观察一维驻波实验预习报告

郑晓旸

2024 年 4 月 25 日

目录

1 实验目的

1. 加深对驻波、本征频率和本征模式概念的理解。
2. 掌握测量弦上驻波的产生和测量方法。
3. 观察弹簧上的纵波并测量其波速。

2 实验仪器

1. 细绳
2. 弹簧
3. 数字拉力计
4. 米尺
5. 机械波驱动器
6. 压电传感器
7. 正弦信号发生器
8. 示波器

3 实验原理

3.1 一维波动方程

3.1.1 弦上横波的波动方程

如图 1所示, 考虑一根两端受恒定张力 T 拉紧的轻质弦, 设其线密度为 ρ。取弦的平衡位置为 x 轴, 令 $u(x,t)$ 表示弦上质点在 t 时刻相对平衡位置的横向位移。

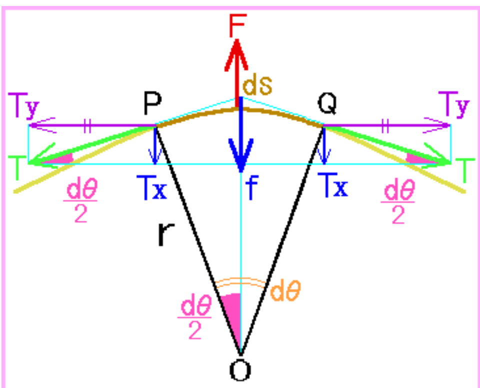

图 1: 弦上横波示意图

考虑弦上 $[x, x+\Delta x]$ 一小段, 它受到两个相反方向的张力 $\vec{T}$ 作用, 合力在 y 方向的分量为

$$F_y = T\sin\theta(x+\Delta x) - T\sin\theta(x) \approx T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \tag{1}$$

这一小段弦的质量为 $\rho\Delta x$, 根据牛顿第二定律 $F_y = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, 整理得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

令 $v^2 = T/\rho$, 这就是弦上横波满足的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

3.1.2 弹簧上纵波的波动方程

如图 2所示, 考虑一根劲度系数为 k、未拉伸长度为 L 的轻质弹簧, 在两端施加恒定拉力使其伸长到 L'。取弹簧的平衡位置为 x 轴, 令 $u(x,t)$ 表示弹簧上质点在 t 时刻相对平衡位置的纵向位移。

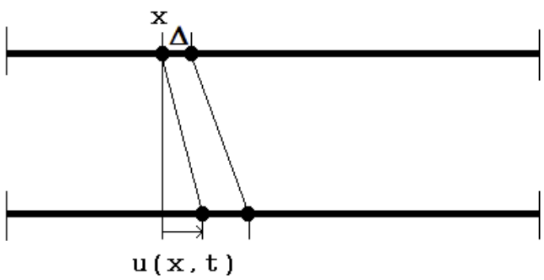

图 2: 弹簧上纵波示意图

考虑弹簧上 $[x, x+\Delta x]$ 一小段, 它两端的伸长量分别为 $u(x+\Delta x,t)-u(x,t)$ 和 $u(x,t)-u(x-\Delta x,t)$, 根据胡克定律, 两端的弹力大小分别为 $k\frac{L}{L'}[u(x+\Delta x,t)-u(x,t)]$ 和 $k\frac{L}{L'}[u(x,t)-u(x-\Delta x,t)]$。这一小段弹簧质量为 $\rho\Delta x$, 根据牛顿第二定律

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{L}{L'}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] \tag{4}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时, 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kL}{\rho L'}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

令 $v^2 = \frac{kL}{\rho L'}$, 得到弹簧上纵波的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

3.2 驻波和本征模式

对于两端固定的有限弦或弹簧, 设其长度为 L, 边界条件为 $u(0,t) = u(L,t) = 0$。此时波动方程 (3) 和 (6) 的解为驻波

$$u(x,t) = A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\omega_n t + \phi_n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{7}$$

其中 A_n 为第 n 阶驻波的振幅,ϕ_n 为初相位, 本征角频率 ω_n 满足

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} = n\omega_1, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{8}$$

对应的本征函数 $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ 称为第 n 阶本征模式, 它在弦或弹簧上形成 n 个驻波波腹。相邻两个波腹之间的点称为波节点, 其位移恒为零。

3.3 共振与色散关系

在实验中, 我们通过在一端施加正弦驱动 $u(0,t) = A\cos\omega t$ 激发弦或弹簧的振动。当驱动频率 ω 接近某一阶本征频率 ω_n 时, 会发生共振, 此时对应的本征模式振幅最大, 远大于其他模式。因此通过扫描驱动频率, 观察共振现象, 就可以测量系统的本征频率。

另一方面, 由 (8) 式可知, 本征频率 ω_n 与对应的波数 $k_n = \frac{n\pi}{L}$ 满足线性关系

$$\omega_n = vk_n \tag{9}$$

这表明弦上的横波和弹簧上的纵波都是无色散的, 相速度等于群速度, 等于波速 v。通过测量一系列本征频率 ω_n 和波数 k_n, 就可以验证色散关系 (9), 并求出波速 v。

3.4 实验目的

基于以上原理, 本实验的目的可以归纳为:

1. 观察和测量弦上横波及弹簧上纵波的驻波模式, 理解本征模式和本征频率的概念;
2. 通过共振法测量弦和弹簧的一系列本征频率, 验证色散关系, 求出波速;
3. 研究弦上横波的波速与张力、线密度的关系, 验证波速公式 $v = \sqrt{T/\rho}$;
4. 研究弹簧上纵波的波速与弹簧劲度系数、质量等参量的关系, 验证波速公式 $v = L\sqrt{k/m}$。

4 实验过程

4.1 弦上驻波实验

1. 搭建实验装置, 调节支架位置, 使弦保持水平, 并用拉力计控制其张力。
2. 调节信号发生器输出频率, 观察弦的振动情况。当出现清晰的驻波时, 记录此时的频率, 即某一阶本征频率 f_n。
3. 目测波节点的位置, 估算对应的波长 λ_n 和波数 k_n。也可借助示波器观察压电传感器输出电压幅值随频率的变化, 进一步确定共振频率。
4. 测量不同阶数 (如 $n = 1, 2, 3, \cdots$) 的本征频率, 并计算对应的 k_n, 最后作色散关系曲线 $\omega \sim k$。
5. 改变弦的张力, 重复上述测量, 研究波速 v 与张力 T 的关系。
6. 选取不同线密度 ρ 的弦, 研究波速 v 与线密度的关系。

4.2 弹簧上驻波实验

1. 将弹簧的一端固定, 另一端连接机械波驱动器。调节弹簧的拉伸长度。
2. 从低频开始扫描驱动频率, 观察弹簧的振动情况。当出现波节点清晰可见、其它部位运动模糊的现象时, 即为共振。记录此时的频率 f_n。
3. 测量一系列本征频率, 并根据 $k_n = n\pi/L$ 计算对应的波数, 作色散关系曲线。

5 实验预习思考题

1. 弦乐器 (如吉他和二胡) 调音时, 增大弦的张力频率如何改变? 从波速和本征频率的关系说明原因。
   分析: 增大弦的张力 T 会使波速 $v = \sqrt{T/\rho}$ 增大, 从而使本征频率 $f_n = \frac{n}{2L}v$ 提高。所以弦乐器调音时, 增大张力可以提高音高。
2. 吉他低音弦常使用金属丝包裹以增加线密度。从波速和本征频率的关系说明原因。
   分析: 增加弦的线密度 ρ 会使波速 $v = \sqrt{T/\rho}$ 减小, 从而使本征频率 $f_n = \frac{n}{2L}v$ 降低。所以吉他低音弦增加线密度可以降低音高。
3. 在演奏弦乐器时, 改变振动部分弦的长度, 频率如何改变? 从本征频率与弦长的关系说明原因。
   分析: 本征频率 f_n 与弦长 L 的关系为 $f_n = \frac{n}{2L}v$, 因此减小 L 会使 f_n 成比例增大。这就是弦乐器演奏时改变音高的原理。
4. 对于给定的一根弹簧, 证明纵波的本征频率与弹簧的拉伸长度无关。
   证明: 对于弹簧, 波速 $v = L\sqrt{k/m}$, 其中 L 为弹簧长度,k 为劲度系数,m 为弹簧的总质量。代入 $f_n = \frac{n}{2L}v$ 得
   $$f_n = \frac{n}{2L}L\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$
   可见 f_n 与 L 无关, 只与弹簧的固有属性 k 和 m 有关。