overrightarrow{AM}, \vec{u} \right) = \alpha \right\}$$

- 2.4.3 Dans \mathbb{R}^n , soit Δ_1 la droite définie par le point A_1 et le vecteur non nul \vec{u}_1 et Δ_2 la droite définie par le point A_2 et le vecteur non nul \vec{u}_2 , donner une CNS sur $(A_1, A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ pour que les deux droites aient un point commun. Déterminer alors $\Delta_1 \cap \Delta_2$.
- 2.4.4 Dans \mathbb{R}^n , soit Π_1 le plan défini par le point A_1 et les vecteurs non alignés \vec{u}_1 et \vec{v}_1 et Π_2 le plan défini par le point A_2 et les vecteurs non alignés \vec{u}_2 et \vec{v}_2 , donner une CNS sur $(A_1, A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ pour que les deux plans aient un point commun. Déterminer alors $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

2.3.2 Mise en équation(s)

Généralités

Quand on regarde une droite ou un plan (ou toute autre sorte d'objet), il y a plusieurs points de vue :

1. La notion de *lieu géométrique*. L'objet est décrit par ses propriétés géométriques. Par exemple : lieu des points à une distance r d'un point A du plan (cercle de centre A de rayon r , noté \mathcal{C}).
2. La forme *paramétrée*. Chaque point de l'objet est repéré par des valeurs de certains paramètres. Par exemple, si $A = (a, b)$, les points du cercle \mathcal{C} ont des coordonnées (x, y) paramétrées par un réel θ , avec :

$$x = a + r \times \cos \theta \quad y = b + r \times \sin \theta$$

3. La forme *cartésienne*. Chaque point de l'objet vérifie une ou plusieurs équations reliant ses coordonnées. Par exemple : les points (x, y) du cercle \mathcal{C} vérifient :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Remarque 2.14

Le jeu consistera souvent à passer d'une représentation à une autre :

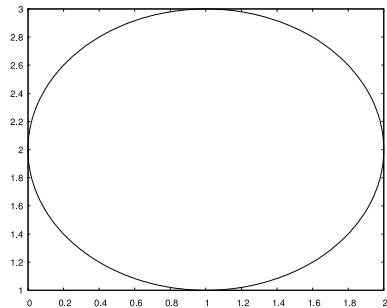
- *Lieu* \rightarrow *paramétrage* Il faut choisir de bons paramètres ayant le plus de sens géométrique dans la situation présentée. Pour le cercle \mathcal{C} , on pourra introduire la mesure de l'angle entre le vecteur $(1, 0)$ et le bipoint \overrightarrow{AM} , où M est le point (x, y) de \mathcal{C} .
- *Lieu* \rightarrow *cartésien* Passer par le cas précédent.
- *Paramétrage* \rightarrow *cartésien* Il faut *éliminer* le ou les paramètres. Par exemple pour le cercle \mathcal{C} , on a le paramétrage :

$$x = a + r \times \cos \theta \quad y = b + r \times \sin \theta$$

On va éliminer le paramètre θ grâce à la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

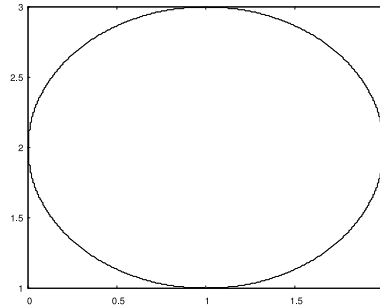
- *Paramétrage* \rightarrow *lieu* Il s'agit de tracer un objet paramétré, nous étudierons cela lors de l'étude des courbes paramétrées et des nappes paramétrées.
- *Cartésien* \rightarrow *paramétrage* Problème difficile, car il n'est pas évident que l'objet puisse se définir ainsi... On étudiera ce problème dans le cours sur les courbes et surfaces implicites. Pour \mathcal{C} , il suffit lorsque l'on a quelque chose de la forme $X^2 + Y^2 = 1$, d'introduire un paramètre θ où $X = \cos \theta$ et $Y = \sin \theta$.
- *Cartésien* \rightarrow *lieu* On passe souvent par le problème précédent. Nous verrons aussi quelques techniques directes.

```
(%i1) a:1$  
(%i2) b:2$  
(%i3) r:1$  
(%i4) load(draw)$  
(%i5) draw2d(nticks=500,  
  parametric(a+r*cos(t),b+r*sin(t),t,0,2*%pi));  
(%o5) [gr2d (parametric)]
```



Contrairement aux apparences, c'est un cercle !

```
(%i6) draw2d(implicit((x-a)^2+(y-b)^2=r^2,x,0,2,y,1,3));  
(%o6) [gr2d (implicit)]
```



Droites du plan

Remarque 2.15

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : passant par un point A , et dirigée par un vecteur \vec{u} ; passant par deux points ; passant par un point et orthogonale à un vecteur ; bissectrice, médiatrice, médiane, hauteur...
2. *Paramétrique* : si $A = (a, b)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, alors on obtient :

$$x = a + \alpha \times t \quad y = b + \beta \times t \quad t \in \mathbb{R}$$

3. *Cartésien* : si $A = (a, b)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, en éliminant le t ci-dessus :

$$\beta \times (x - a) = \alpha \times (y - b)$$

Remarquons que $\vec{v} = (-\beta, \alpha)$ est un vecteur non nul, orthogonal à \vec{u} . La droite cherchée a pour équation cartésienne :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ ou } \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

Droites de l'espace

Remarque 2.16

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : passant par un point A , et dirigée par un vecteur \vec{u} ; passant par deux points ; passant par un point et orthogonale à un plan ; intersection de deux plans...
2. *Paramétrique* : si $A = (a, b, c)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, alors on obtient :

$$x = a + \alpha \times t \quad y = b + \beta \times t \text{ et } z = c + \gamma \times t \quad t \in \mathbb{R}$$

3. *Cartésien* : si $A = (a, b, c)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, en éliminant le t ci-dessus (nous supposons $\gamma \neq 0$) :

$$\begin{cases} \gamma \times (x - a) = \alpha \times (z - c) \\ \gamma \times (y - b) = \beta \times (z - c) \end{cases}$$

熟练掌握空间中直线的不同表示及相互间的转换

Plans de l'espace

Remarque 2.17

1. *Lieu géométrique* : passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non alignés \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ; passant par trois points non alignés ; passant par un point et contenant une droite ne passant pas par ce point ; passant par un point et orthogonal à une droite ; plan médiateur...
2. *Paramétrique* : si $A = (a, b, c)$, $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ (non alignés), alors on obtient :

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1 \times \lambda + \alpha_2 \times \mu \\ y = b + \beta_1 \times \lambda + \beta_2 \times \mu \\ z = c + \gamma_1 \times \lambda + \gamma_2 \times \mu \end{cases} (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. *Cartésien* : si $A = (a, b, c)$, $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ (non alignés), en éliminant les paramètres λ et μ :

$$(\beta_1 \times \gamma_2 - \gamma_1 \times \beta_2) \times (x - a) + (\gamma_1 \times \alpha_2 - \alpha_1 \times \gamma_2) \times (y - b) + (\alpha_1 \times \beta_2 - \beta_1 \times \alpha_2) \times (z - c) = 0$$

熟练掌握空间中平面的不同表示及相互间的转换

Définition 2.9 – Produit vectoriel

Le vecteur de \mathbb{R}^3 qui apparaît dans l'équation ci-dessus s'appelle *produit vectoriel* de \vec{u}_1 et de \vec{u}_2 , il s'écrit

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$$

La formule de la figure 2.14, page 151 nous donne ses coordonnées.

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \wedge (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\beta_1 \times \gamma_2 - \gamma_1 \times \beta_2, \gamma_1 \times \alpha_2 - \alpha_1 \times \gamma_2, \alpha_1 \times \beta_2 - \beta_1 \times \alpha_2)$$

Remarquons (avec la définition ci-dessous) que le plan cherché a pour équation cartésienne :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \rangle = 0$$

Remarque 2.18

Nous pouvons aussi remarquer que l'équation d'une droite de l'espace obtenue précédemment peut s'écrire (la droite passe par le point A et est dirigée par un vecteur \vec{v}) :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{AM}, \vec{w} \rangle = 0$$

où \vec{v} est un vecteur non nul orthogonal à \vec{u} et \vec{w} orthogonal à \vec{u} et non aligné avec \vec{v} , par exemple. Nous verrons que le choix de \vec{v} et \vec{w} n'intervient pas.

Remarque 2.19

On pourrait aussi écrire :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

mais cela donne *trois* équations au lieu de deux ! Nous montrerons que l'on ne peut en garder que deux... Voir le code [Wxmaxima 2.3](#), de la présente page

Session Wxmaxima 2.3 – Droites de l'espace

```
(%i1) A : [a,b,c]$ U : [u,v,w]$ load(vect)$ M : [x,y,z]$  
(%i5) express((M-A)~U);  
(%o5) [w (y - b) - v (z - c), u (z - c) - w (x - a), v (x - a) - u (y - b)]  
On peut vérifier que les équations sont redondantes.  
(%i6) ratsimp(u*%[1]+v*%[2]+w*%[3]);  
(%o6) 0
```

Propriété 2.1

Clairement $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ est orthogonal à la fois à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , car les points $A + \vec{u}_1$ et $A + \vec{u}_2$ sont dans le plan. On l'appelle *vecteur normal au plan*.

Propriété 2.2

On a de plus, d'après la formule :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{0} \iff (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ alignés}$$

Propriété 2.3

Anti-symétrie. Si (\vec{u}, \vec{v}) sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , on a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

Propriété 2.4

1. Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

2. Si (\vec{u}, \vec{v}) sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

熟练掌握空间中两向量向量积的概念及性质

Propriété 2.5 – Formule de Lagrange

Si (\vec{u}, \vec{v}) sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

On peut faire le calcul en Wxmaxima (voir la session 2.4, de la présente page).

Session Wxmaxima 2.4 – Formule de Lagrange (dans l'espace)

```
(%i1) load(vect)$
```

```
(%i2) U : [u[1],u[2],u[3]]$
      V : [v[1],v[2],v[3]]$

(%i4) express(U~V);

(%o4) [u2 v3 - v2 u3, v1 u3 - u1 v3, u1 v2 - v1 u2]

(%i5) U.V;

(%o5) u3 v3 + u2 v2 + u1 v1

(%i6) factor((U.V)^2+express((U~V).(U~V)));

(%o6) (u3^2 + u2^2 + u1^2) (v3^2 + v2^2 + v1^2)
```

Remarque 2.20

En conséquence : si θ est une mesure de l'angle que font \vec{u} et \vec{v} supposés non nuls ($\theta \in [0, \pi]$ par exemple), alors :

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \geq 0$$

该注释给出了两向量 \vec{u} 和 \vec{v} 间的夹角与它们叉乘之间的关系。

Proposition 2.1 – Formule du double produit vectoriel

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{w}$$

Voir le code *Wxmaxima 2.5*, page ci-contre.

```
(%i1) load(vect)$
      U : [u[1],u[2],u[3]]$
      V : [v[1],v[2],v[3]]$
      W : [w[1],w[2],w[3]]$

(%i5) ratsimp(express(U~(V~W)-(U.W)*V+(U.V)*W));

(%o5) [0,0,0]
```

Démonstration de la proposition 2.1, page précédente

Un peu plus sérieuse, le calcul brutal est toujours désagréable...

- L'égalité à démontrer est *linéaire* en \vec{w} .^a On peut donc se ramener au cas où $\vec{w} \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- De même sur \vec{u} et \vec{v} . Il reste donc 27 cas.
- Par symétrie du problème et anti-symétrie du produit vectoriel, tous ne sont pas à regarder.^b Les relations évidentes :

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) &= (0, 0, 1), \\ (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) &= (1, 0, 0), \\ (0, 0, 1) \wedge (1, 0, 0) &= (0, 1, 0) \end{cases}$$

permettent de conclure.

a. ϕ définie sur un espace vectoriel E à valeurs dans F , sera dite *linéaire*, si elle vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \phi(\lambda x + y) = \lambda \phi(x) + \phi(y)$$

Nous étudierons plus précisément cette notion dans le cours sur les espaces vectoriels (Mathématiques III)

b. Ce serait amusant de faire le dénombrement... À titre d'indication, cela fait 10 cas.

Cercles du plan

Remarque 2.21

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : $\{M, d(M, A) = r\}$ (ensemble des points à une distance r d'un point A), cercle circonscrit à un triangle, cercle inscrit dans un triangle...

2. *Paramétrique* : si $A = (a, b)$ et $r \in \mathbb{R}_+$, le point $M = (x, y)$, sur le cercle, vérifie :

$$x = a + r \times \cos \theta \quad y = b + r \times \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Les paramètres sont visualisés sur la figure 2.15, page 152.

3. *Cartésien* : si $A = (a, b)$ et $r \in \mathbb{R}_+$, le point $M = (x, y)$, sur le cercle, vérifie :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Remarquons que l'équation du cercle s'écrit :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2$$

熟练掌握平面中的圆的不同表示及相互间的转换

Sphère de l'espace

Remarque 2.22

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : $\{M, d(M, A) = r\}$ (ensemble des points à une distance r d'un point A).
2. *Paramétrique* : si $A = (a, b, c)$ et $r \in \mathbb{R}_+$, le point $M = (x, y, z)$, sur la sphère, vérifie $((\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2) : ^a$

$$x = a + r \times \sin \theta \times \cos \varphi \quad y = b + r \times \sin \theta \times \sin \varphi \quad z = c + r \times \cos \theta$$

On peut visualiser les paramètres sur la figure 2.16, page 153

3. *Cartésien* : si $A = (a, b, c)$ et $r \in \mathbb{R}_+$, le point $M = (x, y, z)$, sur la sphère, vérifie :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Remarquons que l'équation de la sphère s'écrit :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2$$

a. Plusieurs paramétrages sont courants. Celui-ci est utilisé par le physicien...

熟练掌握空间中的球面的不同表示及相互间的转换

Cercles de l'espace

Remarque 2.23

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : intersection d'une sphère et d'un plan, intersection de deux sphères, etc.
2. *Paramétrique* : on passera souvent par la forme cartésienne. Cherchons le paramétrage de l'intersection de la sphère de centre $A = (a, b, c)$, de rayon r (donc d'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$) avec le plan d'équation $u \times x + v \times y + w \times z = h$, où, quitte à diviser par $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, on peut supposer $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, on peut donc poser $w = \cos \theta$, $u = \sin \theta \times \cos \varphi$ et $v = \sin \theta \times \sin \varphi$.
 - (a) La première question est de savoir si le plan et la sphère se coupent. Ce ne sera possible que si d , la distance de A au plan est $\leq r$. Voir la figure 2.17, page 154.
 - (b) *Cartésien* : le cercle s'écrit donc :

$$\|\overrightarrow{AM}\| = r \text{ et } \langle \overrightarrow{BM}, \vec{u} \rangle = 0$$

où A est le centre de la sphère, r son rayon et où B est un point du plan, \vec{u} un vecteur normal au plan.

Les calculs sont résumés dans la session Wxmaxima 2.6, page suivante.

熟练掌握空间中的圆面的不同表示及相互间的转换

1. Calcul de H

```
(%i1) subst([x=a+t*sin(theta)*cos(phi),
y=b+t*sin(theta)*sin(phi),
z=c+t*cos(theta)],
sin(theta)*cos(phi)*x+sin(theta)*sin(phi)*y+
cos(theta)*z-h);
```

```
(%o1) sin(phi) sin(theta) (sin(phi) t sin(theta) + b) + cos(phi) sin(theta) (cos(phi) t sin(theta) + a) + cos(theta) (t cos(theta) + c) - h
```

```
(%i2) solve(%,t);
```

```
(%o2) [t = - (b sin(phi) + a cos(phi)) sin(theta) + c cos(theta) - h
        (sin(phi)^2 + cos(phi)^2) sin(theta)^2 + cos(theta)^2]
```

```
(%i3) H:subst(%, [a+t*sin(theta)*cos(phi),
b+t*sin(theta)*sin(phi), c+t*cos(theta)])$
```

2. Calcul de d

```
(%i4) A:[a,b,c]$
```

```
(%i5) AH : H-A$
```

```
(%i6) sqrt(AH.AH)$
```

```
(%i7) abs(radcan(%));
```

```
(%o7) |(b sin(phi) + a cos(phi)) sin(theta) + c cos(theta) - h|
      sqrt((sin(phi)^2 + cos(phi)^2) sin(theta)^2 + cos(theta)^2)
```

```
(%i8) d:trigsimp(%);
```

```
(%o8) |(b sin(phi) + a cos(phi)) sin(theta) + c cos(theta) - h|
```

3. Paramétrage du cercle, nous noterons α le paramètre, le cercle est de centre H , de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.


```
(%i9) M:H+
      sqrt(r^2-d^2)*cos(alpha)*[cos(theta)*cos(phi),
      cos(theta)*sin(phi),-sin(theta)]+
      sqrt(r^2-d^2)*sin(alpha)*[-sin(phi),cos(phi),0]$
```

Essayons de vérifier.

```
(%i10) trigsimp((M[1]-a)^2+(M[2]-b)^2+(M[3]-c)^2);
```

```
(%o10)  $r^2$ 
```

```
(%i11) trigsimp(sin(theta)*cos(phi)*M[1]+
      sin(theta)*sin(phi)*M[2]+cos(theta)*M[3]);
```

```
(%o11)  $h$ 
```

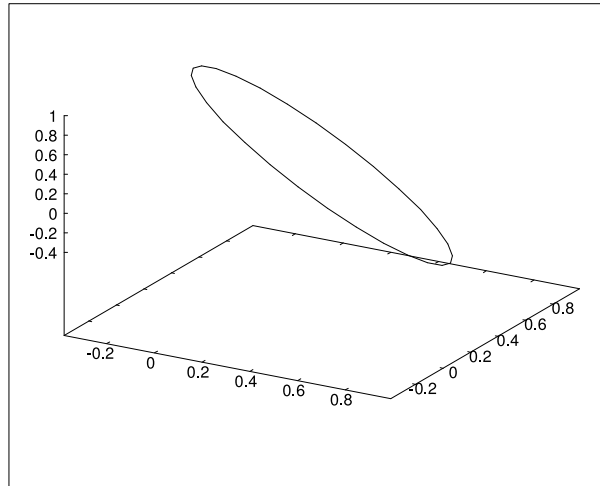
Un petit tracé pour finir ?

```
(%i12) a:0$ b:0$ c:0$ r:1$ theta:%pi/3$ phi:%pi/4$ h:1/2$
```

```
(%i19) load(draw)$
```

```
(%i20) draw3d(parametric(M[1],M[2],M[3],alpha,0,2*%pi));
```

```
(%o20) [gr3d(parametric)]
```



Remarque importante 2.24

Cet exemple est remarquable à plus d'un point :

1. Comment calculer l'intersection de deux objets géométriques ?

La situation idéale est lorsque l'un est donné sous forme paramétrique, l'autre sous forme cartésienne !

C'est ainsi que nous avons calculé les coordonnées du point H .

2. La formule de d est aussi remarquablement simple. Nous généraliserons dans le cours sur les distances.
3. Le paramétrage de la sphère nous permet d'avoir des formules assez simples (refaire le calcul avec des (u, v, w) quelconques). Il sert ici à prendre un vecteur de norme 1.
4. Nous voyons apparaître une famille de trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= (\sin \theta \times \cos \varphi, \sin \theta \times \sin \varphi, \cos \theta) \\ \vec{e}_\theta &= (\cos \theta \times \cos \varphi, \cos \theta \times \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)\end{aligned}$$

Nous étudierons plus avant cette famille dans le paragraphe approprié.

Exercice(s) 2.5

Dans le plan affine \mathbb{R}^2

2.5.1 Soit \mathcal{C} un cercle du plan et A, B deux points de ce cercle diamétralement opposés. Montrer que

$$M \in \mathcal{C} \iff \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0$$

Voir la figure 2.18, page 155.

2.5.2 Soit \mathcal{C} un cercle du plan de centre O , A et B deux points distincts de ce cercle, M un point du plan, on pose ϑ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$ et φ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ montrer que (*théorème de l'angle au centre*) :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2 \times \vartheta = \varphi \pmod{2\pi}$$

Voir la figure 2.19, page 156.

2.5.3 Soit A, B et C trois points distincts du plan, M un point du plan $\notin \{A, B\}$, ϑ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$ et φ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$, montrer que

$$\vartheta = \varphi \iff A, B, C \text{ et } M \text{ alignés ou cocycliques}$$

2.5.4 Soit A et B deux points distincts du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver

$$\left\{ M, \text{ la mesure de l'angle } \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})} = \alpha \pmod{\pi} \right\}$$

Que se passe-t-il si l'on remplace π par 2π ?

2.5.5 Soit A et B deux points distincts du plan et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, trouver

$$\left\{ M, \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{BM}\|} = \alpha \right\}$$

2.5.6 Soit A , B et C trois points distincts du plan et non alignés.

- (a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par A et B . Elle sera notée $eq_{AB} = 0$.
- (b) Montrer que, si D est une droite passant par A , alors son équation est de la forme :

$$\lambda \times eq_{AB} + \mu \times eq_{AC} = 0 \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

- (c) Montrer qu'il existe un unique cercle passant par A , B et C .
- (d) Calculer à l'aide de `Wxmaxima` le centre et le rayon du cercle passant par A , B et C .

2.5.7 En utilisant l'exercice précédent, montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent.

2.5.8 Montrer que les hauteurs d'un triangle se coupent.

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3

2.5.9 Soit A , B , C et D quatre points distincts et non coplanaires^a de l'espace.

- (a) Montrer qu'il existe un unique plan, noté ABC , passant par A , B et C et en donner son équation cartésienne. Elle sera notée $eq_{ABC} = 0$.
- (b) Montrer que les plans ABC et ACD se coupent suivant une droite Δ . Laquelle?
- (c) Montrer que si Π est un plan contenant la droite Δ , alors son équation est de la forme :

$$\lambda \times eq_{ABC} + \mu \times eq_{ACD} = 0 \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

- (d) Montrer que tout plan contenant le point A a pour équation :

$$\lambda \times eq_{ABC} + \mu \times eq_{ABD} + \nu \times eq_{ACD} = 0$$

où $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$.

2.5.10 Dans \mathbb{R}^3 , on donne deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , et on s'intéresse à la recherche des solutions de l'équation :

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$$

- (a) Donner une CNS pour que cette équation ait au moins une solution.
- (b) Cette CNS étant vérifiée, trouver une solution particulière \vec{u}_0 .
- (c) En cherchant les solutions sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v}$, trouver toutes les solutions.

2.5.11 Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de \mathbb{R}^3 , montrer que le volume du parallélépipède construits sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} a un volume égal à

$$|\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \rangle|$$

Voir la figure 2.20, page 157.

Puis, que le volume du tétraèdre $ABCD$ est :

$$\left| \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \rangle}{6} \right|$$

a. Cela signifie qu'ils ne sont pas dans un même plan.

2.3.3 Distances

2.3.3.1 Distance à une partie

Définition 2.10 – Distance à une partie

Soit E un ensemble muni d'une distance, soit F une partie non vide de E et $x \in E$, on appelle *distance de x à F* , et on note :

$$d(x, F) \stackrel{\text{Def}}{=} \inf_{y \in F} d(x, y)$$

熟练掌握两集合间距离的定义及运算

Remarque 2.25

$\{d(x, y), y \in F\}$ est non vide (car F est non vide) et minoré (par 0, car d est à valeurs dans \mathbb{R}_+), la borne inférieure existe bien.

Propriété 2.6 – Distance d'un point A à une droite Δ du plan

Si la droite est donnée par un point B et un vecteur \vec{u} orthogonal à Δ , alors on a

$$d(A, \Delta) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

Si la droite est donnée par un point B et un vecteur directeur \vec{v} , alors on a

$$d(A, \Delta) = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}$$

熟练掌握平面中点到直线的距离的不同定义及运算

Démonstration de la propriété 2.6, de la présente page

Plusieurs types de démonstrations sont possibles (voir la figure 2.21, page 158 pour les notations).

1. *Géométrie* : on introduit le point H tel que

\overrightarrow{AH} orthogonal à \vec{v} , $H \in \Delta$

La mesure de l'angle entre ces deux vecteurs sera donc $\pi/2 \pmod{\pi}$, on a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle &= \underbrace{\langle \overrightarrow{AH}, \vec{u} \rangle}_{= \pm \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{u}\|} + \underbrace{\langle \overrightarrow{HB}, \vec{u} \rangle}_{=0} \\ &= \pm \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

et, de même,

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}) = \underbrace{\text{Det}(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{v})}_{=\pm \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} + \underbrace{\text{Det}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{v})}_{=0}$$

Cela suppose que l'on a démontré l'existence de H .

Pourquoi est-ce bien la distance? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si M est un autre point de Δ , on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{AH}\|^2$$

2. *Analytique* : soit $M = B + t \cdot \overrightarrow{v}$, un point quelconque de la droite Δ ($t \in \mathbb{R}$), calculons, en écrivant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$:

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2t \times \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} \rangle + t^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2$$

cette expression sera minimale lorsque la dérivée en t sera nulle, soit pour

$$t_0 = -\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$$

en ce cas, la distance cherchée est :

$$d(A, \Delta) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2 \times t_0 \times \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} \rangle + t_0^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2$$

il reste à utiliser la formule de Lagrange reliant la valeur absolue du produit mixte aux normes des vecteurs.

Remarque 2.26

Si la droite est donnée par une équation $u \times x + v \times y + w = 0$, et que $A = (a_1, a_2)$, alors

$$d(A, \Delta) = \frac{|u \times a_1 + v \times a_2 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Propriété 2.7 – Distance d'un point A à un plan Π de l'espace

Si le plan Π est défini par la donnée d'un point B et d'un vecteur normal \vec{u} , alors

$$d(A, \Pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

熟练掌握空间中点到平面的距离公式及运算

Démonstration de la propriété 2.7, de la présente page

Comme précédemment, on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, puis

$$\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle = \langle \overrightarrow{AH}, \vec{u} \rangle + \underbrace{\langle \overrightarrow{HB}, \vec{u} \rangle}_{=0}$$

d'où

$$|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{u}\|$$

Pourquoi est-ce bien la distance ? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si M est un autre point de Π , on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{AH}\|^2$$

Remarque 2.27

Si Π a pour équation $u \times x + v \times y + w \times z + h = 0$ et si $A = (a, b, c)$, alors

$$d(A, \Pi) = \frac{|u \times a + v \times b + w \times c + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Propriété 2.8 – Distance d'un point A à une droite Δ de l'espace

Si la droite est définie par la donnée d'un point B et d'un vecteur directeur \vec{u} , alors

$$d(A, \Delta) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

熟练掌握空间中点到直线的距离公式及运算

Démonstration de la propriété 2.8, de la présente page

On construit le plan passant par A de vecteur normal \vec{u} (son équation est $\langle \vec{AM}, \vec{u} \rangle = 0$), et soit H le point d'intersection entre Δ et ce plan, on a alors $\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB}$, d'où

$$\vec{AB} \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \underbrace{\vec{HB} \wedge \vec{u}}_{=\vec{0}}$$

soit, en prenant les normes :

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{AH}\| \times \|\vec{u}\|$$

car les vecteurs \vec{AH} et \vec{u} sont orthogonaux par construction de H .

Pourquoi est-ce bien la distance ? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si M est un autre point de Δ , on a :

$$\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AH}\|^2 + \|\vec{HM}\|^2 \geq \|\vec{AH}\|^2$$

2.3.3.2 Distance entre deux droites

On peut de manière générale définir la distance entre deux parties E_1 et E_2 non vides d'un espace affine (ou d'un espace muni d'une distance d), par ^a

$$d(E_1, E_2) \stackrel{\text{Def}}{=} \inf_{x_1 \in E_1} d(x_1, E_2) = \inf_{x_2 \in E_2} d(x_2, E_1) = \inf_{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2} d(x_1, x_2)$$

a. Ce serait un bon exercice de démontrer que les trois expressions définissent la même quantité.

Proposition 2.2

Soit une droite Δ_1 définie par la donnée d'un point A_1 et d'un vecteur directeur \vec{u}_1 et une droite Δ_2 définie par la donnée d'un point A_2 et d'un vecteur \vec{u}_2 où $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \neq \vec{0}$, alors

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{A_1 A_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}$$

熟练掌握空间中两直线间的距离运算及性质

Démonstration

1. Comme la situation géométrique semble compliquée, nous allons prendre deux points quelconques A_1 et A_2 sur Δ_1 et Δ_2 , calculer leur distance et minimiser celle-ci. Le calcul peut se faire en **Wxmaxima** (voir la session 2.7, page suivante).
2. Cette démonstration n'est pas très convaincante. Regardons où se trouvent les points qui réalisent la distance entre les deux droites (appelons H_1 et H_2 ces points respectivement sur Δ_1 et Δ_2).

On obtient donc que :

- (a) La droite passant par H_1 et H_2 est dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, donc elle se trouve à la fois dans plan Π_1 défini par A_1 et les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$ et dans le plan Π_2 défini par A_2 et les vecteurs $(\vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$.
- (b) Finalement,

$$\{H_1\} = \Delta_1 \cap \Pi_2 \text{ et } \{H_2\} = \Delta_2 \cap \Pi_1$$

Pour calculer la distance $d(H_1, H_2)$:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 A_2}$$

en faisant le produit scalaire avec $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \overrightarrow{A_1 A_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle| &= |\langle \overrightarrow{H_1 H_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle| \\ &= \underbrace{\|\overrightarrow{H_1 H_2}\| \times \|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que c'est bien le minimum de distance. Si B_1 et B_2 sont des points de Δ_1 et Δ_2 , alors

$$\overrightarrow{B_1 B_2} = \overrightarrow{B_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 B_2}$$

soit en calculant la norme au carré, et en tenant compte que $\overrightarrow{H_1 H_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{B_1 H_1}$ et $\overrightarrow{H_2 B_2}$, on obtient, grâce au théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{B_1 B_2}\|^2 = \|\overrightarrow{B_1 H_1} + \overrightarrow{H_2 B_2}\|^2 + \|\overrightarrow{H_1 H_2}\|^2 \geq \|\overrightarrow{H_1 H_2}\|^2$$

Voir la figure 2.24, page 161.

Session Wxmaxima 2.7 – Distance entre deux droites

Introduisons d'abord les deux droites.

```
(%i1) A[1] : [x[1],y[1],z[1]]$
      A[2] : [x[2],y[2],z[2]]$
      U[1] : [u[1],v[1],w[1]]$
      U[2] : [u[2],v[2],w[2]]$
```

Minimiser la distance ou la distance au carré, c'est la même chose !

```
(%i5) d2 : (A[1]+t[1]*U[1]-A[2]-t[2]*U[2]).
      (A[1]+t[1]*U[1]-A[2]-t[2]*U[2])$
```

```
(%i6) diff(d2,t[1]);
```

```
(%o6) 2 w1 (-z2 - t2 w2 + z1 + t1 w1) + 2 v1 (-y2 - t2 v2 + y1 + t1 v1) + 2 u1 (-x2 - t2 u2 + x1 + t1 u1)
```

```
(%i7) t1 : solve(%,t[1]);
```

```
(%o7) [t1 = (w1 z2 + v1 y2 + u1 x2 + w1 t2 w2 + v1 t2 v2 + u1 t2 u2 - w1 z1 - v1 y1 - u1 x1) /
      (w1^2 + v1^2 + u1^2)]
```

```
(%i8) d2min : subst(t1,d2)$
```

```
(%i9) diff(d2min,t[2])$
```

```
(%i10) t2 : solve(%,t[2])$
```

```
(%i11) res : subst(t2,d2min)$
```

Je ne l'écris pas, car c'est trop horrible !

```
(%i12) load(vect)$
```

```
(%i13) ratsimp(res - ((A[2]-A[1]).express(U[1]^U[2]))^2/  
    (express((U[1]^U[2]).(U[1]^U[2]))));
```

```
(%o13) 0
```

Cherchons à calculer les points H_1 et H_2 .

```
(%i14) H[1] : subst(t2,subst(t1,A[1]+t[1]*U[1]))$  
    H[2] : subst(t2,A[2]+t[2]*U[2])$
```

Il reste à vérifier que $\overrightarrow{H_1 H_2}$ est orthogonal à \vec{u}_1 et à \vec{u}_2 .

```
(%i16) ratsimp((H[2]-H[1]).U[1]);
```

```
(%o16) 0
```

```
(%i17) ratsimp((H[2]-H[1]).U[2]);
```

```
(%o17) 0
```

Remarque 2.28

Plusieurs cas particuliers peuvent se produire entre deux droites de l'espace :

1. Si les deux droites se coupent, on dit qu'elles sont *concourantes*. En ce cas, $\overrightarrow{A_1 A_2}$, \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont dans un même plan. La distance est alors clairement nulle.
2. Si $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = 0$ (chaque vecteur étant non nul), les droites ont même direction ; on dit qu'elles sont *parallèles*. La distance se calcule alors facilement à l'aide du schéma 2.25, page 162.

Définition 2.11 – Perpendiculaire commune à deux droites

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace non parallèles. On appelle *perpendiculaire commune* à ces deux droites, la droite passant par les points H_1 et H_2 , c'est l'unique droite coupant Δ_1 et Δ_2 et dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.
On peut avoir son équation cartésienne avec les formules :

$$\langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{A_2M}, \vec{u}_2 \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle = 0$$

理解并掌握空间中两直线间公垂线的定义及性质

Exercice(s) 2.6

Dans le plan affine \mathbb{R}^2

- 2.6.1 Dans le plan, quel est le lieu des points à égale distance de deux points distincts (*médiatrice*) ?
- 2.6.2 Montrer que les médiatrices d'un triangle du plan se coupent et que le point d'intersection obtenu est le centre d'un cercle passant par les trois sommets (*cercle circonscrit*). Voir la figure 2.26, page 163.
- 2.6.3 Montrer que les hauteurs (droite passant par un sommet et orthogonale au côté opposé) d'un triangle se coupent en un point (*orthocentre*). Voir la figure 2.27, page 164.
- 2.6.4 Dans le plan, quel est le lieu des points à égale distance de deux droites non parallèles ?
- 2.6.5 Montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent et que le point d'intersection obtenu est le centre d'un cercle tangent aux côtés (*cercle inscrit*). Voir la figure 2.28, page 165.
- 2.6.6 Soit \mathcal{C} un cercle de centre O , et A, B deux points distincts de \mathcal{C} . Soit Δ le diamètre parallèle à (AB) . Pour $M \in \mathcal{C}$, on note P, Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ . Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ . Voir la figure 2.29, page 166.
- 2.6.7 Soit A, B, C trois points du plan tels que $(AB) \perp (BC)$. Déterminer le lieu des points M tels que les cercles circonscrits aux triangles ABM et BCM aient même rayon.
- 2.6.8 Soit ABC un triangle du plan et H son orthocentre. Montrer que le symétrique de H par rapport à l'un des cotés du triangle est sur le cercle circonscrit au triangle. Voir la figure 2.30, page 167.
- 2.6.9 Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de centre A et A' se coupent en B et B' . Une droite variable passant par B recoupe \mathcal{C} et \mathcal{C}' en M et M' . Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit à $B'MM'$? Voir la figure 2.31, page 168.

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3

- 2.6.10 Montrer que deux cercles de l'espace non coplanaires ayant deux points communs sont contenus dans une unique sphère. Voir la figure 2.32, page 169.
- 2.6.11 Soient P_1 et P_2 deux plans de l'espace non parallèles. Déterminer l'ensemble des points à égale distance de P_1 et P_2 .
- 2.6.12 Calculer la distance entre deux droites parallèles en utilisant le dessin de la remarque ci-dessus.
- 2.6.13 Soit S la sphère de centre $A(1, 1, 1)$ de rayon 2 et S' la sphère de centre $B(0, 1, 0)$ de rayon 3. Montrer que $S \cap S'$ est un cercle, déterminer son plan, son centre et son rayon.
- 2.6.14 Déterminer la perpendiculaire commune à

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } D_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

- 2.6.15 Soient A, B, C trois points de l'espace. Déterminer le lieu des points M vérifiant

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$$

- 2.6.16 Soit \mathcal{D} une droite de l'espace et A un point. Donner une CNS pour qu'il existe un plan \mathcal{P} contenant \mathcal{D} tel que $d(A, \mathcal{P}) = 1$.
- 2.6.17 Déterminer les sphères contenant les cercles

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \mathcal{C}' : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

2.3.4 Retour sur les angles

Définition 2.12

1. *Dans le plan :*

- *Angle entre deux droites* $(A_1; \vec{u}_1)$ et $(A_2; \vec{u}_2)$, les vecteurs étant donnés à proportionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

Voir la figure 2.33, page 170.

- *Angle orienté entre deux droites* orientées La mesure de l'angle sera celle de l'angle entre les deux vecteurs directeurs.

2. *Dans l'espace :*

- *Angle entre deux plans* $\langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ et $\langle \overrightarrow{A_2M}, \vec{u}_2 \rangle = 0$, les vecteurs étant donnés à proportionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

Voir la figure 2.34, page 171.

- *Angle entre un plan et une droite qui se coupent* Le plan est donné par son équation $\langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ et la droite par $(A_2; \vec{u}_2)$, les vecteurs étant donnés à proportionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arcsin \left(\frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

Voir la figure 2.35, page 172.

2.4 Barycentres

Définition 2.13 – Barycentre

Soit \mathcal{E} un espace affine réel, A_1, \dots, A_n des points de \mathcal{E} , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$. Alors il existe un unique point G de \mathcal{E} , tel que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \left(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{A_1M} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{A_nM} \right)$$

Ce point s'appelle *barycentre (du système pondéré/de)* $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$.

Nous le noterons $\text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$.

Lorsque tous les λ_k ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont égaux, on dit que G est un *isobarycentre du système*.

Démonstration

Pour que cette définition soit valide, il faut montrer que G ne dépend pas du choix de M . Si P est un autre point de \mathcal{E} , on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \overrightarrow{A_kM} \right) + \overrightarrow{MP} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\lambda_k \cdot \overrightarrow{A_kM} + \lambda_k \cdot \overrightarrow{MP} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \overrightarrow{A_kP} \right) \end{aligned}$$

Remarque 2.29

On a déjà vu cette notion :

1. Milieu de deux points = isobarycentre de ces deux points.
2. Centre de gravité d'un triangle = isobarycentre des sommets.
3. En physique, si un système est constitué de masses pesantes $(m_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ situées en des points A_k , alors le barycentre de $((A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n))$ est le centre de gravité du système.

Propriété 2.9

1. *Commutativité* : l'ordre des points pondérés (A_k, λ_k) n'intervient pas dans la définition de G .
2. *Homogénéité* : on peut changer $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en $(\mu \times \lambda_1, \dots, \mu \times \lambda_n)$, quel que soit $\mu \neq 0$, cela ne change pas le barycentre.
3. *Associativité* : Si $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ est un système pondéré où $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$, et si $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \neq 0$ et $\sum_{k=p+1}^n \lambda_k \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)) = \\ \text{Bar}\left(\left(\text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_p, \lambda_p)), \sum_{k=1}^p \lambda_k\right), \left(\text{Bar}((A_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (A_n, \lambda_n)), \sum_{k=p+1}^n \lambda_k\right)\right) \end{aligned}$$

Plus clairement, à condition de ne pas faire apparaître des sommes de coefficients nulles, on peut, tout en conservant le barycentre global, faire des barycentres de sous-systèmes pondérés disjoints, puis faire le barycentre des barycentres des sous-systèmes, en les affectant du poids de chacun.

Exemple 2.1

Soit $((A_1, 3), (A_2, 5), (A_3, -2))$ un système pondéré, son barycentre G vérifie :

$$\forall M, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot \overrightarrow{A_1M} + 5 \cdot \overrightarrow{A_2M} - 2 \cdot \overrightarrow{A_3M})$$

Regroupons les deux premiers points pondérés, ils ont un barycentre G_1 défini par

$$\forall M, \overrightarrow{G_1M} = \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot \overrightarrow{A_1M} + 5 \cdot \overrightarrow{A_2M})$$

alors, affectons G_1 du poids 8(=3+5), on obtient :

$$\forall M, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6} \cdot (8 \cdot \overrightarrow{G_1M} - 2 \cdot \overrightarrow{A_3M})$$

Dans le plan affine \mathbb{R}^2

- 2.7.1 Montrer que les médianes (droite reliant un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé) d'un triangle se coupent un point G (*centre de gravité*) et que celui-ci se trouve au tiers de la longueur de la médiane. Voir la figure 2.36, page 173.
- 2.7.2 Montrer que si le triangle ABC a son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit confondus alors il est équilatéral (ses trois côtés ont même longueur).
- 2.7.3 Soit ABC un triangle non plat du plan affine. Une droite coupe (AB) , (BC) et (CA) en R, P, Q respectivement. On définit I, J, K par

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} \quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BP} \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

- (a) Exprimer R, P, Q comme barycentres de A, B, C .
- (b) Montrer que I, J, K sont alignés.

Voir la figure 2.37, page 174.

- 2.7.4 Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminer le lieu des points M tels que les médianes du triangle ABM issues de A et B soient orthogonales.
- 2.7.5 Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $x = y^2$ (son axe est donc Ox) et A, B, C, D quatre points distincts sur \mathcal{P} . Montrer que A, B, C, D sont cocycliques si, et seulement si, leur isobarycentre est sur l'axe de \mathcal{P} . Voir la figure 2.38, page 175.
- 2.7.6 *Coordonnées barycentriques* : soit trois points A, B et C du plan, non alignés :
- (a) Montrer que tout point du plan peut s'exprimer comme un barycentre des points A, B et C .
- (b) Soit M un point du plan, montrer que :

$$\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$$

Le triplet (α, β, γ) s'appelle les *coordonnées barycentriques de M* (dans le repère affine ABC).

- (c) Soit M un point du plan, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) . Comparer ces coordonnées aux aires (mesures des surfaces) des triangles MBC , MAC et MAB .
- (d) Calculer les coordonnées barycentriques de
- G isobarycentre de ABC ;
 - I centre du cercle circonscrit de ABC ;
 - H orthocentre de ABC .
- (e) En déduire que G, H et I sont alignés.

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3

2.7.7 Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédiannes sont concourantes. Voir la figure 2.39, page 176.

2.5 Quelques applications particulières

注释 2.3

本节需重点掌握仿射空间中向量的平移，不同实向量空间中向量的伸缩、向量的垂直映射、向量的垂直对称以及向量的旋转的定义及运算性质。

2.5.1 Translation

Définition 2.14 – Translation

Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E (un espace vectoriel), soit $\vec{u} \in E$, on appelle *translation de vecteur \vec{u}* , l'application

$$\tau_{\vec{u}} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M \mapsto M + \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 2.40, page 177.

2.5.2 Homothétie

Définition 2.15 – Homothétie

1. Soit E un espace vectoriel réel, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on appelle *homothétie de rapport λ* l'application :

$$h_\lambda : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto \lambda \cdot \vec{x} \end{cases}$$

2. Soit \mathcal{E} un espace affine réel de direction E , soit $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on appelle *homothétie de centre Ω et de rapport λ* l'application :

$$h_{\Omega, \lambda} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M \mapsto \Omega + \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega M} \end{cases}$$

Voir la figure 2.41, page 178.

2.5.3 Projection orthogonale

Définition 2.16 – Projection orthogonale

1. Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) muni de son produit scalaire canonique, soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, on appelle *projection orthogonale sur la droite $\vec{\Delta}$ engendrée par \vec{u}* l'application

$$p_{\vec{\Delta}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

2. Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) espace affine de direction \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, soit Δ une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$, on appelle *projection orthogonale sur la droite Δ* l'application

$$p_\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ M \mapsto A + \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 2.42, page 179.

3. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur définissant un plan $\vec{\Pi}$ d'équation $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0$, on appelle *projection orthogonale sur le plan $\vec{\Pi}$* l'application

$$p_{\vec{\Pi}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

4. Dans \mathbb{R}^3 espace affine de direction \mathbb{R}^3 , soit un plan Π défini par un point A et un vecteur normal (non nul) \vec{u} , on appelle *projection orthogonale sur le plan Π* l'application

$$p_{\Pi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto M - \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 2.43, page 180.

2.5.4 Symétrie orthogonale

À chaque fois que l'on a une projection p dans un espace vectoriel, on a en même temps une symétrie orthogonale s , avec la relation :

$$s = 2.p - \text{Id}$$

Définition 2.17 – Symétrie orthogonale

1. Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) muni de son produit scalaire canonique, soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, on appelle *symétrie orthogonale par rapport à la droite $\vec{\Delta}$ engendrée par le vecteur \vec{u}* l'application

$$s_{\vec{\Delta}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} - \vec{x} \end{cases}$$

2. Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) espace affine de direction \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, soit Δ une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$, on appelle *symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ* l'application

$$s_{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ M \mapsto A + 2 \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Voir la figure 2.44, page 181.

3. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur définissant un plan $\vec{\Pi}$ d'équation $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0$, on appelle *symétrie orthogonale par rapport au plan $\vec{\Pi}$* l'application

$$s_{\vec{\Pi}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

4. Dans \mathbb{R}^3 espace affine de direction \mathbb{R}^3 , soit un plan Π défini par un point A et un vecteur normal (non nul) \vec{u} , on appelle *symétrie orthogonale par rapport au plan Π* l'application

$$s_{\Pi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto M - 2 \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 2.45, page 182.

2.5.5 Rotation

Définition 2.18 – Rotation

1. Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique, soit $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *rotation d'angle (de mesure) θ* l'application

$$r_{\theta} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \mapsto \cos(\theta) \cdot \vec{x} + \sin(\theta) \cdot \vec{x}' \end{cases}$$

où $\vec{x'}$ est l'unique vecteur du plan qui vérifie :

$$\|\vec{x'}\| = \|\vec{x}\| \quad \langle \vec{x}, \vec{x'} \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\vec{x}, \vec{x'}) \geq 0$$

Voir la figure 2.46, page 183.

2. Dans \mathbb{R}^2 espace affine de direction \mathbb{R}^2 , soit A un point et $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *rotation de centre A et d'angle (de mesure) θ* l'application

$$r_{A,\theta} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ M \mapsto A + \cos(\theta) \cdot \overrightarrow{AM} + \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{AM'} \end{cases}$$

où M' est l'unique point du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \quad \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \geq 0$$

Voir la figure 2.47, page 184.

3. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, soit $\theta \in \mathbb{R}$ et \vec{u} un vecteur non nul, on appelle *rotation d'angle (de mesure) θ et d'axe dirigé par \vec{u}* l'application

$$r_{\theta,\vec{u}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \cos(\theta) \cdot \left(\vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \wedge \vec{x} \end{cases}$$

Voir la figure 2.48, page 185.

4. Dans \mathbb{R}^3 espace affine de direction \mathbb{R}^3 , soit $\theta \in \mathbb{R}$, A un point de \mathbb{R}^3 et \vec{u} un vecteur non nul, on appelle *rotation d'angle (de mesure) θ et d'axe passant par A et dirigé par \vec{u}* l'application

$$r_{\theta,A,\vec{u}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto A + \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \cos(\theta) \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Voir la figure 2.49, page 185.

Remarque 2.30

Donnons une interprétation de la définition d'une rotation vectorielle dans \mathbb{R}^3 . Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. On considère \vec{y} le projeté orthogonal de \vec{x} sur le plan vectoriel $\vec{\Pi}$ orthogonal à \vec{u} . Comme alors $\vec{x} - \vec{y}$ est le projeté orthogonal de \vec{x} sur la droite vectorielle dirigée par \vec{u} , on a : $\vec{x} - \vec{y} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$ donc $\vec{y} = \vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$. Notons $r_\theta(\vec{y})$ l'image de \vec{y} par r_θ , rotation vectorielle plane d'angle θ dans le plan vectoriel $\vec{\Pi}$ (orienté par \vec{u}). Remarquons que $\vec{y}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \wedge \vec{y}$. Alors $r_\theta(\vec{y}) = \cos(\theta) \cdot \vec{y} + \sin(\theta) \cdot \vec{y}'$. On définit $r_{\theta, \vec{u}}(\vec{x})$ par : $r_{\theta, \vec{u}}(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{y}) + r_\theta(\vec{y})$. Après calculs, on retrouve la formule annoncée.

Exercice(s) 2.8

Dans le plan affine \mathbb{R}^2

- 2.8.1 Soit $h_{A, \lambda}$ et $h_{B, \mu}$ deux homothéties, CNS pour que la composée $h_{A, \lambda} \circ h_{B, \mu}$ soit une homothétie ? Quel est, en ce cas, son centre et son rapport ? Que se passe-t-il lorsque la CNS n'est pas vérifiée ? Lorsque c'est une homothétie, proposer une construction du centre.
- 2.8.2 Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites du plan, soit s_{Δ_1} et s_{Δ_2} les symétries orthogonales par rapport à ces deux droites. Nature et caractéristiques de la composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$?
- 2.8.3 Soit r_{Ω_1, θ_1} et r_{Ω_2, θ_2} deux rotations. CNS pour que la composée $r_{\Omega_1, \theta_1} \circ r_{\Omega_2, \theta_2}$ soit une rotation ? Préciser, en ce cas, ses caractéristiques (centre, angle). Que se passe-t-il lorsque la CNS n'est pas vérifiée ? Lorsque c'est une rotation, proposer une construction du centre.
- 2.8.4 Soit $h_{A, \lambda}$ une homothétie et $r_{\Omega, \theta}$ une rotation, on suppose de plus que $\lambda \neq \pm 1$. Montrer que $h_{A, \lambda} \circ r_{\Omega, \theta}$ a un unique point fixe. En proposer une construction.
- 2.8.5 Montrer que les homothéties, les symétries orthogonales et les rotations conservent l'orthogonalité, les mesures d'angles. Quelles sont celles qui conservent les mesures d'angles orientés ?
- 2.8.6 Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' perpendiculaires tournent autour d'un point fixe M . Soit P l'intersection de \mathcal{D} et (Ox) et Q l'intersection de \mathcal{D}' et (Oy) . On note H le projeté orthogonal de M sur (PQ) . Quel lieu décrit H ? Voir la figure 2.50, page 186.
- 2.8.7 Soit \mathcal{D} une droite du plan et A un point n'appartenant pas à \mathcal{D} . Soit B un point décrivant la droite \mathcal{D} . Déterminer le lieu des points M tels que ABM est un triangle rectangle et isocèle en B .
- 2.8.8 Soit $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

- (a) Donner une équation du cercle \mathcal{C} passant par O , A et B .
- (b) Soit $M = (x, y)$. Déterminer les coordonnées (x', y') du projeté orthogonal H de M sur la droite (AB) .
- (c) Montrer que les projetés orthogonaux de M sur (AB) , (OA) , (OB) sont alignés si, et seulement si $M \in \mathcal{C}$.
- 2.8.9 Soit ABC un triangle de cercle circonscrit \mathcal{C} et M un point de \mathcal{C} . Soit P le projeté orthogonal de M sur (BC) , Q sur (AC) et R sur (AB) . Montrer que P, Q et R sont alignés. Voir la figure 2.51, page 187.
- 2.8.10 Soit \mathcal{D} une droite du plan, A un point n'appartenant pas à \mathcal{D} , r une rotation de centre A et d'angle θ et s la symétrie orthogonale d'axe \mathcal{D} . Déterminer la nature de $r \circ s \circ r^{-1}$.

Avec Wxmaxima

- 2.8.11 Soit ABC un vrai triangle du plan, calculer, à l'aide des coordonnées de A , B et C les coordonnées de G (centre de gravité), H (orthocentre) et I (centre du cercle circonscrit). Que vaut

$$\frac{d(G, I)}{d(G, H)} ?$$

- (a) En déduire, à l'aide d'une homothétie, que les points G , H et I sont alignés.
- (b) On note P , Q et R les pieds des hauteurs du triangle, U , V et W les milieux des côtés et J , K et L les milieux des segments reliant les sommets à H . Voir la figure 2.52, page 188.
- Tracer la figure avec Wxmaxima.
 - Vérifier avec Wxmaxima, que les 9 points sont sur un même cercle.
 - Le démontrer à l'aide de transformations géométriques bien choisies.
- 2.8.12 Soit ABC un vrai triangle du plan, une droite quelconque coupe les droites (AB) en F , (AC) en D et (BC) en E . On note H_1 l'orthocentre du triangle ADF , H_2 celui de DEC et H_3 celui du triangle ABC . Voir la figure 2.53, page 189.
- (a) Calculer, avec Wxmaxima, les coordonnées des point H_1 , H_2 et H_3 .
- (b) Que constater sur le rapport (absence d'un paramètre)

$$\frac{d(H_3, H_1)}{d(H_3, H_2)} ?$$

- (c) En déduire une démonstration géométrique du fait que : H_1 , H_2 et H_3 sont alignés.

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3

- 2.8.13 Déterminer la projection orthogonale de la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$ sur le plan $\mathcal{P} : 3x + y - z = 1$.
- 2.8.14 Soit D_1 et D_2 deux droites de l'espace, quelles sont les symétries orthogonales qui envoient tout point de $D_1 \cup D_2$ sur un point de $D_1 \cup D_2$? Même question avec les rotations.
- 2.8.15 On considère les plans $P_1 : x + y - 1 = 0$, $P_2 : y + z - 1 = 0$, $P_3 : z + x - 1 = 0$, $P_4 : x + 3y + z = 0$. Déterminer λ pour que les quatre projetés orthogonaux de $(1, 1, \lambda)$ sur les P_i soient coplanaires (dans un même plan).
- 2.8.16 Soit $r_{\theta, \vec{u}}$ une rotation de \mathbb{R}^3 (espace vectoriel), soit r une autre rotation de cet espace vectoriel, donner la nature et les caractéristiques de $r \circ r_{\theta, \vec{u}} \circ r^{-1}$, où r^{-1} désigne l'application réciproque de r (qui est clairement bijective). Reprendre la question avec $s \circ r_{\theta, \vec{u}} \circ s^{-1}$, où s est une symétrie orthogonale.
- 2.8.17 Soit $r_1 = r_{\theta_1, A_1, \vec{u}_1}$ et $r_2 = r_{\theta_2, A_2, \vec{u}_2}$ deux rotations de l'espace. Donner une CNS pour que $r_1 \circ r_2$ soit une rotation. Que se passe-t-il lorsque cette CNS n'est pas vérifiée?

2.6 Bases et repères

注释 2.4

理解并掌握实向量空间及仿射空间中基底与坐标系的定义与性质。

2.6.1 Point de vue vectoriel

Définition 2.19 – Base orthonormée du plan

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , soit deux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 vérifiant :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \text{ et } \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$$

la famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est appelée *base orthonormée de \mathbb{R}^2* .

Si, de plus,

$$\text{Det}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$$

la base orthonormée est dite *directe*, sinon $(\text{Det}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1)$ la base orthonormée est dite *indirecte*.

Exemple 2.2

La base orthonormée $((1, 0), (0, 1))$ est dite *base (orthonormée directe) canonique*.

Propriété 2.10

Si (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_2$$

Les valeurs $(\langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle)$ s'appellent les *coordonnées du vecteur \vec{x} dans la base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2)* .

Propriété 2.11

Si (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle^2 + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle^2$$

Et

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_2, \vec{y} \rangle$$

Remarque importante 2.31

Les calculs de normes et de produits scalaires se font donc comme dans la base orthonormée directe canonique.

Notation 2.3 – Symbole de Kronecker

On appelle *symbole de Kronecker* sur un ensemble E , l'expression définie par :

$$\forall (i, j) \in E^2, \delta_{i,j} \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.20 – Base orthonormée de l'espace

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , soit trois vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{i,j}$$

la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est appelée *base orthonormée de \mathbb{R}^3* .

Si, de plus,

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

la base orthonormée est dite *directe*, sinon $(\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$ la base orthonormée est dite *indirecte*.

Exemple 2.3

La base orthonormée $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est dite *base (orthonormée directe) canonique*.

Propriété 2.12

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_k$$

Les valeurs $(\langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_3, \vec{x} \rangle)$ s'appellent les *coordonnées du vecteur \vec{x} dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* .

Propriété 2.13

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle^2$$

Et

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_k, \vec{y} \rangle$$

Remarque importante 2.32

Les calculs de normes et de produits scalaires se font donc comme dans la base orthonormée directe canonique.

2.6.2 Point de vue affine

Définition 2.21 – Repère orthonormé du plan

La donnée d'un point $A \in \mathbb{R}^2$, et d'une base orthonormée (directe) de \mathbb{R}^2 , (\vec{e}_1, \vec{e}_2) s'appelle *repère orthonormé (direct) du plan* et se note $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, M = A + \sum_{k=1}^2 \langle \vec{e}_k, \overrightarrow{AM} \rangle \cdot \vec{e}_k$$

Les valeurs $(\langle \vec{e}_1, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_2, \overrightarrow{AM} \rangle)$ s'appelle les coordonnées du point M dans le repère orthonormé $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Définition 2.22 – Repère orthonormé de l'espace

La donnée d'un point $A \in \mathbb{R}^3$, et d'une base orthonormée (directe) de \mathbb{R}^3 , $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'appelle *repère orthonormé (direct) de l'espace* et se note $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, M = A + \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \overrightarrow{AM} \rangle \cdot \vec{e}_k$$

Les valeurs $(\langle \vec{e}_1, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_2, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_3, \overrightarrow{AM} \rangle)$ s'appelle les coordonnées du point M dans le repère orthonormé $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Remarque 2.33

Lorsque les bases orthonormées sont les bases canoniques et que $A = (0, 0)$ dans le plan ou $(0, 0, 0)$ dans l'espace, on parle de repère canonique...

Les vecteurs de la base orthonormée canonique seront notés alors :

\vec{e}_x et \vec{e}_y dans le plan

et

\vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z dans l'espace

Exercice(s) 2.9

2.9.1 Montrer que les trois vecteurs donnés $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ dans la remarque importante 2.24, page 114, forment une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .

2.9.2 Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites du plan non parallèles et non perpendiculaires. Soit A un point du plan, M son symétrique par rapport à \mathcal{D} et M' par rapport à \mathcal{D}' . Déterminer le lieu des points A pour lesquels la distance MM' est constante. On fera les calculs dans le repère de centre O , point d'intersection des deux droites et des vecteurs de norme 1 qui

dirigent les deux bissectrices des deux droites.

- 2.9.3 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Décrire géométriquement l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.^a
- 2.9.4 Soit $(D_i)_{i=1\dots 4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B , on dit que $[A, B] = \{\text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda)), \lambda \in [0, 1]\}$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés. Voir la figure 2.54, page 190.
- 2.9.5 Soit \mathcal{E} l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x^2 + x \times y + y^2 = 1$. Déterminer l'équation de \mathcal{E} dans le repère qui se déduit du repère canonique par une rotation d'angle θ . Choisir judicieusement θ pour tracer \mathcal{E} .
- 2.9.6 Soit ABC un triangle non plat, A' le pied de la hauteur issue de A . On définit de même B' et C' . On travaille dans un repère orthonormé centré en A' et d'axes (BC) et $(A'A)$.
- (a) Déterminer les coordonnées de B' .
 - (b) Donner une équation cartésienne de la droite $(A'B')$ et calculer la distance de A à cette droite.
 - (c) Faire de même avec C' . Que peut-on en déduire?

a. Les repères ici ne sont pas orthonormés !

Figure 2.5 – Théorème de Pythagore

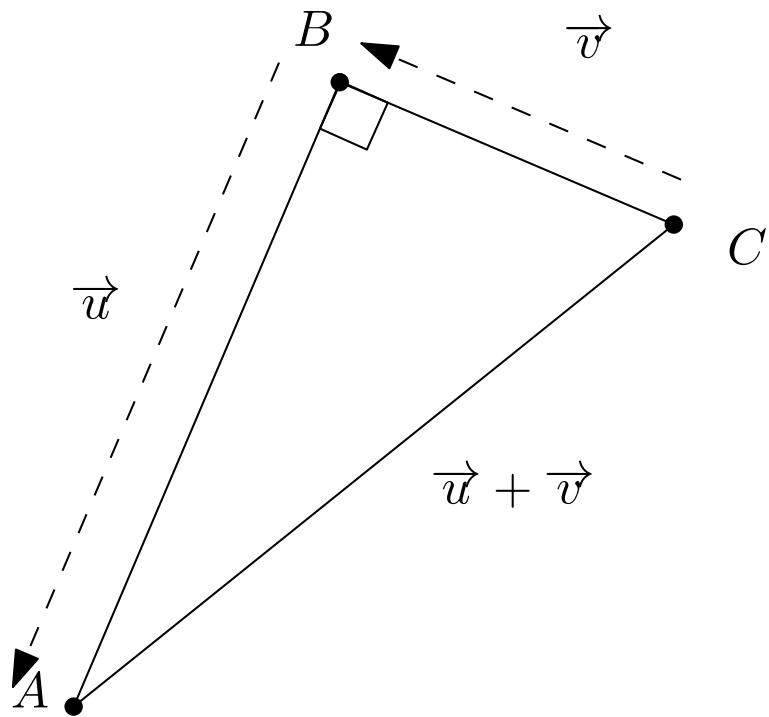


Figure 2.6 – Angles orientés dans le plan

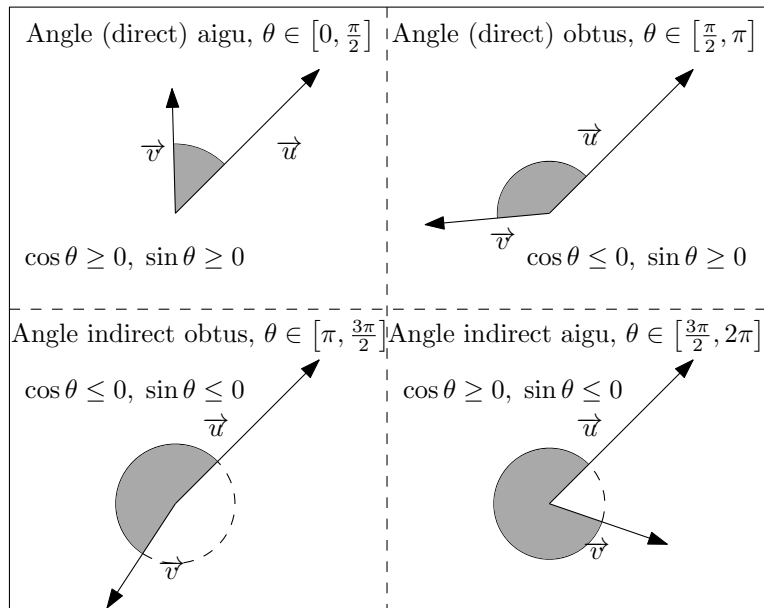


Figure 2.7 – Angles de l'espace

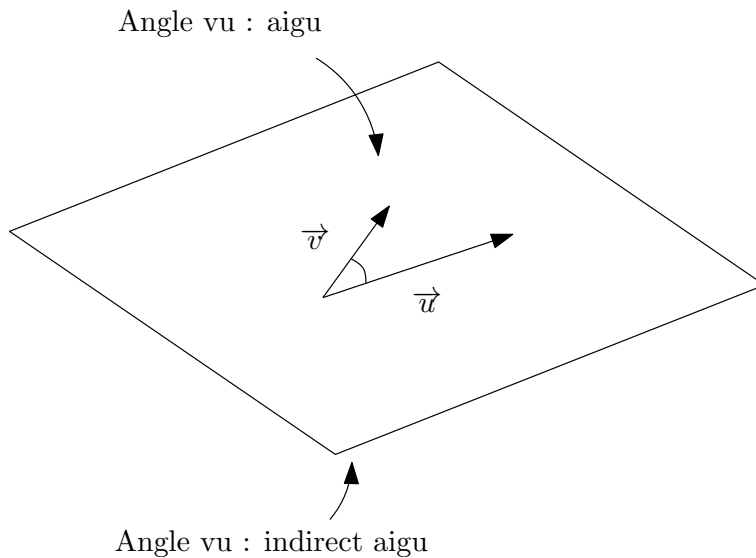


Figure 2.8 – Déterminant 2×2

Il est possible de mémoriser la formule, par le petit dessin suivant :

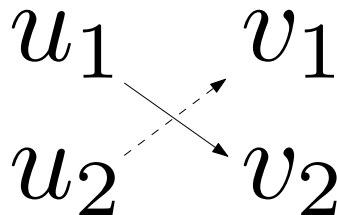


Figure 2.9 – Relations angles/côtés

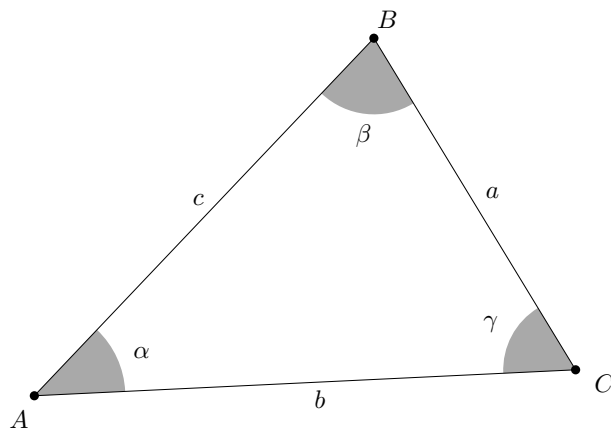


Figure 2.10 – Croisement des bissectrices

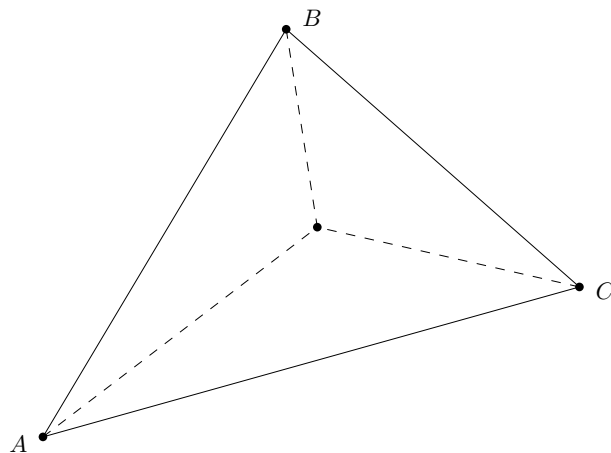


Figure 2.11 – Théorème de Morley

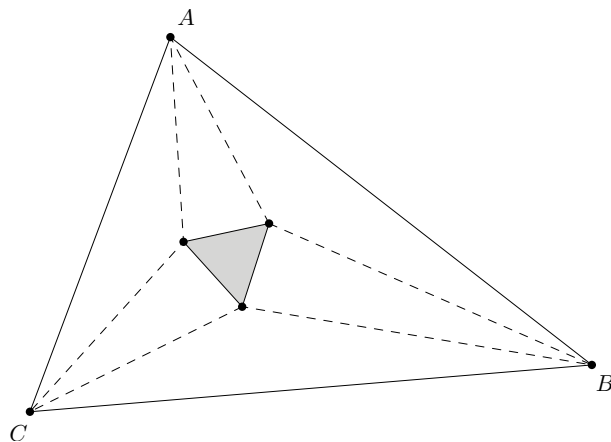
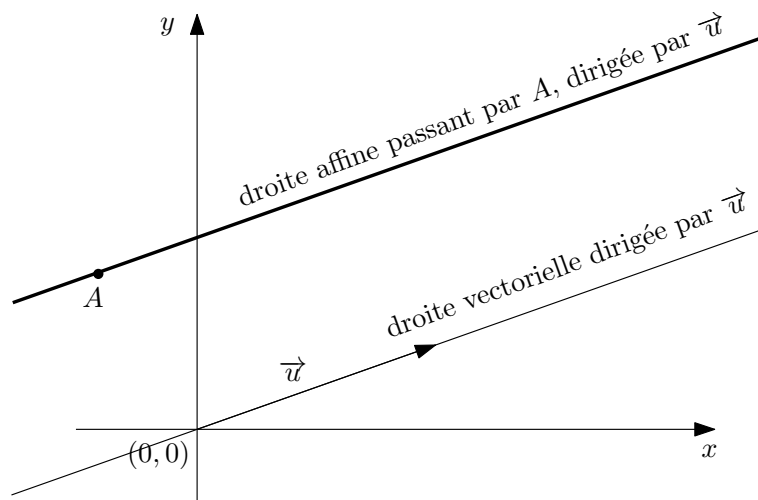


Figure 2.12 – Droites du plan



Droites du plan

Figure 2.13 – Plans de l'espace

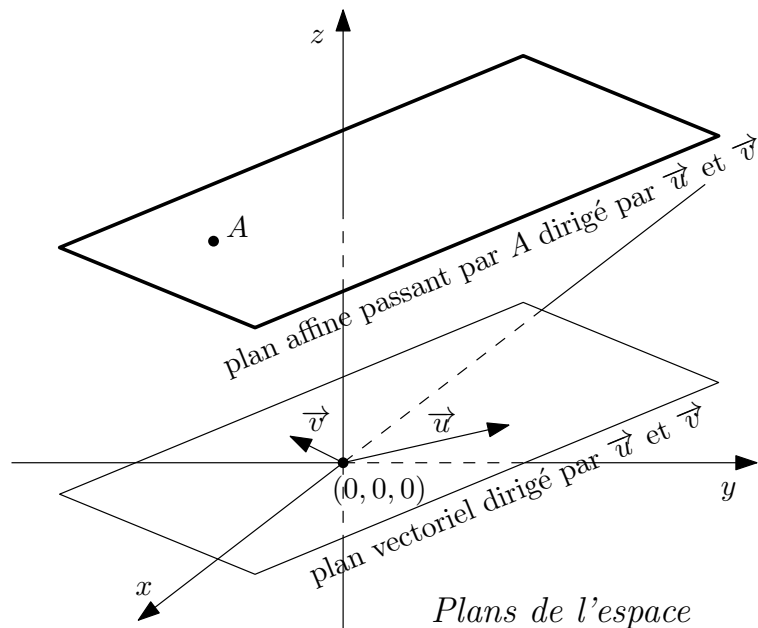


Figure 2.14 – Produit vectoriel

Il est possible de mémoriser la formule par le petit dessin suivant :

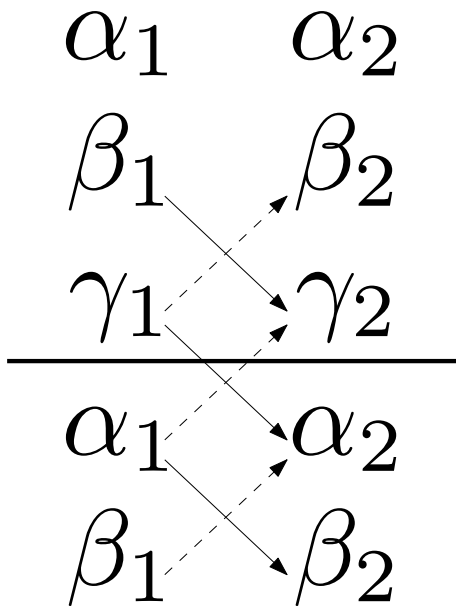


Figure 2.15 – Cercle du plan

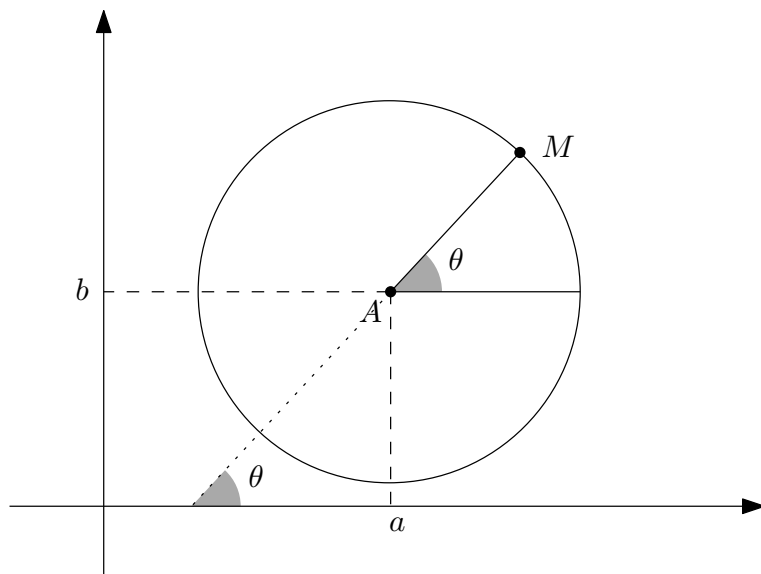


Figure 2.16 – Sphère

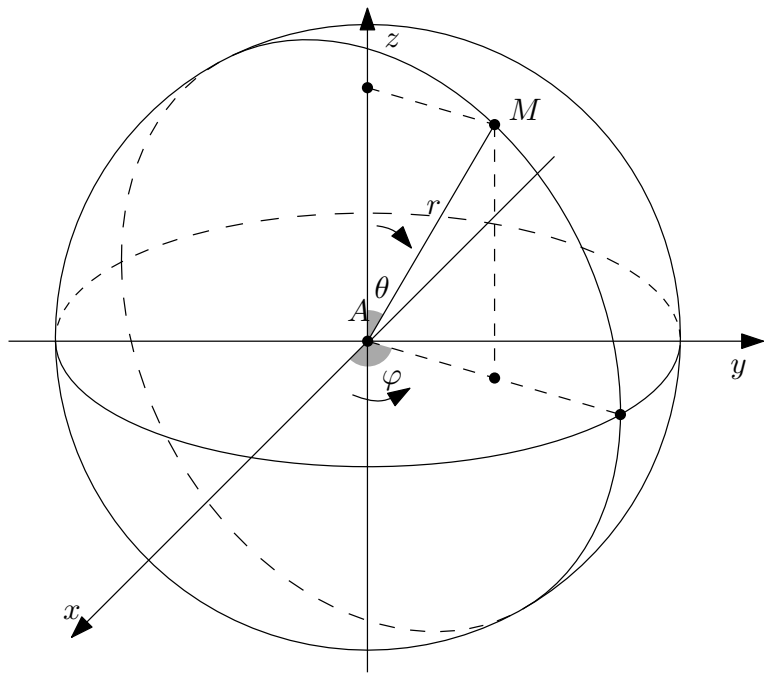


Figure 2.17 – Cercle de l'espace

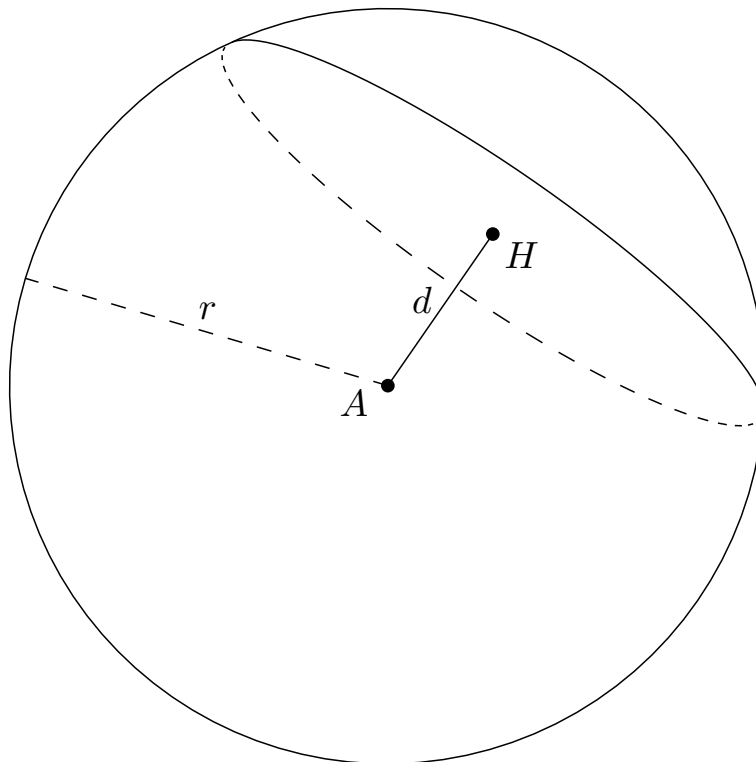


Figure 2.18 – Angle inscrit

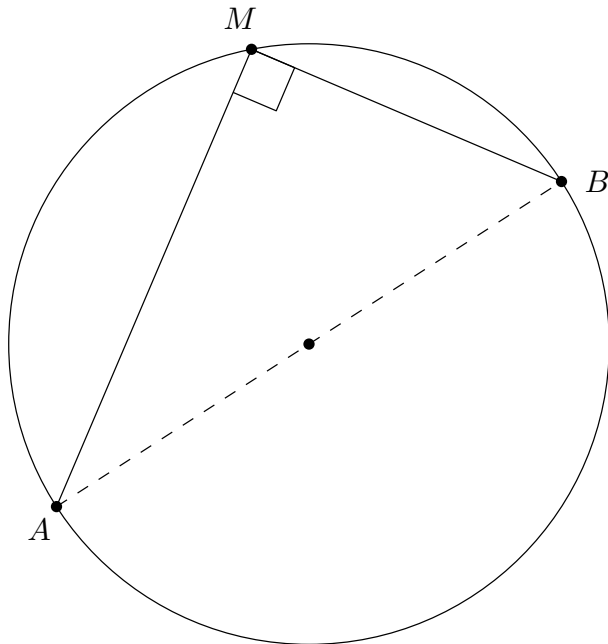


Figure 2.19 – Théorème de l'angle au centre

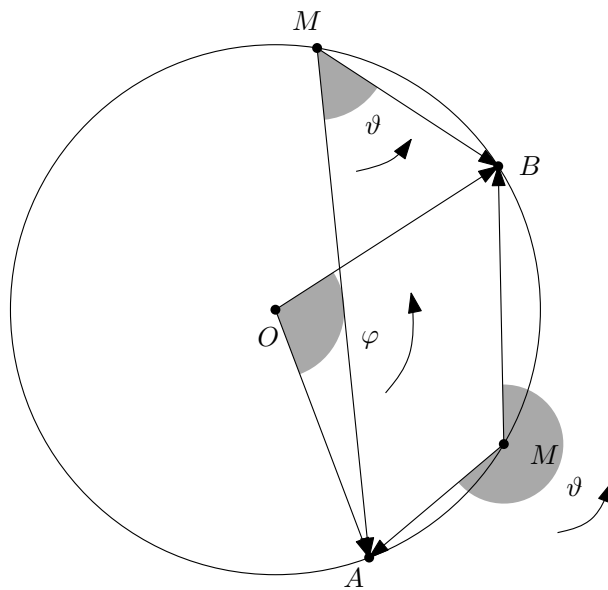


Figure 2.20 – Un parallélépipède

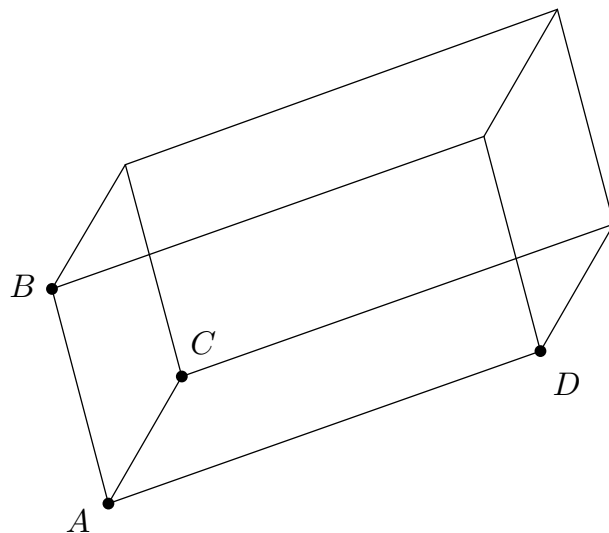
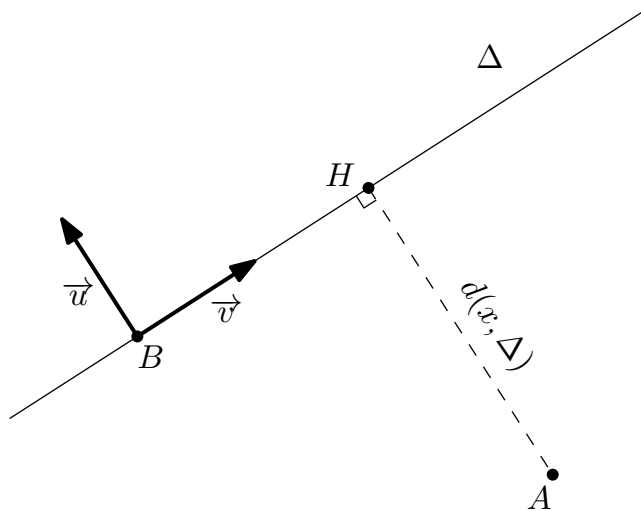
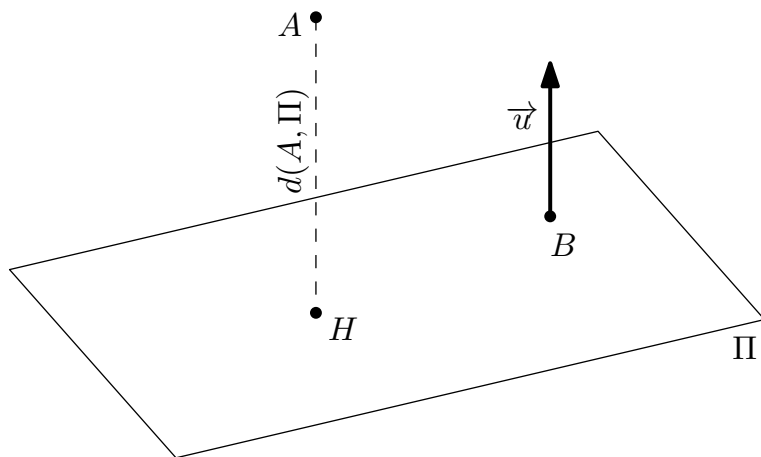


Figure 2.21 – Distance d'un point à une droite



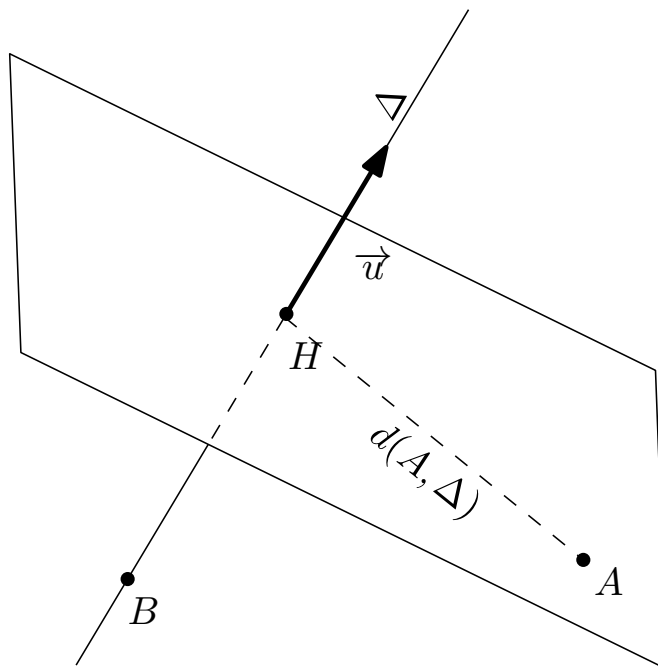
Distance d'un point à une droite du plan

Figure 2.22 – Distance d'un point à un plan



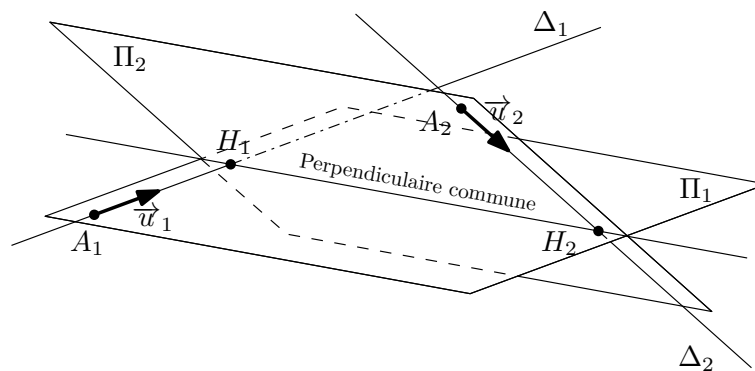
Distance d'un point à un plan

Figure 2.23 – Distance d'un point à une droite de l'espace



Distance d'un point à une droite de l'espace

Figure 2.24 – Perpendiculaire commune



Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace

Figure 2.25 – Droites parallèles

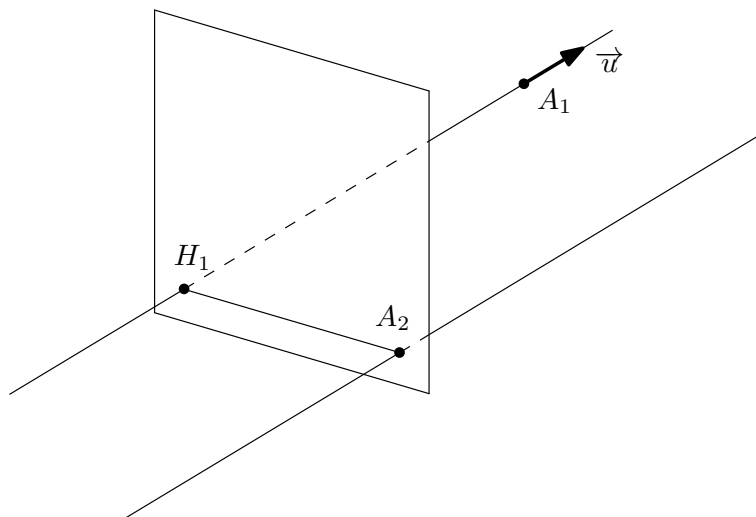
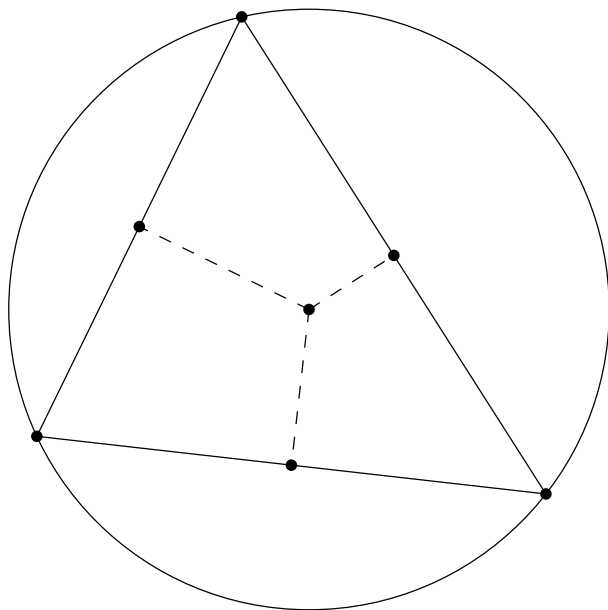
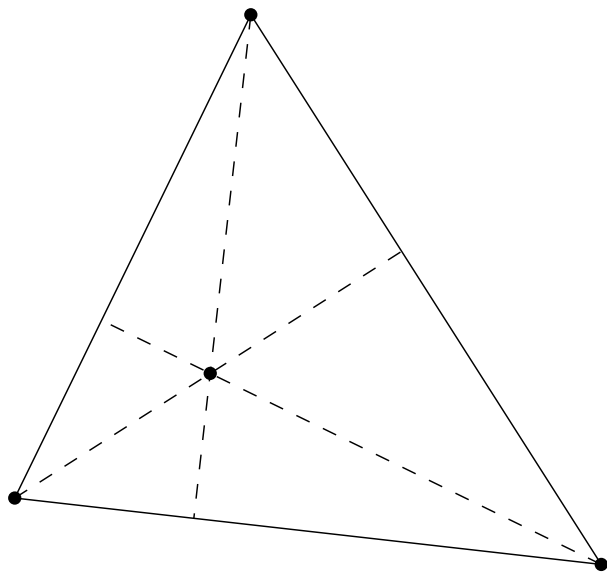


Figure 2.26 – Cercle circonscrit



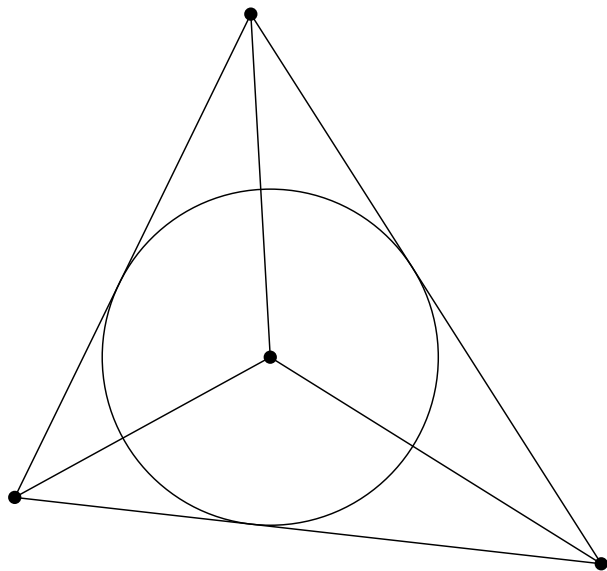
Cercle circonscrit

Figure 2.27 – Orthocentre



Orthocentre

Figure 2.28 – Cercle inscrit



Cercle inscrit

Figure 2.29 – Lieu des centres d'un cercle circonscrit

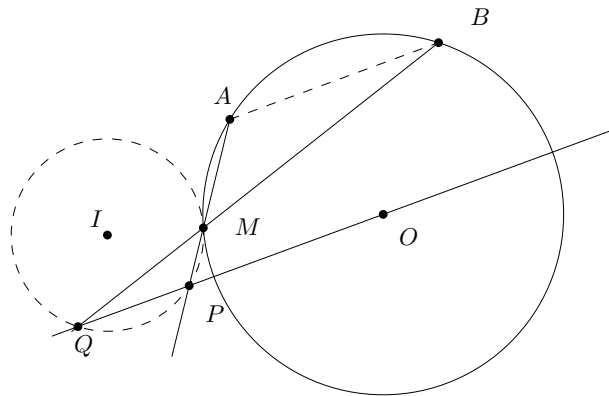


Figure 2.30 – Orthocentres alignés

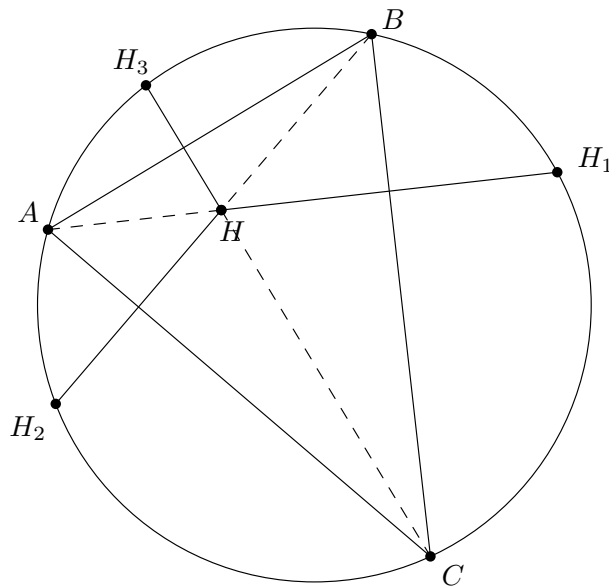


Figure 2.31 – Deux cercles

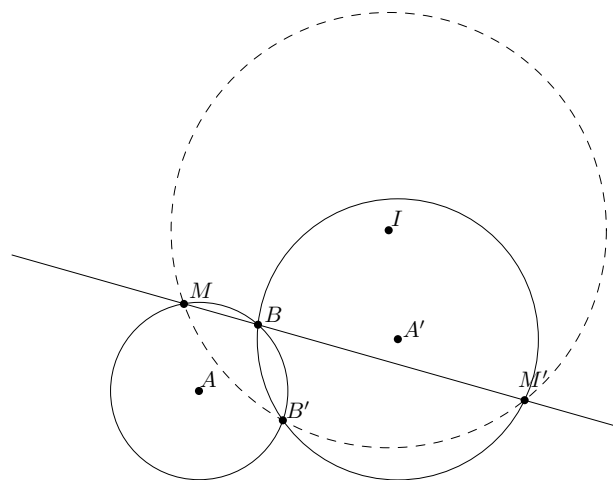


Figure 2.32 – Deux cercles sur une même sphère

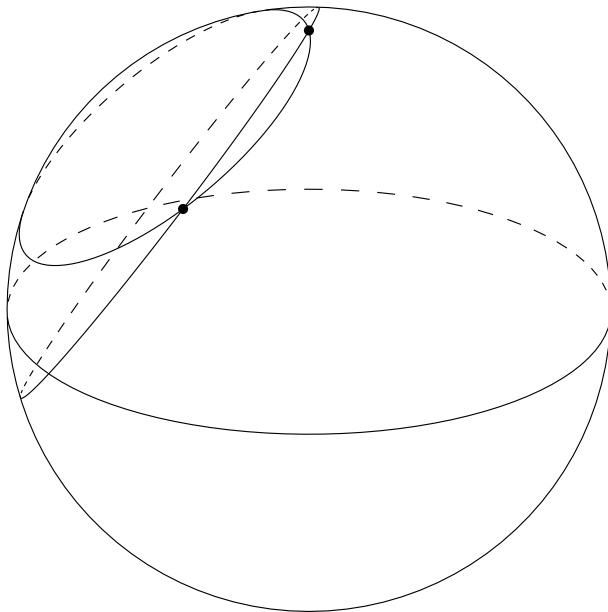


Figure 2.33 – Angle entre deux droites du plan

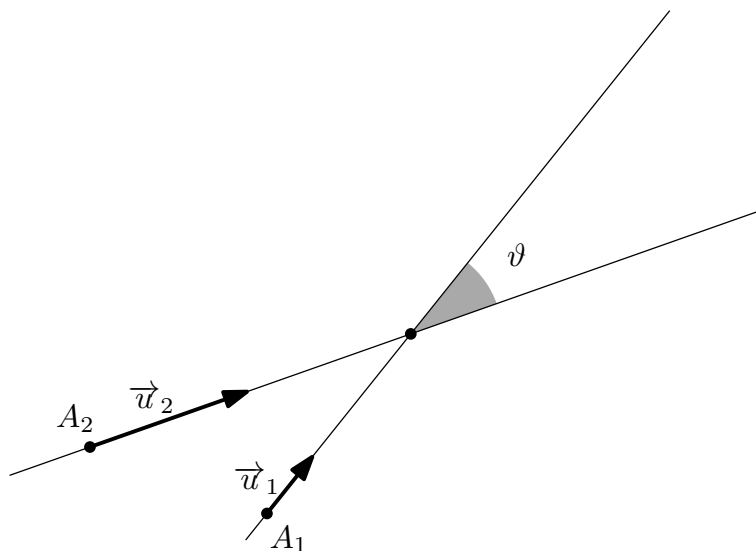


Figure 2.34 – Angle entre deux plans

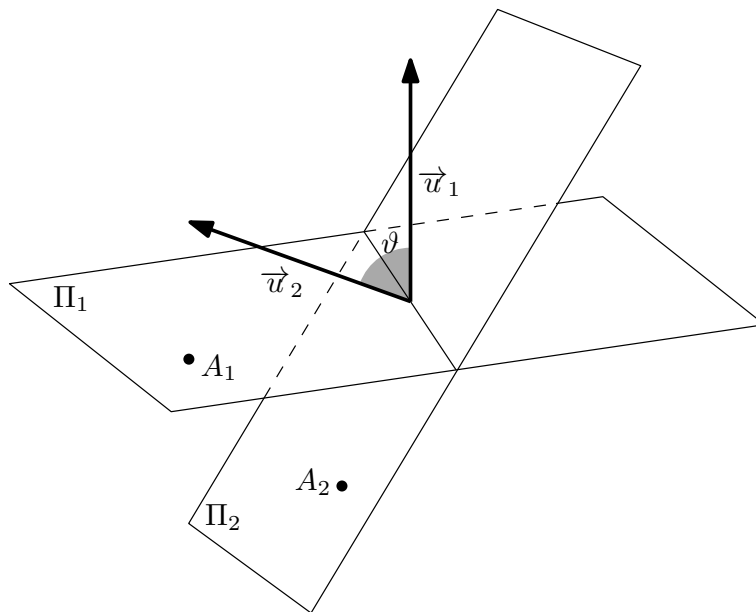


Figure 2.35 – Angle entre une droite et un plan de l'espace

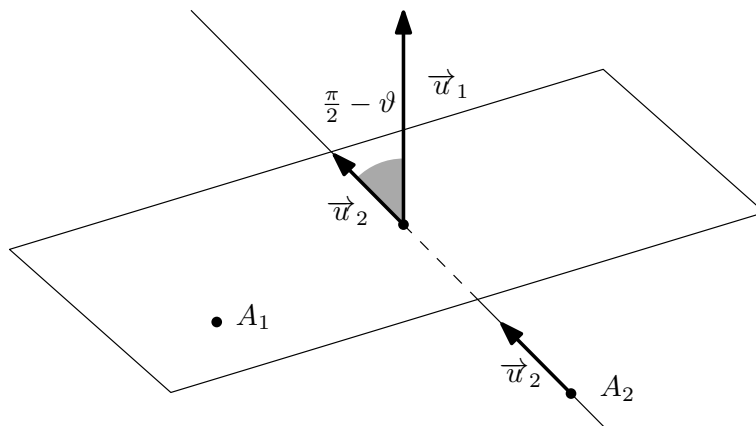


Figure 2.36 – Intersection des médianes d'un triangle

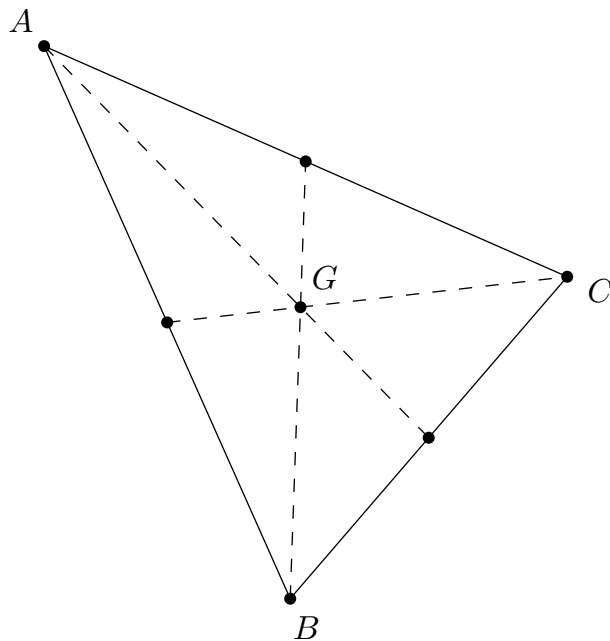


Figure 2.37 – Droite d'Euler

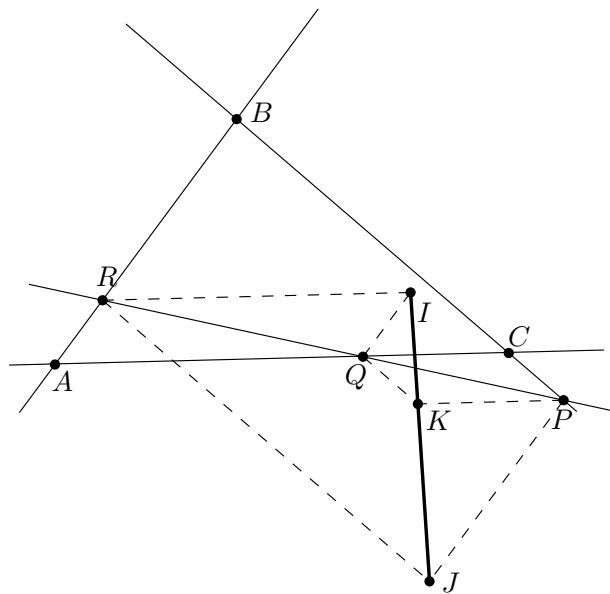


Figure 2.38 – Co-cyclicité et parabole

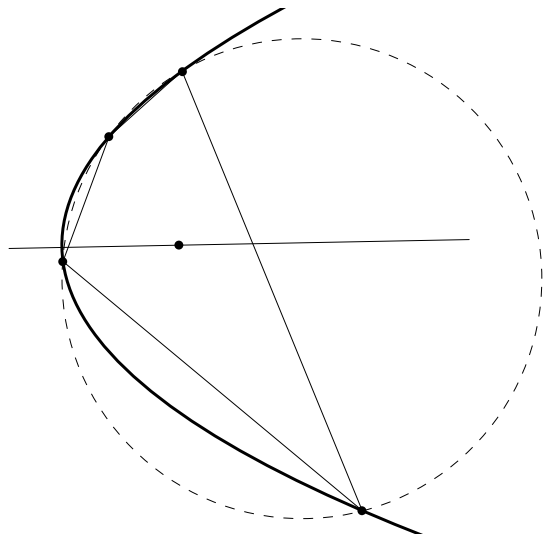


Figure 2.39 – Bimédianes d'un tétraèdre

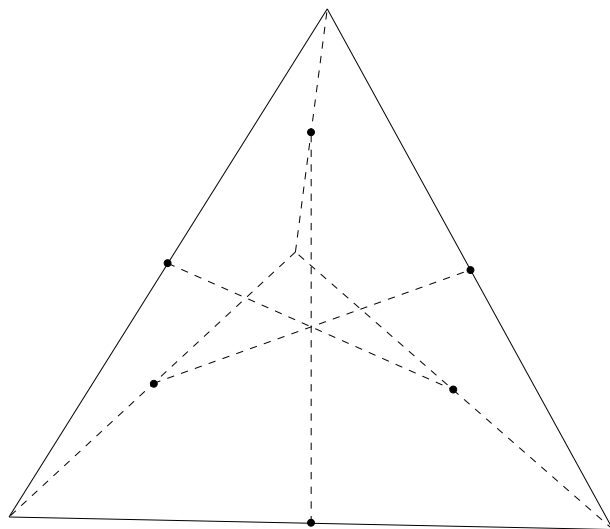


Figure 2.40 – Translation

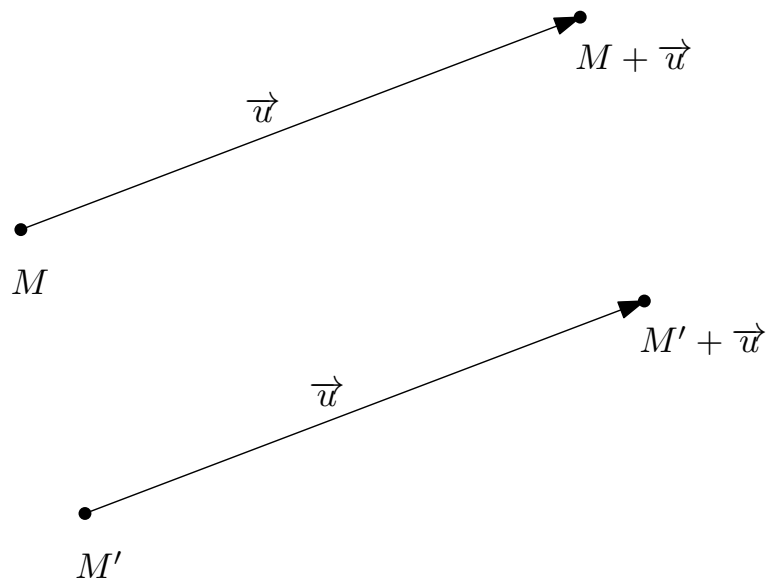


Figure 2.41 – Homothétie

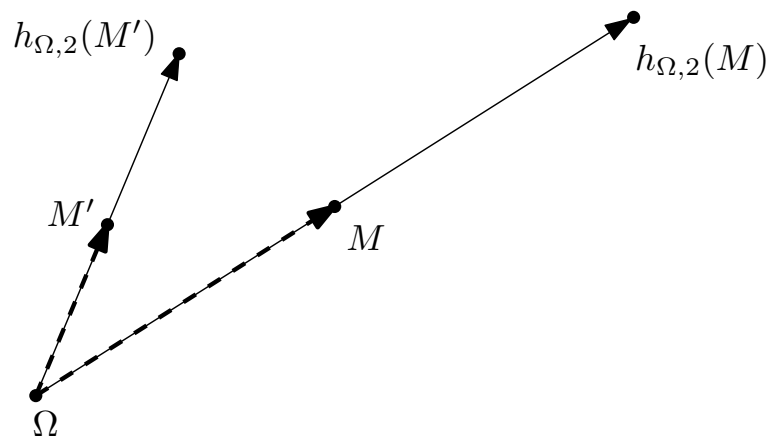


Figure 2.42 – Projection orthogonale

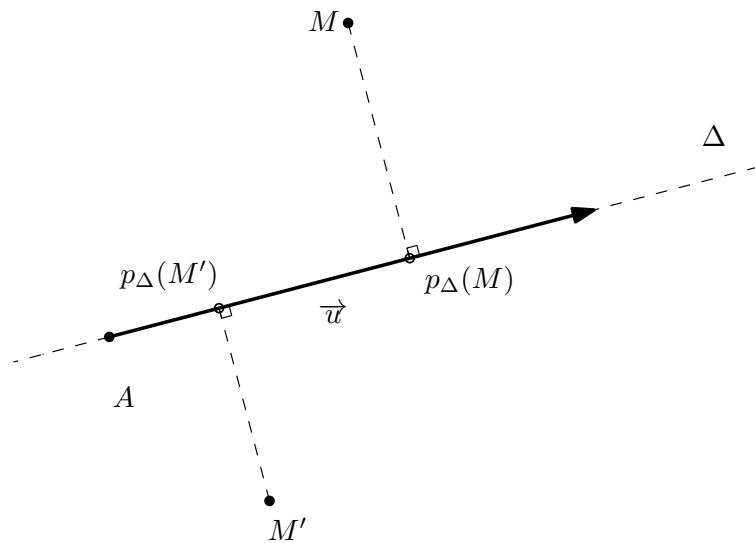


Figure 2.43 – Projection orthogonale sur un plan

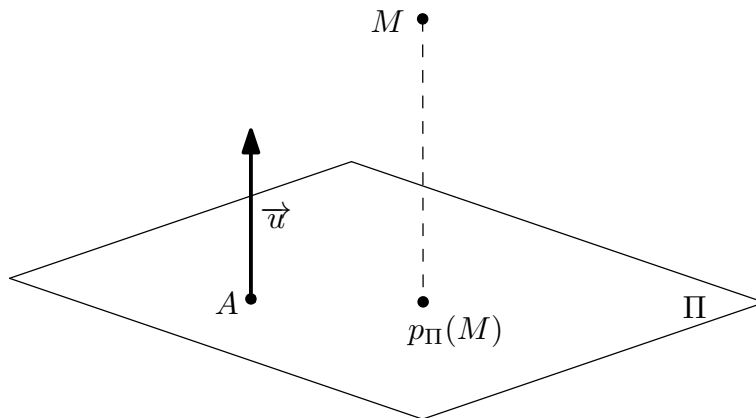


Figure 2.44 – Symétrie orthogonale par rapport à une droite

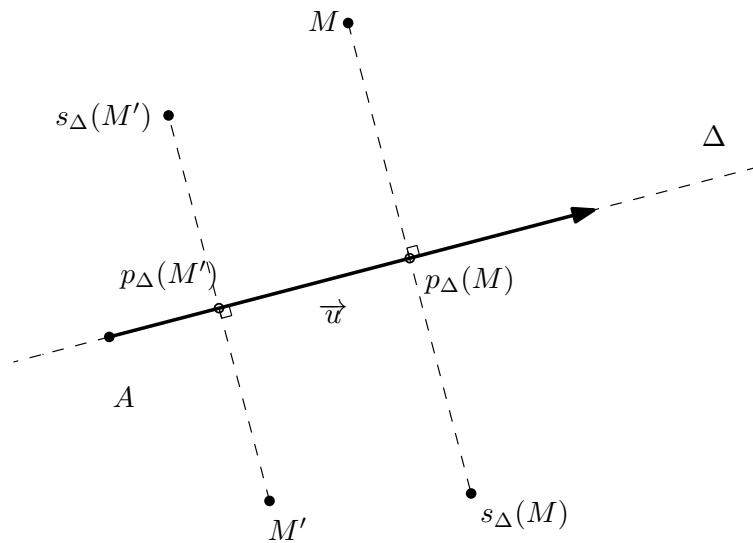


Figure 2.45 – Symétrie orthogonale par rapport à un plan

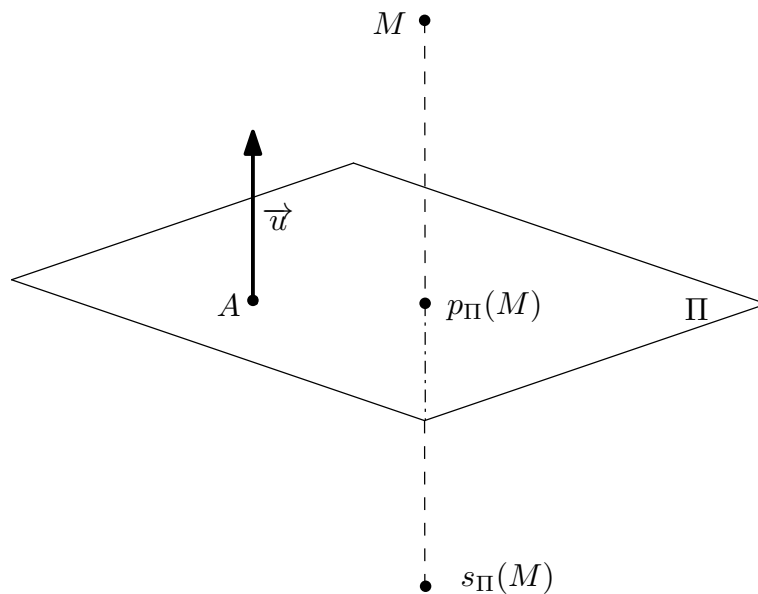


Figure 2.46 – Rotation du plan vectoriel

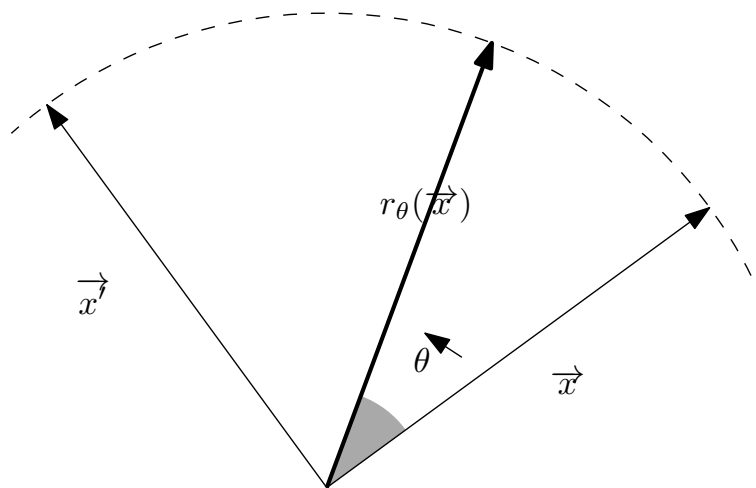


Figure 2.47 – Rotation du plan affine

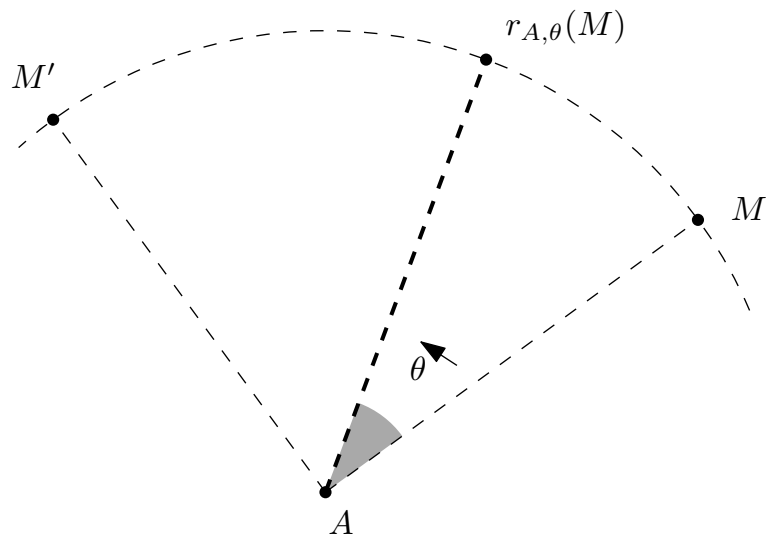


Figure 2.48 – Rotation de l'espace (vectoriel)

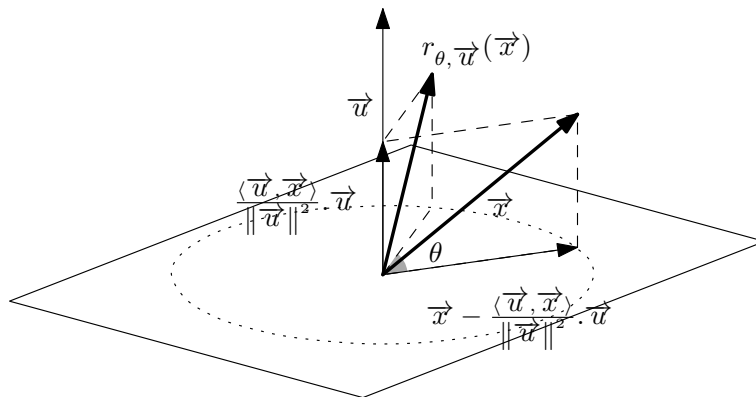


Figure 2.49 – Rotation de l'espace (affine)

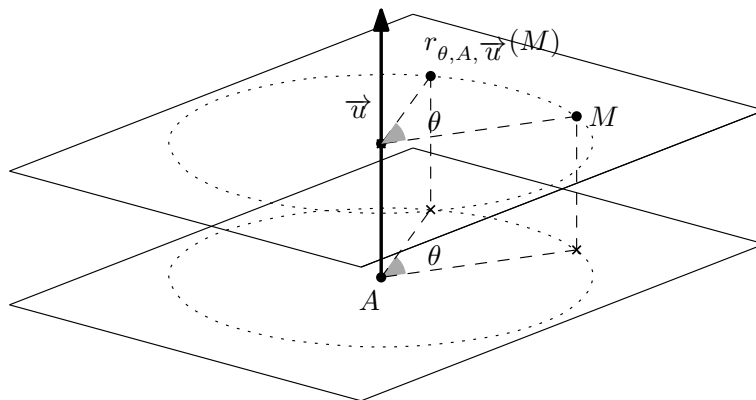


Figure 2.50 – Lieu d'une projection

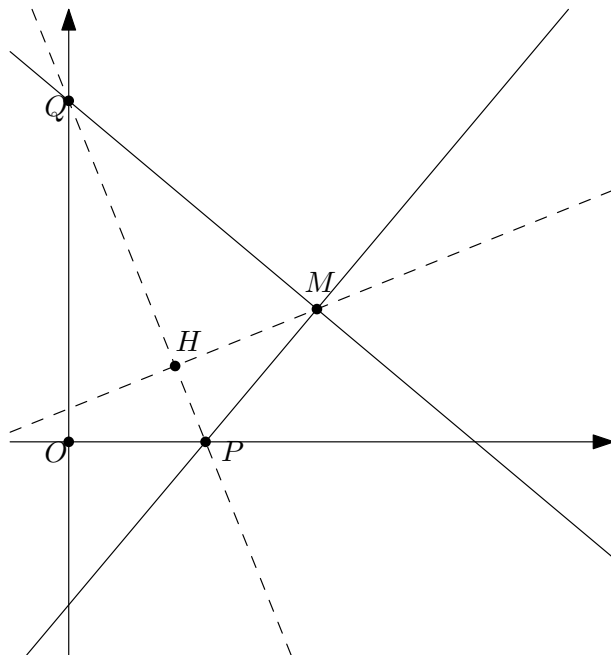


Figure 2.51 – Alignement de trois projections

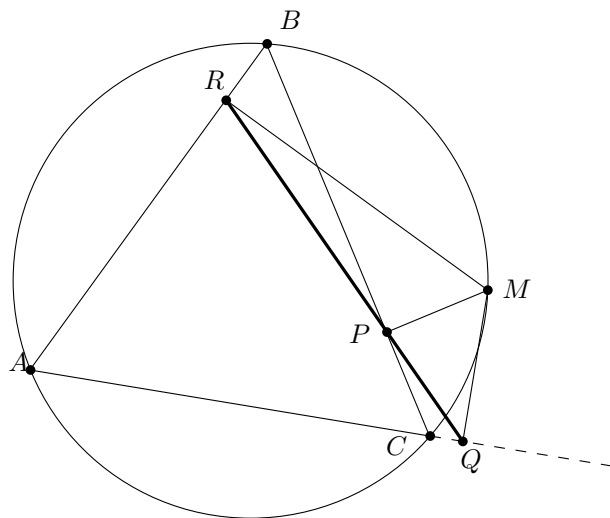


Figure 2.52 – Théorème de Feuerbach (9 points)

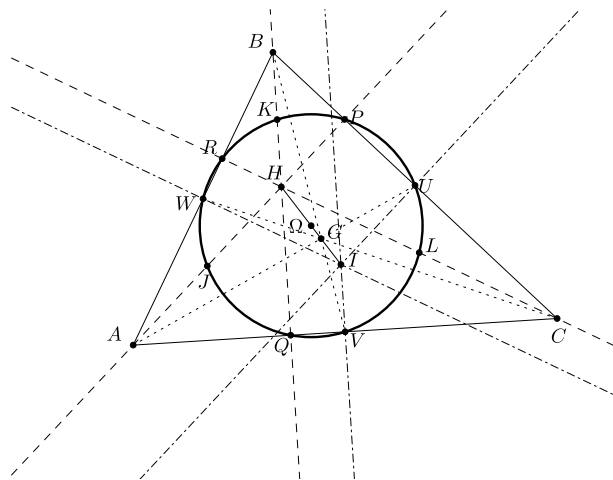


Figure 2.53 – Orthocentres alignés

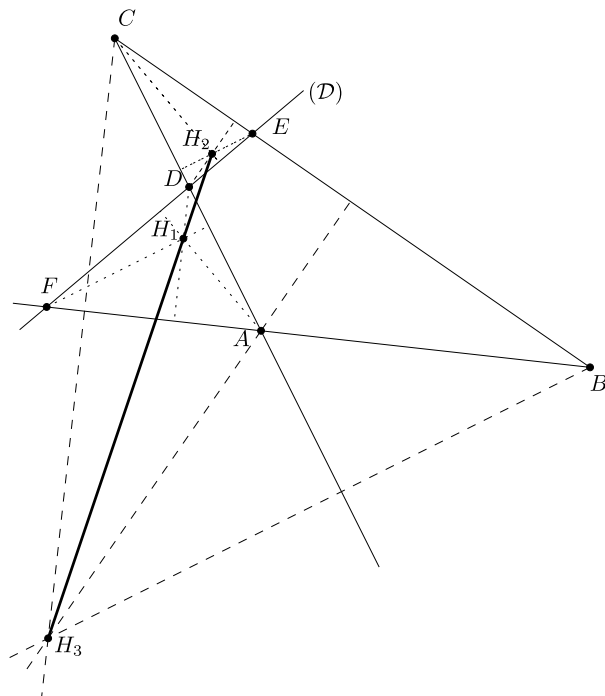
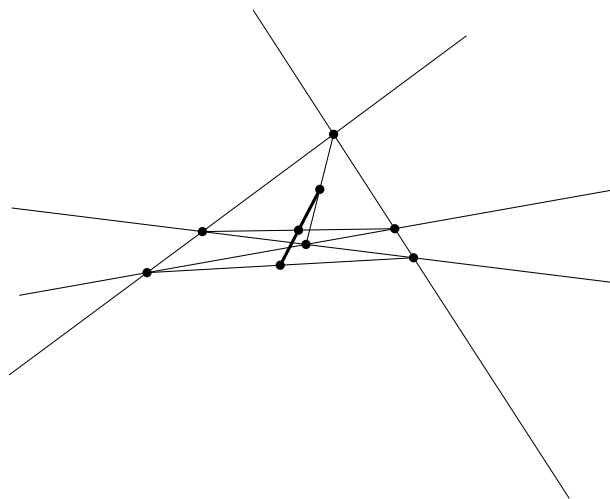


Figure 2.54 – Intersections de diagonales



Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables et systèmes de coordonnées

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment choisir des coordonnées adaptées à une situation géométrique particulière, et de voir comment cela permet de faire des calculs plus simplement.

3.1 Dérivation d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^p

Définition 3.1

Si $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$), est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , on dit que :

1. \vec{F} est *continue* sur I , si

$$\forall t \in I, \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \vec{F}(t+h) - \vec{F}(t) \right\| = 0$$

2. \vec{F} est *dérivable* sur I de *dérivée* \vec{F}' , si

$$\forall t \in I, \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \left\| \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} - \vec{F}'(t) \right\| = 0$$

Remarque 3.1

Si l'on appelle *applications composantes* de \vec{F} , les applications (f_1, \dots, f_p) définies sur I , à valeurs réelles, telles que

$$\forall t \in I, \vec{F}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))$$

Clairement, \vec{F} est continue (resp. dérivable, C^k, \dots), si toutes les fonctions f_k sont continues (resp. dérivables, C^k, \dots).
Et l'on a lorsque \vec{F} est dérivable :

$$\forall t \in I, \vec{F}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_p(t))$$

Propriété 3.1

On a alors immédiatement les calculs suivants ($\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, \vec{F} et $\vec{G} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$, toutes dérivables) :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \vec{F})' &= \lambda' \cdot \vec{F} + \lambda \cdot \vec{F}' \\ (\vec{F} + \vec{G})' &= \vec{F}' + \vec{G}' \\ \langle \vec{F}, \vec{G} \rangle' &= \langle \vec{F}', \vec{G} \rangle + \langle \vec{F}, \vec{G}' \rangle \\ (n=3) \quad (\vec{F} \wedge \vec{G})' &= \vec{F}' \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \vec{G}' \end{aligned}$$

où les fonctions utilisées sont définies par :

$$\begin{aligned}\lambda.\vec{F} &: t \mapsto \lambda(t).\vec{F}(t) \\ \langle \vec{F}, \vec{G} \rangle &: t \mapsto \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \rangle \\ \vec{F} \wedge \vec{G} &: t \mapsto \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t).\end{aligned}$$

Remarque 3.2

Interprétation géométrique de la dérivée : lorsqu'on regarde le graphe Γ_f d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , soit

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)), t \in I\}$$

On voit apparaître naturellement la fonction :

$$\vec{F} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, f(t)) \end{cases}$$

qui est aussi de classe \mathcal{C}^1 . Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in I, \vec{F}'(t) = (1, f'(t))$$

c'est donc un vecteur directeur de la tangente !

Si maintenant, on considère le lieu géométrique défini par :

$$\forall t \in I, M(t) = O + \vec{F}(t)$$

où $O = (0, \dots, 0)$ et \vec{F} définie, de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R}^p , on peut encore parler de *graphe* :

$$\Gamma = \{M(t), t \in I\}$$

et, en ce cas, le vecteur $\vec{F}'(t)$, *s'il est non nul*, dirige la tangente au graphe au point $M(t)$, car :

$$\vec{F}(t+h) = \vec{F}(t) + h.\vec{F}'(t) + \underline{o(h)}$$

où $\underline{o(h)}$ désigne un vecteur de \mathbb{R}^p dont toutes les coordonnées sont des $o(h)$. Voir la session **Wxmaxima 3.1**, page suivante.

```
(%i1) load(draw)$
```

Définissons le vecteur $\vec{F}(t)$:

```
(%i2) F(t) := [cos(3*t),sin(2*t)]$
```

Et sa dérivée :

```
(%i3) dF(t) := diff(F(t),t)$
```

```
(%i4) dF(0);
```

```
diff: second argument must be a variable; found 0#0:
```

```
  dF(t=0) -- an error.
```

```
To debug this try: debugmode(true);
```

Cela ne marche pas! Pourquoi? Parce que Wxmaxima remplace t *avant* de faire le calcul, il génère donc la commande `diff(F(0),0)` qui n'a aucun sens. Il suffit de retarder le remplacement :

```
(%i5) dF(u) := subst([t=u],diff(F(t),t))$
```

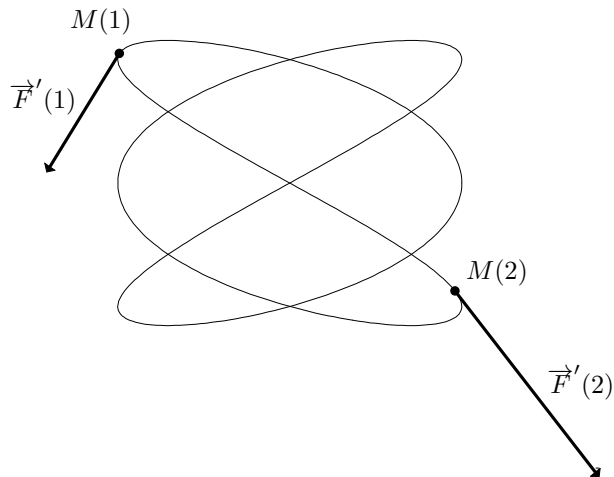
```
(%i6) dF(0);
```

```
(%o6) [0, 2]
```

Traçons.

```
(%i7) draw2d(nticks=500,
  parametric(cos(3*t),sin(2*t),t,0,2*%pi),
  color=black,
  head_length=0.05,
  vector(F(1),dF(1)),
  vector(F(2),dF(2)))$
```

Ce qui donne, après annotations :



Remarque 3.3

Pour le physicien, lorsque l'on a un mouvement défini dans \mathbb{R}^p ($p = 2$ ou 3) par (t s'appelle *le temps*) :

$$\forall t \in I, M(t) = O + \vec{F}(t)$$

il est important de différencier *la trajectoire* (le graphe)

$$\{M(t), t \in I\}$$

de la manière dont cette trajectoire est parcouru (*la loi horaire*, relation entre le temps et le paramètre « naturel » de la trajectoire). Si \vec{F} est de classe \mathcal{C}^1 , $\vec{F}'(t)$ est appelée *vitesse instantanée à l'instant t* , et sera souvent notée (par le physicien) :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \stackrel{\text{Not}}{=} \vec{F}'(t)$$

Exemple 3.1

Prenons le cercle de centre O de rayon 1 (dans le repère orthonormé canonique du plan), on peut avoir un mouvement uniforme :

$$x(t) = \cos(t) \text{ et } y(t) = \sin(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

ou un mouvement de plus en plus rapide :

$$x(t) = \cos(\exp(t)) \text{ et } y(t) = \sin(\exp(t))$$

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Soit $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction définie, dérivable sur I . On pose :

$$\varphi : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|\vec{F}(t)\| \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est minorée.

(b) On suppose que φ a un minimum en $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, que peut-on dire de

$$\vec{F}(t_0) \text{ et } \vec{F}'(t_0) ?$$

Dans le plan \mathbb{R}^2

3.1.2 Soit ϕ , l'application définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, \phi(\rho, \theta) = (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta))$$

On pose, si $\rho_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés :

$$\phi(\rho_0, \bullet) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \phi(\rho_0, \theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi(\bullet, \theta_0) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \rho \mapsto \phi(\rho, \theta_0) \end{cases}$$

(a) Calculer

$$(\phi(\rho_0, \bullet))' \text{ et } (\phi(\bullet, \theta_0))'$$

On suppose dorénavant que $\rho_0 \neq 0$ et on pose :

$$\vec{e}_{\rho_0}(\rho_0, \theta_0) = (\phi(\bullet, \theta_0))'(\rho_0) \text{ et } \vec{e}_{\theta_0}(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{\rho_0} \cdot (\phi(\rho_0, \bullet))'(\theta_0)$$

On peut constater que ces deux vecteurs ne dépendent en fait que de θ_0 . Nous les noterons donc, plus simplement, $\vec{e}_{\rho_0}(\theta_0)$ et $\vec{e}_{\theta_0}(\theta_0)$.

(b) Montrer que $(\vec{e}_{\rho_0}(\theta_0), \vec{e}_{\theta_0}(\theta_0))$ forment une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

Soit r , une application de classe \mathcal{C}^2 définie sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R}^* . On pose alors :

$$\vec{u} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto r(\theta) \cdot \vec{e}_{\rho}(\theta) \end{cases}$$

(c) Calculer, dans la base orthonormée $(\vec{e}_{\rho}(\theta), \vec{e}_{\theta}(\theta))$, les dérivées première et seconde de \vec{u} .

3.1.3 Soit le point défini dans le repère orthonormé canonique de \mathbb{R}^2 par

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \text{ et } y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

(a) Montrer que sa trajectoire est incluse dans un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r .

(b) Tout le cercle est-il parcouru ?

(c) En prenant comme paramètre « naturel », la mesure θ de l'angle orienté entre \vec{e}_x et $\vec{\Omega M}$, préciser la loi horaire (soit θ en fonction de t).

Dans l'espace \mathbb{R}^3

3.1.4 Soit \vec{F} , \vec{G} et \vec{H} , trois applications définies, dérivables de I dans \mathbb{R}^3 . Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \wedge \vec{H}(t) \rangle \end{cases}$$

est dérivable sur I et en calculer sa dérivée.

3.2 Fonctions de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}^p

3.2.1 Ouverts de \mathbb{R}^n

Rappel 3.1

Dans \mathbb{R}^n , on note :

— les vecteurs sous la forme :

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

— la norme euclidienne de \vec{x} :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

— le produit scalaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{x}' :

$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = x_1 \times x'_1 + \dots + x_n \times x'_n$$

Définition 3.2 – Ouverts de \mathbb{R}^n

Une partie $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ sera dite *ouverte* (on dira souvent *ouvert* pour désigner une *partie ouverte*), si

$$\forall \vec{x} \in \Delta, \exists r > 0, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq r \Rightarrow \vec{y} \in \Delta$$

Voir la figure 3.1, page 235.

Remarque 3.4

Cela signifie essentiellement que la partie n'a pas de bord ! Comparer aux intervalles ouverts de \mathbb{R} .

Définition 3.3 – Connexes par arcs de \mathbb{R}^n

Une partie $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ est dite *connexe par arcs* si elle vérifie :

$$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta^2, \exists \varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n), \begin{cases} \forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in \Delta \\ \varphi(0) = \vec{x} \\ \varphi(1) = \vec{y} \end{cases}$$

Remarque 3.5

Cela signifie qu'entre deux vecteurs quelconques de Δ , on peut tracer un arc continu, inclus dans Δ et reliant ces deux vecteurs.

Exemple 3.2

Connexe par arcs

Ainsi, une partie en un seul morceau ^a est connexe par arcs. Voir la figure 3.2, page 236.

Non connexe par arcs

Une partie en deux morceaux ne sera pas connexe par arcs. Voir la figure 3.3, page 237.

^a. C'est pour définir proprement ce genre d'expression intuitive que l'on a introduit la notion de connexe par arcs...

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Dans \mathbb{R}^2 les parties suivantes sont-elles ouvertes ? Connexes par arcs ? (Le montrer)

Notons

$$\Delta_1 = \{\vec{x}, \|\vec{x}\| \leq 1\} \text{ et } \Delta_2 = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$$

(a) $\Delta_1 ? \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1 ? \Delta_1 \setminus \{\vec{0}\} ?$

(b) $\Delta_2 ? \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2 ? \Delta_2 \setminus \{\vec{0}\} ?$

(c) $\Delta_1 \setminus \Delta_2 ? \Delta_1 \cup \Delta_2 ? \Delta_1 \cap \Delta_2 ?$

(d) $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ? (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ? (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ?$

3.2.2 Montrer que les connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

3.2.3 Soit $n \geq 1$, on appelle *sphère unité de \mathbb{R}^n* , l'ensemble :

$$S_n = \{ \vec{x}, \|\vec{x}\| = 1 \}$$

Pour quelles valeurs de n , S_n est-elle connexe par arcs ?

3.2.4 (Très important) Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n , montrer que \mathcal{O} est connexe par arcs si, et seulement si :

$$\left[\forall (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \text{ ouverts de } \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} \mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \\ \emptyset = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \end{array} \mid \Rightarrow \mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \text{ ou } \mathcal{O}_2 = \mathcal{O} \right]$$

3.2.5 Soit A et B deux parties de \mathbb{R}^n , $a \in A$.

(a) On suppose que B est ouverte, montrer que :

$$a + B = \{a + b, b \in B\} \text{ et } A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\} \text{ sont ouvertes}$$

(b) On suppose que B est connexe par arcs, peut-on en dire autant de $a + B$? de $A + B$?

(c) On suppose que A et B sont connexes par arcs, montrer que $A + B$ est aussi connexe par arcs.

3.2.6 Soit $n \geq 2$, on considère :

$$\Gamma_n = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n^2 \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \right\}$$

(a) Montrer que Γ_2 est connexe par arcs.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_2$ n'est pas connexe par arcs.

(c) Montrer que, si $n \geq 3$, alors Γ_n et $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_n$ sont connexes par arcs.

3.2.2 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Dans tout ce paragraphe, Δ désigne une partie ouverte non vide de \mathbb{R}^n .

Définition 3.4

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, soit \vec{x}_0 un élément de Δ , on dit que f est *continue en \vec{x}_0* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \vec{x} \in \Delta, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq \varepsilon$$

Définition 3.5

On dit que $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue sur Δ* si pour tout $\vec{x}_0 \in \Delta$, f est continue en \vec{x}_0 .

Notation 3.1

Lorsque f est une fonction et $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur, on note

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Not}}{=} f(\vec{x}) = f((x_1, \dots, x_n))$$

Définition 3.6

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite *continue sur Δ* si :

$$\forall \vec{x}_0 \in \Delta, \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \vec{x} \in \Delta, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| \leq \varepsilon}_{\text{exprime la continuité de } f \text{ en } \vec{x}_0}$$

On a alors les *applications composantes de f* définies par :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k : \Delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{x} \in \Delta, f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x})) \in \mathbb{R}^p$$

On obtient alors :

$$f \text{ continue sur } \Delta \iff \left[\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \text{ continue sur } \Delta \right]$$

Remarque 3.6

Lorsque $n = 2$ et $p = 1$, il est facile de *voir* si une fonction est continue ou non, en regardant (comme sur une carte de montagne) les lignes de niveaux (courbes $f(x, y) = Cste$).

Une fonction continue

Voir la figure 3.4, page 238.

Une fonction discontinue (en 0)

Voir la figure 3.5, page 239.

Propriété 3.2

L'ensemble des fonctions continues sur Δ à valeurs dans \mathbb{R}^p est stable par addition, multiplication par un scalaire (c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel). Si, de plus, $p = 1$ (fonctions à valeurs réelles), alors il est stable par multiplication et par division par une fonction ne s'annulant pas sur Δ .^a On le notera bien sûr $\mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}^p)$.

^a. On peut énoncer les mêmes résultats pour la continuité en un point...

Propriété 3.3

Si $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \Delta' \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont continues et $\Delta' \supset f(\Delta)$, alors $g \circ f$ est continue sur Δ .

Remarque 3.7

Les projections canoniques

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k, \quad (k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$$

sont continues sur \mathbb{R}^n .

Propriété 3.4

Les fonctions polynomiales (à plusieurs variables) sont continues. Elles sont polynomiales en chaque variable. Par exemple, pour $n = 2$:

$$(x, y) \mapsto x \times y^2 + 2x^3 - 4x^4 \times y^3$$

est continue.

Les fonctions rationnelles (à plusieurs variables) sont continues (quotients de fonctions polynomiales) sur leur ensemble de définition.

一切多元初等函数在其定义域内都是连续的。

Comment montre-t-on qu'une fonction est continue ?

1. On utilise d'abord les règles de combinaison connues (addition, multiplication, composition...)
2. Pour les éventuels points particuliers \vec{x}_0 , on cherche une majoration faisant intervenir la norme de \vec{x}_0 .

对于分段函数的连续性要用定义来进行研究。

Exemple 3.3 – Démonstration d'une continuité (\mathbb{R}^2)

Soit la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Cette fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, car c'est une fonction rationnelle.
- Pour étudier la continuité en $(0, 0)$, on écrit, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{N^3}{N^2} = N \xrightarrow{N \rightarrow 0} 0$$

où on a posé :

$$N = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ et utilisé } |x| \leq N \text{ et } y^2 \leq N^2$$

Voir la figure 3.6, page 240.

Exemple 3.4 – Démonstration d'une continuité (\mathbb{R}^3)

Soit la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}{x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2}\right) & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— La fonction est bien définie, car :

$$x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 + z^2 = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

et

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 0$$

— La fonction est continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, car c'est la composée de fonctions continues.

— La fonction est continue en $(0, 0, 0)$ car :

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}{x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2} \geq \frac{N}{\frac{5}{2}N^2} = \frac{2}{5} \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow 0} +\infty$$

et

$$\exp(-t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

On a posé :

$$N = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et utilisé } x \times y \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Comment montre-t-on qu'une fonction n'est pas continue en \vec{a} ? En construisant une fonction continue φ définie sur un voisinage I de 0, telle que ^a :

$$\forall t \in I, \varphi(t) \in \Delta, \varphi(0) = \vec{a} \text{ et } f \circ \varphi(t) \not\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(\vec{a})$$

a. En effet, si f et φ sont continues, alors $f \circ \varphi$ devrait l'être.

Exemple 3.5 – Démonstration d'une discontinuité

Cas simple

La fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$, car :

$$\varphi(t) = (t, t) \text{ donne } \forall t \neq 0, f \circ \varphi(t) = \frac{1}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\not\rightarrow} 0 = f(0, 0)$$

Voir la figure 3.7, page 241.

Cas plus compliqué

La fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$, car :

$$\varphi(t) = (t^3, t^2) \text{ donne } \forall t \neq 0, f \circ \varphi(t) = 1 \underset{t \rightarrow 0}{\not\rightarrow} 0 = f(0, 0)$$

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x \times y)}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

3.3.2 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x \times y} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

3.3.3 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1+x+y^2) \times \sin(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = 1 + x \end{cases}$$

3.3.4 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y \times \ln(x^2 \times y)}{1 - (x \times y)^2} & \text{si } x \times y \notin \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \times y = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \times y = 1 \end{cases}$$

3.3.5 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \times \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

3.3.6 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \times y \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

3.3.7 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^p \times y^q}{x^2 + x \times y + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

avec $(p, q) \in \mathbb{R}^*$.

3.3.8 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ (x, x) \mapsto g'(x) \end{cases}$$

où $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.2.3 Dérivées partielles

Dans tout ce paragraphe, Δ désigne une partie ouverte non vide de \mathbb{R}^n .

Rappel 3.2

La base canonique de \mathbb{R}^n est notée (sans référence à n)

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ où } \vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (\delta_{i,k})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

Définition 3.7

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{x}_0 \in \Delta$, on appelle *k-ième application partielle de f en \vec{x}_0* , l'application définie par :

$$\varphi_k^{\vec{x}_0} : t \mapsto f(\vec{x}_0 + t.\vec{e}_k)$$

On dit que f admet une *dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en \vec{x}_0* si la fonction

$$\varphi_k^{\vec{x}_0} \text{ est dérivable en } 0$$

研究多元函数 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{x}_0 \in \Delta$ 在点 \vec{x}_0 处关于第 k 个变量的偏导数的本质是研究一元函数 $\varphi_k^{\vec{x}_0} : t \mapsto f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_k)$ 的导数。

Notation 3.2

On note :

$$\partial_k f(\vec{x}_0) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \text{ ou } df_{\vec{x}_0}(\vec{e}_k)$$

le nombre dérivé obtenu.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

Exemple 3.6

Soit la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\varphi_1^{(0,0)}(t) = 0 \text{ donc } \partial_1 f(0, 0) = 0$$

De même, on a :

$$\varphi_2^{(1,1)}(t) = f(1, 1+t) = \frac{(1+t)^2}{1+(1+t)^2} \quad \text{donc } \partial_2 f(1, 1) = \frac{1}{2}$$

Notation 3.3

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tels que, en tout $\vec{x}_0 \in \Delta$, la dérivée partielle $\partial_k f(\vec{x}_0)$ existe, on définit alors la k -ième fonction dérivée partielle de f par :

$$\partial_k f \stackrel{\text{Not}}{=} \begin{cases} \Delta \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \vec{x} \mapsto \partial_k f(\vec{x}) \end{cases}$$

On la note aussi parfois :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Définition 3.8

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on dit que f est de classe \mathcal{C}^1 si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_k f \text{ existe et est continue sur } \Delta$$

L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur Δ est un \mathbb{R} -espace vectoriel qui sera noté $\mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 3.1

On a :

$$\mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p) \subset \mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}^p)$$

Toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est continue.

Démonstration

- En se ramenant aux fonctions composantes, on peut supposer $p = 1$.
- On le montre par récurrence sur n . Pour ne pas se perdre dans les notations, montrons-le pour $n = 2$ (la démonstration se généralise facilement).
Soit $(x_0, y_0) \in \Delta$. Soit $(x, y) \in \Delta$, supposons pour simplifier que le carré de diagonale (x_0, y_0) et (x, y) est inclus dans Δ^a , alors :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|$$

le théorème des accroissements finis nous dit alors, qu'il existe $x_1 \in [x_0, x]$ et $y_1 \in [y_0, y]$ tels que :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |x - x_0| \times |\partial_1 f(x_1, y)| + |y - y_0| \times |\partial_2 f(x_0, y_1)|$$

la continuité des dérivées partielles permet de conclure.

a. Ce qui est possible puisque Δ est supposé ouvert.

Remarque importante 3.8

Si les dérivées partielles ne sont plus continues, le résultat devient faux ! Ainsi la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

admet des dérivées partielles en tout (x, y) et n'est pas continue en $(0, 0)$! Voir la session `Wxmaxima 3.2`, de la présente page.

Session Wxmaxima 3.2 – Dérivées partielles non continues

```
(%i1) f(x,y) := x*y/(x^2+y^2);
```

```
(%o1) f(x,y) :=  $\frac{x y}{x^2 + y^2}$ 
```

En dehors de $(0, 0)$ les calculs sont comme d'habitude.

```
(%i2) diff(f(x,y),x);
```

```
(%o2)  $\frac{y}{y^2 + x^2} - \frac{2 x^2 y}{(y^2 + x^2)^2}$ 
```

```
(%i3) diff(f(x,y),y);
```

```
(%o3)  $\frac{x}{y^2 + x^2} - \frac{2 x y^2}{(y^2 + x^2)^2}$ 
```

En $(0, 0)$, il faut passer par les applications partielles :

```
(%i4) f(0,t);f(t,0);
```

```
(%o4) 0
```

```
(%o5) 0
```

Mais la fonction n'est pas continue en $(0, 0)$.

(%i6) f(t,t);

(%o6) $\frac{1}{2}$

Proposition 3.2

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^1 et $\vec{x}_0 \in \Delta$, alors

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^n h_k \cdot \partial_k f(\vec{x}_0) + o\left(\|\vec{h}\|\right)$$

où l'expression $o\left(\|\vec{h}\|\right)$ désigne une fonction ψ définie dans un voisinage de 0, à valeurs dans \mathbb{R}^p qui vérifie :

$$\left\| \frac{\psi(t)}{t} \right\| \xrightarrow[t \rightarrow 0, t \neq 0]{} 0$$

ou, de manière équivalente, toutes les applications composantes sont des $o(t)$. On dit alors que f possède un développement limité à l'ordre 1 en \vec{x}_0 .

Démonstration

- Comme précédemment, nous nous ramenons au cas $p = 1$.
- La démonstration se fait par récurrence sur n , nous allons l'expliciter pour $n = 2$, la généralisation ne pose pas de problème particulier (sauf des notations indigestes). Pour $n = 2$, soit $(x_0, y_0) \in \Delta$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, sous les mêmes hypothèses que pour la démonstration précédente. Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \times \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| = \delta(h, k)$$

vérifie

$$0 \leq \delta(h, k) \leq \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \times \left(\left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \left| f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \right)$$

Le théorème des accroissements finis et la continuité des dérivées partielles permettent de conclure à :

$$\delta(h, k) \xrightarrow{\|(h, k)\| \rightarrow 0} 0$$

Remarque 3.9

Les dérivées partielles se comportent essentiellement comme les dérivées usuelles (sommes, produits, quotients).

Remarque importante 3.10

Pour la composition, le plus simple est d'utiliser les développements limités.

Exemple 3.7

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} et où $\varphi(I) \subset \Delta$. Alors, $f \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 et on peut en écrire son développement limité à l'ordre 1. Notons $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications composantes de φ , on a alors, pour $\vec{x}_0 = \varphi(t_0)$ (voir la session [Wxmaxima 3.3](#), page suivante).

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(t_0 + h) &= f(\varphi(t_0) + h \cdot \varphi'(t_0) + o(h)) \\ &= f(\varphi(t_0)) + \sum_{k=1}^n (h \times \varphi'_k(t_0)) \cdot \partial_k f(\vec{x}_0) + o(h). \end{aligned}$$

Donc

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \sum_{k=1}^n \varphi'_k(t_0) \cdot \partial_k f(\vec{x}_0)$$

```
(%i1) f(x,y) := x/(x^2+y^2+1);
```

```
(%o1) f(x,y) :=  $\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ 
```

La fonction f est une fonction rationnelle définie en tout point, on peut donc calculer facilement ses dérivées partielles.

```
(%i2) diff(f(x,y),x);
```

```
(%o2)  $\frac{1}{y^2 + x^2 + 1} - \frac{2xy}{(y^2 + x^2 + 1)^2}$ 
```

```
(%i3) diff(f(x,y),y);
```

```
(%o3)  $-\frac{2xy}{(y^2 + x^2 + 1)^2}$ 
```

Exemple 3.8

On peut de même composer plusieurs fonctions de plusieurs variables. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{C}^1(\Delta', \mathbb{R}^n)$ (dont les fonctions composantes seront notées (g_1, \dots, g_n)), où Δ' est un ouvert de \mathbb{R}^q et où $g(\Delta') \subset \Delta$, alors $f \circ g$ est de classe \mathcal{C}^1 et on peut calculer ses q dérivées partielles à l'aide d'un développement limité. Soit $\vec{x}_0 \in \Delta'$ et $\vec{h} = (h_1, \dots, h_q)$ au voisinage de $\vec{0}$ dans \mathbb{R}^q , on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(g(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^q h_k \cdot \partial_k g(\vec{x}_0) + o(\|\vec{h}\|)) \\ &= f(g(\vec{x}_0)) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^q h_k \times \partial_k g_i(\vec{x}_0) \right) \cdot \partial_i f(g(\vec{x}_0)) + o(\|\vec{h}\|) \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_k (f \circ g)(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n \partial_k g_i(\vec{x}_0) \cdot \partial_i f(g(\vec{x}_0))$$

Notation 3.4

On peut bien sûr étudier les éventuelles dérivées partielles des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables. Cela donne les espaces :

$$\mathcal{C}^k(\Delta, \mathbb{R}^p), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

qui sont clairement des \mathbb{R} -espaces vectoriels. On a de plus quelques notations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k, \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f \stackrel{\text{Not}}{=} \partial_{i_1, \dots, i_k}^k f \stackrel{\text{Not}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

Par exemple, on notera :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ la fonction } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \partial_1 \partial_2 f = \partial_{1,2}^2 f$$

On trouve aussi la notation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ pour la fonction } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \partial_1 \partial_1 f = \partial_{1,1}^2 f..$$

Voir les calculs de la session **Wxmaxima 3.4**, de la présente page.

Session Wxmaxima 3.4 – Dérivées partielles d'ordre > 1

```
(%i1) f(x,y) := (x+5*y)/(x^2+y^2+1);
```

$$(\%o1) \quad f(x, y) := \frac{x + 5y}{x^2 + y^2 + 1}$$

Calculons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

```
(%i2) diff(f(x,y),x,2);
```

$$(\%o2) \quad -\frac{2(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{4x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8x^2(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}$$

Calculons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

(%i3) diff(f(x,y),x,1,y,1);

$$(\%o3) \quad -\frac{2y}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{10x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}$$

Calculons :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x}(x, y)$$

(%i4) diff(f(x,y),x,2,y,1,x,1);

$$(\%o4) \quad \frac{24y}{(y^2+x^2+1)^3} + \frac{120x}{(y^2+x^2+1)^3} - \frac{144xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^4} - \frac{144x^2y}{(y^2+x^2+1)^4} - \frac{240x^3}{(y^2+x^2+1)^4} + \frac{384x^3y(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^5}$$

Théorème 3.1 – Schwarz

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

1. les fonctions :

$\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_{1,2}^2 f$ et $\partial_{2,1}^2 f$ existent sur Δ ;

2. les fonctions :

$\partial_{1,2}^2 f$ et $\partial_{2,1}^2 f$ sont continues sur Δ

Alors :

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f$$

Démonstration

On va utiliser les chemins décrits à la figure 3.8, page 242. Soit $(x_0, y_0) \in \Delta$. On pose, pour tout réel h suffisamment petit,

$$F(h) = \left(f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) \right) - \left(f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0) \right)$$

Soit un réel h très petit. On pose, pour tout x suffisamment proche de x_0 ,

$$u(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$$

Alors $F(h) = u(x_0 + h) - u(x_0)$. Comme $\partial_1 f$ existe sur Δ , on sait que u est dérivable sur le segment d'extrémités x_0 et $x_0 + h$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_h compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $F(h) = h \times u'(c_h)$. On a donc :

$$F(h) = h \times (\partial_1 f(c_h, y_0 + h) - \partial_1 f(c_h, y_0))$$

Comme $\partial_{2,1}^2 f$ existe sur Δ , on sait que $y \mapsto \partial_1 f(c_h, y)$ est dérivable sur le segment d'extrémités y_0 et $y_0 + h$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe d_h compris entre y_0 et $y_0 + h$ tel que $\partial_1 f(c_h, y_0 + h) - \partial_1 f(c_h, y_0) = h \times \partial_{2,1}^2 f(c_h, d_h)$. On en déduit finalement que pour tout réel $h \neq 0$ suffisamment petit, il existe (c_h, d_h) proche de (x_0, y_0) tel que

$$\frac{F(h)}{h^2} = \partial_{2,1}^2 f(c_h, d_h).$$

La continuité de $\partial_{2,1}^2 f$ en (x_0, y_0) assure alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_{2,1}^2 f(x_0, y_0).$$

En écrivant maintenant que

$$F(h) = \left(f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) \right) - \left(f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \right)$$

on peut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0).$$

D'où le résultat.

Remarque 3.11

1. Les hypothèses sont en particulier satisfaites pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 .
2. Cela se généralise facilement aux changements d'ordre des dérivations partielles d'ordre $k \geq 2$.

Exemple 3.9

On peut le vérifier par le calcul sur un exemple (voir la session **Wxmaxima 3.5**, page ci-contre) :

$$f(x, y) = \frac{x + 5y}{x^2 + y^2 + 1}$$


```
(%i1) f(x,y) := (x+5*y)/(x^2+y^2+1);
```

```
(%o1) f(x,y) := \frac{x+5y}{x^2+y^2+1}
```

```
(%i2) diff(f(x,y),x,1,y,1);
```

```
(%o2) -\frac{2y}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{10x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}
```

```
(%i3) diff(f(x,y),y,1,x,1);
```

```
(%o3) -\frac{2y}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{10x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}
```

```
(%i4) ratsimp(%o2-%o3);
```

```
(%o4) 0
```

Exemple 3.10

La fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(0,0) = 0 \text{ et } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = x \times y \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 mais vérifie (voir la figure 3.9, page 243) :

$$\partial_{1,2}^2 f(0,0) \neq \partial_{2,1}^2 f(0,0)$$

Voir la session Wxmaxima 3.6, page suivante.

```
(%i1) f(x,y) := x*y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

```
(%o1) f(x,y) := 
$$\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

```

On ajoute, bien sûr, la valeur en $(0,0)$: $f(0,0) = 0$. Puis, on calcule les dérivées partielles...

```
(%i2) d1f : diff(f(x,y),x);
```

```
(%o2) 
$$\frac{y(x^2 - y^2)}{y^2 + x^2} + \frac{2x^2y}{y^2 + x^2} - \frac{2x^2y(x^2 - y^2)}{(y^2 + x^2)^2}$$

```

```
(%i3) d2f : diff(f(x,y),y);
```

```
(%o3) 
$$-\frac{2xy^2}{y^2 + x^2} + \frac{x(x^2 - y^2)}{y^2 + x^2} - \frac{2xy^2(x^2 - y^2)}{(y^2 + x^2)^2}$$

```

Pour obtenir les valeurs des dérivées partielles en 0 (si elles existent), il faut revenir aux applications partielles.

```
(%i4) limit((f(t,0)-0)/t,t,0);
```

```
(%o4) 0
```

```
(%i5) limit((f(0,t)-0)/t,t,0);
```

```
(%o5) 0
```

Calculons les valeurs (si elles existent) de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ puis } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

en utilisant les applications partielles.

```
(%i6) ratsimp(subst([x=t,y=0],d2f/t));
```

```
(%o6) 1
```

```
(%i7) ratsimp(subst([x=0,y=t],d1f/t));
```

```
(%o7) -1
```

注释 3.1

多元函数在某点处的连续性与偏导数的存在性之间没有因果关系：

- 多元函数在某点处连续 \nRightarrow 该多元函数在该点处的偏导数存在
- 多元函数在某点处的偏导数存在 \nRightarrow 该多元函数在该点处连续

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 ?

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \times \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.4.2 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varepsilon \times f(y, x), \text{ où } \varepsilon = \pm 1$$

Quelles relations vérifient $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$?

3.4.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$g(x, y) = f(x + y) \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2) \text{ et } i(x, y) = f(x \times y)$$

3.4.4 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on pose :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(\rho, \theta) = f(\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta))$$

Calculer Δf à l'aide des dérivées partielles de g .

3.4.5 La fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

admet-elle un développement limité au voisinage de $(0, 0)$ à l'ordre 1 ?

3.4.6 Soit la fonction définie sur $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{(1 + x) \times (1 + y) \times (x + y)}$$

- (a) Calculer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(1, 1)$.
- (b) Montrer que la fonction se prolonge par continuité à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

3.3 Systèmes de coordonnées

L'objectif de ce paragraphe ^a est de changer le mode de représentation des points de \mathbb{R}^n (espace affine) de manière à :

1. Pouvoir représenter tous les points de \mathbb{R}^n .
2. Avoir le maximum de régularité de la représentation.
3. Utiliser les symétries de la situation en les traduisant dans le paramétrage (nous verrons, par exemple, les symétries circulaires, cylindriques et sphériques...)
4. Pouvoir calculer simplement.

a. Dans ce chapitre, et très exceptionnellement, nous manquerons de rigueur, car, nous n'avons pas tous les outils nécessaires...

Définition 3.9

Nous appellerons *système de coordonnées (curvilignes orthogonales)*, toute fonction :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \phi(\underline{u}) = \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

vérifiant, en notant Δ le domaine de définition de ϕ :

- ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition (maximum de régularité).
- ϕ est surjective (représentation de tous les points).
- Et (calculs faciles) :

$$\forall \underline{u} \in \Delta, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle \partial_i \phi(\underline{u}), \partial_j \phi(\underline{u}) \rangle = 0$$

Notation 3.5

Fondamentalement, on essaye d'exprimer les coordonnées dans le repère orthonormé canonique (x_1, \dots, x_n) , à l'aide des *nouvelles variables* (u_1, \dots, u_n) . Si les applications composantes de ϕ sont $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on notera parfois ce changement de variables sous la forme :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n)$$

Définition 3.10

Lorsque nous disposons d'un système de coordonnées, en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \underline{u} \in \Delta, \mu_i(\underline{u}) = \varepsilon_i \times \|\partial_i \phi(\underline{u})\|$$

où les ε_i sont choisis dans $\{-1, +1\}$ de manière à avoir des fonctions de \underline{u} de régularité maximale. On appelle *base orthonormée mobile associée à ϕ* , la base orthonormée définie (lorsque c'est possible) par :^a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \underline{u} \in \tilde{\Delta}, \vec{e}_i(\underline{u}) = \frac{1}{\mu_i(\underline{u})} \cdot \partial_i \phi(\underline{u})$$

où

$$\tilde{\Delta} = \{\underline{u} \in \Delta, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i(\underline{u}) \neq 0\}$$

a. La notation \vec{e}_i pour élégante qu'elle soit, peut-être gênante lorsqu'il y a plusieurs systèmes de coordonnées. Nous noterons donc abusivement, mais de manière plus explicite :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \vec{e}_{u_i} \text{ au lieu de } \vec{e}_i$$

Ici, u_i est une écriture et ne peut pas prendre de valeur !

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Calculer les bases mobiles et les coefficients μ_i pour les changements de coordonnées suivants :

$$(\rho, \theta) \mapsto (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)) \quad (3.4)$$

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi), r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi), r \times \cos(\theta)) \quad (3.5)$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}, \frac{u \times v}{(u^2 + v^2)^2} \right) \quad (3.6)$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{u^2 - v^2}{2}, u \times v \right) \quad (3.7)$$

$$(u, v, w) \mapsto \left(u \times v \times \cos(w), u \times v \times \sin(w), \frac{u^2 - v^2}{2} \right) \quad (3.8)$$

3.3.1 Dans le plan

\mathbb{R}^2 est ici considéré comme un espace affine, et (x, y) désignent les coordonnées dans le repère orthonormé canonique $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

3.3.1.1 La droite

Proposition 3.3

Soit Δ une droite du plan, passant par un point $A = (a, b)$ et ayant un vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$ et un vecteur normal \vec{v} que l'on peut choisir $= (-\beta, \alpha)$ de manière à ce que :

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$$

Si on appelle θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e}_x}, \widehat{\vec{u}})$, il est naturel alors de prendre comme repère privilégiant la droite Δ , le repère

$$\mathcal{R} = \left(A; \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \right)$$

Voir la figure 3.10, page 244.

Remarque 3.12

Notons (X, Y) les coordonnées d'un point quelconque dans ce nouveau repère \mathcal{R} .

1. La droite Δ a pour équation dans $\mathcal{R} : Y = 0$.
2. Le système de coordonnées associé à ce changement de coordonnées est : ^a

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) \mapsto (a + X \times \cos(\theta) - Y \times \sin(\theta), b + X \times \sin(\theta) + Y \times \cos(\theta)) \end{cases}$$

3. Un calcul simple nous donne :

$$\partial_1 \phi(X, Y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \vec{e}_X = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

et

$$\partial_2 \phi(X, Y) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \vec{e}_Y = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

4. La transformation est *isométrique*, c'est-à-dire qu'un segment de longueur 1 (resp. un carré d'aire 1) est transformée en un segment de longueur 1 (resp. un carré d'aire 1).
5. Notons que les droites parallèles à Δ ont pour équation $Y = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et les droites perpendiculaires à Δ ont pour équation $X = \nu$ ($\nu \in \mathbb{R}$). Voir la figure 3.11, page 245.

a. On a ici une translation de vecteur \overrightarrow{OA} , suivi d'une rotation de centre A et d'angle orienté de mesure θ .

Remarque 3.13

On voit que l'on aurait eu intérêt à prendre \vec{u} de norme 1, en ce cas, en prenant, si H est la projection de O sur la droite Δ , si $p = d(O, H)$ et si α est la mesure de l'angle $(\vec{e}_x, \widehat{OH})$ lorsque $O \neq H$ (si $O = H$, on impose $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2]$), alors la droite Δ a une équation dite *normalisée* :

$$x \times \cos(\alpha) + y \times \sin(\alpha) = p$$

Voir la figure 3.12, page 246.

Exercice(s) 3.6

3.6.1 Soit la droite d'équation ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$\lambda \times x + 3y = \lambda^3 - 2\lambda^2$$

la mettre sous forme normalisée.

3.6.2 Soit la droite d'équation :

$$2x - 3y = 1$$

en notant (X, Y) les coordonnées dans le repère adapté à cette droite, écrire les relations X et Y en fonction de x et y (coordonnées dans le repère canonique).

3.3.1.2 Le cercle

Proposition 3.4

Soit \mathcal{C} le cercle de centre $A = (a, b)$, de rayon $r > 0$. Il est très classiquement paramétré par :

$$x = a + r \times \cos(\theta) \text{ et } y = b + r \times \sin(\theta)$$

Il correspond à $\rho = r$ en coordonnées polaires, après une translation de vecteur \overrightarrow{OA} pour ramener le centre du cercle au centre du repère.

Définition 3.11 – Coordonnées polaires

Soit ϕ le système de coordonnées (coordonnées polaires) défini par :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) \mapsto (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)) \end{cases}$$

On obtient alors la base orthonormée directe mobile :

$$\vec{e}_\rho(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ et } \vec{e}_\theta(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Remarque 3.14

1. ϕ est bien de classe \mathcal{C}^∞ .
2. ϕ est bien surjectif : si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on peut prendre, par exemple :

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \text{ et } \theta_0 = \begin{cases} \text{quelconque} & \text{si } (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \pi & \text{si } x_0 < 0 \text{ et } y_0 = 0 \\ 2 \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 + \rho_0}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

3. ϕ n'est pas injectif. En effet, chaque point du plan ($\neq O$) peut être représenté par les coordonnées polaires

$$(\rho_0, \theta_0 + 2k \times \pi) \text{ ou } (-\rho_0, \theta_0 + \pi + 2k \times \pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Voir la figure 3.13, page 247.

Démonstration de la surjectivité

Si nous sommes dans le dernier cas, alors $(x_0, y_0) \notin]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, on peut donc prendre une mesure θ de l'angle $(\vec{e_x}, \widehat{OM})$ dans $] -\pi, \pi[$. Posons $t = \tan(\theta_0/2)$, alors :

$$x_0 = \rho_0 \times \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } y_0 = \rho_0 \times \frac{2t}{1+t^2}$$

D'où :

$$t = \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{y_0}{x_0 + \rho_0} \text{ et } \frac{\theta_0}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$$

Le résultat est alors immédiat.

Remarque 3.15

Le physicien souhaitera souvent avoir $\rho \geq 0$, ce qui lui permet de voir ρ comme une distance de O à M . Cela lui posera des problèmes de régularité lorsque le mouvement représenté passera par O . Pour le mathématicien, seule la régularité des fonctions lui importe.

Remarque 3.16

1. Les cercles de centre O , sont de la forme $\rho = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), et les droites passant par O sont de la forme $\theta = \nu$ ($\nu \in \mathbb{R}$). Voir la figure 3.14, page 248.
2. La transformation n'est pas isométrique. Ainsi, lorsque l'on passe de θ à $\theta + 1$ en restant sur un cercle de rayon $\rho > 0$ constant, la longueur initiale de l'arc est $1 = (\theta + 1) - \theta$, celle de l'arc obtenu est dépendant de ρ : $(\rho \times (\theta + 1) - \rho \times \theta = \rho)$.^a De même, pour les aires : si on part du carré $(\rho, \theta) \in [\rho_0, \rho_0 + 1] \times [\theta_0, \theta_0 + 1]$, ($\rho_0 \geq 0$), l'aire initiale est de 1, l'aire de $\phi([\rho_0, \rho_0 + 1] \times [\theta_0, \theta_0 + 1])$ vaut :^b

$$\frac{1}{2} ((\rho_0 + 1)^2 - \rho_0^2) \times ((\theta_0 + 1) - \theta_0) = \rho_0 + \frac{1}{2}$$

qui dépend à nouveau de ρ_0 . *De plus, cela dépend de la taille du carré initial !*

a. Rappelons que la longueur d'un arc de cercle est $R \times \delta\theta$, où R est le rayon du cercle et $\delta\theta$ la variation des mesures d'angles. Ainsi, si $\delta\theta = 2\pi$, on retrouve la longueur bien connue $2\pi R$, circonférence du cercle.

b. Rappelons que l'aire d'un secteur du disque de rayon R vaut $\frac{1}{2} R^2 \times \delta\theta$. Si on prend $\delta\theta = 2\pi$, on retrouve l'aire du disque πR^2 .

Calculs : le plus souvent, les coordonnées polaires sont utilisées pour exprimer une symétrie lors d'un mouvement. On a donc ρ et θ qui dépendent du temps t , nous les supposons dans un premier temps de classe \mathcal{C}^1 . Comment les calculs s'effectuent-ils ? Simplement, avec les règles usuelles de calculs. *Il ne faut pas oublier que \vec{e}_ρ et \vec{e}_θ sont des fonctions de θ .*

$$M(t) = O + \rho(t) \cdot \vec{e}_\rho(\theta(t)), \text{ donc, la vitesse } V(t) = \rho'(t) \cdot \vec{e}_\rho(\theta(t)) + \rho(t) \times \theta'(t) \cdot \vec{e}_\theta(\theta(t))$$

si ρ et θ sont de classe \mathcal{C}^2 , alors l'accélération, s'écrit :

$$\vec{a}(t) = (\rho''(t) - \rho(t) \times \theta'^2(t)) \cdot \vec{e}_\rho(\theta(t)) + (2\rho'(t) \times \theta'(t) + \rho(t) \times \theta''(t)) \cdot \vec{e}_\theta(\theta(t))$$

On a utilisé les formules simples :

$$\vec{e}_\rho'(\theta) = \vec{e}_\theta(\theta) \text{ et } \vec{e}_\theta'(\theta) = -\vec{e}_\rho(\theta)$$

Exercice(s) 3.7

3.7.1 On considère une courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho = f(\theta), \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{ie } M(\theta) = O + \rho(\theta) \cdot \vec{e}_\rho(\theta))$$

Quelle propriété a la courbe obtenue lorsque

- (a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = f(\theta) ?$
- (b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = -f(\theta) ?$
- (c) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2\pi) = f(\theta) ?$
- (d) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2\pi) = -f(\theta) ?$
- (e) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi) = f(\theta) ?$
- (f) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi) = -f(\theta) ?$

- (g) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi) = f(\theta) ?$
- (h) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi) = -f(\theta) ?$
- (i) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi/2) = f(\theta) ?$
- (j) $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi/2) = -f(\theta) ?$

Calculs en coordonnées polaires

3.7.2 Soit ABC un triangle équilatéral, R le rayon du cercle circonscrit. Déterminer le lieu des points M du plan tels que

$$d(A, M) \times d(B, M) \times d(C, M) = R^3$$

3.7.3 Un cercle roule extérieurement sur un cercle fixe de même rayon. Quelle courbe décrit un point du premier cercle ? Voir la figure 3.15, page 249.

3.7.4 Soit \mathcal{C} le cercle de centre $A = (1, 0)$ et de rayon $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes à ce cercle.

3.7.5 Trouver l'équation polaire de la courbe définie par :

$$x^2 + y^2 = 3 \sqrt{x^2 + y^2} - 3x$$

3.7.6 Soit \mathcal{C} le cercle de centre O de rayon 1 et $A = (1, 0)$. Soit $M \in \mathcal{C}$. Soit I l'intersection de la droite $x = 1$ et de la bissectrice intérieure de \widehat{AOM} . Soit enfin J le symétrique de I par rapport à M . Déterminer le lieu des points J lorsque M décrit \mathcal{C} . Voir la figure 3.16, page 250.

3.7.7 Soit $\Omega = (2, 0)$, \mathcal{C} le cercle de centre Ω et de rayon 2 et \mathcal{D} la droite d'équation $(y = 1)$. À tout point P de \mathcal{C} différent de O on associe le point N intersection de (OP) et \mathcal{D} . On définit alors M par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$. On note \mathcal{T} le lieu des points M .

- (a) Donner les équations polaires de \mathcal{C} et \mathcal{D} .
- (b) Montrer que \mathcal{T} a pour équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{2 \sin(2\theta) - 1}{\sin(\theta)}$$

- (c) Montrer que $(\overrightarrow{e_x}, \widehat{\Omega M}) = 3(\overrightarrow{e_x}, \widehat{OM})[2\pi]$. Voir la figure 3.17, page 250.

3.7.8 Soit la courbe définie en coordonnées polaires par (c'est une *cardioïde*) :

$$\rho(\theta) = a \times (1 + \cos(\theta))$$

- (a) Trouver le lieu des milieux des segments $[M, M']$, lorsque M et M' parcourent la courbe avec :

$$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$$

Voir la figure 3.18, page 251.

- (b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la courbe possède trois points en lesquels la tangente fait un angle de mesure α par rapport à l'axe des x . Isobarycentre de ces trois points ?
- (c) Lieu des intersections des tangentes aux points de paramètres θ et $\theta + \pi$ lorsque θ varie. Voir la figure 3.19, page 252.

3.7.9 Soit la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\theta}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la droite passant par O et faisant un angle de mesure α avec Ox coupe la courbe en une infinité de points. Puis, montrer que les tangentes à la courbe en ces points passent par un point fixe.

3.3.2 Dans l'espace

3.3.2.1 La droite

Proposition 3.5

- Une droite Δ est définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur \vec{u} que l'on peut supposer de norme 1. Soit \vec{v} un autre vecteur de norme 1, orthogonal à \vec{u} , on effectuera alors le changement de repère (qui définit aussi la base mobile) :

$$(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$$

- Les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) seront alors définies par rapport aux anciennes (x, y, z) en écrivant (voir la figure 3.20, page 253) :

$$M = A + X \cdot \vec{u} + Y \cdot \vec{v} + Z \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = (x, y, z)$$

— Le changement de coordonnées obtenu est alors :

$$(X, Y, Z) \mapsto (x, y, z)$$

— La transformation est isométrique (conservation des aires et des longueurs).

Exercice(s) 3.8

3.8.1 Soit la droite D définie par :

$$2x + y - z = 1 \text{ et } x - 2y + z = 2$$

- (a) Produire un système de coordonnées adapté à cette droite.
- (b) Écrire dans ce nouveau système l'expression de la rotation d'axe D (orientée en prenant un vecteur directeur dont le premier coefficient est > 0) et d'angle $\pi/3$.
- (c) En déduire l'expression de cette même rotation dans le repère canonique.
- (d) Comparer avec l'utilisation de la formule de la rotation donnée dans la définition 2.18, page 135.

3.3.2.2 Le plan

Proposition 3.6

— Un plan de l'espace Π est défini par un point A et un vecteur normal \vec{w} que l'on supposera unitaire, soit \vec{u} un vecteur unitaire orthogonal à \vec{w} , alors on effectuera un changement de repère (qui définit aussi une base mobile) :

$$(A; \vec{u}, \vec{w} \wedge \vec{u}, \vec{w})$$

— Les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) seront alors définies par rapport aux anciennes (x, y, z) en écrivant (voir la figure 3.21, page 254) :

$$M = A + X \cdot \vec{u} + Y \cdot \vec{w} \wedge \vec{u} + Z \cdot \vec{w} = (x, y, z)$$

— Le changement de coordonnées obtenu est alors :

$$(X, Y, Z) \mapsto (x, y, z)$$

— La transformation est isométrique (conservation des aires et des longueurs).

Exercice(s) 3.9

3.9.1 Soit le plan Π d'équation $x + 2y - z = 3$.

- (a) Produire un système de coordonnées adapté à ce plan.
- (b) Écrire dans ce nouveau système l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à Π .
- (c) En déduire l'expression de cette même symétrie dans le repère canonique.
- (d) Comparer avec l'utilisation de la formule de la symétrie donnée dans la définition 2.17, page 134.

3.3.2.3 Le cylindre

Proposition 3.7

— La changement de coordonnées (coordonnées cylindriques) est :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) \mapsto (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta), z) \end{cases}$$

— La base mobile associée est :

$$\vec{e}_\rho(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad \vec{e}_\theta(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \text{ et } \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

— Les surfaces $\rho = \lambda$ sont des cylindres, les surfaces $\theta = \lambda$ sont des plans contenant l'axe Oz , les surfaces $z = \lambda$ sont des plans orthogonaux à l'axe Oz . Voir la figure 3.22, page 255.

— On a les formules immédiates :

$$\vec{e}_\rho'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\rho(\theta)) = \vec{e}_\theta(\theta) \text{ et } \vec{e}_\theta'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\theta(\theta)) = -\vec{e}_\rho(\theta)$$

Exercice(s) 3.10

3.10.1 On suppose qu'un mouvement est décrit en coordonnées cylindriques par :

$$\rho(t) \quad \theta(t) \text{ et } z(t)$$

Calculer les vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

3.10.2 Soit le lieu des points (x, y, z) défini par l'équation :

$$z \times (x^2 + y^2) = 2x \times y$$

- En donner une équation en coordonnées cylindriques.
- Montrer que l'intersection de ce lieu avec un plan d'équation $\theta = \lambda$ est une réunion de droites, dépendant de λ .
- Montrer que toutes les droites trouvées à la question précédente sont orthogonales à une droite fixe que l'on précisera.

3.3.2.4 La sphère

Proposition 3.8

— Le changement de coordonnées (coordonnées sphériques) est :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi), r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi), r \times \cos(\theta)) \end{cases}$$

— La base mobile associée est :

$$\begin{cases} \vec{e}_r(\theta, \varphi) &= (\sin(\theta) \times \cos(\varphi), \sin(\theta) \times \sin(\varphi), \cos(\theta)) \\ \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos(\theta) \times \cos(\varphi), \cos(\theta) \times \sin(\varphi), -\sin(\theta)) \\ \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \end{cases}$$

— Les surfaces $r = \lambda$ sont des sphères concentriques, les surfaces $\theta = \lambda$ sont des cylindres de révolution d'axe Oz , les surfaces $\varphi = \lambda$ sont des plans contenant l'axe Oz . Voir la figure 3.23, page 256.

— On a les formules non immédiates :

$$\partial_1 \vec{e}_r(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_r(\theta, \varphi)) = \vec{e}_\theta(\theta, \varphi)$$

$$\partial_2 \vec{e}_r(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_r(\theta, \varphi)) = \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)$$

$$\partial_1 \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)) = -\vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

$$\partial_2 \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)) = \cos(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)$$

$$\partial_1 \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)) = \vec{0}$$

$$\partial_2 \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)) = -(\sin(\theta) \cdot \vec{e}_r(\theta, \varphi) + \cos(\theta) \cdot \vec{e}_\theta(\theta, \varphi))$$

Exercice(s) 3.11

3.11.1 Un mouvement est défini en coordonnées sphériques par les relations :

$$r(t) \quad \theta(t) \text{ et } \varphi(t)$$

Calculer les vitesse et accélération en coordonnées sphériques.

3.11.2 On appelle grand cercle d'une sphère, l'intersection de la sphère avec un plan passant par son centre. On considère un *triangle sphérique* dont les côtés sont des arcs de grands cercles. Calculer la somme des mesures des angles de ce triangle. Voir la figure [3.24](#), page [257](#).

Figure 3.1 – Ouvert de \mathbb{R}^n

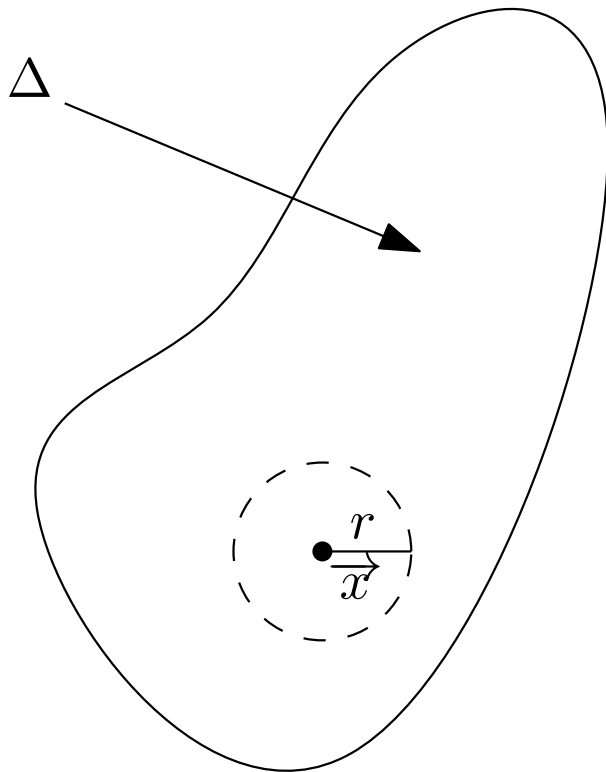
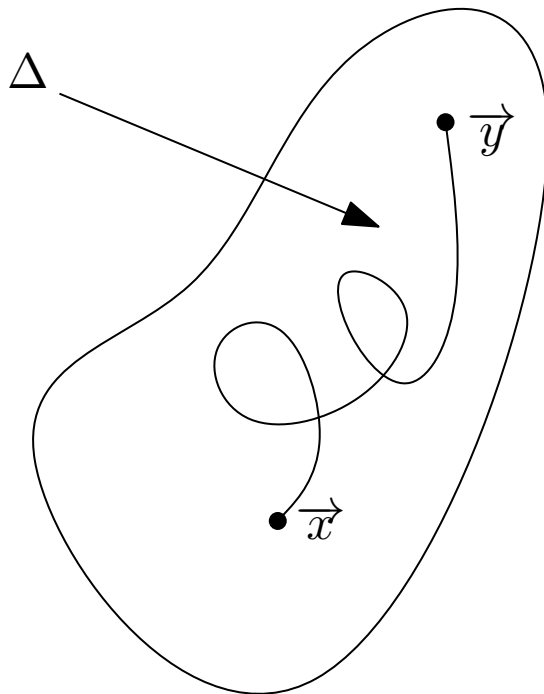


Figure 3.2 – Connexe par arcs



L'arc continu entre \vec{x} et \vec{y}

Figure 3.3 – Non connexe par arcs

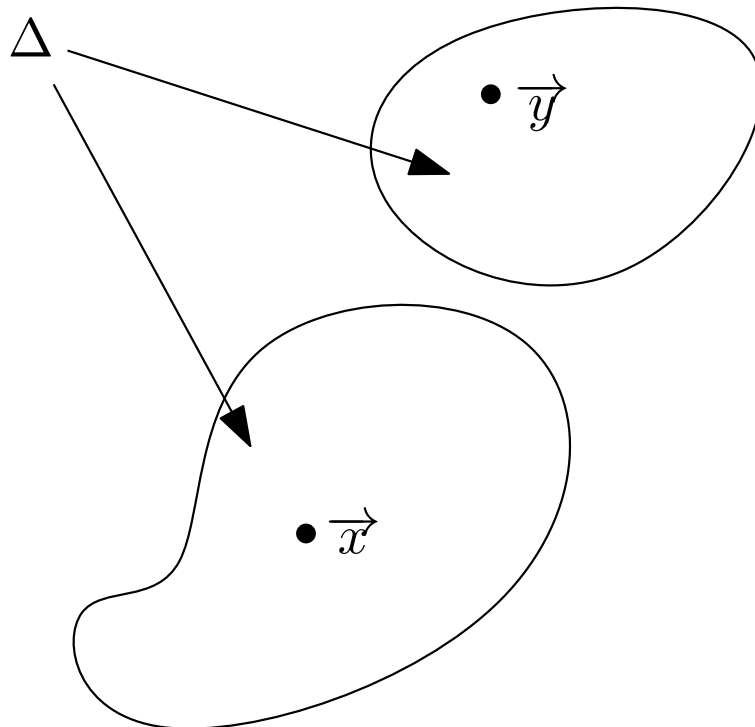


Figure 3.4 – Lignes de niveaux d'une fonction continue

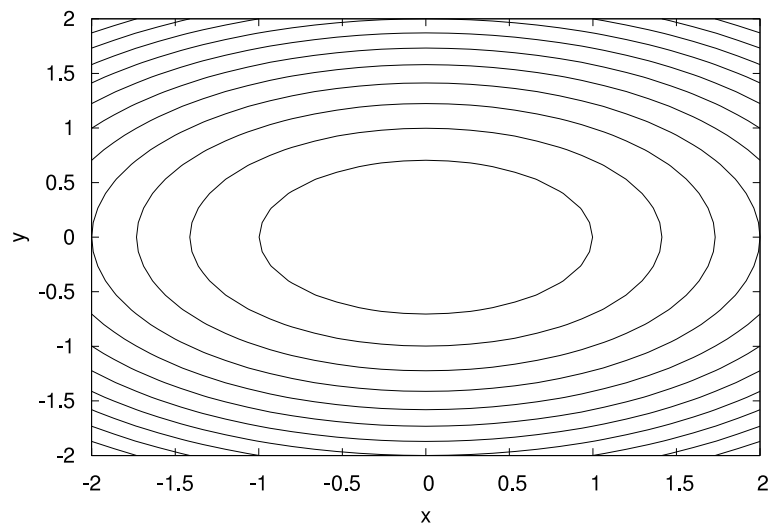


Figure 3.5 – Lignes de niveaux d'une fonction discontinue en 0

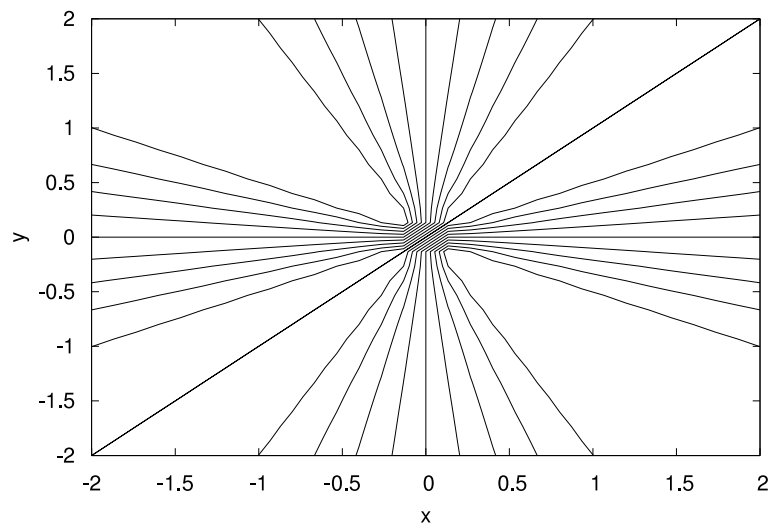


Figure 3.6 – Une autre fonction continue

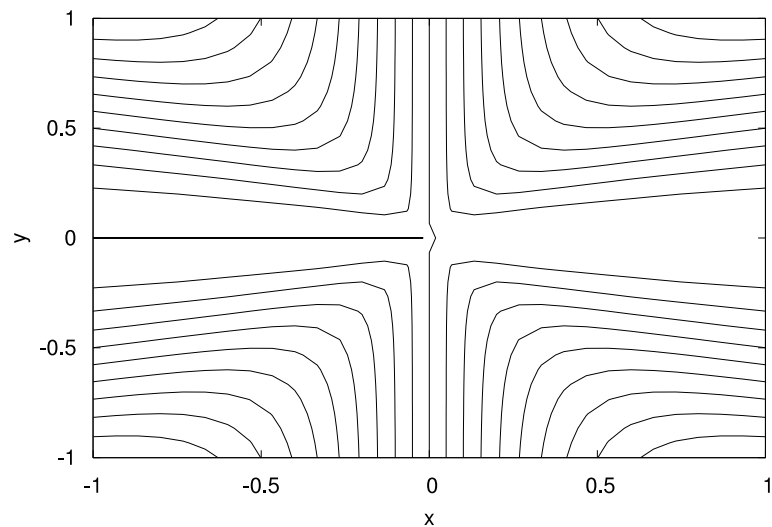


Figure 3.7 – Une autre fonction discontinue

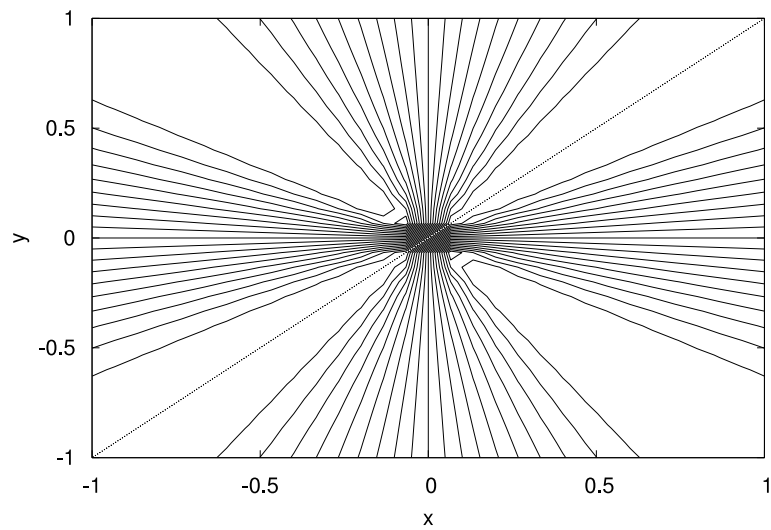


Figure 3.8 – Démonstration du théorème de Schwarz

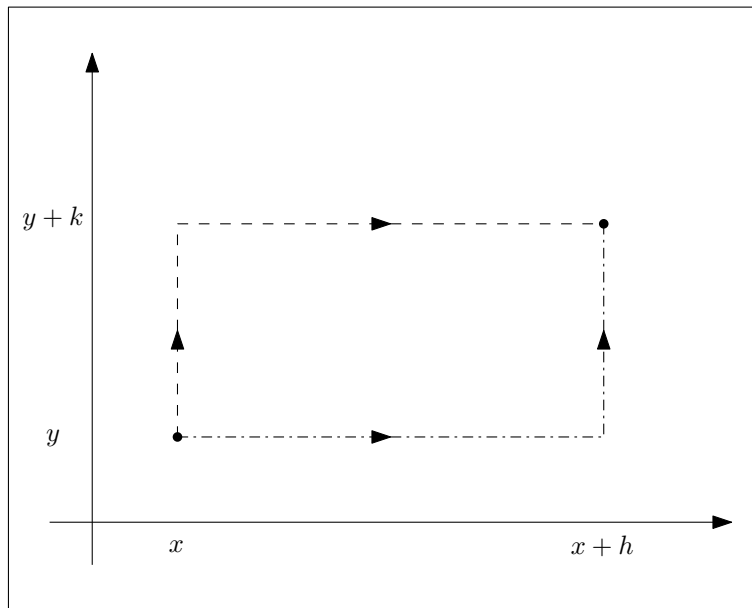


Figure 3.9 – Intersion des dérivations illégales

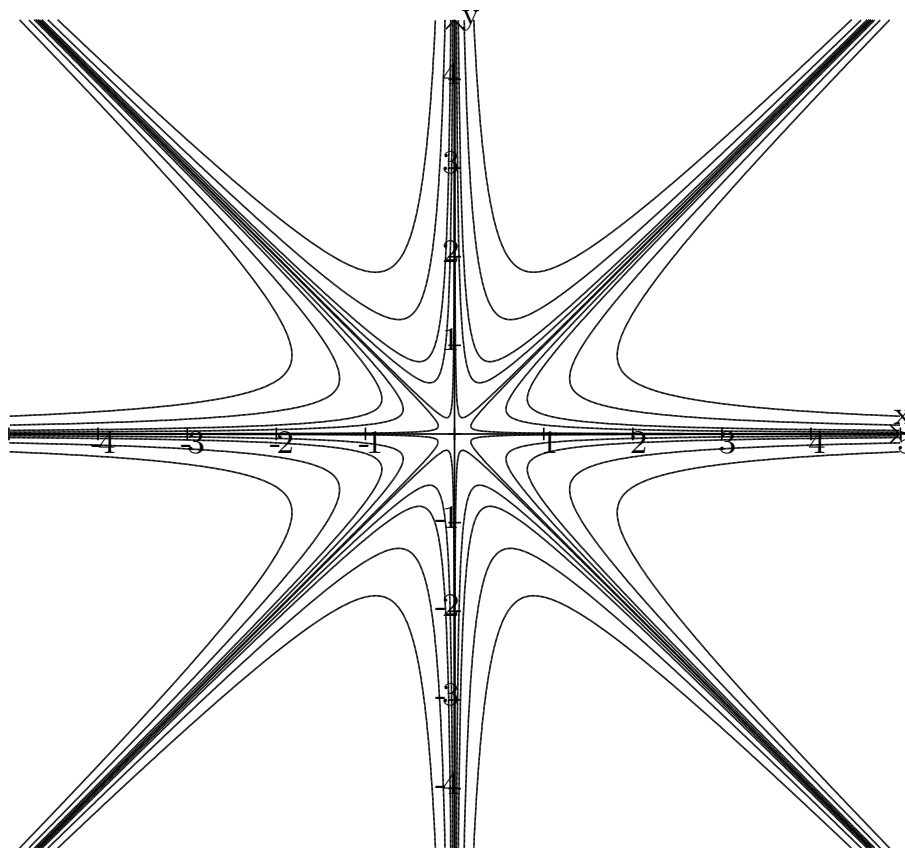


Figure 3.10 – Représentation d'une droite

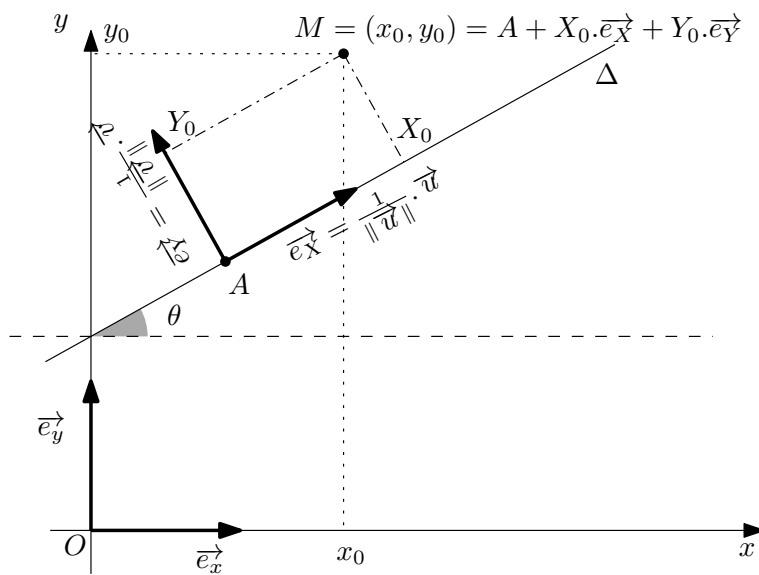


Figure 3.11 – Système de coordonnées adapté à une droite du plan

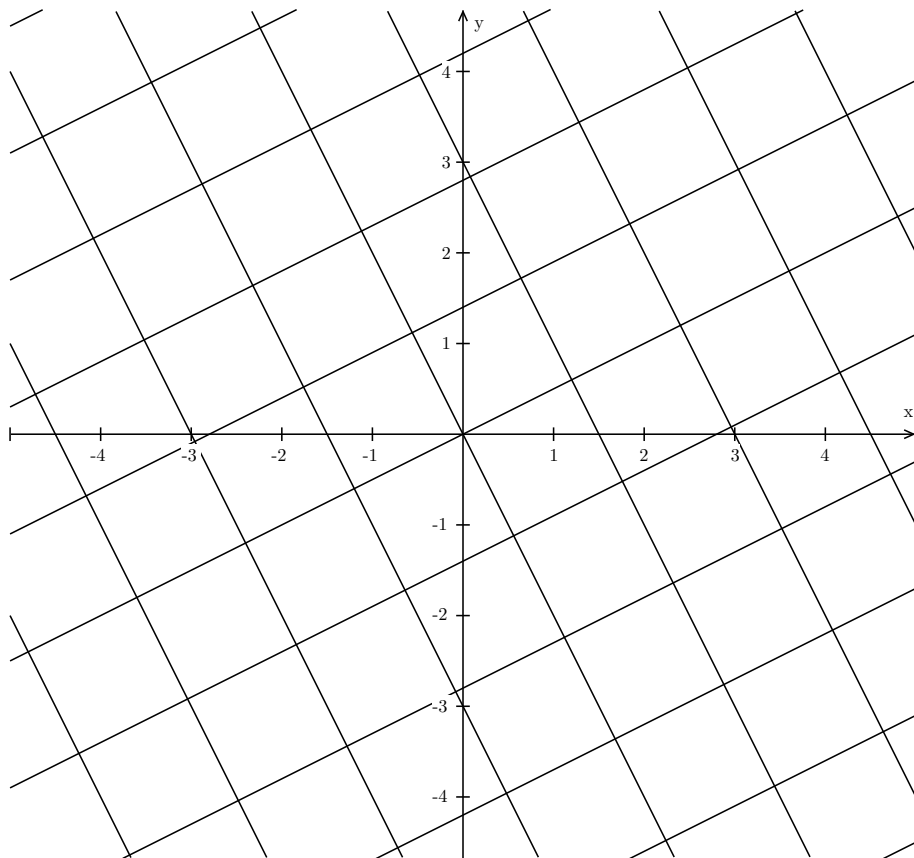


Figure 3.12 – Équation normalisée d'une droite du plan

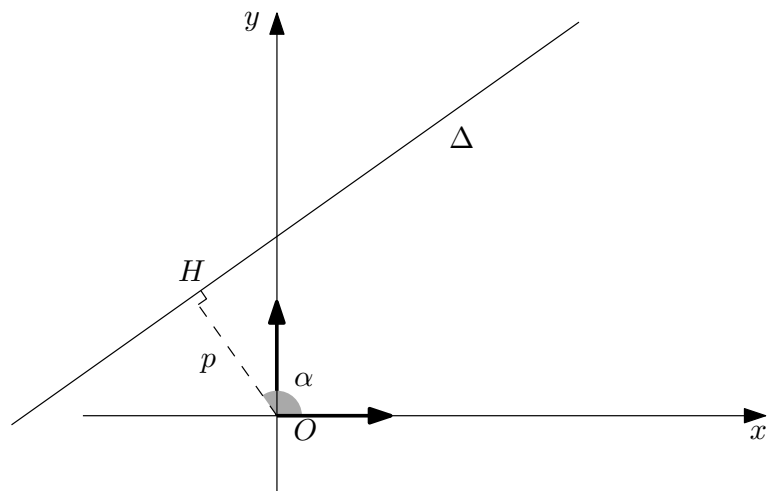


Figure 3.13 – Coordonnées polaires

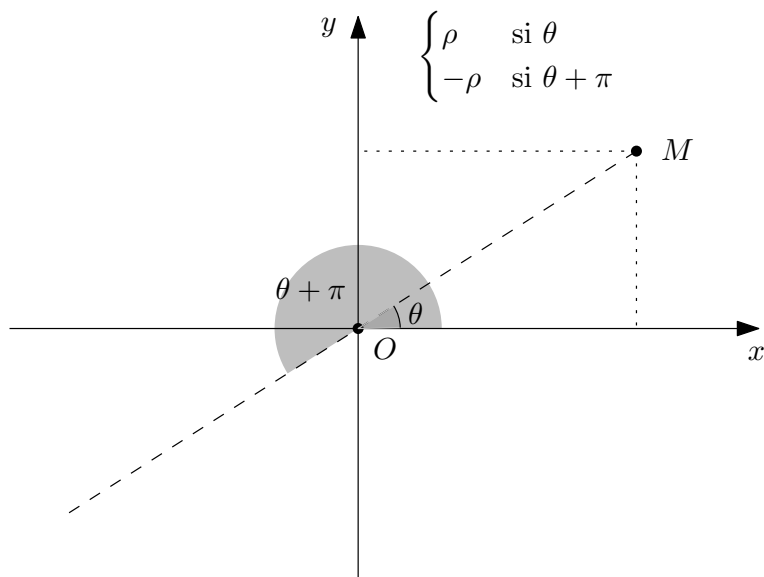


Figure 3.14 – Système de coordonnées polaires

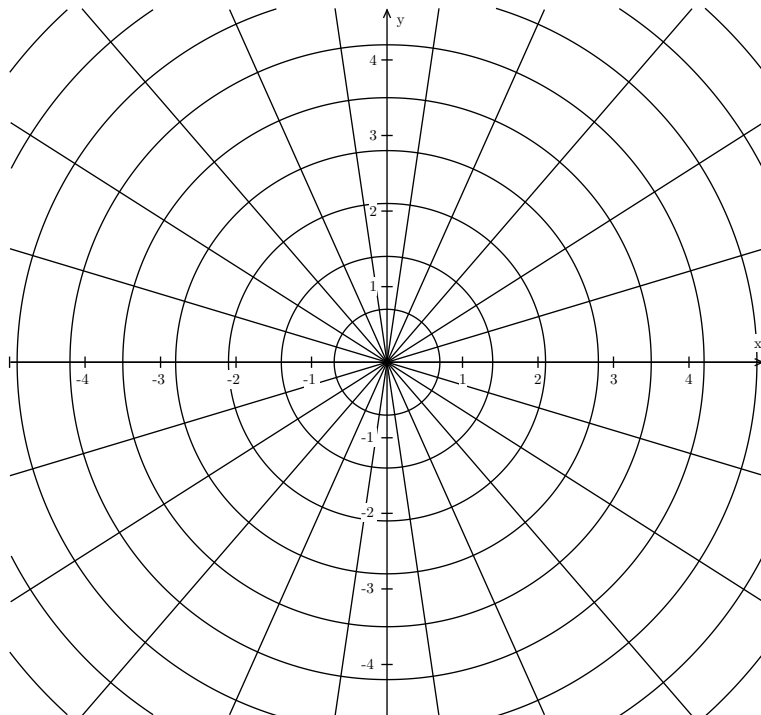


Figure 3.15 – Épicycloïde

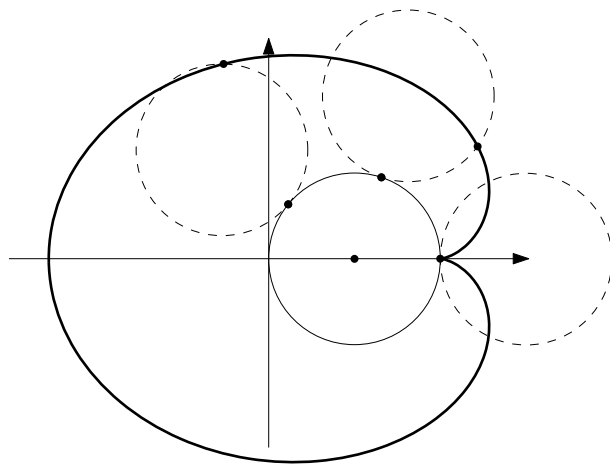


Figure 3.16 – Stophoïde

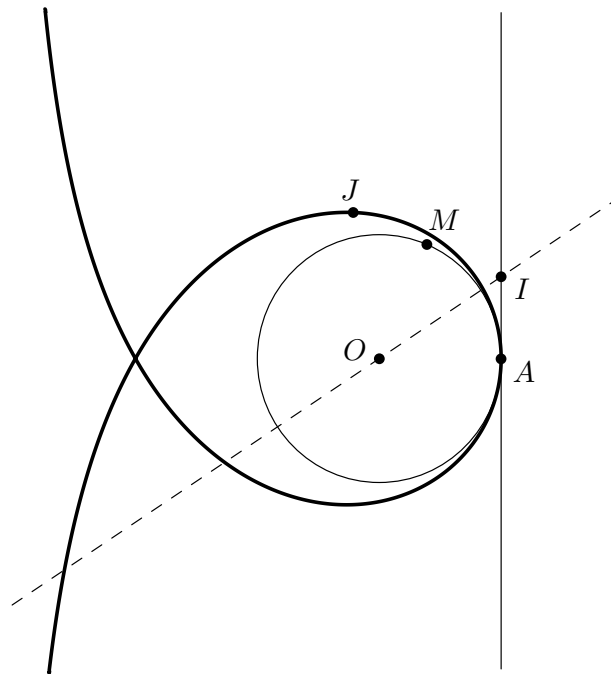


Figure 3.17 – Construction pour l'exercice 3.7.7, page 228

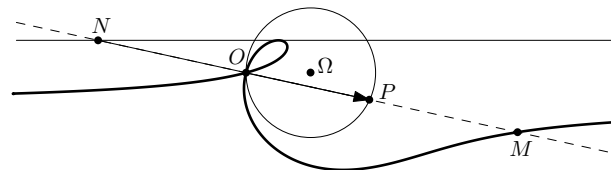


Figure 3.18 – Cardioïde : première propriété

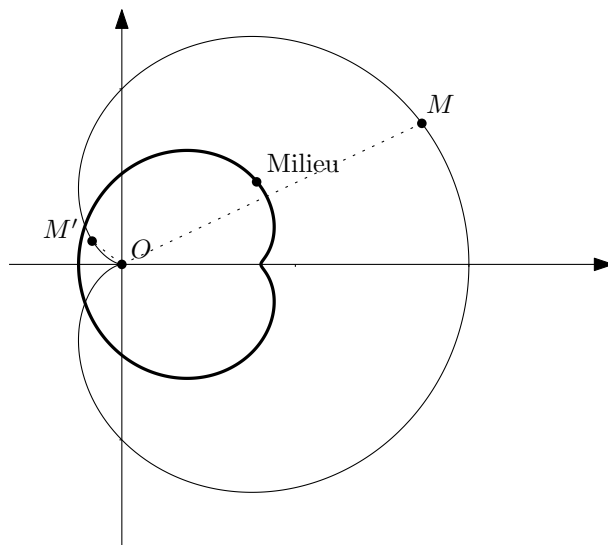


Figure 3.19 – Cardioïde : deuxième propriété

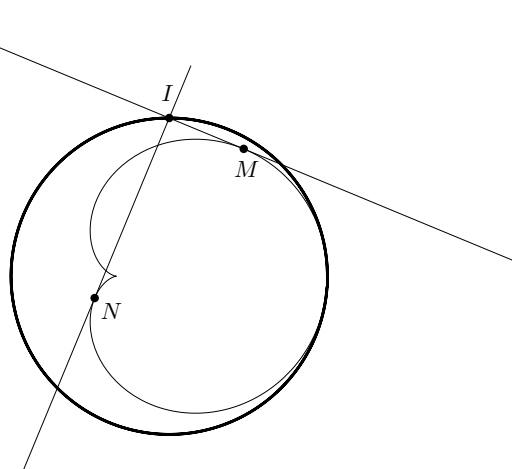


Figure 3.20 – Système de coordonnées adapté à une droite de l'espace

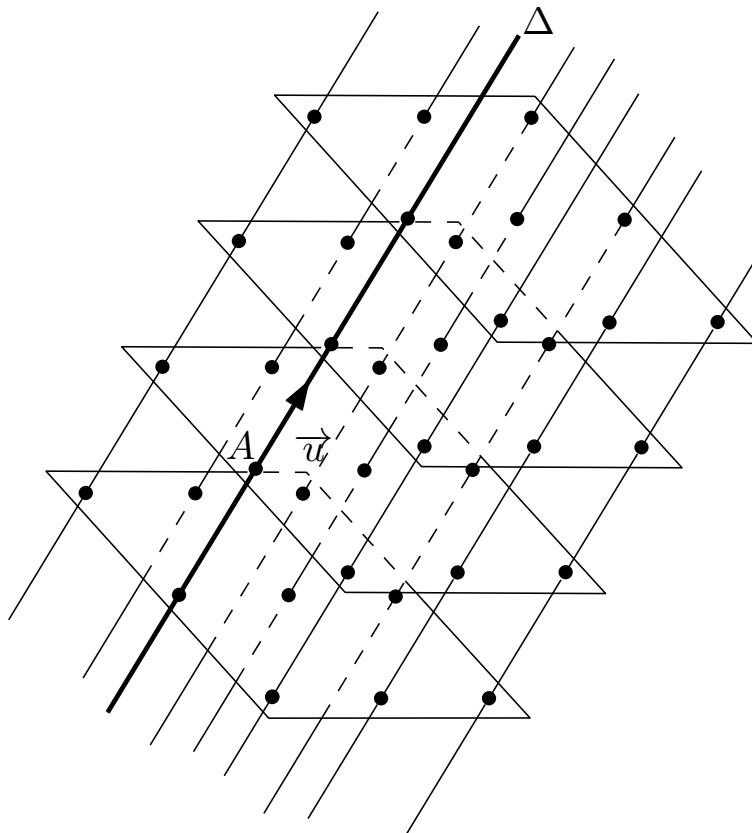


Figure 3.21 – Système de coordonnées adapté à un plan de l'espace

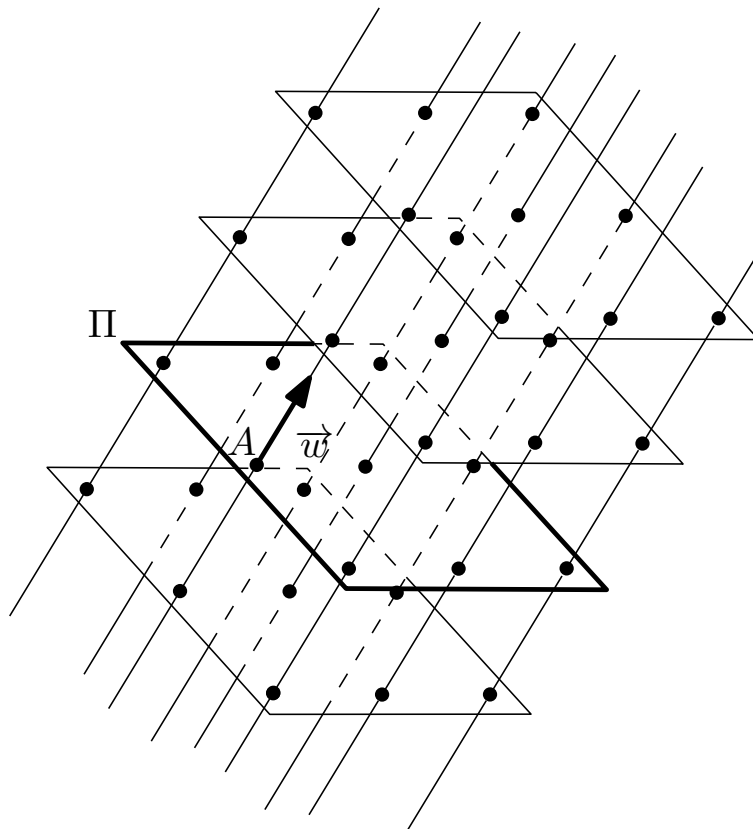


Figure 3.22 – Système de coordonnées cylindriques

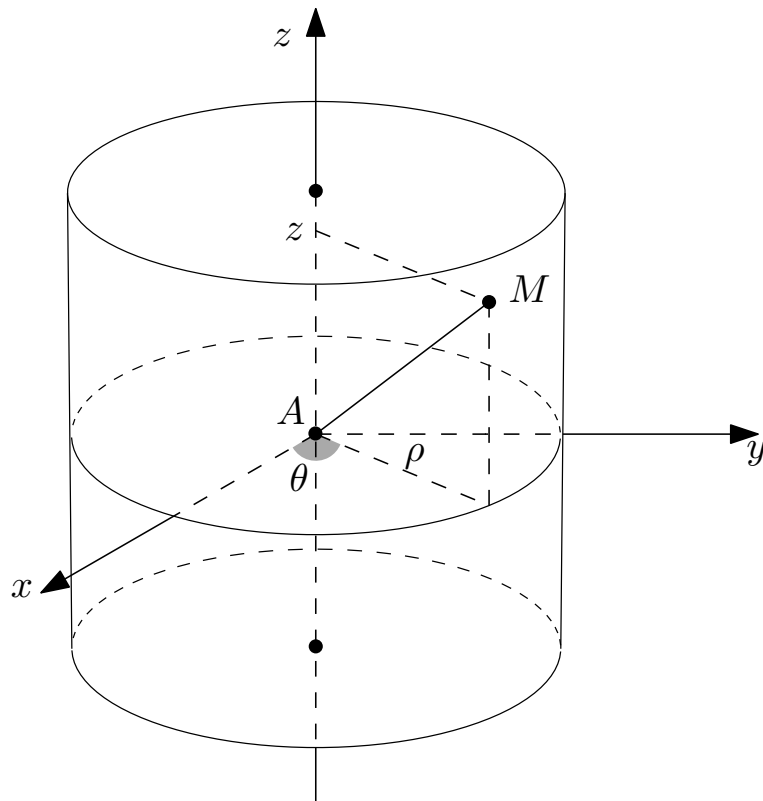


Figure 3.23 – Coordonnées sphériques

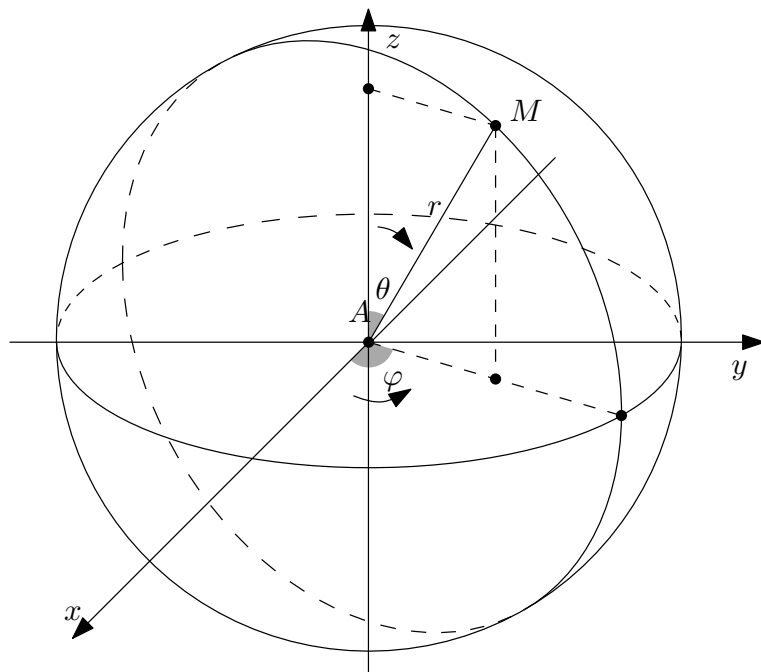
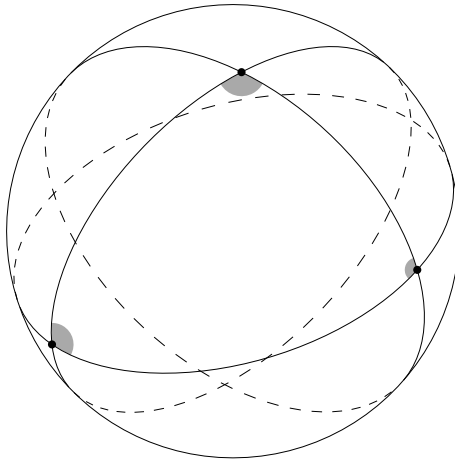


Figure 3.24 – Triangle sphérique



Annexe A

Utilisation de Python

Dans cette partie, on donne une traduction des codes Wxmaxima en Python, pour constater les avantages et inconvénients des deux outils. L'interface utilisée est Jupyter.

A.1 Dessins

In[1]

```
1 from sympy import *
2 init_printing(use_latex='mathjax')
3 %config InlineBackend.figure_format = 'svg'
4 %matplotlib inline
5 from sympy.abc import x, y, t
```

In[2]

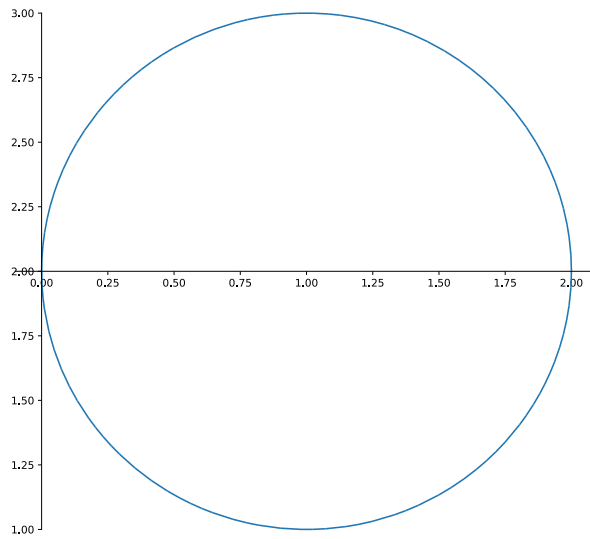
```
1 from sympy.plotting import *
2 from pylab import rcParams
3 rcParams['figure.figsize'] = 10, 10
```

In[3]

```
1 r = 1  
2 a = 1  
3 b = 2  
4 plot_parametric(a+r*cos(t), b+r*sin(t), (t, 0, 2*pi));
```

Voir l'image 1.

Figure 1

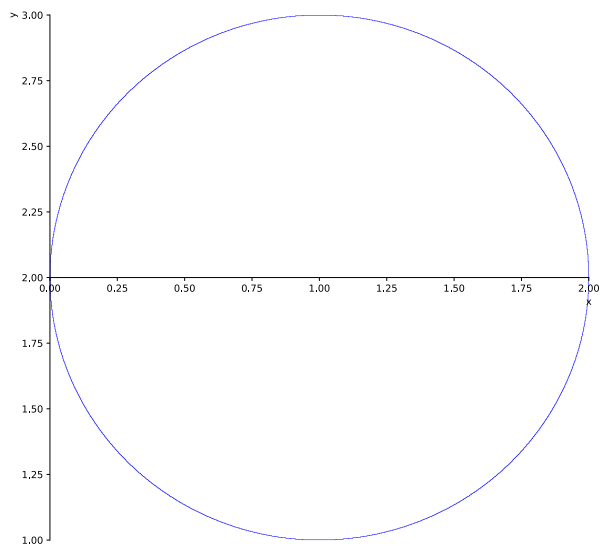


In[4]

```
1 plot_implicit(Eq((x-a)**2+(y-b)**2, r**2), (x, 0, 2), (y, 1, 3));
```

Voir l'image 2.

Figure 2



A.2 Vecteurs

In[5]

```
1 from sympy.vector import *
```

On peut travailler comme en mathématiques en différenciant clairement les vecteurs des points. Et en travaillant dans différentes repères.

In[6]

```
1 R = CoordSys3D('R')
2 O = R.origin
```

In[7]

```
1 from sympy.abc import a, b, c, u, v, w, x, y, z
2 A = O.locate_new('A', a*R.i+b*R.j+c*R.k) # Un point est défini par ses coordonnées dans le repère
3 U = u*R.i+v*R.j+w*R.k # Un vecteur
4 M = O.locate_new('M', x*R.i+y*R.j+z*R.k) # Un point
5 (M.position_wrt(A)).cross(U) # Noter la manière d'obtenir le vecteur AM...
```

Out[7]

$$(-v(-c+z) + w(-b+y))\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (u(-c+z) - w(-a+x))\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + (-u(-b+y) + v(-a+x))\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}$$

In[8]

```
1 u*R.i.dot(_)+v*R.j.dot(_)+w*R.k.dot(_)
```

Out [8]

$$u(-v(-c+z) + w(-b+y)) + v(u(-c+z) - w(-a+x)) + w(-u(-b+y) + v(-a+x))$$

In [9]

```
1 simplify(_)
```

Out [9]

0

A.3 Formule de Lagrange

In [10]

```
1 from sympy.abc import d, e, f
2 V = d*R.i+e*R.j+f*R.k
```

In [11]

```
1 factor((U.dot(V))**2+(U.cross(V)).dot(U.cross(V)))
```

Out [11]

$$(d^2 + e^2 + f^2)(u^2 + v^2 + w^2)$$

A.4 Double produit vectoriel

In[12]

```
1 from sympy.abc import g, h, i
2 W = g*R.i+h*R.j+i*R.k
3 simplify(U.cross(V.cross(W))-(U.dot(W))*V+(U.dot(V))*W)
```

Out[12]

$\hat{0}$

A.5 Cercle dans l'espace

In[13]

```
1 r=Symbol('r')
```

In[14]

```
1 from sympy.abc import theta, phi
```

Je ne sais pas très bien pourquoi il faut mettre dans cet ordre... On comprend le ϕ et le $\theta - \frac{\pi}{2}$ (encore que...), mais le reste ?

In[15]

```
1 M = R.orient_new_space('M', -pi/2, -pi/2+theta,phi, '123')
```


In[16]

```
1 express(M.i,R), express(M.j,R), express(M.k,R)
```

Out[16]

$$\begin{pmatrix} (\sin(\theta) \cos(\phi))\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (\sin(\phi) \sin(\theta))\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + (\cos(\theta))\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}, \\ (\cos(\phi) \cos(\theta))\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (\sin(\phi) \cos(\theta))\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + (-\sin(\theta))\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}, \quad (-\sin(\phi))\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (\cos(\phi))\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}$$

In[17]

```
1 trigsimp(express(diff(express(M.k,R), phi), M))
```

Out[17]

$$(-\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{M}} + (-\cos(\theta))\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{M}}$$

On cherche le cercle d'équation

$$\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r \text{ et } \langle CP, \vec{u}_r \rangle = h$$

Il a pour centre le point H .

In[18]

```
1 C = O.locate_new('C', a*R.i+b*R.j+c*R.k)
2 H = C.locate_new('H', h*M.i) # H=C+h.u_r
3 d = sqrt(r**2-h**2)
4 P = H.locate_new('P', d*(cos(t)*M.j+sin(t)*M.k))
```

In[19]

```
1 OP = express(P.position_wrt(0), R).subs({a:0 ,b:0, c:0, r:1, theta:pi/3, phi:pi/4, h:1/2})
```

In[20]

```
1 OP.to_matrix(R)
```

Out[20]

$$\begin{bmatrix} -0.433012701892219\sqrt{2}\sin(t) + 0.21650635094611\sqrt{2}\cos(t) + 0.125\sqrt{6} \\ 0.433012701892219\sqrt{2}\sin(t) + 0.21650635094611\sqrt{2}\cos(t) + 0.125\sqrt{6} \\ -0.433012701892219\sqrt{3}\cos(t) + 0.25 \end{bmatrix}$$

In[21]

```
1 p1 = plot3d_parametric_line(_[0], _[1], _[2],(t, 0, 2*pi))
```

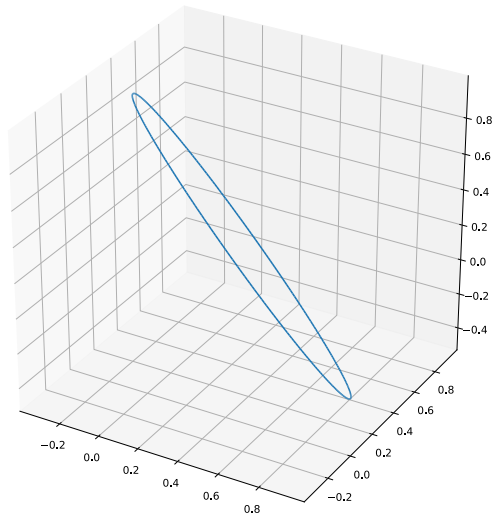
Voir l'image 3.

A.6 Perpendiculaire commune

In[22]

```
1 ax, ay, az, ux, uy, uz, bx, by, bz, vx, vy, vz = symbols('ax ay az ux uy uz bx by bz vx vy vz')
```

Figure 3



In[23]

```
1 A = O.locate_new('A', ax*R.i+ay*R.j+az*R.k)
2 U = ux*R.i+uy*R.j+uz*R.k
3 B = O.locate_new('B', bx*R.i+by*R.j+bz*R.k)
4 V = vx*R.i+vy*R.j+vz*R.k
```

In[24]

```
1 P = A.locate_new('P', u*U)
2 Q = B.locate_new('Q', v*V)
```

In[25]

```
1 PQ = Q.position_wrt(P)
2 d2 = PQ.dot(PQ);
```

In[26]

```
1 q1 = Eq(diff(d2, u), 0)
2 q2 = Eq(diff(d2, v), 0)
3 res = solve([q1, q2], [u, v])
```

In[27]

```
1 u0 = u.subs(res)
2 v0 = v.subs(res)
```

In[28]

```
1 dmin2 = d2.subs(res)
```

In[29]

```
1 simplify(dmin2-((PQ.subs({u:0, v:0})).dot(U.cross(V)))*2/((U.cross(V)).dot(U.cross(V))))
```

Out[29]

0

In[30]

```
1 H1 = A.locate_new('H1', u0*U)
2 H2 = B.locate_new('H2', v0*V)
3 H1H2 = H2.position_wrt(H1)
4 simplify(H1H2.dot(U)), simplify(H1H2.dot(V))
```

Out[30]

(0, 0)

A.7 Vitesse instantanée

In[31]

```
1 F = O.locate_new('F', cos(3*t)*R.i+sin(2*t)*R.j)
2 Fprime = diff(express(F.position_wrt(O),R), t)
```

In[32]

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

In[33]

```
1 OF = F.position_wrt(0)
2 MOF = OF.to_matrix(R)
3 T = np.linspace(0, float(2*pi), num=500, endpoint=True) # pi n'est pas reconnu, mettre le float
4 f = lambdify(t, MOF[0].evalf()) # Permet de passer de sympy à python
5 X1 = f(T)
6 f = lambdify(t, MOF[1].evalf())
7 Y1 = f(T)
```

In[34]

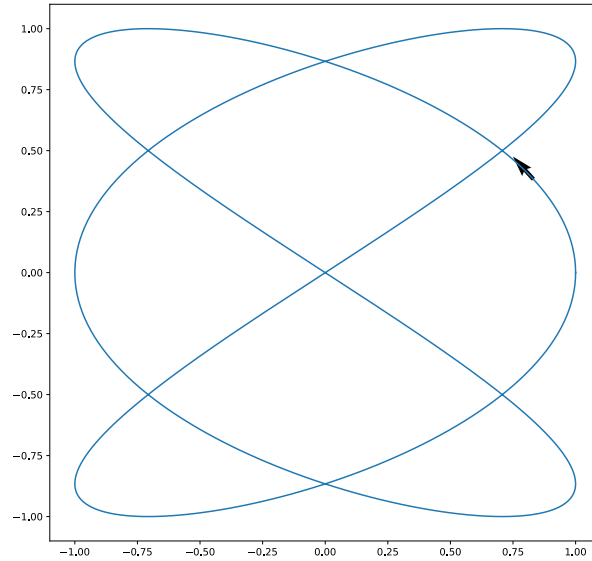
```
1 F1 = O.locate_new('F_1', OF.subs(t,pi/16))
2 X, Y, T = F1.express_coordinates(R)
3 Z = Fprime.subs(t, pi/16)
4 gx = Z.dot(R.i)
5 gy = Z.dot(R.j)
```

In[35]

```
1 fig = plt.figure()
2 plt.plot(X1, Y1)
3 plt.quiver([float(X)], [float(Y)], [float(gx)], [float(gy)]) # Sans les float, s'emmêle...
4 # Je n'arrive pas à maîtriser la longueur de la flèche ?
5 plt.show()
```

Voir l'image 4.

Figure 4



A.8 Dérivées partielles

In[36]

```
1 f = Lambda((x, y), x*y/(x**2+y**2))
```

In[37]

```
1 diff(f(x, y), x)
```

Out [37]

$$-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$$

In[38]

```
1 diff(f(x, y), y)
```

Out [38]

$$-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

In[39]

```
1 f(0, t), f(t, 0)
```

Out [39]

(0, 0)

In[40]

```
1 f(t,t)
```

Out [40]

$$\frac{1}{2}$$

In[41]

```
1 f = Lambda((x, y), x/(x**2+y**2+1))
2 diff(f(x, y), x), diff(f(x, y), y)
```

Out[41]

$$\left(-\frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

In[42]

```
1 f = Lambda((x, y), (x+5*y)/(x**2+y**2+1))
2 diff(f(x, y), x, 2), diff(f(x, y), x, 1, y, 1), diff(f(x, y), x, 2, y, 1, x, 1)
```

Out[42]

$$\left(\frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \left(\frac{4x^2(x + 5y)}{x^2 + y^2 + 1} - 3x - 5y \right), \right. \\ \left. \frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \left(\frac{4xy(x + 5y)}{x^2 + y^2 + 1} - 5x - y \right), \right. \\ \left. \frac{24}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \left(\frac{16x^3y(x + 5y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} - \frac{10x^3}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{6x^2y}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{6xy(x + 5y)}{x^2 + y^2 + 1} + 5x + y \right) \right)$$

In[43]

```
1 simplify(diff(f(x, y), x, 1, y, 1)-diff(f(x, y), y, 1, x, 1))
```

Out [43]

0

In [44]

```
1 f = Lambda((x, y), (x*y*(x**2-y**2))/(x**2+y**2))
2 d1f = diff(f(x, y), x)
3 d2f = diff(f(x, y), y)
4 (d2f/x).subs({x:t, y:0}), (d1f/y).subs({x:0, y:t})
```

Out [44]

(1, -1)

Définitions

- Angle, 94
 - (mesure), 94
 - entre deux droites du plan, 127
 - entre deux plans de l'espace, 127
 - entre une droite et un plan de l'espace, 128
 - orienté du plan, 96
 - Antécédent, 23
 - Applications composantes, 158, 167
 - Barycentre, 129
 - Base mobile, 186
 - Base orthonormée
 - canonique, 146, 149
 - de l'espace, 148
 - (directe), 148
 - (indirecte), 148
 - du plan, 146
 - (directe), 146
 - (indirecte), 146
 - Bipoint, 84
 - Borne
 - inférieure, 21
 - supérieure, 21
 - Caractère défini
 - d'un produit scalaire, 93
 - d'une distance, 93
 - d'une norme, 92
 - Centre de gravité, 132
 - Cercle
 - circonscrit, 126
 - inscrit, 126
 - Continuité
 - en un point d'une fonction de plusieurs variables, 167
 - sur une partie d'une fonction de plusieurs variables, 167
 - Coordonnées
 - cylindriques, 200
 - polaires, 191
 - sphériques, 203
 - Coordonnées barycentriques, 133
 - Coordonnées d'un vecteur
 - de l'espace, 149
 - du plan, 147
 - Couple, 83
 - Direction d'un espace affine réel, 84
 - Distance, 92
 - entre deux points, 90
 - à une partie, 116
 - Droite, 97
 - Droites
 - concourantes, 125
-

parallèles, 125
Dérivée d'une fonction à valeurs vectorielles, 157
Dérivée partielle, 174, 175
Développement limité d'une fonction au voisinage d'un point,
57, 177

Ensemble
dénombrable, 28
fini, 28
infini, 28

Espace
affine réel, 84, 87
vectoriel réel, 83, 86

Extrémum, 78

Fonction
bijective, 24
continue, 41
à gauche ou à droite, 43
croissante, 22
de classe C^1 , 63
de \mathbb{R}^n , 175
de classe C^∞ , 73
de classe C^n , 73
décroissante, 22
dérivable
en un point, 56
sur un intervalle, 58
injective, 23
monotone, 22
partie entière, 22
polynomiale, 42
puissance, 43
périodique, 50
rationnelle, 42
réciproque, 24

strictement
croissante, 22
décroissante, 22
monotone, 22
surjective, 23

Fonctions trigonométriques réciproques, 51

Homogénéité d'une norme, 92
Homothétie, 135

Image d'une fonction, 24
Inégalité triangulaire
pour une distance, 93
pour une norme, 92

Isobarycentre, 129

k -ième application partielle, 174

Lignes de niveaux, 167

Limite
d'une fonction, 30
à droite, 30
à gauche, 30

Linéarité à droite d'un produit scalaire, 93

Loi horaire, 160

Maximum
global, 78
local, 78

Minimum
global, 78
local, 78

Minimum et maximum, 47

Médiatrice, 126

Norme
réelle, 92

n -uplet, 83

Orthocentre, 126

Orthogonalité de deux vecteurs, 91

Ouverts de \mathbb{R}^n , 163

Perpendiculaire commune à deux droites, 125

Plan, 98

Point

adhérent, 30

intérieur, 30

Positivité d'un produit scalaire, 93

Produit

scalaire

canonique, 90

réel, 93

vectorel, 104

Projection orthogonale, 136

sur le plan, 137

sur une droite, 136, 137

Prolongement par continuité, 43

Repère canonique, 153

Repère orthonormé

de l'espace, 152

Rotation, 140

de l'espace

affine, 141

vectorel, 141

du plan

affine, 140

vectorel, 140

Symbole de Kronecker, 148

Symétrie

d'un produit scalaire, 93

d'une distance, 93

Symétrie orthogonale, 138

par rapport à un plan

affine, 139

vectorel, 139

par rapport à une droite

affine, 139

vectorelle, 138

Système de coordonnées, 186

(cercle du plan), 191

(cylindre), 200

(droite de l'espace), 196

(droite du plan), 187

(plan de l'espace), 198

(sphère), 203

Trajectoire, 160

Translation, 135

Triplet, 83

Vecteur normal à un plan, 106

Vitesse instantanée, 160

Théorèmes

Caractère borné des fonctions continues sur un segment, [47](#)

Continuité de la fonction réciproque, [50](#)

Formule

de Lagrange, [96](#), [107](#)

de Leibniz, [75](#)

de polarisation, [90](#)

du double produit vectoriel, [108](#)

Identité du parallélogramme, [92](#)

Inégalité de Cauchy-Schwarz, [90](#)

Lemme des gendarmes, [38](#)

Prolongement \mathcal{C}^1 , [71](#)

Théorème

de Cantor-Bernstein, [26](#)

de Feuerbach, [144](#)

de l'angle au centre, [114](#)

de Pythagore, [91](#)

de Rolle, [64](#)

de Schwarz, [180](#)

des accroissements finis, [64](#)

des valeurs intermédiaires, [45](#)

Commandes Wxmaxima

`%`, [106](#), [112](#), [124](#)

`%pi`, [101](#), [113](#), [160](#)

`abs`, [112](#)

`diff`, [124](#), [159](#), [176](#), [178](#), [180](#), [182](#), [183](#)

`draw2d`, [101](#), [160](#)

`color`, [160](#)

`head_length`, [160](#)

`implicit`, [102](#)

`nticks`, [101](#), [160](#)

`parametric`, [101](#), [160](#)

`vector`, [160](#)

`draw3d`, [113](#)

`parametric`, [113](#)

`express`, [106](#), [107](#), [124](#)

`factor`, [96](#), [107](#)

`limit`, [184](#)

`load(draw)`, [101](#), [113](#), [159](#)

`load(vect)`, [106](#), [107](#), [124](#)

`.` (produit scalaire), [107](#), [124](#)

`~` (produit vectoriel), [106](#), [107](#), [124](#)

`radcan`, [112](#)

`ratsimp`, [108](#), [124](#), [182](#), [184](#)

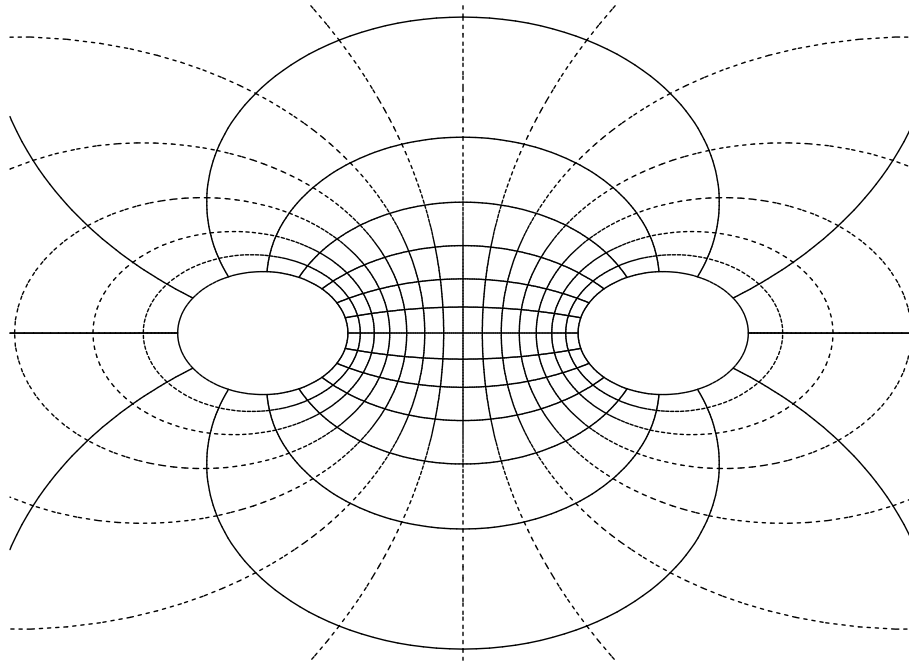
`solve`, [112](#), [124](#)

`sqrt`, [112](#)

`subst`, [112](#), [124](#), [159](#), [184](#)

`trigsimp`, [112](#)

Figure A.1 – Coordonnées bipolaires



Coordonnées bipolaires :

$$x = \frac{\sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)} \text{ et } y = \frac{\sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)}$$