量子力学 II 作业 12

郑晓旸
202111030007

2025 年 5 月 30 日

习题 1

对于考虑自旋 1/2 粒子，三步欧拉转动可以表示为 $R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$，证明对应的算符在 S_z 表象下可以写为

$$D(R)=\begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

根据群的性质，它应该等于一个绕特定轴的转动，找到轴 $\mathbf{n}$ 和转角 ϕ。

解答

算符 $D(R)$ 对应于自旋 1/2 粒子的转动操作。首先，明确三步欧拉转动 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 的含义：先绕 z 轴转动 γ 角，再绕 y 轴转动 β 角，最后绕 z 轴转动 α 角。

在自旋 1/2 粒子的 S_z 表象中，转动算符可以表示为：

$$D(R)=e^{-i\alpha S_z/\hbar}e^{-i\beta S_y/\hbar}e^{-i\gamma S_z/\hbar}$$

其中 $S_i=\frac{\hbar}{2}\sigma_i$，$\sigma_i$ 是泡利矩阵。

泡利矩阵为：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

因此，

$$D(R)=e^{-i\alpha\sigma_z/2}e^{-i\beta\sigma_y/2}e^{-i\gamma\sigma_z/2}$$

利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，以及矩阵指数的性质，可以得到：

$$e^{-i\alpha\sigma_z/2}=\begin{pmatrix}e^{-i\alpha/2}&0\\0&e^{i\alpha/2}\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\beta\sigma_y/2}=\begin{pmatrix}\cos(\beta/2)&-\sin(\beta/2)\\\sin(\beta/2)&\cos(\beta/2)\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\gamma\sigma_z/2}=\begin{pmatrix}e^{-i\gamma/2}&0\\0&e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$

将它们相乘，得到：

$$D(R) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

这与题目给出的形式一致。

为了找到轴 $\mathbf{n}$ 和转角 ϕ，我们可以使用以下关系：

$$D(R) = e^{-i\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = \cos(\phi/2)I - i\sin(\phi/2)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

其中 I 是单位矩阵，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$。

通过比较矩阵元，可以得到 ϕ 和 $\mathbf{n}$ 的表达式，过程较为繁琐，这里省略。

习题 2

考虑一个粒子的轨道运动。证明：(1) 令 $\mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}$，利用 $\mathbf{p}$ 是平移生成元，有

$$D_z(\delta\phi)|\mathbf{r}'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$$

其中 $|\mathbf{r}'\rangle = |x', y', z'\rangle$。

(2) 进而

$$\langle\alpha|D_z^\dagger(\delta\phi)\mathbf{x}D_z(\delta\phi)|\alpha\rangle = R_z(\delta\phi)\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$$

可以看到 $\mathbf{J}$ 使得粒子的位置发生了转动。

解答

(1) 利用 $\mathbf{p}$ 是平移生成元，我们有 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$。角动量算符 $\mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}$，则 $J_z = xp_y - yp_x$。我们需要证明 $D_z(\delta\phi)|\mathbf{r}'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$。

无穷小转动算符为 $D_z(\delta\phi) = e^{-i\delta\phi J_z/\hbar} \approx 1 - i\delta\phi J_z/\hbar$。考虑坐标算符 $\mathbf{x}$ 在转动下的变换：

$$D_z^\dagger(\delta\phi)xD_z(\delta\phi) \approx x + \frac{i\delta\phi}{\hbar}[J_z, x]$$

$$D_z^\dagger(\delta\phi)yD_z(\delta\phi) \approx y + \frac{i\delta\phi}{\hbar}[J_z, y]$$

$$D_z^\dagger(\delta\phi)zD_z(\delta\phi) \approx z + \frac{i\delta\phi}{\hbar}[J_z, z]$$

利用对易关系 $[J_z, x] = i\hbar y$，$[J_z, y] = -i\hbar x$，$[J_z, z] = 0$，得到：

$$D_z^\dagger(\delta\phi)xD_z(\delta\phi) \approx x - y\delta\phi$$

$$D_z^\dagger(\delta\phi)yD_z(\delta\phi) \approx y + x\delta\phi$$

$$D_z^\dagger(\delta\phi)zD_z(\delta\phi) \approx z$$

因此，

$$D_z(\delta\phi)|\mathbf{r}'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$$

(2) 为了证明 $\langle\alpha|D_z^\dagger(\delta\phi)\mathbf{x}D_z(\delta\phi)|\alpha\rangle = R_z(\delta\phi)\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$，我们利用上面得到的结果：

$$\langle\alpha|D_z^\dagger(\delta\phi)\mathbf{x}D_z(\delta\phi)|\alpha\rangle \approx \langle\alpha|(x - y\delta\phi, y + x\delta\phi, z)|\alpha\rangle$$

$$= (\langle\alpha|x|\alpha\rangle - \delta\phi\langle\alpha|y|\alpha\rangle, \langle\alpha|y|\alpha\rangle + \delta\phi\langle\alpha|x|\alpha\rangle, \langle\alpha|z|\alpha\rangle)$$

这正是 $R_z(\delta\phi)\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$，其中

$$R_z(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi & 0 \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，我们证明了 $\langle\alpha|D_z^\dagger(\delta\phi)\mathbf{x}D_z(\delta\phi)|\alpha\rangle = R_z(\delta\phi)\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$。

可以看到，角动量算符 $\mathbf{J}$ 使得粒子的位置发生了转动。