量子力学 II 作业 9

郑晓旸

202111030007

2025 年 5 月 15 日

问题

考虑 $S=1$ 自旋。

1. 证明其相干态（$\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 的最大本征态）$|\mathbf{n}\rangle$ 可以表示成两个自旋 $s=1/2$ 相干态的直积：

$$|\mathbf{n}\rangle_{S=1} = |\mathbf{n}\rangle_{s=1/2,A} \otimes |\mathbf{n}\rangle_{s=1/2,B}$$

2. 已知 $|\mathbf{n}\rangle$ 具有完备性，求出封闭路径的 Berry 相位 $\gamma_B=-\Omega$，其中 Ω 是路径在参数空间（单位球面）上所围的立体角。

3. 推广到任意自旋 S 情况，证明 $\gamma_B=-S\Omega$。

(注：采用 $\hbar=1$)

证明

(1) $S=1$ 相干态的直积表示

一个自旋为 S 的相干态 $|\mathbf{n}\rangle_S$ 定义为算符 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 的具有最大本征值 S 的本征态，其中 $\mathbf{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$ 是单位方向矢量。

$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})|\mathbf{n}\rangle_S = S|\mathbf{n}\rangle_S$$

对于一个自旋 $s=1/2$ 的系统，其相干态 $|\mathbf{n}\rangle_{1/2}$ 满足：

$$(\mathbf{s}\cdot\mathbf{n})|\mathbf{n}\rangle_{1/2} = \frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle_{1/2}$$

考虑两个自旋 $s_A=1/2$ 和 $s_B=1/2$ 的系统，总自旋算符为 $\mathbf{S}=\mathbf{s}_A+\mathbf{s}_B$。根据角动量耦合规则，$1/2\otimes 1/2 = 1\oplus 0$。我们关注的是 $S=1$ 的态空间。构造两个自旋 1/2 相干态的直积，它们都指向同一个方向 $\mathbf{n}$：

$$|\Psi\rangle = |\mathbf{n}\rangle_{1/2,A} \otimes |\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}$$

考察 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 作用于 $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})|\Psi\rangle &= ((\mathbf{s}_A+\mathbf{s}_B)\cdot\mathbf{n})(|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}) \\
&= ((\mathbf{s}_A\cdot\mathbf{n})+(\mathbf{s}_B\cdot\mathbf{n}))(|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}) \\
&= ((\mathbf{s}_A\cdot\mathbf{n})|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A})\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}+|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes((\mathbf{s}_B\cdot\mathbf{n})|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}) \\
&= \left(\frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\right)\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}+|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes\left(\frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)(|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}) \\
&= 1\cdot(|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}) = 1\cdot|\Psi\rangle
\end{aligned}$$

这表明 $|\Psi\rangle$ 是总自旋算符 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 的本征态，其本征值为 1。对于 $S=1$ 系统，最大的本征值就是 $S=1$。因此，根据自旋 $S=1$ 相干态的定义，我们有:

$$|\mathbf{n}\rangle_{S=1} = |\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}\otimes|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}$$

其中下标 A 和 B 指代两个 $s=1/2$ 的子系统。证明完毕。

(2) $S=1$ 系统的 Berry 相位

Berry 相位定义为 $\gamma_B=\oint_C \mathcal{A}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}$，其中 $\mathcal{A}(\mathbf{R})=i\langle\mathbf{n}(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}(\mathbf{R})\rangle$ 是 Berry 联络，$\mathbf{R}$ 代表参数（如 θ,ϕ）。

令 $|\mathbf{n}\rangle\equiv|\mathbf{n}\rangle_{S=1}$，$|\mathbf{n}\rangle_A\equiv|\mathbf{n}\rangle_{1/2,A}$，$|\mathbf{n}\rangle_B\equiv|\mathbf{n}\rangle_{1/2,B}$。

$$\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle = (\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_A)\otimes|\mathbf{n}\rangle_B+|\mathbf{n}\rangle_A\otimes(\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_B)$$

所以,

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{n}|\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle &= (\langle\mathbf{n}|_A\otimes\langle\mathbf{n}|_B)\left((\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_A)\otimes|\mathbf{n}\rangle_B+|\mathbf{n}\rangle_A\otimes(\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_B)\right) \\
&= \langle\mathbf{n}|_A\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_A\cdot\langle\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_B\rangle+\langle\mathbf{n}_A|\mathbf{n}_A\rangle\cdot\langle\mathbf{n}|_B\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_B
\end{aligned}$$

由于相干态是归一化的，$\langle\mathbf{n}_A|\mathbf{n}_A\rangle=1$ 且 $\langle\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_B\rangle=1$。

$$\langle\mathbf{n}|\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle = \langle\mathbf{n}|_A\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_A+\langle\mathbf{n}|_B\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_B$$

因此，Berry 联络是各个子系统 Berry 联络之和:

$$\mathcal{A}_{S=1}(\mathbf{R}) = i\langle\mathbf{n}|\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle = i\langle\mathbf{n}|_A\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_A+i\langle\mathbf{n}|_B\nabla_{\mathbf{R}}|\mathbf{n}\rangle_B = \mathcal{A}_{1/2,A}(\mathbf{R})+\mathcal{A}_{1/2,B}(\mathbf{R})$$

所以 Berry 相位也是相加的:

$$\gamma_{B,S=1}=\oint_C\mathcal{A}_{S=1}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}=\oint_C\mathcal{A}_{1/2,A}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}+\oint_C\mathcal{A}_{1/2,B}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}=\gamma_{B,1/2,A}+\gamma_{B,1/2,B}$$

对于一个自旋 $s=1/2$ 的系统，其 Berry 相位是 $\gamma_{B,1/2}=-(1/2)\Omega$，其中 Ω 是路径 C 在参数空间（单位球面）上所围的立体角。因此，对于 $S=1$ 系统:

$$\gamma_{B,S=1} = -\frac{1}{2}\Omega-\frac{1}{2}\Omega = -1\cdot\Omega = -\Omega$$

证明完毕。

(3) 推广到任意自旋 S

一个自旋为 S 的系统可以看作是由 $2S$ 个自旋为 $s = 1/2$ 的基本粒子在完全对称态下组合而成。总自旋算符为 $\mathbf{S}_{\text{total}} = \sum_{k=1}^{2S} \mathbf{s}_k$。自旋 S 相干态 $|\mathbf{n}\rangle_S$ 是 $\mathbf{S}_{\text{total}} \cdot \mathbf{n}$ 的具有最大本征值 S 的本征态。这个态可以表示为 $2S$ 个自旋 $1/2$ 相干态的直积（它们都指向同一个方向 $\mathbf{n}$），因为这个直积态是全对称的，并且是 $\mathbf{S}_{\text{total}} \cdot \mathbf{n}$ 的本征态，本征值为 $\sum_{k=1}^{2S}(1/2) = S$。

$$|\mathbf{n}\rangle_S = \bigotimes_{k=1}^{2S} |\mathbf{n}\rangle_{1/2,k}$$

类似于第 (2) 部分的推导，总系统的 Berry 联络是各个 $s = 1/2$ 子系统 Berry 联络之和：

$$\mathcal{A}_S(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{2S} \mathcal{A}_{1/2,k}(\mathbf{R})$$

因此，总系统的 Berry 相位是各个子系统 Berry 相位之和：

$$\gamma_{B,S} = \sum_{k=1}^{2S} \gamma_{B,1/2,k}$$

由于每个自旋 $1/2$ 子系统贡献的 Berry 相位都是 $-(1/2)\Omega$：

$$\gamma_{B,S} = \sum_{k=1}^{2S} \left(-\frac{1}{2}\Omega\right) = 2S \cdot \left(-\frac{1}{2}\Omega\right) = -S\Omega$$

证明完毕。

附注：自旋 $s = 1/2$ 系统的 Berry 联络与相位

自旋 $1/2$ 相干态 $|\mathbf{n}(\theta, \phi)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$。Berry 联络的分量为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\theta &= i\langle \mathbf{n}|\frac{\partial}{\partial\theta}|\mathbf{n}\rangle = 0 \\
\mathcal{A}_\phi &= i\langle \mathbf{n}|\frac{\partial}{\partial\phi}|\mathbf{n}\rangle = -\sin^2(\theta/2) = -\frac{1-\cos\theta}{2}
\end{aligned}$$

Berry 相位 $\gamma_B = \oint(\mathcal{A}_\theta d\theta + \mathcal{A}_\phi d\phi) = \oint -\frac{1-\cos\theta}{2} d\phi$。如果路径是沿着固定 θ 绕行一周 (ϕ 从 0 到 2π)：

$$\gamma_B = -\frac{1-\cos\theta}{2}\int_0^{2\pi} d\phi = -\pi(1-\cos\theta)$$

该路径所围的立体角 $\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta \sin\theta' d\theta' = 2\pi(1-\cos\theta)$。因此，$\gamma_B = -(1/2)\Omega$。