Problem 1

使用拉普拉斯变换或者傅里叶变换求解常微分方程：

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + u = \cos\varphi \tag{1}$$

拉普拉斯变换

Solution
对任意函数 $f(t)$，其拉普拉斯变换定义为：

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2}$$

其中 s 是复变量。对于函数 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$，有：

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{3}$$

对于函数 $f(t)$ 的二阶导数 $f''(t)$，有：

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{4}$$

几个有用的拉普拉斯变换如下：

$$\mathcal{L}\{\cos\varphi\} = \frac{p}{p^2+1} \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\{\sin\varphi\} = \frac{1}{p^2+1} \tag{6}$$

$$\mathcal{L}\{\varphi\exp i\varphi\} = i\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) \tag{7}$$

对上述常微分方程两端做拉普拉斯变换，得：

$$p^2V(p) - pv(0) - v'(0) + V(p) = \frac{p}{p^2+1} \tag{8}$$

其中 $V(p)$ 是 $v(\varphi)$ 的拉普拉斯变换。对上式整理，得：

$$V(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{pv(0)+v'(0)}{p^2+1} \tag{9}$$

对上式右端两项分别求逆拉普拉斯变换，得：

$$v(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi + v(0)\cos\varphi + v'(0)\sin\varphi \tag{10}$$