RLC 稳态电路实验预习报告

郑晓旸

2024 年 3 月 13 日

目录

1 实验目的

1. 了解电感和电容的电学特性
2. 深入理解 RLC 串联谐振电路的特性
3. 掌握用示波器观察和测量稳态信号的方法

2 实验仪器

1. 数字示波器
2. 信号发生器
3. 九孔电路实验板
4. 电学元件 (电阻、电容、电感、导线等)
5. 数字多用表

3 实验原理

3.1 电感器和电容器

电感器和电容器是常见的无源电路元件。理想电感器的伏安特性为:

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1}$$

其中,$u(t)$ 为电感两端电压,$i(t)$ 为通过电感的电流,L 为电感值, 单位为亨利 (H)。

理想电容器的伏安特性为:

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \tag{2}$$

其中,$i(t)$ 为流经电容的电流,$u(t)$ 为电容两端电压,C 为电容值, 单位为法拉 (F)。

3.2 RLC 串联谐振电路

如图 1所示,RLC 串联谐振电路由电阻 R、电感 L 和电容 C 串联而成, 交流电压源为 $u(t) = u_0\sin(\omega t)$。

根据基尔霍夫电压定律, 电路方程为:

$$L\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + R\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{C}u_C(t) = u_0\sin(\omega t) \tag{3}$$

其中,$u_C(t)$ 为电容两端电压。引入固有频率 ω_0 和品质因数 Q:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{4}$$

电路方程可改写为:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_0\sin(\omega t) \tag{5}$$

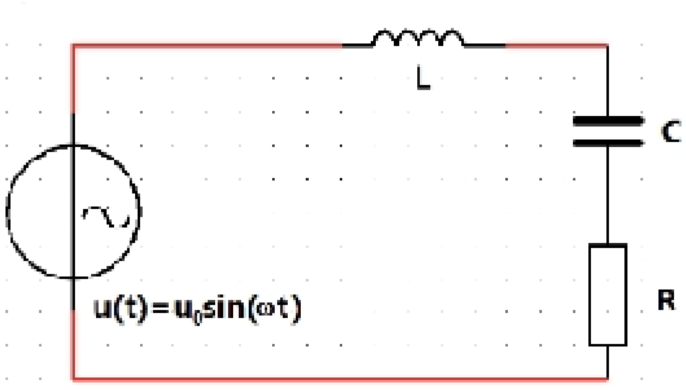

图 1: RLC 串联谐振电路

该方程的稳态解为:

$$\begin{cases} \frac{u_C(t)}{u_0} = -\frac{Q\omega_0}{\omega} A\cos(\omega t+\phi) \\ \frac{u_R(t)}{u_0} = A\sin(\omega t+\phi) \\ \frac{u_L(t)}{u_0} = \frac{Q\omega}{\omega_0} A\cos(\omega t+\phi) \end{cases} \tag{6}$$

其中,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0})^2}}, \quad \phi = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \tag{7}$$

$A(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 分别称为电路的幅频特性和相频特性, 统称为频率特性。当 $\omega=\omega_0$ 时, 电路达到谐振状态, 此时 $A(\omega_0)=1$,$\phi(\omega_0)=0$。品质因数 Q 反映了谐振时的电压放大倍数、频率选择性以及能量耗散的快慢。

4 实验方法

本实验采用示波器和信号发生器测量 RLC 串联谐振电路的特性, 实验电路如图 2所示。

4.1 谐振频率测量

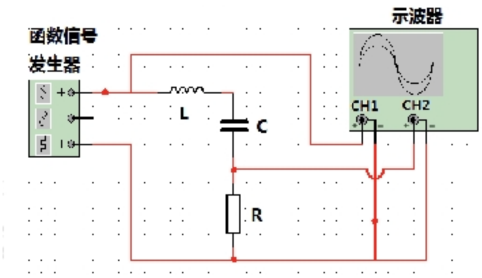

图 2: 谐振频率测量电路

将信号发生器的输出和电阻两端电压分别接入示波器的两个通道, 调节信号发生器频率, 直到两个信号同相位, 此时输入信号频率即为谐振频率 ω_0。示波器可使用 XY 模式方便判断两信号是否同相位, 如图 3所示。

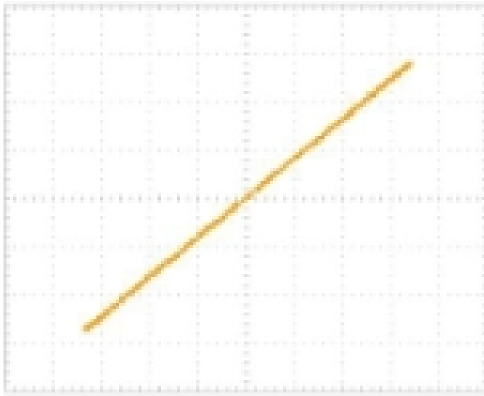

图 3: 示波器 XY 模式显示两个同频率正弦信号

4.2 品质因数测量

达到谐振状态后, 测量电容两端电压幅值 U_C 和输入信号幅值 U_0, 品质因数 Q 为:

$$Q = \frac{U_C}{U_0} \tag{8}$$

示波器可使用光标手动测量或自动测量电压幅值。注意调节垂直灵敏度, 使信号尽量放大但不超出屏幕范围, 以减小读数误差。

实际电感存在等效电阻 R_L, 计算品质因数的理论值时, 应使用等效电阻 $R_{eq} = R + R_L$ 代替电路中的电阻 R。R_L 可用 LCR 测试仪在谐振频率下测得。

此外, 也可根据相频特性曲线 $\phi(\omega)$ 在 ω_0 处的变化率计算品质因数:

$$Q = -\frac{\omega_0}{2} \left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \tag{9}$$

4.3 频率特性测量

保持图 2的测量电路, 改变信号发生器频率, 在每个频率点测量 U_R 和 U_0 的幅值比 $A = U_R/U_0$ 以及两信号的相位差 ϕ。为与理论值比较, 需将幅值比修正为:

$$A' = \frac{R + R_L}{R} A \tag{10}$$

相位差可用示波器光标测量, 将两信号调至屏幕水平中线, 测出它们的周期 T 和同相位点的时间差 δT(超前为正, 滞后为负), 则相位差为:

$$\phi = \frac{\delta T}{T} \times 360^\circ \tag{11}$$

频率选取应覆盖低频到高频, 且相位差变化范围不小于 160°。每隔 5° 左右选取一个频率点, 获得幅频和相频特性曲线。

5 预习思考题

1. **保持 L 和 C 不变, 增大 R, 电路的谐振频率与品质因数如何改变?**

根据 RLC 串联谐振电路的理论分析, 固有频率 ω_0 和品质因数 Q 的表达式为:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{12}$$

(a) 当保持电感 L 和电容 C 不变, 增大电阻 R 时:

谐振频率 ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13}$$

由于 L 和 C 保持不变, 谐振频率 ω_0 也不会改变。

(b) 品质因数 Q:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{14}$$

当 R 增大时, 品质因数 Q 与 R 成反比, 因此 Q 将减小。

品质因数 Q 的变化会影响电路的频率选择性和谐振峰的尖锐程度。Q 值越大, 频率选择性越好, 谐振峰越尖锐;Q 值越小, 频率选择性越差, 谐振峰越平坦。

综上所述, 保持 L 和 C 不变, 增大 R 时:

- 谐振频率 ω_0 保持不变;
- 品质因数 Q 减小, 频率选择性变差, 谐振峰变平坦。

2. **对于 RLC 串联谐振的频率响应曲线, 当频率取对数坐标时, 证明幅频特性曲线关于 $\omega = \omega_0$ 是对称的, 而相频特性曲线是反对称的.**

对于 RLC 串联谐振电路的频率响应曲线, 当频率取对数坐标时, 幅频特性曲线 $A(\omega)$ 和相频特性曲线 $\phi(\omega)$ 分别满足以下关系:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2}} \tag{15}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \tag{16}$$

当频率取对数坐标时, 令 $x = \log(\omega/\omega_0)$, 则 $\omega = \omega_0 e^x$。将其代入 $A(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 的表达式, 得到:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(e^{-x} - e^x)^2}} \tag{17}$$

$$\phi(x) = \arctan\left[Q\left(e^{-x} - e^x\right)\right] \tag{18}$$

对于幅频特性曲线 $A(x)$, 有:

$$A(-x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(e^x - e^{-x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(e^{-x} - e^x)^2}} = A(x) \tag{19}$$

因此,$A(x)$ 关于 $x = 0$（即 $\omega = \omega_0$）对称。

对于相频特性曲线 $\phi(x)$, 有:

$$\phi(-x) = \arctan\left[Q\left(e^x - e^{-x}\right)\right] = \arctan\left[-Q\left(e^{-x} - e^x\right)\right] = -\phi(x) \tag{20}$$

因此,$\phi(x)$ 关于 $x = 0$（即 $\omega = \omega_0$）反对称。

3. **如果 $Q \gg 1$, 如何理解谐振时电容上的电压远高于电路的输入电压?**

在谐振状态下, 电容两端电压为:

$$u_C(t) = -Qu_0 \cos(\omega_0 t) \tag{21}$$

电容两端电压幅值为输入电压幅值的 Q 倍。当 $Q \gg 1$ 时, 电容两端电压可远高于输入电压。这可以从能量的角度理解:

在谐振过程中, 电感和电容不断交换能量。设电路在 $t = 0$ 时的初始能量为 E_0, 则在谐振过程中, 电路总能量保持不变:

$$E = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t) = E_0 \tag{22}$$

由于 $i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$, 代入上式得:

$$E = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C(t)}{dt}\right)^2 = E_0 \tag{23}$$

在谐振状态下,$u_C(t)$ 和 $\frac{du_C(t)}{dt}$ 的幅值分别为 QU_0 和 $\omega_0 QU_0$, 代入上式得:

$$E_0 = \frac{1}{2}C(QU_0)^2 + \frac{1}{2}LC^2(\omega_0 QU_0)^2 = \frac{1}{2}C(QU_0)^2 + \frac{1}{2}C(QU_0)^2 = C(QU_0)^2 \tag{24}$$

可见, 谐振时电路总能量为 $C(QU_0)^2$, 是输入能量 $\frac{1}{2}CU_0^2$ 的 $4Q^2$ 倍。这表明, 在谐振过程中, 电感和电容不断交换能量, 使得能量逐渐累积, 当 $Q \gg 1$ 时, 电路内能量可远大于输入能量, 因此电容两端电压也远高于输入电压。

4. **在谐振状态, 能否用电感器上的电压与输入电压的幅度比计算品质因数?**

在谐振状态下, 不能直接用电感两端电压与输入电压的幅值比计算品质因数。下面给出具体推导说明:

在谐振频率 ω_0 下, 电感两端电压为:

$$u_L(t) = \frac{Q\omega_0}{\omega_0}u_0 \cos(\omega_0 t) = Qu_0 \cos(\omega_0 t) \tag{25}$$

电感两端电压幅值 U_L 与输入电压幅值 U_0 之比为:

$$\frac{U_L}{U_0} = Q \tag{26}$$

但是, 这个比值虽然在数值上等于品质因数 Q, 却不能直接用于计算 Q。因为在谐振状态下, 电感两端电压与输入电压同相位, 而品质因数的定义是电容两端电压与输入电压幅值之比:

$$Q = \frac{U_C}{U_0} \tag{27}$$

其中, 电容两端电压为:

$$u_C(t) = -Qu_0 \cos(\omega_0 t) \tag{28}$$

电容两端电压与输入电压反相, 幅值是输入电压的 Q 倍。因此, 在谐振状态下, 只能用电容两端电压与输入电压的幅值比来计算品质因数, 而不能用电感两端电压。

5. **实验中能否根据电阻上的电压达到最大值判断电路达到谐振?**

   不能根据电阻两端电压达到最大值判断电路达到谐振。下面给出详细推导:

   根据电路的频率特性, 电阻两端电压为:

$$u_R(t) = u_0 A \sin(\omega t + \phi) \tag{29}$$

   其中, 幅值 A 和相位差 ϕ 分别为:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2}}, \quad \phi = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \tag{30}$$

   要找到 $u_R(t)$ 幅值最大时对应的频率, 需对 A 求导并令其为零:

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{Q^2(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0})}{[1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2]^{3/2}} = 0 \tag{31}$$

   解得:

$$\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} \tag{32}$$

   可见,$u_R(t)$ 幅值最大时对应的频率 ω_{max} 与谐振频率 ω_0 并不完全相等, 而是略大于 ω_0。当 $Q \gg 1$ 时, 两者较为接近:

$$\omega_{max} \approx \omega_0(1 + \frac{1}{4Q^2}) \tag{33}$$

   但在 Q 较小时, 误差会比较显著。因此, 不能根据电阻两端电压达到最大值来判断电路达到谐振。准确的判断方法应该是观察输入信号与电阻两端电压的相位差, 当相位差为零时, 电路达到谐振。

6. **对于相-频特性曲线 $\phi(\omega)$, 除了可根据 $\phi(\omega) = \pm\frac{\pi}{4}$ 确定带宽, 从而计算品质因数, 还可以根据 $\phi(\omega)$ 在 ω_0 处的变化率测量品质因数。证明**

$$-\omega_0\phi'(\omega_0) = 2Q$$

   根据上面性质, 如何测量电路的品质因数?

   对于相频特性曲线 $\phi(\omega)$, 由公式

$$\phi(\omega) = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \tag{34}$$

   求导可得:

$$\begin{aligned} \phi'(\omega) &= \frac{Q}{\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2 + 1} \cdot \left(-\frac{\omega_0}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0}\right) && (35) \\ &= \frac{Q}{\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2 + 1} \cdot \left(-\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2\omega_0}\right) && (36) \end{aligned}$$

   当 $\omega = \omega_0$ 时,

$$\phi'(\omega_0) = \frac{Q}{1} \cdot \left(-\frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2\omega_0}\right) = -\frac{2Q}{\omega_0} \tag{37}$$

   即

$$-\omega_0\phi'(\omega_0) = 2Q \tag{38}$$

   根据上述性质, 测量电路品质因数的步骤如下:

(a) 测得谐振频率 ω_0;

(b) 在 ω_0 附近选取两个频率点 ω_1 和 ω_2, 测量相应的相位差 ϕ_1 和 ϕ_2;

(c) 计算 ω_0 处的相位变化率:

$$\phi'(\omega_0) \approx \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega_2 - \omega_1} \tag{39}$$

(d) 代入公式计算品质因数:

$$Q \approx -\frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega_2 - \omega_1} \tag{40}$$