1 Постановка задачи

Дано:

1. Полигональная область Ω с треугольной сеткой
2. Заданная функция (например, u(x, y) = sin(x + y))

Задача:

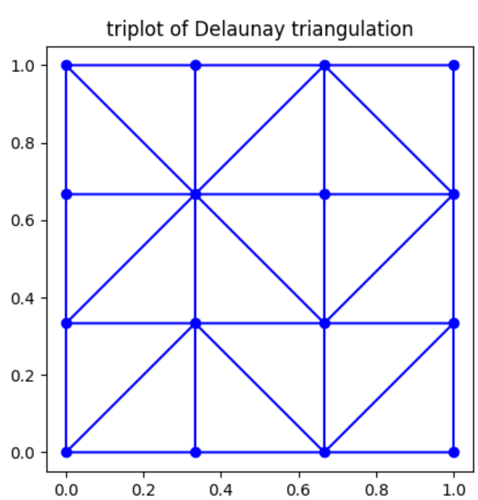
1. Построить линейный интерполянт I_h
2. Написать функцию, вычисляющую норму $L^2(\Omega)$ разности точного решения и интерполянта
3. Написать функцию, вычисляющую норму $L^2(\Omega)$ разности градиентов точного решения и интерполянта
4. Найти зависимость точности вычисления норм от шага h
5. Написать алгоритм минимизации функционала вида:

$$J = \|u_h - u\|_{L^2}^2 \tag{1}$$

2 Решение

2.1 Триангуляция области

Пока что для простоты рассматривается прямоугольная область, триангуляция выполняется следующим образом:



2.2 Построение интерполянта

Интерполянт задаётся в узлах сетки точными занчениями интерполируемой функции. На рёбрах конечного элемента он задаётся уравнением прямой в пространстве R_3, проходящей через точки ребра, на грани - уравнением плоскости, проходящей через вершины конечного элемента(в данной работе это впринципе не нужно, достаточно рассматривать рёбра).

2.3 Вычисление нормы разности точного решения и интерполянта

Норму считаем по следующей формуле (Ω_i - конечный элемент с индексом i, N - число конечных элементов)

$$||f||_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^2 d\Omega\right)^{0.5} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} |f|^2 d\Omega\right)^{0.5}$$

А интеграл на конечном элементе считаем как:

$$\int\limits_{\Omega_i} |f|^2 d\Omega = \frac{\Delta_i}{3}(\psi_{12} + \psi_{13} + \psi_{23})$$

Где ψ_{jk} - значение функции $|f|^2$ в центральной точке ребра jk конечного элемента i,
а Δ_i - площадь конечного элемента

При этом, в данном случае функция $f = u - u_I$. Пример того, как в точности вычисляется норма, есть в приведённом ниже коде программы

2.4 Вычисление нормы разности градиентов точного решения и интерполянта

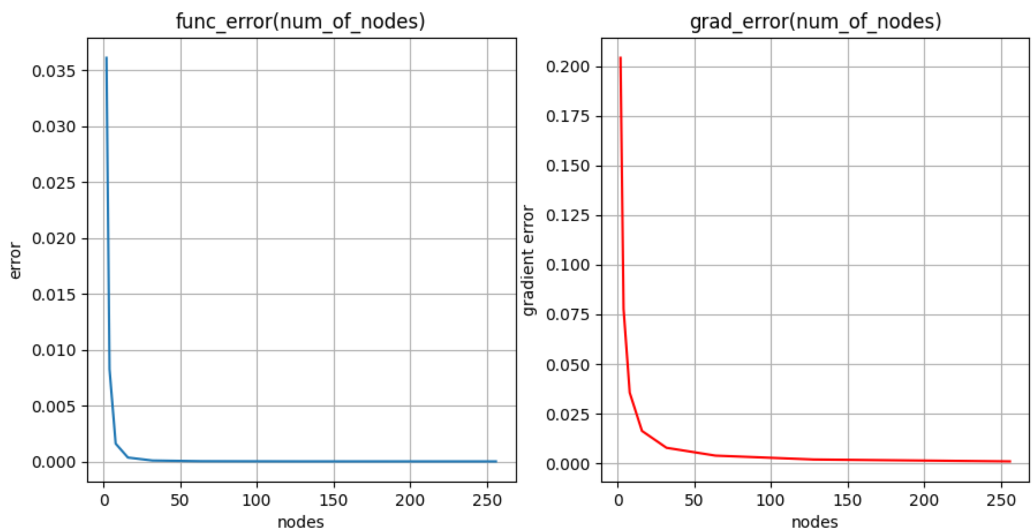
Тут действуем в точности также, как и в пункте выше. В данном случае, функция $f = grad(u) - grad(u_I)$. $grad(u)$ задаём ‘вручную‘ по определению градиента. $grad(u_I)$ находим как сумму значений $a_1 + a_2$, где a_1, a_2 находим из решения системы:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 = u(x_1, y_1) \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 = u(x_2, y_2) \\ a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 = u(x_3, y_3) \end{cases}$$

Где $z = a_1 x + a_2 y + a_3$ - уравнение плоскости, в которой лежит конечный элемент,
а $(x_i, y_i, u(x_i, y_i))$ - координаты вершин конечного элемента (известны из постановки задачи и триангуляции области)

2.5 Зависимость ошибки от числа шагов

```
function:
n =  2 , error =  0.03608439182435161
n =  4 , error =  0.008242500184651272
n =  8 , error =  0.0015906731415815446
n =  16 , error =  0.00034528069349915264
n =  32 , error =  8.166999259286822e-05
n =  64 , error =  1.9929116899051134e-05
n =  128 , error =  4.90693971374586e-06
n =  256 , error =  1.21581684316745e-06
gradient:
n =  2 , error =  0.2041241452319315
n =  4 , error =  0.077795738993455
n =  8 , error =  0.035583665072484706
n =  16 , error =  0.01630394483187211
n =  32 , error =  0.007806450997176318
n =  64 , error =  0.0038594499909911373
n =  128 , error =  0.0019187120164667686
n =  256 , error =  0.0009538529259929061
```



3 Код

Код программы можно посмотреть тут:
`https://github.com/LanskovNV/fem-labs/tree/master/lab_3`