Quantum Mechanics: Homework 10

Due on November 13,2024 at 3:10pm

Professor Hui Shao

郑晓旸 202111030007

Problem 1

考虑正交完备基 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, 且有 $|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3; |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle\rangle$, 在该表象下，哈密顿算符的矩阵形式写为:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

写出到能量表象的变换矩阵，并计算能量表象下的量子态 $|\alpha\rangle$ 和算符 $\hat{B} \equiv |\beta\rangle\langle\beta|$.

Solution

我们可以通过哈密顿算符的本征态来构造能量表象的变换矩阵。哈密顿算符的本征态为:

$$\begin{aligned} \hat{H}|E_1\rangle &= E_1|E_1\rangle \\ \hat{H}|E_2\rangle &= E_2|E_2\rangle \\ \hat{H}|E_3\rangle &= E_3|E_3\rangle \end{aligned}$$

其中，$E_1 = -1, E_2 = 1, E_3 = 2$。因此，能量表象的变换矩阵为:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \begin{pmatrix} \langle 1|E_1\rangle & \langle 1|E_2\rangle & \langle 1|E_3\rangle \\ \langle 2|E_1\rangle & \langle 2|E_2\rangle & \langle 2|E_3\rangle \\ \langle 3|E_1\rangle & \langle 3|E_2\rangle & \langle 3|E_3\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

我们可以通过能量表象的变换矩阵将量子态 $|\alpha\rangle$ 和算符 $\hat{B}$ 变换到能量表象下。量子态 $|\alpha\rangle$ 的能量表象表示为:

$$|\alpha\rangle_E = \hat{U}|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

算符 $\hat{B}$ 的能量表象表示为:

$$\begin{aligned} \hat{B}_E &= \hat{U}\hat{B}\hat{U}^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problem 2

对于角动量，选择一个合适的表象，写出 $l=1$ 的子空间中，算符 l^2, l_x, l_y, l_z 的矩阵表示。
提示：$l\pm = l_x \pm i l_y$ ，且：

$$l_+ |l,m\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$$
$$l_- |l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,|l,m-1\rangle$$

Solution
我们选择角动量表象，即 $l^2 l_z$ 的共同本征态为 $|l,m\rangle$，其中 $l=1$，$m=-1,0,1$。我们可以写出 l^2 的矩阵表示：

$$\hat{l}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

同样的，我们可以写出 l_z 的矩阵表示：

$$\hat{l}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 l_x 和 l_y 的矩阵表示不是对角矩阵，我们可以通过 l_+ 和 l_- 的定义来求解 l_x 和 l_y 的矩阵表示：

$$l_+ |l,m\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$$
$$l_- |l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,|l,m-1\rangle$$

由此我们可以得到 l_x 和 l_y 的矩阵表示：

$$\hat{l}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{l}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Problem 3

写出动量表象下，动量算符和坐标算符的矩阵元 (要求有推导过程)。

Solution

在动量表象下，粒子的状态 $|\psi\rangle$ 可以表示为动量本征态 $|p\rangle$ 的线性组合，即：

$$|\psi\rangle = \int \psi(p)|p\rangle\, dp$$

动量算符 $\hat{p}$ 作用在动量本征态 $|p\rangle$ 上时满足：

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

因此，动量算符在动量表象下的矩阵元为：

$$\langle p'|\hat{p}|p\rangle = p\delta(p' - p)$$

其中，$\delta(p' - p)$ 是狄拉克　函数，表示动量本征态的正交性。
接下来，坐标算符 $\hat{x}$ 在动量表象下通过与动量算符的对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 定义为：

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$$

因此，坐标算符的矩阵元为：

$$\langle p'|\hat{x}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p' - p)$$

即动量算符和坐标算符在动量表象下的矩阵元为：

$$\langle p'|\hat{p}|p\rangle = p\delta(p' - p), \quad \langle p'|\hat{x}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p' - p)$$

Problem 4

利用完备性关系，写出一维谐振子坐标表象下的波函数 $\psi(x)$，坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$ 变换到能量表象的过程和结果。

Solution

一维谐振子的波函数可以表示为能量本征态 $|n\rangle$ 的线性组合，即：

$$|\psi\rangle = \sum_n \psi_n|n\rangle$$

其中，ψ_n 是波函数的展开系数。利用完备性关系，波函数 $\psi(x)$ 可以表示为：

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n\langle x|n\rangle$$

坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$ 在能量表象下的矩阵元为：

$$\langle n|\hat{x}|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right)$$

$$\langle n|\hat{p}|n'\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} - \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right)$$

Problem 5

设体系有两个彼此不对易的守恒量 F 和 G, 即 $[\hat{F},\hat{H}]=0,[\hat{G},\hat{H}]=0$, 但 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$，证明体系能级一般是简并的，并说明何种情况无简并。

Solution

1. 守恒量与哈密顿量的对易关系：

$$[\hat{F},\hat{H}]=0 \quad 和 \quad [\hat{G},\hat{H}]=0$$

这意味着，$\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 都是哈密顿量的守恒量，因此它们可以在同一个本征基底下对角化。换句话说，体系的本征态可以同时是 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 的本征态。

2. 系统本征态的重叠：

假设 $|E\rangle$ 是哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态，即：

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$$

因为 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 与 $\hat{H}$ 对易，$|E\rangle$ 也可以同时是 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 的本征态。如果 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 的本征值不完全不同，系统的能级 E 会有简并性。

3. 关于 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$ 的影响：

由于 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 不对易，即 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$，我们知道它们不能同时对角化。因此，虽然 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 可以在同一个能量本征态下存在共同本征值，但它们的本征值会依赖于彼此，因此产生简并。换句话说，能量本征态可能会有多个不同的本征态，这些本征态对应相同的能量 E，因此系统的能级会是简并的。

4. 简并的具体情况：

如果 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$，那么 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 在某些本征态上不会有共同本征值。因此，尽管这些本征态仍然是哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态，但它们可能在 $\hat{F}$ 或 $\hat{G}$ 上的本征值不同，从而导致能级的简并。

能级没有简并的情况发生在 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 完全交换的情况下，即：

$$[\hat{F},\hat{G}]=0$$

在这种情况下，$\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 可以同时对角化，因此它们可以在相同的基底中完全对角化。在此情况下，系统的能级不会简并，因为每个本征态对应的能量都是唯一的。综上：

当 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$ 时，体系的能级一般是简并的。当 $[\hat{F},\hat{G}]=0$ 时，体系的能级没有简并。