第 10 次作业

截止时间：2024. 11. 12（周二）

姓名：郑 晓 旸
学号：202111030007
成绩：____________

第 1 题 得分: ________. 证明：$A \times (\nabla \times A) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (A\dot{\nabla})A$

解:

$$A \times (\nabla \times A) = \epsilon_{ijk} A_j (\nabla \times A)_k = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m \tag{1}$$

交换求和顺序得到：

$$A \times (\nabla \times A) = \epsilon_{jik}\epsilon_{klm} A_j \partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j \partial_l A_m \tag{2}$$

展开得到：

$$A \times (\nabla \times A) = A_i \partial_j A_j - A_j \partial_j A_i \tag{3}$$

由于 $A_i \partial_j A_j = \nabla \cdot (AA)$，因此有：

$$A \times (\nabla \times A) = \nabla \cdot (AA) - (A \cdot \nabla) A \tag{4}$$

由于 $\nabla \cdot (AA) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}A^2\right)$，因此有：

$$A \times (\nabla \times A) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (A \cdot \nabla) A \tag{5}$$

□

第 2 题 得分: ________. 设 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, $\mathbf{r}$ 为源点到场点的矢量，证明：

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$
$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$
$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

求 $\nabla \mathbf{r}$, $\nabla \times \mathbf{r}$, $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{r}$, $\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, $\nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k_0} \cdot \mathbf{r})]$,$\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k_0} \cdot \mathbf{r})]$

解: 由于 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$，因此有：

$$\begin{aligned}
\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-x'}{r} \\ \frac{y-y'}{r} \\ \frac{z-z'}{r} \end{pmatrix} = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r} \\
\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \\
\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

由于

□

第 3 题 得分: ________. 在地面系，静止的物体 A 在 x 方向受到恒力 $\overrightarrow{F}$，求地面系中物体的运动轨迹；设物体 B 与物体 A 同时开始运动，B 沿着 y 方向匀速直线运动，以 B 为参考系，求 B 参考系中 A 的速度和运动轨迹。

解: 在地面系中，物体 A 受到的恒力为 $\overrightarrow{F} = F\hat{i}$，因此有：

$$\frac{dp^x}{dt} = \frac{d\gamma m u^x}{dt} = F \tag{7}$$

□

其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, 这里取 $c = 1$. 我们得到参数方程：

$$\gamma m u^x = Ft \tag{8}$$

展开得到：

$$\frac{dx}{dt} = u^x = \frac{Ft}{\sqrt{m^2 + F^2 t^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}}} \tag{9}$$

积分得到：

$$x = \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \tag{10}$$

我们可以写出 A 的四位置：

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

在 B 参考系中，使用从地面系到 B 系的参数形式洛伦兹变换，其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$：

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

得到 A 在 B 参考系中的四位置：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma t \\ \sqrt{t^2 + \frac{m^2}{F^2}} - \frac{m}{F} \\ -\gamma v t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

因此 A 在 B 参考系中的速度为：

$$\begin{aligned} v'^x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{t'}{\sqrt{\gamma^2 t'^2 + \gamma^4 \frac{m^2}{F^2}}} \\ v'^y &= -v \end{aligned} \tag{14}$$