

利用分光计测量玻璃的色散曲线实验报告

郑晓旻

2024 年 3 月 22 日

目录

1 实验目的

1. 深入理解电路暂态过程的特点;
2. 掌握用示波器观察和测量暂态信号的方法。

2 实验仪器

1. 数字示波器
2. 信号发生器
3. 九孔电路实验板
4. 电路元件 (电阻/电容/电感/开关/导线等)
5. 数字多用表

3 实验原理

对于包含电容、电感等储能元件的电路,当发生突变(如开关突然闭合或断开、元件参数突变)时,由于能量转移不可能瞬间完成,电路要经过一段时间才能重新达到新的稳定状态。这段过渡时间内电路的行为称为暂态过程(transient process)。研究电路的暂态过程可以估算稳态建立的时间,评估电压或电流突变对元件的冲击。此外,利用电路的暂态特性还可以测量电路元件的参数,或者实现诸如升压、振荡等特定的功能。根据电路中包含独立储能元件的数量,基本的暂态过程包括一阶和二阶暂态过程。

RC 充放电是一个典型的一阶暂态过程(见图 1)。

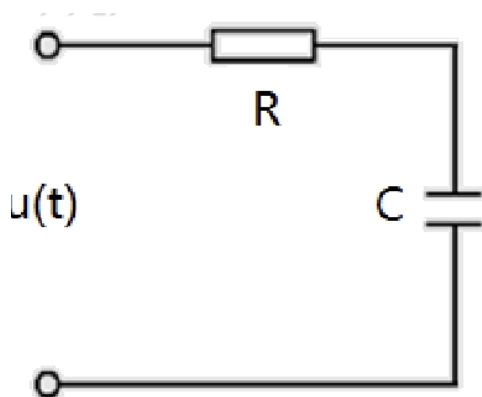


图 1: RC 串联电路

设电路中的电流为 $i(t)$, 根据基尔霍夫电压定律和电容的性质可以列出如下电路方程:

$$\begin{cases} Ri(t) + u_c(t) = u(t) \\ i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

化简可得

$$\tau \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t) \quad (2)$$

其中 $\tau \equiv RC$ 称为电路的时间常数。如果 $u(t)$ 长时间保持不变, 则 $\frac{du_c(t)}{dt} = 0, u_c(t) = u(t)$ 也保持不变。这时如果改变 $u(t)$, 如果改变的幅度有限, 由于电容器储存的能量不能瞬时改变 (功率有限), $u_c(t)$ 只能连续改变。假设 $t < 0$ 时 $u(t) = u_0$, 当 $t \geq 0$ 时 $u(t) = u_\infty$, 则有

$$u_c(t) = \begin{cases} u_0 & t < 0 \\ u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

当 $t \gg \tau$ 时, $u_c(t)$ 达到新的稳定值 u_∞ , 暂态过程完成。图 2 画出了一些充电 ($u_0 = 0, u_\infty = U_0$) 和放电 ($u_0 = U_0, u_\infty = 0$) 过程中 u_c 的变化曲线。

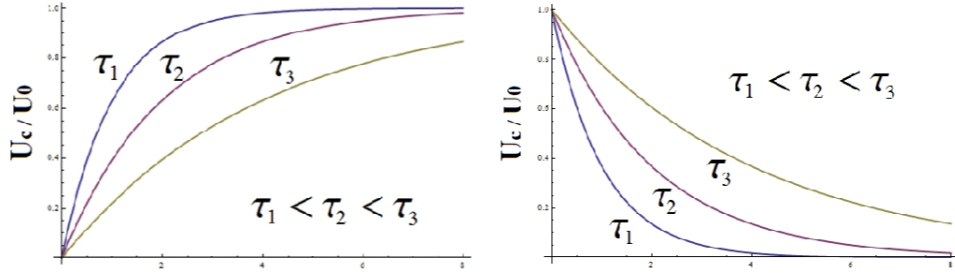


图 2: RC 充电 (左) 和放电 (右) 曲线

RL 串联电路 (见图 3) 中也存在一阶暂态过程。设电路中的电流为 $i(t)$, 则电路方程为

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \Rightarrow \tau \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{u(t)}{R} \quad (4)$$

其中时间常数 $\tau = L/R$ 。注意与 RC 电路不同, 在 RL 电路中时间常数与 R 成反比。当总电压 $u(t)$ 发生幅度有限的跃变时, 由于电感器存储的磁场能不能发生跃变, $i(t)$ 将连续地变化。

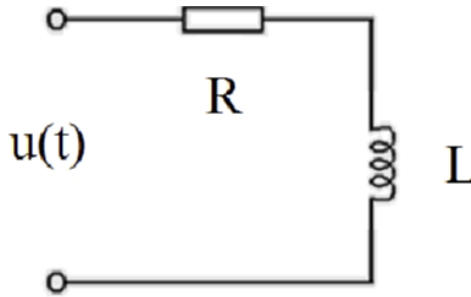


图 3: RL 串联电路

RLC 串联电路 (图 4) 在总电压突变时将产生一个典型的二阶暂态过程。

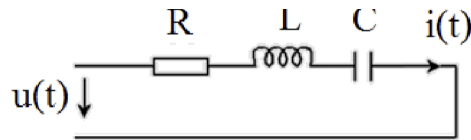


图 4: RLC 串联电路

设电路中的电流为 $i(t)$, 电感、电容两端的电压分别为 $u_L(t)$ 和 $u_c(t)$, 根据基尔霍夫电压定律和电感、电容的性质, 可得以下电路方程:

$$\begin{cases} Ri(t) + u_L(t) + u_c(t) = u(t) \\ i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \\ u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \end{cases} \quad (5)$$

化简后为

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t) \quad (6)$$

这个方程可写成标准的受迫振动方程的形式:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t) \quad (7)$$

其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 为固有频率, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ 称为品质因数 (简称 Q 值, Q-factor)。考虑外加电压 $u(t) = 0$ 的暂态解。令 $u_c(t) = e^{j\omega t}$, 带入方程得到

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + 1 = 0 \quad (8)$$

解之得到

$$\omega = \omega_{1,2} = \left(j\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \omega_0 \quad (9)$$

$\omega_{1,2}$ (或 Q 值) 决定了暂态解的衰减模式 (参见图 5)。

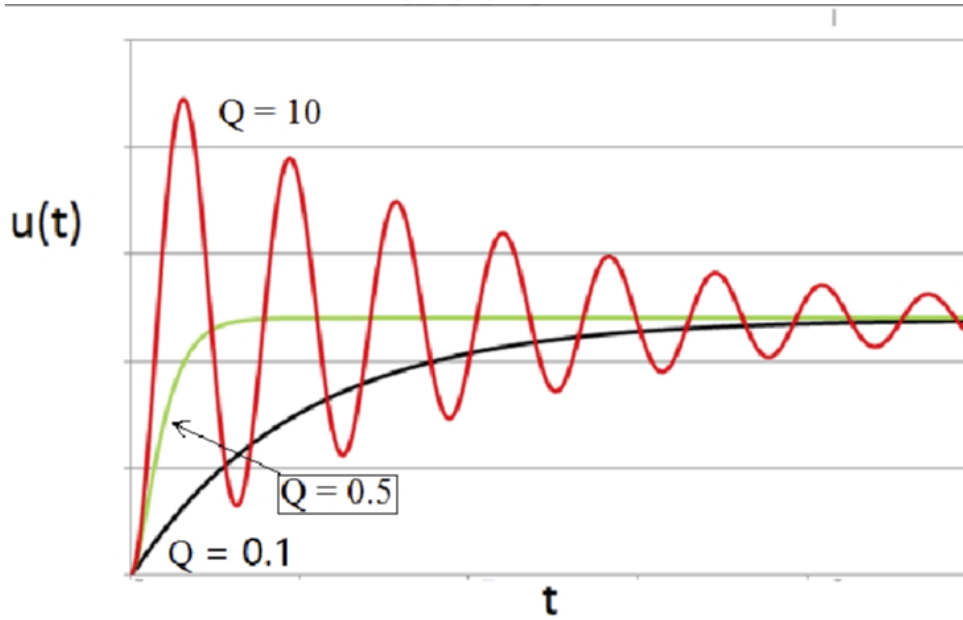


图 5: 阻尼振荡的三种形式

(1) $Q > \frac{1}{2}$, ω 的实部不为零, 电路暂态表现为欠阻尼 (under-damping), 呈衰减振荡:

$$u_c(t) = ce^{-\text{Im}(\omega)t} \cos[\text{Re}(\omega)t + \varphi] \quad (10)$$

其中振荡的”角频率”

$$\omega' = |\text{Re}(\omega)| = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (11)$$

振荡的”周期” $T = 2\pi/\omega'$, 衰减振荡的包络线为指数函数, 对应时间常数

$$\tau = \frac{1}{\text{Im}(\omega)} = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R} \quad (12)$$

每振荡一周期, 振幅衰减

$$\eta = \exp\left(-2\pi \frac{\text{Im}(\omega)}{|\text{Re}(\omega)|}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right) \approx \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right) \quad (13)$$

上式给出实验中粗略估计 Q 值的方法: 由于 $e^{-\pi} = 0.0432 \approx 0$, 如果 $Q \gg 1$, 大约经过 Q 次振荡后电路就达到稳态。

(2) $Q < \frac{1}{2}$, ω 为纯虚数, 电路暂态表现为过阻尼 (over-damping), 呈双指数衰减:

$$u_c(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (14)$$

其中

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{\text{Im}(\omega_{1,2})} = \frac{2Q}{\omega_0(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})} = \frac{1}{2(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2})} RC \quad (15)$$

衰减的特征时间主要由较长的那个时间常数决定, 即 $\tau = \max \tau_1, \tau_2$ 。注意 $\tau_1 + \tau_2 = RC$ 。

(3) $Q = \frac{1}{2}$, 临界阻尼 (critical-damping), $\omega_1 = \omega_2 = j\omega_0$, $u_c(t)$ 的衰减形式为

$$u_c(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (16)$$

其中 $\tau = 1/\omega_0$ 。

容易证明, 如果固定 L, C 而改变 R (即保持 ω_0 不变而改变 Q), 在 $Q = 1/2$, 即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \equiv R_c$ 时, τ 取到最小值 $\tau_{\min} = 1/\omega_0$ 。

4 实验过程

4.1 测量 RC 放电曲线, 计算时间常数

1. 搭建如图 6 所示的 RC 电路, 选取合适的 R 、 C 值, 使时间常数 $\tau = RC$ 在毫秒量级。
2. 示波器 CH1 观察信号发生器输出 (方波), CH2 观察电容两端电压。分别调节信号发生器和示波器的参数, 使波形稳定可观察。
3. 调节示波器时基, 使波形充满屏幕。调节垂直位移, 使波形上下对称。
4. 用光标测量功能, 测量并记录一个周期内的若干个点 t_i, u_i (或直接导出波形数据)。
5. 选取其中的放电段数据, 用指数衰减模型 $u_i = Ae^{-Bt_i}$ 拟合, 得到最佳参数 B , 则时间常数 $\tau = 1/B$ 。

4.2 测量 RL 放电曲线, 计算时间常数 (选做)

步骤与 RC 放电实验类似, 只需将电容换成电感即可。注意选取合适的 R 、 L 值, 使时间常数 $\tau = L/R$ 在毫秒量级。

4.3 测量 RLC 欠阻尼振荡, 计算固有频率和品质因数

1. 搭建如图 6 所示的 RLC 串联电路, 并选取合适的 R 、 L 、 C 值, 使得 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$, 即欠阻尼情况。
2. 用示波器观察电容两端电压波形, 调节示波器时基使波形稳定且几个周期充满屏幕。

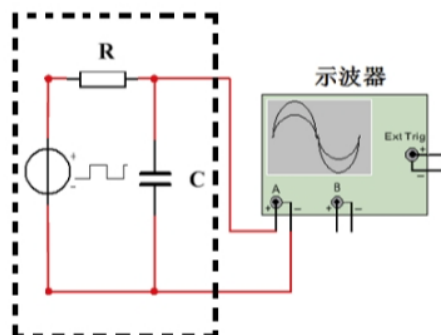


图 6: RC 放电测试电路

3. 用光标测量相邻两个波峰之间的时间间隔 Δt , 则周期 $T = \Delta t$, 固有频率 $f_0 = \frac{1}{T}$ 。
4. 测量第 k 个波峰与波谷的电压差 Δ_k , 则相邻两个峰谷电压差之比为衰减系数

$$\eta = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right) \approx \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right) \quad (17)$$

5. 由此可估算品质因数 $Q \approx \frac{\pi}{\ln(1/\eta)}$ 。

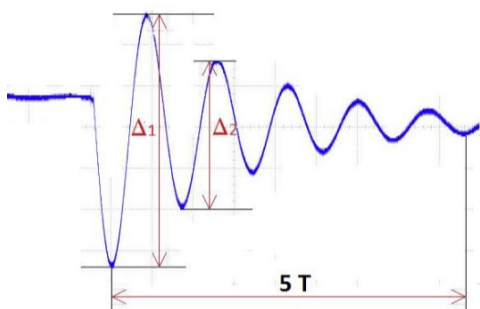


图 7: 欠阻尼振荡波形测量

4.4 观察 RLC 不同阻尼模式, 测量临界电阻

1. 固定 L 、 C , 改变 R (比如用电位器), 观察并记录波形从欠阻尼到过阻尼的变化过程。
2. 仔细调节 R , 使波形处于临界阻尼状态, 读出此时的 R_c 值。
3. 比较实测的临界电阻 R_c 与理论值 $2\sqrt{L/C}$, 分析误差来源。

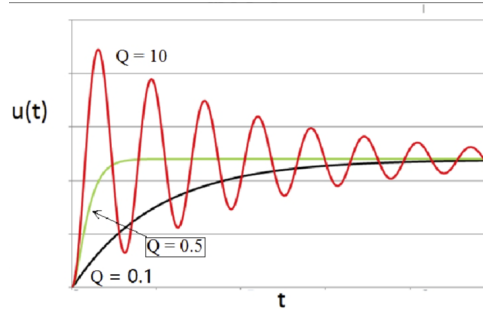


图 8: RLC 串联电路的三种阻尼模式

5 预习思考题

1. 电容储存电场能量, 电感储存磁场能量。设电容两端电压为 U , 电容值为 C , 则储存的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 \quad (18)$$

设电感两端电流为 I , 电感值为 L , 则储存的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (19)$$

2. 在 RLC 串联电路的二阶暂态过程中, 固有频率为 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 品质因数为 $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 。如果保持 L 、 C 不变而改变 R , 则 ω_0 不变而 Q 变化。根据前面的推导, 欠阻尼情况下的特征衰减时间为

$$\tau = \frac{1}{\text{Im}(\omega)} = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2RC}{\sqrt{1-4Q^2}} \quad (20)$$

令 $\frac{d\tau}{dQ} = 0$, 解得

$$Q = \frac{1}{2} \quad (21)$$

此时 τ 取得最小值

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC} \quad (22)$$

3. RLC 串联电路的微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t) \quad (23)$$

阻尼弹簧振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \quad (24)$$

其中 m 为质量, b 为阻尼系数, k 为弹簧劲度系数, $F(t)$ 为外力。

比较两个方程可知, 对应关系为:

- 电容 C 对应于 $1/k$, 即弹簧劲度系数的倒数
- 电感 L 对应于质量 m
- 电阻 R 对应于阻尼系数 b

- 电容两端电压 $u_c(t)$ 对应于位移 $x(t)$
- 外加电压 $u(t)$ 对应于外力 $F(t)$

从物理意义上看, 这种对应关系也是合理的:

- 电容对应于弹性势能的储存, 类似于弹簧
- 电感对应于磁场能量 (动能) 的储存, 类似于质量
- 电阻对应于电能的耗散, 类似于阻尼