TD n°10 : Étude pratique de suites et séries de fonctions

Exercice 1

Pour $x > 0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que S est continue.

3. Étudier la monotonie de S.

4. Déterminer la limite de S en $+\infty$. Détermine un équivalent de S en $+\infty$.

5. Déterminer un équivalent de S en 0.
Indications : on pourra faire une comparaison série intégrale.

Correction :

On notera dans la suite $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Soit $x > 0$. Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}$. La série $\sum \frac{1}{n^2x}$ est convergente par critère de Riemann.Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente. Ainsi S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $A > 0$. Soit $x \in [A, +\infty[$:

$$\frac{1}{n+n^2x} \leq \frac{1}{n^2A} = u_n.$$

La série $\sum u_n$ est convergente par critère de Riemann. Ainsi la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[A, +\infty[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ est continue sur $[A, +\infty[$. D'après le théorème de continuité sur le signe somme, S est continue sur $[A, +\infty[$. Ainsi S est continue sur $\bigcup_{A>0}[A, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Ainsi S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $A > 0$. Vérifions que les hypothèses de dérivation sous le signe somme sont satisfaites :

- **H1** $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **H2** $f_n \in \mathscr{C}^1([A, +\infty[, \mathbb{R})$.
- **H3** De plus $\forall x \in [A, +\infty[$:

$$|f_n'(x)| = |-\frac{n^2}{(n+n^2x)^2}| \leq \frac{1}{n^2A^2} = v_n.$$

La série $\sum v_n$ est convergente. Ainsi la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[A, +\infty[$.

Ainsi

- **C1** $S \in \mathscr{C}^1([A, +\infty[, \mathbb{R})$, et
- **C2** $\forall x \in [A, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2}{(n+n^2x^2)^2}$.

En particulier $S \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2}{(n+n^2x^2)^2} < 0.$$

Donc la fonction S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On souhaite appliquer le théorème d'interversion limite/somme.

- **H1** Pour $A > 0$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[A, +\infty[$ donc uniformément.
- **H2** $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

D'après le théorème d'interversion limite/série :

- **C1** $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

On souhaite obtenir un équivalent en $+\infty$. On note $g(x) = xS(x)$ et $g_n(x) = xf_n(x)$. De sorte que $\sum g_n(x) = g(x)$. Étudions la convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dérivable et :

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}.$$

Ainsi la fonction g_n est croissante. En particulier, elle est majorée par sa limite en ∞. Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum 1/n^2$ est convergente par critère de Riemann. Donc la série $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **H1** La série $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **H2** $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$.

D'après le théorème d'interversion limite/série :

- **C1** $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{6}$. Autrement dit, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

5. Effectuons une comparaison série/intégrale. Soit $x > 0$, on définit la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{t+t^2x}$. f_x est positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n, n+1]$:

$$f_x(n+1) \leq f_x(t) \leq f_x(n)$$
$$f_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t+t^2x} dt \leq f_x(n)$$

- En sommant la partie gauche de 1 à $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_x(n+1)) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x} dt.$$

  Donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_x(n)) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x} dt.$$

- En sommant la partie de droite de 1 à $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_x(n).$$

Ainsi on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}dt \leq S(x) \leq f_x(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}dt.$$

Calculons cette intégrale. On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}.$$

Ainsi pour $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_1^{A} \frac{1}{t+t^2x}dt &= [\ln(t) - \ln(1+tx)]_1^A, \\ &= [-\ln(1/t+x)]_1^A \\ &= -\ln\left(\frac{1}{A}+x\right) + \ln(1+x).\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}dt = -\ln(x) + \ln(1+x) \underset{x\to 0^*}{\sim} -\ln(x)$.

Finalement, par le théorème des gendarmes, $\boxed{S(x) \underset{x\to 0^*}{\sim} -\ln(x)}$.

Exercice 2

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer, à l'aide d'une comparaison série intégrale, un équivalent de f en $+\infty$.

3. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On rappelle les deux formules :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Correction :

On notera $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. On souhaite appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit $a > 0$. On note $I = [-a, a]$

- **H1** Soit $x \in I$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi la série $\sum f_n(x)$ converge. Autrement dit, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- **H2** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- **H3** De plus, $\forall x \in I$,

$$|f_n'(x)| = \left|-\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{2a}{n^4}$$

  Ainsi $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de dérivabilité sous le signe somme

- **C1** S est $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$.
- **C2** $\forall x \in [-1, 1]$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

En particulier S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dans la suite, on notera $f_x(t) = \frac{1}{t^2+x^2}$. La fonction f_x est continue positive et décroissante. On effectue une comparaison série intégrale. Soit $n \in [\![-1, +\infty[\![$ et $x \in [n, n+1]$. Alors

$$f_x(n+1) \leq \frac{1}{t^2+x^2} \leq f_x(n)$$
$$f_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+x^2} dt \leq f_x(n)$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2} dt$$
$$\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} \leq f(x) \leq \left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(x) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x}$$

Or $\frac{1}{x}\arctan(1/x) \sim \frac{1}{x^2}$. Donc $f(x) \sim \frac{\pi}{2x}$.

3. On pourrait dériver deux fois pour avoir le développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young. Ici, on peut utiliser du calcul algébrique :

$$\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) + \frac{x^4}{n^4}\frac{1}{n^2+x^2}.$$

Ainsi :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2+x^2)}$$

Or $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2+x^2)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$. Finalement à l'aide des indications :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + O(x^4).$$

Exercice 3

Pour $t > 0$, on pose :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}.$$

1. Justifier que S et définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Étudier la limite en $+\infty$.

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

Dans la suite on notera $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$.

1. Soit $A > 0$ $t \in [A, +\infty[$. Alors :

- **H1** $(-1)^n f_n(t)$ est de signe constant.
- **H2** $t \mapsto \frac{1}{1+nt}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

D'après le théorème spéciales des séries alternées :

- **C1** $\sum f_n(t)$ converge. Autrement dit, on a convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **C2** De plus :
$$R_n(t) \leq |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+An} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[A,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, S est continue sur $[A,+\infty[$. Donc S est continue sur $\bigcup_{A>0}[A,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

2. On a :

- **H1** $\sum f_n$ converge uniformément sur $[A,+\infty[$.
- **H2** $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = 0$

D'après le théorème d'interversion limite/série :

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 0.$$

3. $t \longmapsto f_n(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[A,+\infty[$ et $\forall x \in [A,+\infty[$:

$$f_n'(t) = \frac{(-1)^n}{(1+nt)^2}$$

Il s'agit de nouveau d'une série alternée. Les hypothèses sont de nouveau satisfaites :

- La série $\sum f_n'$ converge et
- le reste pour la série dérivée $|W_n(t)| \leq \frac{n}{(1+nA)^2}$

Ainsi la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[A,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[A,+\infty[$. Finalement f est $\mathscr{C}^1$ sur $\bigcup_{A>0}[A,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4

Pour $x>0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Justifier que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Préciser le sens de variation de S.

3. Établir que :

$$\forall x>0, \qquad S(x+1)+S(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Donner un équivalent de S en 0.

5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Correction :

On notera $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

1. On souhaite appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit $A>0$

- **H1** $f_n \in \mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in [A,+\infty[, \qquad f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

- **H2** $f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n+x}$. La suite $f_n(x)$ converge vers 0 en décroissant. D'après le TSSA, la série $\sum f_n(x)$ est convergente. Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[A, +\infty[$.

- **H3** $f_n'(x) = (-1)^{n+1} v_n(x)$ avec $v_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$. La suite $(v_n(x))$ tend vers 0 en décroissant. D'après le TSSA, la série $\sum f_n'(x)$ converge. De plus :

$$\forall x \in [A, +\infty[, \qquad |R_n(f')(x)| \leq |f_{n+1}'(x)| \leq \frac{1}{n+A}.$$

  Donc la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[A, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme :

- **C1** S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, +\infty[$,

- **C2** $\sum f_n$ converge uniformément sur $[A, +\infty[$ vers S.

- **C3** $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Donc S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\bigcup_{A>0} [A, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

2. En décomposant la dérivée, on obtient :

$$S'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \dots.$$

Ainsi S' est une somme de terme négatif. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(x) \leq 0$. $\boxed{\text{Ainsi } S \text{ est une fonction décroissante}}$.

3. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} S(x+1) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)+x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \\ &= \frac{1}{x}, \qquad \text{car c'est une somme télescopique.} \end{aligned}$$

4. S est continue en 1 Ainsi :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x} - S(x+1) \\ \Rightarrow & \boxed{S(x) \underset{x=0}{\sim} \tfrac{1}{x}} \end{aligned}$$

5. En utilisant la monotonie de S :

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}(S(x+1) + S(x)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1)) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

Donc $\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$.

Exercice 5

Soit $I =]-1, +\infty[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I.

2. Étudier la monotonie de S.

3. Calculer $S(x+1)-S(x)$.

4. Déterminer un équivalent de S en -1^+.

5. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. En déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Correction :

Dans la suite on note $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)}$.
1. On souhaite appliquer le théorème de continuité sous le signe somme.

- **H1** Soit $-1 < a < b$. Alors pour $x \in [a,b]$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{max(|a|,|b|}{n(n+min(|a|,|b|))}$$

  Ainsi la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ (donc uniformément).

- **H2** les f_n sont continues sur $[a,b]$.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la série $\sum f_n$ est bien définie et continue sur $[a,b]$. Ainsi S est continue $]-1,+\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto f_n(x)$ est croissante sur $]-1,+\infty[$. Ainsi par sommation S est croissante.

3. Soit $x > -1$ calculons :

$$\begin{aligned}
S(x+1)-S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n+1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n+x} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} -\frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n+x}, \quad \text{par changement d'indice} \\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

4. Ainsi $S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1)$. Or S est continue en 0, donc $\lim_{x\to -1} S(x+1) = S(0) = 0$. Ainsi $\boxed{S(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} -\frac{1}{x+1}}$.

5. On a $S(k+1)-S(k) = \frac{1}{k+1}$. En sommant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} S(k+1)-S(k) = S(n)-S(0) = S(n).$$

6. On note $E(x)$ la partie entière de x. La fonction S est croissante ainsi :

$$\forall x > 0, \qquad S(E(x)) \leq S(x) \leq S(E(x+1))$$

Or $S(n) \sim \ln(n)$ et $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Donc $S(x) \sim S(E(x)) \sim \ln(x)$ en $+\infty$.