基于自适应模糊 PID 的倒立摆控制

西安交通大学 自动化学院 Lanzer

摘 要 倒立摆是一种绝对不稳定、多变量、强耦合的非线性系统，可以作为一个典型的控制对象对其进行研究。本文基于模糊控制理论和传统 PID 控制方法设计了以倒立摆为被控对象的二输入三输出自适应模糊 PID 控制器，其具有一定的非线性补偿能力，使倒立摆系统稳定并具有良好的动态及稳态特性。

关键词 模糊控制；自适应控制；PID 控制

1. 倒立摆数学模型

系统中小车和摆杆的受力分析如图 1 图 2 所示，其中N和P为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

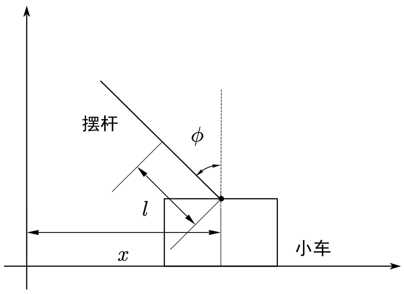


图 1 倒立摆模型

图 2 小车及摆杆受力分析图

系统各参数定义如下：

表 1 系统参数说明

符号	定义
M	小车质量
m	摆杆质量
b	小车摩擦系数
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度
I	摆杆转动惯量
F	加在小车上的力
x	小车位置
ϕ	摆杆与垂直向上方向的夹角
θ	摆杆与垂直向下方向的夹角

根据牛顿运动定律，由小车水平方向的受力分析可得

$$F - b\dot{x} - N = M\ddot{x} \tag{1-1}$$

由摆杆水平方向的受力分析可得

$$N = m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) \tag{1-2}$$

即

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{1-3}$$

将式(1-2)和(1-3)代入(1-1)中，得到系统的第一个运动方程

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \tag{1-4}$$

对摆杆垂直方向进行受力分析，可得方程

$$P - mg = m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) \tag{1-5}$$

即

$$P - mg = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{1-6}$$

力矩平衡方程为

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta} \tag{1-7}$$

将式(1-3)和(1-5)代入(1-7)中，消去N和P，可得第二个运动方程

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta \tag{1-8}$$

设$\theta=\pi+\phi$，假设$\phi\ll 1$，则可作近似处理：$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=-\phi$，$\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=0$.用$u$代表被控对象的输入力$F$，线性化后的系统的两个运动方程为

$$\begin{cases}(I+ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x}\\(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u\end{cases} \tag{1-9}$$

假设初始条件为0，对式(1-9)进行拉普拉斯变换，得到

$$\begin{cases}(I+ml^2)s^2\Phi(s) - mgl\Phi(s) = mls^2X(s)\\(M+m)s^2X(s) + bsX(s) - mls^2\Phi(s) = U(s)\end{cases} \tag{1-10}$$

由式(1-10)中第一个方程，以摆杆角度为输出量，小车位移为输入量的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{X(s)} = \frac{mls^2}{(I+ml^2)s^2 - mgl} \tag{1-11}$$

将式(1-11)代入式(1-10)中的第二个方程，可以得到以摆杆角度为输出量，小车输入作用力u为输入量的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \tag{1-12}$$

式中，$q=(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2$。

系统状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1-13}$$

设系统状态变量分别为：小车位置x，小车速度$\dot{x}$，摆杆的角位置ϕ，摆杆的角速度$\dot{\phi}$. 则由式(1-9)可以得到

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \dfrac{-(I+ml^2)b\dot{x} + m^2gl^2\phi + (I+ml^2)u}{I(M+m)+Mml^2} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \dfrac{-mlb\dot{x} + (M+m)mgl\phi + mlu}{I(M+m)+Mml^2} \end{cases} \tag{1-14}$$

对式(1-14)进行整理，得到系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{(M+m)mgl}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases} \tag{1-15}$$

2. 倒立摆特性分析

2.1 参数设置

设置倒立摆系统仿真模型参数如下：

表 2 倒立摆模型参数

名称	符号	取值
小车质量	M	$1.096\mathrm{kg}$
摆杆质量	m	$0.109\mathrm{kg}$
小车摩擦参数	b	$0.1\mathrm{N/(m\cdot s)}$
摆杆转动轴心到杆质心的长度	l	$0.25\mathrm{m}$
摆杆质量	I	$0.0034\mathrm{kg\cdot m^2}$

将上述参数分别代入式(1-11)、式(1-12)和式(1-15)，可以得到倒立摆系统的系统模型。

以摆杆角度为输出量，小车位移为输入量的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{X(s)}=\frac{0.02725s^2}{0.0102125s^2-0.26705} \tag{2-1}$$

以摆杆角度为输出量，小车加速度为输入量的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)}=\frac{0.02725}{0.0102125s^2-0.26705} \tag{2-2}$$

以摆杆角度为输出量，小车输入作用力u为输入量的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{2.35655s}{s^3+0.0883167s^2-27.9169s-2.30942} \tag{2-3}$$

系统的状态空间方程为

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0883167 & 0.629317 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.235655 & 27.8285 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.883167 \\ 0 \\ 2.35655 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
\end{cases} \tag{2-4}
$$

2.2 稳定性能分析

2.2.1 理论分析

绘制倒立摆系统开环幅相频率特性图如图 3 所示，根据奈奎斯特判据可以判断该系统不稳定。

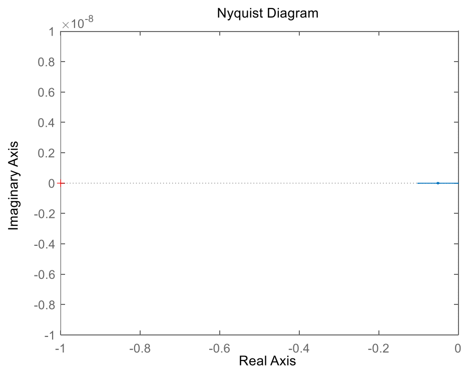


图 3 倒立摆系统奈奎斯特图

2.2.2 仿真验证

在 MATLAB R2021b Simulink 上建立倒立摆仿真控制系统验证倒立摆系统的稳定性，仿真程序如图 4 所示

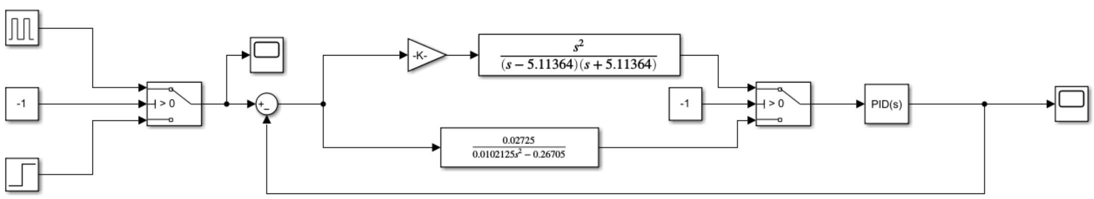


图 4 倒立摆系统仿真程序

对倒立摆系统施加阶跃输入，观察其响应，仿真的结果如图 5 所示

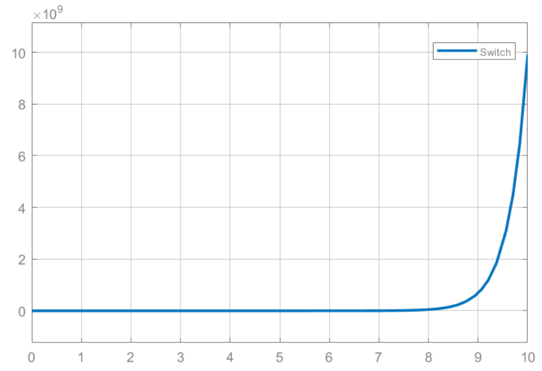


图 5 施加阶跃输入后倒立摆系统的响应

可以看到响应很快便发散，说明倒立摆系统是一个不稳定的系统。

3. 倒立摆自适应模糊 PID 控制

3.1 模糊 PID 控制器结构

由于倒立摆的非线性特性，若对倒立摆单独使用 PID 控制，则系统的稳定性、鲁棒性较差。对倒立摆单独使用模糊控制，则可能存在因人为经验不足使模糊规则数不够，引起控制精度会不理想。因此，结合 PID 控制的广泛性、适用性与模糊控制的智能性、简化系统设计的复杂性，设计一种自适应模糊 PID 控制器。即在无需预先整定 PID 参数的情况下，实现对倒立摆的多状态量的稳定控制。以下主要考虑对摆杆角度θ的控制。

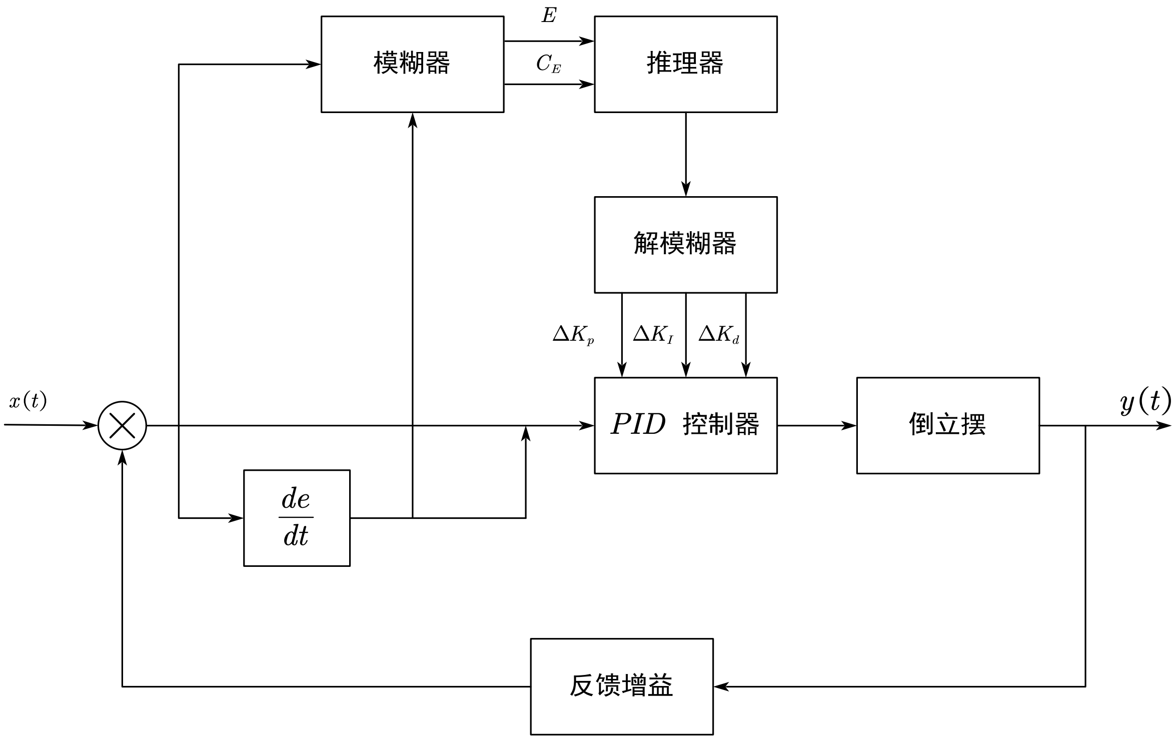


图 6 模糊 PID 控制原理图

3.2 模糊规则的制定

模糊控制器采取两输入三输出的形式，将摆杆角度θ与期望输出的偏差值定义为误差e，将误差以及误差对时间的变化率C_e进行模糊推理后作为控制器的两个输入量，PID 控制器的校正量ΔK_p，ΔK_i，ΔK_d作为 3 个输出量。模糊控制器五个变量的模糊子集设为$\{NB, NM, NS, Z, PS, PM, PB\}$，含义为{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}。

据此，需要制定模糊规则。模糊控制器中每个变量包含七个模糊子集，因此 PID 的每一个参数需要编写 49 条模糊规则。

误差e以及误差的变化率C_e的比值为负时，上升阶段会产生一定超调量。积分环节出现饱和现象，此时应调高比例系数K_p，加大比例环节作用，设置较小的积分系数K_i，减弱积分环节，并取一定数值的微分系数K_d来防止超调量过高。

误差e以及误差的变化率C_e的比值为正时，出现两种情况：当输出未达到设定值便偏离设定值，此时应调高积分系数K_i。比例系数K_p，目的为减小稳态误差；当出现超调量后，输出值第二次未达到设定值，相比于第一次，输出量偏离设定较小，此时，需要增大积分环节系数K_i比增加比例系数K_p后出现超调量的概率小，微分系数K_d取适中值。

误差e以及误差的变化率C_e的比值接近零时，应设置比例系数K_p和积分系数K_i均取较大值，保持系统的运行平稳，同时微分系数K_d取较小值，防止系统出现震荡。

以上述经验作为原则得到 PID 模糊控制规则表如下：

表 3 ΔK_p模糊控制规则表

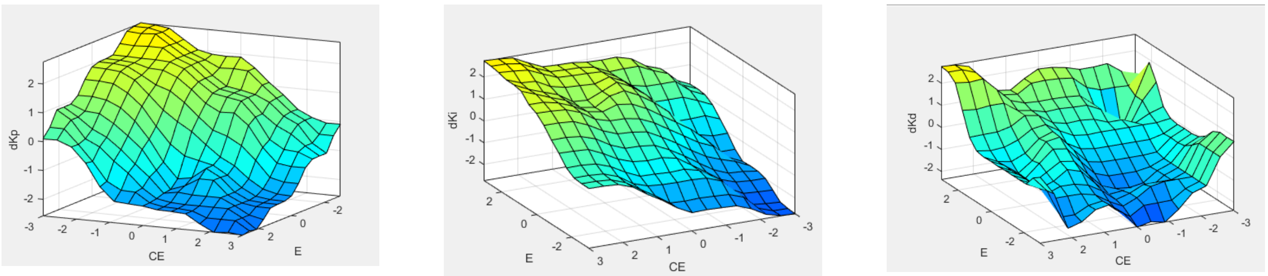
C_E \ E	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	PB	PB	PM	PM	PS	Z	Z
NM	PB	PB	PM	PS	PS	Z	NS
NS	PM	PM	PM	PS	PS	NS	NS
Z	PM	PM	PS	Z	NS	NM	NM
PS	PS	PS	Z	NM	NS	NM	NM
PM	PS	Z	NS	NM	NM	NM	NB
PB	Z	Z	NM	NM	NM	NB	NB

表 4 ΔK_i模糊控制规则表

C_E \ E	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NM	NM	NS	Z	Z
NM	NB	NB	NS	NS	NS	Z	Z
NS	NM	NM	NS	Z	Z	PS	PS
Z	NM	NS	Z	PS	PS	PM	PM
PS	NS	NS	PS	PM	PS	PM	PB
PM	Z	PS	PS	PM	PM	PB	PB
PB	Z	PS	PM	PM	PM	PB	PB

表 5 ΔK_d 模糊控制规则表

C_E \ E	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	PS	NS	NB	NB	NS	NM	PS
NM	PS	NS	NS	NM	NS	NS	Z
NS	Z	NS	NM	NM	Z	NS	Z
Z	Z	NS	NS	NS	PS	NS	Z
PS	Z	Z	Z	Z	PS	Z	Z
PM	PB	NS	PS	PS	PS	PB	PB
PB	PS	PM	PM	PM	PS	PB	PB



(a) ΔK_p **随** E **和** CE **变化**　**(b)** ΔK_i **随** E **和** CE **变化**　**(c)** ΔK_d **随** E **和** CE **变化**

图 7 模糊 PID 控制器输出随 E **和** CE **变化**

模糊 PID 控制器的 K_p，K_i，K_d 值是由其初始值 K_{p0}，K_{i0}，K_{d0} 和模糊控制器输出的修正量 ΔK_p，ΔK_i，ΔK_d 相加而得，即：

$$\begin{cases} K_p = K_{p0} + \Delta K_p \\ K_i = K_{i0} + \Delta K_i \\ K_d = K_{d0} + \Delta K_d \end{cases} \tag{3-1}$$

3.3 隶属函数选取

考虑到高斯型函数灵敏度较高，且函数曲线相对平滑，并可以在论域范围内均匀分布，故将其作为隶属函数。

3.4 解模糊化

误差e以及误差对时间的变化率C_e经过模糊化处理后形成 3 个模糊集合。在倒立摆系统中，模糊集合不能直接作为输出。必须将模糊集合的数值进行相应代数运算，输出准确值才能实行控制。

常用的解模糊化方法有加权平均法、重心法、最大隶属度法、三角模糊数去模糊法、面积平分法等。为了使模糊推理输出值更平滑，即对于输入信号发生微小变化，输出也会得到及时的响应。由于倒立摆系统在临近平衡点的控制中要求具有精度高，响应快等特点，故需要准确性较高的方法解模糊化。重心法相较于其他方法计算结果精度更高，输出更平滑，该算法的原理为：取横坐标与隶属度函数围成的面积的重心作为模糊推理的最终输出值。重心法的一般计算方法为：

$$v_0=\frac{\int_V v\mu_v(v)dv}{\int_V \mu_v(v)dv} \tag{3-2}$$

式中，v是模糊集合的输出元素，$\mu_v(v)$为该输出的隶属函数。对于多输出系统，多元量化级数离散化处理后得到多输出离散域表达式：

$$v_0=\frac{\sum_{k=1}^{n} v_k\mu_k(v_k)}{\sum_{k=1}^{n}\mu_v(v_k)} \tag{3-3}$$

式中，n为输出量化级数的数量。模糊集合解模糊化后得到误差e和误差变化率C_e的精确值即 PID 控制器的修正量ΔK_p，ΔK_i，ΔK_d。最后模糊控制器再将修正值输入至 PID 控制器，实现对系统的自适应控制。

4. 仿真及结果分析

在 MATLAB R2021b Simulink 上建立控制系统对自适应模糊 PID 控制器进行仿真计算并检验控制效果，倒立摆系统的仿真程序如图 8 所示

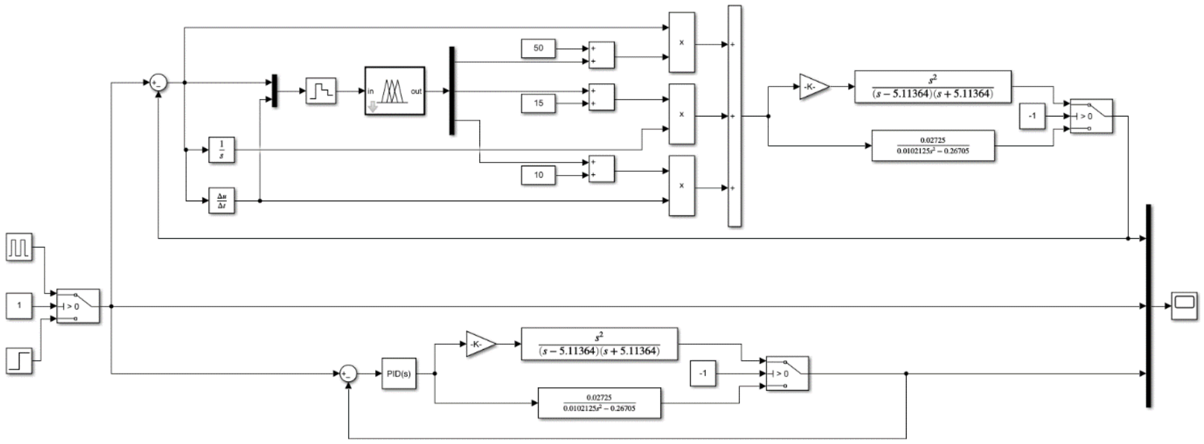
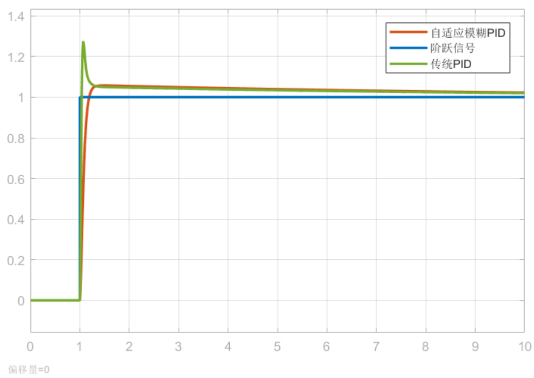


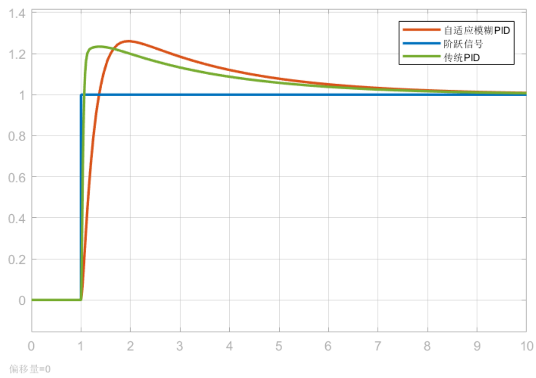
图 8 倒立摆系统运动控制仿真程序

在仿真中同时设置了传统的 PID 控制作为对比实验，自适应模糊 PID 控制的初始值和传统 PID 取值相同，图 9 展示了不同取值和输入时的响应信号。



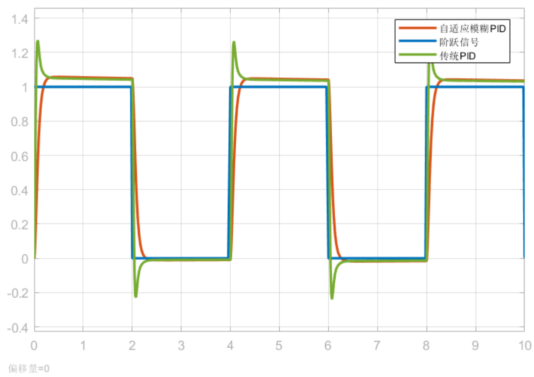
(a)阶跃输入

$K_{p0}=200$，$K_{i0}=20$，$K_{d0}=15$ 下的响应信号



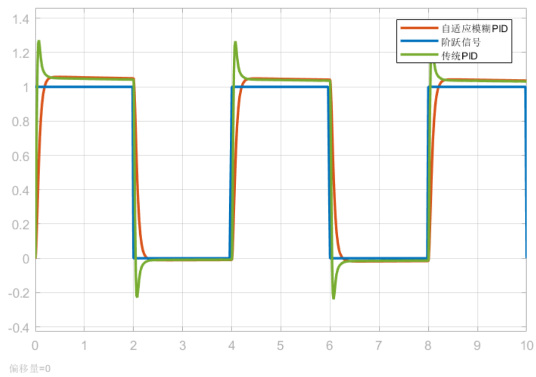
(b)阶跃输入

$K_{p0}=50$，$K_{i0}=15$，$K_{d0}=20$ 下的响应信号



(c)脉冲输入

$K_{p0}=200$，$K_{i0}=20$，$K_{d0}=15$ 下的响应信号



(d)脉冲输入

$K_{p0}=50$，$K_{i0}=15$，$K_{d0}=20$ 下的响应信号

图 9 不同输入和初始值下的系统响应

在微分作用较强时传统 PID 容易引入高频噪声，但自适应模糊 PID 可以有效地抑制噪声扰动，具有一定抗干扰能力。当响应信号和输入信号偏离较大时，自适应模糊 PID 控制在一定程度上表现的不如传统 PID 控制，这可能是因为偏离的越远，就越容易缺少可用的模糊规则，但在实际应用中往往期望响应信号尽可能接近输入信号，这时自适应 PID 控制就比传统 PID 控制表现的要好。