

Санкт-Петербургский Политехнический университет  
Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
**Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**  
на тему  
"Метод конечных объёмов для уравнений эллиптического типа"  
по дисциплине  
"Конечно-разностные и сеточные методы"

Выполнил студент гр. **3630102/60101**  
**Лансков.Н.В.**

Санкт-Петербург  
2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Список иллюстраций</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Список таблиц</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Метод конечных объёмов</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Метод Якоби</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Метод Зейделя</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Метод SOR</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Результаты</b>	<b>6</b>
8.1	Метод Якоби . . . . .	6
8.2	Метод Зейделя . . . . .	7
8.3	Метод SOR . . . . .	7
8.4	Сравнение методов . . . . .	9
<b>9</b>	<b>Выводы</b>	<b>10</b>
<b>10</b>	<b>Приложения</b>	<b>10</b>

# 1 Список иллюстраций

1	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций . . . . .	6
2	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций . . . . .	7
3	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации $\omega$ . . . . .	8
4	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации $\omega$ (приближе- ние) . . . . .	8
5	Сравнение зависимостей $\ z^k\ $ от числа итераций . . . . .	9

## 2 Список таблиц

1	Сравнение методов . . . . .	9
---	-----------------------------	---

### 3 Постановка задачи

Будем решать задачу:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y) \\ 0 < \alpha < a, b < \beta; 0 < q_m < q; \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in [3, 3.4] \times [1, 1.4] = \Omega$$

В данной лабораторной исследуется задача со следующими параметрами:

$$\begin{cases} a(x, y) = x + y \\ b(x, y) = 1 + xy \\ q(x, y) = x^4 \\ g(x, y) = \cos(2x) \cdot e^{-3y} \\ f(x, y) = 3x\cos(2x)e^{-3y} + 4x\sin(2x)e^{-3y} - 9\cos(2x)e^{-3y}(xy + 1) + x^4\cos(2x)e^{-2y} + \\ + 4\cos(2x)e^{-3y}(x^2 + y^2) \end{cases}$$

### 4 Метод конечных объёмов

Рассмотрим процесс нахождения коэффициентов по методу конечных объёмов.

Разобьём нашу область на конечные объёмы (с центрами во внутренних узлах сетки). Тогда для каждой внутренней точки рассматриваем конечный объём  $\Omega_{ij}$ . Далее приведём вычисления в общем виде для такого конечного объёма.

Проинтегрируем уравнение 1 по конечному объёму и домножим на -1:

$$\int_{\Omega_{ij}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega_{ij}} qu d\Omega = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \quad (1)$$

Подробнее рассмотрим первое слагаемое из левой части. Под интегралом стоит дивергенция, применяем формулу Остроградского-Гаусса, получаем следующее выражение:

$$\oint_{\gamma_{ij}} \left[ a \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + b \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right] d\gamma = \left[ \omega^x = a \frac{\partial u}{\partial x}; \omega^y = b \frac{\partial u}{\partial y} \right] =$$

$$= (w_{i+0.5, j}^x - w_{i-0.5, j}^x) h_y + (w_{i, j+0.5}^y - w_{i, j-0.5}^y) h_x \quad (3)$$

Тут мы произвели определённую замену переменных и раскрыли косинусы, появившиеся после применения формулы О-Г. С учётом данной замены, легко видеть, что выполнены следующие равенства:

$$\int_{\Omega'_{ij}} \frac{\omega^x}{a} d\Omega = \int_{4\Omega'_{ij}} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega$$

$$\int_{\Omega''_{ij}} \frac{\omega^y}{b} d\Omega = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega \quad (5)$$

Рассмотрим подробнее (4). Применяя к правой части теорему О-Г., а левую часть преобразовав определённым образом, получаем уже конечно-разностное выражение.

$$(4) \iff \omega^x_{i+0.5,j} \cdot \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{a} = (v_{i+1,j} - v_{ij})h_y$$

Отсюда легко можно найти выражение для  $\omega^x_{i+0.5,j}$ , посчитав численно интеграл. Точно также рассматриваем (5), и сразу записываем итоговое выражение, сгруппировав слагаемые при соответствующих узловых точках.

$$\left( \frac{p_{i+0.5,j} + p_{i-0.5,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} + q_{i,j-0.5}}{h_y^2} + \frac{\rho_{ij}}{h_x h_y} \right) v_{ij} - \left( \frac{p_{i-0.5,j} v_{i-1,j} + p_{i+0.5,j} v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} v_{i,j+1} + q_{i,j-0.5} v_{i,j-1}}{h_y^2} \right) = g_{ij} \quad (6)$$

Все вышеперечисленные выражения я привёл в общем виде для упрощения восприятия. Теперь рассмотрим, чему равны коэффициенты в контексте конкретной задачи.

$$\begin{cases} p_{i+0.5,j} = \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{x+y} & p_{i-0.5,j} = \int_{\Omega'_{i-1,j}} \frac{d\Omega}{x+y} \\ q_{i,j+0.5} = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{d\Omega}{1+xy} & q_{i,j-0.5} = \int_{\Omega''_{i,j-1}} \frac{d\Omega}{1+xy} \\ \rho_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} x^4 d\Omega \\ g_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Замечание о численном вычислении интегралов. Я вычисляю интегралы по следующей формуле (Формула Гаусса для двумерного случая):

$$\int_{[x_0;x_1] \times [y_0;y_1]} \phi(x,y) d\Omega = \frac{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}{4} \sum_{i=1}^4 \phi \left( x_0 + \frac{(\xi_i + 1)(x_1 - x_0)}{2}, y_0 + \frac{(\eta_i + 1)(y_1 - y_0)}{2} \right) \quad (8)$$

Где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  представляют все пары вида  $\left( \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}; \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \right)$

## 5 Метод Якоби

Будем применять итерационную процедуру метода Якоби в следующем виде:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j} v_{i-1,j}^k - C_{i,j} v_{i,j-1}^k - E_{i,j} v_{i,j+1}^k - B_{i,j} v_{i+1,j}^k) \quad (9)$$

## 6 Метод Зейделя

Будем применять итерационную процедуру метода Зейделя в следующем виде:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k) \quad (10)$$

Заметим, что соответствующие значения  $v$  при коэффициентах  $C$  и  $D$  на момент расчёта  $v_{i,j}$  уже известны.



## 7 Метод SOR

Будем применять итерационную процедуру метода SOR в следующем виде:

$$v_{SOR}^{k+1} = v_{SOR}^k + \omega(v_Z^{k+1} - v_{SOR}^k) \quad (11)$$

Где  $v_Z$  - вычисляется по методу Зейделя

## 8 Результаты

### 8.1 Метод Якоби

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём число разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{2N^2}$ .

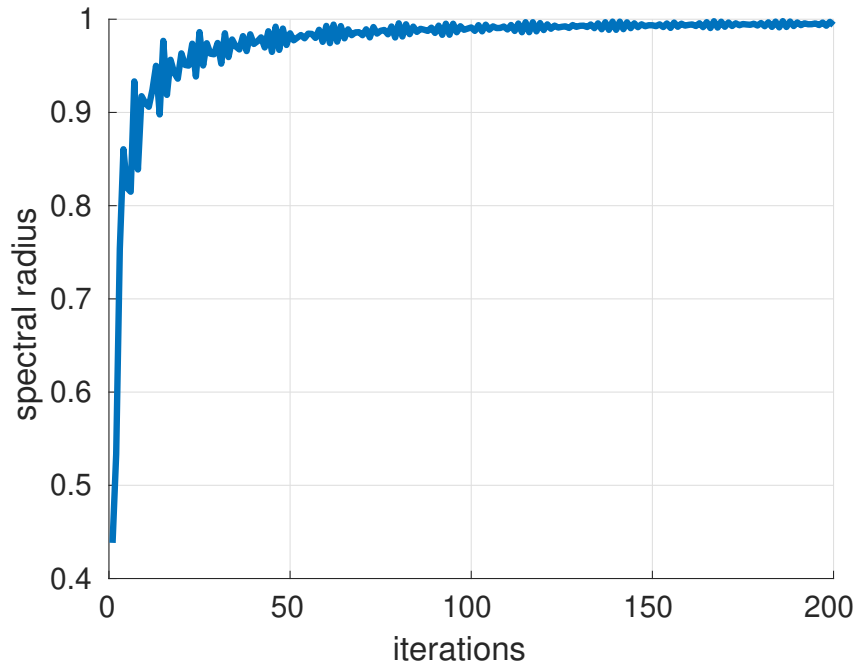


Рис. 1: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом  $\rho_J = \lim_{k \rightarrow \inf} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99945 \approx 0.99950$ , что согласуется с теоретическим значением.

## 8.2 Метод Зейделя

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём число разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{N^2}$ .

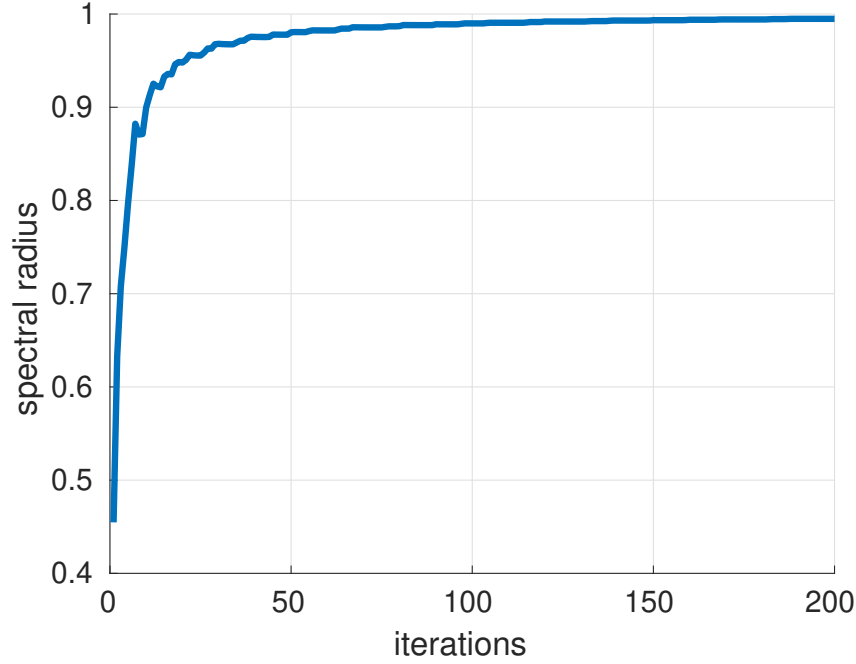


Рис. 2: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом  $\rho_Z = \lim_{k \rightarrow \inf} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99855 \approx 0.9990 = \rho_J^2$ , что согласуется с теоретическим значением.

## 8.3 Метод SOR

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём число разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-7}\pi}{N}$ .



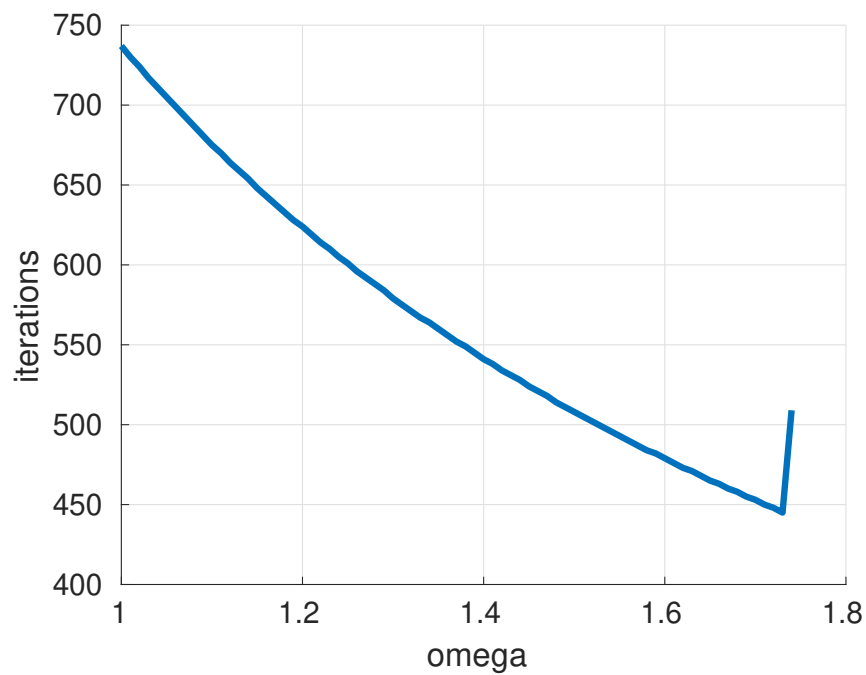


Рис. 3: Зависимость числа итераций  $n(\varepsilon)$  от параметра релаксации  $\omega$

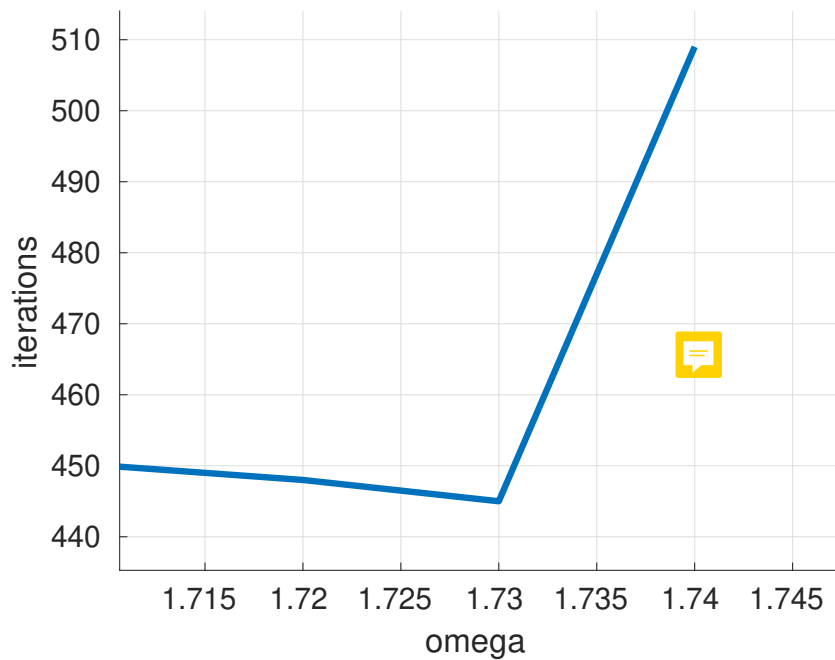


Рис. 4: Зависимость числа итераций  $n(\varepsilon)$  от параметра релаксации  $\omega$  (приближение)

По графику видно, что оптимальным параметром релаксации будет  $\omega = 1.73$ . Однако, из теории следует, что оптимальный параметр должен равняться:  $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_Z}} \approx$

1.9387. Я пытался добиться большей точности от графического метода нахождения  $\omega_{opt}$  изменяя  $N$  и  $\varepsilon_{iter}$ , но мои попытки не принесли результатов, так как схема начинала терять устойчивость. Я думаю, что всё дело в выбранной мной конкретной задаче, и можно было бы теоретически подобрать исходную задачу точнее, чтобы получить лучший результат. Я же буду далее использовать полученное мною значение  $\omega_{opt} = 1.73$ .

## 8.4 Сравнение методов

Таблица 1: Сравнение методов

Метод	$\rho$	$\varepsilon_{iter}$	$n(\varepsilon)$
Jacobi	0.99945	4.934802e-08	17712
Zeidel	0.99855	9.869604e-08	8858
SOR	0.9744	1.121997e-08	445

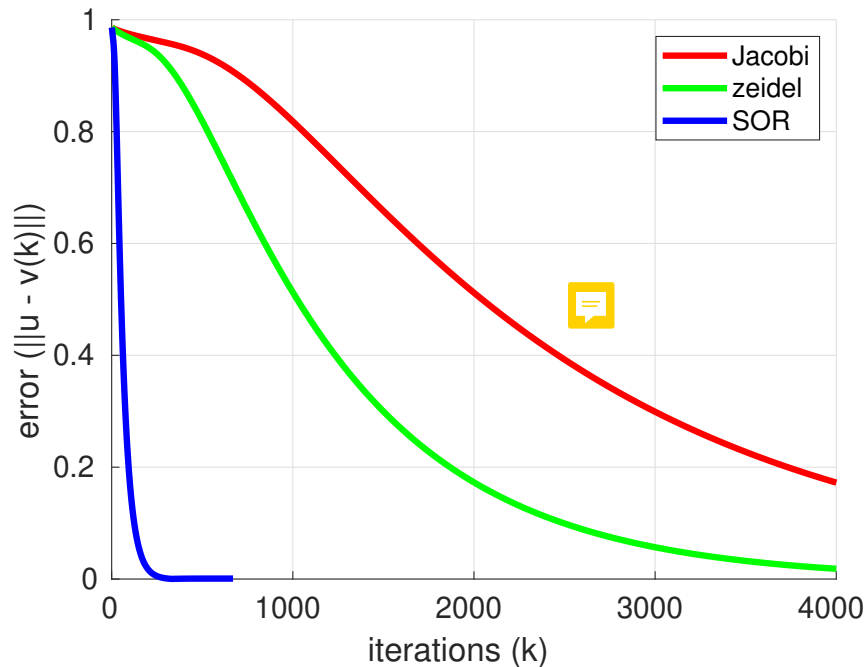


Рис. 5: Сравнение зависимостей  $\|z^k\|$  от числа итераций

## 9 Выводы

В результате работы были рассмотрены 3 итерационных метода (Якоби, Зейделя, SOR) решения СЛАУ, построенной по МКО. Я получил полное соответствие практических и теоретических оценок скоростей сходимости методов, спектральных радиусов и соотношения числа итераций, за исключением  $\omega_{opt}$ . Как уже выше упоминалось, я считаю что это связано с конкретной задачей.

## 10 Приложения

Исходные файлы лабораторной работы можно найти тут:

[https://github.com/LanskovNV/numerical/tree/master/net\\_methods/lab\\_3](https://github.com/LanskovNV/numerical/tree/master/net_methods/lab_3)