CAPES
Exercices Corrigés
Formes quadratiques

2009-2010

Exercice 1 *Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel V et soit q sa forme quadratique associée.*

1. *Montrer* **l'identité de Cauchy**

$$q\left(q(u)v - B(u,v)u\right) = q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right]. \tag{1}$$

2. *En déduire, si q est définie positive,* **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$B(u,v)B(v,u) \leq q(u)q(v). \tag{2}$$

Solution -

1. La formule s'obtient par un calcul direct utilisant la bilinéarité de B. En effet pour tous $u, v \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
q\left(q(u)v - B(u,v)u\right) &= B(q(u)v - B(u,v)u, q(u)v - B(u,v)u) \\
&= q(u)^2 B(v,v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\
&\quad - B(u,v)q(u)B(u,v) + B(u,v)^2 B(u,u) \\
&= q(u)^2 q(v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\
&\quad - B(u,v)^2 q(u) + B(u,v)^2 q(u) \\
&= q(u)^2 q(v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\
&= q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right].
\end{aligned}$$

2. Si q est définie positive alors le membre de gauche de l'identité de Cauchy est positif ou nul et donc, pour tout $u, v \in V$,

$$q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right] \geq 0.$$

– Si u est nul, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trivialement vérifiée.

– Supposons u non nul. Alors $q(u) > 0$, et l'on déduit encore que pour tout vecteur v,

$$q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u) \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc également vérifiée.

Exercice 2 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \text{et} \quad q(P) = B(P,P).$$

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?*
2. *Montrer que q est une forme quadratique. La forme q est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.*
3. *Calculer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$.*
4. *Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? négative ?*
5. *Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q-orthogonale.*

Solution -

1. Pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(P_1 + aP_2, Q) &= \int_0^1 t(P_1(t) + aP_2(t))Q'(t)dt \\ &= \int_0^1 tP_1(t)Q'(t)dt + a\int_0^1 tP_2(t)Q'(t)dt \\ &= B(P_1,Q) + aB(P_2,Q), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à gauche.
D'un autre côté, pour tous $Q_1, Q_2, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(P, Q_1 + aQ_2) &= \int_0^1 tP(t)(Q_1 + aQ_2)'(t)dt \\ &= \int_0^1 tP(t)Q_1'(t)dt + a\int_0^1 tP(t)Q_2'(t)dt \\ &= B(P,Q_1) + aB(P,Q_2), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à droite, ce qui achève de montrer que B est une forme bilinéaire.

Remarquons que

$$B(1,X)=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2},\ \text{ et } B(X,1)=\int_0^1 t^2\times 0dt=0,$$

et donc B n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2. Par construction, q est une forme quadratique. D'autre part,

$$q(1)=B(1,1)=\int_0^1 t\times 0dt=0,$$

donc 1 est un vecteur isotrope et q n'est pas définie.

3. Notons que la forme polaire S de q n'est pas B mais sa symétrisée définie pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$S(P,Q)=\frac{1}{2}\left(B(P,Q)+B(Q,P)\right).$$

Donc la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_n$ est la matrice $M_n=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n+1}$, où

$$m_{ij}=\frac{1}{2}\left(B(X^{i-1},X^{j-1})+B(X^{j-1},X^{i-1})\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \frac{1}{2}\left((j-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt+(i-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{j-1}{i+j-1}+\frac{i-1}{i+j-1}\right)=\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}.\end{aligned}$$

Finalement

$$M_n=\left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}. \tag{3}$$

4. La matrice de q dans $\mathcal{B}_2$ est $M_2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ et donc,

$$q(a+bX+cX^2)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{5}c^2+\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}ac+\frac{3}{4}bc.$$

Nous allons effectuer une réduction de Gauss de q. On a

$$\begin{aligned}
q(a+bX+cX^2) &= \frac{1}{3}\left(b^2+\frac{3}{2}b(a+\frac{3}{2}c)\right)+\frac{2}{3}ac+\frac{2}{5}c^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{1}{3}(\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2+\frac{2}{3}ac+\frac{2}{5}c^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{3}{16}a^2-\frac{27}{64}c^2-\frac{9}{16}ac\\
&+\frac{2}{3}ac+\frac{2}{5}c^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{7}{320}c^2+\frac{5}{48}ac-\frac{3}{16}a^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{3}{16}(a^2-\frac{5}{9}ac)-\frac{7}{320}c^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{3}{16}(a-\frac{5}{18}c)^2\\
&+\frac{25}{1728}c^2-\frac{7}{320}c^2\\
&= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2-\frac{3}{16}(a-\frac{5}{18}c)^2-\frac{1}{135}c^2.
\end{aligned}$$

De cette expression, q est de signature $(1,2)$ et q est non-dégénérée. De plus, q n'est ni positive ni négative.

5. On considère les formes linéaires ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 figurant dans la réduction de Gauss de q obtenue ci-dessus : si $P=a+bX+cX^2$,

$$\ell_1(P)=b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c,\quad \ell_2(P)=a-\frac{5}{18}c\quad\text{et}\quad \ell_3(P)=c.$$

La famille (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$ et la base (P_1,P_2,P_3) dont la base duale est (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) est une base q-orthogonale.

Soit $Q=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{18} & 1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_2^*$ à (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3).

La matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à (P_1,P_2,P_3) est donnée par

$$P={}^tQ^{-1}.$$

Pour calculer Q^{-1}, nous allons résoudre le système linéaire

$$Q\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}.$$

Ce système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccc}\frac{3}{4}a+b &=& A\\ a &=& B\\ \frac{9}{8}a-\frac{5}{18}b+c &=& C.\end{array}\right.$$

Un calcul aisé donne $a = B$, $b = A - \frac{3}{4}B$ et $c = \frac{5}{18}B + C$, soit

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{5}{18} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

De la relation $P = {}^tQ^{-1}$, on déduit que

$$(X, 1 - \frac{3}{4}X, \frac{5}{18} - \frac{4}{3}X + X^2)$$

est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3 *Soit*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B(M, N) = \mathrm{T}r(MJN).$$ [1]

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique, antisymétrique ?*
2. *Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de V.*
3. *Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme quadratique q définie en posant, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $q(M) = B(M, M)$.*
4. *Déterminer la signature de q, son rang et son noyau. La forme q est-elle définie ? positive ? négative ?*
5. *Déterminer $F^{\perp}$ (c'est-à-dire le q-orthogonal de F) où*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\}.$$

Solution -

1. $\mathrm{T}r$ désigne l'opérateur *trace*.

1. Pour tous $M_1, M_2, N \in V$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(M_1 + aM_2, N) &= \mathrm{T}r((M_1 + aM_2)JN) \\ &= \mathrm{T}r(M_1JN + aM_2JN) = \mathrm{T}r(M_1JN) + a\mathrm{T}r(M_2JN) \\ &= B(M_1, N) + aB(M_2, N), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à gauche.
D'un autre côté, pour tous $N_1, N_2, M \in V$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(M, N_1 + aN_2) &= \mathrm{T}r(MJ(N_1 + aN_2)) \\ &= \mathrm{T}r(MJN_1 + aMJN_2) = \mathrm{T}r(MJN_1) + a\mathrm{T}r(MJN_2) \\ &= B(M, N_1) + aB(M, N_2), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à droite. Ceci achève de montrer que B est une forme bilinéaire.

Nous allons montrer que B n'est ni symétrique ni antisymétrique. Pour cela, considérons les matrices $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} M_0JN_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ N_0JM_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $B(M_0, N_0) = -1$ et $B(N_0, M_0) = 0$ et donc

$$B(M_0, N_0) \neq \pm B(N_0, M_0),$$

ce qui montre B n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2. Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $\mathcal{B}$ engendre V. D'un autre côté,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à $a = b = c = 0$ et donc $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de V.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$. On a

$$\begin{aligned}
q(M) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a(a+b)+c(a-b) & b(a+b)+a(a-b) \\ a(c+a)+c(c-a) & b(c+a)+a(c-a) \end{pmatrix} \right) \\
&= a(a+b)+c(a-b)+b(c+a)+a(c-a) = 2(ab+ca).
\end{aligned}$$

Soit
$$q(M) = 2(ab+ca). \tag{4}$$

La matrice de q dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Effectuons une réduction de Gauss de q. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$. On a
$$q(M) = 2a(b+c) = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a-b-c)^2.$$

D'après cette expression, q est de signature $(1,1)$, elle est dégénérée et rg $q = 2$. De plus, elle n'est ni positive ni négative et donc non définie. De cette expression, on déduit aussi que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \ker q$ si et seulement si $a+b+c = a-b-c = 0$, soit $a = 0$ et $b = -c$. Ainsi $\ker q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.

5. La partie F est la droite vectorielle engendrée par la matrice identité I_2. Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ si et seulement si $S(M, I_2) = 0$ où S est la forme polaire de q. La forme polaire S de q est la symétrisée de B, c'est-à-dire que S vérifie pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$$S(M,N) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(MJN) + \mathrm{Tr}(NJM)\right).$$

Donc
$$\begin{aligned}
S(M, I_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix} \right) \\
&= b+c.
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$F^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4 *Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :*

1. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz.$
2. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ q(x, y, z) = x^2 + y^2 - az^2 + 3xy - bxz + yz.$
   On discutera suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$**.**
3. $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= x^2 + (1 + 2\lambda - \mu)y^2 + (1 + \lambda)z^2 + (1 + 2\lambda + \mu)t^2 \\ &\quad + 2xy + 2xz - 2xt + 2(1 - \lambda)yz - 2(1 + \lambda)yt + 2(\lambda - 1)zt. \end{aligned}$$

   On discutera suivant les valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$**.**
4. $q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R},\ q(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st.$

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz \\ &= 2(x^2 + \frac{1}{2}x(3y - 4z)) + y^2 - z^2 \\ &= 2(x + \frac{3}{4}y - z)^2 - 2(\frac{3}{4}y - z)^2 + y^2 - z^2 \\ &= 2(x + \frac{3}{4}y - z)^2 - \frac{1}{8}y^2 + 3yz - 3z^2 \\ &= 2(x + \frac{3}{4}y - z)^2 - \frac{1}{8}(y^2 - 24yz) - 3z^2 \\ &= 2(x + \frac{3}{4}y - z)^2 - \frac{1}{8}(y - 12z)^2 + 15z^2. \end{aligned}$$

La signature de q est $(2, 1)$, rg $q = 3$ et donc $\ker q = \{0\}$.

2. On a

$$
\begin{aligned}
q(x,y,z) &= x^2+y^2-az^2+3xy-bxz+yz\\
&= x^2+x(3y-bz)+y^2-az^2+yz\\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{9}{4}y^2-\frac{b^2}{4}z^2+\frac{3b}{2}yz+y^2-az^2+yz\\
&=\\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y^2-\frac{2(2+3b)}{5}yz)-(a+\frac{b^2}{4})z^2\\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y-\frac{2+3b}{5}z)^2-(a+\frac{b^2}{4}-\frac{(2+3b)^2}{20})z^2\\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y-\frac{2+3b}{5}z)^2+\frac{1}{5}(b^2+3b-5a+1)z^2.
\end{aligned}
$$

q dégénère si et seulement si

$$(b^2+3b-5a+1)=0.$$

Si c'est le cas $(x,y,z)\in\ker q$ si et seulement si

$$x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z=y-\frac{2+3b}{5}z=0.$$

En conclusion, si q dégénère alors $\ker q=\mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5},\frac{2+3b}{5},1)$.
D'un autre côté, la signature de q dépend du signe de $b^2+3b-5a+1$. Considérons cette quantité comme un polynôme en b de degré 2. Son discriminant est $\Delta=9-4(-5a+1)=20a+5=5(4a+1)$ et ses racines, quand $\Delta\geq 0$, sont $-\dfrac{3+\sqrt{20a+5}}{2}$ et $-\dfrac{3-\sqrt{20a+5}}{2}$.
En résumé :

(a) si $a<-\frac{1}{4}$ et $b\in\mathbb{R}$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q=\{0\}$;

(b) si $a>-\frac{1}{4}$, $b\notin]-\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2},-\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}[$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q=\{0\}$;

(c) si $a>-\frac{1}{4}$, $bin]-\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2},-\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}[$, la signature est égale à $(1,2)$, le rang est égal à 3 et $\ker q=\{0\}$;

(d) si $a>-\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2}$ ou $b=-\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}$, la signature est égale à $(1,1)$, le rang est égal à 2 et $\ker q=\mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5},\frac{2+3b}{5},1)$;

(e) si $a=-\frac{1}{4}$ et $b\neq-\frac{3}{2}$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q=\{0\}$;

(f) si $a=-\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{3}{2}$, la signature est égale à $(1,1)$, le rang est égal à 2 et $\ker q=\mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5},\frac{2+3b}{5},1)$.

3. Si $u = (x, y, z, t)$, on a :

$$\begin{aligned} q(u) &= x^2 + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 + (1+2\lambda+\mu)t^2 \\ &\quad + 2xy + 2xz - 2xt + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt \\ &= x^2 + 2x(y+z-t) + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 \\ &\quad + (1+2\lambda+\mu)t^2 + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt. \end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned} q(u) &= (x+y+z-t)^2 - (y+z-t)^2 + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 \\ &\quad + (1+2\lambda+\mu)t^2 + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt \\ &= (x+y+z-t)^2 + (2\lambda-\mu)y^2 + \lambda z^2 + (2\lambda+\mu)t^2 \\ &\quad - 2\lambda yz - 2\lambda yt + 2\lambda zt \\ &= (x+y+z-t)^2 + \lambda(z^2 + 2z(t-y)) + (2\lambda-\mu)y^2 \\ &\quad + (2\lambda+\mu)t^2 - 2\lambda yt \\ &= (x+y+z-t)^2 + \lambda(z+t-y)^2 - \lambda(y-t)^2 + (2\lambda-\mu)y^2 \\ &\quad + (2\lambda+\mu)t^2 - 2\lambda yt. \end{aligned}$$

Finalement,

$$q(u) = (x+y+z-t)^2 + \lambda(z+t-y)^2 + (\lambda-\mu)y^2 + (\lambda+\mu)t^2.$$

La signature de q, son noyau et son rang sont déterminés de la façon suivante :

(a) si $\lambda = \mu = 0$, la signature de q est égale à $(1, 0)$, le rang est égal à 1 et $\ker q = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0\}$;

(b) si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, la signature de q est égale à $(2, 1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q = \mathbb{R}(1, 0, -1, 0)$;

(c) si $\lambda > 0$ et $\mu = 0$, la signature de q est égale à $(4, 0)$, le rang est égal à 4 et $\ker q = \{0\}$;

(d) si $\lambda < 0$ et $\mu = 0$, la signature de q est égale à $(0, 4)$, le rang est égal à 4 et $\ker q = \{0\}$;

(e) si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, la signature de q est égale à $(1+p^+, p-)$, le rang est égal à 4 et $\ker q = \{0\}$, où $p^\pm = \sigma^\pm(\lambda)+\sigma^\pm(\lambda-\mu)+\sigma^\pm(\lambda+\mu)$ avec $\sigma^\pm : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{0, 1\}$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^{*\pm}$ et 0 sur $\mathbb{R}^{*\mp}$.

4. Si $u = (x, y, z, t, s)$, on a :

$$\begin{aligned}
q(u) &= xy - xt + y(z - t + s) + zt - zs + 2st \\
&= (x + z - t + s)(y - t) + t(z - t + s) + zt - zs + 2st \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - t^2 + 2zt + 3st - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t^2 - 2t(z + \frac{3}{2}s)) - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 + (z + \frac{3}{2}s)^2 - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 + z^2 + 2zs + \frac{9}{4}s^2 \\
&= \frac{1}{4}(x + y + z - 2t + s)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z + s)^2 - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 \\
&+ (z + s)^2 + \frac{5}{4}s^2.
\end{aligned}$$

La signature de q est $(3, 2)$, rg $q = 5$ et donc q est non dégénérée.