

量子力学 II 作业 11

郑晓暘

202111030007

2025 年 5 月 22 日

问题 1

考虑一维系统中的有限平移算符 $T(a)$ 与位置算符 \hat{x} 。

1. 计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$ 。
2. 设系统在某时刻的状态为 $|\psi\rangle$ 。当此状态经过平移算符 $T(a)$ 作用后变为 $|\psi'\rangle = T(a)|\psi\rangle$ ，计算位置算符的期望值 $\langle\hat{x}\rangle$ 如何变化。

解答

1. 计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$

有限平移算符 $T(a)$ 的定义是它作用在任意位置本征态 $|x\rangle$ 上时，将其平移 a ：

$$T(a)|x\rangle = |x+a\rangle$$

位置算符 \hat{x} 作用在位置本征态 $|x\rangle$ 上时，其本征值为 x ：

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

我们计算对易式 $[T(a), \hat{x}]$ 作用在一个任意的位罝本征态 $|x'\rangle$ 上（使用 x' 以区别算符 \hat{x} 的符号）：

$$[T(a), \hat{x}]|x'\rangle = (T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a))|x'\rangle$$

分别计算等号右边的两项：

$$T(a)\hat{x}|x'\rangle = T(a)(x'|x'\rangle) = x'T(a)|x'\rangle = x'|x'+a\rangle$$

$$\hat{x}T(a)|x'\rangle = \hat{x}|x' + a\rangle = (x' + a)|x' + a\rangle$$

将这两项相减：

$$\begin{aligned}(T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a))|x'\rangle &= x'|x' + a\rangle - (x' + a)|x' + a\rangle \\ &= (x' - x' - a)|x' + a\rangle \\ &= -a|x' + a\rangle\end{aligned}$$

注意到 $T(a)|x'\rangle = |x' + a\rangle$ ，所以上式可以写为：

$$[T(a), \hat{x}]|x'\rangle = -aT(a)|x'\rangle$$

由于 $|x'\rangle$ 是任意的位置本征态，且位置本征态构成一组完备基，因此上述关系对任意态都成立。故我们可以得到算符之间的关系：

$$[T(a), \hat{x}] = -aT(a)$$

2. 计算 $\langle \hat{x} \rangle$ 在平移后的变化

假设系统原来的状态是 $|\psi\rangle$ ，则位置的期望值为：

$$\langle \hat{x} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle$$

经过平移算符 $T(a)$ 作用后，系统的新状态是 $|\psi'\rangle = T(a)|\psi\rangle$ 。在新状态下，位置的期望值为：

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi'} = \langle \psi' | \hat{x} | \psi' \rangle = \langle \psi | T(a)^\dagger \hat{x} T(a) | \psi \rangle$$

我们知道平移算符 $T(a)$ 可以由动量算符 \hat{p} 生成，其形式为 $T(a) = e^{-i\hat{p}a/\hbar}$ 。由于动量算符 \hat{p} 是厄米算符 ($\hat{p}^\dagger = \hat{p}$)，且 a 是实数，所以平移算符的厄米共轭为：

$$T(a)^\dagger = (e^{-i\hat{p}a/\hbar})^\dagger = e^{i\hat{p}^\dagger a/\hbar} = e^{i\hat{p}a/\hbar} = T(-a)$$

因此，新的期望值表达式变为：

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi'} = \langle \psi | T(-a) \hat{x} T(a) | \psi \rangle$$

现在我们利用第一部分得到的对易式结果来化简 $T(-a)\hat{x}T(a)$ 。我们有 $[T(a), \hat{x}] = T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a) = -aT(a)$ 。在该等式两边左乘 $T(a)^\dagger = T(-a)$ ：

$$T(-a)(T(a)\hat{x} - \hat{x}T(a)) = T(-a)(-aT(a))$$

$$T(-a)T(a)\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -aT(-a)T(a)$$

由于 $T(-a)T(a) = T(a)^\dagger T(a) = I$ (单位算符), 上式变为:

$$I\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -aI$$

$$\hat{x} - T(-a)\hat{x}T(a) = -a$$

整理得到算符关系:

$$T(-a)\hat{x}T(a) = \hat{x} + a$$

将此结果代回到 $\langle \hat{x} \rangle_{\psi'}$ 的表达式中:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi'} = \langle \psi | (\hat{x} + a) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle + \langle \psi | a | \psi \rangle$$

由于 a 是一个常数, 可以提到积分号外:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi'} = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle + a \langle \psi | \psi \rangle$$

如果态 $|\psi\rangle$ 是归一化的, 即 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, 则:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi'} = \langle \hat{x} \rangle_{\psi} + a$$

这表明, 在平移操作 $T(a)$ 之后, 位置算符的期望值相对于原期望值增加了 a 。因此, 位置期望值的变化量为:

$$\Delta \langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{x} \rangle_{\psi'} - \langle \hat{x} \rangle_{\psi} = a$$

问题 2

证明 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的正本征态 $|\vec{n}, +\rangle$ 可以通过对 $|z, +\rangle$ 的两步转动得到:

$$|\vec{n}, +\rangle = e^{-i\sigma_z\phi/2} e^{-i\sigma_y\theta/2} |z, +\rangle$$

其中 $\vec{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 是泡利矩阵。

解答

我们要证明的是, 通过指定的两步么正变换作用于自旋向上的态 $|z, +\rangle$, 可以得到在 \vec{n} 方向上自旋向上的态 $|\vec{n}, +\rangle$ 。

1. 定义与基本算符

泡利矩阵为:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

自旋沿 z 轴正方向的本征态为:

$$|z, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于任意泡利矩阵 σ_k , 我们有 $(\sigma_k)^2 = I$ (单位矩阵)。因此, 旋转算符可以展开为:

$$e^{-i\sigma_k\alpha/2} = I \cos(\alpha/2) - i\sigma_k \sin(\alpha/2)$$

2. 第一步转动: 绕 y 轴旋转 θ

第一步转动算符为 $U_y(\theta) = e^{-i\sigma_y\theta/2}$ 。

$$\begin{aligned} U_y(\theta) &= I \cos(\theta/2) - i\sigma_y \sin(\theta/2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\theta/2) - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i^2 \\ i^2 & 0 \end{pmatrix} \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\theta/2) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将此算符作用于 $|z, +\rangle$:

$$|\psi_1\rangle = U_y(\theta)|z, +\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

3. 第二步转动：绕 z 轴旋转 ϕ

第二步转动算符为 $U_z(\phi) = e^{-i\sigma_z\phi/2}$ 。

$$\begin{aligned}
U_z(\phi) &= I \cos(\phi/2) - i\sigma_z \sin(\phi/2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\phi/2) - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin(\phi/2) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) - i \sin(\phi/2) & 0 \\ 0 & \cos(\phi/2) + i \sin(\phi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将此算符作用于 $|\psi_1\rangle$:

$$|\psi'\rangle = U_z(\phi)|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

这就是经过两步转动后得到的态。

4. 验证 $|\psi'\rangle$ 是 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的正本征态

算符 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 为:

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma} \cdot \vec{n} &= \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z \\
&= \sigma_x \sin \theta \cos \phi + \sigma_y \sin \theta \sin \phi + \sigma_z \cos \theta \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \cos \phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \sin \phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos \theta \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \phi - i \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + i \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

现在我们将 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 作用于 $|\psi'\rangle$:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

计算矩阵乘积的第一个分量:

$$\begin{aligned} & \cos \theta \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} + \sin \theta e^{-i\phi} \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \\ &= \cos \theta \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} + \sin \theta \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ &= (\cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2))e^{-i\phi/2} \end{aligned}$$

使用三角恒等式 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, 令 $A = \theta, B = \theta/2$:

$$= \cos(\theta - \theta/2)e^{-i\phi/2} = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}$$

计算矩阵乘积的第二个分量:

$$\begin{aligned} & \sin \theta e^{i\phi} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} - \cos \theta \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \\ &= \sin \theta \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} - \cos \theta \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \\ &= (\sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2))e^{i\phi/2} \end{aligned}$$

使用三角恒等式 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, 令 $A = \theta, B = \theta/2$:

$$= \sin(\theta - \theta/2)e^{i\phi/2} = \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$$

所以,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = 1 \cdot |\psi'\rangle$$

这表明 $|\psi'\rangle$ 是算符 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的本征态, 其本征值为 +1。因此, $|\psi'\rangle$ 就是 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的正本征态 $|\vec{n}, +\rangle$ 。

通过对 $|z, +\rangle$ 先进行绕 y 轴旋转角度 θ 的操作 $e^{-i\sigma_y \theta/2}$, 再进行绕 z 轴旋转角度 ϕ 的操作 $e^{-i\sigma_z \phi/2}$, 我们得到的态为:

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

我们已经验证了这个态是 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的本征值为 +1 的本征态。因此,

$$|\vec{n}, +\rangle = e^{-i\sigma_z \phi/2} e^{-i\sigma_y \theta/2} |z, +\rangle$$

证毕。