

非线性电路混沌及其同步控制

一、引言

非线性科学的萌芽期可以追溯到19世纪末20世纪初，法国数学家庞加莱在解决天体力学中的三体问题时提出了庞加莱猜想，他把动力学系统和拓扑学有机地结合起来，并指出三体问题中，在一定范围内，其解是随机的。但是，非线性科学的真正建立是在20世纪六七十年代。1963年，美国气象学家洛伦茨（Lorenz）在《确定论的非周期流》一文中，给出了描述大气湍流的洛伦茨方程，并提出了著名的“蝴蝶效应”，从而揭开了对非线性科学深入研究的序幕。非线性科学被誉为继相对论和量子力学后，20世纪物理学的“第三次重大革命”。由非线性科学所引起的对确定论和随机论、有序与无序、偶然性与必然性等范畴和概念的重新认识，形成了一种新的自然观，深刻地影响人类的思维方法，并涉及现代科学的逻辑体系的根本性问题。

混沌是非线性动力学系统所特有的运动形式。奔腾的溪流、缭绕的清烟、经济的波动、心脏的纤颤以及大脑的脑电等，这些变化莫测但又错落有致的现象都与混沌有关。混沌揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性、确定性与随机性的统一，有序与无序的统一。科学地讲，混沌是由确定性系统产生的随机现象，表现为系统相空间轨道呈现出高度不稳定性。随时间的发展，相邻轨道间的距离可能以指数形式扩大，初始任何微小的扰动都会在发展中带来完全不同的结果，这就是系统行为对初始条件的敏感性，即所谓的蝴蝶效应。但系统的确定性决定了这是一种内在的随机性，它与噪声有本质的区别，混沌不等于无序。

迄今为止，最丰富的混沌现象是在非线性振荡电路中观察到的，这是因为电路可以用精密的元器件控制，因此，可以通过精确地改变实验条件得到丰富的实验结果。蔡氏电路是美国加州大学伯克利分校的华裔科学家蔡少棠设计的能产生混沌行为的最简单的电路，它是熟悉和理解非线性现象的一个典型电路。通过蔡氏电路参数的改变可以实现倍周期分岔到混沌，再到周期窗口的全过程。

自从1990年Pecora和Carroll提出了实现混沌同步的驱动—响应方法，混沌的同步理论研究及其在保密通信中的应用就成为了一个新的研究热点。混沌信号具有宽频谱、类噪声、容易产生和精确再生等特性，非常适合于保密通信，使得混沌在保密通信中具有较好的前景，而同步技术的发展，为混沌保密通信奠定了基础。

本实验的目的是学习有源非线性负阻元件的工作原理，借助蔡氏电路掌握非线性动力学系统运动的一般规律，了解混沌同步和控制的基本概念，了解混沌通信原理。通过本实验的学习扩展视野、活跃思维，以一种崭新的科学世界观来认识事物发展的规律。

二、实验原理

2.1 倍周期分岔与费根鲍姆常数

非线性科学研究表明：一个完全确定的系统，即使非常简单，由于系统内部的非线性作用，同样具有内在的随机性，可以产生随机性的非周期运动。在许多非线性系统中，既有周期运动，又有混沌运动。系统由定态过渡到混沌，由倍周期分岔通向混沌是最重要的途径。所谓倍周期分岔是指周期不断加倍，即系统的振荡周期由 P 变为 $2P$ 、继而为 2^2P ， \dots ， $2^n P$ （ $n=0,1,2,\dots$ ）直至出现混沌，如图1所示。费根鲍姆发现，动力学系统中分岔点处参量 μ 的取值 μ_n 的收敛服从普适规律，即存在非线性参数 δ_n ，

$$\delta_n = \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n-1} - \mu_{n-2}}, \quad (1)$$

它收敛于一个常数 δ ，也就是

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.6992016091029\cdots, \quad (2)$$

这个常数 δ 被称为费根鲍姆常数。出现倍周期分岔预示着混沌的存在，换句话说，对于任何一个混沌系统都存在着常数 δ 。由于 δ_n 快速收敛于 δ 值，实验上估计 δ 值时，只需（实际上也只能）测量前几个倍周期分岔的参数值，例如取

$n=2$ ， μ_1 、 μ_2 、 μ_3 分别对应2周期、4周期和8周期的电路参量，然后利用方程（1）计算费根鲍姆常数的近似值。

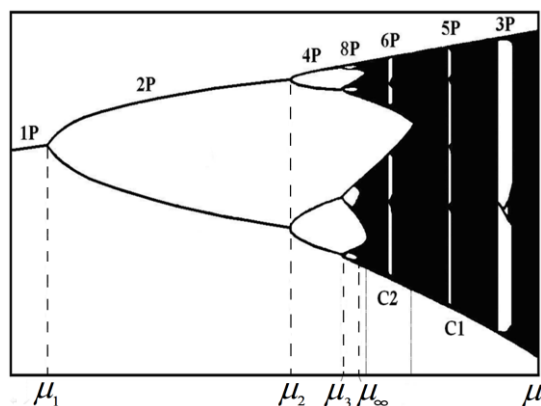
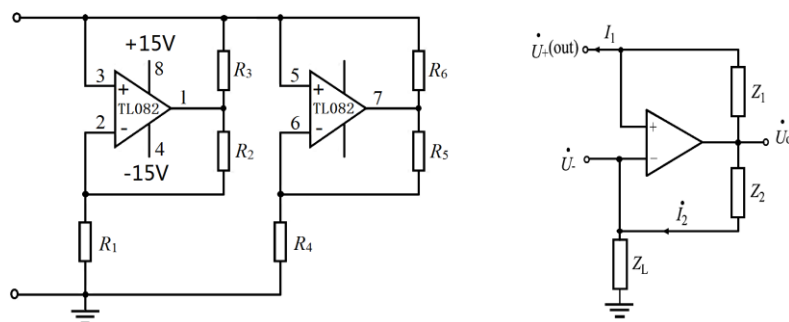


图1 倍周期分岔图

2.2 有源非线性负阻

正阻和负阻的定义：当电阻的端电压增加时，流过电阻的电流也随之增加，表现为 $I-U$ （伏安）特性曲线斜率的倒数 $\frac{\Delta U}{\Delta I}$ 为正，这样的电阻称为正阻；当电阻的端电压增加时，流过电阻的电流反而减小，表现为 $I-U$ 特性曲线斜率的倒数 $\frac{\Delta U}{\Delta I}$ 为负，这样的电阻称为负阻。严格地说，负阻按定义应称为负微分电阻。

自然界中不存在负阻元件，只有当电路上有电流流过时，才会产生负阻，而正阻则不论有没有电流流过总是存在的。从功率意义来说，正阻在电路中消耗功率，是耗能元件；而负阻不但不消耗功率，反而向外界输出功率，是产能元件。



(a)有源非线性负阻 R_N 内部结构

(b) R_N 等效电路

图2 有源非线性负阻 R_N

负阻元件的实现方法有多种，一种常见的实现负阻的电路由正阻和运算放大器构成一个负阻抗变换器电路。由于运算放大器工作需要有一定的工作电压，因此，这种负阻称为有源负阻。本实验采用如图2（a）所示的负阻抗变换器电路，由两个运算放大器和六个配置电阻来实现，图2（b）是其等效电路。它可以等效于一个有载二端口网络，其输入阻抗 Z_N 是指从输入端看进去的阻抗。假设运算放大器是理想的，则

$$\dot{U}_+ = \dot{U}_- \quad (3)$$

考虑到电流与参考方向关联，得到

$$i_1 Z_1 = -i_2 Z_2, \quad (4)$$

输入阻抗为

$$Z_N = \frac{\dot{U}_+}{\dot{I}_1} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{\dot{U}_-}{\dot{I}_2} = -\frac{Z_1}{Z_2} Z_L. \quad (5)$$

若 $Z_1 = Z_2$ ，则 $Z_N = -Z_L$ 。若阻抗元件只有电阻，则 $R_N = -R_L$ 。这就是说，当负载端接入任意一个无源电阻时，在有源端（激励端）就得到一个负阻元件。

用图3所示的简单电路可以测试图2的有源非线性负阻的 I - U 特性曲线，图中 R_0 是可变电阻， R_N 表示待测的非线性负阻。在 $R_1 = 3.3 \text{ k}\Omega$ ， $R_2 = R_3 = 22 \text{ k}\Omega$ ， $R_4 = 2.2 \text{ k}\Omega$ ， $R_5 = R_6 = 220 \Omega$ ， $R = 2.1 \text{ k}\Omega$ 的情况下，测试结果如图4所示， I - U 特性曲线分成五个折线段，其中间的三段折线表明，加在此非线性元件上的电压与通过它的电流极性是相反的，当加在此元件上的电压增加时，通过它的电流却减小。因此，只有中间的三段折线区域可以产生负阻效应。本实验所用的负阻被称为三段分段线性有源非线性负阻元件。

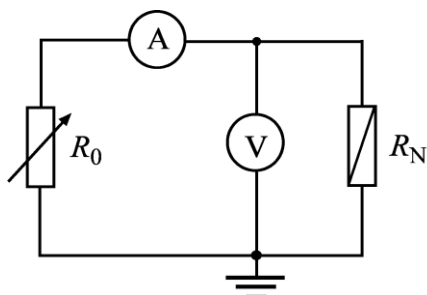


图3 非线性负阻伏安特性测试电路图

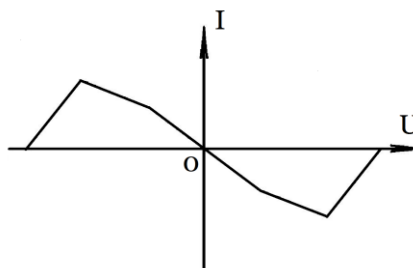


图4 有源非线性负阻 R_N 伏安特性

2.3 非线性电路

图5所示为一个典型的蔡氏电路，它由一个非线性电阻 R_N 、电感 L 、可调电阻 R 以及电容器 C_1 和 C_2 组成。电感器 L 和电容器 C_2 组成一个 LC 振荡电路；电阻 R 和电容器 C_1 串联将振荡器产生的正弦信号移相输出； R_N 有两个作用，一是电路的损耗电阻 R 被抵消，使得输出电流维持 LC 振荡器等幅振荡。另一个作用，也是最重要的作用，是使振荡周期产生分岔和混沌等一系列非线性现象。 R_N 是非线性电路的核心器件，是电路系统产生非线性运动的必要条件。 R_N 中的双运放 TL082 的前级和后期正负反馈同时存在，正反馈的强弱与比值 R_3/R 和 R_6/R 有关，负反馈的强弱与比值 R_2/R_1 和 R_5/R_4 有关。当正反馈大于负反馈时，振荡电路才能振荡。若调节 R ，正反馈就发生变化。因此，正反馈成为如

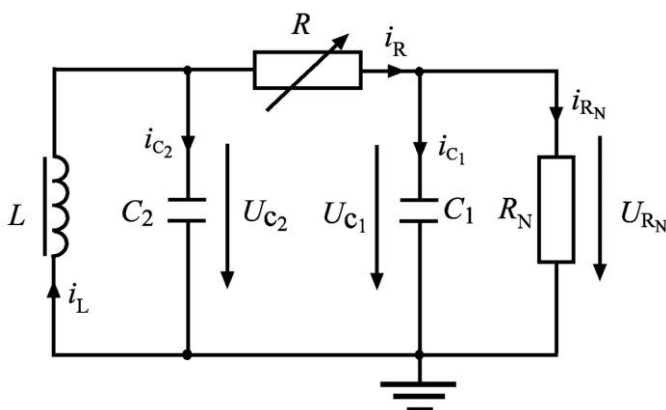


图5 蔡氏振荡电路

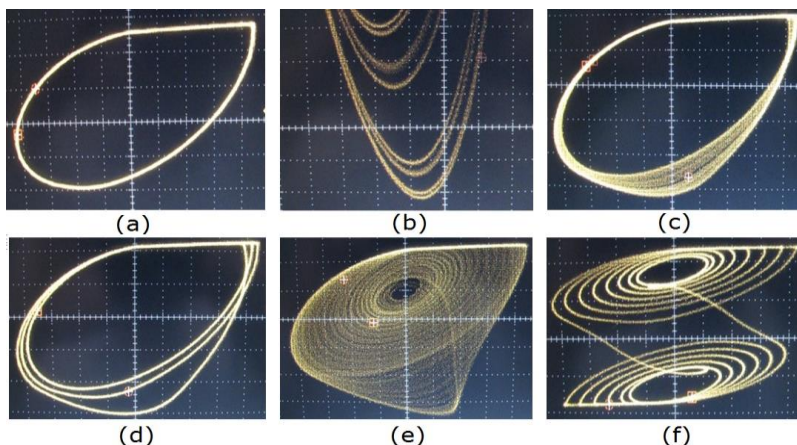


图 6 非线性电路混沌运动的一些实验结果。(a) 1 周期($C_2=0.10000\mu\text{F}$); (b) 8 周期($C_2=0.11024\mu\text{F}$); (c) 阵发混沌($C_2=0.11074\mu\text{F}$); (d) 3 周期($C_2=0.11190\mu\text{F}$); (e) 单吸引子($C_2=0.11725\mu\text{F}$); (f) 稳定双吸引子

在相图中的每一条闭合曲线代表系统运动的一个轨迹。若系统周期运动，则相图中只有一条闭合曲线；如果运动是二倍周期的，则在相图中有两条闭合曲线；如果运动是四倍周期的，则在相图中有四条闭合曲线，以此类推。所谓“混沌对初始条件的敏感性”，对图 5 的电路而言，就是该电路对 R 、 L 、 C_1 和 C_2 取值的依赖性。举例说明，在 R 、 L 和 C_1 取一定值， C_2 由 $0.10000\mu\text{F}$ 增加到 $0.14640\mu\text{F}$ 时，利用相图法得到图 6 所示的一组李萨如图形，其中 x 轴为 U_{C_1} ， y 轴为 U_{C_2} 。当 C_2 为 $0.11024\mu\text{F}$ 和 $0.11074\mu\text{F}$ 时分别对应 8 周期和阵发混沌，二者之差仅为 $0.0005\mu\text{F}$ 。这表明，只要 C_2 发生 $\pm 0.0005\mu\text{F}$ 的微小变化，系统就可以迅速地从稳态变成非稳态，发生巨大的变化，可见系统的运动状态对系统参量的初值极其敏感。当分别改变 R 、 L 和 C_1 时，同样会得到类似图 6 的结果。

由实验结果还可以发现混沌的另一个特征：从局域角度看，系统每一次运动轨迹都不重复，表现出随机性和不稳定性。但是，从全局角度看，所有的轨迹最终都被捕捉到一个不变的集合，这就是所谓的奇怪吸引子。奇怪吸引子的形成表明混沌有某种确定性和稳定性。混沌体现系统内在的随机性，表面看就像噪声一样杂乱无章，但是，混沌与噪声有本质的区别。可以借助奇怪吸引子在状态空间里区分混沌与噪声：混沌在状态空间（系统所有可能状态的集合）里形成具有特殊结构的奇怪吸引子，而噪声在状态空间里则表现出一团糟。混沌的其它特征需要同学们在实验中发现。

2.4 非线性动力学

由基尔霍夫结点电流定律可以得到图 5 蔡氏电路的非线性动力学方程，它是一个三阶自治方程（不显含自变量 t 的微分方程）：

$$\begin{cases} i_{C_1} = i_R - i_{R_N} \\ i_{C_2} = i_L - i_R \\ L \frac{di_L}{dt} = -U_{C_2} \end{cases} \quad (6)$$

也就是

图 5 所示振荡型非线性电路的又一个必要条件。

参量 R 、 L 、 C_1 和 C_2 的取值决定了蔡氏电路的初始条件，也将导致电路的不同运动形式：周期振荡、倍周期分岔，或者混沌等。非线性系统的运动状态可以用相图法进行分析。假设描写系统状态的量为 U ，其对时间的微分为 \dot{U} ，那么， U 与 \dot{U} 构成的二维图形叫相图。

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R}(U_{C_2} - U_{C_1}) - \frac{1}{R_N(U_{C_1})}U_{C_1} \\ C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R}(U_{C_1} - U_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -U_{C_2} \end{cases} \quad (7)$$

式中, $R_N(U_{C_1})$ 是非线性负阻, 它是 U_{R_N} 的函数, 而 $U_{R_N} = U_{C_1}$, 所以 R_N 也就是 U_{C_1} 的函数, U_{R_N} 可以用分段线性逼近。由于 U_{C_1} 在每个区域上的取值不同, 使得方程组 (7) 中的每一个方程都是非线性的。负阻的存在是导致方程的解千变万化的根本原因。方程组 (7) 的物理意义是: 每一个方程表示动力系统每一个状态变量随时间的变化率; 方程形式不会随时间变化, 表明系统动力学规律的不变性。

方程组 (7) 中的 U_{C_1} 、 U_{C_2} 和 i_L 三个变量中的任何一个变量都可以描述系统的运动状态。方程组 (7) 不存在解析解, 只能数值求解。数值计算结果表明: 对 U_{C_1} 、 U_{C_2} 和 i_L 分别求解, 可以得到系统相同的运动规律, 即由周期振荡通过倍周期分岔进入混沌, 具体发展路径为周期振荡 $\rightarrow 2$ 周期 $\rightarrow \dots 2^n$ 周期 $\dots \rightarrow$ 阵发混沌 \rightarrow 周期窗口 \rightarrow 单吸引子 \rightarrow 双吸引子临界态 \rightarrow 双吸引子 \rightarrow 稳定双吸引子。同时, 方程组中的参量 L 、 R 、 C_1 和 C_2 的取值对计算结果影响极大, 取值只要发生微小的改变 (例如 10^{-6}), 解就可以从一个态变成另一个态, 甚至从稳态一下子变成非稳态, 比如, 从周期振荡变成混沌。数值计算的优势就在于可以任意改变参量的大小, 从细微处探究一个非线性系统的动力学行为, 因此, 数值计算在非线性科学领域中是一个非常重要的工具。

2.5 混沌同步

混沌同步是指一个系统的混沌动力学轨道收敛于另一个系统的混沌动力学轨道, 以致在以后的时间里两个系统始终保持步调一致。

驱动—响应方法是混沌同步的重要方法, 它将系统分成两个子系统: 驱动子系统和响应子系统, 然后对响应子系统进行复制, 并用驱动子系统产生的信号驱动该复制的系统。

混沌同步的目的就是在—一个相同的具有任意初始条

件的响应系统中, 从一个驱动系统中恢复给定的混沌轨迹。用于保密通信时, 在传输前用混沌来隐藏消息, 并且通过同步在接收端抽取该隐藏的消息。由于混沌信号的功率谱是典型的宽带谱, 信号在时域和频域上一般难以探测。

实验中的混沌同步系统是由两个相同的蔡氏电路和一个单向耦合系统构成的。相同的蔡氏电路

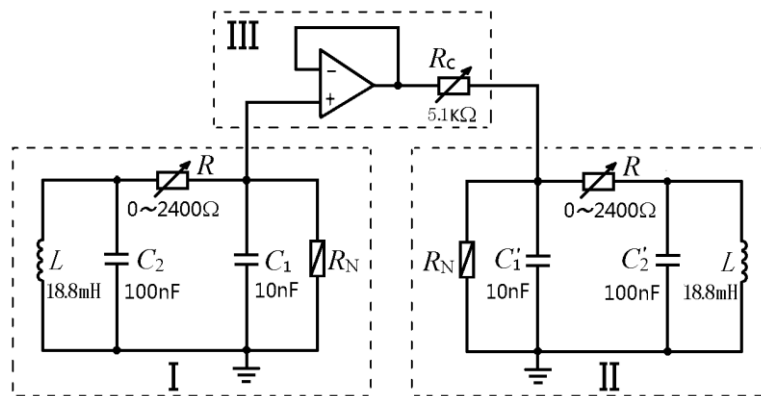


图 7 混沌同步实验电路。I: 驱动系统；II: 响应系统；III: 单向耦合系统

是指两个电路的元件的参数尽可能的接近，这是确保混沌同步能够实现的基本条件。单向耦合系统由一个运算放大器和一个可调电阻 R_C 构成。单向的含义是：驱动系统只对响应系统产生作用，而响应系统不能对驱动系统作用。混沌同步的实验电路如图 7 所示，图中虚线框 I、II 和 III 分别代表驱动系统、响应系统和单向耦合系统。

驱动系统 C_1 两端的电压信号通过运算放大器等值地传输到 R_C 的左侧。由于单向耦合系统的存在，驱动系统的运动状态会影响响应系统，而响应系统的运动状态不能影响驱动系统。这样， R_C 的左右两端分别为驱动系统的 C_1 信号和响应系统的 C_1' 信号。在驱动系统和响应系统不同步时，这两个信号是不等的，这时我们可以通过调节 R_C 的大小来实现 C_1 和 C_1' 上的电压信号相等。于是，两个系统便实现了同步。

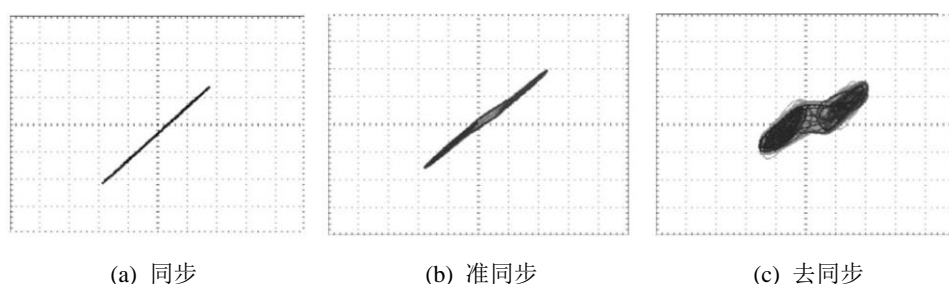


图 8 混沌同步、准同步和去同步

同步时，驱动系统和响应系统各对应元件的电压信号完全相同。此时， $U_{C_1} \sim U_{C_1'}$ 或 $U_{C_2} \sim U_{C_2'}$ 的李萨如图是一条直线；接近直线被称为准同步。系统由同步变成不同步的过程，被称为去同步。此时， $U_{C_1} \sim U_{C_1'}$ 或 $U_{C_2} \sim U_{C_2'}$ 的李萨如图是非规则图形。图 8 是混沌同步、准同步和去同步的 $U_{C_1} \sim U_{C_1'}$ 李萨如图。

2.6 混沌通信

实现混沌同步是混沌通信的基础。混沌通信的基本思想是将要传输的信号混入混沌信号中进行传输，然后在接收端通过减去混沌信号得到所需信号。由于传输的是用混沌信号掩盖过的混合信号，所以混沌通信的最大特点就是保密性强。图 9 是本实验设计的混沌通信电路原理图，由驱动系统、响应系统、单向耦合系统、加法器和减法器组成。实现通信的方法如下：调节驱动系统和响应系统的可变电阻 R ，使它们都出现混沌状态；调节单向耦合电阻 R_C ，使驱动和响应系统同步； $S(t)$ 是要传输的信号，通过加法器与驱动系统 C_2 的电压混沌信

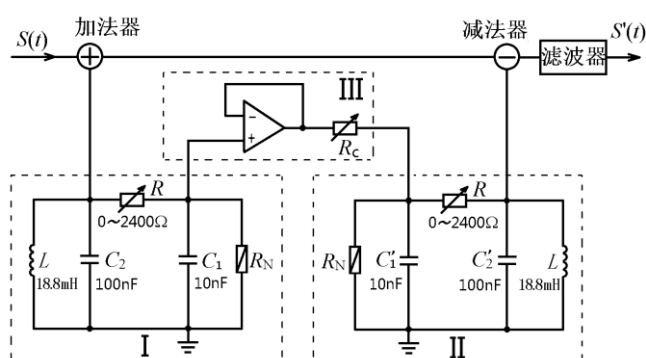


图 9 混沌通信电路

号混合后进行传输，在接收端用减法器将传输信号与响应系统 C_2' 的电压混沌信号相减。由于响应系统与驱动系统同步，即 C_2' 上的电压信号等于 C_2 上的电压信号，故相减的结果为所需的信号 $S'(t)$ 。由于噪声的影响和电路损耗， $S'(t)$ 与 $S(t)$ 不完全相同，可以在减法器后接一个滤波器，尽量减小 $S'(t)$ 的噪声。

三、实验装置

实验电路如图 5 和图 7 所示。图中元件参数参考值为：当 $L=18.8\text{mH}$ ， $C_1=0.01\mu\text{F}$ ， $C_2=0.1\mu\text{F}$ ， $R_1=3.3\text{k}\Omega$ ， $R_2=R_3=22\text{k}\Omega$ ， $R_4=2.2\text{k}\Omega$ ， $R_5=R_6=220\Omega$ ， $R=2.2\text{k}\Omega+220\Omega$ 。

实验所用的仪器及电器元件有：直流电源、信号源、数字存储示波器、模拟示波器、台式万用表、电阻箱、电容箱、电感箱、计算机。其中直流电源和信号源集成在一个控制箱中，控制箱面板如图 10 所示。在测量非线性负阻的 $I-U$ 特性曲线时，可以利用控制箱的接地端口。

TL082 是双运放芯片，内部结构包含了两个运算放大器，每个运算放大器都有正输入端（+IN）、负输入端（-IN）和输出（OUT），管脚 8 和管脚 4 为正负电源输入。芯片管脚说明及运算放大器的结构如图 11 所示。当把运算放大器用作隔离器时，将负输入端（-IN）与输出端（OUT）连接起来，信号从正输入端（+IN）输入，从输出端（OUT）输出，可以实现单向耦合。

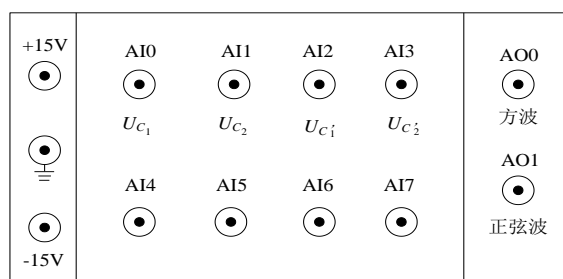


图 10 控制箱面板示意图

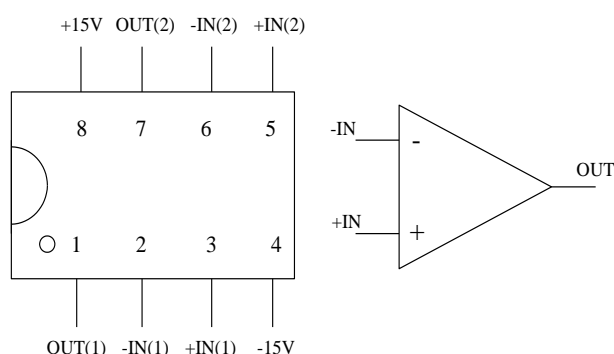


图 11 TL082 芯片

四、实验内容

1. 测量非线性电阻的 $I-U$ 特性曲线

利用实验室提供的仪器和元件，自行设计测量方案，并搭建测量电路，测量非线性电阻的 $I-U$ 特性曲线。数据处理要求：（1）对测量的原始数据曲线首先要变换到第二象限，然后再旋转 180° 得到第四象限曲线，连接第二、四象限曲线得到完整的非线性负阻 $I-U$ 特性曲线。对非线性负阻 $I-U$ 特性曲线分段进行线性拟合，计算各分段直线的斜率和截距。（2）确定不同的状态在非线性负阻 $I-U$ 分段折线上的区域，即确定本实验非线性负阻的工作区域。说明非线性负阻在电路中的作用。

2. 观察并记录当电阻变化时非线性电路的运动状态

首先按照图 5 搭建非线性电路，然后改变可变电阻 R ，利用相图法观察并记录非线性电路的各种运动状态，同时观察非线性负阻两端电压的变化情况。

3. 以电容 C_2 为参数研究非线性电路的运动状态，计算非线性参数 δ_n

利用电容箱改变 C_2 ，观察非线性电路的运动状态，记录不同运动状态的电容值，计算非线性参数 δ_n 。选取不同的可变电阻 R 值，重复上述过程。若将 C_2 分别换成电感 L 或电容 C_1 ，会有类似的结果吗？为什么？总结混沌的特征。

4. 混沌同步实验

按照图 7 搭建混沌同步电路。将其中一个蔡氏电路作为驱动系统，另外一个蔡氏电路作为响应系统。先分别调节电路参数，使两个蔡氏电路处于大致相同的混沌状态，例如都处于双吸引子状态。然后采用单向耦合电路将两个蔡氏电路连接起来，改变耦合电阻 R_c ，观察同步现象并记录混沌同步、准同步和去同步状态。分别调节驱动系统和响应系统中的可变电阻，观察电路参数对同步的影响。

5. 混沌加密通信

按照图 9 搭建混沌加密通信电路。打开信号发生器，输出频率约 200Hz 的正弦波作为将要传输的消息信号 $S(t)$ 。将此消息信号输入到加法器的一个输入端，驱动系统上电容 C_2 上的信号输入到加法器的另一个输入端，相加后的输出信号就是被混沌信号掩盖了的消息信号。解密信号时，将传输信号输入到减法器的一个输入端，响应系统上的 C_2' 输入到减法器的另一个输入端。调节信号发生器的输出幅度，观察并记录原始的消息信号、原始的混沌信号、混沌掩盖后传输的信号和解密后的恢复的信号波形 $S'(t)$ 。

五、预习思考题

1. 混沌的主要特征是什么？
2. 噪声与混沌的根本区别是什么？
3. 什么叫相图？为什么要用相图来研究混沌现象？本实验中的相图是怎么获得的？
4. 什么是倍周期分岔、奇怪吸引子？它们在相图中有何特点？
5. 如何理解有源非线性负阻概念？它在本实验中的作用是什么？
6. 什么是混沌同步？如何实现两个蔡氏混沌电路的同步？
7. 混沌通信的基本思想是什么？

参考文献

- [1] Pecora L M and Carroll T L, Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(8): 821~823.
- [2] Chua L O, CHUA'S CIRCUIT: AN OVERVIEW TEN YEARS LATER. *Journal of Circuits, systems and computers*, 1994, **4**(2): 117~159.
- [3] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004
- [4] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌. 北京: 电子工业出版社, 2003
- [5] 李海红, 琼琳, 王世红, 肖井华. 一种简单的基于蔡氏电路的数字加密通信实验. *大学物理*, 2006, **25**(9): 39~42.