Chapitre 1 : L’ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

1. est un corps commutatif
2. Axiomes des nombres réels
3. est un corps totalement ordonné
4. est un corps valué
5. Q dense dans R intervalles
6. Eléments remarquables dans un ensemble totalement ordonné
7. **(+,) est un corps commutatif**

- (+,) est un corps commutatif càd que les deux applications de  dans vérifient les propriétés suivantes :

a) L’addition(+) est associative a, b, c 

a + (b +c) = (a + b) + c

b) L’addition (+) est commutative a, b, c  on a a + b = b + a

c) Il existe dans un élément noté 0 tel que pour tout a  on a 0 + a = a a = 0 0 est appelé l’élément neutre pour l’addition

d) A tout élément a est associé l’élément -a tel que a + (-a)= (-a) + a=0

a est le symétrique de a pour l’addition

-on peut alors définir que deux nombres a, b quelconque leur différence par a - b = a + (-b)

-pour la loi (X) (.)

e) elle est aussi associative a, b, c  a(bc)= (ab)c

f) elle est commutativea, b ab = ba

g) Il existe aussi dans un élément noté 10 tel que a 1.a = a.1 = a cet élément est appelé l’élément neutre pour la X

h) tout nombre réel a0 est associé au nombre réel noté  ou  tel que = 1 = , l’élément est le symétrique de  pour la multiplication.

i) La loi multiplicative () est distributive par rapport à l’addition.

a, b, c a(b +c) = ab+ ac (b +c) a = ba + ca

De cette dernière relation on déduit que a ( b + (-b) ) 0 = ab = (a (-b) )

-ab = a (-b) -ab = (-a) b

1. **Axiomes des nombres réels**

P1**-, =**

P2- est une partie stable pour l’addition et la multiplication càd

P3- Si

est le symétrie de a dans

-désigne l’ensemble des réels positifs

-désigne l’ensemble des réels négatifs

= - est l’ensemble des réels strictement négatifs

=- est l’ensemble des réels strictement positifs

-Conséquences : Règles des signes

est une partie stable pour l’addition et la multiplication et de plus ab= 0a = 0 ou b = 0 (théorie fondamentale du corps commutatif)

 est stable pour l’addition

-Le produit de deux nombres positifs est positif (P2)

-Le produit de deux nombres négatifs est positif d’après (P2)

 

b  (-a) (-b) 

-Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif si a et b



-Le produit et le quotient de deux nombres ont mêmes signes. En effet 

et ont signes. 

**III- est un corps totalement ordonné**

3.1- Définition

Etant donné deux réels a et b, on dit que a est inférieur ou égal à b et nous écrivons si et seulement si

3.2- Théorème

La relation «  » est une relation d’ordre total dans

1. La relation  est réflexive càd  
2. est une antisymétrique

, b a = b

1. est transitive



La relation réflexive, antisymétrique et transitive s’appelle relation d’ordre total.

La relation d’ordre est totale si 2 éléments qcq sont comparables.

Par convention on a et 



Théorème

1. Tout nombre positif est supérieur ou égal à 0
2. Tout nombre négatif est inférieur ou égal à 0
3. Tout nombre négatif est inférieur ou égal à tout nombre positif
4. Si ,alors

Compatibilité de l’ordre et des opérations dans

Théorème 1

L’ordre total sur est stable pour l’addition

Càd si 

Corollaire 1

On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens, càd et 





En effet 



Attention : Il ne faut pas soustraire membre à membre.

Théorème 2

L’ordre est stable pour la multiplication par un réel positif.

Si et



En effet



Corollaire 2

Si tous les nombres dans les inégalités sont positifs, on peut multiplier membre à membre

Si 



Théorème 3

La multiplication par un réel négatif inverse l’ordre.

Si et



Si et



**IV- est un corps valué**

4.1- Définition

On appelle valeur absolue d’un nombre réel x et que l’on note  le réel définit comme suit

 si 

 si 

On peut dire donc que  est le plus grand des deux nombres  et , et on écrit  et on lit supremum de  et 

4.2- Propriétés

Quels que soient les réels x et y

1. 
2. 
3. 
4. ou

Th 1

Soit a un nombre réel positif, alors 

Démonstration

1. Si  alors  et on a 
2. Si  alors 

 1) et 2) 

Réciproquement



Puisque par définition 

soit

Th 2

Quels que soient les réels x et y







Corollaire



4.3- Valeur absolue et racine carré

Si , alors on note le nombre positif b tel que . Donc un réel positif a possède deux racines carrées de signe contraire et 

**- dense dans. Intervalles**

5.1- et ensembles denses

Théorème

L’ensemble des nombre réels entre deux nombres réel distincts est un ensemble infini.

L’ensemble des nombres rationnels distincts est un ensemble infini.

Démonstration

Soient a et b tel que deux réels

Soient a et b deux réels distincts tel que 









Entre a et b se trouve 

En appliquant au couple  le même résultat, nous avons , où est la moyenne arithmétique du couple , et aussi de suite pour le couple  et indéfiniment.

La même démonstration s’applique si a et b sont deux nombres rationnels.

En d’autres termes, ce théorème nous dit que pour un nombre réel, il n’y a pas de nombre réel qui lui est immédiatement suivant, car entre deux nombres réels distincts, aussi proches soient-ils, il y a encore une infinité de réels.

Contrairement à ce qui se passe dans ou. Il en est de même pour les nombres rationnels.

Nous disons que les ensembles et sont des ensembles denses.

Axiome d’Archimède

 est un corps archimédien signifie que pour tout couple de nombres réels a et b tel que , on peut associer un nombre naturel n tel que 

5.2- Intervalles

L’ensemble s’appelle intervalle fermé borné par a et b (ou un segment) et se note 

L’ensemble s’appelle intervalle ouvert et se note 

L’ensemble est l’intervalle semi-ouvert à droite et note 

De même l’ensemble est l’intervalle semi-ouvert à gauche et se note 

Symboliquement on note

=

Et=

Partie entière de x

On appelle partie entière d’un réel x le grand entier relatif inférieur ou égal à x. On la note 

Et

si

Si 



----------------------





VI- Eléments remarquables dans un ensemble totalement ordonné

6.1- Définition

Soit A une partie non vide de . S’il existe un élément M majorant de tel que pour tout on a  ; on dit que M est un majorant de A et A est une partie majorée de.

De même soit m un réel tel que pour tout, on a , on dit que m est un minorant de A et que A est une partie minorée de

* Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu’elle est bornée.
* Un majorant unique appartenant à A s’il existe s’appelle le plus grand élément de A.
* Le minorant unique appartenant à A s’il existe s’appelle le plus petit élément de A.
* On appelle borne supérieure de A dans e plus petit des majorants de A et la borne inférieur de A dans le plus grand des minorants.

Propriété

Toute partie A de contient au plus un seul de ses majorants et un seul de ses minorants.

Axiome

Tout ensemble majoré de non vide admet une borne supérieure.

Exemple

Soit 

0 est la borne inférieure et 1 est la borne supérieure mais .

Tout ensemble minoré de non vide admet une borne inférieur.

6.2- Axiome d’Archimède

est un corps archimédien signifie que les nombres réels a, b tel que , on peut lui associer un nombre naturel n tel que 