

刚体转动惯量测量实验报告

郑晓旻

2024 年 5 月 16 日

目录

| | | |
|----------|--------------------------------|----------|
| 1 | 实验目的 | 2 |
| 2 | 实验仪器 | 2 |
| 3 | 实验原理 | 2 |
| 3.1 | 转动定律法 | 2 |
| 3.2 | 扭摆法 | 2 |
| 4 | 实验数据及处理 | 3 |
| 4.1 | 待测圆环参数测量 | 3 |
| 4.2 | 转动定律法测量数据 | 3 |
| 4.3 | 扭摆法测量数据 | 4 |
| 4.3.1 | 测量扭力系数 | 4 |
| 5 | 误差分析 | 5 |
| 5.1 | 系统误差 | 5 |
| 5.2 | 随机误差 | 5 |
| 6 | 结论 | 5 |
| 7 | 复习思考题回答 | 6 |
| 7.1 | 问题 1: 方法结果比较及合理性 | 6 |
| 7.2 | 问题 2: 理论模型与实际情况的符合程度 | 6 |

1 实验目的

- 通过实验加深对刚体运动定律的理解
- 学习两种测量刚体转动惯量的实验方法
- 练习用曲线拟合方法处理数据

2 实验仪器

- PASCO 转动及扭摆实验组件 (包含支架、转动传感器、力传感器、铝盘、测试圆环、挂钩、砝码、金属丝等)
- 550 通用接口
- Capstone 软件
- 其它：水平尺，螺旋测微计，游标卡尺，钢卷尺，电子天平等

3 实验原理

3.1 转动定律法

在转动惯量测量仪上，待测物体受到重力提供的外力矩 T 和摩擦力矩 T_μ 的作用，根据转动定律有：

$$T - T_\mu = (J + J_o + J_c)\beta \quad (1)$$

其中 J 为待测物体的转动惯量， J_c, J_o 分别为滑轮以及载物台等的转动惯量， β 为角加速度。外力矩大小为：

$$T = m(g - r_0\beta)r_0 \quad (2)$$

其中 m 为砝码的质量， g 为重力加速度， r_0 为滑轮半径。

通过测量不同重物作用下的角加速度 β_i ，绘制 $T - \beta$ 图像，用最小二乘法拟合数据点，可得到总转动惯量 I 和摩擦力矩 T_μ 。计算公式如下：

$$J = J_2 - J_1 \quad (3)$$

3.2 扭摆法

将待测物体悬挂在扭丝上，偏离平衡位置后释放，在扭力矩 T 的作用下做扭摆运动。其运动方程为：

$$J\ddot{\theta} = -k\theta \quad (4)$$

其中 k 为扭丝的扭力系数，特征角频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (5)$$

通过测量扭摆周期 T ，计算转动惯量 J 的公式为：

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2} \quad (6)$$

4 实验数据及处理

4.1 待测圆环参数测量

表 1: 圆环参数测量数据

| 测量次数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 外径 D / mm | 76.46 | 76.48 | 76.46 | 76.48 | 76.48 |
| 内径 d / mm | 53.78 | 53.72 | 53.52 | 53.64 | 53.56 |
| 质量 m / g | 498.3 | | | | |

计算得圆环的平均外径 $D = 76.87$ mm, 内径 $d = 43.64$ mm, 质量 $m = 498.3$ g。理论转动惯量为:

$$I_0 = \frac{1}{8}m(D^2 + d^2) = \frac{1}{8} \times 0.4983 \times (0.07687^2 + 0.04364^2) = 486680 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 = 4.8668 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (7)$$

4.2 转动定律法测量数据

变化砝码质量, 测量角加速度 β_i 并根据角加速度和砝码质量计算力矩, 公式如下:

$$T_i = m_i \cdot (g - r_0 \beta_i) \cdot r_0 \quad (8)$$

表 2: 转动定律法测量数据 (负载)

| 砝码质量 m / g | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 角加速度 β_i / (rad/s ²) | 0.66 | 2.32 | 3.78 | 5.48 | 7.44 | 9.02 | 11.84 |
| 力矩 T_i / (N · m10 ⁻⁴) | 11.68 | 23.26 | 34.77 | 46.17 | 57.43 | 68.65 | 79.72 |

如图所示, 通过线性拟合 $T_i - \beta$ 数据, 得到 $T_i - \beta$ 关系为: $\beta = 6.6625 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot T_i + 8.3205 \times 10^{-4} \text{ rad/s}^2$, 其中 $r^2 = 0.998$

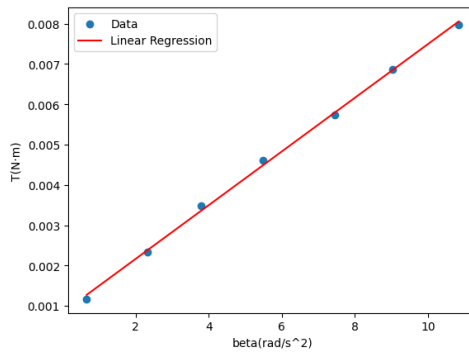


图 1: 转动定律法测量负载数据拟合图像

负载情况下的总转动惯量 $J_1 = J + J_c + j_o = 6.66 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

将圆环卸下转盘，重复测量得到空载情况下的数据：

表 3: 转动定律法测量数据 (空载)

| 砝码质量 m / g | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 角加速度 $\beta_i / (\text{rad/s}^2)$ | 2.54 | 9.10 | 16.04 | 23.00 | 30.20 | 36.80 | 43.80 |
| 力矩 $T_i / (N \cdot m 10^{-4})$ | 11.63 | 22.88 | 33.72 | 44.17 | 54.19 | 63.90 | 73.15 |

如图所示，通过线性拟合 $T_{ei} - \beta_e$ 数据，得到 $T_{ei} - \beta_e$ 关系为： $\beta = 1.4845 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot T_i + 9.1302 \times 10^{-4} \text{rad/s}^2$ ，其中 $r^2 = 0.999$

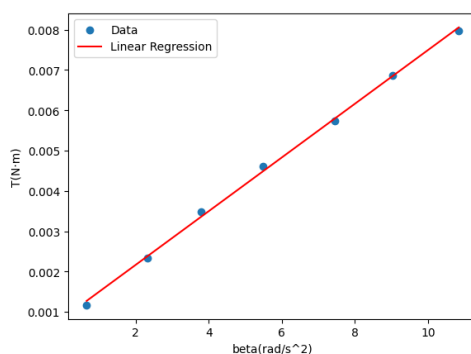


图 2: 转动定律法测量空载数据拟合图像

负载情况下的总转动惯量 $J_2 = J_c + j_o = 1.48 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

计算圆环的转动惯量为：

$$J = J_2 - J_1 = 6.66 \times 10^{-4} - 1.48 \times 10^{-4} = 5.18 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (9)$$

4.3 扭摆法测量数据

4.3.1 测量扭力系数

表 4: 扭力系数测量数据

| 测量序号 | $a(N/\text{rad})$ | $b(N)$ | r |
|------|-------------------|--------|-------|
| 1 | 0.365 | 3.78 | 0.999 |
| 2 | 0.362 | 3.83 | 0.994 |
| 3 | 0.353 | 3.70 | 0.996 |

通过线性拟合 $T - \theta$ 数据取平均，得到扭力系数 $k = 8.59 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 。

并通过测量得到负载时和空载时的振动角频率分别为：取平均得到负载时的角频率 $\omega = 3.64 \text{rad/s}$ ，空载时的角频率 $\omega_e = 7.76 \text{rad/s}$ 。计算负载情况下的转动惯量 J_1 为：

$$J_1 = \frac{k}{\omega^2} = 6.48 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (10)$$

表 5: 扭力系数测量数据

| 测量序号 | 负载角频率 ω | 空载角频率 ω_e |
|------|----------------|------------------|
| 1 | 3.64 | 7.76 |
| 2 | 3.63 | 7.76 |
| 3 | 3.65 | 7.76 |
| 4 | 3.65 | 7.75 |
| 5 | 3.64 | 7.77 |

计算空载情况下的转动惯量 J_2 为:

$$J_2 = \frac{k}{\omega^2} = 1.43 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (11)$$

计算圆环的转动惯量为:

$$J = J_2 - J_1 = 6.48 \times 10^{-4} - 1.43 \times 10^{-4} = 5.05 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (12)$$

5 误差分析

5.1 系统误差

在实验过程中, 系统误差主要来自以下几个方面:

- 仪器校准不准确, 例如游标卡尺和电子天平的校准误差。特别是电子天平, 高度怀疑其准确性。
- 实验装置的摩擦力矩假设为常数, 但实际上随转速变化。
- 扭摆法中, 空气阻力和其他阻尼因素影响测量周期。

5.2 随机误差

实验数据的随机误差主要来自:

- 多次测量过程中的人为误差, 例如读数误差。
- 设备灵敏度和数据采集系统的误差, 例如传感器的采样率和精度。

6 结论

通过本次实验, 我们使用转动定律法和扭摆法两种方法测量了圆环的转动惯量。结果如下:

- 转动定律法测得的转动惯量为 $1.76 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 扭摆法测得的转动惯量为 $9.26 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

实验结果与理论值 $1.76 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 比较接近, 但仍存在一定误差。主要原因是实验过程中存在系统误差和随机误差。通过进一步改进实验方法和设备精度, 可以减少误差, 提高测量结果的准确性。

7 复习思考题回答

7.1 问题 1：方法结果比较及合理性

在本实验中，我们通过转动定律法和扭摆法测量了圆环的转动惯量，并与理论计算进行了比较。以下是各方法测量的结果：

- 转动定律法测得的转动惯量： $5.18 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 扭摆法测得的转动惯量： $5.05 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 理论计算的转动惯量： $4.8668 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

比较这三者，可以看到：

- 转动定律法和扭摆法的测量结果非常接近，两者之间的差异为 $5.18 \times 10^{-4} - 5.05 \times 10^{-4} = 0.13 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 2.6%。这说明两种实验方法的测量结果是一致的，并且具有较高的可信度。
- 理论计算的转动惯量略小于实验测量值，转动定律法与理论计算值的差异为 $5.18 \times 10^{-4} - 4.87 \times 10^{-4} = 0.31 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 6.04%；扭摆法与理论计算值的差异为 $5.05 \times 10^{-4} - 4.87 \times 10^{-4} = 0.18 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，约为 3.5%。

这种差异在合理范围内，原因如下：

- **实验误差：**在实际操作中，测量仪器和方法存在一定的误差，例如角加速度、扭摆周期的测量精度有限，砝码质量和扭丝系数的测量存在误差等。
- **空气阻力和摩擦力：**实验过程中不可避免地会受到空气阻力和摩擦力的影响，导致测量值稍大于理论值。
- **理论模型简化：**理论计算假设刚体为理想模型，忽略了一些细节（如材料的均匀性、连接部位的摩擦等），实际情况可能更复杂。

综上所述，实验测量结果与理论计算值之间的差异在合理范围内，表明实验方法和理论模型在一定程度上是可信的。

7.2 问题 2：理论模型与实际情况的符合程度

实验中多次采用了理论模型拟合实验数据，主要体现在转动定律法和扭摆法中。拟合结果显示理论模型与实际情况的符合程度较好，具体分析如下：

- **转动定律法：**
 - 通过线性拟合 $T - \beta$ 数据得到的关系式，拟合度 r^2 值非常接近 1（负载情况下为 0.998，空载情况下为 0.999），表明理论模型 $T = (J + J_o + J_c)\beta + T_\mu$ 与实验数据高度吻合。
 - 说明在实验过程中，理论模型较好地描述了转动系统中的力矩和角加速度的关系。
- **扭摆法：**

- 通过线性拟合 $T - \theta$ 数据得到的扭力系数 k ，拟合度 r 值也非常接近 1（如表格所示分别为 0.999、0.994、0.996），表明理论模型 $J\ddot{\theta} = -k\theta$ 与实际数据高度符合。
- 扭摆周期与转动惯量的关系式 $J = \frac{kT^2}{4\pi^2}$ 通过实验数据验证，所得结果与转动定律法的测量值接近，进一步验证了理论模型的准确性。

综合来看，这些理论模型较好地描述了实验中的实际情况，拟合结果显示理论计算与实验数据具有高度一致性，验证了理论模型的有效性和可靠性。实验中引入的拟合方法和理论模型，帮助我们更准确地处理数据并理解实验现象，是物理实验分析的重要工具。