量子力学 II 作业 11

郑晓旸
202111030007

2025 年 5 月 29 日

问题 1

考虑一维系统中的有限平移算符 $T(a)$ 与位置算符 $\hat{x}$。

1. 计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$。
2. 设系统在某时刻的状态为 $|\psi\rangle$。当此状态经过平移算符 $T(a)$ 作用后变为 $|\psi'\rangle = T(a)|\psi\rangle$，计算位置算符的期望值 $\langle\hat{x}\rangle$ 如何变化。

解答

1. 计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$

有限平移算符 $T(a)$ 的定义是它作用在任意位置本征态 $|x\rangle$ 上时，将其平移 a：

$$T(a)|x\rangle = |x + a\rangle$$

位置算符 $\hat{x}$ 作用在位置本征态 $|x\rangle$ 上时，其本征值为 x：

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

我们计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$ 作用在一个任意的位置本征态 $|x'\rangle$ 上（使用 x' 以区别算符 $\hat{x}$ 的符号）：

$$[T(a), \hat{x}]|x'\rangle = (T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a))|x'\rangle$$

分别计算等号右边的两项：

$$T(a)\hat{x}|x'\rangle = T(a)(x'|x'\rangle) = x'T(a)|x'\rangle = x'|x' + a\rangle$$

$$\hat{x}T(a)|x'\rangle = \hat{x}|x'+a\rangle = (x'+a)|x'+a\rangle$$

将这两项相减：

$$(T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a))|x'\rangle = x'|x'+a\rangle - (x'+a)|x'+a\rangle$$

$$= (x' - x' - a)|x'+a\rangle$$

$$= -a|x'+a\rangle$$

注意到 $T(a)|x'\rangle = |x'+a\rangle$，所以上式可以写为：

$$[T(a), \hat{x}]|x'\rangle = -aT(a)|x'\rangle$$

由于 $|x'\rangle$ 是任意的位置本征态，且位置本征态构成一组完备基，因此上述关系对任意态都成立。故我们可以得到算符之间的关系：

$$[T(a), \hat{x}] = -aT(a)$$

2. 计算 $\langle\hat{x}\rangle$ 在平移后的变化

假设系统原来的状态是 $|\psi\rangle$，则位置的期望值为：

$$\langle\hat{x}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$$

经过平移算符 $T(a)$ 作用后，系统的新状态是 $|\psi'\rangle = T(a)|\psi\rangle$。在新状态下，位置的期望值为：

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi'} = \langle\psi'|\hat{x}|\psi'\rangle = \langle\psi|T(a)^\dagger\hat{x}T(a)|\psi\rangle$$

我们知道平移算符 $T(a)$ 可以由动量算符 $\hat{p}$ 生成，其形式为 $T(a) = e^{-i\hat{p}a/\hbar}$。由于动量算符 $\hat{p}$ 是厄米算符 ($\hat{p}^\dagger = \hat{p}$)，且 a 是实数，所以平移算符的厄米共轭为：

$$T(a)^\dagger = (e^{-i\hat{p}a/\hbar})^\dagger = e^{i\hat{p}^\dagger a/\hbar} = e^{i\hat{p}a/\hbar} = T(-a)$$

因此，新的期望值表达式变为：

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi'} = \langle\psi|T(-a)\hat{x}T(a)|\psi\rangle$$

现在我们利用第一部分得到的对易式结果来化简 $T(-a)\hat{x}T(a)$。我们有 $[T(a), \hat{x}] = T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a) = -aT(a)$。在该等式两边左乘 $T(a)^\dagger = T(-a)$：

$$T(-a)(T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a)) = T(-a)(-aT(a))$$

$$T(-a)T(a)\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -aT(-a)T(a)$$

由于 $T(-a)T(a) = T(a)^\dagger T(a) = I$ (单位算符)，上式变为：

$$I\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -aI$$

$$\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -a$$

整理得到算符关系：

$$T(-a)\hat{x}T(a) = \hat{x} + a$$

将此结果代回到 $\langle\hat{x}\rangle_{\psi'}$ 的表达式中：

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi'} = \langle\psi|(\hat{x}+a)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle + \langle\psi|a|\psi\rangle$$

由于 a 是一个常数，可以提到积分号外：

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi'} = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle + a\langle\psi|\psi\rangle$$

如果态 $|\psi\rangle$ 是归一化的，即 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$，则：

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi'} = \langle\hat{x}\rangle_{\psi} + a$$

这表明，在平移操作 $T(a)$ 之后，位置算符的期望值相对于原期望值增加了 a。因此，位置期望值的变化量为：

$$\Delta\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{x}\rangle_{\psi'} - \langle\hat{x}\rangle_{\psi} = a$$

问题 2

证明 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的正本征态 $|\vec{n},+\rangle$ 可以通过对 $|z,+\rangle$ 的两步转动得到：

$$|\vec{n},+\rangle = e^{-i\sigma_z\phi/2}e^{-i\sigma_y\theta/2}|z,+\rangle$$

其中 $\vec{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$，$\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 是泡利矩阵。

解答

我们要证明的是，通过指定的两步幺正变换作用于自旋向上的态 $|z,+\rangle$，可以得到在 $\vec{n}$ 方向上自旋向上的态 $|\vec{n},+\rangle$。

1. 定义与基本算符

泡利矩阵为：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

自旋沿 z 轴正方向的本征态为：

$$|z,+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

对于任意泡利矩阵 σ_k，我们有 $(\sigma_k)^2=I$ (单位矩阵)。因此，旋转算符可以展开为：

$$e^{-i\sigma_k\alpha/2}=I\cos(\alpha/2)-i\sigma_k\sin(\alpha/2)$$

2. 第一步转动：绕 y 轴旋转 θ

第一步转动算符为 $U_y(\theta)=e^{-i\sigma_y\theta/2}$。

$$U_y(\theta)=I\cos(\theta/2)-i\sigma_y\sin(\theta/2)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cos(\theta/2)-i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\sin(\theta/2)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)&0\\0&\cos(\theta/2)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i^2\\i^2&0\end{pmatrix}\sin(\theta/2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\theta/2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

将此算符作用于 $|z,+\rangle$:

$$|\psi_1\rangle = U_y(\theta)|z,+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

3. 第二步转动：绕 z 轴旋转 ϕ

第二步转动算符为 $U_z(\phi) = e^{-i\sigma_z\phi/2}$。

$$U_z(\phi) = I\cos(\phi/2) - i\sigma_z \sin(\phi/2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\phi/2) - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin(\phi/2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) - i\sin(\phi/2) & 0 \\ 0 & \cos(\phi/2) + i\sin(\phi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

将此算符作用于 $|\psi_1\rangle$:

$$|\psi'\rangle = U_z(\phi)|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

这就是经过两步转动后得到的态。

4. 验证 $|\psi'\rangle$ 是 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的正本征态

算符 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 为:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$$

$$= \sigma_x \sin\theta\cos\phi + \sigma_y \sin\theta\sin\phi + \sigma_z\cos\theta$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin\theta\cos\phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin\theta\sin\phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos\theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\phi - i\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

现在我们将 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 作用于 $|\psi'\rangle$:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

计算矩阵乘积的第一个分量:

$$\cos\theta\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} + \sin\theta e^{-i\phi}\sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$$

$$= \cos\theta\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} + \sin\theta\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2}$$

$$= (\cos\theta\cos(\theta/2) + \sin\theta\sin(\theta/2))e^{-i\phi/2}$$

使用三角恒等式 $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$，令 $A=\theta, B=\theta/2$:

$$= \cos(\theta-\theta/2)e^{-i\phi/2} = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}$$

计算矩阵乘积的第二个分量:

$$\sin\theta e^{i\phi}\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} - \cos\theta\sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$$

$$= \sin\theta\cos(\theta/2)e^{i\phi/2} - \cos\theta\sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$$

$$= (\sin\theta\cos(\theta/2) - \cos\theta\sin(\theta/2))e^{i\phi/2}$$

使用三角恒等式 $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$，令 $A=\theta, B=\theta/2$:

$$= \sin(\theta-\theta/2)e^{i\phi/2} = \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$$

所以，

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = 1\cdot|\psi'\rangle$$

这表明 $|\psi'\rangle$ 是算符 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征态，其本征值为 $+1$。因此，$|\psi'\rangle$ 就是 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的正本征态 $|\vec{n},+\rangle$。

通过对 $|z,+\rangle$ 先进行绕 y 轴旋转角度 θ 的操作 $e^{-i\sigma_y\theta/2}$，再进行绕 z 轴旋转角度 ϕ 的操作 $e^{-i\sigma_z\phi/2}$，我们得到的态为:

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

我们已经验证了这个态是 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征值为 $+1$ 的本征态。因此，

$$|\vec{n},+\rangle = e^{-i\sigma_z\phi/2}e^{-i\sigma_y\theta/2}|z,+\rangle$$

证毕。