

Санкт-Петербургский Политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
на тему
"Метод конечных разностей для ОДУ 2-го порядка"
по дисциплине
"Конечно-разностные и сеточные методы"

Выполнил студент гр. **3630102/60101**
Лансков.Н.В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1	Список иллюстраций	2
2	Список таблиц	3
3	Постановка задачи	4
4	Разностные схемы	4
4.1	Разностная схема $O(h^2)$	4
4.2	Разностная схема $O(h)$	6
5	Результаты	7
5.1	Разностная схема $O(h^2)$	8
5.2	Разностная схема $O(h)$	10
5.3	Зависимости погрешности от шага	12
6	Выводы	13

1 Список иллюстраций

1	Разностная схема $O(h^2), n = 20$	9
2	Разностная схема $O(h^2), n = 100$	9
3	Разностная схема $O(h), n = 20$	11
4	Разностная схема $O(h), n = 100$	11
5	Графики зависимости логарифма погрешности от логарифма шага для двух разностных схем	13

2 Список таблиц

1	Зависимость погрешности от числа узлов	8
2	Зависимость погрешности от числа узлов	10
3	Зависимость $\ z_h\ $ от величины шага для двух разностных схем.	12

3 Постановка задачи

Рассмотрим задачу :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + e^x \frac{du}{dx} + u(\cos^2(x) + 1) = f(x), & x \in [0.5; 2] \\ \frac{du}{dx}(0.5) + u(0.5) = e^{0.5} \sin(e^{0.5}) - \cos(e^{0.5}) \\ \frac{du}{dx}(2) + u(2) = e^2 \cos(e^2) + \sin(e^2) \end{cases}$$

Где:

$$f(x) = -e^x \cos(e^x) + e^{2x} \sin(e^x) + e^{2x} \cos(e^x) + \sin(e^x)(\sin^2(x) + 1)$$

Точное решение задачи : $u(x) = \sin(e^x)$

4 Разностные схемы

4.1 Разностная схема $O(h^2)$

Введём регулярную сетку:

$$\Omega_h(x) = \{x_i | x_i = 0, 5 + ih, i = \overline{0, M}, h = \frac{1}{M}\}$$

Выбор шага h будет осуществляться несколько раз для сравнения полученных результатов при различных шагах. Выберем следующий шаблон аппроксимации:

$$\omega_h(x_i) = \{x_{i-1}; x_i; x_{i+1}\}$$

при выборе данного шаблона для аппроксимации первой и второй производной мы получим требуемую погрешность . Для такого шаблона ранее были выведены аппроксимации первой и второй производных, а именно:

$$u_{\dot{x}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$u_{\ddot{x}} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Тогда можем переписать исходную задачу, используя сеточную функцию $v(x)$ – приближение к $u(x)$ следующим образом:

$$\begin{cases} -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + e^x \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + v_i(\sin^2(x) + 1) = f_i^* \\ -\frac{3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} + v_0 = e^{0.5} \sin(e^{0.5}) - \cos(e^{0.5}) \\ \frac{3v_M - 4v_{M-1} + v_{M-2}}{2h} + v_M = e^2 \cos(e^2) + \sin(e^2) \end{cases}$$

Стоит обратить внимание на аппроксимацию на краях отрезка, для них используется другие шаблоны аппроксимации:

$$\omega_h(x_0) = \{x_0; x_1; x_2\}$$

$$\omega_h(x_M) = \{x_M; x_{M-1}; x_{M-2}\}$$

Ранее доказано, что выбор данных шаблонов аппроксимации обеспечит нам общую погрешность разностной схемы как $O(h^2)$

Тогда, перегруппировав слагаемые, получим СЛАУ, которую будем решать методом прогонки, у искомой СЛАУ получим трехдиагональную матрицу коэффициентов.

$$\begin{cases} v_{i-1}(-\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_i}}{2h}) + v_i(\frac{2}{h^2} + \sin^2(x_i) + 1) + v_{i+1}(-\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_i}}{2h}) = f_i^* \\ v_0(\frac{3}{2h} + 1) + v_1(-\frac{2}{h}) + v_2(\frac{1}{2h}) = e^{0.5}\sin(e^{0.5}) - \cos(e^{0.5}) \\ v_{M-2}(\frac{1}{2h}) + v_{M-1}(-\frac{2}{h}) + v_M(\frac{3}{2h} + 1) = e^2\cos(e^2) + \sin(e^2) \end{cases}$$

В итоге получена матрица коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2h} + 1 & -\frac{2}{h} & \frac{1}{2h} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_2}}{2h} & \frac{2}{h^2} + \sin^2(x_2) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_2}}{2h} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_3}}{2h} & \frac{2}{h^2} + \sin^2(x_3) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_3}}{2h} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_{M-1}}}{2h} & \frac{2}{h^2} + \sin^2(x_{M-1}) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_{M-1}}}{2h} \\ \dots & 0 & \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{2h} + 1 \end{pmatrix}$$

С правой частью из $e^{0.5}\sin(e^{0.5}) - \cos(e^{0.5})$, $e^2\cos(e^2) + \sin(e^2)$ и f_i^* для $i = \overline{2, M-1}$. Для того, чтобы решить данную СЛАУ методом прогонки и получить искомый результат, необходимо привести матрицу к трехдиагональному виду. Домножаем вторую строку на

выражение $-\frac{1}{-\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_2}}{2h}}$ (с учётом правой части!) и прибавляем к первой. Аналогичным образом поступаем для "правки" последней строки. В результате получается трёхдиагональная матрица, которая уже непосредственно используется в методе прогонки:

$$\left(\begin{array}{cccccc} (\frac{3}{2h} + 1)(-\frac{\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_2}}{2h}}) & (-\frac{2}{h})(-\frac{\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_2}}{2h}}) & 0 & 0 & \dots & \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_2}}{2h} & \frac{2}{h^2} + \sin^2(x_2) + 1 & \dots & 0 & \dots & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_3}}{2h} & \dots & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_3}}{2h} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & 0 & \dots & \frac{2}{h^2} + \sin^2(x_{M-1}) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_{M-1}}}{2h} & \\ \dots & 0 & 0 & (-\frac{2}{h})(-\frac{\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_{M-1}}}{2h}}) & (\frac{3}{2h} + 1)(-\frac{\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{h^2} - \frac{e^{x_{M-1}}}{2h}}) & \end{array} \right)$$

4.2 Разностная схема $O(h)$

Аналогично предыдущему пункту, выберем сетку: Для этого введем регулярную сетку:

$$\Omega_h(x) = \{x_i | x_i = 0, 5 + ih, i = \overline{0, M}, h = \frac{1}{M}\}$$

причем выбор шага h будет осуществляться несколько раз для сравнения полученных результатов при различных шагах. Для второй производной выберем использованный ранее шаблон аппроксимации, для первой производной шаблон аппроксимации будет иметь вид:

$$\omega_h(x_i) = \{x_i; x_{i+1}\}$$

Тогда :

$$u_x = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Проводя аналогичные предыдущему пункту рассуждения, перейдем от исходной задачи к разностной схеме. В этом случае, так как нам требуется точность всего лишь $O(h)$, то условия на границах можно аппроксимировать чуть более простой разностной схемой с тем же шаблоном, что используется для аппроксимации первой производной.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + e^{x_i} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} + v_i(\sin^2(x) + 1) = f_i^* \\ -\frac{v_1 - v_0}{h} + v_0 = e^{0.5} \sin(e^{0.5}) - \cos(e^{0.5}) \\ \frac{v_M - v_{M-1}}{h} + v_M = e^2 \cos(e^2) + \sin(e^2) \end{array} \right.$$

Иными словами, сразу получаем трёхдиагональную матрицу. Решаем методом прогонки.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h} + 1 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} - \frac{e^{x_2}}{h} + \sin^2(x_2) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_2}}{h} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} - \frac{e^{x_3}}{h} + \sin^2(x_3) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_3}}{h} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} - \frac{e^{x_3}}{h} + \sin^2(x_3) + 1 & -\frac{1}{h^2} + \frac{e^{x_{M-1}}}{h} \\ \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} + 1 \end{pmatrix}$$

5 Результаты

Для определения погрешности найдем следующую норму:

$$\|z_h\| = \|u_h - v_h\|$$

Норму будем вычислять по формуле:

$$\|x\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^M x_i^2}$$

Будем смотреть, как изменится это значение в зависимости от размера шага h . Также построим зависимость от h и исследуем угловой коэффициент прямой, отражающей эту зависимость. Составим таблицу, отражающую полученные зависимости:

5.1 Разностная схема $O(h^2)$

Таблица 1: Зависимость погрешности от числа узлов

<i>Число узлов</i>	h	$\ z_h\ $
20	0.078947	0.021510
40	0.038462	0.0051808
80	0.018987	0.0012575
160	0.0094340	3.0894e-04
320	0.0047022	7.6522e-05
640	0.0023474	1.9039e-05
1280	0.0011728	4.7483e-06
2560	5.8617e-04	1.1856e-06
5120	2.9303e-04	2.9623e-07
10240	1.4650e-04	7.4034e-08
20480	7.3246e-05	1.8517e-08
40960	3.6622e-05	4.6819e-09
81920	1.8311e-05	1.5348e-09
163840	9.1553e-06	2.6090e-09

Заметно, что при уменьшении шага погрешность приближенного решения уменьшается, но лишь до определенного значения числа h . Оказывается, оптимальное (в плане точности) число узлов в данной задаче и при данной схеме – около 80000, дальше погрешность начинает быть сравнима с погрешностью округления.

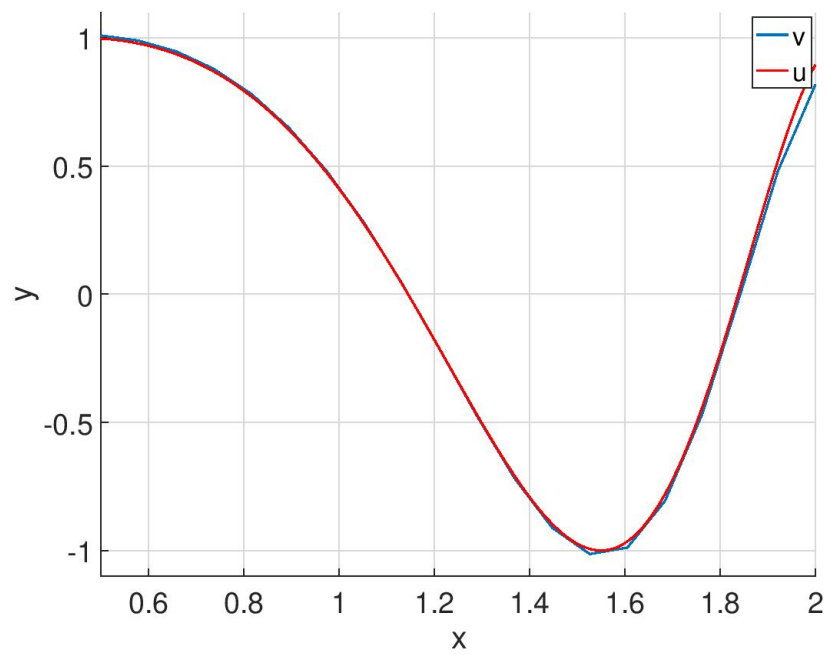


Рис. 1: Разностная схема $O(h^2)$, $n = 20$

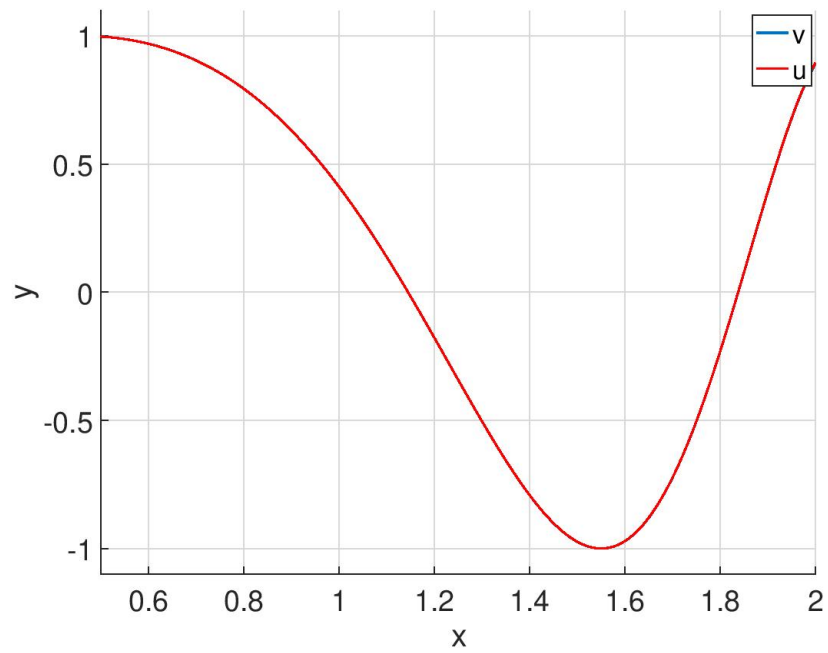


Рис. 2: Разностная схема $O(h^2)$, $n = 100$

5.2 Разностная схема $O(h)$

Таблица 2: Зависимость погрешности от числа узлов

<i>Число узлов</i>	h	$\ z_h\ $
20	0.078947	0.10925
40	0.038462	0.053382
80	0.018987	0.026531
160	0.0094340	0.013241
320	0.0047022	0.0066162
640	0.0023474	0.0033072
1280	0.0011728	0.0016534
2560	5.8617e-04	8.2667e-04
5120	2.9303e-04	4.1333e-04
10240	1.4650e-04	2.0666e-04
20480	7.3246e-05	1.0333e-04
40960	3.6622e-05	5.1665e-05
81920	1.8311e-05	2.5833e-05
163840	9.1553e-06	1.2916e-05
327680	4.5777e-06	6.4803e-06
655360	2.2888e-06	3.2328e-06
1310720	1.1444e-06	1.5893e-06
2621440	5.7220e-07	1.0271e-06
5242880	2.8610e-07	7.6183e-06

Также, как и в предыдущем случае, заметно, что с какого-то момента точность вычислений перестает повышаться, даже напротив – начинает падать. В данном случае погрешность начинает расти, когда число узлов достигает примерно до 5000000, что намного больше аналогичного значения у предыдущего способа аппроксимации.

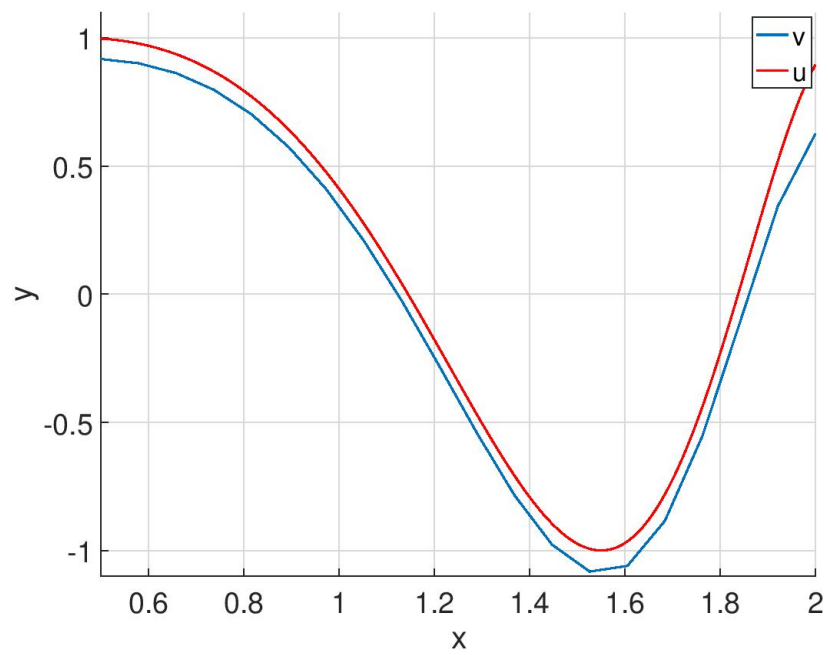


Рис. 3: Разностная схема $O(h)$, $n = 20$

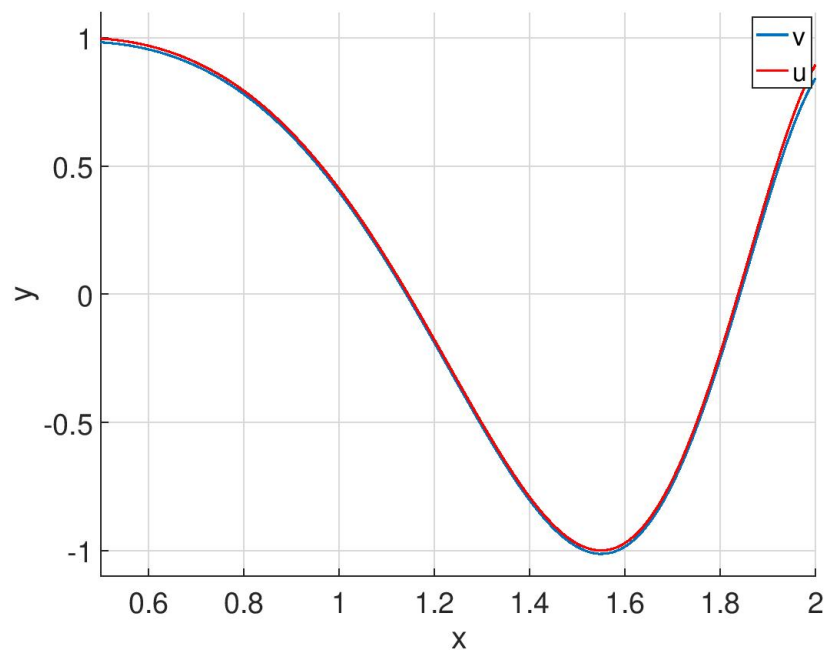


Рис. 4: Разностная схема $O(h)$, $n = 100$

5.3 Зависимости погрешности от шага

Таблица 3: Зависимость $\|z_h\|$ от величины шага для двух разностных схем.

h	$\ z_h\ $	
	$O(h^2)$	$O(h)$
0.0011728	4.7483e-06	0.0016534
5.8617e-04	1.1856e-06	8.2667e-04
2.9303e-04	2.9623e-07	4.1333e-04
7.3246e-05	7.4034e-08	2.0666e-04
3.6622e-05	1.8517e-08	1.0333e-04
1.8311e-05	4.6819e-09	5.1665e-05
9.1553e-06	1.5348e-09	2.5833e-05
4.5777e-06	2.6090e-09	1.2916e-05

Построим графики зависимостей логарифма нормы разности точного и приближенного решения от логарифма шага. Рядом изобразим прямые с угловыми коэффициентами 1 и 2 соответственно для схем $O(h)$ и $O(h^2)$. Из графиков видно, что логарифмические прямые имеют угловой коэффициент наклона, соответствующий порядку точности схемы, что согласуется с теорией. Также видно явление, при котором начиная с определённого момента мы достигли погрешности округления, и логарифмическая "прямая" перестаёт быть прямой.

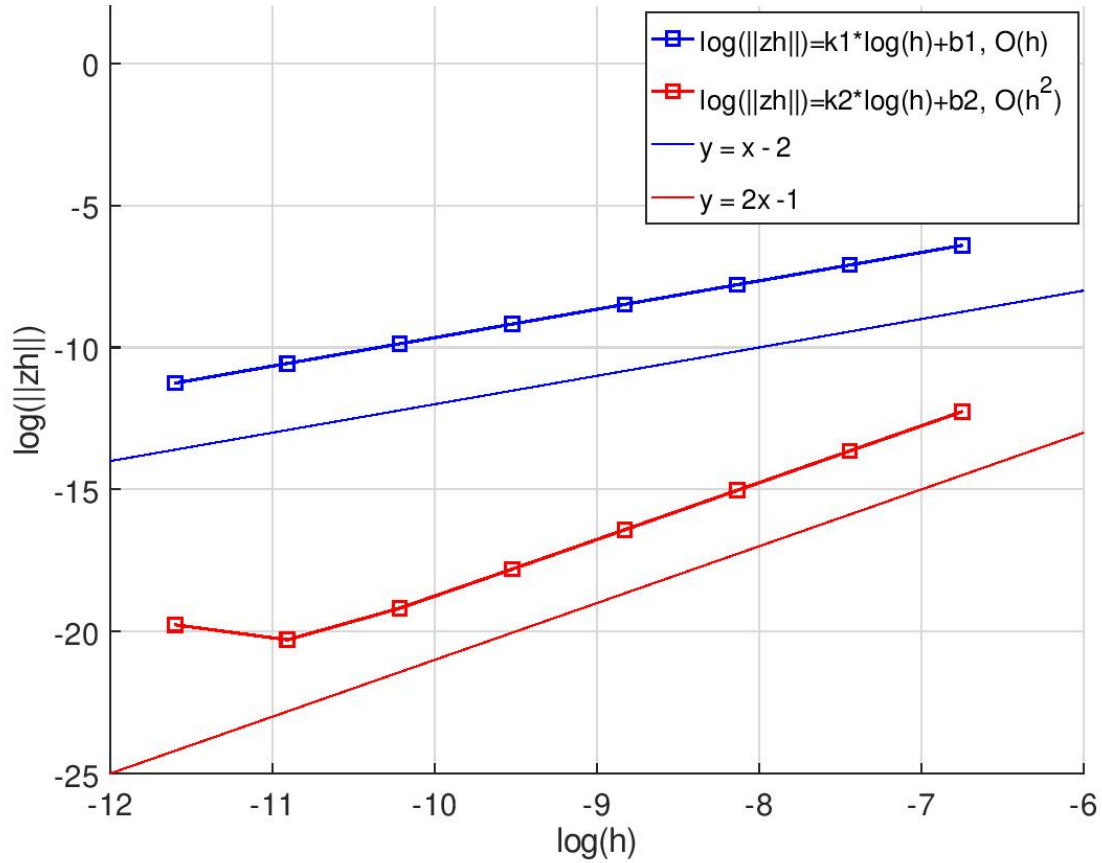


Рис. 5: Графики зависимости логарифма погрешности от логарифма шага для двух разностных схем

6 Выводы

В результате проведенной работы для исходной задачи были построены две разностные схемы с разным порядком аппроксимации. Были получены результаты, подтверждающие предположения о величине погрешности для разных схем. Также были получены свидетельства существования эффекта ухудшения погрешности при дроблении шага аппроксимации сверх определенного. Была показана разница в числе узлов, необходимых для достижения заданной погрешности для двух разностных схем и подтверждена большая эффективность схемы с более высоким порядком точности. Наконец, были получены зависимости величины погрешности от шага для разностных схем и наглядно показана разница между порядками аппроксимации в такой зависимости.