Maximum Acyclic Subgraph

Никита Лансков

21 декабря 2021 г.

Содержание

Введение

Курсовой проект по теории алгоритмов.

1 Основная часть

1.1 Формулировка задачи распознавания, доказательство ее NP-полноты

1.1.1 Формулировка задачи распознавания

Задача 1 (Задача MAS)
Дан конечный ориентированный граф $D = (V, A)$ и константа $B \in \mathbb{N}$. Существует ли подмножество $A' \in A$, такое, что подграф $D = (V, A')$ не содержит циклов и $|A'| >= B$.

1.1.2 Доказательство NP-полноты

Чтобы показать, что задача MAS является NP-полной, требуется:

1. Показать, что $MAS \in NP$

2. Свести к MAS другую известную задачу, чья NP-полнота уже установлена

Определение 1
Задача распознавания P принадлежит классу NP при схеме кодирования c, если $L[P, c] \in NP$

Определение 2
Язык L принадлежит классу NP, если существует НМТ M, распознающая L, и многочлен $p \in \mathbb{Z}[x]$, такие, что время работы M на любом входе $x \in \Sigma^*$ не превосходит $p(|x|)$

Таким образом, чтобы доказать что задача MAS является NP полной, нам достаточно убедиться в существовании недетерминированной машины тьюринга, которая бы распознавала язык этой задачи.

Действительно, в качестве подсказки достаточно взять набор нулей и единиц длины $|V|$, где каждое значение соответствует конкретной вершине $v \in V$, и единицы стоят на местах вершин, которые входят в максимальный ациклический подграф, а на местах оставшихся вершин - нули. Для этого предлагаю свести к задаче MAS задачу о независимом множестве.

Определение 3
G - конечный граф. $W \in V(G)$ - независимое множество, если
$\forall u, v \in W (uv \notin E(G))$

Задача 2 (О независимом множестве)
Дан конечный неориентированный граф G и число $B \in \mathbb{N}$. Есть ли в G независимое множество размера не менее B.

Преобразуем неориентированный граф из зачачи о независимом множестве G к ориентированному D следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&V(D) = V(G)\\
&A(D) = \{\{uv, vu\} \mid \forall uv \in E(G)\}
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы строим граф на тех же вершинах, и для каждого ребра исходного графа добавляем две разнонаправленные дуги в наш новый ориентированный граф.

При таком построении, если мы найдем в графе G независимое множество W, то мы также нашли бы максимальный ациклический подграф в D. Это правда, так как добавление любой из оставшихся вершин в подграф появился бы цикл, так как в графе G добавленная вершина была бы связана с одной или несколькими вершинами из независимого множества W.

1.2 Частные случаи

1.2.1 Граф степени < 3

1.2.2 Граф степени 3

Ссылки: [1]

1.3 Точный экспоненциальный алгоритм

Ссылки: [2]

1.4 Полиномиальный приближенный алгоритм

Ссылки: [3], [4]

2 Дополнительные исследования

2.1 Нижние оценки погрешности для приближенных алгоритмов

2.2 Вероятностные алгоритмы

Алгоритм отсюда: [4]

2.3 Исследование вариаций формулировки

Ссылки: [5]

Список литературы

[1] Alantha Newman. The maximum acyclic subgraph problem and degree-3 graphs. pages 147–158, 01 2001.

[2] Henning Fernau and Daniel Binkele-Raible. Exact algorithms for maximum acyclic subgraph on a superclass of cubic graphs. pages 144–156, 02 2008.

[3] Alantha Newman. Approximating the maximum acyclic subgraph. 05 2014.

[4] Refael Hassin and Shlomi Rubinstein. Approximations for the maximum acyclic subgraph problem. *Information Processing Letters*, 51:133–140, 08 1994.

[5] Mourad Baïou and Francisco Barahona. Maximum weighted induced bipartite subgraphs and acyclic subgraphs of planar cubic graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30:1290–1301, 01 2016.