ACTIVIDAD INDIVIDUAL.

Liz Ángel Núñez Torres.

21 de junio de 2024

1. Demostración

Demostrar que $\bigtriangledown r^n = nr^{n-2}\vec{r}$.

Como primer paso para demostrar la expresión, dejaremos los datos con los que vamos a trabajar.

1. $$\vec{r} = (x + y + z)\,.$$

2. $$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. $$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$$

4. $$\nabla r^n = \left(\frac{\partial r^n}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial r^n}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial r^n}{\partial z}\hat{k}\right).$$

Obtendremos el gradiente de r con respecto de (x, y, z), cabe recordar que r es el módulo del vector $\vec{r}$. También, que lo que vamos a obtener es:

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right).$$

- $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Una vez realizadas las derivadas parciales, recordemos que $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$. Y $(x, y, z) = \vec{r}$.

Por lo tanto:

$$\nabla r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \to \nabla r = \left(\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

Dado que tenemos una función r^n compuesta de r (que es una función (x, y, z)) y n-ésima potencia de r usaremos la regla de la cadena.

Aplicamos la regla de la cadena de la forma:

$$\nabla f\left(u\right) = f'\left(u\right) \cdot \nabla u.$$

Donde:

$$u = r$$

$$f\left(u\right) = u^n = r^n.$$

Obtenemos la derivada:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u^n\right) = nu^{n-1}.$$

Tenemos entonces:

$$f'\left(u\right) \cdot \nabla u = nu^{n-1} \cdot \nabla u.$$

Reemplazamos u:

$$nr^{n-1} \cdot \nabla r = nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}.$$

De este modo obtenemos la demostración.

$$nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r} = nr^{n-2}\vec{r}.$$

$$\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}.$$

2. Hallar vector unitario.

Hallar un vector unitario normal a la superficie $x^{2y} + 2xz = 4$ **en el punto** $(2, 2, 3)$

Al sustituir los puntos en nuestra ecuación tenemos

$$2^{2\cdot 2} + 2\,(2)\,(3) = 4 \;\rightarrow\; 2^4 + 12 = 4 \;\rightarrow\; 16 + 12 = 28.$$

Es por esto que trabajaremos con los punto $(2, 2, -3)$ dado que sí cumple con la igualdad.

$$2^{2\cdot 2} + 2\,(2)\,(-3) = 4 \;\rightarrow\; 2^4 - 12 = 4 \;\rightarrow\; 16 - 12 = 4.$$

Vamos a denominar $\phi = \left(x^{2y} + 2xz - 4\right)$ y ahora procederemos a realizar $\nabla\phi$.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(x^{2y} + 2xz - 4\right)$$

Obtenemos la derivadas parciales:

- $= \frac{\partial\left(x^{2y}+2xz-4\right)}{\partial x} = 2yx^{2y-1} + 2z.$
- $= \frac{\partial\left(x^{2y}+2xz-4\right)}{\partial y} = x^{2y} 2\ln(x).$
- $= \frac{\partial\left(x^{2y}+2xz-4\right)}{\partial z} = 2x.$

Ahora evaluaremos en el punto para obtener el vector:

$$\nabla\phi_{(2,2-3)} = (26, 32\ln(2), 4)$$

Este vector que denominaremos $\vec{s}$ es un vector normal a la superficie en el punto $(2, 2, -3)$, a continuación vamos a calcular el módulo del vector para obtener el vector unitario de $\vec{s}$.

$$|\vec{s}| = \sqrt{(26)^2 + (32\ln(2))^2 + (4)^2} = \sqrt{676 + 491{,}9838 + 16} = 34{,}40$$

Una vez con el módulo del vector $\vec{s}$, procedemos a calcular el vector unitario $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(\frac{26}{34{,}40}, \frac{32\ln(2)}{34{,}40}, \frac{4}{34{,}40}\right).$$

3. Demostración.

Demostrar $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$

Vamos primero a definir cierta información que nos ayudará a lograr la demostración.

- $$\vec{r} = (x, y, z)\,.$$
- $$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$
- $$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$$

Procederemos de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \nabla \cdot \left(r^{-3}\vec{r}\right).$$

Usando la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \nabla \Phi \cdot \mathbf{A} + \Phi \cdot \nabla \mathbf{A}$$

Reemplazamos:

$$\nabla \cdot \left(r^{-3}\vec{r}\right) = \nabla r^{-3} \cdot \vec{r} + r^{-3} \cdot \nabla \vec{r}$$

Vamos a desarrollar la parte izquierda de la adición, pero antes, notemos que tenemos $\nabla r^{-3} \cdot \vec{r}$ Con lo cual podemos observar que tenemos una función compuesta, así que ejecutaremos la regla de la cadena para obtener el resultado.

$$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$$

Por lo tanto:

$$\nabla\left(r^{-3}\right) = -3r^{-4}\nabla r = -3r^{-4}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -3r^{-4} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -3r^{-5} \cdot \vec{r}$$

Con el resultado anterior podemos entonces desarrollar por completo la parte izquierda:

$$\nabla \left(r^{-3}\right) \cdot \vec{r} = -3r^{-5} \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} = -3r^{-5} \cdot r^2 =$$

$$-3r^{-3}.$$

Ahora desarrollaremos la parte derecha.

$$r^{-3} \cdot \nabla \vec{r} = r^{-3} \left(\frac{\partial \left(x, y, z\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(x, y, z\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(x, y, z\right)}{\partial z} \right) = r^{-3} \cdot 3 =$$

$$3r^{-3}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\nabla \cdot \left(r^{-3}\vec{r}\right) = -3r^{-3} + 3r^{3} = 0$$

4. Demostración

Demostrar $\nabla \cdot \left(f\vec{A}\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \vec{A} + f\left(\nabla \vec{A}\right)$.

Definimos $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Ahora $f\vec{A} = (fA_x, fA_y, fA_z)$.

Es entonces cuando calculamos $\nabla \left(f\vec{A}\right)$

$$\nabla \left(f\vec{A}\right) = \left(\frac{\partial \left(fA_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(fA_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(fA_z\right)}{\partial z} \right)$$

Obtenemos las derivadas parciales con la regla del producto.

- $\frac{\partial(fA_x)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot A_x + f \cdot \frac{\partial A_x}{\partial x} = A_x \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial A_x}{\partial x}$
- $\frac{\partial(fA_y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot A_y + f \cdot \frac{\partial A_y}{\partial y} = A_y \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial A_y}{\partial y}$
- $\frac{\partial(fA_z)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot A_z + f \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z} = A_z \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Tenemos entonces que:

$$\nabla\left(f\vec{A}\right) = \left(\left(A_x\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(A_y\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(A_z\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right).$$

Reagrupamos terminos:

$$\nabla\left(f\vec{A}\right) = \left(A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

La expresión anterior es la que vamos a intentar obtener en $(\nabla f)\cdot\vec{A} + f\left(\nabla\vec{A}\right)$.

Primero, obtengamos la parte izquierda de la adición $(\nabla f)\cdot\vec{A}$

$$\nabla\cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Por lo tanto:

$$(\nabla f)\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(A_x, A_y, A_z)$$

$$(\nabla f)\cdot\vec{A} = \left(A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

A continuación obtendremos la parte derecha de la adición $\to f\left(\nabla\vec{A}\right)$.

$$f\left(\nabla\vec{A}\right) = f\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x, A_y, A_z)\right)$$

$$f\left(\nabla\vec{A}\right) = f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

Por último, hacemos la suma de $(\nabla f) \cdot \vec{A} + f\left(\nabla\vec{A}\right)$ que será igual a $\nabla \cdot \left(f\vec{A}\right)$.

$$\left(A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \nabla \cdot \left(f\vec{A}\right)$$

5. Demostración

Demostrar $\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = (\nabla f) \times \vec{A} + f\left(\nabla \times \vec{A}.\right)$

Para demostrar esta ecuación, vamos a calcular primero $\nabla \times \left(f\vec{A}\right)$. Sabemos que $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ Por lo tanto:

$$\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = \nabla \times (fA_x, fA_y, fA_z)$$

Aplicamos el producto cruz y determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fA_x & fA_y & fA_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial fA_z}{\partial y} - \frac{\partial fA_y}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial fA_z}{\partial x} - \frac{\partial fA_x}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial fA_y}{\partial x} - \frac{\partial fA_x}{\partial y}\right)$$

A continuación vamos a desarrollar las derivadas parciales en cada uno de los tres conjuntos.

- $\left(\frac{\partial f A_z}{\partial y} - \frac{\partial f A_y}{\partial z}\right) = \left(A_z \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial A_Z}{\partial y} \cdot f\right) - \left(A_y \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \cdot f\right)$
- \- $\left(\frac{\partial f A_z}{\partial x} - \frac{\partial f A_x}{\partial z}\right) = \left(A_z \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot f\right) - \left(A_x \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \cdot f\right)$
- $\left(\frac{\partial f A_y}{\partial x} - \frac{\partial f A_x}{\partial y}\right) = \left(A_y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \cdot f\right) - \left(A_x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \cdot f\right)$

Vamos entonces a aplicar las restas y organizar los factores A y f.

- $\left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial A_z}{\partial y} - f \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \rightarrow \left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} + f \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right)$
- \- $\left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial A_z}{\partial y} - f \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \rightarrow \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + f \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right)$
- $\left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial A_y}{\partial x} - f \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \rightarrow \left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} + f \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right)$

Entonces la expresión $\nabla \times \left(f \vec{A}\right)$ Queda de la forma:

$$\left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} + f \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right), \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z} + f \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right),$$
$$\left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} + f \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right).$$

Es entonces que con la adición de $(\nabla f) \times \vec{A} + f \left(\nabla \times \vec{A}.\right)$ debemos llegar a la expresión obtenida anteriormente.

Empezaremos con la parte izquierda. $(\nabla f) \times \vec{A}$.

$$(\nabla f) \times \vec{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \times (A_x, A_y, A_z).$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z}\right), \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z}\right), \left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ahora, continuamos con la parte derecha. $f\left(\nabla \times \vec{A}.\right)$

$$f\left(\nabla \times \vec{A}.\right) = f\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_x, A_y, A_z)\right).$$

Por lo tanto:

$$f \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = f\left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z}\right), f\left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z}\right), f\left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Realizamos la sumatoria de $(\nabla f) \times \vec{A} + f\left(\nabla \times \vec{A}.\right)$ y Obtenemos:

$$\left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} + f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right), \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z} + f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right),$$
$$\left(A_y \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right) = \nabla \times \left(f\vec{A}\right)$$

$\geq\geq$

6. Dado el campo vectorial.

Dado el campo vectorial $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$ siendo $\vec{w}$ un vector constante, demostrar $\vec{w} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}$

Primero vamos a definir los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ y después aplicaremos el rotacional que determinará el vector $\vec{v}$.

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z).$$

Ahora, obtendremos el rotacional de los dos vectores que a su vez se serán las componente del vector $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zw_y - yw_z), (xw_z - zw_x), (yw_x - xw_y).$$

El vector $\vec{v}$ queda entonces.

$$\vec{v} = (zw_y - yw_z,\ xw_z - zw_x,\ yw_x - xw_y)$$

Calculamos su rotacional. (Cabe resaltar que en el segundo vector hemos multiplicado su signo.)

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zw_y - yw_z & xw_z - zw_x & yw_x - xw_y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{\partial(yw_x - xw_y)}{\partial y} - \tfrac{\partial(xw_z - zw_x)}{\partial z}\right), \left(\tfrac{\partial(yw_x - xw_y)}{\partial x} - \tfrac{\partial(zw_y - yw_y)}{\partial z}\right), \left(\tfrac{\partial(xw_z - zw_x)}{\partial x} - \tfrac{\partial(zw_y - yw_z)}{\partial y}\right).$$

Obtenemos las derivadas parciales:

- $\left(\frac{\partial(yw_x - xw_y)}{\partial y} - \frac{\partial(xw_z - zw_x)}{\partial z}\right) = w_x - (-w_x) = 2w_x.$
- $\left(\frac{\partial(yw_x - xw_y)}{\partial x} - \frac{\partial(zw_y - yw_y)}{\partial z}\right) = -w_y - (w_y) = 2w_y.$
- $\left(\frac{\partial(xw_z - zw_x)}{\partial x} - \frac{\partial(zw_y - yw_z)}{\partial y}\right) = w_z - (-w_z) = 2w_z.$

Vemos que el resultado al despejar y sustituir es:

$$\nabla \times \vec{v} = (2w_x, 2w_y, 2w_z) \to \nabla \times \vec{v} = 2 \cdot (w_x, w_y, w_z) \to \nabla \times \vec{v} = 2 \cdot \vec{w}.$$

$$\frac{\nabla \times \vec{v}}{2} = \vec{w}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \nabla \times \vec{v} = \vec{w}.$$

7. Representar el vector.

Representar el vector $\vec{A} = \left(z\hat{i} - x\hat{j} + y\hat{k}\right)$ en coordenadas cilíndricas.

Vamos a poner la equivalencias de los vectores en coordenada cilíndricas o vector de posición.

$$\vec{A} = \left(z\hat{i} - x\hat{j} + y\hat{k}\right) = \left(\rho\cos(\phi)\hat{i} - \rho\sin(\phi)\hat{j} + z\hat{k}\right).$$

Vamos entonces a calcular el vector $\vec{\rho}$, para hacerlo, tomaremos el vector de posición y calcularemos su derivada parcial.

$$\vec{\rho} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial\rho} = \cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j}.$$

Dado que queremos un vector unitario, procederemos a divir $\vec{\rho}$ por el módulo de su derivada parcial.

$$\vec{\rho} = \frac{\frac{\partial\vec{A}}{\partial\rho}}{\left|\frac{\partial\vec{A}}{\partial\rho}\right|} = \frac{\cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j}}{\sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}} = \frac{\cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j}}{\sqrt{1}} = \cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j}.$$

Tenemos entonces:

$$\vec{\rho} = \cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j}.$$

Ahora vamos a hacer el mismo procedimiento para obtener $\vec{\phi}$.

$$\vec{\phi} = \frac{\frac{\partial\vec{A}}{\partial\phi}}{\left|\frac{\partial\vec{A}}{\partial\phi}\right|} = \frac{-\rho\sin(\phi)\hat{i} - \rho\cos(\phi)\hat{j}}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\phi) + \rho^2\sin^2(\phi)}} = \frac{\rho\left(-\sin(\phi)\hat{i} - \cos(\phi)\hat{j}\right)}{\rho\sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}} = -\sin(\phi)\hat{i} - \cos(\phi)\hat{j}$$

Hemos obtenido:

$$\vec{\phi} = -\sin(\phi)\hat{i} - \cos(\phi)\hat{j}$$

Por último, Obtendremos $\vec{k}$ con el mismo procedimiento.

$$\vec{k} = \frac{\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{k}}}{\left|\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{k}}\right|} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{k}$$

Ahora, para obtener el vector $\vec{A}$ en coordenadas cilíndricas, debemos sumar los vectores $\left(\vec{\rho}, \vec{\phi}, \vec{k}\right)$. Por lo tanto obtendremos:

$$\vec{A} = \left(\vec{\rho}\left(z\cos(\phi) - x\sin(\phi)\right) + \vec{\phi}\left(-z\sin(\phi) - x\cos(\phi)\right) + y\vec{k}\right)$$

8. Hallar el cuadrado del elemento de línea.

Hallar el cuadrado del elemento de línea en coordenadas esféricas.

En primer lugar vamos a exponer las equivalencias de las coordenadas esféricas en relación a las cartesianas.

$$(x, y, z) \to \left(r\sin(\theta)\cos(\phi), \quad r\sin(\theta)\sin(\phi), \quad r\cos(\theta)\right).$$

Ahora sabiendo las equivalencias veamos el elemento de línea en coordenadas cartesianas.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Procedemos a calcular la derivadas parciales de (x, y, z) respecto a (r, θ, ϕ) para obtener ds^2.

Lo harémos primero respecto a x de la forma:

$$dx = \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\cos(\phi)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\cos(\phi)\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\cos(\phi)\right)}{\partial \phi}.$$

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\cos(\phi))}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\phi)$.

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\cos(\phi))}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\cos(\phi)$.

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\cos(\phi))}{\partial \phi} = r\sin(\theta) - \sin(\phi) \to -r\sin(\theta)\sin(\phi)$.

Tenemos entonces que:

$$dx = (\sin(\theta)\cos(\phi)dr + r\cos(\theta)\cos(\phi)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\phi)d\phi)\,.$$

A continuación, vamos a hacer el mismo procedimiento con y.

$$dy = \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right)}{\partial \phi}.$$

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\sin(\phi))}{\partial r} = \sin(\theta)\sin(\phi)$.

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\sin(\phi))}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\sin(\phi)$.

- $\frac{\partial(r\sin(\theta)\sin(\phi))}{\partial \phi} = r\sin(\theta)\cos(\phi)$.

Sumamos nuestros resultados.

$$dy = (\sin(\theta)\sin(\phi)dr + r\cos(\theta)\sin(\phi)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\phi)d\phi)\,.$$

Por último, hacemos lo mismo con z.

$$dz = \frac{\partial\left(r\cos(\theta)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\cos(\theta)\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(r\cos(\theta)\right)}{\partial \phi}.$$

- $\frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial r} = \cos(\theta)$.

- $\frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial\theta} = -r\sin(\theta)$.

- $\frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial\phi} = 0$.

Hacemos la adición y obtenemos.

$$dz = (\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta)$$

Con los valores obtenidos en (dx, dy, dz) vamos a incluirlos en ds^2, con lo que obtendremos.

$$ds^2 = \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Separando la suma de los cubos.

- $dx^2 = \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)dr^2 + r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi)d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)d\phi^2 + 2r\sin(\theta)\cos(\theta)cos^2(\phi)drd\theta - 2r^2sin^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi)d\theta d\phi - 2r\sin^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi)drd\phi$.

- $dy^2 = \sin^2(\theta)\sin^2(\phi)dr^2 + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi)d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)d\phi^2 + 2r\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\phi)drd\theta + 2r^2\sin^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi)d\theta d\phi + 2r\sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi)drd\phi$.

- $dz = cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)d\theta^2 - 2rsin(\theta)\cos(\theta)drd\theta$.

Sumando los cuadrados anteriores y usando herramientas trigonométricas como la suma de los cubos del seno y coseno, obtendremos.

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

9. Hallar las expresiones de los elementos.

Hallar las expresiones de los elementos de superficie en coordenadas curvilíneas ortogonales.

En un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, necesitaremos obtener los factores de escala (h_1, h_2, h_3) que son la norma del vector derivado parcial $\vec{r}$ con respecto a sus componentes (r_1, r_2, r_3).

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{r_1}\right| \to h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{r_2}\right| \to h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{r_3}\right|$$

El elemento de línea diferencial en estas coordenadas es:

$$ds = \sqrt{(h_1 dr^1)^2 + (h_2 dr^2)^2 + (h_3 dr^3)^2}$$

Es entonces que para hallar los elementos de superficie dS en coordenadas curvilíneas, consideraremos la primera coordenada como constante y las otras dos como variables, después haremos lo mismo con la segunda y tercera coordenada.

- En $r_1 \to dS_{r^2 r^3} = h_2 h_3 dr^2 dr^3$
- En $r_2 \to dS_{r^1 r^3} = h_1 h_3 dr^1 dr^3$
- En $r_3 \to dS_{r^1 r^2} = h_1 h_2 dr^1 dr^2$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) Los factores de escala se corresponden con $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin\theta$.

- En $r \to dS_{\theta\phi} = h_\theta h_\phi d\theta d\phi = r^2 \sin\theta d\theta d\phi.$
- En $\theta \to dS_{r\phi} = h_r h_\phi dr d\phi = r sin\theta dr d\phi.$
- En $\phi \to dS_{r\theta} = h_r h_\theta dr d\theta = r dr d\theta.$

Coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z Los factores de escala se corresponden con $h_\rho = 1, h_\phi = \rho, h_z = 1$.

- En $\rho \rightarrow dS_{\phi r} = h_\phi h_z d\phi d_z = \rho p\phi dz.$
- En $\phi \rightarrow dS_{\rho z} = h_\rho h_z d\rho dz = d\rho dz.$
- En $z \rightarrow dS_{\rho\phi} = h_r h_\theta dr d\theta = r dr d\theta.$

10. Hallar las componentes del vector bajo una rotación.

Dado el vector $\vec{v} = (3, 5)$ hallar las componentes del vector bajo una rotación de 30º y comprobar que su módulo no varía

Para este punto es necesario recordar la matriz de rotación.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Vamos entonces a multiplicar nuestro vector por la matriz de rotación para hacer rotar el vector, sin embargo es importante resaltar que la matriz con la que trabajaremos **es una matriz con rotación levógira**.

Recordemos las equivalencias de nuestro ángulo dado:

$$cos(30) = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad sin(30) = \frac{1}{2}$$

Aplicamos.

$$\mathbf{R}(30)\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el vector:

$$\vec{v}_{\mathbf{R}(30)} = \left(\frac{3\sqrt{3}-5}{2}, \frac{3+5\sqrt{5}}{2} \right).$$

Comprobar los módulos

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25}$$

$$= \sqrt{34}.$$

$$\vec{v}_{\mathbf{R}(30)} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{52-30\sqrt{3}+8430\sqrt{3}}{4} = \frac{136}{4}$$

$$= \sqrt{34}.$$