Badanie własności filtru Kalmana

1 Wprowadzenie

Dany jest prosty obiekt inercyjny pierwszego rzędu oraz jego transmitancja po dyskretyzacji ZOH z okresem próbkowania $T_p = 0.05$ sek:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{0.04877}{z - 0.9512}$$

Dla obiektu można wyprowadzić dyskretne równania stanu:

$$G(z) = \frac{0.04877}{z - 0.9512} = \frac{Y(z)}{U(z)} \;\Rightarrow\; zY(z) - 0.9512Y(z) = 0.04877U(z)$$

$$y^{(k+1)} = 0.9512y^{(k)} + 0.04877u^{(k)}$$

Przyjmując jedyną zmienną stanu $x^{(k)} = y^{(k)}$, a także obecność szumów wewnętrznych $v^{(k)}$ i pomiarowych $n^{(k)}$, można zapisać równania stanu:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} & = 0.9512x^{(k)} + 0.04877u^{(k)} + v^{(k)} \\ y^{(k)} & = x^{(k)} + n^{(k)} \end{cases}$$

Wszystkie macierze stają się więc skalarami: $A = 0.9512$, $B = 0.04877$, $C = 1$.

1. Zapoznaj się z zawartością oraz działaniem skryptu `lab5z3_sprawko`. Zwróć uwagę na implementację układu w postaci równań stanu za pomocą pętli `for`. Sygnał sterujący jest to skok jednostkowy, ze zmniejszoną amplitudą w połowie symulacji. Czas symulacji wynosi 20 sek. Oś pozioma przeskalowana jest tak, by jednostką była sekunda.

   Pierwsza pętla służy wygenerowaniu danych wzorowych, czyli w praktyce – pomiarów z obiektu. Mamy tam `x` – rzeczywisty stan obiektu, `y_real` – idealny pomiar (niezaszumiony), oraz `y`, czyli pomiar z szumem – to, co wychodzi z sensora.

   Zwróć uwagę na symulację zaszumienia układu, przez dodanie do równań stanu szumów o zadanych wariancjach σ_v^2 i σ_n^2. Błąd wewnętrzny zamodelowano także jako szum Gaussa.

   Uwaga: wzorowy przebieg obiektu „rzeczywistego” generowany jest każdorazowo od nowa, dlatego też będą się one różnić między symulacjami.

2. Przeanalizuj implementację filtru Kalmana, zwracając uwagę na jego parametry i przechowywanie wartości przez program.

   Do liczbowej oceny jakości posłuży znany już wskaźnik RMSE. Zwróć uwagę na dodatkowy zaimplementowany wskaźnik jakości; zastanów się, jaką informację reprezentuje.

   $$J = \frac{\sum_{k=1}^{M} \left|\hat{y}^{(k)} - y^{+(k)}\right|}{\sum_{k=1}^{M} \left|y^{(k)} - y^{+(k)}\right|}$$

   Oznaczenia: $\hat{y}$ – wartość estymowana, y – wartość mierzona, y^+ – wartość prawdziwa (pomiar bez szumów, który chcemy odtworzyć), k – numer próbki, M – horyzont symulacji (liczba kroków).

3. Ostatnia sekcja służy implementacji ładnego przedstawienia wyników. Sprowadza się do generacji wykresów, które można będzie bezpośrednio umieścić w sprawozdaniu. ☺

2 Zawartość sprawozdania

Przeprowadź symulację dla każdego z przypadków podanych niżej (różne kombinacje parametrów). W celu zmiany danego parametru, wystarczy wpisać odpowiednią wartość w oznaczonej do tego sekcji na początku. W dalszej części kodu nie należy niczego zmieniać, wszystko jest już odpowiednio przypisane.

Skrypt wygeneruje parę wykresów – przebiegi sygnałów wyjścia rzeczywistego (niezaszumionego, które chcemy odtworzyć) y^+, wyjścia mierzonego (z szumem pomiarowym) y oraz estymowanego (wyliczanego przez algorytm KF) $\hat{y}$. Dolny przebieg przedstawia błąd pomiaru (moduł różnicy wartości mierzonej i prawdziwej) $|y - y^+|$ oraz błąd estymacji (moduł różnicy wartości prawdziwej i estymowanej) $|\hat{y} - y^+|$ w czasie dyskretnym. Estymator jest najbardziej przydatny, gdy błędy estymacji są niższe od błędów pomiarowych.

Wszystkie dane eksperymentu będą już opisane na wykresach (parametry, jak i wskaźniki jakości). Zadanie polega tylko na wstawieniu do raportu tej pary wykresów dla każdego z poniższych eksperymentów i **wyciągnięcie wniosków** z tego, co widzimy na przebiegach, z odwołaniem do wskaźników jakości. Należy przy tym nie tylko opisywać, co tam widzimy, ale przede wszystkim **interpretować** te wyniki. Zwróć więc szczególną uwagę na praktyczne aspekty – kiedy wariancje oznaczają (nie-)wiarygodny pomiar, kiedy mamy mały/duży błąd modelowania i co to oznacza dla działania algorytmu, itp. Liczbowe wyniki wskaźników interpretuj w oparciu o to, co te wskaźniki reprezentują. Każdorazowo zamieść wykres i pod nim wnioski z symulacji. Należy tutaj umieć określić wpływ poniższych parametrów na jakość estymacji oraz poprzeć argumenty wskaźnikami jakości, jak i przebiegami czasowymi.

1. Zbadaj wpływ zmian parametrów na działanie układu. Każdorazowo zapisuj wygenerowane przebiegi czasowe (wyjść oraz błędów), a także wartości wskaźników jakości.
   Wpływ wariancji szumów, zmieniając parametry skryptu `Q`, `R`:

   a) $Q = 10^{-9}$, $R = 10^{-9}$,
   b) $Q = 10^{-4}$, $R = 10^{-9}$,
   c) $Q = 10^{-9}$, $R = 10^{-2}$,
   d) $Q = 10^{-3}$, $R = 0.02$,
   e) $Q = 10^{-1}$, $R = 10^{-1}$.

   Pamiętaj o znaczeniu badanych parametrów!

   → Dla której pary parametrów estymacja była najlepsza i dlaczego?
   → Jakie analogie można zauważyć między a) oraz e)?

2. Dla stałych kowariancji $Q = 10^{-3}$, $R = 0.02$ zbadaj:

   a) wpływ $x^{(0)}$ (parametr `x0`) na jakość estymacji – wybierz kilka różnych wartości. Jest to parametr KF; rzeczywista początkowa wartość obiektu będzie zawsze taka sama. Badamy tu wpływ rozbieżności tych wartości;
   b) wpływ $P^{(0)}$ (parametr `P0`) na jakość estymacji – wybierz kilka różnych wartości. Zwróć uwagę na wpływ macierzy kowariancji w przypadku rozbieżności wartości początkowych, prawdziwej i tej z KF.

3. Zbadaj działanie układu przy niepełnej znajomości modelu. W praktyce nie zawsze jest on dobrze znany. Trzeba wtedy określić parametry na losowych wartościach – przyjmij $A_m = 1$, $B_m = 1$, $C_m = 1$. Co trzeba zrobić, by estymator działał prawidłowo? Jak najlepiej wtedy ustawić wariancje szumów? Dobierz odpowiednie wartości, pokazując kilka przypadków dla „dobrego" i „złego" działania.

   Uwaga: Wartości te zmieniamy tylko w części KF. Układ stworzony na początku pozostaje bez zmian. Zakładamy tylko, że nie znamy modelu obiektu, manipulując macierzami z indeksem m. Macierze A, B, C oddają obiekt rzeczywisty – ten jest nie do ruszenia.