Álgebra

December 12, 2023

Profesor
Alberto Corbi Bellot

Autores
Liz Ángel Núñez Torres
Lucas Lopez Cañadilla
Jorge Roiz Barbellido
Daniel Beltran Argueta

1) Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_1 =< (1,2,0),(1,0,0),(0,1,2) >$.
$\mathcal{B}_2 =< (1,0,1),(0,1,1),(0,0,2) >$.

$a)$ Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$

$b)$ ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{v} = (2,1,1)_{\mathcal{B}1}$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Solución

a) Para encontrar $\mathcal{M}_{\mathcal{B}2\mathcal{B}1}$ debemos expresar los vectores de $\mathcal{B}_1$ como combinación lineal de $\mathcal{B}_2$, aquí, para hacer el procedimiento más rápido, desarrollaremos una matriz ampliada que parte de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ donde la matriz imagen $\mathcal{B}_2^I$ nos permite obtener la matriz cambio de base $\mathcal{M}_{\mathcal{B}2\mathcal{B}1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \widetilde{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \widetilde{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \widetilde{{}^2/F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Obtenemos que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}2\mathcal{B}1}= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) Para obtener las coordenadas de $\vec{v}_{\mathcal{B}1}$ en $\mathcal{B}_2$ vamos a usar nuestra matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}2\mathcal{B}1}$ ya que esta cataliza la obteción de las coordenadas.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}2\mathcal{B}1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El vector $\vec{v}_{\mathcal{B}2} = (3, 5, -3)$.

2) Dependencia e independencia lineal.

a) Sean los vectores en $\mathbb{R}^4$ dados por: $(2, 2, a, a), (0, -1, 0, -1,), (b, 2, a, -1), (a, a, a, -4)$.

¿Qué condición deben verificar a y b de forma que estos vectores sean linealmente independientes?

b) Dado el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$ expresar:
$\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$. ¿Se podría expresar de dos formas distintas? Justifica tu respuesta.

Solución

a) La condición para que estos 4 vectores sean linealmente independientes, ninguno puede ser combinación lineal del otro. Para ello la matriz que forman los 4 vectores debe ser de rango 4, es decir, $det \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \beta & \alpha \\ 2 & -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta = 0$$

Por medio de submatrices cuyos determinantes igualados a cero nos dará valores de los paramétros que al reemplazarlos por la ecuación del anterior determinante podemos encontrar valores que satisfagan la ecuación.

$$M_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} = -\alpha - \alpha^2 \rightarrow \alpha = -1 \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \beta \rightarrow \beta = 0$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -4 \end{bmatrix} = -4\alpha - \alpha^2 \rightarrow \alpha = -4 \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \alpha \rightarrow \alpha = 0$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} = 2\alpha - \alpha^2 \to \alpha = 2$$

Ahora vamos a sustituir valores en nuestra ecuación:

$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta = 0$

Si sustitumos $M_2 \to \beta = 0$ obtendremos $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha = 0 \to \alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2)$

$\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2) = 0$

La ecuación estaría satisfecha si $\alpha = -2$ o $\alpha = -1$

También si $M_2 \to \alpha = -4$ y $\beta = -6$

Port lo tanto los vectores serán linealmente independientes Si
$\alpha = -2, -1 \wedge \beta = 0$

b) Para representar nuestro vector como combinación lineal usaremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$.
Procedemos:

$(1, 2, 3) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, -2)$.

$(1, 2, 3) = (\alpha, 0, 0) + (\beta, \beta, 0) + (\gamma, 0, -2\gamma)$.

Una vez realicemos la suma de los conjuntos obtendremos tres ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ \beta & = 2 \\ -2\gamma & = 3 \end{cases}$$

Como podemos ver, $\beta = 2$ y al despejar γ obtenemos que $\gamma = -\frac{3}{2}$. Ahora vamos a nuestra ecuación (1) para obtener el valor restante remplazando con lo que hemos obtenido de las anteriores ecuaciones.

$\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$\alpha = 1 - 2 + \frac{3}{2}$.

$\alpha = \frac{1}{2}$.

Concluimos que la combinación lineal de $\vec{v}$ se representa como:

$(1, 2, 3) = \frac{1}{2}(1, 0, 0) + 2(1, 1, 0) - \frac{3}{2}(1, 0, -2)$.

3) Subespacios vectoriales.

a) Demuestra que el conjunto: $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + 2y - t = 0, y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Calcula su dimensión y una base.

b) Sea el subespacio vectorial $T =< (1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0) >$. Calcula su dimensión y una base. *c*) Obtén la dimensión y una base de los subespacios $S \cap T$ y $S + T$.

Solución

a) Para demostrar que S es un subespacio, este debe cumplir con los tres requisitos de un subespacio.

$\vec{0} \in S$ Vector nulo.
$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in S | \vec{v_1} + \vec{v_2} \in S$ Ley de composición interna.
$\vec{v} \in S, k \in \mathbb{R} \to k.\vec{v} \in S$ Ley de composición externa.

Vector nulo

$\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ reemplazamos el vector $\vec{0}$ en las ecuaciones de S.
$2.0 + 2.0 - 0 = 0, 0 = 0$
De esta manera sabemos que $\vec{0} \in S$.

Ley de composición interna

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^4$.

$\vec{v_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) 2\alpha_1 + 2\beta_2 - \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0$
$\vec{v_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) 2\alpha_2 + 2\beta_2 - \delta_2 = 0, \gamma_2 = 0$
$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2, \delta_1 + \delta_2)$

Si usamos nuestra ecuación $2x + 2y - t = 0$ y $y = 0$
$2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(\beta_1 + \beta_2) - (\delta_1 + \delta_2) = 0$
$(\beta_1 + \beta_2) = 0$

Con lo cual, acabamos de demostrar que $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in S$.

Ley de composición externa

$k \in \mathbb{R}$
$\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) - 2\alpha + 2\beta - \delta = 0 - \beta = 0$
$k(\vec{v}) = (k\alpha, k\beta, k\gamma, k\delta)$

Si usamos nuestra ecuación $2x + 2y - t = 0$ y $y = 0$
$2(k\alpha) + 2(k\beta) - (k\delta) = 0 - k(2\alpha + 2\beta - \delta) = 0 - k(0) = 0$

Tenemos que $k.\vec{v} \in S$ y por lo tanto es S un subespacio vectorial.

Base y Dimensión

Tomamos nuestra ecuación $2x + 2y - t$ y despejamos $t - t = 2x + 2y$.

$(x, y, z, t) = (x, y, z, 2x + 2y) = (x, 0, 0, 2x), (0, y, 0, 2y), (0, 0, z, 0)$

factor común
$x(1, 0, 0, 2)y(0, 1, 0, 2)z(0, 0, 1, 0)$

Nuestra base son los vectores $(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)$ y dado que tenemos tres vectores, sabemos que $dim = 3$.

b) Vamos a calcular una base de $T =< (1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0) >$ Sin embargo, podemos notar que estos vectores ya forman una base dado que los vectores son L.I. y generan todo $\mathbb{R}^4$, también que su dimensión es 3.

Primero, vamos obtener las ecuaciones implicitas, parametrizaremos y obtendremos la base y la dimensión.

$(x, y, z, t) = \alpha(1, 2, 3, 4) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(1, 0, 2, 0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 3 & 0 & 2 & z \\ 4 & 0 & 0 & t \end{array}\right] \widetilde{-2F_1 + F_2}|\widetilde{-3F_1 + F_3}|\widetilde{-4F_1 + F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & -2x + y \\ 0 & 0 & -1 & -3x + z \\ 0 & 1 & -4 & -4x + t \end{array}\right]$$

$$\widetilde{F_2 - F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & -2x + y \\ 0 & 0 & -1 & -3x + z \\ 0 & 0 & 2 & 2x + y - t \end{array}\right] \widetilde{2F_3 + F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & -2x + y \\ 0 & 0 & -1 & -3x + z \\ 0 & 0 & 0 & -4x + y + 2z - t \end{array}\right]$$

Si en nuestra ecuación implicita $-4x + y + 2z - t$ depejamos $y - y = 4x - 2z + t$ ahora parametrizamos:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 4x - 2z + t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$(x, 4x - 2z + t, z, t) = (x, 4x, 0, 0)(0, -2z, z, 0)(0, t, 0, t)$
$x(1, 4, 0, 0)z(0, -2, 1, 0)t(0, 1, 0, 1)$

Hemos obtenido otra base $(1, 4, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ de igual dimensión a la anterior base, $dim = 3$

c) Primero calculemos las ecuaciones paramétricas del subespacio T

$T = (x, y, z, t) = \alpha(1, 2, 3, 4) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(1, 0, 2, 0)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = 2\alpha + \gamma \\ z = 3\alpha + 2\gamma \\ t = 4\alpha \end{cases}$$

Los vectores que pertenezcan a la intersección de los dos subespacios S y T serán aquellos cuyas componentes cumplan la relación de S.

1) $2x + 2y - t = 0,$
2) $y = 0$

De manera que para el subespacio vectorial T tenemos que:

$2(\beta + \gamma) - 2.0 - 4\alpha = 0 \rightarrow \gamma = \alpha$
$2\alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -2\alpha$

Por lo tanto, los vectores del conjunto intersección $S \cap T$, tendrán las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 0 \\ z = 5\alpha \; t = 4\alpha \end{cases}$$

Por tanto, cualquier vector de dicho conjunto podrá expresarse de la forma

$(x, y, z, t) = \alpha(2, 0, 5, 4)$

Concluimos que $S \cap T =< (2, 0, 5, 4) >$ y $dim(S \cap T) = 1$

El conjunto de vectores de la suma de los dos subespacios S y T será el conjunto de los vectores de la base del subespacio S y los del la base de la base T . No obstante, como ya dijimos antes para formar una base deben ser linealmente independientes. Para ello formamos una matriz y mediante operaciones elementales veremos si hay filas de ceros que indiquen que podamos prescindir de ellos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, una posible base del conjunto suma podría ser

$S + T =< (1, 0, 0, 2), (0, 2, 3, 2), (0, 0, 2, -2), (0, 0, 0, -5/2) >$

$dim(S + T) = 4$

Y podemos comprobar que se cumple la relación de Grassmann

$dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T).$

4) Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $\mathbb{M}$ tiene columnas ortogonales.

b) Contruye la matriz $\mathbb{M}_2$ añadiendo el vector $\vec{e}_3 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ como última columna de $\mathbb{M}$. Aplica el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de $\mathbb{M}^2$ para ortonormalizarlas.

c) Forma la matriz $\mathbb{A}$ con las columnas de $\mathbb{M}_2$ ortonormales y comprueba que $\mathbb{A}$ es una matriz ortogonal, es decir, $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = I$.

d) Calcula las coordenadas del vector $(-1, -3, 2)$ en la base $\mathbb{R}^3$form ada por las columnas $\mathbb{A}$.

Solución

a) Para comprobar que la matriz $\mathbb{M}$ tiene columnas ortogonales calculamos el producto punto de las columnas.

$$\mathbb{M}_1.\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1. - 2) + (2. - 1) + (4.1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

Por ende, las columnas de la matriz $\mathbb{M}$ son *ortogonales*.

b)

$$\mathbb{M}_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuestro primer paso es usar Gram-Schmidt para ortogonalizar los vectores.

$$\vec{v}_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = (-2,-1,1) - \frac{<(-2,-1,1),(1,2,4)>}{<(1,2,4)(1,2,4)>}(1,2,4)$$

$$u_2 = (-2,-1,1) - \frac{0}{21}.(1,2,4) \longrightarrow (u_2) = (-2,-1,1) - 0$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez concluimos el valor de u_2 podemos obtener u_3.

$$u_3 = (1,0,0) - \frac{<(1,0,0)(1,2,4)>}{<(1,0,0)(1,0,0)>}(1,2,4) - \frac{<(1,0,0)(-2,-1,1)>}{<(-2,-1,1)(-2,-1,1)>}(-2,-1,1)$$

$$u_3 = (1,0,0) + (-\tfrac{1}{21}, -\tfrac{2}{21}, -\tfrac{4}{21}) + (-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 2/7 \\ -3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

Nuestra base ortogonal es

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2/7 \\ 2 & -1 & -3/7 \\ 4 & 1 & 1/7 \end{bmatrix}$$

A continuación, procedemos a la normalización.

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(1,2,4)}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} = \left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\cdot\sqrt{21}}{21}, \frac{4\cdot\sqrt{21}}{21}\right).$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{(2/7,-3/7,1/7)}{\frac{\sqrt{14}}{7}} = \frac{2/7}{\frac{\sqrt{14}}{7}}, \frac{-3/7}{\frac{\sqrt{14}}{7}}, \frac{1/7}{\frac{\sqrt{14}}{7}} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{-3\cdot\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right).$$

Concluimos nuestra matriz ortonormalizada.

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-3\sqrt{14}}{14} \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{14}}{14} \end{bmatrix}$$

c) Sustituimos $\mathbb{M}_2 = A$ Y ahora comprobemos si $A^T A = I$.

$$A^T.A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-3\sqrt{14}}{14} \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{14}}{14} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{4\sqrt{21}}{21} \\ \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{-3\sqrt{14}}{14} & \frac{\sqrt{14}}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluimos que $A^T A = I$ por lo tanto nuestra matriz si es *ortogonal*.

d) Para obtener las cordenadas de $(-1, -3, 2)$ formada por la columnas de A procedemos de la siguiente manera.

$$(-1, -3, 2) = \alpha\left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{14}}{7}\right) + \beta\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) + \gamma\left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{-3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right)$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{21}}{21}\alpha - \frac{-\sqrt{6}}{3}\beta + \frac{\sqrt{14}}{7}\gamma = -1 \\ \frac{2\sqrt{21}}{21}\alpha - \frac{-\sqrt{6}}{6}\beta + \frac{-3\sqrt{14}}{14}\gamma = -3 \\ \frac{4\sqrt{21}}{21}\alpha + \frac{\sqrt{6}}{6}\beta + \frac{\sqrt{14}}{14}\gamma = 2 \end{cases}$$

Usamos Gauss-Jordan para resolver nuestro sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9\sqrt{14}}{14} \end{array}\right]$$

Por lo tanto

$$(-1, -3, 2) = \frac{\sqrt{21}}{21}\left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{14}}{7}\right) + \frac{7\sqrt{6}}{6}\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) + \frac{9\sqrt{14}}{14}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{-3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right).$$