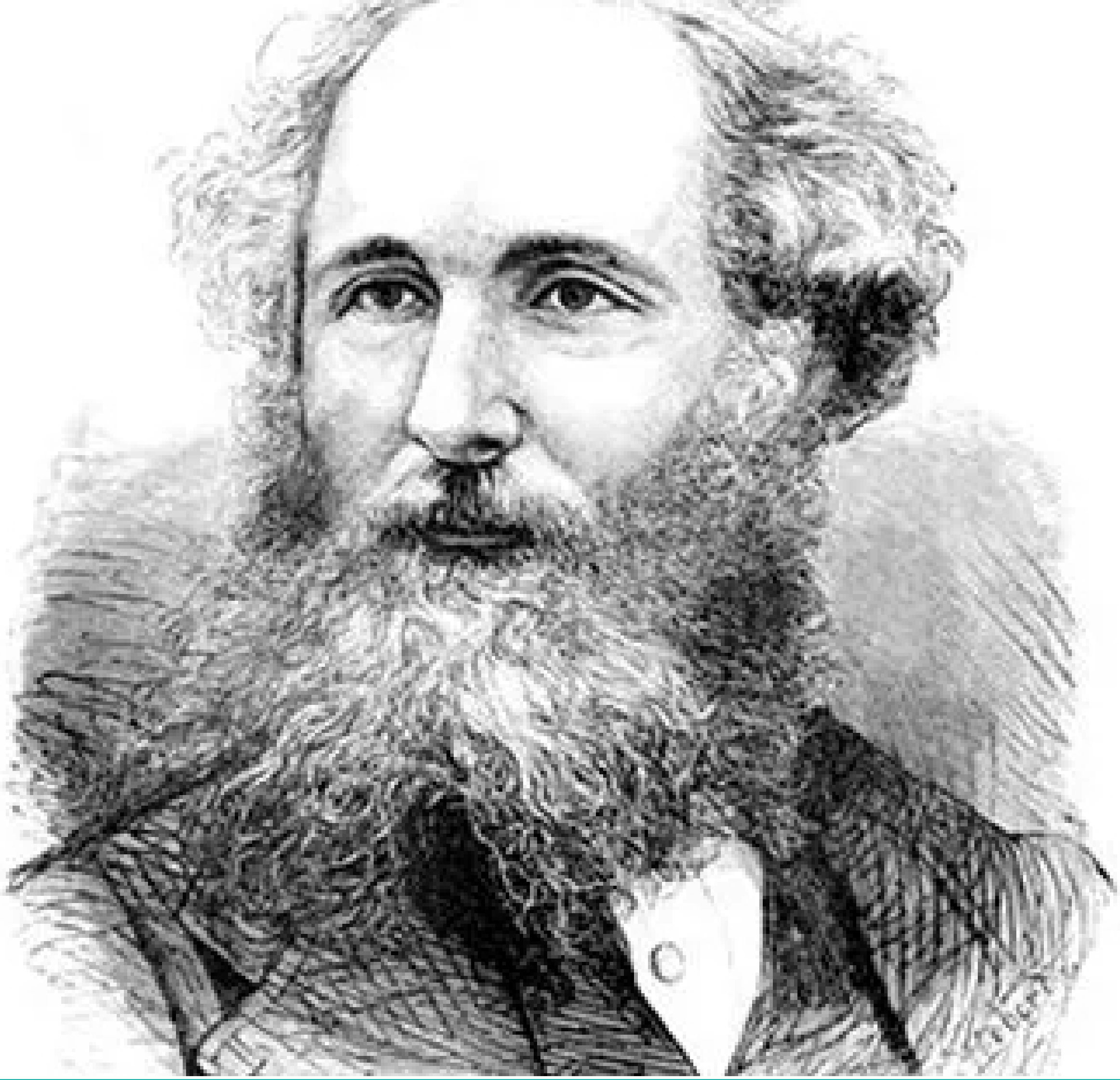

经典电动力学（第三版）

目录

第 1 章 静电学边值问题 II

1.1 球协函数的补充定理

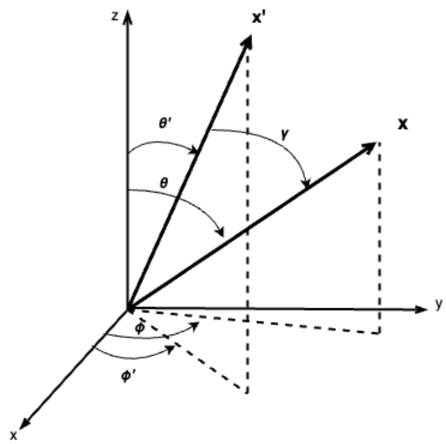

图 1.1

为了计算这个系数，我们注意到，根据公式**??**，它可以看作是函数 $\sqrt{4\pi/(2l+1)}Y_l^m(\theta,\phi)$ 在以式**??** 中的参考轴（即带撇号的坐标轴）上的球谐函数 $Y_l^m(\gamma,\beta)$ 展开中 $m\prime = 0$ 的系数。由式**??** 可以发现，由于只有一个 l 值存在，系数**??**表达为：

$$A_m(\theta',\phi') = \frac{4\pi}{2l+1}\{Y^*_{lm}[\theta(\gamma,\beta),\phi(\gamma,\beta)]\}_{\gamma=0} \tag{1.1}$$

当 $\gamma \to 0$ 时，角 (θ,ϕ) 作为 (γ,β) 的函数，将趋近于 $(\theta\prime,\phi\prime)$。由此，附加定理 **??** 得证。有时该定理会使用 $\mathrm{P}l^m(\cos\theta)$ 的形式而不是 Y_l^m 的形式来表示。此时，其形式为：

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta\prime) + 2\sum m = 1^l\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta\prime)\cos[m(\phi-\phi\prime)] \tag{3.68}$$

若角度 γ 趋于零，也可以推导出球协函数平方的“求和规则”：

$$\sum_{m=-l}^{l}|Y_l^m(\theta,\phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{3.69}$$

附加定理还可以用于将位于 $\mathbf{x}\prime$ 的单位电荷在 $\mathbf{x}$ 处产生的势的展开式**??**以最简洁的形式写出。

将式**??** 代入 $P_l(\cos\gamma)$，得到：

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\prime|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)Y_l^{m*}(\theta\prime,\phi\prime)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{3.70}$$

式 **??** 给出了坐标 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}\prime$ 中因式分解的势形式。这对于涉及电荷密度积分的情况非常有用，其中一个变量是积分变量，另一个是观测点的坐标。然而，这样做的代价是用双重求和代替了单次求和。

1.2 柱坐标系下的拉普拉斯方程；贝塞尔方程

如图**??**所示，在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 下，拉普拉斯方程为如下的形式：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

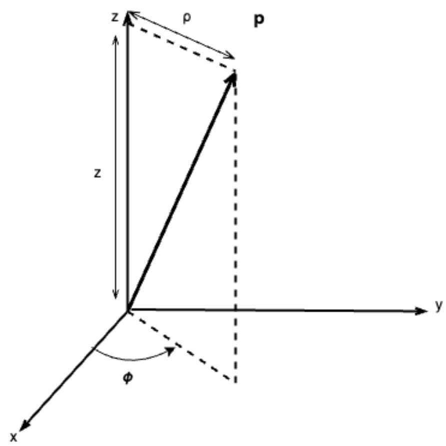

图 1.2

变量分离由如下的变换给出：

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \tag{1.3}$$

一般情况下，这将把上面的偏微分方程化为三个常微分方程：

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} - k^2Z = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2} + \nu^2Q = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}^R\rho}{\mathrm{d}+^R}\left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0
\end{gathered} \tag{1.4}$$

前两个常微分方程的解是基本的：

$$\begin{aligned}
Z(z) &= \mathrm{e}^{\pm ikz} \\
Q(\phi) &= \mathrm{e}^{\pm i\nu\phi}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

为了使势函数在整个方位角范围内是单值的，ν 必须是一个整数。但如果在 z 方向没有任何边界条件的限制，参数 k 是任意的。目前，我们假设 k 是实数且为正值。

径向的方程可以在变换 $x = k\rho$ 下变为标准形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^Rx}{\mathrm{d}+^R}\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{1.6}$$

这是贝塞尔方程的标准形式, 该方程的解被称为 ν 阶的贝塞尔函数。假设解的形式为幂级数展开的形式：

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^J \tag{1.7}$$

可以发现：

$$\alpha = \pm\nu \tag{1.8}$$

且对所有 $j = 1, 2, 3, \cdots$ 有：

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)}a_{2j-2} \tag{1.9}$$

所有奇次项的系数都为零。这样，我们就可以通过递推法给出所有的系数：

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j\Gamma(\alpha+1)}{2^{2j}j!\Gamma(j+\alpha+1)}a_0 \tag{1.10}$$