Санкт-Петербургский Политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ №2

на тему
"Поиск оптимального управления"
по дисциплине
"Математическая теория управления"
вариант №3

Выполнил: студент гр.3630102/60101 **Лансков.Н.В.**
Руководитель: доцент **Суханов А.А.**

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1 Постановка задачи **2**

2 Решение **2**

2.1 Программный расчёт с использованием python 3

2.2 Ручной расчёт 4

3 Результаты **5**

4 Приложения **5**

1 Постановка задачи

Дана система:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2 x = u \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \tag{1}$$

Требуется найти такое оптимальное управление с обратной связью, при котором будет достигать минимума интегрально квадратичный функционал качества О:

$$J = \int_0^\infty (x^2 + q\dot{x}^2 + ru^2)dt \to min \tag{2}$$

Кроме того, требуется определить значение минимума этого функционала при значениях параметров:

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{3},\ r = \dfrac{1}{9} \\ \omega_0 = 1.5 \\ x_0 = 1 \\ v_0 = 8 \end{cases}$$

2 Решение

Сначала переведём систему (1) в пространство состояний. Для этого воспользуемся общей методикой перевода системы в пространство состояний:

1. $x = x_1 \Rightarrow C = (1, 0)$
2. $D(\dot{x}_1) = u + \omega_0^2 x_1$

Положив $\dot{x}_1 = x_2$, запишем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = u + \omega_0^2 x_1 \\ x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Таким образом, система (1) перепишется в пространстве состояний в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + \omega_0^2 x_1 \\ x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = v_0 \end{cases} \tag{3}$$

Найдём вид матриц A, B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

В общем виде интегрально-квадратичный функционал качества записывается так:

$$J = \int\limits_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{5}$$

Определим вид матриц Q, R:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \ R = r \tag{6}$$

Известно, что оптимальное управление $u^{opt} = -K^* x$, причём коэффициенты $K^* = (K_1, K_2)$ могут быть вычислены из следлующей системы уравнений:

$$K^* = R^{-1} B^T P^* \tag{7}$$

где P^* - неортрицательное решение матричного уравнения Риккатти-Лурье. В таком случае, минимум функционала $J_{min} = x_0^T P x_0$. Для применения теоремы о существовании и единственности неотрицательного решения уравнения Риккатти-Лурье необходимо проверить систему (3) на полную управляемость, также необходимо удостовериться в том, что $Q \geq 0, R > 0$. Для проверки системы на полную управляемость воспользуемся теоремой Калмана и проверим выполнение условия:

$$rank A_u = rank(B, AB) = rank \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \tag{8}$$

Значит, условия теоремы выполнены.

2.1 Программный расчёт с использованием python

Воспользуемся встроенной функцией (K, P) = control.lqr(A, B, Q, R). Эта функция в качестве возвращаемых значений выдаёт вектор коэффициентов K^* и матрицу P^*.

В результате получаем:

$$K^* = (6, 3.87298335), \ P^* = \begin{pmatrix} 1.61374306 & 0.66666667 \\ 0.66666667 & 0.43033148 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$J_{min} = 39.82162463 \tag{10}$$

$$u^{opt} = -K^* x = -6x_1 - 3.87298335 x_2 = -6x - 3.87298335 \dot{x} \tag{11}$$

2.2 Ручной расчёт

Найдём решение уравнения Риккатти-Лурье:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0s \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} - \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

Иначе,

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 p_{12} - \dfrac{p_{12}^2}{r} + 1 & \omega_0^2 p_{22} + p_{11} - \dfrac{p_{12}p_{22}}{r} \\ \omega_0^2 p_{22} + p_{11} - \dfrac{p_{12}p_{22}}{r} & 2p_{12} - \dfrac{p_{22}}{r} + q \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

Найдём решение системы:

$$\begin{cases} 2\omega_0^2 p_{12} - \dfrac{p_{12}^2}{r} + 1 = 0 \\ \omega_0^2 p_{22} + p_{11} - \dfrac{p_{12}p_{22}}{r} = 0 \\ 2p_{12} - \dfrac{p_{22}}{r} + q = 0 \end{cases} \tag{15}$$

В результате получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} p_{12} = \dfrac{2r\omega_0^2 \pm \sqrt{4r^2\omega_0^4 + 4r}}{2} \\ p_{22} = \pm\sqrt{2rp_{12} + qr} \\ p_{11} = \dfrac{p_{12}p_{22}}{r} - \omega_0^2 p_{22} \end{cases} \tag{16}$$

Подставив заданные в условии значения констант, получаем:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.61374306 & 0.66666667 \\ 0.66666667 & 0.43033148 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} -1.61374306 & 0.66666667 \\ 0.66666667 & -0.43033148 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Следовательно, $P^* = P_1$. Тогда:

$$K^* = (R^{-1}B^T P^*) = (6, 3.87298335) \tag{18}$$

$$J_{min} = 39.82162463 \tag{19}$$

$$u^{opt} = -K^* x = -6x_1 - 3.87298335x_2 = -6x - 3.87298335\dot{x} \tag{20}$$

3 Результаты

В результате работы было найдено оптимальное управление с обратной связью для поставленной задачи(программно и ‘вручную‘), а также определено значение минимума функционала качества.

4 Приложения

Расчётное задание выполнено с использованием системы вёрстки Latex.