Suites et Séries – TD$_8$ – Complément

Devoir surveillé 2021-2022

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *bornée* telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone.

1. Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Montrer par l'absurde que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ?

Exercice 2.

Soit la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^5} \end{cases}$$

1. Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in \left]0,+\infty\right[$$
2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. On souhaite trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Pour cela, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{u_n^6}{6}$ et $w_n = v_{n+1}-v_n$.
   (a) Donner un équivalent de w_n lorsque $n\to+\infty$. En déduire la nature de la série $\sum_n w_n$.
   (b) Donner un équivalent de v_n lorsque $n\to+\infty$. En déduire un équivalent de u_n.
4. Donner le terme suivant du développement asymptotique de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.

On définit la série $\sum_n u_n$ de terme général u_n donné par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{1+(-1)^{n+1}n}.$$

On rappelle que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, la série de Bertrand $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si :

$$(\alpha>1) \text{ ou } (\alpha=1 \text{ et } \beta>1)$$

1. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente.
3. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n-1}+u_{2n}$.
   Donner un équivalent de $R_n(v) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ quand $n\to+\infty$.
4. En déduire un équivalent de $R_n(u)$ quand $n\to+\infty$.