第 4 次作业

截止时间：2024. 10. 08（周二）

姓名：郑 晓 旸
学号：202111030007
成绩：____________

第 1 题 得分: ________. 设 $T^{ab} = T^{[a,b]}$, 证明：$T^{ab}\omega_a\omega_b = 0$.

解:

$$T^{ab}\omega_a\omega_b = T^{ab}\omega_{[a}\omega_{b]} = \frac{T^{ab}\omega_a\omega_b - T^{ab}\omega_b\omega_a}{2} = 0 \tag{1}$$

□

第 2 题 得分: ________. 已知惯性系 S 和 S' 满足洛伦兹变换，其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 质点在 S' 系的四速度为 $v^a = (\frac{\partial}{\partial t'})^a$, 求证其在 S 系的四速度为：$v^a = \gamma(\frac{\partial}{\partial t})^a + \gamma v(\frac{\partial}{\partial x})^a$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases} \tag{2}$$

解: 本题中使用 $c = 1$, 因此 $\beta = -v$, 由 S' 到 S 的洛伦茨变换参数形式为：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

在 S' 系下，四速度的分量为：

$$v'^\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

因此在 S 系下的四速度为：

$$v^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

因此有：

$$v^a = \gamma(\frac{\partial}{\partial t})^a + \gamma v(\frac{\partial}{\partial x})^a \tag{6}$$

□

第 3 题 得分: ________. 在地面系，静止的物体 A 在 x 方向受到恒力 $\overrightarrow{F}$，求地面系中物体的运动轨迹；
设物体 B 与物体 A 同时开始运动，B 沿着 y 方向匀速直线运动，以 B 为参考系，求 B 参考系中 A 的速度和运动轨迹。

解: 在地面系中，物体 A 受到的恒力为 $\overrightarrow{F} = F\hat{i}$，因此有：

$$\frac{dp^x}{dt} = \frac{d\gamma m u^x}{dt} = F \tag{7}$$

□

其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, 这里取 $c = 1$. 我们得到参数方程：

$$\gamma m u^x = Ft \tag{8}$$

展开得到：

$$\frac{dx}{dt} = u^x = \frac{Ft}{\sqrt{m^2 + F^2 t^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}}} \tag{9}$$

积分得到：

$$x = \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \tag{10}$$

我们可以写出 A 的四位置：

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

在 B 参考系中，使用从地面系到 B 系的参数形式洛伦兹变换，其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$：

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

得到 A 在 B 参考系中的四位置：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma t \\ \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \\ -\gamma v t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

因此 A 在 B 参考系中的速度为：

$$\begin{aligned} v'^x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{t'}{\sqrt{\gamma^2 t'^2 + \gamma^4 \frac{m^2}{F^2}}} \\ v'^y &= -v \end{aligned} \tag{14}$$