

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №3

По курсу «Конечно-разностные и сеточные методы»

Метод конечных объемов для уравнений эллиптического типа

Выполнил: Корсуков Евгений, 43601/1

Преподаватель: проф. Григорьев Б.С

Постановка задачи

Для исследования разностных схем рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left((xy + 1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((x + 1) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \cos y * u \equiv f(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases}$$

$$(x, y) \in [0; \pi] \times [0; 1]$$

$$f(x, y) = y^5 \sin x * (x * y + 1) - y^6 \cos x - 20y^3 \sin x * (x + 1) + y^5 \cos y * \sin x$$

$$g(x, y) = (y^5 \sin x)|_{(x, y) \in \partial\Omega}$$

С точным решением: $u = y^5 \sin x$.

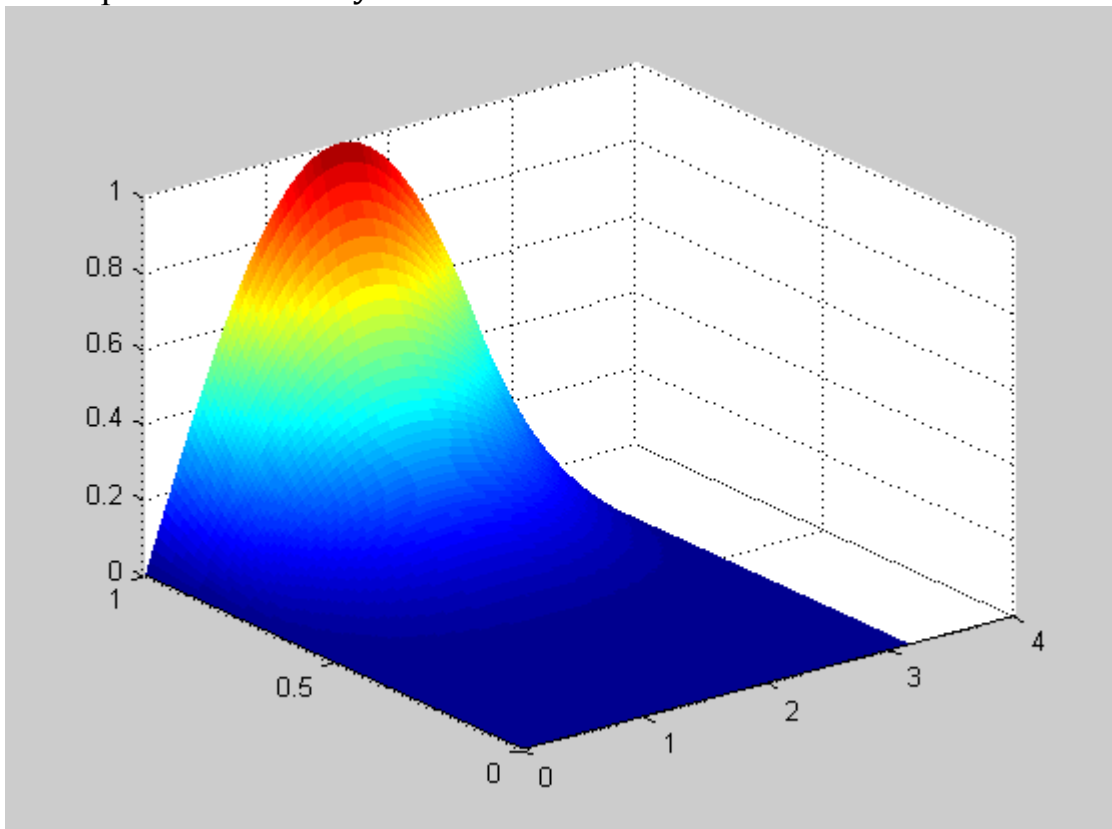


Рис. 1. Точное решение уравнения.

Разностные схемы

Введем регулярную сетку:

$$\Omega_h(x, y) = \{(x_i, y_j) | x_i = ih_x, i = \overline{0, M}, h_x = \frac{1}{M}; y_j = h_y j, j = \overline{0, N}, h_y = \frac{1}{N}\}$$

Рассмотрим разностную схему метода конечных объемов:

$$-\frac{1}{h_x} \left(p_{i+\frac{1}{2},j} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} - p_{i-\frac{1}{2},j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} \right) - \frac{1}{h_y} \left(q_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} - q_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right) + s_j v_{i,j} = g_{i,j}$$

Где:

$$p_{i+\frac{1}{2},j} = a(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = \frac{a_{i+1,j} + a_{i,j}}{2}$$

$$q_{i,j+\frac{1}{2}} = b(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{b_{i,j+1} + b_{i,j}}{2}$$

$$g_{i,j} = f_{i,j}$$

$$s_j = \cos y_j$$

$p_{i-\frac{1}{2},j}$ и $q_{i,j-\frac{1}{2}}$ определяются аналогично.

Произведем группировку для того, чтобы получить вид:

$$v_{i,j} A_{i,j} + v_{i+1,j} B_{i,j} + v_{i,j-1} C_{i,j} + v_{i-1,j} D_{i,j} + v_{i,j+1} E_{i,j} = g_{i,j}$$

Получится:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{i,j} = \frac{1}{h_x^2} (p_{i+\frac{1}{2},j} + p_{i-\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{h_y^2} (q_{i,j+\frac{1}{2}} + q_{i,j-\frac{1}{2}}) + q_{i,j} \\ B_{i,j} = -\frac{1}{h_x^2} (p_{i+\frac{1}{2},j}) \\ C_{i,j} = -\frac{1}{h_y^2} (q_{i,j-\frac{1}{2}}) \\ D_{i,j} = -\frac{1}{h_x^2} (p_{i-\frac{1}{2},j}) \\ E_{i,j} = -\frac{1}{h_y^2} (q_{i,j+\frac{1}{2}}) \end{array} \right.$$

На основании этого составляем СЛАУ и решаем ее.

Условие окончания итерационного процесса $\|v^k - v^{k-1}\| \leq \varepsilon_{iter}$.

При этом решение должно быть найдено с заданной точностью, то есть должно выполняться неравенство $\|z^k\| \leq \varepsilon$, где $z^k = u - v^k$. $\varepsilon = 10^{-3}$

Метод Якоби

Итерационная процедура имеет вид:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^k - C_{i,j}v_{i,j-1}^k - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k)$$

Очевидно, что схема явная.

Возьмем $\varepsilon_{iter} = 10^{-9}$, а количество разбиений 100. Это обеспечит заданную точность.

Пока выполняются итерации, будем находить спектральный радиус и построим зависимость спектрального радиуса от числа итераций.

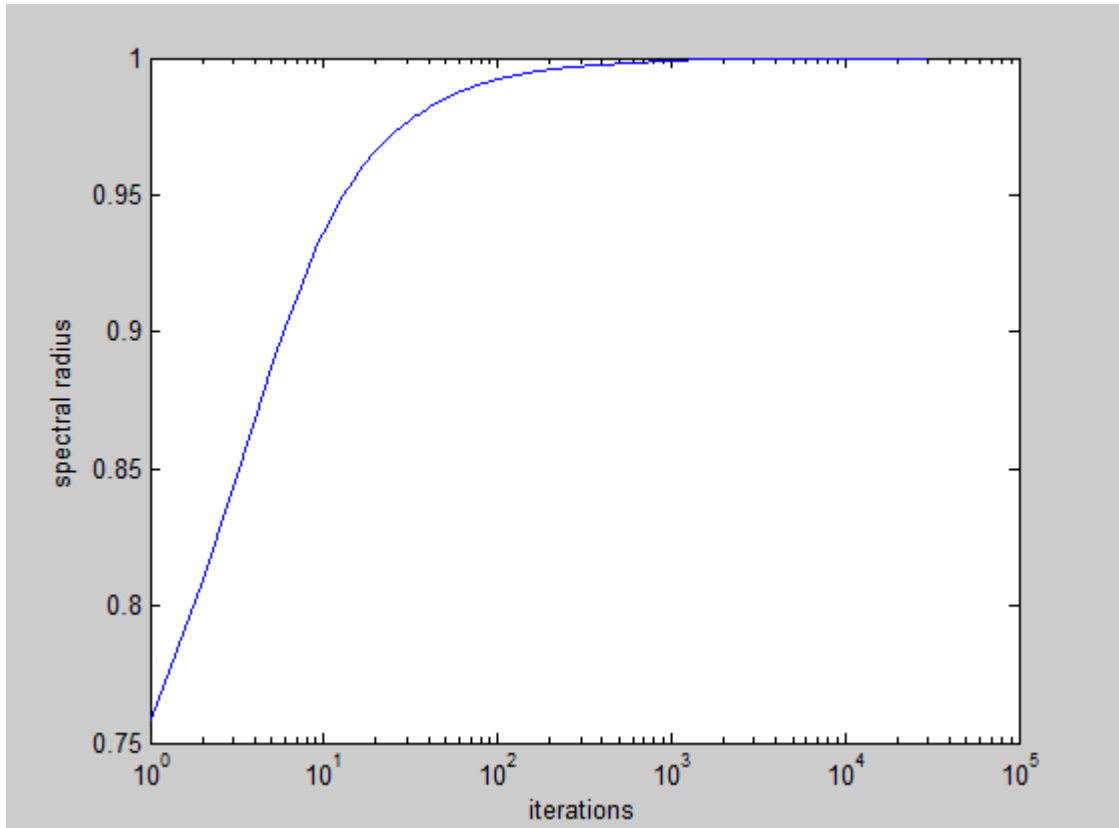


Рис. 2. Зависимость спектрального радиуса от количества итераций.

Спектральный радиус вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|}, \quad \rho_{\text{я}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.9995.$$

Метод Зейделя

Итерационная процедура имеет вид:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k)$$

Схема является явной, так как значения $v_{i-1,j}^{k+1}$ и $v_{i,j-1}^{k+1}$ были вычислены на текущем шаге итерации либо заданы граничными условиями.

Возьмем $\varepsilon_{iter} = 10^{-8}$, а количество разбиений 100, что обеспечит заданную точность.

Построим график зависимости спектрального радиуса от количества итераций аналогично тому, как в методе Якоби.

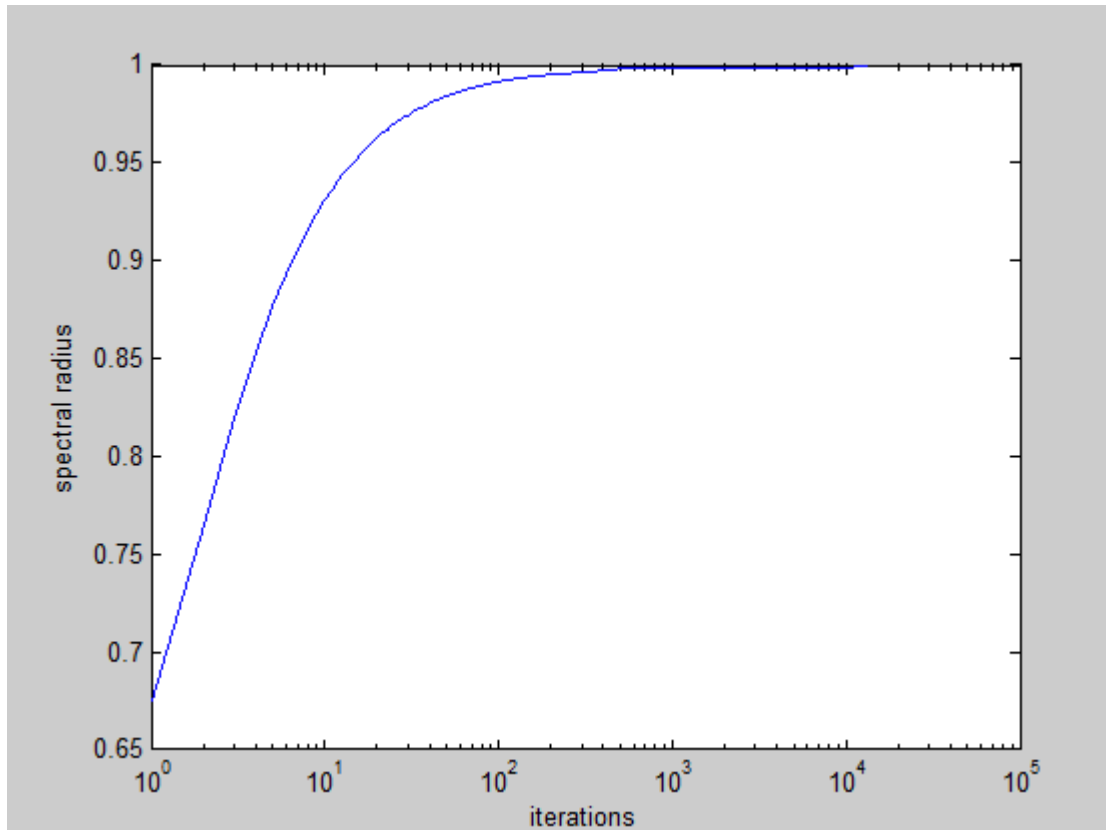


Рис. 3. Зависимость спектрального радиуса от количества итераций.

Было получено, что $\rho_3 = 0.9990$. Полученное значение полностью согласуется с теорией: $\rho_{\text{я}}^2 = \rho_3$.

Метод SOR

Вводим ω – параметр релаксации.

Итерационная процедура имеет вид:

$$v_{SOR}^{k+1} = v_{SOR}^k + \omega(v_3^{k+1} - v_{SOR}^k)$$

При $\omega = 1$ метод совпадает с методом Зейделя.

Возьмем $\varepsilon_{iter} = 10^{-6}$, а количество разбиений оставим прежним, что обеспечит заданную точность.

Построим зависимость количества итераций от параметра релаксации.

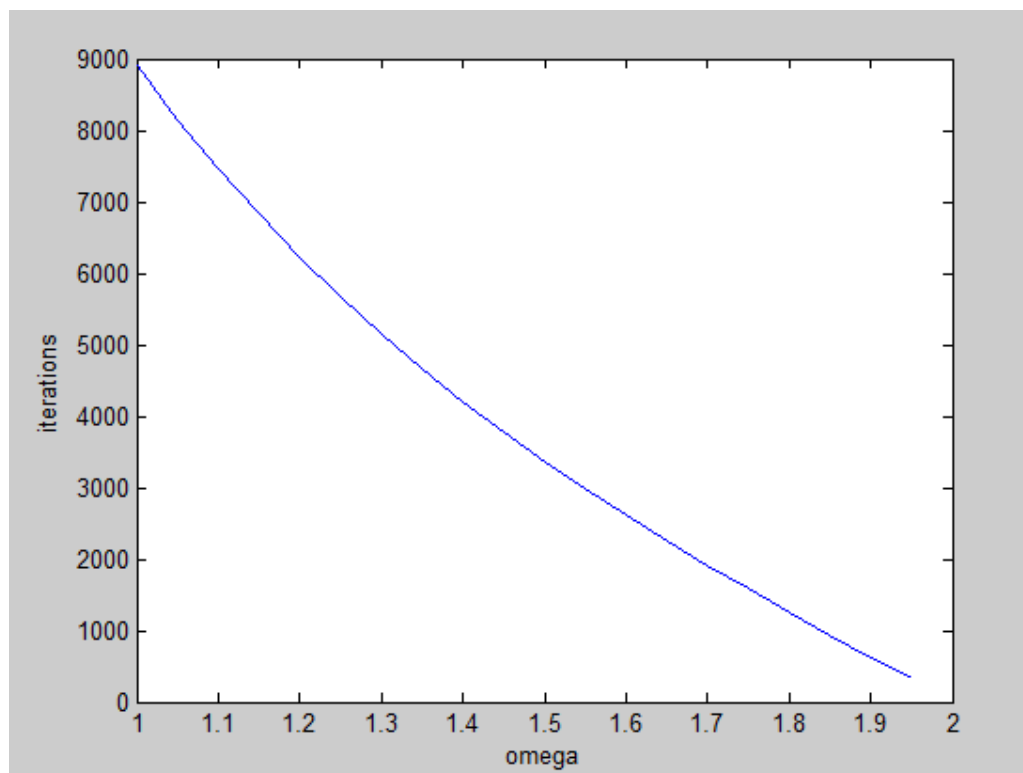


Рис. 4. Зависимость количества итераций от параметра релаксации.

Из данного графика трудно определить оптимальное значение параметра, поэтому рассмотрим участок $[1.8; 2.0]$ подробнее.

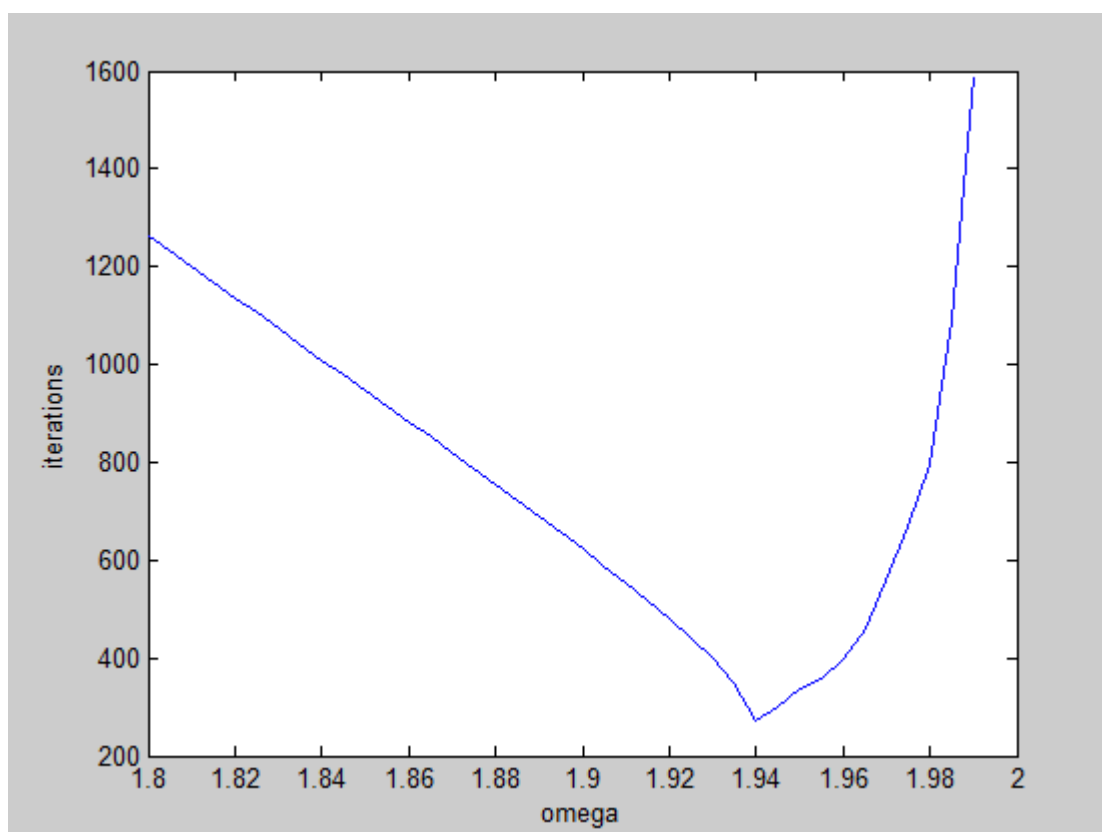


Рис. 5. Поиск оптимального параметра релаксации.

Из графика видно, что $\omega_{opt} = 1.94$.

Теоретическое значение оптимального параметра:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_{\text{я}}^2}} = 1.9387$$

Значит, вычисления согласуются с теорией.

Анализ результатов

Отобразим результаты поиска $\rho, \varepsilon_{iter}, n(\varepsilon)$ в таблице:

Табл.1. Сравнение методов.

Метод	ρ	ε_{iter}	$n(\varepsilon)$
Якоби	0.9995	10^{-9}	32680
Зейделя	0.9990	10^{-8}	14837
SOR	0.94	10^{-6}	316

Построим зависимости нормы погрешности $\|z^k\|$ от номера итерации k .

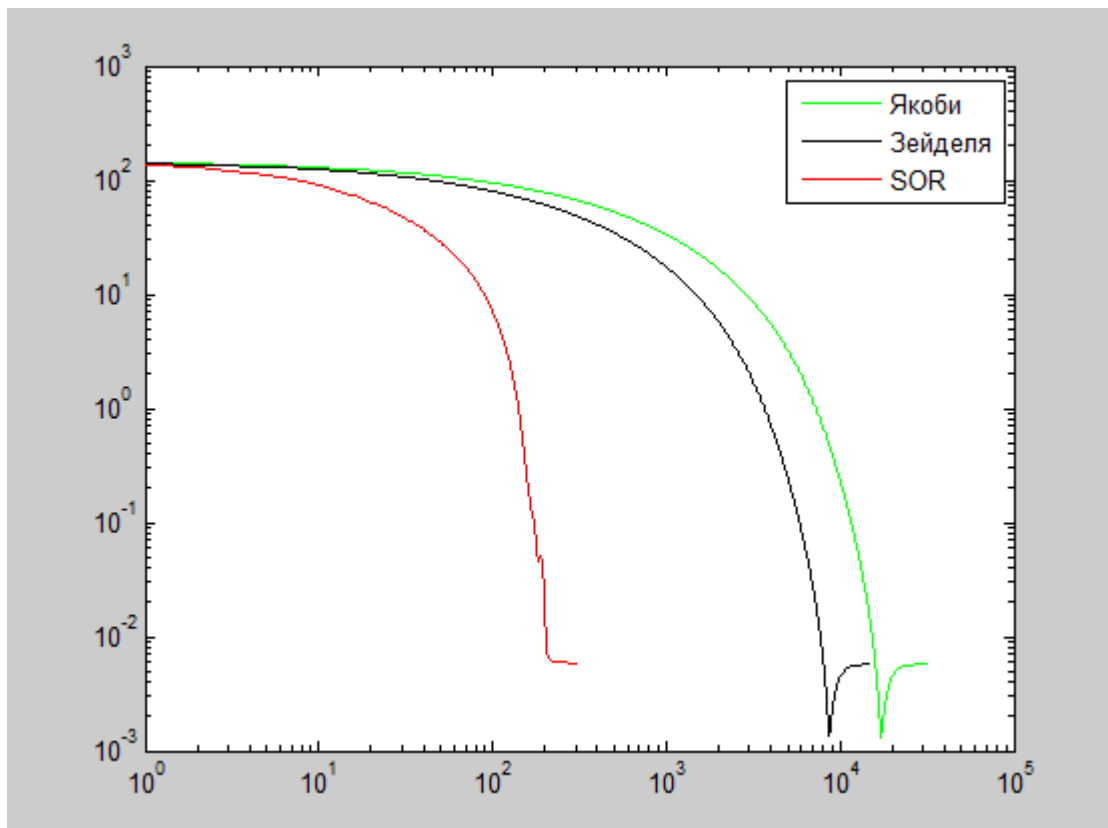


Табл. 6. Сравнение зависимости норм погрешности.

Из графика видно, что норма погрешности метода SOR убывает куда быстрее, чем Зейделя или Якоби.

Также, из графиков видно, что увеличение количества итераций за счет уменьшения ε_{iter} не дает увеличения точности. Это связано с оценкой погрешности:

$$\|u - v^k\| \leq \|u - v\| + \|v - v^k\|$$

Так как она зависит не только от ε_{iter} , но и от M и N.

Выводы

1. В ходе данной работы были исследованы три итерационных метода решения СЛАУ (Якоби, Зейделя, SOR).
2. Были наглядно продемонстрированы различия в трудоемкостях методов и скоростях их сходимости.
3. Получено соответствие с теоретическим материалом относительно взаимосвязи радиусов сходимости методов Зейделя и Якоби.
4. Наглядно продемонстрирована зависимость скорости сходимости метода верхней релаксации от выбора параметра релаксации.