

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого Институт  
прикладной математики и механики  
**Кафедра «Прикладная математика»**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4**

по дисциплине  
"Математическая статистика"

Выполнил студент гр. **33631/1**  
**Лансков.Н.В.**

Санкт-Петербург  
2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Список иллюстраций</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Теория</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
5.1	Эмпирические функции распределения . . . . .	4
5.2	Ядерные функции . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Приложения</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Список литературы</b>	<b>24</b>

# 1 Список иллюстраций

1	Эмпирическая функция для нормального стандартного распределения . .	4
2	Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа . . . .	5
3	Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши . . . . .	6
4	Эмпирическая функция для распределения Пуассона . . . . .	7
5	Эмпирическая функция для равномерного распределения . . . . .	8
6	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 20$ . . .	9
7	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 60$ . . .	10
8	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 100$ . .	11
9	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 20$ . . . . .	12
10	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 60$ . . . . .	13
11	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 100$ . . . . .	14
12	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 20$ . . . . .	15
13	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 60$ . . . . .	16
14	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 100$ . . . . .	17
15	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 20$ . . . . .	18
16	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 60$ . . . . .	19
17	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 100$ . . . .	20
18	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 20$ . .	21
19	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 60$ . .	22
20	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 100$ .	23

## 2 Постановка задачи

Для, приведённых ниже, пяти распределений сгенерировать выборки объёмом 20, 60, 100, для каждой выборки построить эмпирические функции распределения и ядерные оценки плотности распределения на отрезке  $[-4, 4]$ .

Распределения [4]:

1. Стандартное нормальное распределение
2. Стандартное распределение Коши
3. Распределение Лапласа с коэффициентом масштаба  $\sqrt{2}$  и нулевым коэффициентом сдвига.
4. Равномерное распределение на отрезке  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
5. Распределение Пуассона со значением матожидания равным двум.

## 3 Теория

Эмпирическая функция распределения [5], построенная по выборке  $X = (X_1, \dots, X_n)$  есть случайная функция  $F_n(y)$ , определённая на  $\mathbb{R}$ :

$$F_n(y) = \sum_{i=1}^n I(X_i < y) \quad \text{где } I(X_i < y) = \begin{cases} 1, & X_i < y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1)$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$  есть одномерная выборка одинаково распределённых элементов, с плотностью распределения  $f$ .

Ядерная оценка плотности [6]:

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (2)$$

где  $K$  является ядром, а  $h > 0$  является сглаживающим параметром, и называется шириной полосы.

В данной работе в качестве ядра была выбрана плотность вероятности стандартного нормального распределения [7]:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3)$$

## 4 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python 3.7*: модуль *random* библиотеки *numpy* [1] для генерации случайных чисел с различными распределениями.

Обработка функций распределений была сделана с помощью модуля *scipy* [3].

## 5 Результаты

### 5.1 Эмпирические функции распределения

Рис. 1: Эмпирическая функция для нормального стандартного распределения

Distribution:normal Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements

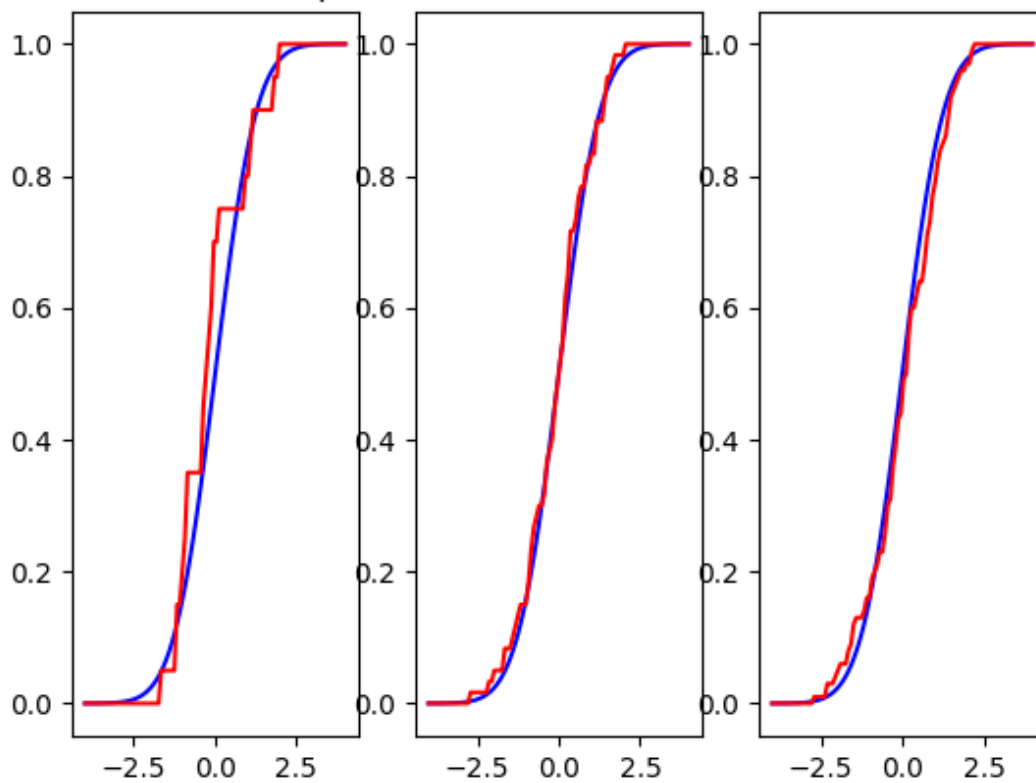


Рис. 2: Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа

Distribution:laplace Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements

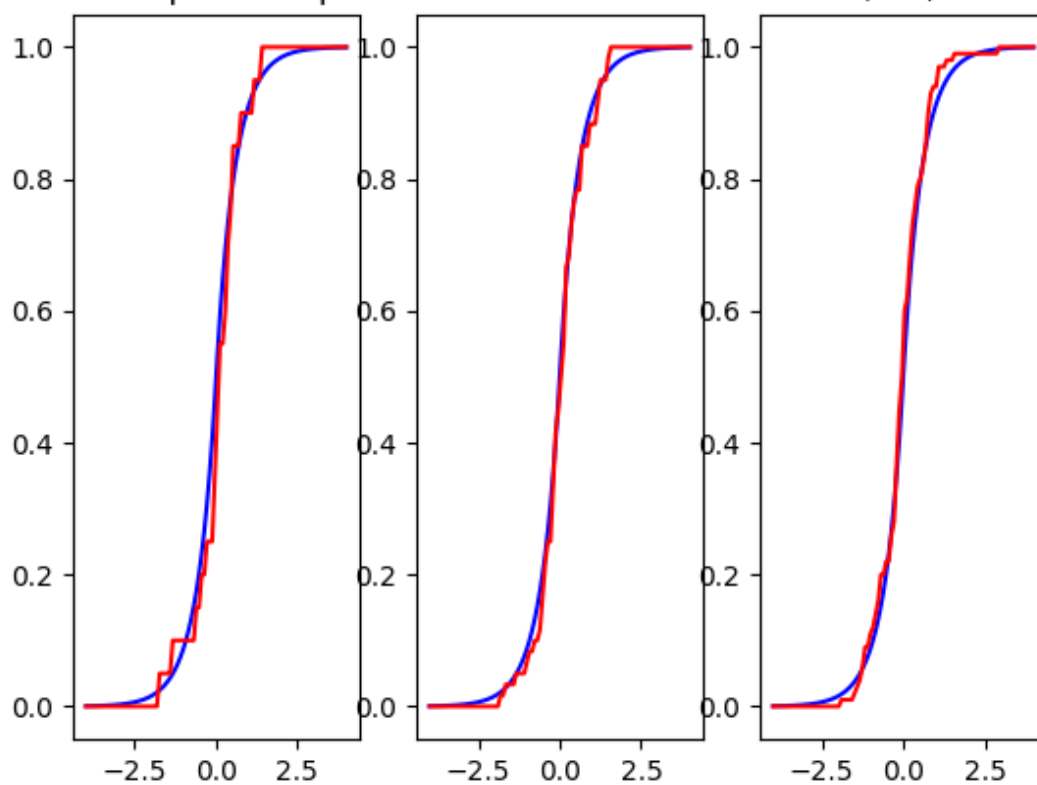


Рис. 3: Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши

Distribution:cauchy Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements

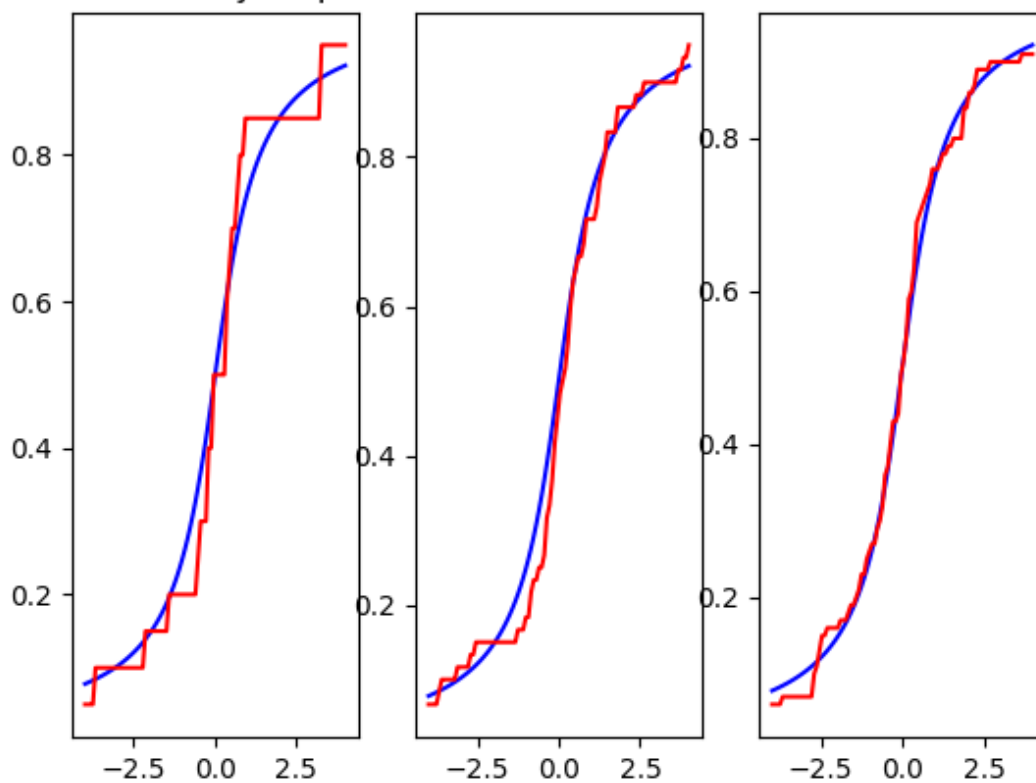


Рис. 4: Эмпирическая функция для распределения Пуассона

Distribution:poisson Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements

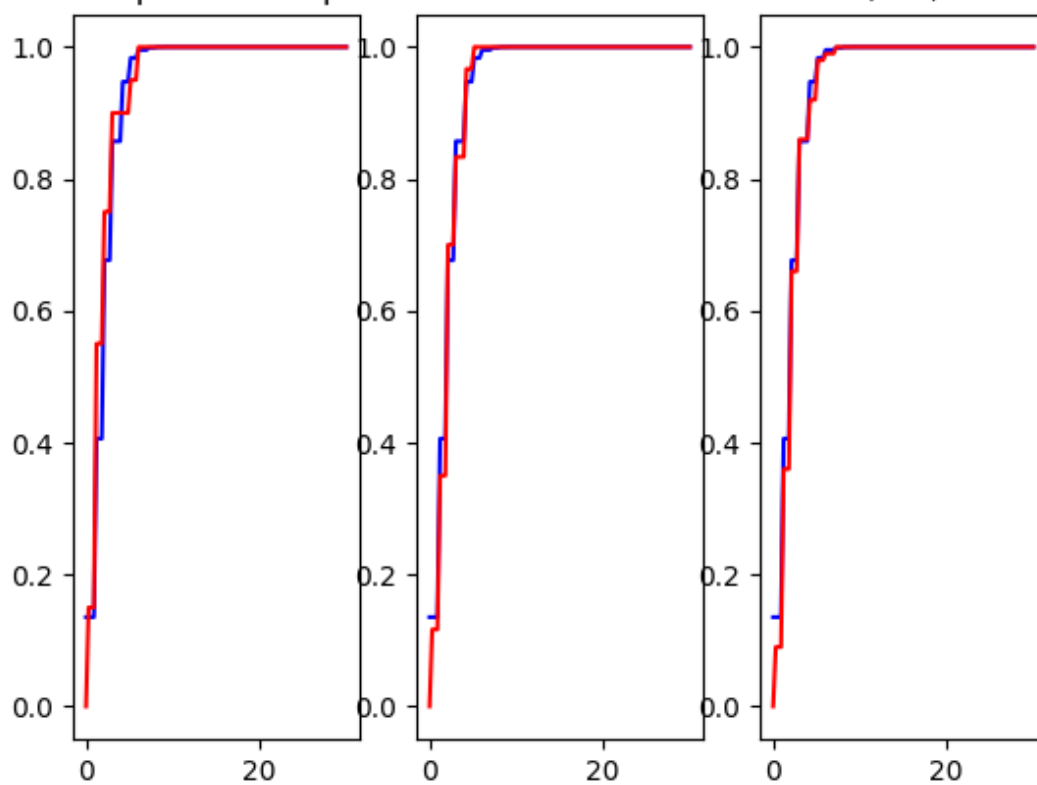
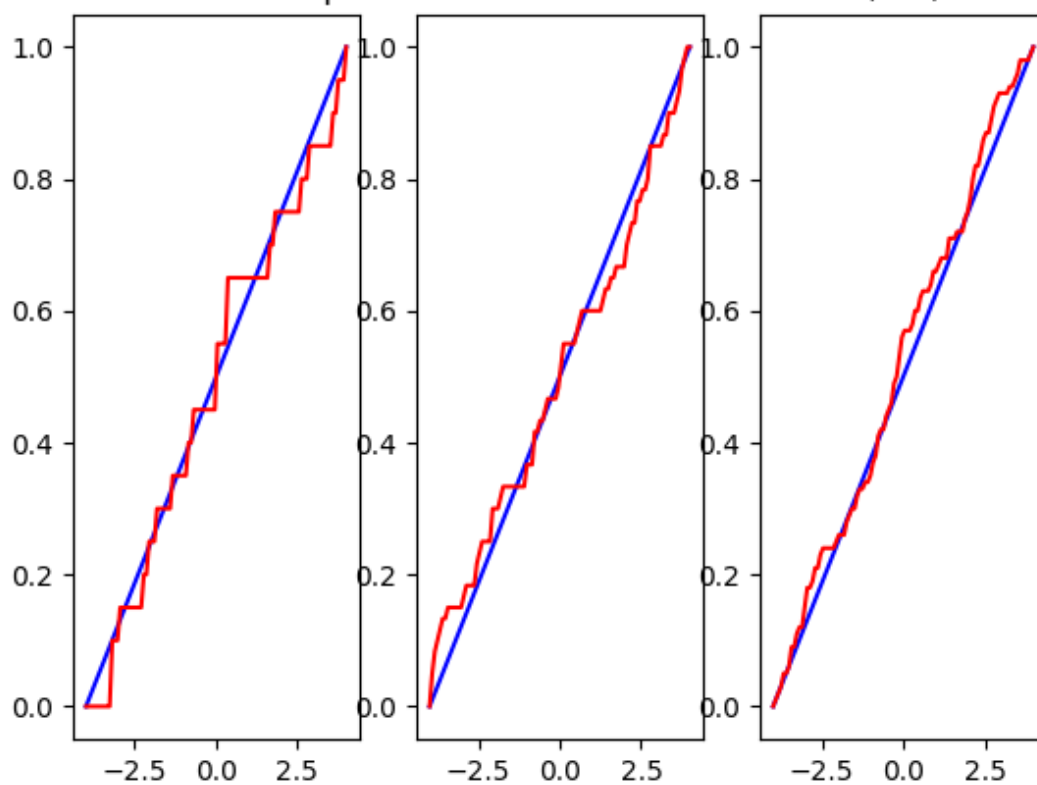




Рис. 5: Эмпирическая функция для равномерного распределения

Distribution:uniform Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements



## 5.2 Ядерные функции

Рис. 6: Ядерная функция плотности для нормального распределения,  $n = 20$

Distribution: normal  $n = 20$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

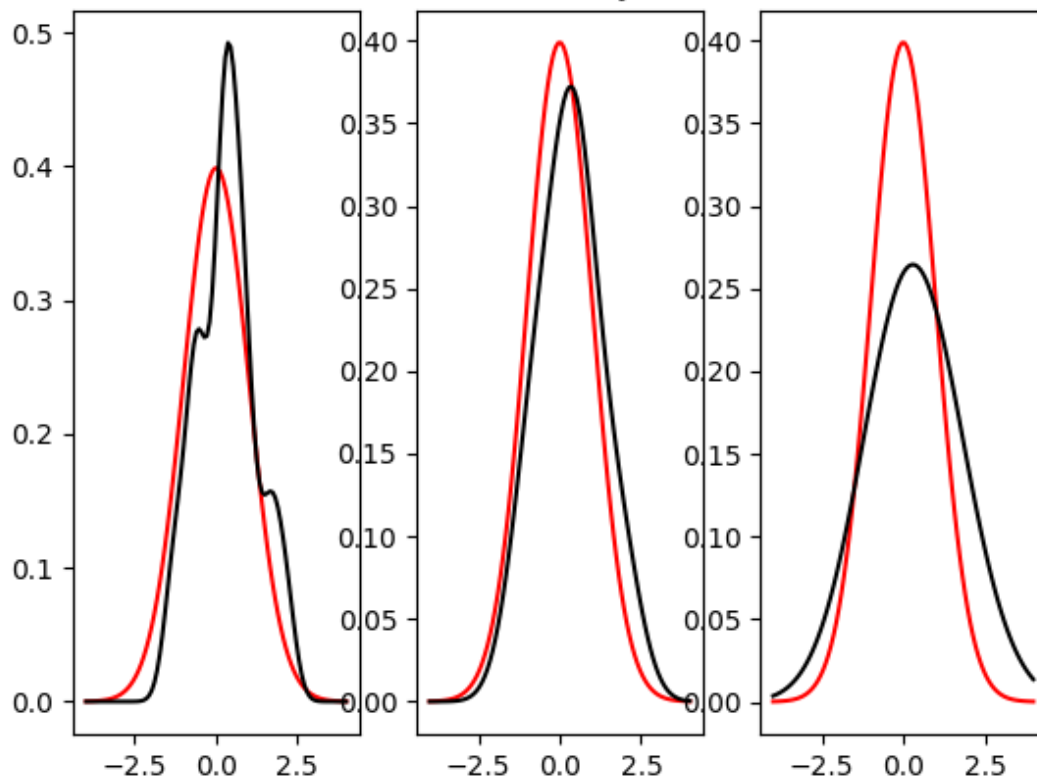


Рис. 7: Ядерная функция плотности для нормального распределения,  $n = 60$

Distribution: normal  $n = 60$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

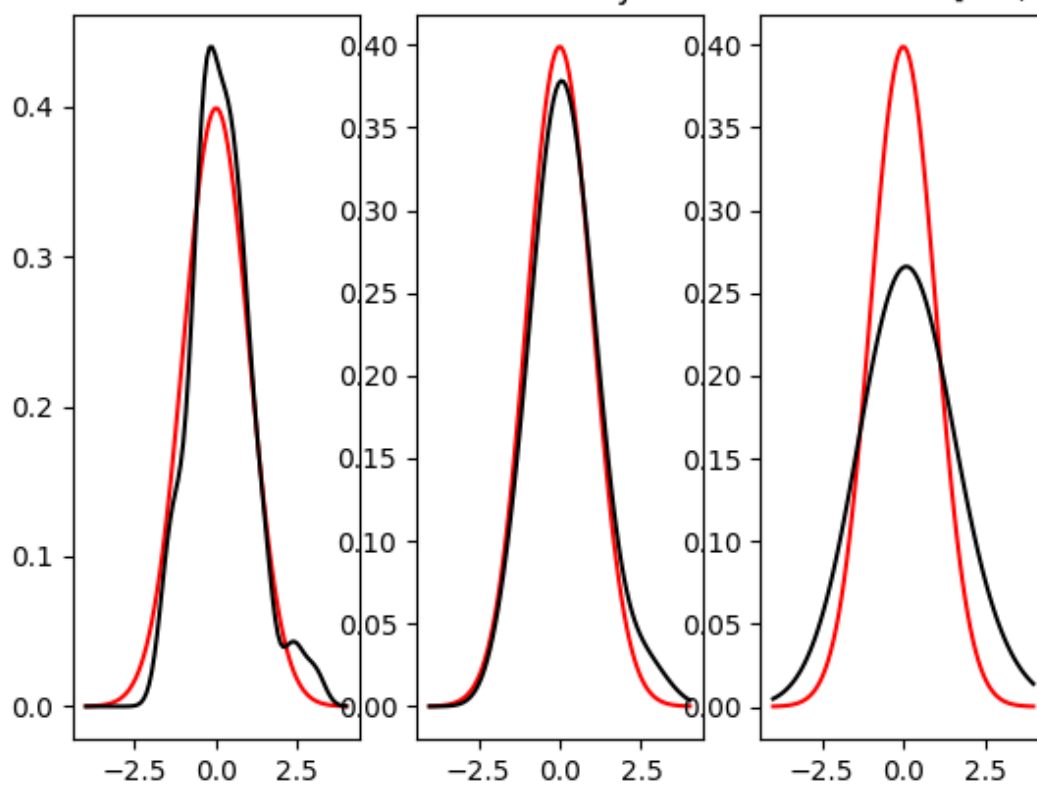


Рис. 8: Ядерная функция плотности для нормального распределения,  $n = 100$

Distribution: normal  $n = 100$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

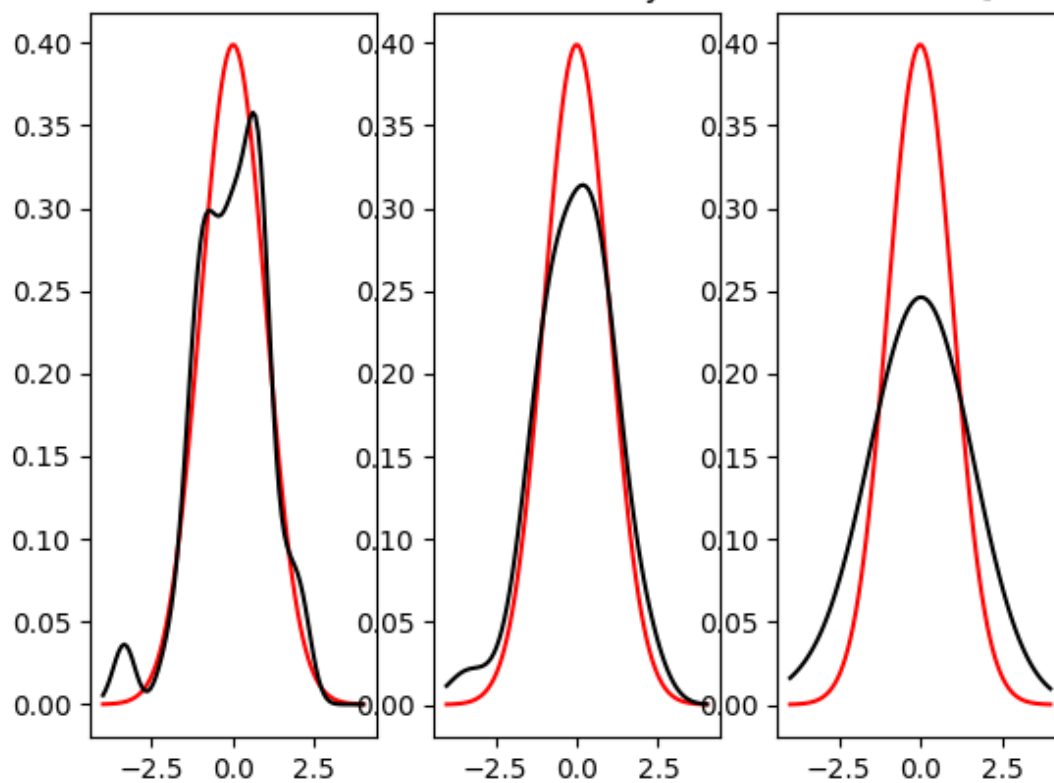


Рис. 9: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа,  $n = 20$

Distribution: laplace  $n = 20$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

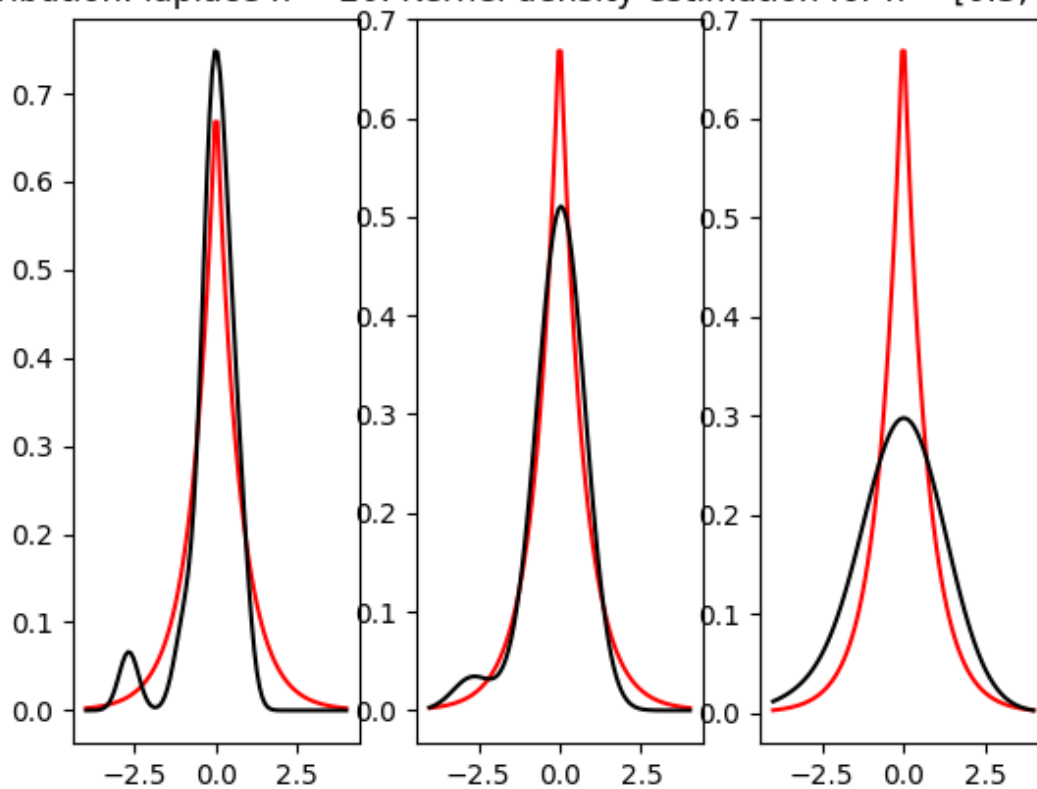


Рис. 10: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа,  $n = 60$

Distribution: laplace  $n = 60$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

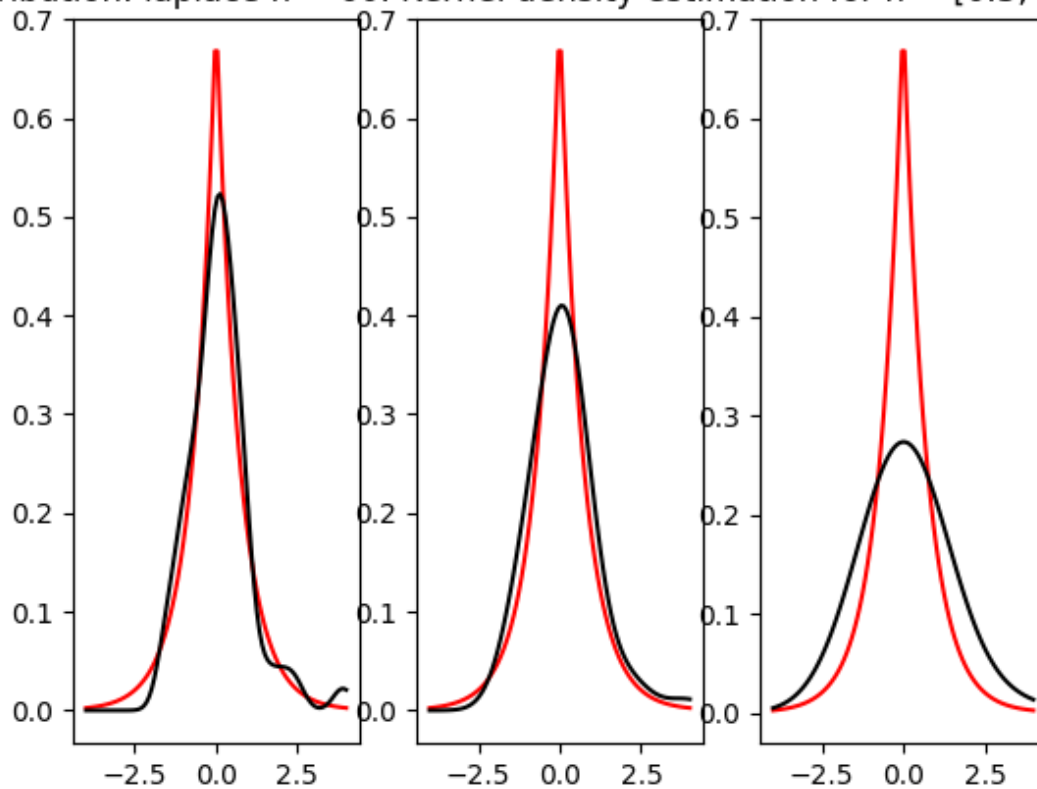


Рис. 11: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа,  $n = 100$

Distribution: laplace  $n = 100$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

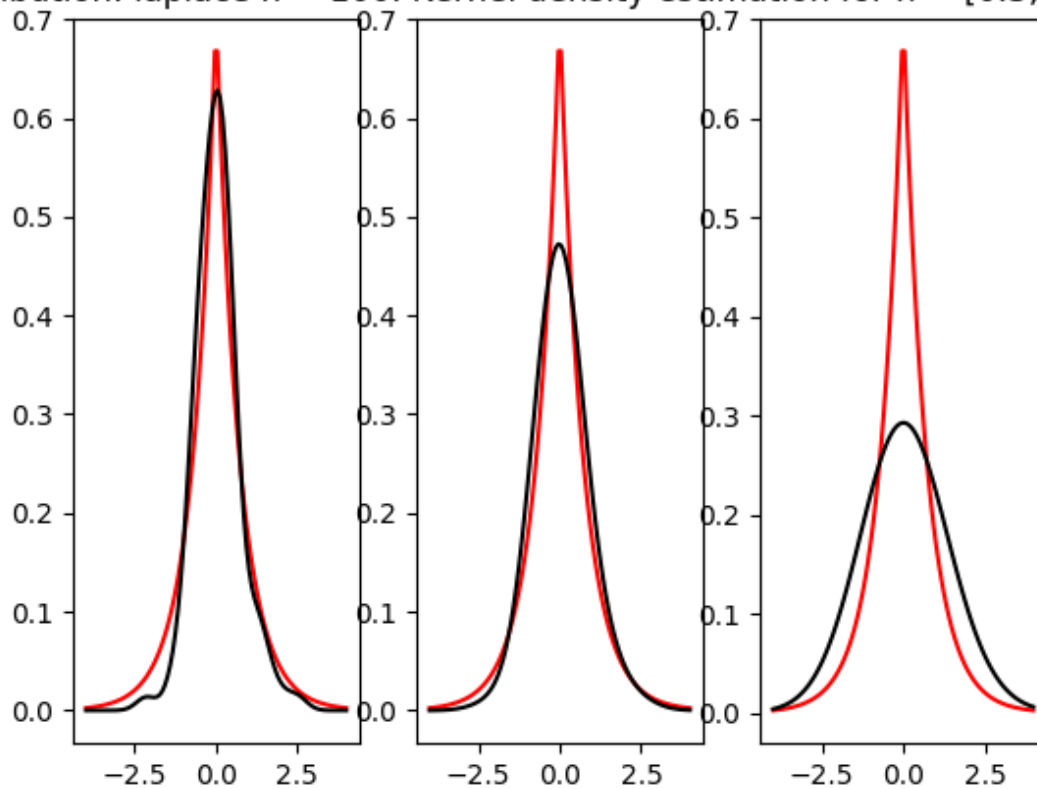


Рис. 12: Ядерная функция плотности для распределения Коши,  $n = 20$

Distribution: cauchy  $n = 20$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

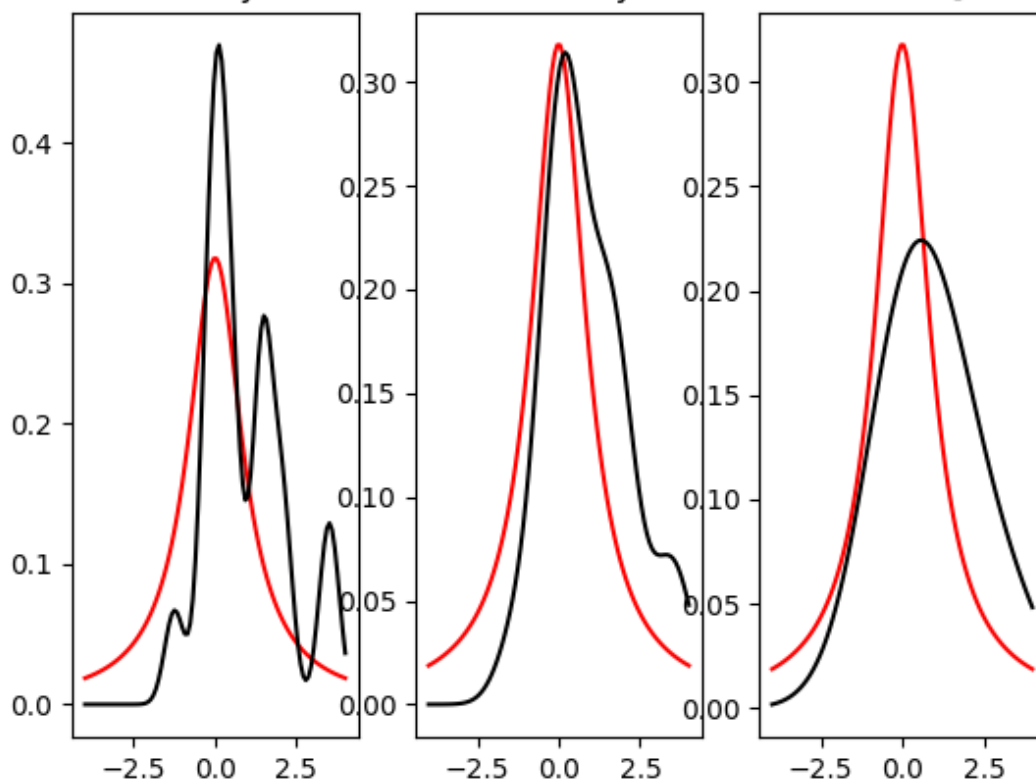




Рис. 13: Ядерная функция плотности для распределения Коши,  $n = 60$

Distribution: cauchy  $n = 60$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

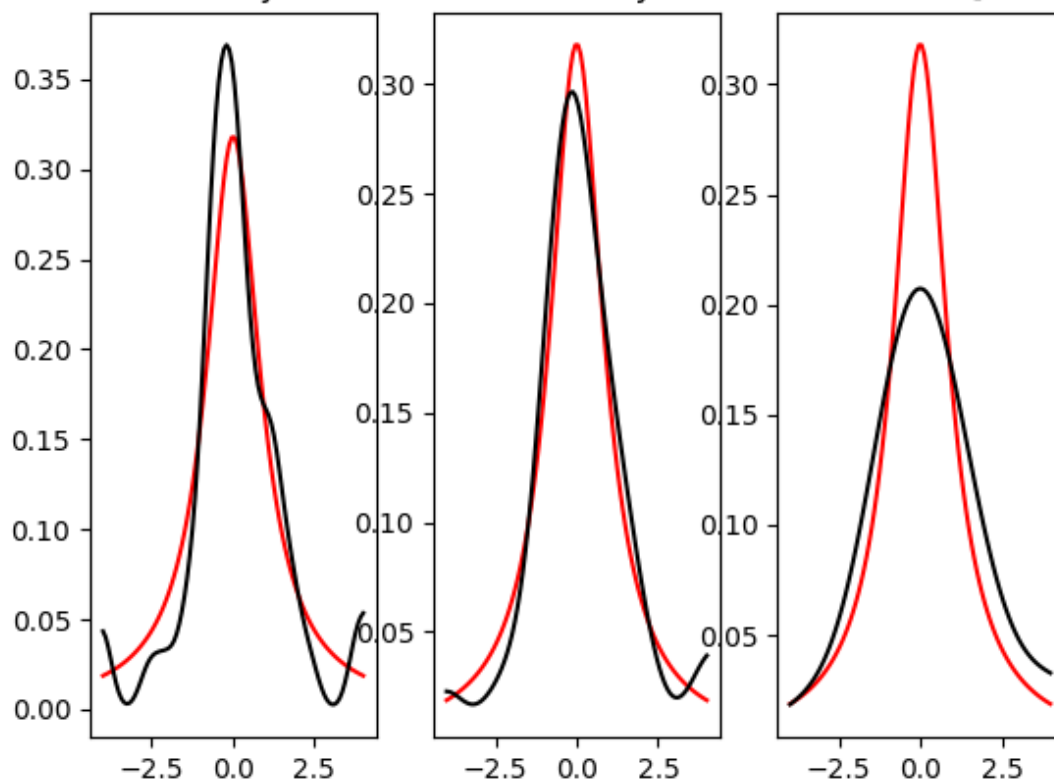


Рис. 14: Ядерная функция плотности для распределения Коши,  $n = 100$

Distribution: cauchy  $n = 100$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

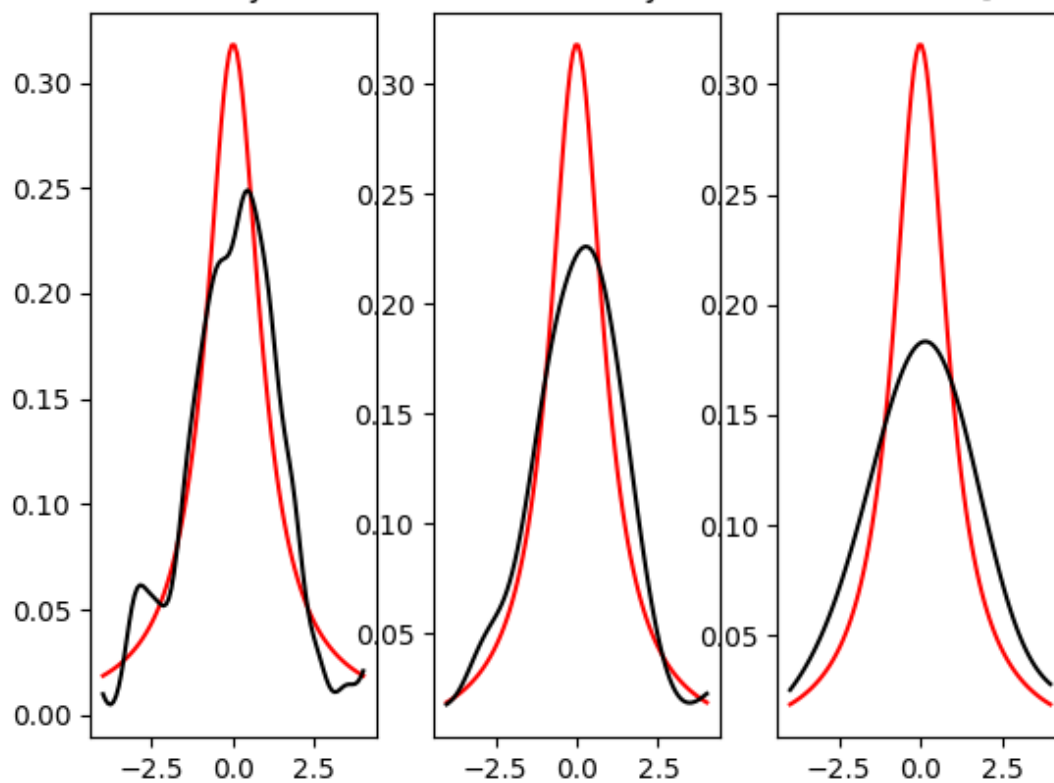


Рис. 15: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона,  $n = 20$

Distribution: poisson  $n = 20$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

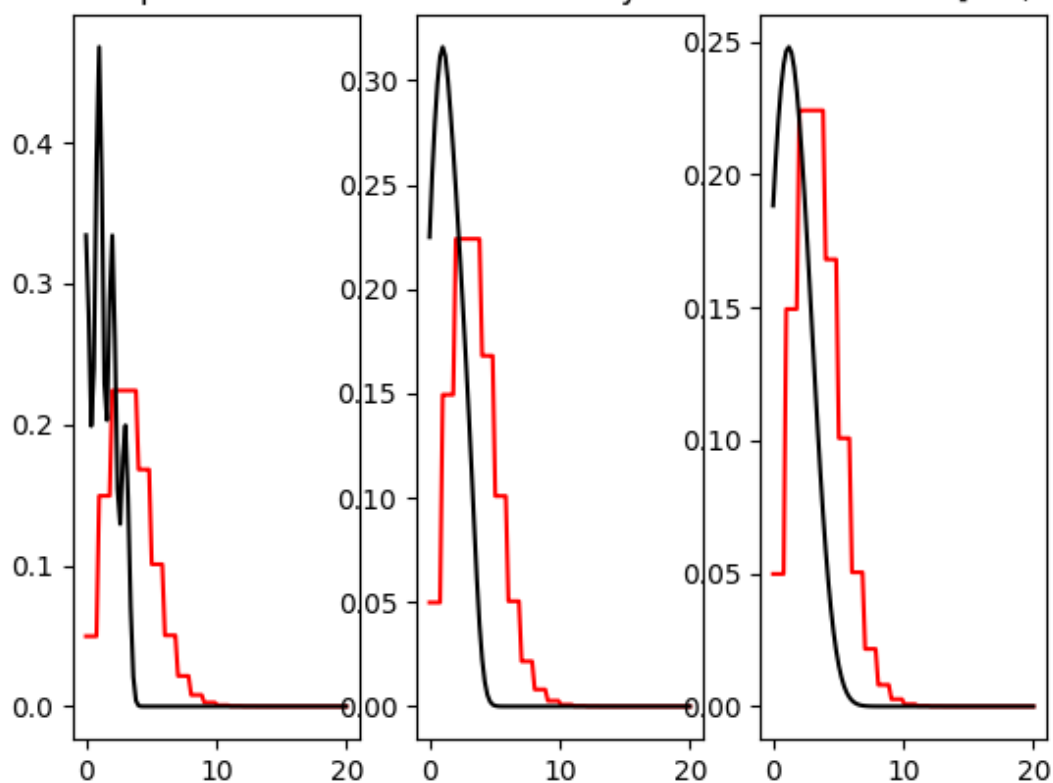


Рис. 16: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона,  $n = 60$

Distribution: poisson  $n = 60$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

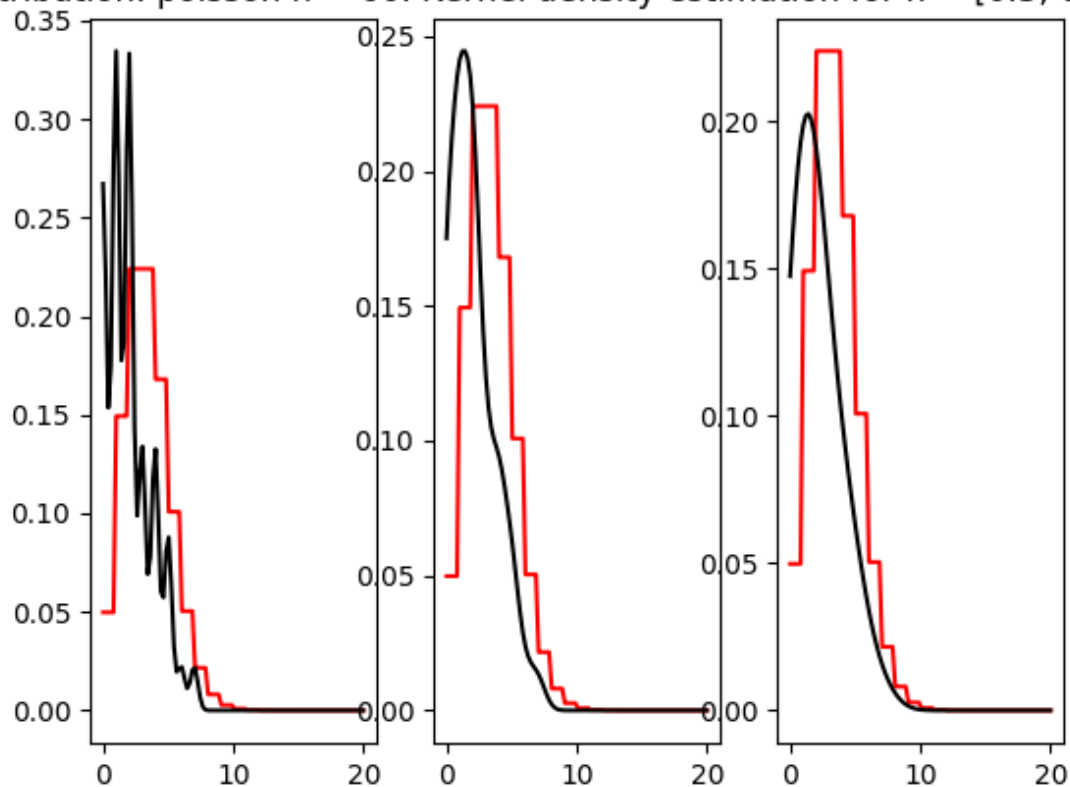


Рис. 17: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона,  $n = 100$

Distribution: poisson  $n = 100$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

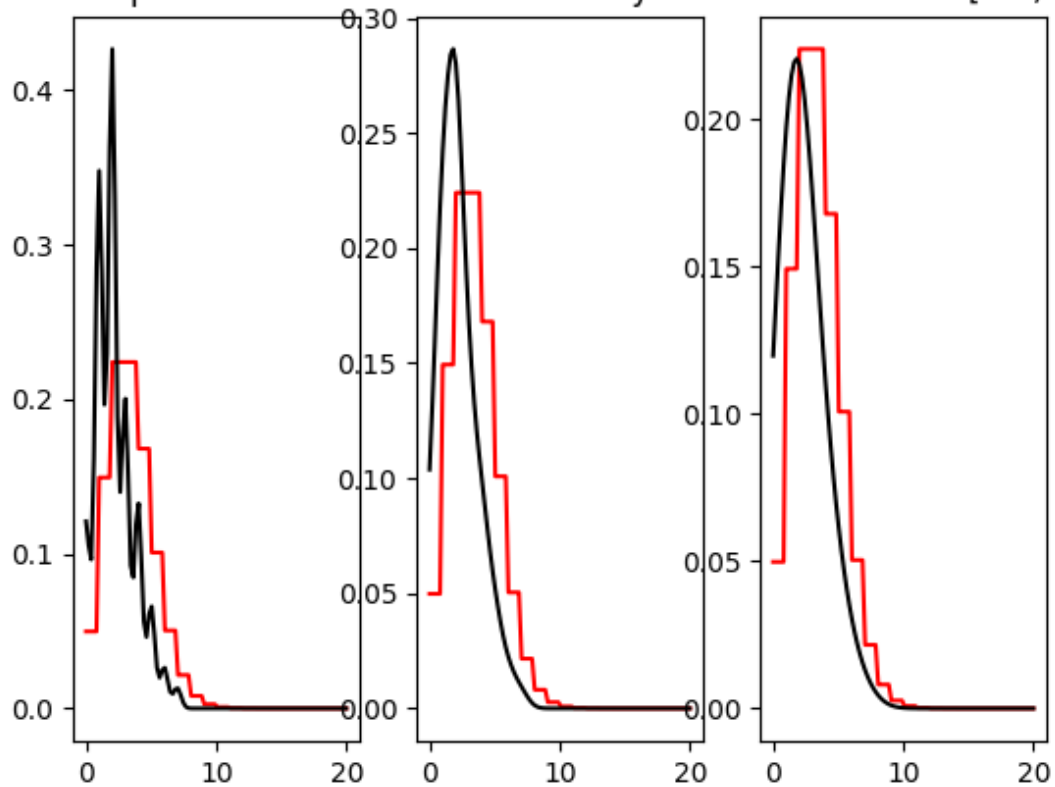


Рис. 18: Ядерная функция плотности для равномерного распределения,  $n = 20$

Distribution: uniform  $n = 20$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

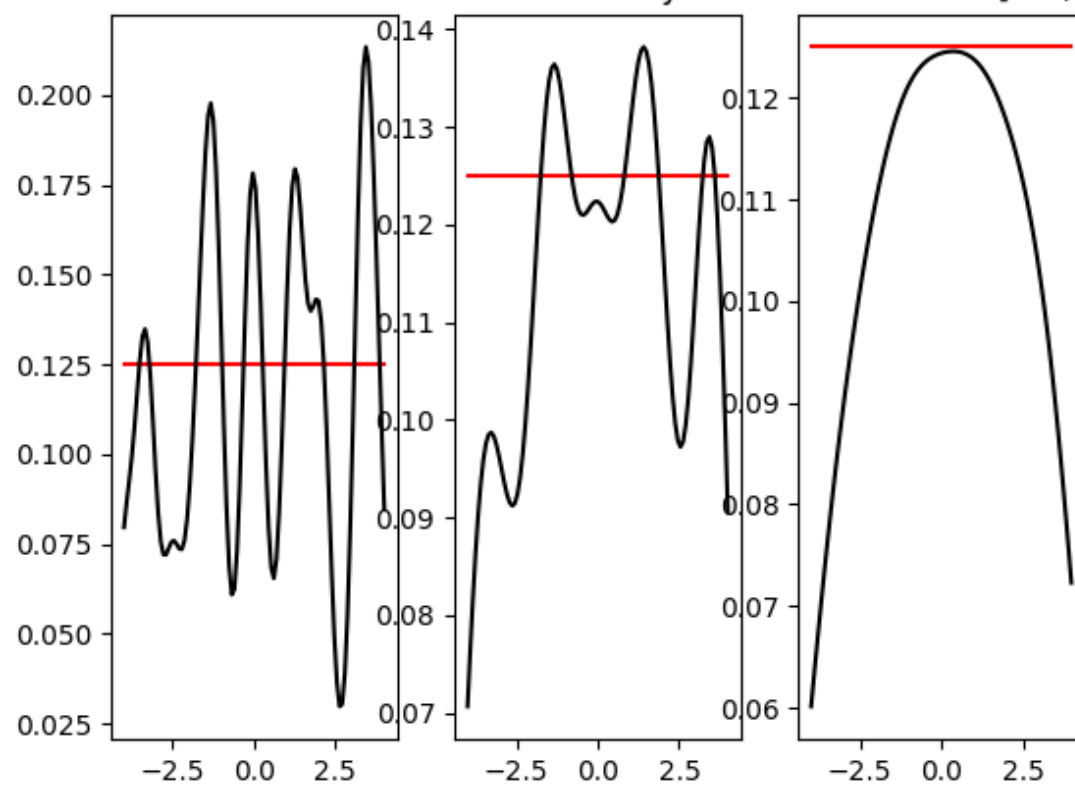


Рис. 19: Ядерная функция плотности для равномерного распределения,  $n = 60$

Distribution: uniform  $n = 60$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$

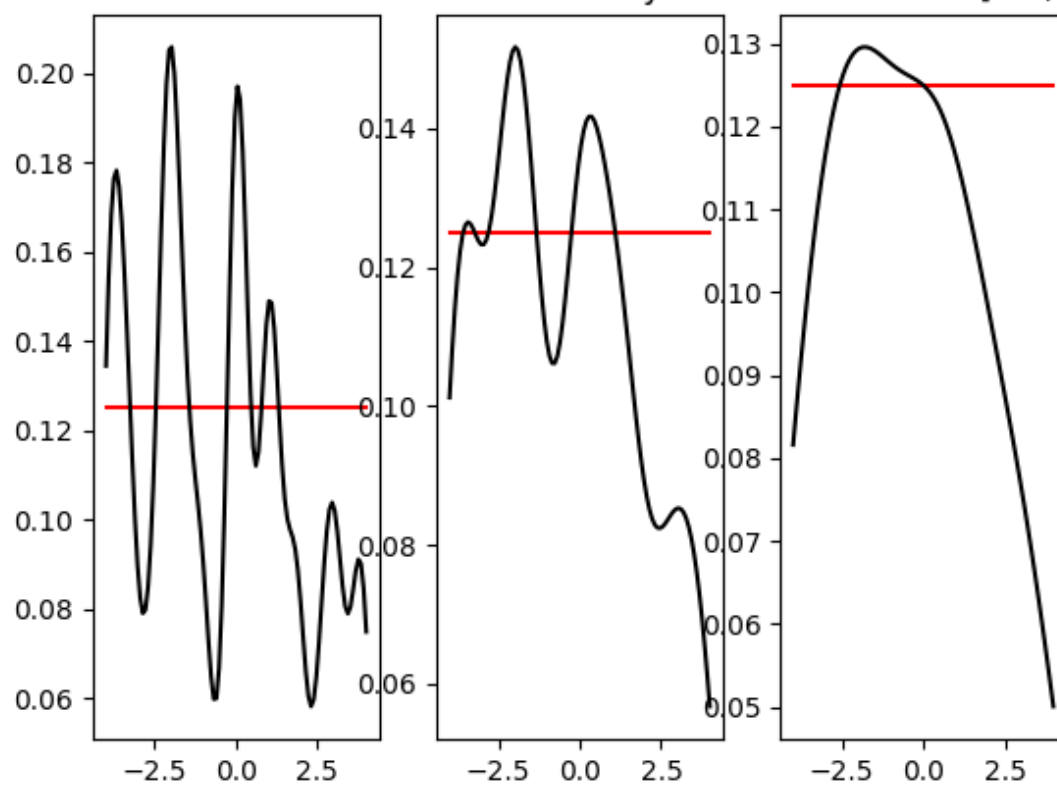
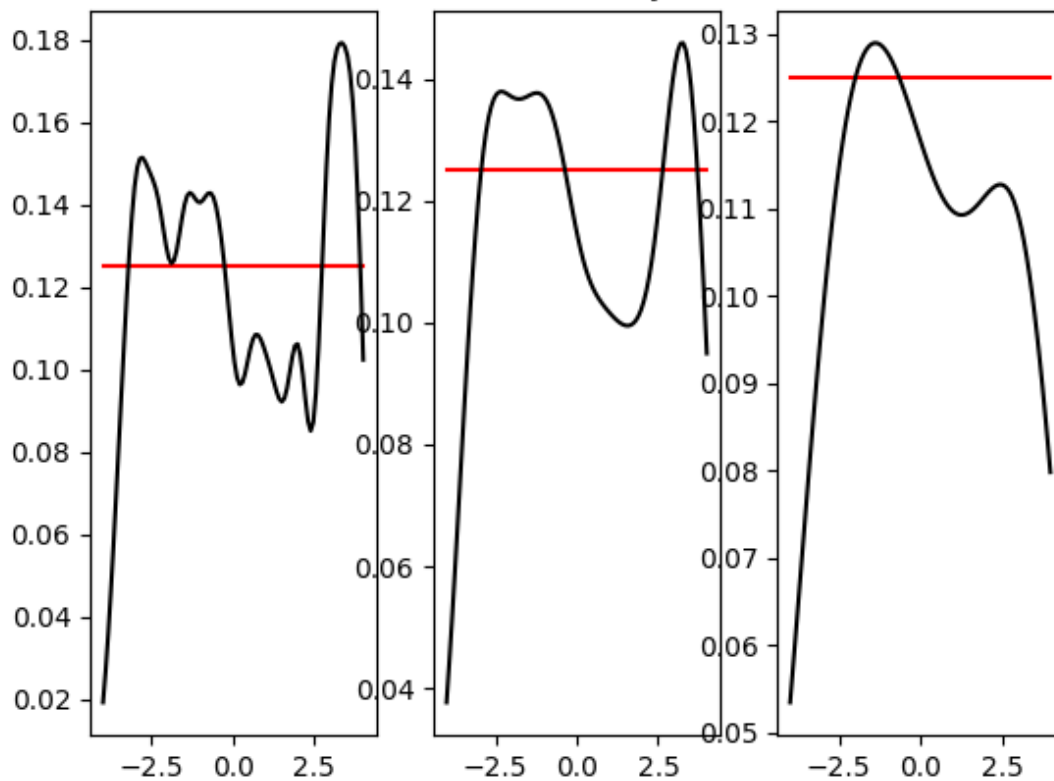


Рис. 20: Ядерная функция плотности для равномерного распределения,  $n = 100$

Distribution: uniform  $n = 100$ . Kernel density estimation for  $h = [0.3, 0.6, 1.2]$



## 6 Выводы

Эмпирическая функция лучше приближает эталонную функцию на больших выборках.

Наилучшее приближение функции распределения ядерной функции получено при наибольшей ширине окна. При фиксированной ширине окна точнее приблизить функцию распределения позволяет увеличение выборки.

## 7 Приложения

Исходники: [https://github.com/LanskovNV/math\\_statistics/tree/master/lab\\_4](https://github.com/LanskovNV/math_statistics/tree/master/lab_4)



## 8 Список литературы

- [1] Модуль numpy - <https://physics.susu.ru/vorontsov/language/numpy.html>
- [2] Модуль matplotlib - <https://matplotlib.org/users/index.html>
- [3] Модуль scipy - <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>
- [4] Формулы распределений - [https://vk.com/doc184549949\\_491827451](https://vk.com/doc184549949_491827451)
- [5] <https://nsu.ru/mmfm/tvims/chernova/ms/lec/node4.html>
- [6] <https://www.mql5.com/ru/articles/396>
- [7] <http://users.stat.umn.edu/~helwig/notes/den-Notes.pdf>