Cálculo y Geométria Diferencial

Liz Ángel Núñez Torres

March 23, 2024

Derivadas

Estudiar la derivabilidad, en su campo de definición, de las siguientes funciones

- $$f(x) = e^{-|x|}.$$

- $$f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}.$$

En nuestra primer función analizaremos el comportamiento de:

$$x > 0, \ x = 0, \ x < 0.$$

Si tenemos:

$$x > 0.$$

Obtendremos:

$$f(x) = e^{-|x|} \to |x| = x \to f(x) = e^{-x}.$$

La cual es derivable en $\mathbb{R}$.

Si hacemos esto mismo con:

$$x = 0.$$

Obtendremos:

$$f(x) = e^{-|x|} \to |0| = 0 \to f(x) = e^0 \to e^0 = 1.$$

Y como **1** es una constante su derivada es **0**.

Por último:

$$x < 0.$$

Obtenemos:

$$f(x) = e^{-(-x)} \to f(x) = e^x$$

La función e^x es derivable en todo $\mathbb{R}$

Podemos decir entonces que x es derivable en todo $\mathbb{R}$ a excepción de **0**.

En nuestra segunda función analizaremos el comportamiento de

$$x > 1.$$

Si sustituimos x en nuestra función con un número mayor a **1** por ejemplo **2** obtenemos que:

$$f(2) = \sqrt{2^3 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Si $x > 1$ obtendremos una constante, con lo cual su derivada es **0**.

Calcular la derivada de las funciones definidas por las expresiones siguientes, en sus dominios de definición:

- $arctg\left(\sqrt{x-1}\right) - arcsin\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$.
- $\sqrt{1 + tg\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

En nuestra primera función trabajaremos de la forma $f(x) - g(x) = f'(x) - g'(x)$.

f(x)= arctg $\left(\sqrt{x-1}\right)$.

f'(x) $= \frac{\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}}{1+x-1} = \frac{1}{(2\sqrt{x-1})(1+x-1)} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}+2x\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

g(x)= arcsin $\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$.

$$\textbf{g'(x)} = \frac{\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}}{\sqrt{1-\frac{x-1}{x}}} = \frac{\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}}{\sqrt{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\left(2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)\left(\sqrt{-\frac{1}{x}}\right)} =$$
$$\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}} = \frac{1}{2x^2\frac{1}{x}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

Una vez con nuestras funciones derivadas, procedemos a ejecutar la resta en cuestión:

$$f'(x) - g'(x) \to \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = \mathbf{0}$$

Ahora continuaremos con nuestra segunda derivada:

$$h(x) = \sqrt{1 + tg\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + tg\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\left(cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-\left(-sin\left(x+\frac{1}{x}\right)sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(cos\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}\right)$$