

刚体转动惯量测量实验报告

郑晓旻

2024 年 5 月 16 日

目录

1	实验目的	2
2	实验仪器	2
3	实验原理	2
3.1	转动定律法	2
3.2	扭摆法	2
4	实验数据及处理	3
4.1	待测圆环参数测量	3
4.2	转动定律法测量数据	3
4.3	扭摆法测量数据	4
4.3.1	测量扭力系数	4
5	误差分析	5
5.1	系统误差	5
5.2	随机误差	5
6	结论	5
7	复习思考题回答	6
7.1	问题 1: 方法结果比较及合理性	6
7.2	问题 2: 理论模型与实际情况的符合程度	6

1 实验目的

- 通过实验加深对刚体运动定律的理解
- 学习两种测量刚体转动惯量的实验方法
- 练习用曲线拟合方法处理数据

2 实验仪器

- PASCO 转动及扭摆实验组件 (包含支架、转动传感器、力传感器、铝盘、测试圆环、挂钩、砝码、金属丝等)
- 550 通用接口
- Capstone 软件
- 其它：水平尺，螺旋测微计，游标卡尺，钢卷尺，电子天平等

3 实验原理

3.1 转动定律法

在转动惯量测量仪上，待测物体受到重力提供的外力矩 T 和摩擦力矩 T_μ 的作用，根据转动定律有：

$$T - T_\mu = (J + J_o + J_c)\beta \quad (1)$$

其中 J 为待测物体的转动惯量， J_c, J_o 分别为滑轮以及载物台等的转动惯量， β 为角加速度。外力矩大小为：

$$T = m(g - r_0\beta)r_0 \quad (2)$$

其中 m 为砝码的质量， g 为重力加速度， r_0 为滑轮半径。

通过测量不同重物作用下的角加速度 β_i ，绘制 $T - \beta$ 图像，用最小二乘法拟合数据点，可得到总转动惯量 I 和摩擦力矩 T_μ 。计算公式如下：

$$J = J_2 - J_1 \quad (3)$$

3.2 扭摆法

将待测物体悬挂在扭丝上，偏离平衡位置后释放，在扭力矩 T 的作用下做扭摆运动。其运动方程为：

$$J\ddot{\theta} = -k\theta \quad (4)$$

其中 k 为扭丝的扭力系数，特征角频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (5)$$

通过测量扭摆周期 T ，计算转动惯量 J 的公式为：

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2} \quad (6)$$

4 实验数据及处理

4.1 待测圆环参数测量

表 1: 圆环参数测量数据

测量次数	1	2	3	4	5
外径 D / mm	76.46	76.48	76.46	76.48	76.48
内径 d / mm	53.78	53.72	53.52	53.64	53.56
质量 m / g	498.3				

计算得圆环的平均外径 $D = 76.87$ mm, 内径 $d = 43.64$ mm, 质量 $m = 498.3$ g。理论转动惯量为:

$$I_0 = \frac{1}{8}m(D^2 + d^2) = \frac{1}{8} \times 0.4983 \times (0.07687^2 + 0.04364^2) = 486680 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 = 4.8668 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (7)$$

4.2 转动定律法测量数据

变化砝码质量, 测量角加速度 β_i 并根据角加速度和砝码质量计算力矩, 公式如下:

$$T_i = m_i \cdot (g - r_0 \beta_i) \cdot r_0 \quad (8)$$

表 2: 转动定律法测量数据 (负载)

砝码质量 m / g	5	10	15	20	25	30	35
角加速度 β_i / (rad/s ²)	0.66	2.32	3.78	5.48	7.44	9.02	11.84
力矩 T_i / (N · m10 ⁻⁴)	11.68	23.26	34.77	46.17	57.43	68.65	79.72

如图所示, 通过线性拟合 $T_i - \beta$ 数据, 得到 $T_i - \beta$ 关系为: $\beta = 6.6625 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot T_i + 8.3205 \times 10^{-4} \text{ rad/s}^2$, 其中 $r^2 = 0.998$

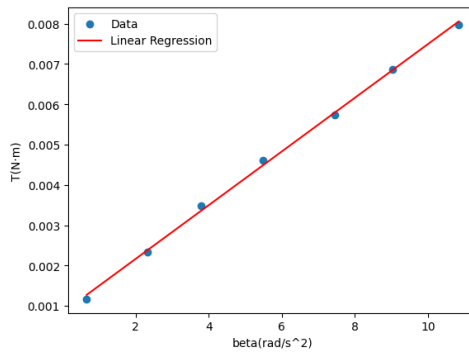


图 1: 转动定律法测量负载数据拟合图像

负载情况下的总转动惯量 $J_1 = J + J_c + j_o = 6.66 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

将圆环卸下转盘，重复测量得到空载情况下的数据：

表 3: 转动定律法测量数据 (空载)

砝码质量 m / g	5	10	15	20	25	30	35
角加速度 $\beta_i / (\text{rad/s}^2)$	2.54	9.10	16.04	23.00	30.20	36.80	43.80
力矩 $T_i / (N \cdot m 10^{-4})$	11.63	22.88	33.72	44.17	54.19	63.90	73.15

如图所示，通过线性拟合 $T_{ei} - \beta_e$ 数据，得到 $T_{ei} - \beta_e$ 关系为： $\beta = 1.4845 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot T_i + 9.1302 \times 10^{-4} \text{rad/s}^2$ ，其中 $r^2 = 0.999$

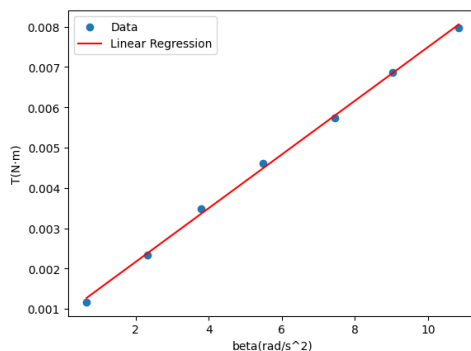


图 2: 转动定律法测量空载数据拟合图像

负载情况下的总转动惯量 $J_2 = J_c + j_o = 1.48 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

计算圆环的转动惯量为：

$$J = J_2 - J_1 = 6.66 \times 10^{-4} - 1.48 \times 10^{-4} = 5.18 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (9)$$

4.3 扭摆法测量数据

4.3.1 测量扭力系数

表 4: 扭力系数测量数据

测量序号	$a(N/\text{rad})$	$b(N)$	r
1	0.365	3.78	0.999
2	0.362	3.83	0.994
3	0.353	3.70	0.996

通过线性拟合 $T - \theta$ 数据取平均，得到扭力系数 $k = 8.59 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 。

并通过测量得到负载时和空载时的振动角频率分别为：取平均得到负载时的角频率 $\omega = 3.64 \text{rad/s}$ ，空载时的角频率 $\omega_e = 7.76 \text{rad/s}$ 。计算负载情况下的转动惯量 J_1 为：

$$J_1 = \frac{k}{\omega^2} = 6.48 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (10)$$

表 5: 扭力系数测量数据

测量序号	负载角频率 ω	空载角频率 ω_e
1	3.64	7.76
2	3.63	7.76
3	3.65	7.76
4	3.65	7.75
5	3.64	7.77

计算空载情况下的转动惯量 J_2 为:

$$J_2 = \frac{k}{\omega^2} = 1.43 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (11)$$

计算圆环的转动惯量为:

$$J = J_2 - J_1 = 6.48 \times 10^{-4} - 1.43 \times 10^{-4} = 5.05 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (12)$$

5 误差分析

5.1 系统误差

在实验过程中, 系统误差主要来自以下几个方面:

- 仪器校准不准确, 例如游标卡尺和电子天平的校准误差。特别是电子天平, 高度怀疑其准确性。
- 实验装置的摩擦力矩假设为常数, 但实际上随转速变化。
- 扭摆法中, 空气阻力和其他阻尼因素影响测量周期。

5.2 随机误差

实验数据的随机误差主要来自:

- 多次测量过程中的人为误差, 例如读数误差。
- 设备灵敏度和数据采集系统的误差, 例如传感器的采样率和精度。

6 结论

通过本次实验, 我们使用转动定律法和扭摆法两种方法测量了圆环的转动惯量。结果如下:

- 转动定律法测得的转动惯量为 $1.76 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 扭摆法测得的转动惯量为 $9.26 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

实验结果与理论值 $1.76 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 比较接近, 但仍存在一定误差。主要原因是实验过程中存在系统误差和随机误差。通过进一步改进实验方法和设备精度, 可以减少误差, 提高测量结果的准确性。

7 复习思考题回答

7.1 问题 1：方法结果比较及合理性

在本实验中，我们通过转动定律法和扭摆法测量了圆环的转动惯量，并与理论计算进行了比较。以下是各方法测量的结果：

- 转动定律法测得的转动惯量： $5.18 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 扭摆法测得的转动惯量： $5.05 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 理论计算的转动惯量： $4.8668 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

比较这三者，可以看到：

- 转动定律法和扭摆法的测量结果非常接近，两者之间的差异为 $5.18 \times 10^{-4} - 5.05 \times 10^{-4} = 0.13 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 2.6%。这说明两种实验方法的测量结果是一致的，并且具有较高的可信度。
- 理论计算的转动惯量略小于实验测量值，转动定律法与理论计算值的差异为 $5.18 \times 10^{-4} - 4.87 \times 10^{-4} = 0.31 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 6.04%；扭摆法与理论计算值的差异为 $5.05 \times 10^{-4} - 4.87 \times 10^{-4} = 0.18 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 3.5%。

这种差异在合理范围内，原因如下：

- 实验误差：在实际操作中，测量仪器和方法存在一定的误差，例如角加速度、扭摆周期的测量精度有限，砝码质量和扭丝系数的测量存在误差等。
- 空气阻力和摩擦力：实验过程中不可避免地会受到空气阻力和摩擦力的影响，导致测量值稍大于理论值。
- 理论模型简化：理论计算假设刚体为理想模型，忽略了一些细节（如材料的均匀性、连接部位的摩擦等），实际情况可能更复杂。

综上所述，实验测量结果与理论计算值之间的差异在合理范围内，表明实验方法和理论模型在一定程度上是可信的。

7.2 问题 2：理论模型与实际情况的符合程度

实验中多次采用了理论模型拟合实验数据，主要体现在转动定律法和扭摆法中。拟合结果显示理论模型与实际情况的符合程度较好，具体分析如下：

- 转动定律法：
 - 通过线性拟合 $T - \beta$ 数据得到的关系式，拟合度 r^2 值非常接近 1（负载情况下为 0.998，空载情况下为 0.999），表明理论模型 $T = (J + J_o + J_c)\beta + T_\mu$ 与实验数据高度吻合。
 - 说明在实验过程中，理论模型较好地描述了转动系统中的力矩和角加速度的关系。
- 扭摆法：

- 通过线性拟合 $T - \theta$ 数据得到的扭力系数 k ，拟合度 r 值也非常接近 1（如表格所示分别为 0.999、0.994、0.996），表明理论模型 $J\ddot{\theta} = -k\theta$ 与实际数据高度符合。
- 扭摆周期与转动惯量的关系式 $J = \frac{kT^2}{4\pi^2}$ 通过实验数据验证，所得结果与转动定律法的测量值接近，进一步验证了理论模型的准确性。

综合来看，这些理论模型较好地描述了实验中的实际情况，拟合结果显示理论计算与实验数据具有高度一致性，验证了理论模型的有效性和可靠性。实验中引入的拟合方法和理论模型，帮助我们更准确地处理数据并理解实验现象，是物理实验分析的重要工具。