

本地部署 DeepSeek-R1-671B-q4_K_M 完全指南

韩子坚

华中师范大学计算机学院

2025 年 2 月 13 日



Content

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

1 环境说明

硬件环境

软件环境

2 前期准备

3 安装运行

4 其他尝试

5 对话实例

① 环境说明

硬件环境

软件环境

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

硬件环境

- **CPU:** AMD EPYC 7742 64-Core Processor * 2
- **GPU:** NVIDIA A100-SXM4-80GB * 8
- **RAM:** 1.5 TB

1 环境说明

硬件环境

软件环境

2 前期准备

3 安装运行

4 其他尝试

5 对话实例

软件环境

- **OS:** Ubuntu 22.04.5 LTS
- **Container:** Docker 26.1.3
- **LLM Backend:** Ollama 0.5.7 (Python Version)
- **LLM Chat UI:** Open WebUI 0.5.7 (Docker Version)

① 环境说明

② 前期准备

安装 Docker

安装 Ollama + Open Webui

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

① 环境说明

② 前期准备

安装 Docker

直接安装 Docker

安装 Ollama + Open Webui

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

安装 Docker

- 如果是一个空白机器，并且具有 Docker 权限，推荐直接使用 Docker 版本的 Ollama + Open Webui。
- 有 sudo 权限的用户，推荐使用 1panel 的安装脚本。
- 安装 1panel 的同时会自动安装 Docker + Docker Compose。
- 中国大陆境内机器使用 1panel 的安装脚本会自动使用镜像地址安装，免去网络的烦恼。

```
1 curl -sSL https://resource.fit2cloud.com/1panel/package/  
    quick_start.sh -o quick_start.sh && sudo bash quick_start.sh
```

安装 Docker (续)

- 如果不喜欢使用 lpanel 或没有面板安装权限, 可直接安装 Docker。

```
1 export DOWNLOAD_URL="https://mirrors.tuna.tsinghua.edu.cn/docker-  
   ce" # 非中国大陆区域可取消这行  
2 curl -fsSL https://get.docker.com -o get-docker.sh  
3 sudo sh get-docker.sh
```

1 环境说明

2 前期准备

安装 Docker

安装 Ollama + Open Webui

安装 Ollama

安装 Open Webui - 概述

uv pip 方式安装 Open Webui

Docker 方式安装运行 Open Webui

Docker 网络配置 - 访问宿主机网络

Docker 网络配置 - 容器互联

2 安装运行

安装 Ollama + Open Webui

- 如果已有 Ollama，必须升级到最新版本，否则可能不支持 Deepseek R1 架构，升级脚本与安装脚本是相同的。

```
1 curl -fsSL https://ollama.com/install.sh | sh
```

安装 Open Webui

- Open Webui 不建议使用 pip 安装，升级 pip 安装的 Open Webui 出现过数据丢失的情况，建议使用 Docker 安装。
- 如果服务器本身处在 Docker 容器内，或者无法处理后面的网络问题，也可以使用 pip 安装，建议使用 uv。

安装 Open Webui - uv pip 方式

- 适用于服务器本身在 Docker 容器内或无法解决网络问题的场景。
- 推荐使用 uv pip 安装。

uv 不会继承 pip.conf 以及其他 pip 中设置镜像地址的方法，需要另外设置 uv 镜像 (非中国大陆地区可以跳过)

```
1 # vim ~/.config/uv/uv.toml
2
3 [[index]]
4 url = "https://pypi.tuna.tsinghua.edu.cn/simple"
5 default = true
```

安装 Open Webui - uv pip 方式 (续)

```
1 # 安装 uv
2 pip install uv
3 # 创建虚拟环境
4 uv venv --python python3.11
5 # 激活虚拟环境
6 source .venv/bin/activate
7 # 安装 Open Webui
8 uv pip install open-webui
```


安装 Open Webui - Docker 方式

- 使用 Docker 方式安装 Open Webui。

```
1 docker run -d -p 8080:8080 -e HF_ENDPOINT=https://hf-mirror.com/  
  --add-host=host.docker.internal:host-gateway -v open-webui:/app  
  /backend/data --name open-webui --restart always swr.cn-north  
  -4.myhuaweicloud.com/ddn-k8s/ghcr.io/open-webui/open-webui:  
  latest
```

注意: Open Webui 的 Docker image 不在 Docker 官方 hub.docker.com 中，而是在 ghcr.io 中，中国大陆境内无法访问 hub.docker.com，寻常 Docker 镜像站都是镜像于官方 hub.docker.com，可以访问渡渡鸟镜像站：<https://docker.aityp.com/> 查询 Open Webui 的镜像，也可以使用南京大学的 ghcr 同步站：ghcr.nju.edu.cn（实测限速）

Docker 网络配置

- 桥接模式下，容器访问宿主机网络可以使用
`--add-host=host.docker.internal:host-gateway`。
- 但这样并不总是可行，例如机器网络比较复杂或者 Docker 版本比较低等等原因，可以这样做（前提是已经设置OLLAMA_HOST=0.0.0.0）：

Docker 网络配置 - 访问宿主机网络 (续)

查看容器所属网络的网关地址

```
1 docker inspect -f '{{range .NetworkSettings.Networks}}{{.Gateway  
   }}{{end}}' <容器名称或ID>  
2 # 例如: 172.17.0.0/
```

容器内部测试访问

```
1 curl http://172.17.0.0/:宿主机端口
```

- **注意:** 但是这样也未必可联通, 很有可能会被防火墙阻挡, 需要添加放行规则

Docker 网络配置 - 防火墙放行

添加防火墙放行规则 (示例)

```
1 sudo ufw allow proto tcp from 172.17.0.0/16 to any port 11434
2 sudo ufw reload
```

Docker 网络配置 - 容器互联

- 如果 Ollama 和 Open Webui 分属不同 Docker 容器，可以将它们添加到同一个网络，通过容器名: 端口互联。

创建 Docker 网络并连接容器

```
1 docker network create llm
2 docker network connect llm < ollama_id >
3 docker network connect llm < openwebui_id >
```

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

运行 Ollama

使用 Open Webui 对话

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

运行 Ollama

使用 Open Webui 对话

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

运行 Ollama

启动 Ollama 服务

```
1 export OLLAMA_MODELS=/usr/share/ollama/.ollama/models
2 export OLLAMA_HOST=0.0.0.0
3 export OLLAMA_SCHED_SPREAD=1
4 export CUDA_VISIBLE_DEVICES=0,1,2,3,4,5,6,7
5
6 nohup sh -c 'ollama serve' > ollama.log 2>&1 &
```

- 注意:

- OLLAMA_HOST 必须设置为 0.0.0.0, 否则后续 Open Webui 无法访问 Ollama。
- OLLAMA_SCHED_SPREAD 必须设置为 1, 否则无法多卡运行单一模型。

拉取 DeepSeek R1

使用 Ollama 拉取 DeepSeek R1 模型

```
1 ollama pull deepseek-r1:671b # 默认就是 q4_K_M 量化
```

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

运行 Ollama

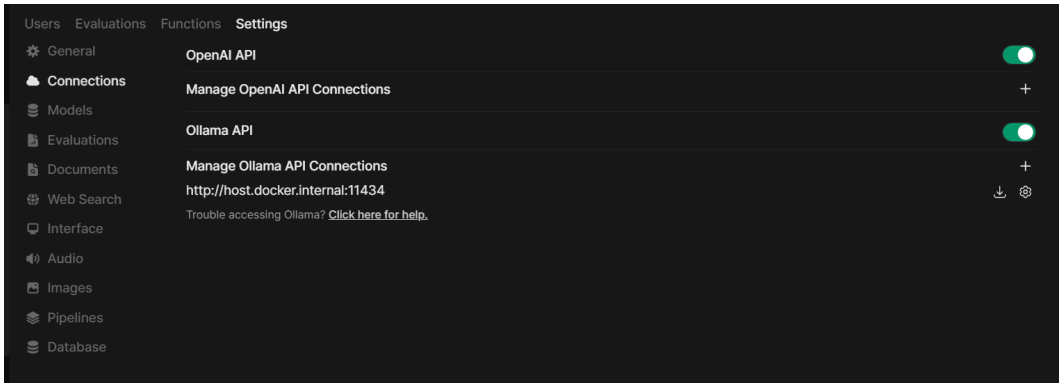
使用 Open Webui 对话

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

使用 Open Webui 对话

Open Webui 后端地址设置



Open Webui 配置详解

- Open Webui 配置分三层：模型级, 账户级, 聊天级。
- 优先级：模型级 > 账户级 > 单次聊天级。
- **单次聊天级 (Per-Chat)**: 聊天右侧 Chat Controls 中设定，仅对当前会话生效，不能覆盖模型预设。
- **模型级 (Per-Model)**: Admin Panel-Settings-Models 中设定，适用于所有使用该模型的聊天，优先级最高。
- **账户级 (Per-Account)**: Settings-Advanced Parameters 中设定，会被模型级配置覆盖。

Open Webui 调整参数

- 8 卡 A100 在设定 Context Length 和 Max Tokens 都为 8k 后可正常推理，每张卡显存占用约为 50-60GB.
- 默认情况下，5min 内如果没有新的对话，模型会从 GPU 中 offload，重新加载至显存需要很长时间。可以在 Settings-Advanced Parameters 中设定 Keep Alive 参数，设为 -1 则用不卸载。
- 如果显存不够，可通过设置 num_gpu 参数来灵活调整 CPU/GPU 推理比例。
 - 例如设为 60 则 60 层加载到 GPU，剩余在 CPU 推理。
- 完成上述配置后，即可在 Open Webui 中与 DeepSeek R1 模型进行对话。

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

模型下载问题

⑤ 对话实例

使用 Ollama 并不是最优选择，无论是速度还是显存占用都是不佳的。

OLLAMA_SCHED_SPREAD=1 本来也是不建议开启的，Ollama 只能用单一的 gguf 格式的模型参数进行推理，但是对于 671 B 这么大的模型来说，全部加载在同一张 GPU 上是不太现实的，只能分担在多张 GPU 上，Ollama 对于一个模型在多卡中推理优化较差，这样做增加了 GPU 之间通信的成本，即使所有参数全部在 GPU 中推理，速度也只有 10-40 tokens/s。

- **vllm** 可能是比 Ollama 更优的选择。
 - 原生支持 safetensor 格式。
 - 但是 671B fp8 太大了，8 卡 a100 也装不下。
- 考虑使用量化模型以降低显存需求。
 - vllm 官网中有一句话，Please note that GGUF support in vLLM is highly experimental and under-optimized at the moment, it might be incompatible with other features.
 - 尝试 1.58 bit 动态量化版本报错 (ValueError: GGUF model with architecture deepseek2 is not supported yet.)。
 - INT4 W4A16 量化可能是可行的方案 (未尝试)。

模型下载问题

- 拉取 1.58 bit 动态量化模型时，hf mirror 速度慢且易断连。
- modelscope 限速在 15MB/s 左右。
- 对于 671B 这么大的模型，可以使用 snapshot_download 下载部分文件夹。

```
1 from huggingface_hub import snapshot_download
2 snapshot_download(repo_id='unsloth/DeepSeek-R1-GGUF',
3                   allow_patterns='DeepSeek-R1-UD-IQ1_S/*', cache_dir='./')
4
5 # modelscope
6
7 from modelscope.hub.snapshot_download import snapshot_download
8 model_dir = snapshot_download(repo_id='unsloth/DeepSeek-R1-GGUF',
9                               allow_patterns='DeepSeek-R1-UD-IQ1_S/*', cache_dir='./')
```

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

2024 AIME I Problems/Problem 4

2025 考研数学一 T18

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

2024 AIME I Problems/Problem 4

2025 考研数学一 T18

2024 AIME I Problem 4

Jen enters a lottery by picking 4 distinct numbers from $S = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$. 4 numbers are randomly chosen from S . She wins a prize if at least two of her numbers were 2 of the randomly chosen numbers, and wins the grand prize if all four of her numbers were the randomly chosen numbers. The probability of her winning the grand prize given that she won a prize is m/n where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.

Q1 deepseek-r1:671b

Thought for 3 minutes ^

"Okay, so Jen plays this lottery by picking 4 distinct numbers from the set $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Then, 4 numbers are randomly chosen from S as well. She wins a prize if at least two of her numbers match the drawn numbers, and she gets the grand prize if all four match. The question is asking for the probability that Jen wins the grand prize given that she won at least some prize (i.e., at least two matches). They want this probability expressed as a reduced fraction m/n , and then we need to find $m + n$.

First, let me make sure I understand conditional probability here. So, we're looking for $P(\text{Grand Prize} \mid \text{At Least Two Matches})$, which by definition is equal to the probability of both events happening divided by the probability of the conditioning event (winning at least a prize). But since if you win the grand prize, you have automatically won at least two matches (in fact, all four), so this simplifies to $P(\text{Grand Prize}) / P(\text{At Least Two Matches})$.

So my plan is:

1. Calculate the total number of possible draws: Since they are choosing 4 numbers from 10, that's $C(10, 4)$. Let me confirm what notation we use here. I think it's combination, right? So $C(n, k) = n! / (k!(n - k)!)$.

So total possibilities for the draw is $C(10, 4)$, which should be 210.

2. Then compute $P(\text{Grand Prize})$: That's just 1 divided by this number because there's only one winning combination that matches all four of her numbers. So probability is $1 / 210$.

Wait but hold on: Wait, Jen picks her own four numbers first. But the problem says "4 numbers are randomly chosen from S ". Does she pick hers first? Yes, and then if they match... so actually, the total number of possible draws is $C(10, 4) = 210$. The probability that all four of her numbers were drawn would be how many combinations contain exactly those four numbers: which is just 1 (assuming Jen's numbers are fixed). So yeah, $P(\text{Grand Prize}) = 1 / 210$.

3. Then compute $P(\text{At Least Two Matches})$: This is the sum over $k=2$ to 4 of $C(4, k) \cdot C(6, 4-k)$, divided by total number of possible draws $C(10, 4)$. Because she has 4 numbers picked; if we want exactly k matches, that's choosing k correct numbers from her 4 and $(4 - k)$ incorrect numbers from the remaining 6. Then sum this for $k=2$ to 4.

Let me verify:

- For exactly 2 matches: $C(4, 2) \cdot C(6, 2)$. Because choose 2 of Jen's numbers and 2 others.
- Exactly 3 matches: $C(4, 3) \cdot C(6, 1)$
- Exactly 4 matches: $C(4, 4) \cdot C(6, 0) = 1$

So total favorable for at least two is sum from $k=2$ to 4 of the above. Let me compute each:

First, calculate combinations.

For exactly 2:

$C(4, 2) = 6$

华中师范大学计算机学院

37 / 54

$C(8,2)=15$
 Multiply: 90
 Exactly 3:
 $C(4,3) = 4$
 $C(6,1) = 6$
 Multiply: 24
 Exactly 4:
 $1+1=1$
 So total is $90 + 24 + 1 = 115$.
 Therefore $P(\text{At Least Two Matches}) = 115 / C(10,4)$. But $C(10,4)$ is 210. So that's $115/210$. Let me check if this fraction reduces: both numerator and denominator divided by 5? Wait $215 \div 5 = 23 \div 5$; wait no.
 Wait 105 divides into 21, right?
 But first let's see GCD of 114 (wait no, $90 + 24$ is 114)? No. The total was 115. So yes:
 So 115 and 210:
 Divide numerator and denominator by 5? Let's check if both are divisible.
 $115 \div 5 = 23$; $210 \div 5 = 42$. Yes! So 2 divides into $230 / 420$?
 Wait, sorry, simplifying $115/210$ divided by GCD(115,210). The factors of 115: 1, 5, 23, 115
 Factors of 210: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, ..., etc. Common factor is 5.
 So divide numerator and denominator by 5:
 $23 / 42$. So $23/42$.
 Therefore $P(\text{At Least Two}) = 23/42$? Wait wait but hold on:
 Wait let's check again: $C(4,2)C(6,2) \sim 6 \cdot 15 = 90$
 $C(4,3)C(6,1) = 4 \cdot 6 = 24$
 $C(4,4)C(6,0) = 1$. Total is 115.
 Total possible draws are $C(10,4) = 210$. So $115/210$ simplifies to dividing numerator and denominator by 5: $115 \div 5 = 23$; $210 \div 5 = 42$. Yes, $23/42 = 0.547...$
 So $P(\text{Grand Prize} | \text{At Least Two})$ is $[1/210]$ divided by $[23/42]$. Which equals $(1/210) / (23/42) = (42/210) \cdot (1/23)$. Simplify: 42 and 210 share a factor of 42? Let's see.
 Wait, actually:
 Let me compute numerator/denominator step-wise.
 $(1/210) \div (23/42) = (1/210) \cdot (42/23)$
 Simplify this fraction. So the 420 in denominator cancels with the 417
 Wait no, wait:
 The 21 in 120? Let's think about it.
 Multiplying numerator: $1 \cdot 42 = 42$
 Multiplying denominator: $1 \cdot 42 = 42$
 Canceling: $310 \cdot 23 \cdot 42 / 31 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 42 = 310 \cdot 23 = 4200 + 6300 = 10500$. So the fraction is $42/10500$

2024 AIME I Problem 4 (续)

Denominator $2 \cdot 1023 + 12 \cdot 1026 + 13 \cdot 210 + 12 \cdot 1019 = 4200 + 1236 + 2730 + 12228 = 19556$, so the fraction is $42/19556$.

Simplify:

Divide numerator and denominator by 6? Let's see if that works.

$42 \div 6 = 7$, $19556 \div 6 = 3259$. Then we have $7/3259$.

Check GCD of 7 and 3259: Since 7 divides into 3259 so 3259 is divisible by 7 but $7 \cdot 465 = 3255$ not sure.

Wait 85 divided by 7? Wait no:

But 710 over here?

No, wait 807. But after divide $19556 \div 7 = 2793$. So 7 and 3259.

Since 735 is $7 \cdot 105$; so $705 = 700 + 5$, but 704...

Alternatively, check if 785 divided by 7: $800 \div 7 = 114.28$, which doesn't fit into 784 ($7 \cdot 112$). But wait $80(5) = 70 \cdot 11.5$? Not integer.

So GCD is 1 and ??

Wait no:

805 divide by 7: $700 = 100 \cdot 7$; $105 = 15 \cdot 7$ so total 115, so yes! Wait 705 divided by 7?

No sorry, in denominator after dividing $19556 \div 7 = 2793$. So check if 5 divides into that? $8 \cdot 5 = 40$ not divisible by 3. But does $800 \div 5 = 160$ which ends with a 5 so yes.

Wait no: Wait 70 over here, sorry:

So after dividing numerator and denominator by 7 we get $7/3259$.

Then check if GCD(7,3259): Since $700 = 100 \cdot 7$; then $705 = 700 + 5$. So 800? No.

Hold on: Compute 8 times 10 is 80.

Wait 805 divided by 7:

Divide 70 into each part: $735 \div 7 = 105$.

Then remaining: 750?

No, let me do straight division:

How many time does 7 go into $700: 100 \cdot 7 = 700$. Then remainder 5. So no; so GCD(7,3259)=7.

Because $800/7$? Not exact. Wait sorry, check if 8 times is:

Wait actually: Let's compute $735 \div 7 = 105$ (since $70 \cdot 10 = 700$). But then $705 = 7 \cdot 100 + 35$. Therefore $700 \div 7 = 100$ and 5.

No. For example,

$805 \div 7$.

First divide 80 by 7 which gives 11 with remainder 3, bring down the five: $30 \div 5 = 6$. Then 35? Wait no:

Wait wait 805 divided by 7 is as follows:

- Start from left digit (8). 7 goes into 8 once, write 1. Remainder 1.

Bring next digit 0: making 10. 7 into 10 once, remainder 3.

Next digit 5 bring down; makes 35. 7 divides into 35 five times. So total is 115. Therefore, $805 = 7 \cdot 115$. Thus GCD(7,3259)=7 because 7 divides both numerator (7) and denominator (7115). Hence

2024 AIME I Problem 4 (续)

Simplify fraction: $\frac{7}{805} = \frac{1}{115}$. Because divide numerator and denominator by 7.

Thus the probability of winning grand prize given that she won a prize is $\frac{1}{115}$. So $m=1, n=115$, which are coprime.

But wait this contradicts something? Let me double-check steps because I might have messed up.

Wait:

Probability (Grand Prize)/ Probability (At Least Two Matches) = $\frac{1/210}{23/42}$. Which is equal to $\frac{1+42}{(210 \div 23) \cdot 42} = \frac{43}{4830}$. Simplify that. Then divide numerator and denominator by 6: $\frac{7}{805}$, then check if $\text{GCD}(7, 805)$: As above, since 8 times? Wait no:

Wait wait, in previous thought, I realized 805 divided by 7=115. So 4×100 is...?

No need to confuse here.

So the fraction after dividing by 6 was $\frac{7}{805}$. Then recognize that both are divisible by 7: so divide numerator and denominator by 7:

Numerator becomes 1 (since $7 \div 7 = 1$). Denominator becomes 115 ($805 \div 7 = 115$). So yes, simplifies to $\frac{1}{115}$.

Therefore m/n is $\frac{1}{115}$ which is reduced as coprime because $\text{gcd}(1, 115) = 1$. Therefore answer is $1 + 115 = 116$.

But wait the problem says "the probability of her winning the grand prize given that she won a prize is m/n where m and n are relatively prime positive integers. Find $m+n$."

Hence $m=1, n=115$? That leads to sum 116?

Wait but let me check if my calculations are correct again because sometimes these combinatorial problems can be tricky.

First, total number of possible draws: $C(10, 4) = 210$. Correct.

Number of grand prize winners: only one set (assuming Jen's numbers are fixed). So probability is $1/210$. That seems right.

Then the number of ways to have at least two matches:

Compute for $k=2$: $C(4, 2)C(6, 2) = 6 \cdot 15 = 90$

$k=3$: $C(4, 3)C(6, 1) = 4 \cdot 6 = 24$,

$k=4$: 1. Total favorable is 115.

Therefore probability of at least two matches: $\frac{115}{210}$ simplifies to $\frac{23}{42}$ (divided by 5).

Then conditional probability $\frac{1/210}{23/42}$.

Which is equal to $\frac{1+42}{(210 \div 23) \cdot 42} = \frac{43}{4830}$. Simplify, divide numerator and denominator by 6 gives $\frac{7}{805}$. Then divide by 7: $\frac{1}{115}$.

So yeah $m=1, n=115$ sum 116. Seems correct.

But let me check alternative approach using conditional probability via counting number of favorable outcomes over possible given the condition.

Alternative Approach:

Given that she already has won a prize (i.e., at least two matches), we need to compute how many such possible draws satisfy this and then among those, how many have all four matched.

Total possibilities where she wins a prize: 115 as computed. The grand prize is 1 of these outcomes because there's only

2024 AIME I Problem 4 (续完)

one way for all her numbers to be drawn. Hence the conditional probability would simply be $1/115$ which matches previous result. So here we can see directly that once you condition on having at least two, how many possible draws are in that pool: 115. The grand prize is 1 of them, so indeed it's $1/115$.

Therefore $m=1, n=115$; sum 116. Hence the answer should be `\boxed{116}`.

Final Answer

The value of $m + n$ is `\boxed{116}`.

Jen enters a lottery by picking 4 distinct numbers from the set $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. The probability of her winning the grand prize given that she won a prize (at least two matches) needs to be found.

First, we calculate the total number of possible draws:

$$\binom{10}{4} = 210$$

The probability of winning the grand prize is:

$$\frac{1}{210}$$

Next, we compute the probability of winning at least a prize (at least two matches). This involves summing the combinations for exactly 2, 3, and 4 matches:

- For exactly 2 matches: $\binom{4}{2} \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$
- For exactly 3 matches: $\binom{4}{3} \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$
- For exactly 4 matches: 1

Total favorable outcomes for at least two matches:

$$90 + 24 + 1 = 115$$

The probability of winning at least a prize is:

$$\frac{115}{210}$$

Simplifying this fraction by dividing both the numerator and denominator by their greatest common divisor (5):

$$\frac{23}{42}$$

Using conditional probability, we find the probability of winning the grand prize given that she won at least a prize:

$$\frac{\frac{1}{210}}{\frac{23}{42}} = \frac{1}{115}$$

Here, $m = 1$ and $n = 115$, which are relatively prime. Thus, $m + n = 1 + 115 = 116$.

The final answer is:

$$\boxed{116}$$

✎ □ ◀ ▶ 🔍 ↺ ↻

输出情况

Listing 1: 2024 AIME I Problem 4 生成情况

```
1 response_token/s: 14.55
2 prompt_token/s: 54.51
3 total_duration: 302493858721
4 load_duration: 88603384116
5 prompt_eval_count: 124
6 prompt_eval_duration: 2275000000
7 eval_count: 3079
8 eval_duration: 211613000000
9 approximate_total: 0h5m2s
```

① 环境说明

② 前期准备

③ 安装运行

④ 其他尝试

⑤ 对话实例

2024 AIME I Problems/Problem 4

2025 考研数学一 T18

2025 考研数学一 T18

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 记 $g(x, y) = f(\frac{x}{y})$, 若 $g(x, y)$ 满足

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1,$$

且 $g(x, y) = 1, \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x,y)} = \frac{2}{x}$, 求 $f(u)$.

01

deepseek-r1-671b

Thought for 5 minutes ^

“嗯, 好的, 我现在要解决的问题是关于一个已知函数 $g(x, y)$ 满足某个偏微分方程以及初始条件的情况下, 求出原来的函数 $f(u)$ 。题目是说, 已知 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 并且定义了 $g(x, y) = f(x/y)$, 然后这个 $g(x, y)$ 满足如下的偏微分方程:

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1,$$

同时还有条件: 当某个条件下 (这里可能需要确认), 即 $g(x, y) = 1$, 以及关于 g 对 x 的偏导数在点 (x, y) 处为 $2/x$ 。需要求 $f(u)$ 。

首先我要理清题目的条件和要求的目标。

第一步应该是理解函数 g 的结构和变量替换的问题。已经知道 $g(x, y) = f(x/y)$, 也就是说这是一个复合函数, 其中 $u = x/y$ 。因此可能需要将原来的偏微分方程转化为关于 f 的常微分方程或者其他形式来解出 $f(u)$ 。

首先考虑用链式法则来计算各个导数项。

令 $u = x/y$, 那么 $g(x, y) = f(u)$ 。现在需要求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ 。然后将这些代入方程中得到关于 f 的微分方程, 然后解这个方程并结合给定的初始条件来得到 $f(u)$ 。

首先计算一阶导数:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot (1/y)$$

$$\text{同样, } \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u) \cdot (-x/y^2)$$

接下来需要求二阶导数和混合导数。

先算 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$:

对 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 再关于 x 求一次导, 得到:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = [f''(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}] \cdot (1/y) + f'(u) \cdot 0 \quad (\text{因为 } y \text{ 是关于 } x \text{ 的变量吗? 不, 这里可能有问题。或者应该注意到在偏导数中保持另一个变量不变。})$$

不过实际上当计算 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ 时, 这里的表达式是 $d/dx [f'(u)/y]$, 而因为 y 在这里被当作独立于 x 的变量来处理, 所以 $1/y$ 相对于 x 来说

2025 考研数学一 T18 (续)

是一个常数, 因此:

$$\partial^2 g / \partial x^2 = (1/y) * d/dx [f'(u)] = (1/y) / f'(u) \partial u / \partial x = (1/y) \{ f'(u) * 1/y \} = f''(u) / (y^2)$$

接下来算混合导数 $\partial^2 g / (\partial x \partial y)$, 也就是先对 x 求导, 再对 y 求导:

或者也可以先对 y 求导, 但按题目给出的顺序是先 x 后 y .

原来的表达式是 $\partial / \partial y [\partial g / \partial x]$, 已经知道 $\partial g / \partial x = f(u) / y$. 现在对这个结果关于 y 求导:

首先写出表达式: $\partial / \partial y [f(u) / y]$

应用乘积法则或者商数法则, 即导数为 $[d/dy (f(u))] * (1/y) + f(u) * (-1/y^2)$

计算第一部分: $d/dy (f(u)) = f''(u) * \partial u / \partial y = f''(u) * (-x / y^2)$

所以整体的混合导数是:

$$[f''(u) * (-x / y^2)] / (1/y) + f(u) / (-1/y^2)$$

$$= -x / (y^3) f''(u) - f(u) / y^2$$

接下来计算 $\partial^2 g / \partial y^2$:

先求一阶导数 $\partial g / \partial y = f(u) * (-x / y^2)$

再对 y 求导:

$$d/dy [f(u) * (-x / y^2)] = (-x) [d/dy (f(u) / y^2)]$$

用乘积法则, 得到: $(-x) [d/dy (f(u)) * 1/y^2 + f(u) * d/dy (1/y^2)]$

首先计算 $d/dy (f(u)) = f''(u) * (-x / y^2)$

然后 $d/dy (1/y^2) = -2/y^3$

代入得到:

$$(-x) [(f''(u) * (-x / y^2)) * 1/y^2 + f(u) * (-2/y^3)]$$

$$= (-x) [(-x) f''(u) / y^4 + (-2 f(u)) / y^3]$$

展开后得:

$$(-x) (-x) f''(u) / y^4 + (-x) (-2 f(u)) / y^3$$

$$= x^2 f''(u) / (y^4) + 2x f(u) / y^3$$

不过可能我的计算有些错误, 需要重新仔细算一遍:

2025 考研数学一 T18 (续)

先对表达式 $\partial g / \partial y = -x/y^2 \cdot f'(u)$, 求二阶导数:

首先写成: $-x f'(u) y^{-2}$

所以导数为 $d/dy [-x f'(u) y^{-2}]$

应用乘积法则, 这里的变量是 y , 而 x 被视为常数。因此,

$$= -x [d/dy(f'(u)) \cdot y^{-2} + f'(u) \cdot d/dy(y^{-2})]$$

首先计算 $d/dy(f'(u)) = f''(u) \cdot du/dy = f''(u) \cdot (-x/y^2)$

$$\text{而 } d/dy(y^{-2}) = -2 y^{-3}$$

所以代入:

$$= -x [(f''(u) \cdot (-x / y^2)) \cdot y^{-2} + f'(u) \cdot (-2 y^{-3})]$$

$$= -x [(-x f''(u)) / (y^4) - 2 f'(u) / y^3]$$

$$= -x^2 (-x f''(u)) / y^4 - (-x) \cdot (2 f'(u)) / y^3$$

即:

$$= x^2 f''(u) / (y^4 \cdot y^{??}) \text{ 不对, 这里的分母是四次吗?}$$

仔细看看: 第一项里的 $(-x)$ 乘上 f'' 的导数是 $-x [(f'' \cdot (-x/y^2)) \cdot y^{-2}]$?

是的, 所以第一个项的系数应该是:

$$-f'' \cdot (-x / y^2) \cdot y^{-2} = f'' \cdot x / (y^4)$$

然后乘以 $-x$ 的话, 即整个是 $-x f'' \cdot (x) / (y^4 \cdot y^4) = -x^2 f''(u) / (y^8)$?

不, 这里我需要仔细代入步骤:

$$\text{原式: } -x [(-x f''(u)) / y^2 \cdot (1/y^2) + f'(u) \cdot (-2/y^3)]$$

也就是将表达式代入后变成:

$$= -x [(-x f''(u)) / (y^4) - 2 f'(u) / y^3]$$

然后分配率法得:

$$= -x^2 (-x f''(u)) / y^4 - x^2 (-2 f'(u)) / y^3$$

也就是,

$$= (x^2 f''(u)) / y^4 + (2x f'(u)) / (y^3)$$

$$\text{所以 } \partial^2 g / \partial y^2 = (x^2 f''(u)) / (y^4) + (2x f'(u)) / (y^3)$$

2025 考研数学一 T18 (续)

现在将这些代入原偏微分方程:

左边是 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

分别计算每项.

首先, 第一项: x^2 乘以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = x^2 \cdot (f''(u)/y^2)$

即 $(x^2 / y^2) f''(u)$

第二项是 xy 乘以混合导数:

之前求的混合导数是 $-x/(y^3) f''(u) - f'(u)/(y^2)$, 因此,

$xy \cdot [-x/(y^3) f''(u) - f'(u)/y^2]$

$= xy \cdot [-x f''(u)/y^3] + xy \cdot [-f'(u)/y^2]$

$= (-x^2 y / y^3) f''(u) - (xy f'(u)) / y^2$

化简:

$= (-x^2/2y^2) f''(u) - (x/y) f'(u)$

第三项是 y^2 乘以 $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, 即,

$y^2 \cdot [x^2 f''(u)/y^4 + 2x f'(u)/y^3]$

$= y^2 \cdot [x^2 f''(u)/y^4 + y^2 \cdot (2x f'(u)) / y^3]$

化简:

$= x^2 f''(u) / y^2 + 2x f'(u) / y$

现在将三项相加:

左边 = [第一项] + [第二项] + [第三项]

即,

$(x^2/y^2) f'' + (-x^2/2y^2) f'' - (x/y) f' + x^2/y^2 f'' + 2x/y f'$

先看前两项的第一部分: $(x^2/y^2) f'' - (x^2/2y^2) f''$, 加上第三项的 $x^2/y^2 f''$

所以第一部分应该是:

$(1)x^2/y^2 f'' - 1x^2/2y^2 f'' + 1x^2/y^2 f'' = x^2/(y^2) f''$

然后是第二部分: $-(x/y) f' + 2x/y f' = (+x/y) f'$

2025 考研数学一 T18 (续)

因此总和左边整体是：

$$(x^2 / y^2) f''(u) + (x/y) f'(u)$$

根据题目的等式，这个等于1，所以有：

$$(x^2 / y^2) f''(u) + (x/y) f'(u) = 1$$

现在需要将这个方程用变量替换为关于u的常微分方程。因为 $u = x / y$ ，我们可以尝试将自变量转换为u。

令 $u = x/y$ ，那么可以将所有的变量转化为以u的形式表达。例如，在左边的项中：

$$(x^2 / y^2) f''(u) + (x/y) f'(u) = 1$$

注意到左边可以写成 $u^2 f''(u) + u f'(u)$ ，因为 $u = x/y$ ，所以 $x = uy$ ，

代入得到：

$$(uy)^2 / y^2 * f''(u) + (uy)/y * f'(u)$$

也就是，

$$u^2 f''(u) + u f'(u) = 1$$

因此，方程变为： $u^2 f''(u) + u f'(u) = 1$ 。

这是一个关于自变量为u的常微分方程。现在需要解这个ODE来找到f(u)。

首先改写方程为：

$$u^2 f'' + u f' = 1,$$

或者等价地：

$$u^2 f''(u) + u f'(u) - 1 = 0$$

可以尝试将变量替换，令 $v = f'(u)$ ，则方程变成关于v的方程：

$$u^2 v' + u v = 1,$$

即： $u^2 dv/du + u v = 1$ 。

或者除以u，

$$\text{得到：} u (dv/du) + v = 1/u.$$

不过这可能更直观地用另一种变量替换。例如，观察左边是否为某个导数的形式。让我们重新整理方程：

将原式写为：

2025 考研数学一 T18 (续)

$$u^2 f'' + u f' = 1$$

可以视为欧拉-柯西方程的一种类型，通常这类方程的解可以通过假设解的形式为 $f(u)=u^k$ 来求得齐次解，但在这里非齐次项是常数吗？不对，右边是1。或者更准确地说，原方程为：

$$u^2 \frac{d^2 f}{du^2} + u \frac{df}{du} = 1$$

不过现在先处理这个ODE。

令 $p=f'(u)$ ，则方程变为：

$$u^2 p' + u p = 1.$$

这是一个一阶线性常微分方程关于 $p(u)$ 。

$$\text{标准形式是: } p' + (1/u) p = 1/(u^2)$$

这里除以 u^2 ：

$$p' + (1/u)p = 1/u^2$$

积分因子 $\mu(u) = \exp(\int (1/u) du) = \exp(\ln u) = u$ 。

两边乘以积分因子：

$$\mu(u)p' + \mu(u)(1/u)p = \mu(u)/(u^2)$$

即，

$$d/du [\mu(u) \cdot p] = 1/(u)$$

所以左边是 $d/du [u \cdot p]$ ，右边为 $1/u$ 。

对两边积分：

$$\int d(u \cdot p) = \int (1/u) du + C$$

得到： $u \cdot p = \ln |u| + C$ 。

$$\text{解得 } p = f'(u) = (\ln u + C)/u.$$

然后求 $f(u)$ 需要再次积分：

$$f(u) = \int [(\ln u + C)/u] du$$

令 $t = \ln u$ ，那么 $dt = (1/u) du$ ，所以积分变为：

$$\int (t + C) dt = \frac{1}{2} t^2 + Ct + D$$

即，

2025 考研数学一 T18 (续)

$$f(u) = \frac{1}{2} (\ln u)^2 + C \ln u + D.$$

现在需要确定常数C和D.

接下来应用题目给出的条件. 然而题目中的条件是当某个条件下的 $g(x, y)$ 等于1, 以及偏导数的值在点处的值为 $2/x$. 可能这里需要注意条件的转换问题.

但题目中给出的具体条件是什么? 再仔细看一下:

题目说: “且 $g(x, y) = 1, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{x}$ ”

这可能是在某个特定的曲线上的条件吗? 通常这种条件下, 可能需要更明确的条件. 但原文中是“且”连接的这两个条件, 所以可能是指对于所有满足 $g(x, y)=1$ 的点处, 同时有 $\partial g/\partial x=2/x$?

或者可能是存在某些矛盾的条件, 需要澄清.

不过另一个可能的理解是, 在某个具体的位置上的值, 比如当 $u=x/y$ 取特定值时 $f(u)$ 的值以及其导数. 例如可能在点 (x, y) 满足某种关系时, 如可能是在 $x=y$ 的情况下? 但题目并没有明确指出条件应用的具体位置, 所以需要更仔细的分析.

或者这些条件是针对某些具体的参数而言的?

这里可能存在翻译或题意的理解问题, 所以我需要再分析一下:

由于 $g(x, y)=f(x/y)$, 而当它满足“ $g(x, y)=1$ ”和在该点的导数. 这里的条件可能对应于某个特定的点 (x_0, y_0) , 或者在某种条件下的函数值, 但由于题目没有给出具体的点, 所以可能需要进一步推断.

或者这实际上是初始条件应用于当 $u=x/y=1$ 的时候? 比如在 $u=1$ 时 $f(u)$ 的值以及导数值?

这里有可能存在误解, 因为如果 $g(x, y)=1$, 也就是 $f(x/y)=1$. 假设这可能对应于某个特定位置的情况, 例如当 $x=y$ 时的情形, 即此时 $u=x/y=1$.

而同时在该点处 (可能是在 $x=y$ 的情况下), 求得的偏导数 $\partial g/\partial x$ 的值是 $2/x$. 这时需要将条件转化为关于 $f(u)$ 的条件:

例如在 $u=1$ 时, 可能有某些约束条件. 让我们尝试这样处理.

假设当 $u=1$ 即 $x/y=1$ 也就是 $y=x$ 时的位置处, 应用给定的条件: $g(x, x)=f(1)=1$.

同时在该点处的偏导数 $\partial g/\partial x$ 的值是 $2/x$.

现在计算在点 (x, x) 处的偏导数:

因为对于一般的 (x, y) , 有 $\partial g/\partial x = f'(u) \cdot 1/y$.

所以在点 (x, x) , $y=x$, 所以这里的导数是 $f'(1)/x$. 题目中说这个值等于 $2/x$,

即: $f'(1)/x = 2/x \Rightarrow f'(1)=2$.

2025 考研数学一 T18 (续)

另外在 $u=1$ 时, $g(x, x)=f(1)=1$. 因此得到:

当 $u=1$ 时,

$f(1)=1$,

而

$f'(1)=2$.

现在回到解出的通解: $f(u)=\frac{1}{2}(\ln u)^2 + C \ln u + D$.

我们需要应用这两个条件来确定常数 C 和 D . 注意这里是在 $u=1$ 处的条件和导数, 因此需要代入 $u=1$:

首先计算 $f(1)$:

$f(1) = \frac{1}{2}*(0)^2 + C*0 + D = D = 1 \Rightarrow D=1$.

接下来求导: $f'(u) = (\ln u)/u * (1/u)$? 不, 让我重新算一下导数:

$f(u) = (1/2)(\ln u)^2 + C \ln u + D$

所以 $f'(u) = (1/2)*2(\ln u)/(u) + C(1/u) = (\ln u)/u + C/u$.

在 $u=1$ 时, 代入得: $f'(1) = 0 + C*1 \Rightarrow C=2$ (因为题目条件给出 $f'(1)=2$)

所以解得:

$f(u) = (1/2)(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$

不过需要检查这个结果是否符合原方程以及导数的计算。

现在将代入常微分方程验证是否正确。例如, 在 ODE 中: $u^2 f'' + u f' = 1$.

先算二阶导数:

$f'(u) = (\ln u)/u + 2/u = (\ln u + 2)/u$

然后 $f'(u)$ 的导数为:

使用商数法则: $[d/du (\ln u + 2)] * (1/u) - (\ln u + 2)*(1/u^2)$

即,

$[(1/u)/(1/u) - (\ln u + 2)/u^2]$

$= 1/u^2 - (\ln u + 2)/u^2 = [1 - \ln u - 2]/u^2 = (-1 - \ln u)/u^2$.

代入原 ODE 左边:

2025 考研数学一 T18 (续)

$$u^2 \cdot f'(u) + u/f(u) = u^2(-1-\ln u)/(u^2) + u^2(\ln u+2)/u$$

$$= (-1 - \ln u) + (\ln u + 2) = [-1 - \ln u] + [\ln u + 2] = (-1+2) + (-\ln u + \ln u) = 1.$$

满足等式右边为1, 正确。因此解是正确的。

另外检查初始条件:

当 $u=1$ 时,

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot (0)^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$f'(1) = (0 + 2)/1 = 2. \text{ 符合题目要求的结果。}$$

所以最终得到函数是 $f(u) = (1/2)(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$.

可能需要再整理一下:

$$\text{或者写成: } f(u) = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$$

不过可能需要检查是否存在其他可能的解, 或者在求解ODE过程中是否有遗漏的情况。但根据我们的步骤和验证过程是正确的。

因此最终的答案应该是 $f(u) = (1/2)(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$.

当然也可以把它写成更简洁的形式:

$$f(u) = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$$

这个表达式满足所有的条件, 同时代入原偏微分方程之后也成立。因此是正确的解。

答案

$$f(u) = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + 2 \ln u + 1$$

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且定义 $g(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, 满足偏微分方程:

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1,$$

以及条件 $g(x, y) = 1$ 和 $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x,y)} = \frac{2}{x}$, 求函数 $f(u)$.

首先, 令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $g(x, y) = f(u)$. 计算各阶偏导数:

1. 一阶偏导数:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

2. 二阶偏导数:

2025 考研数学一 T19 (续完)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{f''(u)}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{xf''(u)}{y^3} - \frac{f'(u)}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{x^2 f''(u)}{y^4} + \frac{2xf'(u)}{y^3}$$

将这些偏导数代入原方程并化简得到关于 u 的常微分方程:

$$u^2 f''(u) + u f'(u) = 1$$

解此常微分方程, 令 $p = f'(u)$, 则方程变为一阶线性微分方程:

$$u^2 p' + up = 1$$

1997-1998

$$p = \frac{\ln u + C}{u}$$

积分得到 $f(u)$:

$$f(u) = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + C \ln u + D$$

应用初始条件: 当 $u = 1$ 时, $g(x, x) = f(1) = 1$ 和 $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x, x)} = \frac{2}{x}$, 即 $f'(1) = 2$.

解得:

$$D = 1, \quad C = 2$$

因此, 函数 $f(u)$ 为:

$$f(u) = \left[\frac{1}{2} (\ln u)^2 + 2 \ln u + 1 \right]$$

输出情况

Listing 2: 2025 考研数学一 T18 生成情况

```
1 response_token/s: 13.96
2 prompt_token/s: 60.25
3 total_duration: 419088681937
4 load_duration: 74808920509
5 prompt_eval_count: 144
6 prompt_eval_duration: 2390000000
7 eval_count: 4774
8 eval_duration: 341887000000
9 approximate_total: 0h6m59s
```

Thank you!